ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΓΑΛΙΑΤΣΑΤΟΥ
ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ
ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΑΘΗΝΑ 2016

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ

ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

Α′ ΕΚΔΟΣΗ 2011
Β′ ΕΚΔΟΣΗ 2016
ISBN: 978-960-337-097-0

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Το 1952 ο Ευγένιος Ευγενίδης (1882-1954) όρισε με τη διαθήκη του τη σύσταση του Ιδρύματος Ευγενίδου, του οποίου ως μοναδικό σκοπό έταξε «νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν νέων ἑλληνικῆς ὑπηκοότητος ἐν τῷ ἐπιστημονικῷ καὶ τεχνικῷ πεδίῳ». Ο ιδρυτής και χορηγός του Ιδρύματος Ευγενίδου ορθά προέβλεψε ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο της Ελλάδος αποτελεί η άρτια κατάρτιση των Ελλήνων τεχνιτών κατά τα πρότυπα της επαγγελματικής εκπαιδεύσεως άλλων ευρωπαϊκών χωρών.

Την 23η Φεβρουαρίου του 1956 εγκρίθηκε η σύσταση του κοινωφελούς Ιδρύματος Ευγενίδου, την διαχείριση του οποίου κατά την ρητή επιθυμία του ιδρυτή του ανέλαβε η αδελφή του Μαριάνθη Σίμου (1895-1981). Τότε ξεκίνησε η υλοποίηση του σκοπού του Ιδρύματος και η εκπλήρωση μιας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου από την Μαριάνθη Σίμου και τους επιστημονικούς συνεργάτες της.

Το έργο της Μαριάνθης Σίμου συνέχισε από το 1981 ο πολύτιμος συνεργάτης και διάδοχος του Ευγενίου Ευγενίδη, Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης (1920-2000). Από το 2000 συνεχιστής του έργου του Ιδρύματος Ευγενίδου έχει αναλάβει ο Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Μία από τις πρώτες δραστηριότητες του Ιδρύματος Ευγενίδου, ευθύς μετά την ίδρυσή του, υπήρξε η συγγραφή και έκδοση κατάλληλων διδακτικών εγχειριδίων για τους μαθητές των τεχνικών σχολών, καθώς διαπιστώθηκε ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητών με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν τα ορθά θεμέλια για την παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό. Καρπός αυτής της δραστηριότητας είναι η Βιβλιοθήκη του Τεχνίτη (1957-1975), η οποία αριθμεί 32 τίτλους, η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού (1962-1975), που περιλαμβάνει 50 τίτλους, η Τεχνική Βιβλιοθήκη (1969-1980) με 11 τίτλους και η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού Βοηθού Χημικού (1971-1973) με 3 τίτλους. Επί πλέον, από το 1977 μέχρι σήμερα έχουν εκδοθεί 171 τίτλοι για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων και 16 για τους μαθητές των Σχολών Μέσης Τεχνικής και Επαγγελματικής εκπαιδεύσεως.

Ξεχωριστή σειρά βιβλίων του Ιδρύματος Ευγενίδου αποτελεί η Βιβλιοθήκη του Ναυτικού (1967 έως σήμερα), η οποία είναι το αποτέλεσμα της συνεργασίας του Ιδρύματος Ευγενίδου με την Διεύθυνση Εκπαιδεύσεως Ναυτικών του Υπουργείου Ναυτιλίας. Η συγγραφή και έκδοση των εκπαιδευτικών εγχειριδίων για τους σπουδαστές των ναυτικών σχολών ανετέθη στο Ίδρυμα Ευγενίδου με την υπ' αριθμ. 61288/5031/8.8.1966 απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και λειτούργησε η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων, η οποία είχε συσταθεί ήδη από το 1958. Η συνεργασία Ιδρύματος Ευγενίδου και Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας ανανεώθηκε με την υπ. αριθμ. Μ2111.1/2/99 υπουργική απόφαση όπως τροποποιήθηκε από την Μ3611.2/05/05/16-12-2005, με την οποία το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή διδακτικών εγχειριδίων για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού.

Στην Βιβλιοθήκη του Ναυτικού περιλαμβάνονται συνολικά 118 τίτλοι μέχρι σήμερα: 27 τίτλοι για τις Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού (1967-1979), 42 τίτλοι για τις Ανώτατες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού (1981-2001), 34 τίτλοι για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού, 9 εγχειρίδια κατευθυνόμενης εκπαιδεύσεως επί πλοίου και 15 μεταφράσεις ναυτικών εγχειριδίων.

Όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Ναυτικού, εκτός του ότι έχουν συγγραφεί σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας των σχολών και ανταποκρίνονται στις ανάγκες των σπουδαστών, είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία. Επί πλέον οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων *καταβάλλουν κάθε προσπάθεια ώστε τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και στις δυνατότητες των σπουδαστών.*

Την περίοδο 2012-2013 το ΥΝΑ με το υπ' αριθμ. Μ3616/01/2012/26-09-2012 έγγραφο ανέθεσε στην Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου την σύσταση ειδική ομάδας εργασίας εμπειρογνωμόνων για την επικαιροποίηση των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών για τις ΑΕΝ, τα ΚΕΣΕΝ και τα ειδικά σχολεία Πλοιάρχων και Μηχανικών, εφαρμόζοντας τις νέες απαιτήσεις εκπαιδεύσεως και πιστοποιήσεως ναυτικών της Διεθνούς Συμβάσεως STCW '78 (Standards of Training, Certification and Watchkeeping for seafarers – Manila amendments 2010). Με βάση τα νέα αναλυτικά προγράμματα για τις ΑΕΝ, τα οποία εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά την χρονιά 2013-2014, ξεκίνησε από το 2014 και η επικαιροποίηση των υφισταμένων διδακτικών εγχειριδίων, προκειμένου αυτά να είναι συμβατά με τις νέες διεθνείς απαιτήσεις.

Με την προσφορά των εκδόσεών του στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα Ευγενίδου συνεχίζει να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση της Ελλάδος, υλοποιώντας επί 60 και πλέον χρόνια το όραμα του ιδρυτή του, αείμνηστου ευεργέτη Ευγενίου Ευγενίδου.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΓΑΛΙΑΤΣΑΤΟΥ
Φυσικού
ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ
Φυσικού
ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Σ. ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΥ
Φυσικού

Β′ ΕΚΔΟΣΗ

ΑΘΗΝΑ
2016

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Α' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται στους σπουδαστές των Ακαδημιών του Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.), είναι διδακτικό εγχειρίδιο και περιέχει τις βασικές έννοιες της Αντοχής Υλικών και παρουσιάζει αναλυτικά τις καταπονήσεις του εφελκυσμού, της θλίψεως, της διατμήσεως, της κάμψεως και της στρέψεως, καθώς και την εκδήλωση λυγισμού. Επίσης, παρουσιάζει την έννοια των σύνθετων καταπονήσεων. Η παρουσίαση περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, τις συνθήκες εμφανίσεως κάθε καταπονήσεως, τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την καταπόνηση, τις αντίστοιχες παραμορφώσεις, τις κατηγορίες προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε σε κάθε καταπόνηση και βασικές εφαρμογές της. Στο βιβλίο περιέχονται επίσης σχετικά παραδείγματα και ασκήσεις.

Κατά τη συγγραφή ακολουθήσαμε το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας του μαθήματος «ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ» που απευθύνεται στην Ειδικότητα των Μηχανικών Ε.Ν. των Α.Ε.Ν., όπως αυτό ορίζεται με την υπ' αριθμ. Μ 3615.1/01/07 Υπουργική Απόφαση «Ωρολόγια και Αναλυτικά Προγράμματα ΑΕΝ/Π–Μ» (Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, ΦΕΚ 1224/17-7-2007, Τεύχος Β).

Πιστεύομε ότι η ανάπτυξη και διάταξη της ύλης των διαφόρων κεφαλαίων είναι τέτοια, ώστε το βιβλίο να είναι χρήσιμο στους σπουδαστές και κατά την εργασία τους επί του πλοίου. Νομίζομε επίσης ότι το βιβλίο θα είναι χρήσιμο και σε όσους ασχολούνται με την Αντοχή των Υλικών.

Εκφράζομε τις θερμές ευχαριστίες μας προς την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την τιμή που μας έκανε να μας αναθέσει τη συγγραφή του παρόντος βιβλίου.

Επίσης, ευχαριστούμε θερμά τον ειδικό επιστημονικό σύμβουλο του Ιδρύματος Ευγενίδου κ. Γ. Ιωαννίδη, Καθηγητή ΕΜΠ, για τις ιδιαίτερα χρήσιμες υποδείξεις και παρατηρήσεις του.

Τέλος, ευχαριστούμε ιδιαίτερα το προσωπικό του Τμήματος Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την άψογη συνεργασία, τον επαγγελματισμό που επέδειξε στην επιμέλεια της έκδοσης του παρόντος, καθώς και για την άοκνη προσπάθειά του για την αρτιότερη έκδοση του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β′ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Η Β′ έκδοση του παρόντος βιβλίου, το οποίο απευθύνεται στους σπουδαστές των Ακαδημιών του Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.), στόχο έχει την επικαιροποίηση και αναπροσαρμογή της Α′ εκδόσεως, ώστε να συνάδει πλήρως με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας του μαθήματος «ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ» της Ειδικότητας των Μηχανικών Ε.Ν. των Α.Ε.Ν.. Το νέο αναλυτικό πρόγραμμα καθορίζεται από την υπ' αριθ. Μ 3615.1/01/13 Υπουργική Απόφαση «Ωρολόγια και Αναλυτικά Προγράμματα ΑΕΝ/Π – Μ» (ΦΕΚ 2303/16-9-2013, Τεύχος Β).

Σκοπός του παρόντος εγχειριδίου είναι να αποκτήσουν οι σπουδαστές των ΑΕΝ τις απαραίτητες θεωρητικές γνώσεις γύρω από τις αλληλεπιδράσεις των δυνάμεων και των καταπονήσεων που προκαλούνται από αυτές ώστε να είναι σε θέση να κατανοούν πλήρως τη λειτουργία των διαφόρων μερών των μηχανών, αλλά και των μηχανών ως ολοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό το βιβλίο εστιάζεται στις βασικές έννοιες της Αντοχής Υλικών και παρουσιάζει αναλυτικά τις καταπονήσεις του εφελκυσμού, της θλίψεως, της διατμήσεως, της κάμψεως και της στρέψεως, την εκδήλωση λυγισμού, καθώς και τις σύνθετες καταπονήσεις. Ειδικότερα, καλύπτει, μεταξύ άλλων, τις συνθήκες εμφανίσεως κάθε καταπονήσεως, τις μαθηματικές σχέσεις που την περιγράφουν και τις παραμορφώσεις που τη συνοδεύουν. Περιλαμβάνει επίσης τις κατηγορίες προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε σε κάθε καταπόνηση παραθέτοντας σειρά παραδειγμάτων και ασκήσεις για την καλύτερη κατανόησή τους.

Πιστεύουμε ότι η ανάπτυξη και η διάταξη της ύλης των κεφαλαίων της παρούσας εκδόσεως είναι τέτοια, ώστε να καθιστά ευκολότερη τη σύμφωνη με τα οριζόμενα από το νέο αναλυτικό πρόγραμμα του μαθήματος της «ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ» διδασκαλία του από τους διδάσκοντες καθηγητές και την παρακολούθησή του από τους σπουδαστές των Α.Ε.Ν.. Πιστεύουμε επίσης ότι η νέα έκδοση του βιβλίου εξακολουθεί να είναι χρήσιμη σε όσους αναγνώστες ενδιαφέρονται να αποκτήσουν γενικές γνώσεις σχετικά με την Αντοχή των Υλικών και τις απλές και σύνθετες καταπονήσεις.

Ευχαριστούμε θερμά τους Δρ. Βασίλειο Δ. Τσουκαλά, Καθηγητή, Διευθυντή της Σχολής Μηχανικών Α.Ε.Ν. Ασπροπύργου και την κα Δέσποινα Τσαλίκη, Μηχανολόγο Μηχανικό, διδάσκοντες του μαθήματος της «ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ» για τις ιδιαίτερα χρήσιμες προτάσεις και παρατηρήσεις τους για την επικαιροποίηση της πρώτης εκδόσεως του βιβλίου, ώστε η παρούσα έκδοση να καταστεί σύμφωνη με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας και τις απαιτήσεις διδασκαλίας του μαθήματος.

Τέλος, ευχαριστούμε ιδιαίτερα το προσωπικό του Τμήματος Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την άψογη συνεργασία, τον επαγγελματισμό που επέδειξε στην επιμέλεια της εκδόσεως του παρόντος, καθώς και για την άοκνη προσπάθειά του για την αρτιότερη εμφάνιση και της παρούσας εκδόσεως του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο Πρώτο
Εισαγωγικές έννοιες

Κεφάλαιο Δεύτερο
Εφελκυσμός – Θλίψη – Διάτμηση

Κεφάλαιο Τρίτο
Κέντρο βάρους και ροπή αδράνειας

Κεφάλαιο Τέταρτο

Στατική θεωρία της δοκού

Κεφάλαιο Πέμπτο

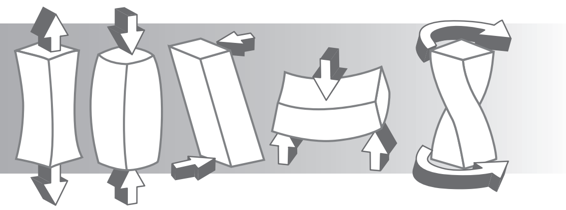
Κάμψη

Κεφάλαιο Έκτο

Στρέψη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικές έννοιες



1.1 Σκοπός και αντικείμενο της Αντοχής Υλικών.

Πολλοί από μας, έχοντας δει τους κάβους των δεμένων πλοίων, μπορεί να έχομε αναρωτηθεί πώς αυτοί έχουν σχεδιαστεί, ώστε να αντέχουν και να μην σπάνε. Από την εμπειρία μας, οι κάβοι μάς θυμίζουν τα συρματόσχοινα. Ξέρομε ότι εάν τραβήξομε τη μία άκρη ενός συρματόσχοινου, του οποίου η άλλη άκρη είναι γερά στερεωμένη, τότε δημιουργείται στο σημείο στερεώσεως μία άλλη δύναμη, η οποία τραβάει το συρματόσχοινο αντίθετα. Σύμφωνα με το αξίωμα της δράσεως-αντιδράσεως της Φυσικής, η δύναμη που δημιουργείται στο σημείο στερεώσεως είναι η αντίδραση της δυνάμεως που ασκούμε στο άλλο άκρο και έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά μ' αυτήν. Η δύναμη που ασκούμε και η αντίδρασή της ισορροπούν μέσω του συρματόσχοινου.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ύλη του συρματόσχοινου αποτελείται από μόρια[1]. Μεταξύ των μορίων ασκούνται ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες τα συγκρατούν. Όταν τραβάμε το συρματόσχοινο από τη μία άκρη, η δύναμη που ασκούμε προσπαθεί να απομακρύνει τα μόρια μεταξύ τους. Μεταξύ των μορίων ασκούνται πρόσθετες ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες προσπαθούν να τα επαναφέρουν στην αρχική τους θέση. Όταν σταματήσομε να τραβάμε το συρματόσχοινο, η αντίδραση, καθώς επίσης και οι πρόσθετες ελκτικές δυνάμεις, μηδενίζονται.

Στο εργαστήριο, με τη χρήση ειδικών μηχανών έλξεως, διαπιστώνομε ότι η άσκηση δυνάμεως στο άκρο του συρματόσχοινου επιφέρει αύξηση του μήκους του. Αν σταματήσει να ασκείται η δύναμη, το συρματόσχοινο επανέρχεται στο αρχικό του μήκος. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται στην εσωτερική έλξη μεταξύ των μορίων του συρματόσχοινου, που αυξομειώνεται ανάλογα με τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν σ' αυτό.

Εάν συνεχίσομε τα πειράματα έλξεως του συρματόσχοινου, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα όριο στην ασκούμενη δύναμη, πέρα από το οποίο παραμένει μια μόνιμη αύξηση του μήκους, που καλείται ***μόνιμη παραμόρφωση***. Αν συνεχίσομε να αυξάνομε και άλλο την ασκούμενη δύναμη, παρατηρούμε ότι το συρματόσχοινο σπάει.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν, μεταξύ άλλων, αντικείμενα του μαθήματος της Αντοχής Υλικών. Η μελέτη της Αντοχής των Υλικών είναι απολύτως απαραίτητη για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση όλων των κατασκευαστικών έργων και βασίζεται σε κάποιες παραδοχές, όπως είναι η ομοιογένεια των σωμάτων, το ευθύγραμμο σχήμα, η σχέση μεταξύ των διαστάσεών τους κ.ο.κ..

Το πρώτο βήμα για τη δημιουργία μιας κατασκευής είναι η επιλογή των υλικών που θα χρησιμοποιηθούν γι' αυτήν. Η επιλογή των υλικών είναι τεράστιας σημασίας, τόσο για την ασφάλεια και τη λειτουργικότητά της, όσο και για το κόστος της. Όλες οι κατασκευές βρίσκονται υπό την επίδραση φορτίων, τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εντάσεων σ' αυτές, που είναι ποικίλες και συνήθως σύνθετες. Για την επιλογή των υλικών μιας κατασκευής λαμβάνονται υπόψη όλες οι δυνάμεις που αυτά θα δεχθούν και οι οποίες πηγάζουν από:

1) Το ίδιο το βάρος της κατασκευής.
2) Το ωφέλιμο φορτίο της κατασκευής.
3) Τη λειτουργία των μηχανών.
4) Τη λειτουργία γερανογεφυρών.
5) Την πίεση κάποιου αερίου ή υγρού που χρησιμοποιείται στην κατασκευή.
6) Τη μεταβολή της θερμοκρασίας.
7) Τα καιρικά φαινόμενα (π.χ. τη δύναμη του αέρα, το βάρος του χιονιού, τη δύναμη προσκρούσεως από το χαλάζι).
8) Το φρενάρισμα.

Τα υλικά που σήμερα χρησιμοποιούν οι κατασκευαστές έργων είναι καλά μελετημένα, με αποτέλεσμα να είναι γνωστές οι ιδιότητές τους και ο τρόπος

---

[1] Για τις ανάγκες της εισαγωγής περιοριζόμαστε στην έννοια των μορίων, παρά το γεγονός ότι στα μέταλλα έχομε κρυσταλλική δομή.

συμπεριφοράς τους όταν φορτιστούν. Οι ιδιότητες των υλικών διακρίνονται σε:

α) ***Φυσικές*** όπως η πυκνότητα, το σημείο τήξεως, ο συντελεστής διαστολής, η θερμική αγωγιμότητα, η ηλεκτρική αγωγιμότητα κ.ά..

β) ***Μηχανικές*** όπως η αντοχή σε θραύση, η σκληρότητα, η ελαστικότητα κ.ά..

γ) ***Τεχνολογικές*** όπως η ολκιμότητα, η ευκολία χυτεύσεως, η ευκολία για συγκεκριμένη κατεργασία (π.χ. δεκτικότητα εκτελέσεως συγκολλήσεων) κ.ά..

Μετά την επιλογή των υλικών ακολουθεί ο προσδιορισμός της μορφής των διατομών κάθε στοιχείου της κατασκευής, καθώς και του προσανατολισμού τοποθετήσεως των διατομών σε σχέση με το φορτίο που θα αντιμετωπίσουν. Ο προσανατολισμός της τοποθετήσεως των διατομών των στοιχείων της κατασκευής είναι πολύ σημαντικός για την κατασκευή, γιατί ο βαθμός αντοχής κάθε στοιχείου εξαρτάται σε πολλές περιπτώσεις κυρίως από την τοποθέτηση της διατομής σε σχέση με το εφαρμοζόμενο φορτίο.

Μετά τον προσδιορισμό της μορφής και του προσανατολισμού των διατομών κάθε στοιχείου της κατασκευής, ακολουθεί ο προσδιορισμός των διαστάσεών της με στόχο αφενός να δημιουργηθεί μια ασφαλής κατασκευή και αφετέρου να γίνει πλήρης εκμετάλλευση των υλικών που θα χρησιμοποιηθούν.

Μία κατασκευή από συγκεκριμένο υλικό θεωρείται ασφαλής όταν τα μέλη της έχουν τέτοιες διαστάσεις, ώστε να αντέχει στα εφαρμοζόμενα σ' αυτήν φορτία. Δηλαδή, μία κατασκευή είναι ασφαλής όταν δεν κινδυνεύει ούτε να θραυσθεί, ούτε να παραμορφωθεί σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μην μπορεί να ανταποκριθεί στον σκοπό της, ούτε να φθαρεί πρόωρα. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι αναφερόμαστε στις διαστάσεις των μελών της κατασκευής (δοκοί, υποστηλώματα κ.λπ.), οι οποίες συνδέονται με τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις και όχι στις διαστάσεις της κατασκευής, όπως είναι το μήκος, το πλάτος και το ύψος ενός κτηρίου.

Η πλήρης εκμετάλλευση του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή σημαίνει τη δημιουργία της με τις μικρότερες δυνατές διαστάσεις που την καθιστούν ασφαλή. Η χρησιμοποίηση μεγαλυτέρων διαστάσεων, πέρα από το γεγονός ότι αυξάνει το κόστος, δεν είναι σκόπιμη, γιατί αυξάνει επί πλέον τον όγκο και το βάρος της κατασκευής. Η σχετική εμπειρική αντίληψη ότι είναι προτιμότερες οι μεγαλύτερες διαστάσεις δεν ευσταθεί.

Το κριτήριο του κόστους είναι πολύ σημαντικό για την επιλογή του υλικού της κατασκευής. Πολλές φορές επιλέγεται ένα υλικό, επειδή είναι αρκετά οικονομικότερο από το βέλτιστο από πλευράς αντοχής.

Η επιλογή αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη χρησιμοποίηση μεγαλυτέρων διατομών, γεγονός που οδηγεί σε κατασκευή με μεγαλύτερο βάρος. Εάν είχε επιλεγεί το βέλτιστο από πλευράς αντοχής υλικό, η κατασκευή θα είχε μικρότερες διατομές και άρα μικρότερο βάρος. Όμως, το κόστος κατασκευής στην περίπτωση αυτή θα ήταν κατά πολύ μεγαλύτερο. Έτσι, επιλέγεται η λύση με το λιγότερο ανθεκτικό υλικό και τις μεγαλύτερες διαστάσεις, που οδηγεί σε μικρότερο κόστος κατασκευής.

Εκτός από το πρόβλημα επιλογής υλικών για την κατασκευή έργου με συγκεκριμένες προδιαγραφές αντοχής φορτίου, στην πράξη απαιτείται και η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, δηλαδή η απάντηση στο ερώτημα *«ποιο είναι το φορτίο που αντέχει η συγκεκριμένη κατασκευή;»*. Ο όρος *συγκεκριμένη κατασκευή* αναφέρεται είτε σε πραγματική κατασκευή είτε σε σχεδιαζόμενη, της οποίας εξετάζεται η καταλληλότητα. Η περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται όταν η επίλυση του αρχικού προβλήματος, δηλαδή του προσδιορισμού της διαστάσεως κατασκευής που αντέχει σε συγκεκριμένο φορτίο, είναι αδύνατη. Έτσι, επιλέγονται κατ' αρχάς κάποιες διαστάσεις για την κατασκευή και στη συνέχεια ελέγχεται εάν η επιλογή αυτή ικανοποιεί τις απαιτήσεις που έχουν τεθεί γι' αυτήν.

Τα ζητήματα που περιγράψαμε παραπάνω αποτελούν το αντικείμενο του παρόντος βιβλίου και αναπτύσσονται διεξοδικά στα επί μέρους κεφάλαιά του. Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζεται η έννοια των παραμορφώσεων και των φορτίων, ορίζεται το μέγεθος της τάσεως και περιγράφονται τα συστήματα και οι μονάδες μετρήσεως των μεγεθών που χρησιμοποιούμε στο παρόν βιβλίο. Επίσης, παρουσιάζονται ο νόμος ελαστικότητας του Hooke και τα διαγράμματα εφελκυσμού και θλίψεως και περιγράφονται η εγκάρσια συστολή και διαστολή που συνοδεύουν τον εφελκυσμό και τη θλίψη, αντίστοιχα. Ακόμη, παρουσιάζεται η διάκριση των υλικών σε όλκιμα και ψαθυρά και ορίζεται η σκληρότητά τους. Περαιτέρω, αναλύεται η επίδραση της θερμοκρασίας και του χρόνου στην αντοχή των υλικών, περιγράφονται τα φαινόμενα της κοπώσεως των υλικών και της συγκεντρώσεως τάσεων και εξηγείται η έννοια της επιφανειακής θλίψεως. Τέλος, ορίζονται οι έννοιες της εντατικής καταστάσεως και της αστοχίας υλικών και παρουσιάζονται τα είδη των καταπονήσεων.

Ο πίνακας 1.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα και τις μονάδες μετρήσεως των μεγεθών*** που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

1.1.1 Η έννοια των παραμορφώσεων.

Όταν σ' ένα σώμα εφαρμόζεται μία δύναμη, τότε αλλάζει η μορφή του και λέμε ότι παραμορφώνεται. Αλλαγή της μορφής του σώματος σημαίνει να αυξηθεί ή να ελαττωθεί το μήκος του, να στραφεί, να καμπυλωθεί κ.ο.κ..

Η αλλαγή της μορφής ενός σώματος όταν σε αυτό εφαρμόζεται δύναμη ονομάζεται ***παραμόρφωση.***

Παραμόρφωση παρουσιάζεται σε όλα τα στερεά σώματα, όσο μικρή και αν είναι η δύναμη που εφαρμόζεται σ' αυτά. Στερεό σώμα που να μην παραμορφώνεται δεν υπάρχει. Σε κάποια υλικά η παραμόρφωση δεν διακρίνεται διά γυμνού οφθαλμού και δεν μπορεί να μετρηθεί με τα συνηθισμένα μέσα. Ωστόσο, η αδυναμία παρατηρήσεως της παραμορφώσεως δεν σημαίνει ότι αυτή δεν υπάρχει· υπάρχει και μάλιστα μπορούμε να τη μετρήσομε με χρήση ειδικών για τον σκοπό αυτόν οργάνων ακριβείας. Για παράδειγμα, η παραμόρφωση σωμάτων κατασκευασμένων από λάστιχο είναι εμφανής διά γυμνού οφθαλμού. Αντίθετα, η παραμόρφωση σωμάτων από χάλυβα ή από άλλο σκληρό υλικό διακρίνεται μόνο με χρήση ειδικών οργάνων ακριβείας.

Ο βαθμός παραμορφώσεως ενός σώματος εξαρτάται από τους εξής παράγοντες:

1) ***Το είδος του υλικού του σώματος***. Όλα τα υλικά δεν παραμορφώνονται το ίδιο. Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, παραμορφώνονται διαφορετικά ανάλογα με το υλικό απ' το οποίο είναι κατασκευασμένα (π.χ. μεγαλύτερη παραμόρφωση παρουσιάζει μία ράβδος αλουμινίου από μία ράβδο χάλυβα).

2) ***Τις διαστάσεις του σώματος.*** Δύο σώματα από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, παραμορφώνονται διαφορετικά ανάλογα με τις διαστάσεις τους (π.χ. μία πιο χονδρή ράβδος αλουμινίου παραμορφώνεται λιγότερο από μία πιο λεπτή).

3) ***Το μέγεθος των εφαρμοζομένων δυνάμεων (φορτίων).*** Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο διαφορετικές δυνάμεις, παραμορφώνονται διαφορετικά.

4) ***Τη μορφή της διατομής.*** Δύο σώματα από

Πίνακας 1.1
Σύμβολα και μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Ανηγμένη παραμόρφωση (επιμήκυνση/επιβράδυνση)	ε	Αδιάστατο
Αριθμός κύκλων φορτίσεως	N	Αδιάστατο
Αύξηση/Ελάττωση διαστάσεως διατομής σώματος	Δb	cm, mm
Διάσταση διατομής	b	cm, mm
Διατμητική (πλάγια) τάση	τ	N/cm^2, N/mm^2
Δύναμη	F	N
Εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση	ε_g	Αδιάστατο
Επιμήκυνση/επιβράχυνση	Δl	cm, mm
Επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση	$p_{\varepsilon\pi}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση	$\sigma_{\varepsilon\pi}$ ή $\tau_{\varepsilon\pi}$	N/cm^2, N/mm^2
Εμβαδόν διατομής	A	cm^2, mm^2
Επιφανειακή πίεση	p	N/cm^2, N/mm^2
Ημιάξονες ελλείψεως	α, β	cm, mm
Λόγος Poisson	μ	Αδιάστατο
Μέγιστη τάση	σ_{max}	N/cm^2, N/mm^2
Μεταβολή θερμοκρασίας	$\Delta\theta$	^oC
Μέτρο ελαστικότητας	E	N/cm^2, N/mm^2
Μήκος	l	cm, mm
Ορθή τάση	σ	N/cm^2, N/mm^2
Όριο αναλογίας	σ_P	N/cm^2, N/mm^2
Όριο αντοχής εν θερμώ	$\sigma_{\alpha,\theta,t}$, $\sigma_{\theta\rho,\theta,t}$	N/cm^2, N/mm^2
Όριο διαρροής	σ_S	N/cm^2, N/mm^2
Όριο ελαστικότητας	σ_E	N/cm^2, N/mm^2
Όριο θραύσεως	σ_B	N/cm^2, N/mm^2
Παραμόρφωση θραύσεως	ε_Γ	Αδιάστατο
Σκληρότητα κατά Brinel	HB	N/cm^2, N/mm^2
Σκληρότητα κατά Rockwell	HRC ή HRB	μm
Σκληρότητα κατά Vickers	HV	N/cm^2, N/mm^2
Σταθερά Poisson	m	Αδιάστατο
Συντελεστής ασφαλείας	ν	Αδιάστατο

(συνεχίζεται)

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Συντελεστής ασφαλείας έναντι διαρροής	v_S	Αδιάστατο
Συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας	v_E	Αδιάστατο
Συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως	v_B	Αδιάστατο
Συντελεστής θερμικής διαστολής	α	1/°C
Συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων	k	Αδιάστατο
Τάση θραύσεως	σ_Γ, $\sigma_{\Theta\rho}$	N/cm^2, N/mm^2
Τεχνικό όριο διαρροής	$\sigma_{0,2}$	N/cm^2, N/mm^2
Τεχνικό όριο ελαστικότητας	$\sigma_{0,01}$	N/cm^2, N/mm^2

το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά έχουν διαφορετική μορφή διατομής, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.

5) ***Τον προσανατολισμό της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση του φορτίου.*** Δύο σώματα με την ίδια διατομή, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις, αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό ως προς τη διατομή, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση, ανάλογα με τον τρόπο τοποθετήσεως της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση της δυνάμεως. Για παράδειγμα, εάν έχομε δυνάμεις που εφαρμόζονται κάθετα στη διατομή μιας ράβδου, τότε προκαλείται μεταβολή του μήκους της ράβδου, ενώ αν εφαρμόζονται παράλληλα στη διατομή της ράβδου, τότε οι δυνάμεις αυτές τείνουν να κόψουν τη ράβδο.

6) ***Τον τρόπο στηρίξεως***. Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά στερεώνονται διαφορετικά, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.

7) ***Το μέγεθος της θερμοκρασιακής μεταβολής***. Δύο σώματα ιδίων διαστάσεων, από το ίδιο υλικό, στα οποία ασκούνται οι ίδιες ακριβώς δυνάμεις και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά βρίσκονται σε διαφορετική κατάσταση θερμοκρασίας, παρουσιάζουν διαφορετική παραμόρφωση.

1.1.2 Η έννοια των φορτίων.

Οι δυνάμεις που προκαλούν τις παραμορφώσεις στις κατασκευές αντιπροσωπεύουν τα φορτία που ενεργούν σ' αυτές. Τα φορτία διακρίνονται με βάση κάποια κριτήρια σε κατηγορίες. Συγκεκριμένα, για τα σημαντικότερα από τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται, έχομε τους ακόλουθους διαχωρισμούς:

1) Με κριτήριο το αν τα φορτία ασκούνται κατά μόνιμο τρόπο ή όχι, διακρίνονται σε ***σταθερά*** και ***μεταβλητά***. Τα σταθερά ασκούνται κατά μόνιμο τρόπο. Αντίθετα τα μεταβλητά χαρακτηρίζονται από τη μεταβολή του μεγέθους τους με το χρόνο.

2) Με κριτήριο τον χρόνο εντός του οποίου τα φορτία ενεργούν, διακρίνονται σε ***στατικά***, ***δυναμικά*** και ***κρουστικά***. Τα στατικά φορτία εξασκούνται ήπια (όχι απότομα), δηλαδή σταδιακά από τη μηδενική μέχρι την τελική τιμή τους μέσα σε ικανό χρονικό διάστημα. Τα δυναμικά ασκούνται μέσα σε βραχύ χρονικό διάστημα, ενώ τα κρουστικά ενεργούν σε πάρα πολύ μικρό χρόνο.

3) Με κριτήριο τη μεταβολή της θέσεώς τους, τα φορτία διακρίνονται σε ***ακίνητα*** και ***κινητά***. Ακίνητα ονομάζονται τα φορτία των οποίων η θέση παραμένει σταθερή με τον χρόνο. Αντίθετα, κινητά ονομάζονται τα φορτία των οποίων η θέση μεταβάλλεται με τον χρόνο.

4) Με κριτήριο την έκταση στην οποία ενεργούν, τα φορτία διακρίνονται σε ***συγκεντρωμένα*** και ***κατανεμημένα***. Τα συγκεντρωμένα φορτία ενεργούν σε πολύ μικρό τμήμα της κατασκευής, τόσο μικρό που θεωρείται σημείο. Τα κατανεμημένα φορτία ενεργούν σ' έναν χώρο, σε μία επιφάνεια ή σε μία γραμμή. Η κατανομή των φορτίων μπορεί να είναι ομοιόμορφη ή όχι.

1.1.3 Η έννοια των τάσεων.

Όπως ήδη αναφέραμε, κάθε σώμα αποτελείται από μόρια, τα οποία έλκονται μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να μένουν ενωμένα απαρτίζοντας ένα σώμα. Αν σ' ένα σώμα ενεργήσει μία εξωτερική δύναμη, τότε τα μόρια του σώματος αναπτύσσουν εσωτερικές δυνάμεις (βλ. παράγρ. 1.12).

Τάση[2] ονομάζεται η συνισταμένη των εσωτερι-

[2] Πρέπει να επισημανθεί ότι η τάση δεν είναι διανυσματικό μέγεθος και κατά συνέπεια δεν ισχύει γι' αυτήν ο διανυσματικός λογισμός.

κών δυνάμεων που αναπτύσσουν τα μόρια ενός σώματος ανά μονάδα επιφάνειάς του, όταν στο σώμα ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις.

Θεωρούμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις εξεταζόμενες επιφάνειες. Από τις διάφορες επιφάνειες που μπορεί να μελετήσει κάποιος σ' ένα σώμα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην αντοχή υλικών παρουσιάζουν οι διατομές του.

Με κριτήριο τη διεύθυνση των δυνάμεων ως προς τις διατομές στις οποίες ενεργούν, οι τάσεις διακρίνονται σε ***ορθές*** και ***διατμητικές*** ή ***πλάγιες*** ή ***εγκάρσιες.***

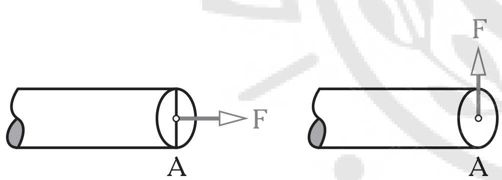
1.1.4 Ορθές τάσεις.

Όταν η εσωτερική δύναμη είναι κάθετη στη διατομή ενός σώματος, τότε οι τάσεις που αναπτύσσονται ονομάζονται ***ορθές*** και συμβολίζονται με σ.

Αν ονομάσομε F την εσωτερική δύναμη που αναπτύσσεται κάθετα στη διατομή ενός σώματος, [σχ. 1.1α(α)] και Α το εμβαδόν της διατομής, τότε η ορθή τάση δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{F}{A} . \tag{1.1}$$

Η εσωτερική δύναμη F που αναπτύσσεται κάθετα στη διατομή ενός σώματος ονομάζεται ***ορθή δύναμη*** (βλ. παράγρ. 4.3).



(α) (β)

Σχ. 1.1α

Ανάπτυξη (α) ορθών τάσεων (β) διατμητικών τάσεων.

1.1.5 Διατμητικές ή πλάγιες ή εγκάρσιες τάσεις.

Όταν η εσωτερική δύναμη δρα μέσα στο επίπεδο της διατομής ενός σώματος, τότε οι τάσεις που αναπτύσσονται ονομάζονται ***διατμητικές*** ή ***πλάγιες ή εγκάρσιες*** και συμβολίζονται με τ.

Αν ονομάσομε F την εσωτερική δύναμη που δρα μέσα στο επίπεδο της διατομής ενός σώματος, [σχ. 1.1α(β)] και Α το εμβαδόν της διατομής, τότε η διατμητική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{F}{A} . \tag{1.2}$$

Η σχέση (1.2) ισχύει μόνο για ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών τάσεων επί της διατομής. Ωστόσο, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες δεν έχομε ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών τάσεων.

Η εσωτερική δύναμη F που δρα μέσα στο επίπεδο της διατομής ενός σώματος ονομάζεται ***τέμνουσα δύναμη*** (βλ. παράγρ. 4.3).

1.1.6 Μονάδες μετρήσεως της τάσεως.

Η τάση έχει μονάδες μετρήσεως το $1\ N/cm^2$, το $1\ N/mm^2$, το $1\ kp/cm^2$ και το $1\ kp/mm^2$. Η μονάδα kp/cm^2 ονομάζεται και ***τεχνική ατμόσφαιρα***. Άλλες μονάδες μετρήσεως της τάσεως που χρησιμοποιούνται είναι η $1\ lb/ft^2$, η $1\ lb/m^2$ και η $1\ lb/in^2$. Η μονάδα lb/in^2 αναφέρεται και ως psi.

Παράδειγμα 1.

Η εσωτερική δύναμη που δρα κάθετα σε ορθογώνια διατομή διαστάσεων 40 cm · 20 cm έχει μέγεθος F = 10.000 *N*.

1) Στη διατομή αναπτύσσεται ορθή ή διατμητική τάση;

2) Να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται.

Λύση.

1) Επειδή η δύναμη είναι κάθετη στη διατομή, η τάση που αναπτύσσεται είναι ορθή.

2) Το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου είναι: $A = 40\ cm \cdot 20\ cm = 800\ cm^2$.

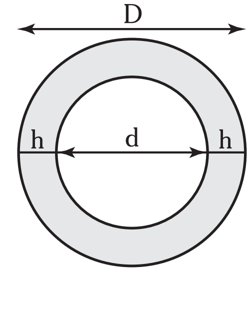
Η ορθή τάση που αναπτύσσεται υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{10.000\ N}{800\ cm^2} = 12{,}5 \frac{N}{cm^2} .$$

Παράδειγμα 2.

Στη διατομή του σχήματος 1.1β που έχει εξωτερική διάμετρο D = 20 cm και πάχος διατομής h = 4 cm αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη F = 5.000 N μέσα στο επίπεδο της διατομής.

1) Τι είδους τάση αναπτύσσεται στη διατομή;



Σχ. 1.1β

2) Να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται.

Λύση.

1) Επειδή η δύναμη δρα στο επίπεδο της διατομής, η αναπτυσσόμενη τάση είναι διατμητική.

2) Η εσωτερική διάμετρος d της κυκλικής διατομής είναι: d = D – 2 h = 20 cm – 2 · 4 cm = 12 cm.

Έτσι, το εμβαδόν της επιφάνειας είναι:

$$A = \pi\frac{D^2}{4} - \pi\frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(20^2\,cm^2 - 12^2\,cm^2) = 200{,}96 cm^2$$

Η διατμητική τάση που αναπτύσσεται υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{5.000\ N}{200{,}96\ cm^2} = 24{,}88\frac{N}{cm^2}.$$

1.1.7 Συστήματα και μονάδες μετρήσεως.

Συστήματα μετρήσεως που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση μεγεθών είναι τα ακόλουθα:

1) Το Διεθνές Σύστημα (SI)[3].
2) Το Σύστημα C.G.S[4].
3) Το Τεχνικό Σύστημα (Τ.Σ.) και
4) το Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα.

Οι ***μονάδες μετρήσεως*** του ***μήκους***, του ***εμβαδού*** και της ***δυνάμεως***, παρουσιάζονται στον πίνακα 1.1.2.

Για τις μετατροπές ισχύουν οι σχέσεις:

1 kp = 9,81 N, 1 lb = 0,453 kp, 1μm = 10^{-6} m

1 m = 3,28 ft, 1 cm = 0,39 in.

Επίσης, η δύναμη μετρείται σε τόνους, αγγλικούς και μετρικούς. Ισχύει ότι:

Πίνακας 1.1.2
Μεγέθη και μονάδες μετρήσεως.

Μέγεθος	*Διεθνές Σύστημα*	*C.G.S.*	*Τεχνικό Σύστημα*	*Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα*
Μήκος	1 m	1 cm	1 m	1 ft
Εμβαδόν	1 m^2	1 cm^2	1 m^2	1 ft^2
Δύναμη	1 N (Νιούτον)	1 dyn	1kp (Κιλοπόντ)	1lb (λίμπρα)

1) 1 τόνος (ton) = 1.000 kp
2) 1 αγγλικός τόνος = 2.240 lb και
3) 1 μετρικός τόνος = 2.200 lb.

Στις επόμενες παραγράφους του βιβλίου παραθέτομε τις μονάδες μετρήσεως στα ανωτέρω συστήματα κάθε νέου μεγέθους που παρουσιάζομε.

Παράδειγμα 3.

1) Δίνεται δύναμη ίση με 3 αγγλικούς τόνους. Να μετατραπεί η δύναμη αυτή σε kp και σε N.

2) Δίνεται απόσταση 15 ft. Να μετατραπεί σε m και cm.

Λύση.

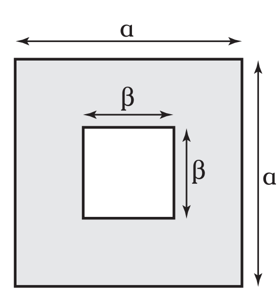
1) Επειδή 1 αγγλικός τόνος = 2.240 lb και 1 lb = 0,453 kp, έχομε: 3 αγγλικοί τόνοι = 3 · 2240 lb = = 6.720 lb = 6.720 · 0,453 kp = 3.044,2 kp = 3.044,2 · 9,81 N = 29.863,2 N.

2) Επειδή 1 m = 3,28 ft ή 1 ft = 0,305 m και 1 m = 100 cm, έχομε: 15 ft = 15 · 0,305 m = 4,57 m = 4,57 · 100 cm = 457 cm.

Ασκήσεις.

1. *Η εσωτερική δύναμη που δρα κάθετα σε τετραγωνική διατομή πλευράς 30 cm έχει μέγεθος F = 90.000 N.*
α) Στη διατομή αναπτύσσεται ορθή ή διατμητική τάση;
β) Να υπολογιστεί η τάση αυτή.

2. *Στη διατομή του σχήματος 1.1γ αναπτύσσεται εσωτερική δύναμη F = 40.000 N παράλληλα στη διατομή. Δίνεται α = 12 cm και β = 4 cm.*



Σχ. 1.1γ

[3] Το σύστημα SI (***S***ystème ***I***nternational d' Unités) επικρατεί σήμερα παγκοσμίως. Με ελάχιστες εξαιρέσεις σε κάποιες χώρες είναι το μόνο σύστημα μετρήσεων που χρησιμοποιείται στην πράξη.

[4] Το όνομα του συστήματος προκύπτει από τα αρχικά των μονάδων ***C***entimeter, ***G***ram και ***S***econd, οι οποίες αποτελούν τις βασικές μονάδες μετρήσεως του συστήματος για τα μεγέθη του μήκους, της μάζας και του χρόνου αντίστοιχα.

α) Τι είδους τάση αναπτύσσεται στη διατομή;
β) Να υπολογιστεί η τάση αυτή.

3. *α) Δίνεται δύναμη ίση με 3 μετρικούς τόνους. Να μετατραπεί η δύναμη αυτή σε kp και σε N.*
β) Δίνεται απόσταση 12 in. Να μετατραπεί σε m και cm.

1.2 Νόμος ελαστικότητας του Hooke.

Το 1678 ο Robert Hooke εκτέλεσε σειρά πειραμάτων σε σπειροειδή ελατήρια, προκειμένου να κατανοήσει τους παράγοντες, από τους οποίους εξαρτάται η επιμήκυνσή τους όταν σε αυτά ενεργεί εξωτερική δύναμη. Σε ανάλογα συμπεράσματα με τα πειράματα του Hooke καταλήγομε εάν εκτελέσομε πειράματα σε διάφορες ράβδους που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το μήκος, τη διατομή και το είδος του υλικού, όταν σ' αυτές ενεργεί δύναμη (φορτίο) εφελκυσμού (βλ. παράγρ. 1.3). Τα συμπεράσματα αυτά είναι τα εξής:

1) Η επιμήκυνση Δl, που προκαλείται σε μια εφελκυόμενη ράβδο, είναι ανάλογη με το φορτίο F, που ενεργεί στη ράβδο. Δηλαδή, εάν διπλασιαστεί το φορτίο F, τότε διπλασιάζεται η επιμήκυνση Δl, εάν τριπλασιαστεί το φορτίο F, τότε τριπλασιάζεται η επιμήκυνση Δl κ.ο.κ.. Η αναλογία φορτίου και επιμηκύνσεως ισχύει μέχρι ένα ορισμένο όριο (βλ. παράγρ. 1.3).

2) Η επιμήκυνση Δl που προκαλείται σε μια εφελκυόμενη ράβδο είναι ανάλογη με το μήκος l της ράβδου. Δηλαδή, εάν φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο μήκους l επιμήκυνση Δl, το ίδιο φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο (από το ίδιο υλικό και με την ίδια διατομή με την πρώτη) μήκους 2l επιμήκυνση $2\Delta l$, σε μία ράβδο (από το ίδιο υλικό και με την ίδια διατομή με την πρώτη) μήκους 3l επιμήκυνση $3\Delta l$ κ.ο.κ.

3) Η επιμήκυνση Δl που προκαλείται σε μια εφελκυόμενη ράβδο είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη διατομή A της ράβδου. Δηλαδή, εάν φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο διατομής A επιμήκυνση Δl, το ίδιο φορτίο F προκαλεί σε μία ράβδο (από το ίδιο υλικό και με το ίδιο μήκος με την πρώτη) διατομής 2A επιμήκυνση $\Delta l/2$, σε μία ράβδο (από το ίδιο υλικό και με το ίδιο μήκος με την πρώτη) διατομής 3A επιμήκυνση $\Delta l/3$ κ.ο.κ.

4) Η επιμήκυνση Δl που προκαλείται από το ίδιο φορτίο F σε δύο ράβδους με το ίδιο μήκος και την ίδια διατομή είναι διαφορετική και εξαρτάται από τη φύση του υλικού κάθε ράβδου. Η σχέση υλικού και επιμηκύνσεως εκφράζεται με μια χαρακτηριστική για κάθε υλικό σταθερά που ονομάζεται ***μέτρο ελαστικότητας***, συμβολίζεται με το γράμμα E και μετρείται σε N/cm^2 ή kp/cm^2. Ο πίνακας 1.2 παρουσιάζει ***τιμές*** του ***μέτρου ελαστικότητας*** για διάφορα υλικά.

Πίνακας 1.2
Τιμές του μέτρου ελαστικότητας για διάφορα υλικά.

Είδος υλικού	***Μέτρο ελαστικότητας E (kp/cm^2)***	***Είδος υλικού***	***Μέτρο ελαστικότητας E (kp/cm^2)***
Χάλυβας	$2,1 \cdot 10^6$	Δερμάτινος ιμάντας	1.250
Χυτοσίδηρος	$1 \cdot 10^6$	Ελαστικό	έως 80
Χαλκός	$1,2 \cdot 10^6$	Νάιλον	$2,8 \cdot 10^4$
Αλουμίνιο	$7,2 \cdot 10^5$	Γρανίτης	$1,3 \cdot 10^5$
Ορείχαλκος	$8 \cdot 10^5$	Ξύλο (παράλληλα στις ίνες)	10^5
Μαγνήσιο	$4,4 \cdot 10^5$	Ξύλο (κάθετα στις ίνες)	10^4

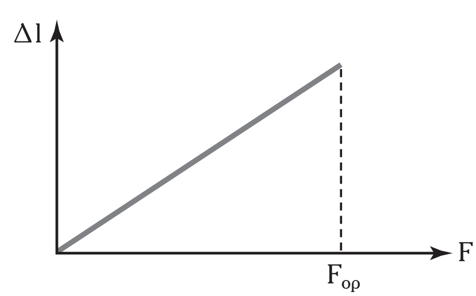
Τα ανωτέρω αποτελέσματα των πειραμάτων οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου νόμου:

Η επιμήκυνση Δl μιας εφελκυόμενης ράβδου είναι ανάλογη με το φορτίο εφελκυσμού F, ανάλογη με το μήκος της ράβδου l, αντιστρόφως ανάλογη της διατομής A και αντιστρόφως ανάλογη του μέτρου ελαστικότητας E του υλικού της ράβδου.

Ο νόμος αυτός ονομάζεται ***Νόμος του Hooke*** ή ***Νόμος ελαστικότητας*** και εκφράζεται με τη σχέση:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E}. \quad (1.3)$$

Το σχήμα 1.2 παρουσιάζει τη γραφική παράσταση του νόμου του Hooke για συγκεκριμένη ράβδο. Από το σχήμα βλέπομε ότι η σχέση μεταξύ της επι-



Σχ. 1.2
Γραφική παράσταση του νόμου του Hooke για συγκεκριμένη ράβδο.

μηκύνσεως της ράβδου Δl και του εφαρμοζόμενου φορτίου F, είναι γραμμική, δηλαδή η επιμήκυνση της ράβδου είναι ανάλογη του φορτίου.

Πρέπει να σημειώσομε ότι ο Νόμος του Hooke ισχύει μέχρι κάποιο όριο φορτίου F_{op}, όπως φαίνεται και από το σχήμα 1.2 και παύει να ισχύει όταν οι δυνάμεις F αρχίζουν να γίνονται σχετικά μεγάλες και συγκεκριμένα μεγαλύτερες από το όριο φορτίου. Επομένως, πριν την εφαρμογή του νόμου ***θα πρέπει να ελέγχομε εάν ο Νόμος εφαρμόζεται.*** Τα όρια εφαρμογής του Νόμου του Hooke αναπτύσσονται στην παράγραφο 1.3.

– Ανηγμένη επιμήκυνση.

Ως ***ανηγμένη*** (ή ***ειδική***) ***επιμήκυνση*** ε ορίζομε την επιμήκυνση που δημιουργείται σε μία μονάδα μήκους μιας εφελκυόμενης ράβδου. Δηλαδή, η ανηγμένη επιμήκυνση ε παρέχεται από το λόγο της επιμηκύνσεως Δl προς το μήκος l της ράβδου:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (1.4)$$

Η ανηγμένη επιμήκυνση είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Πολλές φορές εκφράζεται ως ποσοστό. Για παράδειγμα ισούται με 2% όταν ράβδος με αρχικό μήκος 100 cm αποκτήσει λόγω της εφελκυστικής δυνάμεως μήκος 102 cm.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ορισμού της ανηγμένης επιμηκύνσεως και τη σχέση ορισμού της τάσεως (1.1), ο Νόμος του Hooke λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow \Delta l \cdot A \cdot E = F \cdot l \Leftrightarrow \frac{\Delta l}{l} \cdot E = \frac{F}{A}$$

και τελικά

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \qquad (1.5)$$

Δηλαδή, η ανηγμένη επιμήκυνση σε μία εφελκυόμενη ράβδο είναι ανάλογη με την τάση που ενεργεί σ' αυτήν.

Επίσης, η εξίσωση (1.5) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μέτρο ελαστικότητας εκφράζει τη δύναμη που αναπτύσσεται στη μονάδα επιφάνειας, όταν η ανηγμένη επιμήκυνση ισούται με τη μονάδα.

Γενικότερα, όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια, ο Νόμος του Hooke τυγχάνει ευρείας εφαρμογής στα φαινόμενα της Αντοχής Υλικών. Ωστόσο, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την εφαρμογή του, ώστε να εφαρμόζεται εκεί που πραγματικά ισχύει και να μην επεκτείνεται απρόσεκτα η εφαρμογή του στις περιπτώσεις όπου δεν έχει ισχύ.

Παράδειγμα 4.

Χαλύβδινη ράβδος μήκους $l = 100$ cm και τετραγωνικής διατομής $A = 2 \cdot 2$ cm $= 4$ cm^2 δέχεται φορτίο $F = 4.200$ kp. Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι εντός των ορίων ισχύος του νόμου του Hooke, να υπολογιστεί η επιμήκυνση της ράβδου.

Λύση.

Από τον πίνακα 1.2 λαμβάνομε το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kp/cm^2.

Η ζητούμενη επιμήκυνση της ράβδου λαμβάνεται από τον Νόμο του Hooke:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{4.200 \text{ kp} \cdot 100 \text{ cm}}{4 \text{ cm}^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2} =$$
$$= 0{,}05 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ mm}.$$

Παράδειγμα 5.

Ράβδος μήκους $l = 100$ cm δέχεται φορτίο $F = 500$ N και επιμηκύνεται κατά $\Delta l = 0{,}1$ cm. Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι εντός των ορίων ισχύος του Νόμου του Hooke, να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου είναι $E = 1{,}4 \cdot 10^6$ N/cm^2.

Λύση.

Η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου είναι:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0{,}1\% = 0{,}001.$$

Η ζητούμενη τάση που αναπτύσσεται υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2 \cdot 0{,}001 = 1.400 \text{ N/cm}^2.$$

Ασκήσεις.

1. *Χαλύβδινη ράβδος με μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}1 \cdot 10^7$ N/cm^2 έχει μήκος 20 cm. Η διατομή της είναι τετραγωνική με πλευρά 2 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη 84.000 N. Να υπολογιστεί η επιμήκυνση και η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου.*

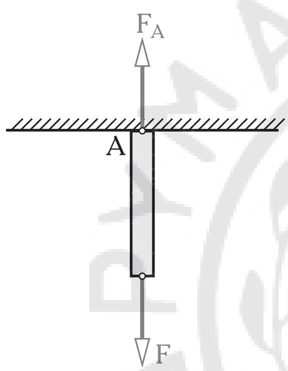
2. *Χάλκινη ράβδος μήκους 40 cm έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 1{,}2 \cdot 10^7$ N/cm^2. Η διατομή της είναι τετραγωνική με πλευρά 3 cm. Με πόση δύναμη πρέπει να εφελκυσθεί για να αποκτήσει ανηγμένη επιμήκυνση ε = 0,1%;*

3. *Ράβδος από χάλυβα κυκλικής διατομής διαμέτρου*

12 mm και μήκους 50 cm εφελκύεται από δύναμη 12.000 N. Να υπολογιστεί η επιμήκυνση της ράβδου εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της είναι ίσο με $2{,}1 \cdot 10^7$ N/cm^2.

1.3 Εφελκυσμός και πειράματα εφελκυσμού.

Ας θεωρήσομε το στερεό σώμα του σχήματος 1.3α, πάνω στον άξονα του οποίου ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, οι οποίες τείνουν να αυξήσουν το μήκος του. Το σώμα του σχήματος 1.3α λέμε ότι υφίσταται εφελκυσμό ή αλλιώς ότι εφελκύεται. Το σώμα είναι στερεωμένο στο ένα άκρο του και δύναμη F ασκείται στο άλλο άκρο του. Η δεύτερη δύναμη F_A = F είναι η ***αντίδραση***. Για τους υπολογισμούς μας λαμβάνομε μόνο τη μία από τις δύο δυνάμεις.



Σχ. 1.3α
Στερεό σώμα που εφελκύεται.

Η μελέτη του εφελκυσμού γίνεται με το πείραμα του εφελκυσμού, με το οποίο προσδιορίζομε την αντοχή ενός υλικού όταν καταπονείται σε εφελκυσμό. Το πείραμα του εφελκυσμού λαμβάνει χώρα σε ειδική μηχανή που καλείται ***μηχανή εφελκυσμού*** (σχ. 1.3β) και θεωρείται το πλέον ακριβές από τα πειράματα που γίνονται για τον προσδιορισμό της αντοχής των υλικών.

Στο πείραμα του εφελκυσμού χρησιμοποιούνται ράβδοι προκαθορισμένης μορφής και μεγέθους που καλούνται ***δοκίμια***, τα οποία συγκρατούνται στη μηχανή εφελκυσμού με δύο σιαγόνες. Συνήθως, τα δοκίμια έχουν κυλινδρική μορφή και το μήκος τους είναι πενταπλάσιο της διαμέτρου τους.

Με τη βοήθεια υδραυλικής πιέσεως τα δοκίμια καταπονούνται σε εφελκυσμό, υφίστανται δηλαδή αύξηση του μήκους τους, παραμόρφωση που καλείται ***επιμήκυνση*** και ***ελάττωση*** της διατομής τους.

Η μηχανή εφελκυσμού διαθέτει όργανα για να μετρήσει κατά τη διάρκεια των πειραμάτων εφελκυσμού την εφελκυστική δύναμη και την επιμήκυνση που προκαλεί η δύναμη αυτή. Η εφελκυστική δύναμη που εφαρμόζεται στα δοκίμια μεταβάλλεται σταδιακά από μηδέν μέχρι την τιμή στην οποία θραύεται το δοκίμιο. Ταυτόχρονα, καταγράφεται διάγραμμα αναπτυσσομένων τάσεων ή δυνάμεων και επιμηκύνσεων ή ανηγμένων επιμηκύνσεων, το οποίο ονομάζεται ***διάγραμμα εφελκυσμού***. Σημειώνεται ότι έχει επικρατήσει η δημιουργία του διαγράμματος τάσεων-ανηγμένων επιμηκύνσεων, γιατί τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτό ισχύουν για κάθε δοκίμιο, από το ίδιο υλικό και όχι για το συγκεκριμένο δοκίμιο για το οποίο έγινε το πείραμα.

Το διάγραμμα εφελκυσμού απεικονίζει τα αποτελέσματα του πειράματος εφελκυσμού και δίνει σημαντικές πληροφορίες για την αντοχή του υλικού, για το οποίο έγινε το πείραμα. Από το διάγραμμα εφελκυσμού μπορούμε να λάβομε τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού που είναι απαραίτητα για τον υπολογισμό της αντοχής των κατασκευών.

Η διαδικασία του πειράματος εφελκυσμού και ο τρόπος επεξεργασίας των μετρήσεων περιγράφονται με κάθε λεπτομέρεια στο Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50145 και στα αντίστοιχα πρότυπα του Διεθνούς Οργανισμού Τυποποιήσεων (ISO).

Για να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων των πειραμάτων εφελκυσμού που πραγματοποιούνται σε διαφορετικά εργαστήρια, το Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50125 καθορίζει επακριβώς τις συνθήκες του πειράματος. Οι «συνθήκες πειράματος» περιλαμβάνουν κυρίως τον αυστηρό καθορισμό της μορφής, του μεγέθους διατομής, του μήκους και της ποιότητας επιφάνειας των δοκιμίων, καθώς και

Σχ. 1.3β
Μηχανή εφελκυσμού.

τη θερμοκρασία στην οποία λαμβάνει χώρα το πείραμα εφελκυσμού.

Οι τάσεις στον εφελκυσμό παρέχονται από τη σχέση (1.1) και οι ειδικές επιμηκύνσεις από τη σχέση (1.4). Έτσι, η τάση στον εφελκυσμό ισούται με το πηλίκο της δυνάμεως εφελκυσμού F προς το εμβαδόν της διατομής A του δοκιμίου:

$$\sigma = \frac{F}{A}. \qquad (1.6)$$

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται αναλυτικά οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στον εφελκυσμό.

– Πείραμα εφελκυσμού του χάλυβα.

Αν τοποθετήσομε στη μηχανή εφελκυσμού δοκίμιο από χάλυβα St 37 (ποιότητα χάλυβα της Γερμανικής Βιομηχανίας) μήκους l, με σκοπό να μελετήσομε τα μηχανικά χαρακτηριστικά, και το εφελκύσομε με μια δύναμη F, παρατηρούμε ότι το μήκος του αυξάνεται κατά Δl. Αν αφαιρέσομε τη δύναμη F, η επιμήκυνση εξαφανίζεται και το δοκίμιο αποκτά το αρχικό του μήκος. Αυξάνοντας τη φόρτιση του δοκιμίου σε 2F, παρατηρούμε ότι το μήκος του αυξάνεται κατά 2Δl. Αυξάνοντας τη φόρτιση του δοκιμίου σε 3F, παρατηρούμε ότι το μήκος του αυξάνεται κατά 3Δl. Εάν αφαιρέσομε το φορτίο, η επιμήκυνση εξαφανίζεται και το δοκίμιο αποκτά το αρχικό του μήκος. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σταθερή αναλογία ανάμεσα στο φορτίο και την επιμήκυνση και μάλιστα η επιμήκυνση εξαφανίζεται μετά την αφαίρεση του φορτίου.

Η κατάσταση αυτή όμως έχει ένα όριο. Αν εξακολουθήσομε να αυξάνομε συνεχώς το φορτίο, έρχεται κάποια στιγμή που η αύξηση της επιμηκύνσεως παύει να είναι ανάλογη του φορτίου και με μικρή αύξηση του φορτίου παρατηρούμε μεγάλη αύξηση της επιμηκύνσεως, χωρίς η αφαίρεση του φορτίου να οδηγεί το δοκίμιο στο αρχικό του μήκος. Το δοκίμιο παρουσιάζει μια μόνιμη επιμήκυνση, δηλαδή παρουσιάζει μια μόνιμη παραμόρφωση.

Αν εξακολουθήσομε να αυξάνομε το φορτίο περαιτέρω, έρχεται κάποια στιγμή που το δοκίμιο σπάει. Το πείραμα εφελκυσμού του χάλυβα St 37 καταγράφεται αναλυτικά στο διάγραμμα εφελκυσμού τάσεων-ανηγμένων επιμηκύνσεων που παρουσιάζεται στο σχήμα 1.3γ.

Στο διάγραμμα εφελκυσμού παρατηρούμε τις ακόλουθες περιοχές:

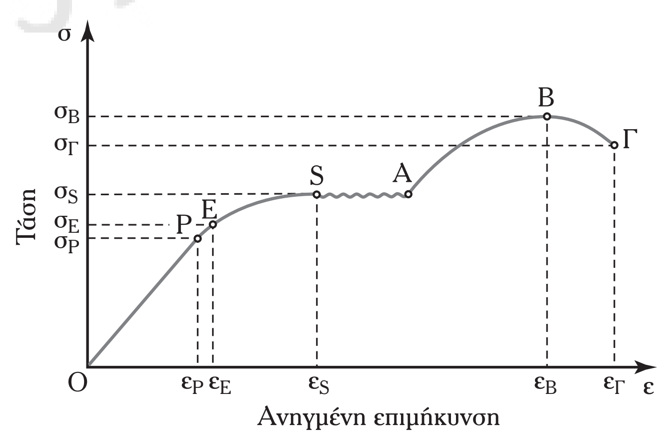
1) ***Τμήμα ΟΡ ή περιοχή αναλογίας ή αναλογική περιοχή***. Στην περιοχή αυτή ισχύει ο Νόμος του Hooke, σύμφωνα με τον οποίο η ανηγμένη επιμήκυνση είναι ανάλογη με την τάση στην οποία οφείλεται. Για το λόγο αυτό το τμήμα αυτό καλείται περιοχή αναλογίας ή αναλογική περιοχή και είναι ευθύγραμμο. Η κλίση του τμήματος καθορίζεται από το μέτρο ελαστικότητας. Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο P καλείται ***όριο αναλογίας*** σ_P και είναι η τάση, πάνω από την οποία παύει να ισχύει ο Νόμος του Hooke. Το όριο αναλογίας για τον χάλυβα St 37 είναι 18 kp/mm^2.

2) ***Τμήμα PE***. Στο τμήμα αυτό η ανηγμένη επιμήκυνση παύει να είναι ανάλογη της τάσεως. Το τμήμα PE δεν είναι ευθύγραμμο, αλλά καμπύλο.

Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο E καλείται ***όριο ελαστικότητας*** σ_E και είναι η τάση, μέχρι την οποία οι παραμορφώσεις είναι προσωρινές. Το όριο ελαστικότητας για τον χάλυβα St 37 είναι περίπου 19 kp/mm^2, πολύ κοντά στο όριο αναλογίας. Επειδή το όριο ελαστικότητας είναι δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια, στην πράξη χρησιμοποιείται το ***τεχνικό όριο ελαστικότητας***. Ως τεχνικό όριο ελαστικότητας $\sigma_{0,01}$ ορίζεται από το Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50144 η τάση η οποία, εάν εφαρμοσθεί στο δοκίμιο, μετά την αποφόρτισή του παρουσιάζει μόνιμη ανηγμένη επιμήκυνση ίση με 0,01%.

3) ***Ελαστική περιοχή ΟΕ.*** Το τμήμα αυτό καλείται ελαστική περιοχή, γιατί μέχρι και το σημείο E οι παραμορφώσεις είναι προσωρινές και το δοκίμιο επανέρχεται στο αρχικό του μήκος, μόλις η φόρτιση σταματήσει να ενεργεί.

4) ***Τμήμα ES.*** Στο τμήμα αυτό, η παραμόρφωση γίνεται μόνιμη και αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό από ό,τι πριν. Στο σημείο S το δοκίμιο χάνει τη συνοχή του και αρχίζει να διαρρέει, όπως θα δούμε στη συνέχεια στο τμήμα SA. Η τάση που αντιστοιχεί



Σχ. 1.3γ
Διάγραμμα εφελκυσμού του χάλυβα.

στο σημείο S καλείται ***όριο διαρροής*** σ_S. Το όριο διαρροής για τον χάλυβα St 37 είναι 24 kp/mm^2. Επειδή το όριο διαρροής είναι δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια, στην πράξη χρησιμοποιείται το ***τεχνικό όριο διαρροής***. Ως τεχνικό όριο διαρροής $\sigma_{0,2}$ ορίζεται από το Γερμανικό Βιομηχανικό Πρότυπο DIN50144 η τάση η οποία, εάν εφαρμοσθεί στο δοκίμιο, μετά την αποφόρτισή του, παρουσιάζει μόνιμη ανηγμένη επιμήκυνση ίση με 0,2%.

5) ***Τμήμα SA (τμήμα Ludders)***. Το τμήμα αυτό χαρακτηρίζεται από τη μεγάλη αύξηση της ανηγμένης επιμηκύνσεως του δοκιμίου, χωρίς να αυξηθεί η τάση από το όριο διαρροής. Το υλικό στο τμήμα αυτό παραμορφώνεται χωρίς πρακτικά να αυξάνεται η εξωτερική δύναμη. Λέμε τότε ότι το υλικό διαρρέει. Σημειώνομε ότι υπάρχουν υλικά που δεν έχουν όριο διαρροής και δεν διαρρέουν, όπως είναι ο χαλκός και το αλουμίνιο.

6) ***Τμήμα ΑΒΓ***. Από το σημείο Α και μετά η καμπύλη χαρακτηρίζεται από μεγάλη αύξηση της επιμηκύνσεως με μικρή αύξηση της τάσεως. Η μεγάλη αύξηση της επιμηκύνσεως συνεχίζεται μέχρι τη θραύση του υλικού. Το τμήμα αυτό καλείται ***καμπύλη κρατύνσεως***, επειδή το υλικό στο τμήμα αυτό ανακτά την αντοχή του και παρουσιάζει αύξηση της αντιστάσεώς του.

Η τάση αποκτά τη μέγιστη τιμή της στο σημείο Β, λίγο πριν από τη θραύση (σημείο Γ). Η μέγιστη τιμή αυτή ονομάζεται ***όριο θραύσεως*** και συμβολίζεται με σ_B ή $\sigma_{\theta\rho}$. Η τάση στο σημείο Γ σ_Γ ονομάζεται τάση θραύσεως και αποτελεί την τάση, στην οποία το υλικό σπάζει. Η ανηγμένη επιμήκυνση ε_Γ που αντιστοιχεί στη θραύση καλείται ***παραμόρφωση θραύσεως***.

Το όριο θραύσεως για τον χάλυβα ποιότητας St 37 είναι 37 kp/mm^2 και η ανηγμένη επιμήκυνση ε_Γ είναι ίση προς 24%. Στη γερμανική βιομηχανία οι χάλυβες χαρακτηρίζονται από τα γράμματα St (αρχικά της λέξεως Stahl, δηλ. χάλυβας) και έναν αριθμό που υποδηλώνει το όριο θραύσεως σε kp/mm^2.

Για παράδειγμα, χάλυβας St 52 σημαίνει χάλυβας με $\sigma_{\theta\rho}$ = 52 kp/mm^2. Για την αμερικανική, βρετανική, γαλλική κ.λπ. βιομηχανία υπάρχουν άλλοι συμβολισμοί. Τα τελευταία χρόνια γίνεται προσπάθεια, στο πλαίσιο της Ευρωπαϊκής Ενώσεως, ενοποιήσεως ποιοτήτων και συμβολισμών των χαλύβων.

7) ***Πλαστική περιοχή***. Η περιοχή ΕΓ καλείται ***πλαστική περιοχή***, καθώς από το σημείο Ε και μέχρι τη θραύση οι παραμορφώσεις παραμένουν όταν σταματήσει να ενεργεί η φόρτιση.

Παράδειγμα 6.

Η επιμήκυνση που προκαλείται σε μία ράβδο μήκους l = 110 cm κατά τη θραύση είναι Δl = 1,1 cm. Να υπολογιστεί η ανηγμένη επιμήκυνση και να εκφραστεί σε ποσοστό.

Λύση.

Η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου είναι:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1{,}1\ \text{cm}}{110\ \text{cm}} = 0{,}01 = 1\%.$$

Παράδειγμα 7.

Δοκίμιο κυλινδρικού σχήματος διαμέτρου d = 1,2 cm και αρχικού μήκους l = 7 cm δοκιμάστηκε σε εφελκυσμό. Το πείραμα του εφελκυσμού έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1) Φορτίο ορίου αναλογίας F_P = 1.415 N.

2) Φορτίο θραύσεως F_B = 4.210 N.

3) Επιμήκυνση στο όριο αναλογίας Δl = 0,035 cm.

4) Ανηγμένη επιμήκυνση στο όριο θραύσεως ε_B = 5%.

Εάν το υλικό δεν διαρρέει, να σχεδιαστεί το διάγραμμα εφελκυσμού, αφού πρώτα υπολογιστούν:

1) Η τάση στο όριο αναλογίας.

2) Η τάση στο όριο θραύσεως.

3) Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του δοκιμίου.

Λύση.

Η διατομή του δοκιμίου είναι:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}2^2\,\text{cm}^2}{4} = 1{,}13\ \text{cm}^2.$$

1) Η τάση στο όριο αναλογίας είναι:

$$\sigma_P = \frac{F_P}{A} = \frac{1.415\ \text{N}}{1{,}13\ \text{cm}^2} = 1.252\ \text{N}/\text{cm}^2.$$

Η ανηγμένη επιμήκυνση στο όριο αναλογίας είναι:

$$\varepsilon_P = \frac{0{,}035\ \text{cm}}{7\ \text{cm}} = 0{,}5\%.$$

2) Η τάση στο όριο θραύσεως είναι:

$$\sigma_B = \frac{F_B}{A} = \frac{4.210\text{N}}{1{,}13\text{cm}^2} = 3.726\ \text{N}/\text{cm}^2.$$

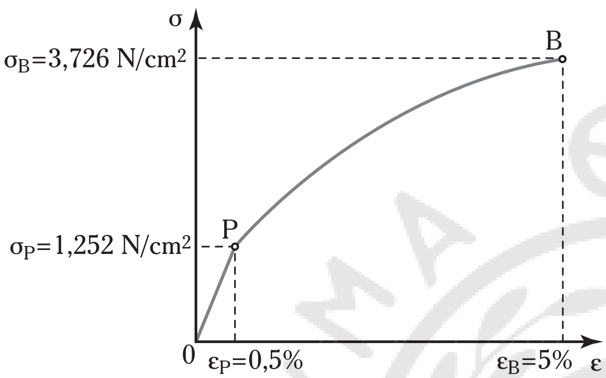
3) Το μέτρο ελαστικότητας υπολογίζεται από την

εφαρμογή του Νόμου του Hooke για το όριο αναλογίας, λύνοντας ως προς Ε:

$$\Delta l = \frac{F_p \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow E = \frac{F_p \cdot l}{A \cdot \Delta l} =$$

$$= \frac{1.415 \text{ N} \cdot 7 \text{ cm}}{1{,}13 \text{ cm}^2 \cdot 0{,}035 \text{ cm}} = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2.$$

Το διάγραμμα εφελκυσμού παρουσιάζεται στο σχήμα 1.3δ.



Σχ. 1.3δ

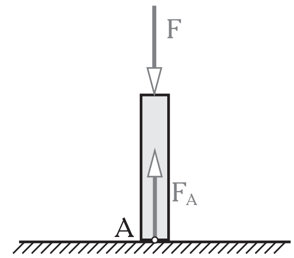
Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί η ανηγμένη επιμήκυνση, εκφρασμένη σε ποσοστό μιας ράβδου που εφελκύεται, όταν κατά τη θραύση ήταν $\Delta l = 0{,}012$ cm και το αρχικό της μήκος ήταν $l = 150$ cm.*

2. *Κυλινδρικό δοκίμιο έχει περιφέρεια διατομής 3,14 cm και ύψος 6 cm. Το πείραμα του εφελκυσμού στο δοκίμιο έδωσε τα εξής αποτελέσματα:*
α) Φορτίο ορίου αναλογίας: 12.150 N.
β) Φορτίο ορίου θραύσεως: 30.150 N.
γ) Ολική επιμήκυνση στο όριο αναλογίας: 0,042 cm.
δ) Ανηγμένη επιμήκυνση στο όριο θραύσεως: 7%.
Εάν το υλικό δεν διαρρέει, να υπολογιστούν:
α) Η τάση στο όριο αναλογίας.
β) Η τάση στο όριο θραύσεως.
γ) Το μέτρο ελαστικότητας και
δ) να σχεδιαστεί το διάγραμμα εφελκυσμού.

1.4 Θλίψη και πειράματα θλίψεως.

Ας θεωρήσομε το στερεό σώμα του σχήματος 1.4α, πάνω στον άξονα του οποίου, ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες (η $F_A = F$ είναι η αντίδραση), οι οποίες τείνουν να ελαττώσουν το μήκος του. Λέμε τότε ότι το σώμα υφίσταται ***θλίψη*** ή ***θλίβεται***.



Σχ. 1.4α
Στερεό σώμα που θλίβεται.

Η μελέτη της θλίψεως γίνεται με το πείραμα της θλίψεως, με το οποίο προσδιορίζομε την αντοχή ενός υλικού όταν καταπονείται σε θλίψη. Το πείραμα της θλίψεως λαμβάνει χώρα με τη χρήση δοκιμίων στην ίδια ειδική μηχανή που λαμβάνει χώρα και το πείραμα εφελκυσμού. Η διαφορά με τον εφελκυσμό είναι ότι οι δυνάμεις στη θλίψη δεν επιμηκύνουν το δοκίμιο, αλλά ελαττώνουν το μήκος του (επιβράχυνση). Στη θλίψη (όπως και στον εφελκυσμό) εμφανίζεται τάση που οφείλεται στη μοριακή δύναμη αντιστάσεως ανά μονάδα της διατομής. Η καταπόνηση σε θλίψη φανερώνεται με μία μικρή ελάττωση του μήκους και αύξηση της διατομής, αντίθετα δηλαδή από ό,τι συμβαίνει στον εφελκυσμό.

Κατά αναλογία με τα διαγράμματα εφελκυσμού λαμβάνομε τα *διαγράμματα θλίψεως*. Και στην περίπτωση των διαγραμμάτων θλίψεως έχει επικρατήσει η δημιουργία του διαγράμματος τάσεων –ανηγμένων επιβραχύνσεων, γιατί τα συμπεράσματα που προκύπτουν απ' αυτό ισχύουν για κάθε δοκίμιο από το ίδιο υλικό και όχι για το συγκεκριμένο δοκίμιο, για το οποίο έγινε το πείραμα.

Για τους υπολογισμούς στη θλίψη χρησιμοποιούμε τους ίδιους τύπους, όπως και στον εφελκυσμό, με τη διαφορά ότι αφορούν στη θλίψη και όχι στον εφελκυσμό και άρα μιλάμε για επιβράχυνση και όχι για επιμήκυνση, καθώς και για ανηγμένη επιβράχυνση και όχι για ανηγμένη επιμήκυνση.

Έτσι, οι τάσεις στη θλίψη παρέχονται από τη σχέση (1.1), δηλαδή η τάση θλίψεως ισούται με το πηλίκο της δυνάμεως θλίψεως F προς το εμβαδόν της διατομής A του δοκιμίου:

$$\sigma = \frac{F}{A}. \qquad (1.7)$$

Επίσης, η ***ανηγμένη επιβράχυνση στη θλίψη*** δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\,. \qquad (1.8)$$

Η ανηγμένη επιβράχυνση είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Επειδή $\Delta l < 0$, η ανηγμένη επιβράχυνση είναι αρνητική.

Τέλος, στη θλίψη ισχύει ο Νόμος του Hooke, όπως και στον εφελκυσμό. Έτσι, η επιβράχυνση στην αναλογική περιοχή δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta l = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E}\,. \qquad (1.9)$$

Το αρνητικό πρόσημο της σχέσεως (1.9) δηλώνει ότι έχομε επιβράχυνση ($\Delta l < 0$).

Επίσης, η ανηγμένη επιβράχυνση (κατ' αντιστοιχία της ανηγμένης επιμηκύνσεως) σε μία θλιβόμενη ράβδο είναι ανάλογη με την τάση που ενεργεί σ' αυτήν:

$$\varepsilon = -\frac{\sigma}{E}\,. \qquad (1.10)$$

Το αρνητικό πρόσημο της σχέσεως (1.10) δηλώνει ότι έχομε επιβράχυνση ($\varepsilon < 0$).

Το μέτρο ελαστικότητας Ε είναι το ίδιο στη θλίψη και στον εφελκυσμό.

Πρέπει να σημειώσομε ότι ο Νόμος του Hooke ισχύει και στην περίπτωση της θλίψεως μέχρι κάποιο όριο. Επομένως, πριν την εφαρμογή του νόμου **θα *πρέπει να ελέγχομε εάν ο νόμος εφαρμόζεται***. Τα όρια εφαρμογής του νόμου του Hooke στη θλίψη αναπτύσσονται στην παράγραφο 1.4.2.

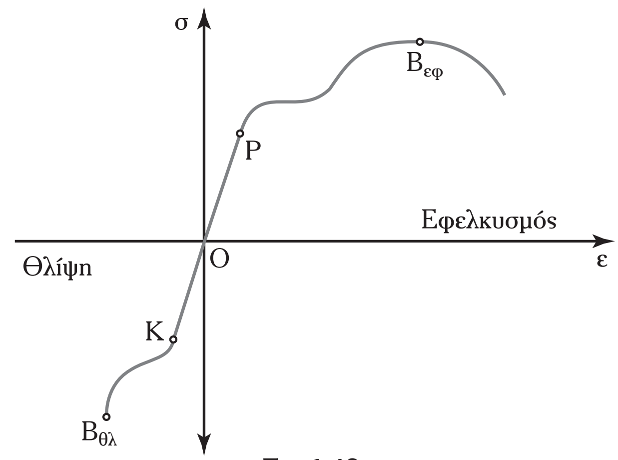
Το Κεφάλαιο 2 περιγράφει αναλυτικά τις τάσεις και τις παραμορφώσεις στη θλίψη.

1.4.1 Πείραμα θλίψεως του χάλυβα.

Το πείραμα θλίψεως του χάλυβα St 37 γίνεται στην ίδια μηχανή που γίνεται και το πείραμα του εφελκυσμού του, με δοκίμια από χάλυβα. Η διαφορά είναι ότι οι δυνάμεις δεν επιμηκύνουν τα δοκίμια, αλλά τα επιβραχύνουν. Τα αποτελέσματα του πειράματος θλίψεως καταγράφονται αναλυτικά στο διάγραμμα θλίψεως τάσεων-ανηγμένων επιβραχύνσεων του σχήματος 1.4β, το οποίο παρουσιάζει συγκριτικά το διάγραμμα θλίψεως, καθώς και το διάγραμμα εφελκυσμού.

1.4.2 Σύγκριση διαγραμμάτων θλίψεως και εφελκυσμού.

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων θλίψεως και εφελκυσμού του χάλυβα St 37, καταλήγομε στα



Σχ. 1.4β
Διάγραμμα θλίψεως και εφελκυσμού του χάλυβα St 37.

ακόλουθα συμπεράσματα:

1) Ο Νόμος του Hooke εφαρμόζεται στη θλίψη όπως και στην περίπτωση του εφελκυσμού. Υπάρχει ένα όριο αναλογίας, μέχρι το οποίο οι επιβραχύνσεις του χάλυβα είναι ανάλογες των φορτίων που τις προκαλούν. Η κλίση της παρατηρούμενης περιοχής αναλογίας εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα St 37.

2) Το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα St 37 σε θλίψη είναι το ίδιο με το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα St 37 σε εφελκυσμό, καθώς η κλίση της παρατηρούμενης περιοχής αναλογίας στη θλίψη είναι ίδια με την κλίση της παρατηρούμενης περιοχής αναλογίας στον εφελκυσμό.

3) Το όριο διαρροής στη θλίψη είναι το ίδιο με το όριο διαρροής στον εφελκυσμό.

4) Σε αντίθεση με τον εφελκυσμό, μετά το όριο διαρροής του υλικού στη θλίψη δεν ακολουθεί θραύση, αλλά πλαστικοποίηση. Αυτό σημαίνει ότι η ράβδος εξακολουθεί να παραμορφώνεται σαν πλαστικό σώμα. Έτσι το όριο θραύσεως για θλίψη του χάλυβα St 37 ορίζεται συμβατικά ότι είναι η τιμή της τάσεως εκείνη που προκαλεί ανηγμένη επιβράχυνση ίση με –0,3

Σημειώνεται ότι η ισχύς των παραπάνω συμπερασμάτων δεν περιορίζεται μόνο στον χάλυβα St 37. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν γενικότερα από τη σύγκριση διαγραμμάτων θλίψεως και εφελκυσμού.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι το φαινόμενο της πλαστικοποιήσεως δεν συμβαίνει σ' όλες τις περιπτώσεις θλίψεως. Για παράδειγμα, στο πείραμα θλίψεως σε δοκίμια από χυτοσίδηρο παρατηρείται ότι μετά το όριο διαρροής ο χυτοσίδηρος δεν πλαστικοποιείται όπως ο χάλυβας, αλλά θραύεται.

Παράδειγμα 8.

Στήριγμα από ξύλο έχει διατομή ορθογωνίου με πλευρές 5 cm και 10 cm. Το στήριγμα δέχεται θλιπτικό φορτίο 1500 N. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως.

Λύση.

Η διατομή του στηρίγματος που καταπονείται είναι: $A = 5\,cm \cdot 10\,cm = 50\,cm^2$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1.7) υπολογίζομε την τάση θλίψεως:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1.500\ N}{50\ cm^2} = 30\ N/cm^2.$$

Ασκήσεις.

1. *Ράβδος μήκους $l = 90\,cm$ δέχεται θλιπτικό φορτίο $F = 4.000\,N$ και επιβραχύνεται κατά $\Delta l = 0{,}1\,cm$. Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι εντός των ορίων ισχύος του νόμου του Hooke, να υπολογιστεί η τάση που αναπτύσσεται εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου είναι $E = 1{,}2 \cdot 10^7\,N/cm^2$.*

2. *Ράβδος έχει κυκλική διατομή διαμέτρου 4 cm. Η ράβδος υποβάλλεται σε θλιπτικό φορτίο 10.000 N. Να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη τάση θλίψεως.*

1.5 Εγκάρσια συστολή και διαστολή.

Όπως προαναφέρθηκε στην παράγραφο 1.3, όταν ένα σώμα εφελκύεται παρουσιάζει αύξηση του μήκους του, αλλά ταυτόχρονα και μια μίκρυνση της διατομής του. Έτσι, στο πείραμα του εφελκυσμού, τα εφελκυόμενα κυλινδρικά δοκίμια παρουσιάζουν αύξηση του μήκους τους, αλλά ταυτόχρονα και μίκρυνση της διαμέτρου τους. Δηλαδή, παράλληλα με τον εφελκυσμό έχομε και μια εγκάρσια παραμόρφωση που είναι η συστολή της διατομής του εφελκυόμενου σώματος.

Αντιστοίχως, όταν ένα σώμα θλίβεται παρουσιάζει μείωση του μήκους του, αλλά ταυτόχρονα και μεγέθυνση της διατομής του. Έτσι, στο πείραμα της θλίψεως, τα θλιβόμενα κυλινδρικά δοκίμια παρουσιάζουν μείωση του μήκους τους, αλλά ταυτόχρονα και μεγέθυνση της διαμέτρου τους. Δηλαδή, παράλληλα με τη θλίψη έχομε και εγκάρσια παραμόρφωση που είναι η διαστολή της διατομής του θλιβόμενου σώματος.

Έστω b η αρχική διάσταση της διατομής πριν την παραμόρφωσή της και b' η διάστασή της μετά την παραμόρφωσή της. Ορίζομε ως ***εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση*** ε_g το πηλίκο της μεταβολής της διαστάσεως $\Delta b = b' - b$ της διατομής κατά την παραμόρφωση προς την αρχική διάσταση της διατομής, δηλαδή:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b' - b}{b}\ . \tag{1.11}$$

Η εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Στην περίπτωση του εφελκυσμού, δεδομένου ότι $b' < b$, η εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση είναι αρνητική, ενώ στην περίπτωση της θλίψεως, δεδομένου ότι $b' > b$, θετική.

Επί πλέον, ορίζομε ως ***συντελεστή εγκάρσιας παραμορφώσεως*** μ τον αντίθετο του λόγου της εγκάρσιας ανηγμένης παραμορφώσεως προς την ανηγμένη επιμήκυνση (επιβράχυνση στην περίπτωση της θλίψεως), δηλαδή:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\ . \tag{1.12}$$

Ο συντελεστής εγκάρσιας παραμορφώσεως ονομάζεται και ***λόγος Poisson*** και χρησιμοποιείται ως μέγεθος που περιγράφει και τα δύο φαινόμενα που συμβαίνουν ταυτόχρονα στον εφελκυσμό (αύξηση μήκους-μίκρυνση διατομής), καθώς και στη θλίψη (μείωση μήκους-μεγέθυνση διατομής). Το πρόσημο (–) χρησιμοποιείται, προκειμένου ο λόγος Poisson να έχει πάντοτε θετικό πρόσημο, αφού οι ποσότητες ε_g και ε είναι πάντοτε ετερόσημες (η ανηγμένη επιμήκυνση είναι θετική στην περίπτωση του εφελκυσμού και αρνητική στην περίπτωση της θλίψεως).

Ο λόγος Poisson είναι χαρακτηριστική σταθερά για κάθε υλικό, εφόσον αυτό καταπονείται στην ελαστική περιοχή του διαγράμματος εφελκυσμού-θλίψεως. Οι μετρήσεις του λόγου Poisson για διάφορα υλικά δείχνουν ότι κυμαίνεται μεταξύ 0,25 και 0,35. Για τους χάλυβες ο λόγος του Poisson έχει τιμή 0,30. Συνήθως, ο λόγος Poisson είναι ο ίδιος για εφελκυσμό και θλίψη.

Τέλος, ορίζομε ως m τον αντίστροφο του λόγου Poisson, δηλαδή

$$m = \frac{1}{\mu}\ . \tag{1.13}$$

Το μέγεθος m καλείται ***σταθερά του Poisson*** και είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Από τον ορισμό της, προκύπτει άμεσα ότι η σταθερά του Poisson είναι πάντοτε θετικός αριθμός.

Παράδειγμα 9.

Κυλινδρική ράβδος μήκους l = 35 cm και διαμέτρου b = 3 cm εφελκύεται στην αναλογική περιοχή. Εάν η αύξηση του μήκους της ράβδου είναι Δl = 0,0035 cm και η μείωση της διαμέτρου της είναι Δb = – 0,000135 cm, να υπολογιστεί ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου.

Λύση.

Η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}0035}{35} = 0{,}0001 = 0{,}01\%.$$

Η εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση της ράβδου υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{-0{,}000135}{3} = -0{,}000045.$$

Επομένως, ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου είναι:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} = \frac{0{,}000045}{0{,}0001} = 0{,}45.$$

Ασκήσεις.

1. *Ράβδος μήκους l = 55 cm και τετραγωνικής διατομής πλευράς b = 3 cm εφελκύεται στην αναλογική περιοχή. Εάν η αύξηση του μήκους της ράβδου είναι Δl = 0,0055 cm και η μείωση της πλευράς της Δb = 0,000135 cm, να υπολογιστεί ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου.*

2. *Ράβδος μήκους l = 70 cm και κυκλικής διατομής διαμέτρου d = 4 cm θλίβεται στην αναλογική περιοχή. Εάν η μείωση του μήκους της ράβδου είναι Δl = –0,0035 cm και η αύξηση της διαμέτρου της Δd = 0,000115 cm, να υπολογιστεί ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου.*

1.6 Όλκιμα και ψαθυρά υλικά.

Δεν εμφανίζουν όλα τα υλικά την ίδια συμπεριφορά στις καταπονήσεις. Έτσι, τα υλικά ταξινομούνται σε κατηγορίες ανάλογα με τη συμπεριφορά τους στις καταπονήσεις.

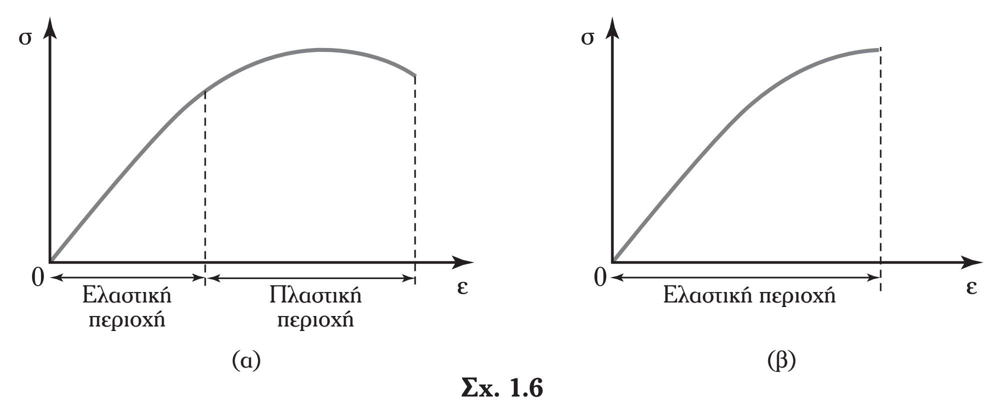
Με κριτήριο την εμφάνιση πλαστικής περιοχής πριν από τη θραύση τους ή όχι, τα υλικά ταξινομούνται σε ***όλκιμα*** και ***ψαθυρά***.

Στην κατηγορία των ***ολκίμων υλικών*** ανήκουν τα υλικά που μπορούν να υποστούν μόνιμες (πλαστικές) παραμορφώσεις πριν από τη θραύση τους.

Στην κατηγορία των ***ψαθυρών υλικών*** ανήκουν τα υλικά που θραύονται με το τέλος της ελαστικής τους περιοχής.

Με άλλα λόγια, ως ψαθυρά χαρακτηρίζονται τα υλικά που δεν παρουσιάζουν πλαστική περιοχή και ως όλκιμα αυτά που παρουσιάζουν πλαστική περιοχή πριν από το σημείο της θραύσεώς τους. Δηλαδή, τα ψαθυρά υλικά θραύονται πριν αναπτύξουν μόνιμες παραμορφώσεις σε αντίθεση με τα όλκιμα.

Το σχήμα 1.6(α) παρουσιάζει το τυπικό διάγραμμα εφελκυσμού ενός όλκιμου υλικού, ενώ το σχήμα 1.6(β) παρουσιάζει το τυπικό διάγραμμα εφελκυσμού ενός ψαθυρού υλικού. Από τη σύγκριση των δύο σχημάτων είναι εμφανές ότι τα όλκιμα υλικά παρουσιάζουν πλαστική περιοχή πριν το όριο θραύσεως σε



Σχ. 1.6
(α) Διάγραμμα εφελκυσμού ενός όλκιμου υλικού. (β) Διάγραμμα εφελκυσμού ενός ψαθυρού υλικού.

αντίθεση με τα ψαθυρά υλικά που δεν παρουσιάζουν πλαστική περιοχή πριν το όριο θραύσεως.

Στην καταπόνηση σε θλίψη, τα όλκιμα υλικά παρουσιάζουν πλαστική παραμόρφωση χωρίς να θραύονται, ενώ τα ψαθυρά θραύονται, χωρίς να υφίστανται πλαστική παραμόρφωση. Παραδείγματα ολκίμων υλικών είναι ο χαλκός, το αλουμίνιο, ο χάλυβας κ.λπ.. Παραδείγματα ψαθυρών υλικών είναι η πέτρα, το μπετόν, ο χυτοσίδηρος, το γυαλί κ.λπ..

Τα όλκιμα υλικά μπορούν, κατόπιν επεξεργασίας, να γίνουν λαμαρίνες ή σύρματα. Σε αντίθεση με τα όλκιμα υλικά, τα ψαθυρά δεν μπορούν να γίνουν λαμαρίνες ούτε σύρματα.

1.7 Σκληρότητα υλικού.

Σκληρότητα ενός υλικού ονομάζεται το μέγεθος που μετρά την αντίσταση του υλικού στην προσπάθεια εισόδου σ' αυτό άλλων υλικών, τα οποία πιέζουν την επιφάνειά του με μία κάθετη δύναμη.

Η σκληρότητα αναφέρεται πρακτικά στα μέταλλα. Η σκληρότητα ενός μετάλλου ουσιαστικά αποτελεί μέτρο της αντιστάσεως που εμφανίζουν τα μόρια του μετάλλου όταν άλλα υλικά, πιο σκληρά απ' αυτό, προσπαθούν να διεισδύσουν στο μέταλλο με εφαρμογή κάθετης δυνάμεως.

Η σκληρότητα ενός υλικού έχει σημασία στη μελέτη της αντοχής υλικών, γιατί με τη βοήθειά της, μπορούμε να υπολογίζομε το όριο θραύσεως των υλικών. Επομένως, μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός του μεγέθους της σκληρότητας.

Υπάρχουν ειδικές μέθοδοι μετρήσεως της σκληρότητας των μετάλλων, οι οποίες ονομάζονται ***μέθοδοι σκληρομετρήσεως***. Οι μέθοδοι σκληρομετρήσεως διακρίνονται στις ***στατικές***, στις οποίες ανήκουν η μέθοδος Brinell, η μέθοδος Vickers και η μέθοδος Rockwell, στις ***δυναμικές*** μεθόδους, στις οποίες ανήκουν η μέθοδος Baumann και η μέθοδος Poldi και τέλος, στις μεθόδους ***αναπηδήσεως***, στις οποίες ανήκουν η μέθοδος Shore και η μέθοδος Leesen.

1.7.1 Στατικές μέθοδοι σκληρομετρήσεως.

Οι στατικές μέθοδοι στηρίζονται στη φόρτιση της επιφάνειας του υλικού, του οποίου μετρείται η σκληρότητα, μέσω ειδικού σώματος που ονομάζεται ***διεισδυτής*** και εφαρμόζεται στατικά στο προς σκληρομέτρηση σώμα (δοκίμιο). Η τιμή της σκληρότητας προσδιορίζεται από το μέγεθος του φορτίου που εφαρμόζεται και από τα χαρακτηριστικά του αποτυπώματος στο προς σκληρομέτρηση σώμα.

1) Μέθοδος Brinell.

Η μέθοδος αυτή οφείλει το όνομά της στον Σουηδό J. A. Brinell. Η αρχή λειτουργίας της παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7α.

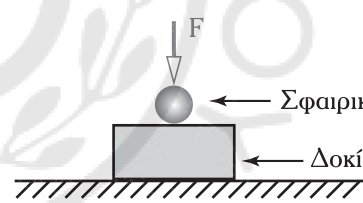
Η μέθοδος Brinell χρησιμοποιεί σφαιρικό διεισδυτή από πολύ σκληρό χάλυβα με διάμετρο 1 ή 2,5 ή 5 ή 10 mm, ανάλογα με τη σκληρότητα του υλικού που μετρούμε. Ο διεισδυτής διεισδύει κάθετα προς την επιφάνεια δοκιμίου υπό την επενέργεια σταθερού φορτίου που εξαρτάται από τη διάμετρό του, χωρίς καμιά κρούση ή ταλάντωση, για διάστημα από 10 έως 30 sec, ανάλογα με τη σκληρότητα του δοκιμίου. Κάθε μηχάνημα σκληρομετρήσεως διαθέτει πίνακες που δείχνουν τη δύναμη φορτίσεως F για κάθε διάμετρο σφαίρας. Ο σφαιρικός διεισδυτής, καθώς πιέζεται από το σταθερό φορτίο παραμορφώνει την επιφάνεια του δοκιμίου και σχηματίζει σ' αυτό μία κοιλότητα (αποτύπωμα), οι διαστάσεις της οποίας εξαρτώνται από:

α) Τη σκληρότητα του υλικού,

β) τη διάμετρο του σφαιρικού διεισδυτή και

γ) τη δύναμη φορτίσεως.

Μετά την αποφόρτιση του διεισδυτή μετρούνται οι διαστάσεις του αποτυπώματος και συγκεκριμένα η διάμετρος και το μέγιστο βάθος του, από τα οποία και υπολογίζεται το εμβαδόν του A.



Σχ. 1.7α
Μέθοδος Brinell.

Ως ***σκληρότητα κατά Brinell ενός υλικού*** HB ορίζεται ο λόγος της δυνάμεως φορτίσεως F προς το εμβαδόν του αποτυπώματος A.

Δηλαδή:

$$HB = \frac{F}{A} \,. \tag{1.14}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της σκληρότητας κατά Brinell*** είναι στο Διεθνές Σύστημα το $1\,N/m^2$, στο C.G.S. το $1\ dyn/cm^2$, στο Τεχνικό Σύστημα το $1\,kp/m^2$ και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το $1\,lb/ft^2$. Επειδή η μονάδα επιφάνειας $1\ m^2$ είναι αρκετά μεγάλη, στην πράξη χρησιμοποιούνται υποπολλαπλάσιά της ($1cm^2$, $1mm^2$), έτσι η σκληρότητα κατά Brinell μετρείται σε N/cm^2 ή N/mm^2

Η μέθοδος Brinell εφαρμόζεται για μέταλλα που έχουν μικρότερη σκληρότητα από τον σφαιρικό διεισδυτή. Επίσης, λόγω κινδύνου πλαστικής παραμορφώσεως του διεισδυτή, η μέθοδος περιορίζεται στη σκληρομέτρηση υλικών με σκληρότητα μέχρι 4.500 N/mm^2.

Η μέθοδος Brinell δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα εάν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Η επιφάνεια του δοκιμίου πρέπει να έχει λειανθεί καλά, έτσι ώστε να έχει μεταλλική λάμψη. Στην περίπτωση που υπάρχουν μικροανωμαλίες στην επιφάνεια του δοκιμίου, αυτές προκαλούν αλλοιώσεις στον υπολογισμό των διαστάσεων του αποτυπώματος.

β) Το πάχος του δοκιμίου που μετρούμε πρέπει να είναι τουλάχιστον δεκαπλάσιο του πάχους του αποτυπώματος.

γ) Η διάμετρος του αποτυπώματος δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ μικρή, ούτε πολύ μεγάλη σε σχέση με τη διάμετρο του διεισδυτή. Σε διαφορετική περίπτωση δεν είναι εύκολη η ακριβής εκτίμηση των διαστάσεων του αποτυπώματος.

δ) Η επιφάνεια του δοκιμίου πρέπει να είναι τοποθετημένη κάθετα προς τη διεύθυνση του φορτίου.

ε) Η φόρτιση δεν πρέπει να γίνεται απότομα, αλλά με βραδύ ρυθμό εντός χρόνου από 10 sec (για τα πιο σκληρά μέταλλα) μέχρι 30 sec (για τα πιο μαλακά).

στ) Η αποφόρτιση πρέπει να γίνεται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, ώστε να δημιουργείται πλαστική παραμόρφωση στο αποτύπωμα.

Αποδεικνύεται πειραματικά ότι μεταξύ της σκληρότητας Brinell HB ενός υλικού και της τάσεως θραύσεως του υλικού σε εφελκυσμό $\sigma_{\theta\rho}$, υπάρχει η ακόλουθη γραμμική σχέση:

$$\sigma_{\theta\rho} = k \cdot HB. \qquad (1.15)$$

Η σταθερά αναλογίας k στη σχέση (1.15) είναι αδιάστατο μέγεθος και εξαρτάται από το υλικό. Ο πίνακας 1.7 παρουσιάζει την ***τιμή της σταθεράς k*** για ***κάποια υλικά***.

Η σχέση (1.15) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της τάσεως θραύσεως ενός υλικού, όταν γνωρίζομε τη σκληρότητά του ή το αντίστροφο. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 10.

Δοκίμιο από χρωμιονικελιούχο χάλυβα έχει σκληρότητα κατά Brinell HB = 3.800 N/mm^2. Να υπολογιστεί η τάση θραύσεως του δοκιμίου σε εφελκυσμό.

Πίνακας 1.7
Η τιμή της σταθεράς k για κάποια υλικά.

Υλικό	***Σταθερά k της σχέσεως $\sigma_{\theta\rho} = k \cdot HB$***
Ανθρακοχάλυβας	0,36
Χρωμιονικελιούχος χάλυβας	0,34
Χαλκός	0,40
Μπρούντζος	0,40
Αλουμίνιο	0,35
Κράματα αλουμινίου	0,35

Λύση.

Η τάση θραύσεως του δοκιμίου σε εφελκυσμό δίνεται από τη σχέση $\sigma_{\theta\rho} = k \cdot HB$. Η σταθερά αναλογίας k για τον χρωμιονικελιούχο χάλυβα δίνεται από τον πίνακα 1.7 και είναι ίση με 0,34. Άρα έχομε: $\sigma_{\theta\rho} = k \cdot HB = 0{,}34 \cdot 3800\ N/mm^2 = 1.292\ N/mm^2$.

Παράδειγμα 11.

Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό ενός δοκιμίου από ανθρακοχάλυβα είναι $\sigma_{\theta\rho} = 400\ N/mm^2$. Να υπολογιστεί η σκληρότητα κατά Brinell του δοκιμίου.

Λύση.

Η σκληρότητα κατά Brinell του δοκιμίου υπολογίζεται μέσω της σχέσεως $\sigma_{\theta\rho} = k \cdot HB$. Η σταθερά αναλογίας k για τον ανθρακοχάλυβα δίνεται από τον πίνακα 1.7 και είναι ίση με 0,36. Άρα έχομε:

$$\sigma_{\theta\rho} = k \cdot HB \Leftrightarrow HB = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{k} =$$

$$= \frac{400\ N/mm^2}{0{,}36} = 1.111\ N/mm^2.$$

2) Μέθοδος Vickers.

Η μέθοδος Vickers χρησιμοποιείται για τη σκληρομέτρηση όλων των μετάλλων, ιδίως των πολύ σκληρών. Επίσης, χρησιμοποιείται σε λεπτά δοκίμια γιατί δεν προκαλεί βλάβη κατά τη μέτρηση. Ο διεισδυτής είναι μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα από διαμάντι, με γωνία απέναντι εδρών ίση με 136^o. Ο πυραμιδικός διεισδυτής διεισδύει κάθετα προς την επιφάνεια του δοκιμίου υπό την επενέργεια σταθερού φορτίου που εξαρτάται από το πάχος του δοκιμίου. Το φορτίο ενεργεί στο δοκίμιο, χωρίς καμμία κρούση ή ταλάντωση, για διάστημα από 10 έως 30 sec, ανάλογα με τη σκληρότητα του δοκιμίου. Ο πυραμιδικός διεισδυτής, καθώς πιέζεται από το σταθερό φορτίο F παραμορφώνει την επιφάνεια του δοκιμίου και σχηματίζει σ' αυτό ένα αποτύπωμα. Τα μικρά βάθη διεισδύσεως που οφείλονται στην αμβλεία γωνία των 136° είναι αυτά που επιτρέπουν τη σκληρομέτρηση των λεπτών δοκιμίων.

Το σκληρόμετρο Vickers διαθέτει ένα μικροσκόπιο, με το οποίο ελέγχομε οπτικά το δημιουργούμενο αποτύπωμα και μετρούμε τις διαγώνιες του αποτυπώματος, από τις οποίες υπολογίζομε την παράπλευρη επιφάνειά του.

Ως ***σκληρότητα κατά Vickers ενός υλικού*** HV ορίζεται ο λόγος της δυνάμεως φορτίσεως F προς το εμβαδόν του αποτυπώματος A.

Δηλαδή:

$$HV = \frac{F}{A}. \tag{1.16}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της σκληρότητας κατά Vickers*** είναι στο Διεθνές Σύστημα το 1 N/m^2, στο C.G.S. το 1 dyn/cm^2, στο Τεχνικό Σύστημα το 1 kp/m^2 και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το 1 lb/ft^2.

Επειδή η μονάδα επιφάνειας 1m^2 είναι αρκετά μεγάλη, στην πράξη η σκληρότητα κατά Vickers μετρείται σε N/cm^2 ή N/mm^2.

Η μέθοδος Vickers δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα εάν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Το δοκίμιο πρέπει να είναι επίπεδο, λείο και το πάχος του να μην είναι λεπτότερο από 1,5 φορά τη διαγώνιο του αποτυπώματος της πυραμίδας.

β) Ο πυραμιδικός διεισδυτής πρέπει να προφυλάσσεται από κτυπήματα και να λειαίνεται συχνά.

γ) Η φόρτιση δεν πρέπει να γίνεται απότομα, αλλά με βραδύ ρυθμό από 10 sec (για τα πιο σκληρά μέταλλα) μέχρι 30 sec (για τα πιο μαλακά).

Ως τελική τιμή σκληρομετρήσεως λαμβάνομε τον μέσο όρο τριών μετρήσεων.

3) Μέθοδος Rockwell.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί διαφορετική γεωμετρία διεισδυτή και τιμή επιβαλλόμενου φορτίου, ανάλογα με το προς σκληρομέτρηση μέταλλο. Για παράδειγμα, για τα σκληρά μέταλλα χρησιμοποιείται ως διεισδυτής κώνος από διαμάντι με γωνία κορυφής 120° και για τα μαλακά σφαίρα από χάλυβα διαμέτρου 0,2 mm. Η διαδικασία σκληρομετρήσεως είναι η ίδια που ακολουθείται και στις μεθόδους Brinell και Vickers. Για να λάβομε αξιόπιστα αποτελέσματα από τη μέθοδο Rockwell, το πάχος του δοκιμίου πρέπει να είναι τουλάχιστον δεκαπλάσιο του βάθους του αποτυπώματος της σφαίρας ή του κώνου από διαμάντι.

Σε αντίθεση με τις μεθόδους Brinell και Vickers, η σκληρότητα υπολογίζεται με βάση το βάθος του αποτυπώματος, το οποίο σχηματίζει η σφαίρα ή ο αδαμάντινος κώνος όταν φορτίζεται πάνω στην επιφάνεια του δοκιμίου. Η σκληρότητα που προκύπτει από τη χρήση, ως διεισδυτή, του κώνου από διαμάντι συμβολίζεται με HRC και η σκληρότητα που προκύπτει από τη χρήση, ως διεισδυτή, της σφαίρας από χάλυβα συμβολίζεται με HRB. Δηλαδή:

Ως ***σκληρότητα κατά Rockwell ενός υλικού*** HRC ή HRB ορίζεται το βάθος του αποτυπώματος, το οποίο σχηματίζει ο αδαμάντινος κώνος ή η σφαίρα, αντίστοιχα, όταν φορτίζεται πάνω στην επιφάνεια του δοκιμίου.

Η μονάδα μετρήσεως της σκληρότητας κατά Rockwell είναι μονάδα μήκους. Συγκεκριμένα, ως μονάδα μετρήσεως λαμβάνονται τα 2 μm.

Στη μέθοδο Rockwell το φορτίο εφαρμόζεται σε δύο στάδια:

α) Στο ***πρώτο στάδιο***, το οποίο ονομάζεται ***στάδιο προφορτίσεως***, εφαρμόζεται φορτίο 10 kp και δημιουργείται στο δοκίμιο μικρό αποτύπωμα με μικρό βάθος που έχει ως σκοπό την ισοπέδωση τυχόν τοπικών ανωμαλιών. Έτσι, δεν απαιτείται προλείανση του υλικού.

β) Στο ***δεύτερο στάδιο***, το οποίο ονομάζεται ***στάδιο φορτίσεως***, εφαρμόζεται πρόσθετο φορτίο. Το πρόσθετο φορτίο είναι ίσο με 140 kp για την περίπτωση του αδαμάντινου κώνου και ίσο με 90 kp για την περίπτωση της χαλύβδινης σφαίρας. Το πρόσθετο φορτίο αφαιρείται μετά από μερικά δευτερόλεπτα και αφήνομε το αρχικό φορτίο των 10 kp. Το αποτύπωμα αποκτά πρόσθετο βάθος συγκριτικά με το μικρό βάθος του πρώτου σταδίου.

Η σκληρότητα κατά Rockwell HRC υπολογίζεται μετρώντας το πρόσθετο βάθος z του κώνου στο τέλος του δεύτερου σταδίου από τη σχέση:

$$HRC = 130 - \frac{z}{0{,}002}. \tag{1.17}$$

Η σκληρότητα κατά Rockwell HRB υπολογίζεται μετρώντας το πρόσθετο βάθος z της σφαίρας στο τέλος του δεύτερου σταδίου από τη σχέση:

$$HRB = 100 - \frac{z}{0{,}002}\ . \qquad (1.18)$$

Η σκληρότητα HRC και HRB υπολογίζεται ως ο μέσος όρος δύο σκληρομετρήσεων.

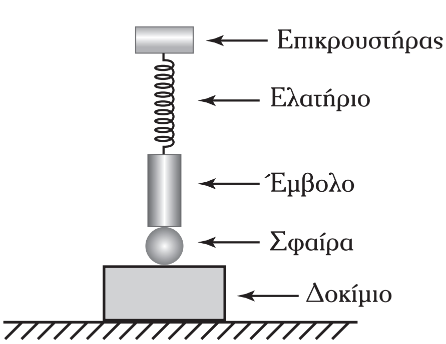
1.7.2 Δυναμικές μέθοδοι σκληρομετρήσεως.

Σε αντίθεση με τις στατικές μεθόδους, στις οποίες η φόρτιση γίνεται στατικά, οι δυναμικές μέθοδοι στηρίζονται στη φόρτιση της επιφάνειας του υλικού του οποίου μετρείται η σκληρότητα, μέσω του διεισδυτή με κρούση του στο προς σκληρομέτρηση σώμα (δοκίμιο), καθώς εφάπτεται στην επιφάνεια σκληρομετρήσεως. Η τιμή της σκληρότητας προσδιορίζεται από το μέγεθος του φορτίου που εφαρμόζεται και τα χαρακτηριστικά του αποτυπώματος στο προς σκληρομέτρηση σώμα.

Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται συνήθως για τη σκληρομέτρηση αντικειμένων μεγάλων διαστάσεων, από τα οποία δεν μπορούμε να εξάγομε μικρά δοκίμια. Το πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι τα όργανα που χρησιμοποιούνται για τις μετρήσεις μεταφέρονται εύκολα και επίσης είναι εύκολα στον χειρισμό τους.

1) Μέθοδος Baumann.

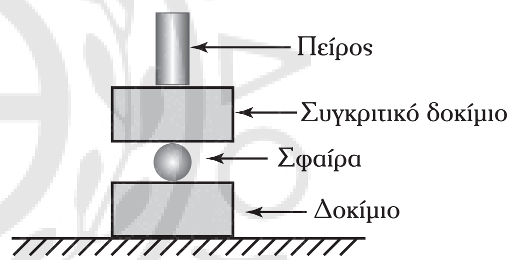
Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Baumann παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7β. Χρησιμοποιεί ένα έμβολο, στο μπροστινό τμήμα του οποίου τοποθετείται σφαιρικός διεισδυτής. Στο πίσω τμήμα του εμβόλου υπάρχει ένα ελατήριο με τον επικρουστήρα. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: το ελατήριο με τον επικρουστήρα αφήνεται να κτυπήσει το έμβολο, με αποτέλεσμα ο σφαιρικός διεισδυτής να διεισδύει κρουστικά στο υλικό που σκληρομετρείται. Έτσι, ο σφαιρικός διεισδυτής δημιουργεί στο υλικό αποτύπωμα με διάμετρο που εξαρτάται από τη σκληρότητα του υλικού. Στη συνέχεια, μετρούμε τη διάμετρο του αποτυπώματος και απ' αυτήν, με τη βοήθεια σκληρομετρικών κατά Baumann πινάκων, προσδιορίζομε τη σκληρότητα του υλικού κατά Baumann.



Σχ. 1.7β
Μέθοδος Baumann.

2) Μέθοδος Poldi.

Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Poldi παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7γ. Η σκληρομέτρηση με τη μέθοδο Poldi στηρίζεται στη σύγκριση του δοκιμίου του υλικού που σκληρομετρείται με άλλο δοκίμιο υλικού γνωστής σκληρότητας. Για τον σκοπό αυτό το σκληρόμετρο περιλαμβάνει έναν πείρο, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να ολισθαίνει μέσα σ' ένα κέλυφος. Στο κάτω μέρος του κελύφους βρίσκεται σφαιρικός διεισδυτής. Πάνω στον σφαιρικό διεισδυτή υπάρχει τρύπα με ορθογώνια διατομή σε διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα του κελύφους. Στην τρύπα αυτή τοποθετείται ορθογωνικό συγκριτικό δοκίμιο γνωστής σκληρότητας. Το δοκίμιο εφάπτεται από το πάνω μέρος με τον πείρο και από το κάτω με τον σφαιρικό διεισδυτή.



Σχ. 1.7γ
Μέθοδος Poldi.

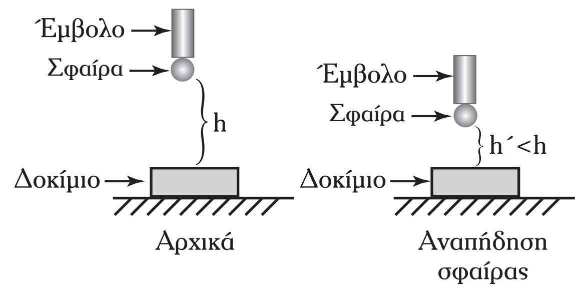
Ο σφαιρικός διεισδυτής (σφαίρα) ακουμπά στην επιφάνεια του υλικού που θα σκληρομετρηθεί (δοκίμιο προς σκληρόμετρηση). Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Με ένα σφυρί κτυπούμε κρουστικά τον πείρο του σκληρομέτρου. Αποτέλεσμα του κτυπήματος είναι ότι ο σφαιρικός διεισδυτής δημιουργεί αποτύπωμα και στο συγκριτικό δοκίμιο και στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Στη συνέχεια, μετρούμε τις διαμέτρους των δύο αποτυπωμάτων και με τη βοήθεια συγκριτικών σκληρομετρικών κατά Poldi πινάκων προσδιορίζομε τη σκληρότητα του υλικού κατά Poldi.

1.7.3 Μέθοδοι σκληρομετρήσεως με αναπήδηση.

Οι μέθοδοι σκληρομετρήσεως με αναπήδηση βασίζονται στην ελαστικότητα του υλικού που σκληρομετρείται και όχι στην παραμόρφωση που προκαλεί η φόρτιση, όπως γίνεται στις μεθόδους των άλλων κατηγοριών. Συγκεκριμένα, οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής στηρίζονται στη μέτρηση της αναπηδήσεως σώματος που πέφτει από ορισμένο ύψος πάνω στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε.

1) Μέθοδος Shore.

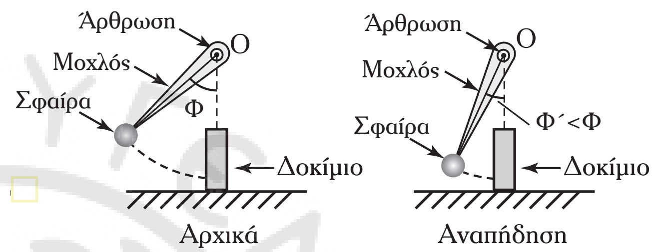
Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Shore παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7δ. Περιλαμβάνει ένα έμβολο, στο κάτω μέρος του οποίου υπάρχει μια σφαίρα. Το έμβολο έχει τη δυνατότητα να κινείται ελεύθερα εντός του κελύφους του σκληρομέτρου. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Το έμβολο με τη σφαίρα αφήνεται να πέσει στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Εάν το υλικό είναι πάρα πολύ σκληρό, η σφαίρα δεν το παραμορφώνει και το έμβολο αναπηδά στην αρχική θέση. Αντίθετα, εάν το υλικό στο οποίο προσπίπτει η σφαίρα δεν είναι τόσο σκληρό, τότε η σφαίρα παραμορφώνει το υλικό, χάνει μέρος της κινητικής της ενέργειας και το έμβολο αναπηδά φτάνοντας σε ύψος (ύψος αναπηδήσεως) χαμηλότερο από το αρχικό. Όσο πιο μαλακό είναι το υλικό που σκληρομετρείται, τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση που υφίσταται η επιφάνειά του από τη σφαίρα, με αποτέλεσμα η αναπήδηση του εμβόλου να φτάνει σε ακόμη χαμηλότερο ύψος αναπηδήσεως. Αυτό που μετρούμε είναι η διαφορά μεταξύ του αρχικού ύψους του εμβόλου και του ύψους αναπηδήσεως. Από τη διαφορά αυτή προσδιορίζεται η σκληρότητα κατά Shore.



Σχ. 1.7δ
Μέθοδος Shore.

2) Μέθοδος Leesen.

Η αρχή λειτουργίας του σκληρομέτρου Leesen παρουσιάζεται στο σχήμα 1.7ε. Περιλαμβάνει έναν μοχλό, το ένα άκρο του οποίου στηρίζεται σε άρθρωση, ενώ στο άλλο άκρο του υπάρχει ο σφαιρικός διεισδυτής. Η άρθρωση επιτρέπει στον μοχλό να κινείται κυκλικά μπροστά από μία κλίμακα γωνιών. Η διαδικασία της σκληρομετρήσεως γίνεται ως εξής: Σηκώνομε τον μοχλό σ' ένα σημείο της κλίμακας (αρχική γωνία) και τον αφήνομε να πέσει στην επιφάνεια του υλικού που σκληρομετρούμε. Το άκρο του μοχλού που έχει τον σφαιρικό διεισδυτή κτυπά στην επιφάνεια του υλικού και αναπηδά. Εάν το υλικό είναι πάρα πολύ σκληρό, η σφαίρα δεν το παραμορφώνει και ο μοχλός αναπηδά στην αρχική θέση. Αντίθετα, εάν το υλικό στο οποίο προσπίπτει η σφαίρα δεν είναι τόσο σκληρό, τότε η σφαίρα παραμορφώνει το υλικό, χάνει μέρος της κινητικής της ενέργειας και ο μόχλος αναπηδά φτάνοντας σε γωνία μικρότερη από την αρχική. Όσο πιο μαλακό είναι το υλικό που σκληρομετρείται, τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση που υφίσταται η επιφάνειά του από τη σφαίρα, με αποτέλεσμα η αναπήδηση του μοχλού να φτάνει σε ακόμη μικρότερη γωνία αναπηδήσεως. Αυτό που μετρούμε είναι η διαφορά μεταξύ της αρχικής γωνίας του μοχλού και της γωνίας αναπηδήσεως. Από τη διαφορά αυτή, με τη βοήθεια των πινάκων του σκληρομέτρου Leesen προσδιορίζεται η σκληρότητα κατά Leesen.



Σχ. 1.7ε
Μέθοδος Leesen.

Ασκήσεις.

1. *Δοκίμιο από ανθρακοχάλυβα έχει σκληρότητα κατά Brinell HB = 2.200 N/mm^2. Να βρεθεί η τάση θραύσεώς του σε εφελκυσμό. Δίνεται ο συντελεστής αναλογίας του ανθρακοχάλυβα της σχέσεως τάσεως θραύσεως/σκληρότητας κατά Brinell k = 0,36.*

2. *Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό ενός τεμαχίου από αλουμίνιο είναι $\sigma_{\theta\rho}$ = 190 N/mm^2. Να υπολογιστεί η σκληρότητά του κατά Brinell. Δίνεται ο συντελεστής αναλογίας του αλουμινίου για τη σχέση τάσεως θραύσεως/σκληρότητας κατά Brinell k = 0,35.*

1.8 Επίδραση θερμοκρασίας και χρόνου στην αντοχή των υλικών.

Στις παραγράφους 1.3 και 1.4 μελετήσαμε τις παραμορφώσεις των στερεών σωμάτων που οφείλονται στην εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων σ' αυτά. Εκτός από τις εξωτερικές δυνάμεις, παραμορφώσεις στα στερεά σώματα προκαλούνται και από άλλα αίτια, όπως:

1) μεταβολές της θερμοκρασίας και
2) πάροδος του χρόνου.

Οι μεταβολές της θερμοκρασίας έχουν ως αποτέλεσμα πρώτον τα στερεά σώματα να διαστέλλονται όταν η θερμοκρασία αυξάνεται και να συστέλλονται όταν η θερμοκρασία μειώνεται και δεύτερον να μειώνονται τα όρια αντοχής των υλικών με την αύξηση της θερμοκρασίας.

Η πάροδος του χρόνου έχει ως αποτέλεσμα σε περιβάλλοντα με υψηλές θερμοκρασίες:

1) Να αυξάνονται οι παραμορφώσεις παρόλο που τα φορτία δεν αλλάζουν και
2) να μειώνονται τα όρια αντοχής των υλικών.

Όπως παρατηρούμε, ο παράγοντας του χρόνου λειτουργεί συνδυαστικά με τις υψηλές θερμοκρασίες.

Στη συνέχεια, παρουσιάζομε αναλυτικά τις ανωτέρω επιδράσεις των μεταβολών της θερμοκρασίας και του χρόνου στην αντοχή των υλικών.

1.8.1 Συστολή και διαστολή λόγω μεταβολών της θερμοκρασίας.

Αρχικά, ας μελετήσομε την περίπτωση ράβδου, της οποίας η θερμοκρασία μεταβάλλεται από την αρχική θερμοκρασία $\theta_{αρχ}$ στην τελική $\theta_{τελ}$ κατά $\Delta\theta = \theta_{τελ} - \theta_{αρχ}$. Η μεταβολή $\Delta\theta$ είναι θετική όταν έχομε αύξηση της θερμοκρασίας ($\theta_{τελ} > \theta_{αρχ}$) και αρνητική όταν έχομε μείωση ($\theta_{τελ} < \theta_{αρχ}$). Η μεταβολή της θερμοκρασίας έχει ως αποτέλεσμα το αρχικό μήκος l της ράβδου να γίνει $l_{τελ}$, δηλαδή να μεταβληθεί κατά $\Delta l = l_{τελ} - l$. Η μεταβολή Δl παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta. \qquad (1.19)$$

Ο συντελεστής α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής και εκφράζει τη μεταβολή του μήκους της ράβδου ανά μονάδα μήκους και ανά βαθμό θερμοκρασίας.

Από τη σχέση (1.19) βλέπομε ότι όταν η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι θετική, έχομε αύξηση του μήκους της ράβδου, δηλαδή $\Delta l > 0$. Αντίθετα, όταν η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι αρνητική, έχομε μείωση του μήκους της ράβδου, δηλαδή $\Delta l < 0$. Επίσης, από τη σχέση (1.19) βλέπομε ότι η μεταβολή του μήκους Δl:

1) Είναι ανάλογη της μεταβολής θερμοκρασίας.
2) Είναι ανάλογη του αρχικού μήκους της ράβδου.
3) Εξαρτάται από το υλικό της ράβδου.

Η εξάρτηση από το υλικό εκφράζεται μέσω του συντελεστή θερμικής διαστολής, καθώς αυτός εξαρτάται από το υλικό της ράβδου. Στον πίνακα 1.8.1 βλέπομε ότι ο συντελεστής θερμικής διαστολής διαφέρει σημαντικά μεταξύ των υλικών. Αυτό σημαίνει ότι για την ίδια μεταβολή θερμοκρασίας υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση στη μεταβολή του μήκους μεταξύ ράβδων από διαφορετικά υλικά που έχουν το ίδιο αρχικό

Πίνακας 1.8.1
Ο συντελεστής θερμικής διαστολής διαφόρων υλικών για θερμοκρασίες στην περιοχή από 0°C έως 100°C.

Υλικό	Συντελεστής θερμικής διαστολής (1/°C)	Υλικό	Συντελεστής θερμικής διαστολής (1/°C)
Αλουμίνιο	$23{,}8 \cdot 10^{-6}$	Ορείχαλκος	$18{,}5 \cdot 10^{-6}$
Άργυρος	$19{,}7 \cdot 10^{-6}$	Πλατίνα	$9 \cdot 10^{-6}$
Κασσίτερος	$23 \cdot 10^{-6}$	Σίδηρος	$12 \cdot 10^{-6}$
Κοβάλτιο	$12{,}7 \cdot 10^{-6}$	Χαλκός	$17 \cdot 10^{-6}$
Μαγνήσιο	$26 \cdot 10^{-6}$	Χάλυβας	$12 \cdot 10^{-6}$
Μόλυβδος	$29{,}2 \cdot 10^{-6}$	Χρυσός	$14{,}4 \cdot 10^{-6}$
Μπρούντζος	$17{,}5 \cdot 10^{-6}$	Χυτοσίδηρος	$9 \cdot 10^{-6}$
Νικέλιο	$13 \cdot 10^{-6}$	Χυτοχάλυβας	$11{,}7 \cdot 10^{-6}$
Ξύλο	$8 \cdot 10^{-6}$	Ψευδάργυρος	$29 \cdot 10^{-6}$

μήκος. Για παράδειγμα, εάν έχομε δύο ράβδους με ίδιο μήκος από δύο διαφορετικά υλικά, με το ένα υλικό να έχει τριπλάσιο συντελεστή θερμικής διαστολής από το άλλο, τότε η μεταβολή του μήκους της ράβδου από το πρώτο υλικό είναι τριπλάσια από τη μεταβολή του μήκους της ράβδου από το δεύτερο, για την ίδια μεταβολή θερμοκρασίας.

Παράδειγμα 12.

Δίνεται ράβδος από ψευδάργυρο που έχει μήκος $l = 1$ m. Να υπολογιστούν:

1) Η μεταβολή του μήκους της ράβδου όταν αυξηθεί η θερμοκρασία της από 30°C σε 60°C.

2) Το τελικό μήκος της ράβδου.

Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής του ψευδαργύρου $\alpha = 29 \cdot 10^{-6}\,/^{o}C$.

Λύση.

1) Η αύξηση της θερμοκρασίας από την αρχική τιμή $\theta_{\alpha\rho\chi} = 30^{o}C$ στην τελική $\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 60^{o}C$ κατά $\Delta\theta = 60^{o}C - 30^{o}C = 30^{o}C$ έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του αρχικού μήκους της ράβδου $l = 1$ m κατά Δl που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta = 29 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{^{o}C} \cdot 1\text{ m} \cdot 30^{o}C = 0{,}87 \cdot 10^{-3}\text{ m} = 0{,}87\text{ mm}.$$

2) Άρα, το τελικό μήκος της ράβδου $l_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι:

$$l_{\tau\varepsilon\lambda} = l + \Delta l = 1\text{ m} + 0{,}87\text{ mm} = 1.000{,}87\text{ mm}.$$

Η παρεμπόδιση της αυξήσεως ή της μειώσεως του μήκους μιας ράβδου λόγω της αυξήσεως ή της μειώσεως της θερμοκρασίας, αντίστοιχα, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση καταπονήσεων στο υλικό, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε μη επιθυμητές καταστάσεις, όπως στη θραύση της ράβδου. Χρειάζεται λοιπόν πολύ μεγάλη προσοχή στον σχεδιασμό των κατασκευών, ώστε να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη οι επιδράσεις των μεταβολών της θερμοκρασίας. Ιδιαίτερη έμφαση στις επιδράσεις αυτές πρέπει να δίνεται στις περιπτώσεις κατά τις οποίες, εκ του ρόλου τους, οι κατασκευές υπόκεινται σε μεγάλες μεταβολές της θερμοκρασίας, καθώς και στις περιπτώσεις συνθέτων κατασκευών που περιλαμβάνουν πολλά υλικά με διαφορετικούς μεταξύ τους συντελεστές θερμικής διαστολής.

Το φαινόμενο της εμφανίσεως καταπονήσεων λόγω της παρεμποδίσεως της αυξήσεως ή της μειώσεως των διαστάσεων μιας ράβδου εξαιτίας θερμοκρασιακών μεταβολών αναλύεται στην παράγραφο 2.5.

1.8.2 Μεταβολή των ορίων αντοχής των υλικών λόγω υψηλών θερμοκρασιών.

Η μεταβολή της αντοχής των συνηθισμένων υλικών για τις συνηθισμένες μεταβολές της θερμοκρασίας είναι πρακτικά ασήμαντη. Σημαντικές μειώσεις αντοχής μπορεί να παρατηρηθούν σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες, όπως σε λέβητες και σε κατασκευές σε περίπτωση πυρκαγιάς.

Τα όρια αντοχής των υλικών, όπως το όριο θραύσεως και το όριο διαρροής (παράγρ. 1.3 και 1.4), εξαρτώνται από τη θερμοκρασία. Τα πειράματα εφελκυσμού και θλίψεως που παρουσιάσαμε στις εν λόγω παραγράφους πραγματοποιήθηκαν σε χαμηλές θερμοκρασίες, όπως είναι αυτές της θερμοκρασίας περιβάλλοντος. Έτσι, οι τιμές των ορίων αντοχής των υλικών που προέκυψαν από τα πειράματα ισχύουν μόνο για τις θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

Συχνά, οι κατασκευές αντέχουν σε θερμοκρασίες αρκετά πιο υψηλές από τις θερμοκρασίες περιβάλλοντος. Έτσι, για τον σχεδιασμό των κατασκευών που αντέχουν σε θερμοκρασίες πολύ υψηλές πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα όρια αντοχής των υλικών στις υψηλές θερμοκρασίες. Η αύξηση της θερμοκρασίας έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των χαρακτηριστικών ορίων αντοχής των υλικών. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει για θερμοκρασίες μεγαλύτερες από μία οριακή τιμή της θερμοκρασίας. Η οριακή αυτή τιμή της θερμοκρασίας εξαρτάται από το υλικό.

1.8.3 Επίδραση του χρόνου.

Πολλές φορές παρατηρείται το εξής φαινόμενο: μια κατασκευή που δέχεται ένα σταθερό φορτίο παρουσιάζει αύξηση των παραμορφώσεών της, όπως αύξηση της επιμηκύνσεώς της, με την πάροδο του χρόνου.

Το φαινόμενο της αυξήσεως της παραμορφώσεως μιας κατασκευής με την πάροδο του χρόνου, χωρίς να αυξάνονται οι τάσεις που δρουν σ' αυτήν ονομάζεται ***ερπυσμός***.

Ο όρος ερπυσμός οφείλεται στην επιμήκυνση που εμφανίζει μια κατασκευή με την πάροδο του χρόνου, με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι το υλικό της έρπει. Στις συνήθεις θερμοκρασίες το φαινόμενο του ερπυσμού δεν είναι σημαντικό για τα περισσότερα υλικά, όχι όμως για όλα. Για παράδειγμα, το σκυρόδεμα εμφανίζει σημαντικό ερπυσμό σε συνηθισμένες θερμοκρασίες. Τα ερπυστικά φαινόμενα γίνονται σημαντικά σε υψηλές θερμοκρασίες. Ο ερπυσμός με την πάροδο του χρόνου μπορεί να γίνει τόσο μεγάλος, ώστε κάποτε η κατασκευή να θραυστεί, παρόλο που οι αναπτυσσόμενες τάσεις στην κατασκευή είναι πολύ μικρότερες από την τάση θραύσεως σε θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Η μελέτη του φαινομένου του ερπυσμού ενός υλικού πραγματοποιείται με ειδικό πείραμα που ονομάζεται ***πείραμα ερπυσμού***.

1.8.4 Πείραμα ερπυσμού.

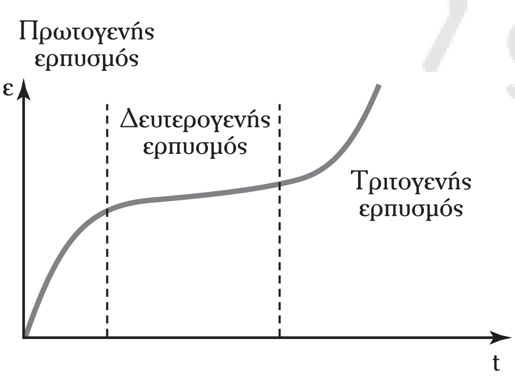
Στο πείραμα αυτό, ένα δοκίμιο, σε περιβάλλον συγκεκριμένης υψηλής θερμοκρασίας που διατηρείται σταθερή, υποβάλλεται σε εφελκυσμό. Η τάση που προκαλεί τον εφελκυσμό του δοκιμίου διατηρείται για τον χρόνο του πειράματος σταθερή. Ένα πείραμα ερπυσμού μπορεί να κρατήσει από μερικές ώρες μέχρι και αρκετά χρόνια. Στο πείραμα μετρείται η ανηγμένη επιμήκυνση με την πάροδο του χρόνου και υπολογίζεται ο ρυθμός μεταβολής της, ο οποίος ονομάζεται ***ταχύτητα ερπυσμού***.

Η γραφική παράσταση που παρουσιάζει την ανηγμένη επιμήκυνση με την πάροδο του χρόνου ονομάζεται ***καμπύλη ερπυσμού*** (σχ. 1.8). Από την καμπύλη ερπυσμού παρατηρούμε ότι ο ερπυσμός περιλαμβάνει τα ακόλουθα τρία στάδια:

1) ***Στάδιο πρωτογενούς ερπυσμού***, όπου η ταχύτητα ερπυσμού μειώνεται με τον χρόνο.

2) ***Στάδιο δευτερογενούς ερπυσμού***, όπου η ταχύτητα ερπυσμού είναι σταθερή με τον χρόνο.

3) ***Στάδιο τριτογενούς ερπυσμού***, στο οποίο παρατηρείται επιτάχυνση της παραμορφώσεως μέχρι να σημειωθεί θραύση του υλικού.



Σχ. 1.8
Καμπύλη και στάδια ερπυσμού.

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων ερπυσμού είναι ο προσδιορισμός της ***αντοχής των υλικών σε ερπυσμό*** ή αλλιώς ***εν θερμώ***, δηλαδή της τάσεως που προκαλεί ορισμένη παραμόρφωση σε δεδομένο χρόνο και θερμοκρασία. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων ερπυσμού παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις κατασκευές που θα τοποθετηθούν σε περιβάλλον υψηλής θερμοκρασίας για μεγάλη χρονική διάρκεια. Οι σχεδιαστές των κατασκευών αυτών πρέπει να λαμβάνουν οπωσδήποτε υπόψη κατά τον σχεδιασμό τα όρια αντοχής των υλικών εν θερμώ, στη θερμοκρασία λειτουργίας της κατασκευής. Τα όρια αυτά προκύπτουν από τα πειράματα ερπυσμού.

1.8.5 Όρια αντοχής εν θερμώ.

Τα διάφορα πρότυπα που περιλαμβάνουν τα όρια αντοχής εν θερμώ των υλικών, στηρίζονται κυρίως στα εξής μεγέθη για κάθε υλικό:

1) Στην τάση $\sigma_{\alpha,\theta,t}$ ή αλλιώς $\sigma_{\alpha,\theta}/t$, η οποία προκαλεί στο υλικό ανηγμένη επιμήκυνση α% μετά την πάροδο χρόνου t, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

2) Στην τάση $\sigma_{\theta\rho,\theta,t}$ ή αλλιώς $\sigma_{\theta\rho,\theta}/t$, η οποία προκαλεί στο υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου t, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

Τα όρια που συνήθως χρησιμοποιούνται με βάση τους ορισμούς των ανωτέρω μεγεθών είναι τα εξής:

1) Η τάση $\sigma_{1,\theta,10.000h}$ ή αλλιώς $\sigma_{1,\theta}/10.000\,h$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό ανηγμένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών[5], σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

2) Η τάση $\sigma_{1,\theta,100.000h}$ ή αλλιώς $\sigma_{1,\theta}/100.000\,h$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό ανηγμένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών[6], σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

3) Η τάση $\sigma_{\theta\rho,\theta,10.000h}$ ή αλλιώς $\sigma_{\theta\rho,\theta}/10.000\,h$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

4) Η τάση $\sigma_{\theta\rho,\theta,100.000h}$ ή αλλιώς $\sigma_{\theta\rho,\theta}/100.000\,h$. Η τάση αυτή προκαλεί στο υπό εξέταση υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών, σε περιβάλλον λειτουργίας με θερμοκρασία θ.

Είναι προφανές από τον ορισμό τους ότι:

---

[5] Οι 10.000 ώρες αντιστοιχούν σε περίπου 417 ημέρες.

[6] Οι 100.000 ώρες αντιστοιχούν σε περίπου 4.167 ημέρες ή περίπου 11 έτη.

1) Για το ίδιο υλικό $σ_{1,θ,10.000h} > σ_{1,θ,100.000h}$, δηλαδή η τάση που προκαλεί στο υλικό ανημένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών είναι μεγαλύτερη από την τάση που προκαλεί στο εν λόγω υλικό την ίδια ανηγμένη επιμήκυνση 1% μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών (σε περιβάλλον λειτουργίας με την ίδια θερμοκρασία θ).

2) Για το ίδιο υλικό $σ_{θρ,θ,10.000h} > σ_{θρ,θ,100.000h}$, δηλαδή η τάση που προκαλεί στο υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου 10.000 ωρών είναι μεγαλύτερη από την τάση που προκαλεί στο εν λόγω υλικό θραύση μετά την πάροδο χρόνου 100.000 ωρών (σε περιβάλλον λειτουργίας με την ίδια θερμοκρασία θ).

Παράδειγμα 13.

Τα όρια αντοχής εν θερμώ ενός υλικού X για διάφορες θερμοκρασίες δίνονται στον πίνακα 1.8.2.

Το υλικό πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε θερμοκρασία 460°C για να φορτιστεί με τάση σ = 3 N/mm² για τις επόμενες 100.000 ώρες.

1) Μπορεί το υλικό να αντέξει τη φόρτιση για την οποία προορίζεται;

2) Η ανηγμένη επιμήκυνση στο τέλος της περιόδου των 100.000 ωρών θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από 1%;

Λύση.

1) Από τον πίνακα 1.8.2 έχομε ότι στη θερμοκρασία των 460°C, η τάση θραύσεως για 100.000 ώρες είναι ίση με 8,2 N/mm². Η εφαρμοζόμενη τάση των 3 N/mm² είναι μικρότερη από την τάση θραύσεως. Άρα, το υλικό θα αντέξει τη φόρτιση, για την οποία προορίζεται.

2) Από τον πίνακα 1.8.2 έχομε ότι στη θερμοκρασία των 460°C, η τάση που προκαλεί επιμήκυνση 1% σε 100.000 ώρες είναι ίση με 4,1 N/mm². Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση των 3 N/mm² είναι μικρότερη από την τάση αυτή, η ανηγμένη επιμήκυνση στο τέλος της περιόδου των 100.000 ωρών θα είναι μικρότερη από 1%.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι τα προαναφερθέντα όρια αντοχής εν θερμώ των υλικών πρέπει να λαμβάνονται υπόψη παράλληλα με τα υπόλοιπα όρια αντοχής, όπως είναι το όριο διαρροής που αναφέραμε στην παράγραφο 1.3. Από όλα αυτά τα όρια πρέπει να χρησιμοποιείται κατά τον σχεδιασμό των κατασκευών αυτό που παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή στην περιοχή θερμοκρασιών στην οποία η κατασκευή αναμένεται να λειτουργήσει.

Πίνακας 1.8.2
Όρια αντοχής εν θερμώ υλικού X σε N/mm².

Θερμοκρασία (°C)	$\frac{σ_{1,θ}}{10.000h}$	$\frac{σ_{1,θ}}{100.000h}$	$\frac{σ_{θρ,θ}}{10.000h}$	$\frac{σ_{θρ,θ}}{100.000h}$
400	12,4	11,0	16,5	15,4
410	11,2	9,8	15,3	14,3
420	10,0	8,6	14,1	13,0
430	9,8	7,4	12,9	11,8
440	8,7	6,3	11,7	10,6
450	7,6	5,2	10,5	9,4
460	6,5	4,1	9,3	8,2
470	5,5	3,2	8,1	7,1
480	4,6	2,6	7,1	6,2

1.8.6 Από τι εξαρτάται το φαινόμενο του ερπυσμού;

Τα πειράματα ερπυσμού έδειξαν ότι το φαινόμενο του ερπυσμού των υλικών εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες:

1) ***Το σημείο τήξεώς τους.*** Η θερμοκρασία εμφανίσεως ερπυσμού στα μέταλλα είναι περίπου ίση με το ένα τρίτο του σημείου τήξεώς τους. Επίσης, τα μέταλλα που έχουν υψηλό σημείο τήξεως παρουσιάζουν χαμηλό ερπυσμό και το αντίθετο.

2) ***Αν είναι καθαρά μέταλλα ή κράματα.*** Συγκεκριμένα, ο ερπυσμός των κραμάτων[7] μετάλλων είναι μικρότερος από τον ερπυσμό των καθαρών μετάλλων. Έτσι, σε κατασκευές που λειτουργούν σε υψηλές θερμοκρασίες χρησιμοποιούνται κράματα μετάλλων και όχι καθαρά μέταλλα.

3) ***Το μέγεθος των κόκκων τους.*** Συγκεκριμένα, τα υλικά που έχουν λεπτούς κόκκους παρουσιάζουν μεγαλύτερο ερπυσμό από ό,τι τα υλικά που

[7] ***Κράματα*** ονομάζονται τα υλικά που συνίστανται από διαφορετικά συστατικά. Περιέχουν ένα μέταλλο ως το κύριο συστατικό τους, ενώ τα υπόλοιπα συστατικά τους μπορεί να είναι μέταλλα ή αμέταλλα. Τα κράματα δημιουργούνται προκειμένου να συνδυαστούν οι ιδιότητες των διαφόρων συστατικών που τα αποτελούν βελτιώνοντας έτσι την αντοχή τους συγκριτικά με τα καθαρά μέταλλα.

έχουν χονδρούς κόκκους. Έτσι, σε κατασκευές που λειτουργούν σε υψηλές θερμοκρασίες χρησιμοποιούνται υλικά με χονδρούς κόκκους.

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι υπάρχουν υλικά που παρουσιάζουν πολύ μεγάλες παραμορφώσεις από ερπυσμό, ακόμα και σε χαμηλές θερμοκρασίες. Τέτοια υλικά είναι τα πολυμερή. Επίσης, υπάρχουν υλικά, των οποίων ο ερπυσμός μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Ένα τέτοιο υλικό είναι το μπετόν, ο ερπυσμός του οποίου μειώνεται με την ενσωμάτωση σιδερένιου οπλισμού.

Ασκήσεις.

1. *Δίνεται ράβδος από σίδηρο που έχει μήκος l = 2,5 m. Να υπολογιστούν:*
   α) Η μεταβολή του μήκους της ράβδου όταν ελαττωθεί η θερμοκρασία της από 50 °C σε 25°C.
   β) Το τελικό μήκος της ράβδου.
   Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής του σιδήρου $a = 12 \cdot 10^{-6}/\,^{\circ}C$.

2. *Προκειμένου να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής διαστολής ενός υλικού μιας ράβδου, αυξάνεται η θερμοκρασία της από 30°C σε 70°C. Ως αποτέλεσμα της αυξήσεως της θερμοκρασίας παρατηρείται ότι το μήκος της ράβδου αυξάνει από 1m σε 1,001m. Ποιος είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής του υλικού της;*

3. *Τα όρια αντοχής εν θερμώ ενός υλικού Χ για διάφορες θερμοκρασίες δίνονται στον πίνακα 1.8.2. Το υλικό πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε θερμοκρασία 440°C για να φορτισθεί με τάση $\sigma = 4\ N/mm^2$ για τις επόμενες 100.000 ώρες.*
   α) Μπορεί το υλικό να αντέξει τη φόρτιση για την οποία προορίζεται;
   β) Η ανηγμένη επιμήκυνση στο τέλος της περιόδου των 100.000 ωρών θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από 1%;
   γ) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β) στην περίπτωση που η τάση φορτίσεως είναι $\sigma = 6{,}5\ N/mm^2$.

1.9 Κόπωση υλικού.

Οι κατασκευές που δέχονται μεταβλητή φόρτιση, μετά από αρκετές εκατοντάδες χιλιάδες επαναλήψεις της φορτίσεώς τους, θραύονται ή εμφανίζουν ρωγμές, παρόλο που δέχονται τάσεις μικρότερες από την τάση θραύσεως του υλικού τους. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***κόπωση*** του υλικού. Ειδικότερα:

Κόπωση ενός υλικού ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο το υλικό στο οποίο ενεργεί μεταβλητό φορτίο, μετά από έναν ορισμένο αριθμό επαναλήψεως της φορτίσεως, της τάξεως των εκατοντάδων χιλιάδων φορών, θραύεται ή παρουσιάζει ρωγμές σε τάση μικρότερη από την τάση θραύσεως που έχει το υλικό για φόρτιση με σταθερό φορτίο.

Το φαινόμενο της κοπώσεως μελετήθηκε αρχικά από τον Γερμανό ερευνητή Wöhler και περιγράφεται με τη βοήθεια των διαγραμμάτων κοπώσεως (παράγρ. 1.9.1). Το φαινόμενο οφείλεται σε μία βαθμιαία, μόνιμη μεταβολή στη δομή του υλικού των κατασκευών, η οποία παρατηρείται στις κατασκευές που δέχονται μεταβλητή φόρτιση. Οι κυριότεροι παράγοντες που επιδρούν στην εμφάνιση του φαινομένου της κοπώσεως παρουσιάζονται στην παράγραφο 1.9.2.

Ευαίσθητα σε κόπωση είναι συνθετικά στοιχεία μηχανών ή κατασκευές που στηρίζουν μηχανές. Ως παράδειγμα αναφέρομε τις γερανογέφυρες και τις δοκούς που τις στηρίζουν.

Η μεταβλητή φόρτιση που μπορεί να προκαλέσει κόπωση ονομάζεται συνήθως επαναλαμβανόμενη φόρτιση.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.1.2, τα φορτία που ενεργούν σε μια κατασκευή μπορεί να είναι σταθερά ή μεταβλητά. Όταν σε μια κατασκευή ενεργούν μεταβλητά φορτία λέμε ότι έχει μεταβλητή φόρτιση.

Μια ειδική περίπτωση μεταβλητών φορτίων είναι τα επαναλαμβανόμενα κατά περιοδικό τρόπο φορτία. Ειδικές υποπεριπτώσεις επαναλαμβανομένων κατά περιοδικό τρόπο φορτίων είναι οι ακόλουθες:

1) ***Μη εναλλασσόμενη περιοδική φόρτιση.*** Στην περίπτωση αυτή η τάση φορτίσεως μεταβάλλεται ημιτονοειδώς[8] μεταξύ μιας ελάχιστης θετικής τιμής σ_{min} και μιας μέγιστης τιμής σ_{max}. Η μέση τάση φορτίσεως είναι:

$$\sigma_{μέση} = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2}\ .$$

2) ***Πρωτογενής φόρτιση***. Στην περίπτωση αυτή η τάση φορτίσεως μεταβάλλεται ημιτονοειδώς

[8] Ως ημιτονοειδείς ονομάζονται οι μεταβολές που είναι ανάλογες με τις μεταβολές του ημιτόνου. Η γραφική παράσταση των μεταβολών αυτών είναι ίδια με την εικόνα της γραφικής παραστάσεως της ψ = ημχ (σχ. 1.9α).

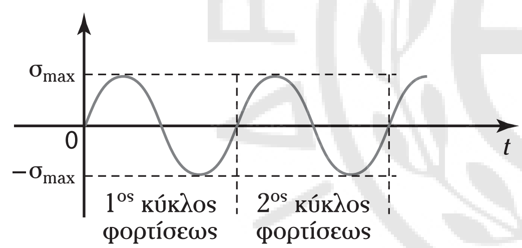
μεταξύ του μηδενός και μιας μέγιστης τιμής σ_{max}. Η μέση τάση είναι:

$$\sigma_{μέση} = \frac{\sigma_{max}}{2}\ .$$

3) ***Εναλλασσόμενη ή παλμική φόρτιση.*** Στην περίπτωση αυτή η τάση φορτίσεως μεταβάλλεται ημιτονοειδώς μεταξύ μιας ελάχιστης αρνητικής τιμής $-\sigma_{max}$ και μιας μέγιστης τιμής σ_{max}. Η τάση είναι άλλοτε θετική, οπότε έχομε εφελκυσμό και άλλοτε αρνητική, οπότε έχομε θλίψη. Έτσι η μέση τάση είναι $\sigma_{μέση} = 0$.

1.9.1 Διάγραμμα κοπώσεως.

Η μελέτη του φαινομένου της κοπώσεως γίνεται με τη βοήθεια σχετικού πειράματος. Στο πείραμα χρησιμοποιούμε δοκίμια του υπό μελέτη υλικού, στα οποία εφαρμόζεται εναλλασσόμενη φόρτιση, όπως εικονίζεται στο σχήμα 1.9α. Μια πλήρης εναλλαγή φορτίσεως ονομάζεται ***κύκλος φορτίσεως***. Σε κάθε δοκίμιο εφαρμόζεται μια διαφορετική μέγιστη τάση φορτίσεως. Στο πείραμα μετρούμε τον αριθμό των κύκλων φορτίσεως μέχρι κάθε δοκίμιο να υποστεί θραύση.



Σχ. 1.9α
Εναλλασσόμενη φόρτιση δοκιμίων.

Τα αποτελέσματα του πειράματος απεικονίζονται σε διάγραμμα που ονομάζεται ***διάγραμμα κοπώσεως*** ή αλλιώς ***διάγραμμα Wöhler*** (σχ. 1.9β). Το διάγραμμα κοπώσεως απεικονίζει τη σχέση της διακυμάνσεως της τάσεως που εφαρμόζεται στα δοκίμια ως συνάρτηση του αριθμού των κύκλων φορτίσεως μέχρι τη θραύση των δοκιμίων. Η διακύμανση τάσεως είναι η αλγεβρική διαφορά μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης τιμής της τάσεως σε κάθε κύκλο, ανεξαρτήτως προσήμου. Για την περίπτωση των ημιτονειδών μεταβολών του σχήματος 1.9α η διακύμανση της τάσεως ισούται με το διπλάσιο της μέγιστης τάσεως σ_{max}. Ο κατακόρυφος άξονας παρουσιάζει τη διακύμανση της τάσεως σ που εφαρμόζεται στα δοκίμια και ο οριζόντιος σε λογαριθμική κλίμακα το αντίστοιχο πλήθος των κύκλων φορτίσεως.

Μελετώντας το διάγραμμα κοπώσεως καταλήγομε στις εξής σημαντικές διαπιστώσεις:

1) Η συμπεριφορά του υλικού στη μεταβλητή φόρτιση είναι πολύ διαφορετική από τη συμπεριφορά του υλικού στη φόρτιση με σταθερά φορτία. Στη φόρτιση με σταθερά φορτία, εάν δεν έχομε ερπυσμό, το υλικό δεν θραύεται όταν φορτιστεί με φορτίο κάτω του ορίου θραύσεως. Αντίθετα, στη μεταβλητή φόρτιση όσο πιο πολλούς κύκλους φορτίσεως δέχεται το υλικό, τόσο πιο μικρή τάση μπορεί να αντέξει.

2) Ο αριθμός των κύκλων φορτίσεως μέχρι τη θραύση αυξάνει, όσο η διακύμανση της τάσεως που εφαρμόζεται στα δοκίμια μειώνεται.

3) Υπάρχει μια οριακή τιμή της διακυμάνσεως τάσεως φορτίσεως, η οποία έχει την έξης ιδιότητα: όταν η διακύμανση της τάσεως της εναλλασσόμενης φορτίσεως είναι μικρότερη από την οριακή αυτή τιμή, το υλικό δεν θραύεται όσοι κύκλοι φορτίσεως και αν εφαρμοστούν. Με άλλα λόγια, στο υλικό μπορούν να εφαρμοστούν άπειροι κύκλοι φορτίσεως, με διακύμανση τάσεως εναλλασσόμενης φορτίσεως μικρότερη από την οριακή αυτή τιμή, χωρίς να υποστεί θραύση. Η οριακή αυτή τιμή φορτίσεως ονομάζεται ***τάση κοπώσεως*** ή ***όριο κοπώσεως*** ή ***δυναμική αντοχή του υλικού***. Επίσης, ονομάζεται και ***όριο αντοχής διάρκειας***, καθώς για τάσεις μικρότερες από την τιμή αυτή το υλικό έχει άπειρη διάρκεια ζωής και δεν θραύεται. Συνήθως, η τάση κοπώσεως εκφράζεται ως ποσοστό του ορίου θραύσεως σε εφελκυσμό που αντιστοιχεί σε φόρτιση με σταθερά φορτία.

4) Το όριο κοπώσεως αντιστοιχεί σε μία οριακή τιμή αριθμού κύκλων φορτίσεως, που συμβολίζεται με $N_{ορ}$ και ονομάζεται ***οριακός αριθμός κύκλων φορτίσεως***.

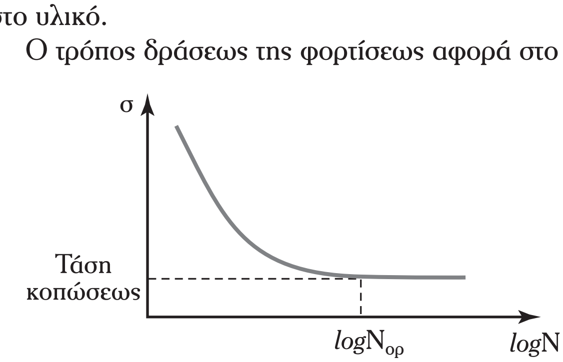
Η τάση κοπώσεως εξαρτάται από:

1) Το υλικό.

2) Τον τρόπο δράσεως της φορτίσεως και

3) το είδος της μεταβλητής φορτίσεως που δρα στο υλικό.

Ο τρόπος δράσεως της φορτίσεως αφορά στο εάν



Σχ. 1.9β
Διάγραμμα κοπώσεως.

η επιβαλλόμενη φόρτιση προκαλεί εφελκυσμό ή άλλη καταπόνηση. Η έννοια και τα είδη των καταπονήσεων παρουσιάζονται αντιστοίχως στις παραγράφους 1.12 και 1.13.

Σχετικά με το είδος της μεταβλητής φορτίσεως, αναφέρομε ότι εκτός από την εναλλασσόμενη φόρτιση μπορούμε να πραγματοποιήσομε και άλλα είδη μεταβλητής φορτίσεως, προκειμένου να μελετήσομε το φαινόμενο της κοπώσεως και να κατασκευάσομε διαγράμματα κοπώσεως, όπως αυτό που περιγράψαμε παραπάνω. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ανάλογη με τη διαδικασία που περιγράψαμε για την εναλλασσόμενη φόρτιση και περιλαμβάνει την κατασκευή αντίστοιχου διαγράμματος κοπώσεως. Από το διάγραμμα κοπώσεως που κατασκευάζομε προκύπτει το όριο κοπώσεως, που ορίζεται ως η τιμή της διακυμάνσεως τάσεως, κάτω από την οποία τα δοκίμια έχουν άπειρη ζωή όταν δέχονται τη μεταβλητή φόρτιση που πραγματοποιήσαμε και αντιστοιχεί στην εν λόγω φόρτιση. Επομένως, όταν δίνεται το όριο κοπώσεως, ενός υλικού πρέπει να συνοδεύεται και από την πληροφορία του είδους μεταβλητής φορτίσεως, στην οποία αντιστοιχεί.

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι αρκετές φορές το πείραμα κοπώσεως σταματά όταν συμπληρωθεί αριθμός κύκλων φορτίσεως μικρότερος από τον οριακό αριθμό κύκλων φορτίσεως. Στις περιπτώσεις αυτές προκύπτει ένα όριο αντοχής του υλικού σε κόπωση, το οποίο όμως αντιστοιχεί στον αριθμό κύκλων φορτίσεως που πραγματοποιήθηκαν. Ο αριθμός αυτός πρέπει να συνοδεύει το όριο αντοχής του υλικού σε κόπωση.

1.9.2 Παράγοντες που καθορίζουν την αντοχή υλικών σε κόπωση.

Με τη μελέτη του φαινομένου της κοπώσεως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η αντοχή των υλικών σε κόπωση εξαρτάται κυρίως από την ύπαρξη σημείων στα οποία λαμβάνει χώρα συγκέντρωση τάσεων, δηλαδή εμφανίζεται τάση πολύ μεγαλύτερη από την τάση των περιοχών μακριά από τα σημεία αυτά. Το φαινόμενο της συγκεντρώσεως τάσεων αναλύεται στην παράγραφο 1.10. Συγκεκριμένα, η κόπωση ενός υλικού εξαρτάται κυρίως από τους ακόλουθους παράγοντες:

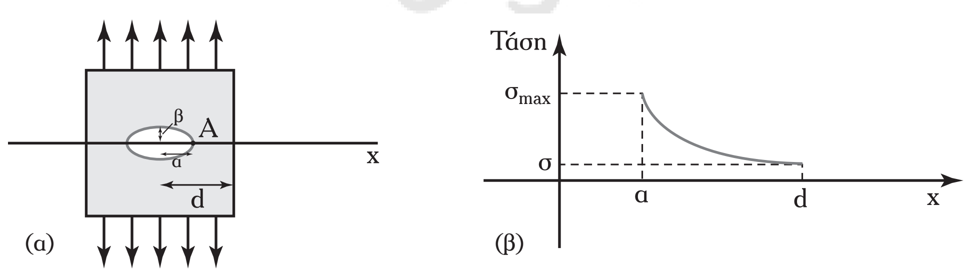
1) Τις ***υπάρχουσες εγκοπές*** στο υλικό. Ο όρος εγκοπή αναφέρεται σε μία σειρά καταστάσεων, όπως η απότομη αλλαγή των διαμέτρων, τα στρογγυλέματα, τα σπειρώματα, οι οπές, οι σφηνόδρομοι[9], τα ραγίσματα, οι φυσαλίδες, οι αποφλοιώσεις των επιφανειών, τα εγκλείσματα των χυτών κομματιών κ.ο.κ. Στις εγκοπές λαμβάνει χώρα συγκέντρωση τάσεων.

2) Τη ***μηχανική κατάσταση*** του υλικού. Ο όρος μηχανική κατάσταση αναφέρεται στην ύπαρξη τραχειών επιφανειών στο υλικό. Στις τραχείες επιφάνειες υπάρχει μεγαλύτερη συγκέντρωση τάσεων απ' ό,τι στις λείες.

3) Τις ***κατεργασίες που έχει υποστεί*** το υλικό. Οι κατεργασίες αυτές περιλαμβάνουν, τόσο τις θερμικές, όσο και τις χημικές και ηλεκτροχημικές. Οι κατεργασίες έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ατελειών στο υλικό, στις οποίες έχομε συγκέντρωση τάσεων.

1.10 Συγκέντρωση τάσεων.

Ας θεωρήσομε την επίπεδη πλάκα του σχήματος 1.10α(α), στην οποία ενεργεί εφελκυστική τάση σ. Η πλάκα έχει μία μικρή οπή ελλειπτικού σχήματος με μεγάλο ημιάξονα α και μικρό ημιάξονα β. Ο χαρακτηρισμός της οπής ως «μικρή» αποδίδει το γεγονός ότι το μήκος και το πλάτος της πλάκας είναι πολύ μεγαλύτερα από τον μεγάλο και τον μικρό ημιάξονα



Σχ. 1.10α

(α) Επίπεδη πλάκα με μικρή ελλειπτική οπή, στην οποία δρα εφελκυστική τάση.
(β) Γραφική παράσταση της τάσεως σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της οπής.

[9] Οι ***σφηνόδρομοι*** είναι οι αυλακώσεις που διαμορφώνονται πάνω σε σώματα, ώστε να μπορούν να ωθούνται οι σφήνες μέσα σ' αυτές.

της οπής, αντίστοιχα. Εάν δεν υπήρχε η οπή, τότε σε κάθε σημείο της επίπεδης πλάκας θα ενεργούσε εφελκυστική τάση σ, η οποία ονομάζεται και ***ονομαστική τάση***.

Ωστόσο, η παρουσία της οπής έχει ως αποτέλεσμα η τάση στην περιοχή της να αυξάνεται απότομα σε σχέση με την ονομαστική τάση σ. Το σχήμα 1.10α(β) παρουσιάζει την τάση ως συνάρτηση της αποστάσεως από το κέντρο της οπής, κατά μήκος του εικονιζόμενου οριζόντιου άξονα x. Παρατηρούμε ότι σε μεγάλες αποστάσεις από το άκρο Α του μεγάλου άξονα της οπής η τάση είναι ίση με την ονομαστική τάση σ. Καθώς πλησιάζομε αρκετά κοντά στη σημείο Α η τάση αρχίζει και αυξάνεται απότομα και στο σημείο Α λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. Αποδεικνύεται ότι η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στο άκρο Α του μεγάλου άξονα της οπής δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{\beta}\right). \qquad (1.20)$$

Το φαινόμενο που μόλις περιγράψαμε ονομάζεται ***συγκέντρωση τάσεων***. Δηλαδή:

Συγκέντρωση τάσεων ονομάζεται η απότομη αύξηση της τάσεως πάνω από μία ονομαστική τιμή σε μία τοπική περιοχή ενός υλικού, λόγω υπάρξεως γεωμετρικών ασυνεχειών, όπως είναι οι οπές, οι κοιλότητες και οι εγκοπές.

Το φαινόμενο της συγκεντρώσεως τάσεων έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της αντοχής των υλικών, εξαιτίας της εν λόγω αυξήσεως των τάσεων τοπικά κοντά στις γεωμετρικές ασυνέχειες. Η αύξηση αυτή μπορεί να είναι τόσο μεγάλη, ώστε τοπικά οι τάσεις να υπερβαίνουν την τάση θραύσεως του υλικού, με αποτέλεσμα το υλικό να κινδυνεύει τελικά να καταστραφεί. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το υλικό που έχει γεωμετρικές ασυνέχειες πρέπει να φορτίζεται λιγότερο, ώστε οι μεγάλες τάσεις που εμφανίζονται στις γεωμετρικές ασυνέχειες να μην οδηγούν σε θραύση του υλικού. Επίσης, οι σχεδιαστές των κατασκευών πρέπει να επιλέγουν κατάλληλα σχήματα, ώστε να ελαχιστοποιούν τις συγκεντρώσεις τάσεων.

Για τον υπολογισμό της αυξήσεως των τάσεων στην περιοχή μιας γεωμετρικής ασυνέχειας χρησιμοποιείται ο ***συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων***.

Ως ***συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων k*** ορίζεται το πηλίκο της μέγιστης τάσεως σ_{max} που εμφανίζεται σε μία ασυνέχεια προς την ονομαστική τιμή τάσεως σ.

Δηλαδή, ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}. \qquad (1.21)$$

Για το παράδειγμα της ελλειπτικής οπής του σχήματος 1.10α(α), ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση (1.21) αντικαθιστώντας τη σχέση (1.20):

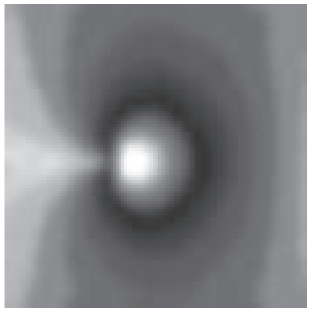
$$k = 1 + \frac{2\alpha}{\beta}. \qquad (1.22)$$

Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων αποτελεί συνάρτηση της γεωμετρίας της ασυνέχειας και όχι του μεγέθους της. Ο συντελεστής αυτός για διάφορες γεωμετρικές μορφές ασυνέχειας παρέχεται από διάφορα πρότυπα αναφοράς υλικών, τα οποία χρησιμοποιούνται από τους σχεδιαστές των κατασκευών, ώστε να προβλέψουν τις τάσεις που θα αναπτυχθούν στις κατασκευές που σχεδιάζουν.

Σήμερα, δύο σύγχρονοι τρόποι υπολογισμού του συντελεστή συγκεντρώσεως τάσεων είναι η φωτοελαστική ανάλυση τάσεων και η ραδιομετρική θερμοελαστική ανάλυση τάσεων. Η φωτοελαστική ανάλυση τάσεων είναι μία οπτική μέθοδος, η οποία χρησιμοποιείται για την παρουσίαση του πλήρους πεδίου των κατανομών τάσεων σε φωτοελαστικά υλικά. Όταν τα υλικά αυτά μετρηθούν από ειδικά όργανα μετρήσεως που ονομάζονται ***πολωσίμετρα***, τη στιγμή που δέχονται εξωτερικές δυνάμεις, παρέχουν έγχρωμες εικόνες με διαβαθμίσεις. Η ανάλυση των εγχρώμων αυτών εικόνων αποκαλύπτει την κατανομή των τάσεων στα υλικά. Η μέθοδος της ραδιομετρικής θερμοελαστικής αναλύσεως τάσεων στηρίζεται στην ιδιότητα που παρουσιάζουν τα υλικά, στα οποία ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, να εμφανίζουν διαφορές της θερμοκρασίας εντός του υλικού, καθώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις μεταξύ των ατόμων του. Κάμερες που έχουν την ικανότητα να συλλαμβάνουν τις διαφορές αυτές θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση του πεδίου των τάσεων. Μια τέτοια εικόνα παρουσιάζεται στο σχήμα 1.10β, η οποία αντιστοιχεί σε ρωγμή σε ένα υλικό. Από την ανάλυση των εικόνων που λαμβάνονται από τις ανωτέρω δύο μεθόδους υπολογίζεται η μέγιστη τάση και στη συνέχεια προσδιορίζεται ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων.

Παράδειγμα 14.

Η μικρή ελλειπτική οπή του σχήματος 1.10α(α) έχει μεγάλο ημιάξονα, διπλάσιο του μικρού ημιάξονα. Εάν η ονομαστική εφελκυστική τάση ισούται με $\sigma = 3\ N/mm^2$, να υπολογιστούν:



Σχ. 1.10β
Εικόνα ρωγμής σε υλικό από εφαρμογή της μεθόδου της ραδιομετρικής θερμοελαστικής αναλύσεως τάσεων.

1) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και

2) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων.

Λύση.

Για την ελλειπτική οπή ισχύει: α = 2 · β.

1) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων είναι:

$$\sigma_{max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{\beta}\right) = \sigma \cdot \left(1 + \frac{4\beta}{\beta}\right) =$$

$$= 5 \cdot \sigma = 15 N/mm^2.$$

2) Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων είναι:

$$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = 5.$$

Παράδειγμα 15.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.20) να υπολογιστούν:

1) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και

2) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων για την περίπτωση μικρής κυκλικής οπής ακτίνας α που βρίσκεται σε επίπεδη πλάκα, στην οποία αναπτύσσεται εφελκυστική ονομαστική τάση σ = 2 N/mm^2.

Λύση.

Ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως έλλειψη με τον μεγάλο ημιάξονά της να είναι ίσος με τον μικρό α = β.

1) Έτσι, για τον υπολογισμό της μέγιστης αναπτυσσόμενης τάσεως στη συγκέντρωση τάσεων, χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.20) θέτοντας α = β:

$$\sigma_{max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{\alpha}\right) = 3 \cdot \sigma = 6 \ N/mm^2 \ .$$

Δηλαδή, η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων στην κυκλική οπή είναι τριπλάσια της ονομαστικής.

2) Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων είναι:

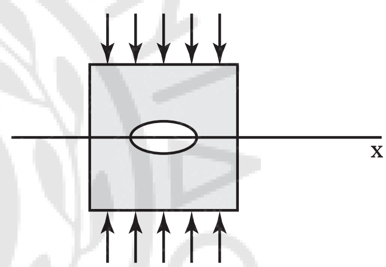
$$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = 3.$$

Άσκηση

Δίνεται η επίπεδη πλάκα του σχήματος 1.10γ, η οποία έχει πολύ μικρή οπή σε σχήμα ελλείψεως με μεγάλο ημιάξονα τριπλάσιο του μικρού ημιάξονα. Στην πλάκα εφαρμόζεται θλιπτική ονομαστική τάση ίση με σ = 35 N/mm^2. Να υπολογιστούν:

α) Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη συγκέντρωση τάσεων και

β) ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων.



Σχ. 1.10γ

1.11 Επιφανειακή θλίψη.

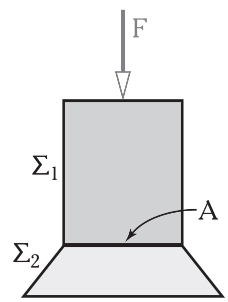
Είναι συχνό το φαινόμενο να μεταφέρεται θλιπτική δύναμη από ένα σώμα σ' άλλο μέσω της επιφάνειας επαφής τους. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1.11α απεικονίζεται ένα σώμα Σ_1, στο οποίο ασκείται θλιπτική δύναμη F.

Το σώμα Σ_1 έρχεται σε επαφή με ένα άλλο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους Α. Η θλιπτική δύναμη F μεταφέρεται από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους Α. Η εφαρμογή της δυνάμεως F στην επιφάνεια Α έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη πιέσεως στην επιφάνεια Α. Η πίεση αυτή ονομάζεται ***επιφανειακή πίεση***, συμβολίζεται με p και δίνεται από το πηλίκο της δυνάμεως F προς το εμβαδόν της επιφάνειας Α, δηλαδή:

$$p = \frac{F}{A}. \qquad (1.23)$$

Οι μονάδες μετρήσεως της ***επιφανειακής πιέσεως*** στο Διεθνές Σύστημα είναι το 1 N/m^2, στο C.G.S.

είναι το 1 dyn/cm², στο Τεχνικό Σύστημα είναι το 1 kp/m² και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το 1 lb/ft². Επειδή η μονάδα επιφάνειας 1 m² είναι αρκετά μεγάλη, στην πράξη χρησιμοποιούμε υποπολλαπλασιά της (1 cm², 1 mm²). Έτσι η επιφανειακή πίεση μετρείται σε N/cm² ή N/mm².



Σχ. 1.11α

Μεταφορά θλιπτικής δυνάμεως από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 μέσω της επιφάνειας επαφής τους.

Από τη σχέση (1.23) διαπιστώνομε ότι η επιφανειακή πίεση:

1) Είναι ***ανάλογη*** της ***θλιπτικής δυνάμεως***. Αυτό σημαίνει ότι στην ίδια επιφάνεια, διπλάσια θλιπτική δύναμη αναπτύσσει διπλάσια επιφανειακή πίεση κ.ο.κ..

2) Είναι ***αντιστρόφως ανάλογη*** του ***εμβαδού της επιφάνειας***. Αυτό σημαίνει ότι, εάν η ίδια δύναμη δράσει σε επιφάνεια διπλάσιου εμβαδού, τότε αναπτύσσεται η μισή επιφανειακή πίεση κ.ο.κ..

Συγκρίνοντας τη σχέση (1.23) με τη σχέση (1.7) παρατηρούμε ότι η επιφανειακή πίεση υπολογίζεται κατ' ανάλογο τρόπο με την τάση θλίψεως. Ωστόσο, υπάρχει μία ειδοποιός διαφορά μεταξύ της επιφανειακής πιέσεως και της τάσεως θλίψεως. Η τάση θλίψεως αναπτύσσεται στο εσωτερικό του σώματος που θλίβεται, ενώ η επιφανειακή πίεση αφορά μόνο στην επιφάνεια επαφής των σωμάτων που μεταβιβάζουν το ένα στο άλλο τη θλιπτική δύναμη.

Παράδειγμα 16.

Το σώμα Σ_1 του σχήματος 1.11α έχει ορθογώνια διατομή με μικρή πλευρά α = 50 cm και μεγάλη πλευρά β = 80 cm. Το σώμα Σ_1 μεταφέρει στο σώμα Σ_2 θλιπτικό φορτίο F = 8.000 N. Να υπολογιστεί η επιφανειακή πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων.

Λύση.

Η επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων είναι η ορθογώνια διατομή του σώματος Σ_1 που βρίσκεται σε επαφή με το σώμα Σ_2. Η επιφάνεια επαφής έχει εμβαδόν:

$$A = \alpha \cdot \beta = 50\ \text{cm} \cdot 80\ \text{cm} = 4.000\ \text{cm}^2.$$

Η επιφανειακή πίεση p που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{8.000\ \text{N}}{4.000\ \text{cm}^2} = 2\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}.$$

– Επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση.

Προκειμένου να μην δημιουργούνται ανεπιθύμητες παραμορφώσεις, πρέπει η αναπτυσσόμενη επιφανειακή πίεση να μην υπερβαίνει μία οριακή τιμή, η οποία ονομάζεται ***επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση*** και συμβολίζεται με $p_{\varepsilon\pi}$. Επομένως, πρέπει για την επιφανειακή πίεση να ισχύει:

$$p = \frac{F}{A} \leq p_{\varepsilon\pi}\ . \qquad (1.24)$$

Το πρόβλημα που εμφανίζεται στις κατασκευές είναι συνήθως ο προσδιορισμός της επιφάνειας επαφής δύο σωμάτων, ώστε να είναι εφικτή η μεταφορά συγκεκριμένης θλιπτικής δυνάμεως, χωρίς να υπάρχουν ανεπιθύμητες παραμορφώσεις. Εάν επιλεγόταν επιφάνεια μικρού εμβαδού, ώστε η αναπτυσσόμενη επιφανειακή πίεση να είναι πολύ μεγάλη, μεγαλύτερη της επιτρεπόμενης επιφανειακής πιέσεως, τότε η επιφάνεια επαφής δεν θα άντεχε την πίεση και θα είχαμε θραύση της. Το εμβαδόν της επιφάνειας που επιλέγεται, ώστε να μην προκύψουν ανεπιθύμητες παραμορφώσεις, προσδιορίζεται από την ανισότητα (1.24), λύνοντάς την ως προς το εμβαδόν A. Έτσι έχομε:

$$A \geq \frac{F}{p_{\varepsilon\pi}}\ . \qquad (1.25)$$

Συνεπώς, το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής δεν πρέπει να επιλεχθεί μικρότερο από την τιμή $F/p_{\varepsilon\pi}$. Αν χρησιμοποιήσομε επιφάνεια επαφής με εμβαδόν μικρότερο από $F/p_{\varepsilon\pi}$, τότε θα έχομε ανεπιθύμητες παραμορφώσεις.

Παράδειγμα 17.

Ποια πρέπει να είναι η διάμετρος D κυκλικής επιφάνειας που χρησιμοποιείται για τη μεταβίβαση θλιπτικής δυνάμεως F = 1.000 N; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση είναι $p_{επ} = 4\ N/cm^2$.

Λύση.

Το εμβαδόν της κυκλικής επιφάνειας επαφής δίνεται από τη σχέση:

$$A = \frac{π}{4} \cdot D^2. \quad (1)$$

Η επιφανειακή πίεση p που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p = \frac{F}{A}$$

και πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση. Δηλαδή πρέπει:

$$\frac{F}{A} \le p_{επ} \Leftrightarrow A \ge \frac{F}{p_{επ}}. \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη σχέση (2) και λύνοντας ως προς τη διάμετρο έχομε:

$$\frac{π}{4} \cdot D^2 \ge \frac{F}{p_{επ}} \Leftrightarrow D^2 \ge \frac{4 \cdot F}{π \cdot p_{επ}} \Leftrightarrow D \ge \sqrt{\frac{4 \cdot F}{π \cdot p_{επ}}} \Leftrightarrow$$

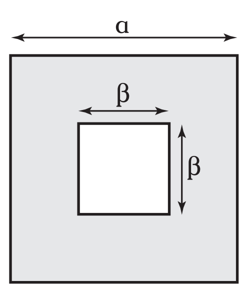
$$\Leftrightarrow D \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 1.000\ N}{3{,}14 \cdot 4\ N/cm^2}} \Leftrightarrow D \ge 17{,}85 cm.$$

Επομένως, η διάμετρος της κυκλικής επιφάνειας πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 17,85cm.

Ασκήσεις.

1. *Η επιφάνεια επαφής μεταξύ δύο σωμάτων έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 1.11β, με α = 60 cm και β = 30 cm. Η επιφάνεια δέχεται θλιπτικό φορτίο F = 5.000 N.*
Να υπολογιστεί η επιφανειακή πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια αυτή.

2. *Ποια πρέπει να είναι η πλευρά α τετραγωνικής επιφάνειας που χρησιμοποιείται για τη μεταβίβαση θλιπτικής δυνάμεως F = 13.500 N; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη επιφανειακή πίεση είναι $p_{επ} = 60\ N/cm^2$.*



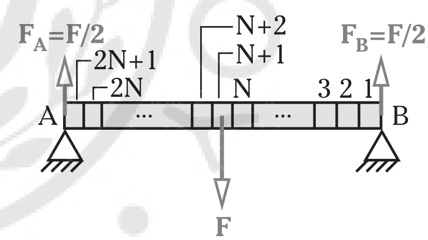
Σχ. 1.11β

1.12 Εντατική κατάσταση.

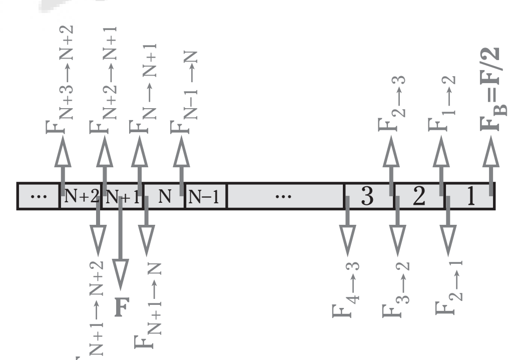
Ας θεωρήσομε τη ράβδο του σχήματος 1.12(α), η οποία ισορροπεί στηριζόμενη στα άκρα της A και B. Στο μέσο της ράβδου ενεργεί εξωτερικό φορτίο F και στα άκρα της A και B οι δυνάμεις $F_A = F/2$ και $F_B = F/2$ από τα στηρίγματα. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν τις εξωτερικές δυνάμεις, που ενεργούν στη ράβδο. Γενικότερα:

Οι ***εξωτερικές δυνάμεις*** που ενεργούν σ' ένα σώμα είναι τα φορτία του και οι δυνάμεις από τα στηρίγματά του.

Η εμφάνιση των δυνάμεων F_A και F_B από τα στηρίγματα οφείλεται στο ότι η εξωτερική δύναμη F «φτάνει» στα άκρα A και B διά μέσου του υλικού της ράβδου. Μπορούμε να θεωρήσομε ότι η ράβδος αποτελείται από μικρά τμήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.12(α), τα οποία αριθμούνται με 1, 2, 3, ..., N-1, N, N+1, ..., 2N, 2N+1. Στο πρώτο μικρό τμήμα της ράβδου που βρίσκεται στο άκρο B επιδρούν η



(α)



(β)

Σχ. 1.12
(α) Ράβδος στην οποία ενεργεί εξωτερικό φορτίο. (β) Λεπτομέρεια των εσωτερικών δυνάμεων της ράβδου.

δύναμη από το στήριγμα F_B και μία δύναμη $F_{2\to1}$ από το δεύτερο μικρό τμήμα της ράβδου, η οποία, επειδή το πρώτο τμήμα ισορροπεί, είναι αντίθετη της F_B [σχ. 1.12(β)].

Στο δεύτερο τμήμα της ράβδου επιδρά μία δύναμη $F_{1\to2}$ από το πρώτο μικρό τμήμα που έλκει το δεύτερο τμήμα προς τα πάνω και μία δύναμη $F_{3\to2}$ από το τρίτο τμήμα της ράβδου που έλκει το δεύτερο τμήμα προς τα κάτω. Η δύναμη $F_{1\to2}$, λόγω του αξιώματος της δράσεως-αντιδράσεως της Μηχανικής, είναι αντίθετη της δυνάμεως που ασκεί το δεύτερο μικρό τμήμα της ράβδου στο πρώτο μικρό τμήμα της, δηλαδή είναι αντίθετη της δυνάμεως $F_{2\to1}$. Και επειδή, όπως είπαμε, η δύναμη $F_{2\to1}$ είναι αντίθετη της F_B, η δύναμη $F_{1\to2}$ είναι ίση με την F_B. Επίσης, επειδή το δεύτερο τμήμα της ράβδου ισορροπεί, η δύναμη $F_{3\to2}$ είναι αντίθετη της F_B.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο για το τρίτο μικρό τμήμα της ράβδου, καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι η δύναμη $F_{2\to3}$ που ενεργεί στο τρίτο μικρό τμήμα από το δεύτερο είναι ίση με την F_B και η δύναμη $F_{4\to3}$ που ενεργεί στο τρίτο μικρό τμήμα από το τέταρτο είναι αντίθετη της F_B κ.ο.κ.. Στο N+1 τμήμα που βρίσκεται στο μέσο της ράβδου επιδρούν το εξωτερικό φορτίο F, η δύναμη $F_{N\to N+1}$ από το N τμήμα και η δύναμη $F_{N+2\to N+1}$ από το N+2 τμήμα. Οι δυνάμεις $F_{N\to N+1}$ και $F_{N+2\to N+1}$ είναι αντίθετες με το φορτίο F και ίσες με τις δυνάμεις F_B και F_A, αντίστοιχα. Επειδή το N+1 τμήμα ισορροπεί, οι δυνάμεις $F_{N\to N+1}$ και $F_{N+2\to N+1}$ ισούνται με F/2 η καθεμία. Με παρόμοιο τρόπο συνεχίζομε και για τα υπόλοιπα τμήματα μέχρι το 2N+1.

Όλες αυτές οι δυνάμεις $F_{1\to2}$, $F_{2\to1}$, $F_{2\to3}$, $F_{3\to2}$, ..., $F_{N-1\to N}$, $F_{N\to N-1}$, ... οφείλονται στις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων του υλικού της ράβδου. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν τις εσωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στη ράβδο. Γενικότερα:

Οι δυνάμεις που εμφανίζονται εσωτερικά του σώματος ως αποτέλεσμα της επιδράσεως εξωτερικών δυνάμεων ονομάζονται ***εσωτερικές δυνάμεις***. Οι εσωτερικές δυνάμεις προέρχονται από τις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων του υλικού του σώματος.

Συνεπώς, η εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων στη ράβδο και γενικότερα σε οποιοδήποτε σώμα, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση εσωτερικών δυνάμεων στο υλικό του σώματος.

Όταν εμφανίζονται εσωτερικές δυνάμεις σε ένα σώμα λόγω της επιδράσεως εξωτερικών δυνάμεων λέμε ότι το σώμα ***βρίσκεται σε εντατική κατάσταση*** ή ***σε ένταση*** ή ότι ***καταπονείται*** ή ότι υφίσταται ***καταπόνηση.***

Η εντατική κατάσταση ενός σώματος περιγράφεται από μεγέθη που ονομάζονται εντατικά και είναι, μεταξύ άλλων, οι ορθές δυνάμεις, οι τέμνουσες δυνάμεις και οι καμπτικές ροπές (βλ. παράγρ. 4.3).

1.13 Είδη καταπονήσεων.

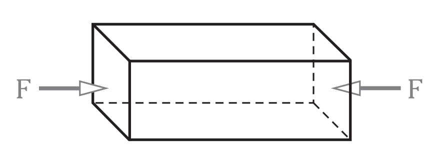
Ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο ενεργούν οι δυνάμεις στα σώματα παρουσιάζεται και διαφορετικός τρόπος καταπονήσεως, όπως στρέψη, εφελκυσμός, θλίψη κ.ά.. Οι καταπονήσεις διακρίνονται σε ***απλές*** και ***σύνθετες***.

Οι ***απλές καταπονήσεις*** είναι οι ακόλουθες:

1) ***Εφελκυσμός***. Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό, όταν στον άξονά του ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες (σχ. 1.13α), οι οποίες τείνουν να αυξήσουν το μήκος του και να ελαττώσουν τη διατομή του. Στον εφελκυσμό αναπτύσσονται ορθές τάσεις. Σε εφελκυσμό, για παράδειγμα, καταπονείται το συρματόσχοινο γερανού (βλ. Κεφ. 2).

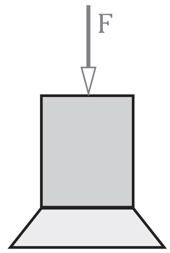
Σχ. 1.13α
Καταπόνηση σε εφελκυσμό.

2) ***Θλίψη***. Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε θλίψη όταν στον άξονά του ασκούνται δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες (σχ. 1.13β), οι οποίες τείνουν να ελαττώσουν το μήκος του και να αυξήσουν τη διατομή του. Στη θλίψη αναπτύσσονται ορθές τάσεις. Σε θλίψη, για παράδειγμα, καταπονούνται τα υποστυλώματα (βλ. Κεφ. 2).



Σχ. 1.13β
Καταπόνηση σε θλίψη.

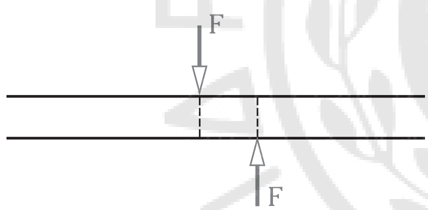
3) ***Επιφανειακή θλίψη***. Όταν δύο στερεά σώματα εφάπτονται μεταξύ τους μεταφέροντας ένα φορτίο (σχ. 1.13γ), τότε έχομε θλίψη ως καταπόνηση επιφάνειας (βλ. παράγρ. 1.11). Σε επιφανειακή



Σχ. 1.13γ
Καταπόνηση σε επιφανειακή θλίψη.

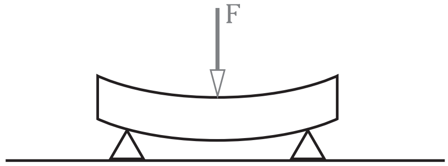
θλίψη, για παράδειγμα, καταπονούνται οι βάσεις μίας εργαλειομηχανής.

4) ***Διάτμηση και ψαλιδισμός.*** Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε διάτμηση όταν σ' αυτό ενεργούν δύο ίσες, παράλληλες, αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεις, που η μία ολισθαίνει πάνω στην άλλη (σχ. 1.13δ). Σε διάτμηση, για παράδειγμα, καταπονούνται τα καρφιά. Ειδικότερα, όταν οι δύο παράλληλες δυνάμεις είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη, σχεδόν πάνω στην ίδια ευθεία, τότε μιλάμε για καθαρή διάτμηση ή ψαλιδισμό ή απλά για τμήση. Στη διάτμηση αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις (βλ. Κεφ. 2).



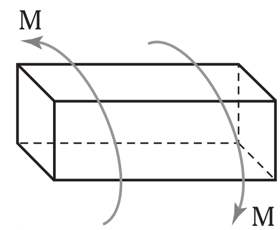
Σχ. 1.13δ
Καταπόνηση σε διάτμηση.

5) ***Κάμψη.*** Μία δοκός καταπονείται σε κάμψη όταν στηρίζεται σ' ένα ή περισσότερα σημεία και οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτήν είναι κάθετες στον οριζόντιο άξονά της και τείνουν να την καμπυλώσουν αλλάζοντας το σχήμα της (σχ. 1.13ε). Σε κάμψη, για παράδειγμα, καταπονούνται τα δοκάρια του εξώστη ενός καταστρώματος πλοίου. Στην κάμψη αναπτύσσονται ορθές τάσεις (βλ. Κεφ. 5).



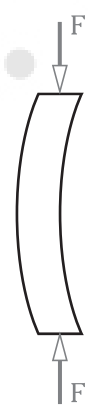
Σχ. 1.13ε
Καταπόνηση σε κάμψη.

6) ***Στρέψη.*** Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε στρέψη, όταν πάνω σ' αυτό ασκούνται δύο ροπές ίσες και αντίθετης φοράς (σχ. 1.13στ), οι οποίες όμως δεν βρίσκονται στο ίδιο αλλά σε διαφορετικό επίπεδο. Στη στρέψη αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις. Σε στρέψη, για παράδειγμα, καταπονείται ο άξονας ενός βαρούλκου (βλ. Κεφ. 6).



Σχ. 1.13στ
Καταπόνηση σε στρέψη.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι σε μέλη κατασκευών που καταπονούνται σε θλίψη και των οποίων το μήκος είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη μικρότερη διάσταση της διατομής τους, η αντοχή τους εξαντλείται με εκδήλωση λυγισμού, δηλαδή εκτροπή από την ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας. Ο λυγισμός δεν είναι τύπος καταπονήσεως, όπως είναι η θλίψη, αλλά μορφή αστοχίας. Το σχήμα 1.13ζ παρουσιάζει σώμα που η αντοχή του εξαντλείται με εκδήλωση λυγισμού. Μέσω λυγισμού, για παράδειγμα, εξαντλείται η αντοχή των υποστυλωμάτων σε μεταλλικά υπόστεγα (βλ. Κεφ. 7).



Σχ. 1.13ζ
Λυγισμός.

Σύνθετη καταπόνηση έχομε όταν ένα στερεό σώμα καταπονείται ταυτόχρονα σε δύο ή περισσότερα είδη απλών καταπονήσεων. Για παράδειγμα, σύνθετη καταπόνηση υφίσταται στερεό σώμα που καταπονείται ταυτόχρονα σε στρέψη και κάμψη. Ο κινητήριος άξονας που μεταφέρει ισχύ με ιμάντα καταπονείται σε στρέψη από τη μεταφερόμενη ισχύ και σε κάμψη από την έλξη των ιμάντων και των τροχαλιών (βλ. Κεφ. 8).

1.14 Αστοχία υλικών.

Η αστοχία των κατασκευών εξαρτάται, εκτός από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους και από τις ιδιότητες των υλικών, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σ' αυτές. Η αστοχία των κατασκευών δεν είναι σπάνιο φαινόμενο. Παράδειγμα αστοχίας κατασκευής αποτελούν τα πλοία τύπου Liberty που χρησιμοποιήθηκαν κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο για τη μεταφορά εφοδίων από τις ΗΠΑ στην Ευρώπη. Σε ποσοστό μεγαλύτερο από 50% παρουσίασαν ρωγμές στο κατάστρωμα και στο κύτος και κάποια από αυτά έσπασαν ξαφνικά στη μέση. Από τη σχετική έρευνα που πραγματοποιήθηκε, διαπιστώθηκε ότι το υλικό από το οποίο κατασκευάστηκαν εμφάνιζε συμπεριφορά ψαθυρού υλικού στις χαμηλές θερμοκρασίες του Βόρειου Ατλαντικού, με αποτέλεσμα τα πλοία να έχουν μειωμένη ελαστικότητα στις καταπονήσεις του ωκεανού.

Τα διάφορα υλικά παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά στις διάφορες καταπονήσεις. Επίσης, υπάρχουν ορισμένα όρια καταπονήσεως πέρα από τα οποία συμβαίνουν σημαντικές αλλαγές στη συμπεριφορά των διαφόρων υλικών, όπως η εμφάνιση μονίμων παραμορφώσεων. Τέτοια όρια καταπονήσεως, τα οποία συναντήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, είναι το όριο διαρροής και το όριο θραύσεως.

Με τον όρο ***αστοχία υλικού*** εννοούμε, για τα όλκιμα υλικά την εμφάνιση διαρροής και για τα ψαθυρά την εμφάνιση θραύσεως.

Επειδή η πραγματική κατάσταση, στην οποία μια κατασκευή αστοχεί δεν είναι εύκολα παρατηρήσιμη, η εμφάνιση αστοχίας ενός υλικού κρίνεται με βάση κάποιο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό αφορά σε μία ισοδύναμη απλή καταπόνηση και τον υπολογισμό των ισοδυνάμων τάσεων, την έννοια των οποίων θα δούμε στο Κεφάλαιο 8. Τα κριτήρια αυτά ονομάζονται ***κριτήρια αστοχίας.*** Τα κριτήρια αστοχίας που έχουν διατυπωθεί είναι τα ακόλουθα:

1) Το κριτήριο ***κρίσιμης ορθής τάσεως***, σύμφωνα με το οποίο, αστοχία υλικού συμβαίνει όταν οι μέγιστες ισοδύναμες ορθές τάσεις που αναπτύσσονται ξεπεράσουν το όριο διαρροής ή το όριο θραύσεως. Το κριτήριο αυτό δεν λαμβάνει υπόψη τις διατμητικές τάσεις.

2) Το κριτήριο ***κρίσιμης διατμητικής τάσεως***, το οποίο διατυπώθηκε από τους Mohr-Coulomb και σύμφωνα μ' αυτό αστοχία υλικού έχομε όταν η μέγιστη διατμητική τάση προσεγγίσει την τιμή της μέγιστης διατμητικής τάσεως διαρροής του υλικού, όταν καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

3) Το κριτήριο ***μέγιστης ορθής παραμορφώσεως***, σύμφωνα με το οποίο, η μέγιστη παραμόρφωση παρουσιάζεται στη διεύθυνση της μέγιστης ορθής τάσεως.

4) Το κριτήριο ***κρίσιμης ενέργειας παραμορφώσεως***, σύμφωνα με το οποίο, κατά την καταπόνηση ενός σώματος παράγεται έργο, που αποθηκεύεται ως ενέργεια παραμορφώσεως. Η ενέργεια αυτή αναλύεται σε δύο μέρη: σ' αυτήν που αντιστοιχεί στη μεταβολή του όγκου χωρίς στρέβλωση και σ' αυτήν που αντιστοιχεί σε στρέβλωση χωρίς μεταβολή του όγκου. Αστοχία έχομε όταν η ενέργεια παραμορφώσεως ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή.

5) Το κριτήριο ***στροφικής ενέργειας***, το οποίο ονομάζεται και κριτήριο μέγιστου έργου παραμορφώσεως ή κριτήριο του Mises και συμφωνεί με τα πειραματικά αποτελέσματα στα όλκιμα υλικά. Σύμφωνα μ' αυτό, εάν ένα υλικό είναι ομογενές και ισότροπο, τότε είναι σημαντικό μόνο το μέρος της ενέργειας παραμορφώσεως που αντιστοιχεί σε στρέβλωση χωρίς μεταβολή του όγκου, η οποία ονομάζεται στροφική ενέργεια. Αστοχία έχομε όταν η στροφική ενέργεια του καταπονούμενου σώματος γίνει ίση με την αντίστοιχη ενέργεια σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

1.14.1 Επιτρεπόμενη τάση και συντελεστής ασφαλείας.

Προκειμένου να αποφεύγεται η αστοχία των υλικών μιας κατασκευής, αυτή πρέπει να λειτουργεί σε τάσεις πολύ μικρότερες απ' την τάση θραύσεως των υλικών της και συγκεκριμένα στην ελαστική περιοχή. Έτσι ορίζεται μία μέγιστη τιμή τάσεως, η οποία επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της. Αυτή η τάση ονομάζεται επιτρεπόμενη. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση μίας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος αστοχίας του υλικού της.

Η επιτρεπόμενη τάση συμβολίζεται με $\sigma_{\varepsilon\pi}$ ή $\tau_{\varepsilon\pi}$, ανάλογα εάν έχομε ορθές ή διατμητικές τάσεις, αντίστοιχα. Προκειμένου να έχομε ελαστικές παραμορφώσεις, η επιτρεπόμενη τάση δεν πρέπει να ξεπερνά το όριο ελαστικότητας του υλικού και καθορίζεται με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας[10].

Συντελεστής ασφαλείας ν ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση από μία τάση αναφοράς.

Ανάλογα με την τάση αναφοράς που χρησιμοποιούμε έχομε τους ακόλουθους συντελεστές ασφαλείας:

1) ***Συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας*** ν_E ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$ από το όριο ελαστικότητας σ_E. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\nu_E = \frac{\sigma_E}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \; . \tag{1.26}$$

2) ***Συντελεστής ασφαλείας έναντι διαρροής*** ν_S ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$ από το όριο διαρροής σ_S. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας έναντι διαρροής δίνεται από τη σχέση:

$$\nu_S = \frac{\sigma_S}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \; . \tag{1.27}$$

3) ***Συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως*** ν_B ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$ από το όριο θραύσεως σ_B. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως δίνεται από τη σχέση:

$$\nu_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \; . \tag{1.28}$$

Οι ανωτέρω ορισμοί των συντελεστών ασφαλείας αναφέρονται στην περίπτωση ορθών τάσεων. Ανάλογοι ορισμοί ισχύουν και για τις διατμητικές τάσεις.

Ο συντελεστής ασφαλείας που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη είναι ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως. Στο εξής αναφερόμαστε σ' αυτόν απλά ως συντελεστή ασφαλείας.

Παράδειγμα 18.

Το όριο ελαστικότητας και το όριο θραύσεως ενός υλικού είναι σ_E = 8.000 N/cm^2 και σ_B = 16.000 N/cm^2, αντίστοιχα. Η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 4.000 N/cm^2. Να υπολογιστεί ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας και έναντι θραύσεως.

Λύση.

Ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικότητας είναι:

$$\nu_E = \frac{\sigma_E}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{8.000 \text{ N/cm}^2}{4.000 \text{ N/cm}^2} = 2 \; .$$

Ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως είναι:

$$\nu_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{16.000 \text{ N/cm}^2}{4.000 \text{ N/cm}^2} = 4 \; .$$

Παρατήρηση:

Με αφορμή το παράδειγμα 18, στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσομε ότι η αναφορά σε τρεις συντελεστές ασφαλείας δεν σημαίνει ότι αυτοί αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές τιμές επιτρεπόμενης τάσεως. Η τιμή της επιτρεπόμενης τάσεως είναι μία. Αυτό που αλλάζει είναι η αναφορά ως προς την οποία υπολογίζεται ο συντελεστής ασφαλείας. Έχομε αναφέρει τρεις διαφορετικούς συντελεστές γιατί έχομε χρησιμοποιήσει τρεις διαφορετικές αναφορές, έναντι των οποίων θεωρείται η μία τιμή της επιτρεπόμενης τάσεως.

1.14.2 Καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας.

Ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής είναι πραγματικά δύσκολη υπόθεση. Η δυσκολία έγκειται αφενός στην ποικιλία των παραγόντων που πρέπει να λάβει κανείς υπόψη για τον καθορισμό του και αφετέρου στο γεγονός ότι πρέπει να συγκεραστούν οι ακόλουθοι στόχοι σχεδιασμού που επιτυγχάνονται με αντίθετες επιλογές:

1) Η ασφάλεια της κατασκευής.
2) Το μικρό βάρος της κατασκευής.
3) Το μικρό κόστος της κατασκευής.

Η ασφάλεια της κατασκευής επιτυγχάνεται με τον καθορισμό μικρής επιτρεπόμενης τάσεως και άρα μεγάλου συντελεστή ασφαλείας. Ωστόσο, η επιλογή μεγάλου συντελεστή ασφαλείας έχει ως συνέπεια την αύξηση του μεγέθους των διατομών της κατασκευής και άρα την αύξηση του βάρους και του κόστους της.

[10] Τελευταία, η έννοια της επιτρεπόμενης τάσεως και η έννοια του συντελεστή ασφαλείας αντικαθίστανται από την έννοια των μερικών συντελεστών φορτίων και την έννοια των οριακών αντοχών και αναπτύσσονται αντίστοιχες μεθοδολογίες σχεδιασμού.

Από την άλλη πλευρά, οι στόχοι του μικρού βάρους και του μικρού κόστους της κατασκευής επιτυγχάνονται με την επιλογή μικρών διατομών της κατασκευής και άρα με μεγάλη επιτρεπόμενη τάση, δηλαδή με μικρό συντελεστή ασφαλείας. Έτσι, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας προκύπτει ως αποτέλεσμα του συγκερασμού των ανωτέρω στόχων.

Ο καθορισμός της επιτρεπόμενης τάσεως και άρα του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής εξαρτάται ιδίως από τους ακόλουθους παράγοντες:

1) Το μέγεθος των φορτίων που αναμένεται να δέχεται η κατασκευή.

2) Το είδος των φορτίων αυτών.

3) Το είδος των καταπονήσεων που αναμένεται να δέχεται η κατασκευή.

4) Το είδος της κατασκευής.

5) Τη σπουδαιότητα της κατασκευής.

6) Τα υλικά της κατασκευής.

7) Την ποιότητα των υλικών της κατασκευής, τις τυχόν ατέλειές τους και τη φθορά τους λόγω παλαιότητας ή χρήσεως.

8) Τη θερμοκρασία, στην οποία αναμένεται να λειτουργεί η κατασκευή.

9) Τις απλουστευτικές παραδοχές που χρησιμοποιήθηκαν για τους υπολογισμούς.

Γενικά με τον συντελεστή ασφαλείας επιδιώκεται να καλυφθούν οι αβεβαιότητες που έχομε:

1) Στις τιμές των φορτίων που λαμβάνομε υπόψη κατά τους υπολογισμούς. Έτσι για παράδειγμα, ένας λιμενοβραχίονας σχεδιάζεται για ένα ύψος κύματος που έχει προσδιοριστεί μετά από παρατηρήσεις πολλών ετών. Δεν υπάρχει όμως βεβαιότητα ότι αποκλείεται να παρουσιαστεί στο μέλλον κύμα με κάπως μεγαλύτερο ύψος.

2) Στην ποιότητα του υλικού. Η βιομηχανία παραδίδει προϊόντα με προδιαγεγραμμένες αντοχές. Δεν αποκλείεται πάντως μια παρτίδα να έχει και κάπως μικρότερη αντοχή.

3) Ως προς τις απλουστεύσεις που κάνομε κατά τους υπολογισμούς.

Ο καθορισμός της επιτρεπόμενης τάσεως και άρα του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής γίνεται με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

1) ***Εμπειρικά***. Οι σχεδιαστές κατασκευών μπορούν να καθορίζουν τον συντελεστή ασφαλείας με βάση την εμπειρία που απέκτησαν από άλλες συναφείς κατασκευές.

2) Με ***στατιστικές μεθόδους***. Η επιτρεπόμενη τάση προσδιορίζεται με επεξεργασία πειραματικών δεδομένων χρησιμοποιώντας μεθόδους, οι οποίες προέρχονται από τη Στατιστική Επιστήμη.

3) Με ***βάση ισχύοντες ειδικούς κανονισμούς.*** Σήμερα ισχύουν διεθνείς ή εθνικοί κανονισμοί που ορίζουν τους συντελεστές ασφαλείας για διάφορες περιπτώσεις κατασκευών. Παραδείγματα τέτοιων κανονισμών είναι:

α) Οι ***κώδικες DIN*** (Deutsches Institut für Normung) οι οποίοι αποτελούν σύνολο κωδίκων μοντέλων κατασκευών που έχουν αναπτυχθεί από το ***Γερμανικό Ινστιτούτο Προτυποποιήσεως***.

β) Οι ***Ευρωκώδικες*** (Eurocodes) οι οποίοι αποτελούν σύνολο πανευρωπαϊκών κωδίκων μοντέλων κατασκευών, που έχουν αναπτυχθεί από την ***Ευρωπαϊκή Επιτροπή Προτυποποιήσεως*** (European Committee for Standardisation).

Σε πολλές περιπτώσεις οι παραπάνω κανονισμοί έχουν περιβληθεί σε αρκετά κράτη με ισχύ νόμου, με αποτέλεσμα να καθίσταται υποχρεωτική η εφαρμογή τους. Έτσι, η μη εφαρμογή τους αποτελεί παράβαση της κείμενης νομοθεσίας.

Στον πίνακα 1.14 παρουσιάζονται οι ***συντελεστές ασφαλείας για διάφορα υλικά*** που συνήθως χρησιμοποιούνται.

Πίνακας 1.14
Συντελεστές ασφαλείας συνηθισμένων υλικών.

Υλικό	***Συντελεστής ασφαλείας***
Χάλυβας	$v_S = 1{,}5 - 1{,}7$ $v_B = 2 - 3$
Ξύλο	$v_B = 3 - 4{,}5$
Λιθοδομή - πλινθοδομή	$v_B = 8 - 20$

Με βάση τα παραπάνω, καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία των σχεδιαστών των κατασκευών στα θέματα αυτά.

1.15 Σύνοψη βασικών εννοιών.

Οι βασικότερες έννοιες του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται στις εξής:

1) Η ***αντοχή υλικών*** μελετά την καταπόνηση των κατασκευών από τα φορτία που δέχονται, τις τάσεις

που αναπτύσσονται σε αυτές, τις παραμορφώσεις τους και τις σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων.

2) ***Παραμόρφωση*** ονομάζεται η αλλαγή της μορφής μιας κατασκευής όταν σε αυτήν εφαρμόζεται μια δύναμη. Εάν η παραμόρφωση είναι προσωρινή ονομάζεται ελαστική, ενώ εάν είναι μόνιμη ονομάζεται πλαστική.

3) Οι δυνάμεις που παραμορφώνουν μια κατασκευή ονομάζονται ***φορτία***. Τα φορτία μπορεί να είναι συγκεντρωμένα ή κατανεμημένα, σταθερά ή μεταβλητά, στατικά ή δυναμικά, ακίνητα ή κινητά.

4) ***Τάση*** ονομάζεται η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας που αναπτύσσουν τα μόρια της κατασκευής όταν σε αυτή ενεργούν φορτία. Όταν η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων είναι κάθετη στη διατομή της κατασκευής, τότε η τάση ονομάζεται ***ορθή***. Όταν είναι παράλληλη στη διατομή, τότε η τάση ονομάζεται ***διατμητική***.

5) Σώμα ***εφελκύεται (θλίβεται)*** όταν στον άξονα του ενεργούν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις που προκαλούν αύξηση (μείωση) κατά Δl του μήκουστου l και μείωση (αύξηση) κατά $\Delta \mathrm{b}$ της διαστάσεως b της διατομής του. Οι λόγοι:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},\ \ \varepsilon_g = \frac{\Delta \mathrm{b}}{\mathrm{b}}\ \text{ και }\ \mu = \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}$$

εκφράζουν την ανηγμένη επιμήκυνση (επιβράχυνση), την εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση και τον λόγο Poisson, αντίστοιχα.

6) Το διάγραμμα αναπτυσσομένων τάσεων ως προς τις επιμηκύνσεις ή τις ανηγμένες επιμηκύνσεις (επιβραχύνσεις) της εφελκυόμενης (θλιβόμενης) ράβδου ονομάζεται ***διάγραμμα εφελκυσμού (θλίψεως)***. Στο διάγραμμα παρατηρούμε γενικά την ελαστική περιοχή (ελαστικών παραμορφώσεων), τμήμα της οποίας είναι η αναλογική περιοχή, την πλαστική περιοχή (πλαστικών παραμορφώσεων), το *όριο διαρροής* και την *τάση θραύσεως*.

Στην αναλογική περιοχή ισχύει ο Νόμος του Hooke: Η επιμήκυνση (επιβράχυνση) Δl μιας εφελκυόμενης (θλιβόμενης) ράβδου είναι ανάλογη με το μήκος της l και αντιστρόφως ανάλογης διατομής της A και του μέτρου ελαστικότητας του υλικού της E:

$$\Delta l = \frac{\mathrm{F} \cdot l}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{E}} \text{ ή } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{E}}.$$

Το ***όριο διαρροής*** είναι η τάση εντός της πλαστική περιοχής, στην οποία το υλικό χάνει τη συνοχή του και διαρρέει (παραμορφώνεται χωρίς πρακτικά να αυξάνεται το φορτίο).

Η τάση στην οποία το υλικό σπάει ονομάζεται τάση ***θραύσεως***.

7) Τα υλικά που εμφανίζουν πλαστικές παραμορφώσεις πριν τη θραύση τους ονομάζονται ***όλκιμα***. Τα υλικά που θραύονται στο τέλος της ελαστικής περιοχής ονομάζονται ***ψαθυρά***.

8) Η ***σκληρότητα*** ενός υλικού μετρά την αντίσταση του στην προσπάθεια εισόδου σ' αυτό άλλων υλικών, τα οποία πιέζουν κάθετα την επιφάνειά του. Με τη βοήθειά της υπολογίζεται η τάση θραύσεως του υλικού.

9) Η μεταβολή της θερμοκρασίας $\Delta\theta$ έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή κατά Δl του αρχικού μήκους l μιας ράβδου:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta$$

όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής. Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί διαστολή ($\Delta l > 0$), ενώ η μείωση συστολή ($\Delta l < 0$) της ράβδου.

10) Τα όρια αντοχής των υλικών, όπως η τάση θραύσεως, εξαρτώνται από τη θερμοκρασία.

11) ***Ερπυσμός*** ονομάζεται το φαινόμενο της αυξήσεως της παραμορφώσεως μιας κατασκευής με την πάροδο του χρόνου, χωρίς να μεταβάλλονται τα φορτία που δρουν σε αυτή. Η καμπύλη ερπυσμού παρουσιάζει την ανηγμένη επιμήκυνση με την πάροδο του χρόνου.

12) ***Κόπωση*** ενός υλικού ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο το υλικό στο οποίο ενεργεί μεταβλητό φορτίο, μετά από έναν ορισμένο (πολύ μεγάλο) αριθμό επαναλήψεων της φορτίσεως, θραύεται σε τάση μικρότερη από την τάση θραύσεως. Το διάγραμμα κοπώσεως παρουσιάζει τη διακύμανση της τάσεως ως συνάρτηση του αριθμού των κύκλων φορτίσεως μέχρι τη θραύση.

13) ***Συγκέντρωση τάσεων*** ονομάζεται η απότομη αύξηση της τάσεως πάνω από μία ονομαστική τιμή τοπικά, σε μία περιοχή υλικού, λόγω υπάρξεως οπών, κοιλοτήτων ή εγκοπών.

14) Ένα σώμα καταπονείται όταν, λόγω της επιδράσεως εξωτερικών δυνάμεων, εμφανίζονται σ' αυτό εσωτερικές δυνάμεις. Οι καταπονήσεις διακρίνονται σε απλές και σύνθετες. Οι απλές είναι ο εφελκυσμός, η θλίψη, η επιφανειακή θλίψη, η διάτμηση, η κάμψη και η στρέψη. Σύνθετες καταπονήσεις έχομε όταν το σώμα υφίσταται δύο ή περισσότερες απλές καταπονήσεις.

15) ***Αστοχία υλικού*** εννοούμε για τα όλκιμα υλικά την εμφάνιση διαρροής και για τα ψαθυρά τη

θραύση. Η εμφάνιση αστοχίας κρίνεται με βάση τα κριτήρια αστοχίας. Ο λυγισμός είναι επίσης μια μορφή αστοχίας του υλικού.

16) ***Επιτρεπόμενη τάση*** μίας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί σ' αυτή, ώστε να μην υπάρχει αστοχία του υλικού της.

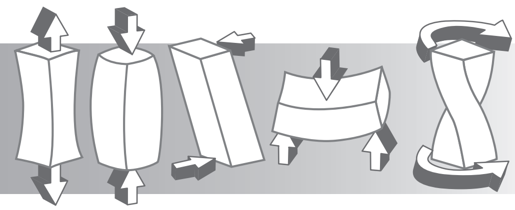
17) Ο συντελεστής ασφαλείας ν είναι ο αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση από την τάση αναφοράς (π.χ. την τάση θραύσεως):

$$v = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{\sigma_{\varepsilon\pi}}.$$

Οι συντελεστές ασφαλείας καθορίζονται είτε εμπειρικά είτε με στατιστικές μεθόδους, είτε με βάση ισχύοντες κώδικες (DIN, Eurocodes).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εφελκυσμός
Θλίψη – Διάτμηση



2.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις καταπονήσεις του εφελκυσμού, της θλίψεως και της διατμήσεως. Συγκεκριμένα, παραθέτομε τους ορισμούς καθεμιάς από τις καταπονήσεις αυτές, παρουσιάζομε παραδείγματα εφαρμογής τους και επεξηγούμε τις αναπτυσσόμενες τάσεις και παραμορφώσεις. Επίσης, παρουσιάζομε συγκριτικά τις καταπονήσεις του εφελκυσμού, της θλίψεως και της διατμήσεως δίνοντας έμφαση στις ομοιότητες και τις διαφορές τους. Επί πλέον, αναλύομε την έννοια της επιτρεπόμενης τάσεως και του συντελεστή ασφαλείας για τις καταπονήσεις αυτές, επεξηγούμε τις σχέσεις εφελκυσμού, θλίψεως και διατμήσεως και αναλύομε όλες τις κατηγορίες πρακτικών προβλημάτων που επιλύομε με τις σχέσεις αυτές. Περαιτέρω, παρουσιάζομε τη σύνθλιψη άντυγας οπής, τις καταπονήσεις των κυλινδρικών δοχείων πιέσεως με λεπτά τοιχώματα, τις συγκολλήσεις και τις τάσεις που εμφανίζονται κατά την παρεμπόδιση.

Πίνακας 2.1
Σύμβολα και μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Γωνία ολισθήσεως	γ	rad
Διάμετρος κυλινδρικού δοχείου	d	m, cm
Διάμετρος οπής	d	cm, mm
Διαμήκης τάση	$\sigma_{διαμ}$	N/cm^2, N/mm^2
Δύναμη καταπονήσεως (εφελκυσμού, θλίψεως, συνθλίψεως άντυγας οπής, διατμήσεως)	F	N
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως	$\tau_{επ,\, δι}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού	$\sigma_{επ,\, εφ}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως	$\sigma_{επ,\, θλ}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας οπής	$\sigma_{επ,\, αντ}$	N/cm^2, N/mm^2
Εφαπτομενική τάση	$\sigma_{εφαπ}$	N/cm^2, N/mm^2
Μέτρο ολισθήσεως του υλικού	G	N/cm^2, N/mm^2
Πάχος ελάσματος που φέρει οπή	h	cm, mm
Πάχος τοιχωμάτων κυλινδρικού δοχείου	t	cm, mm
Πίεση ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο	P	N/cm^2, N/mm^2
Τάσεις λόγω παρεμποδίσεως μεταβολής μήκους	σ	N/cm^2, N/mm^2
Τάση διατμήσεως	$\tau_{δι}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση εφελκυσμού	$\sigma_{εφ}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θλίψεως	$\sigma_{θλ}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θραύσεως διατμήσεως	$\tau_{θρ,\, δι}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θραύσεως στη θλίψη	$\sigma_{θρ,\, θλ}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση θραύσεως στον εφελκυσμό	$\sigma_{θρ,\, εφ}$	N/cm^2, N/mm^2
Τάση συνθλίψεως άντυγας οπής	$\sigma_{αντ}$	N/cm^2, N/mm^2

Ο πίνακας 2.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

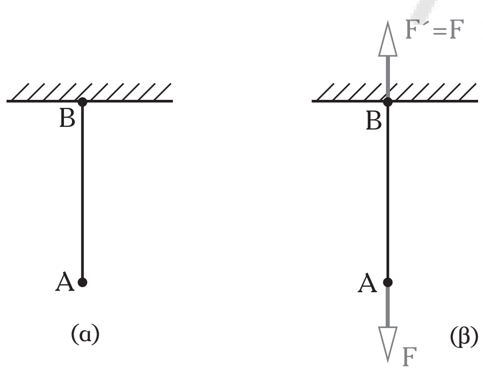
2.2 Τάσεις και παραμορφώσεις στον εφελκυσμό.

Ας παρατηρήσομε το συρματόσχοινο του σχήματος 2.2α(α). Το συρματόσχοινο είναι κατακόρυφο και το ένα άκρο του είναι δεμένο σε σταθερό σημείο, ενώ το άλλο είναι ελεύθερο. Το συρματόσχοινο χαρακτηρίζεται από το μήκος του και από το εμβαδόν της διατομής του.

Ας υποθέσομε ότι κάποια στιγμή στο ελεύθερο άκρο του συρματόσχοινου ασκείται κατακόρυφη δύναμη F, η οποία το τραβά προς τα κάτω [σχ. 2.2α(β)]. Η άσκηση της κατακόρυφης δυνάμεως F έχει ως αποτέλεσμα, με βάση το αξίωμα δράσεως-αντιδράσεως, την εμφάνιση μιας δυνάμεως F′ στο άλλο άκρο του συρματόσχοινου, στο σημείο στηρίξεώς του, η οποία είναι αντίθετη της δυνάμεως F. Οι δυνάμεις F και F′ έχουν ίδιο μέτρο, βρίσκονται πάνω στον ίδιο άξονα (δηλ. είναι συγγραμμικές), αλλά έχουν αντίθετη φορά (δηλ. είναι αντίρροπες). Οι δύο δυνάμεις F και F′ ενεργούν στο συρματόσχοινο και τείνουν να αυξήσουν το μήκος του και να ελαττώσουν τη διατομή του. Λέμε τότε ότι το συρματόσχοινο καταπονείται σε εφελκυσμό.

Γενικότερα: ***Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό όταν στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες και αντίρροπες δυνάμεις, οι οποίες έχουν την τάση να αυξήσουν το μήκος του και να ελαττώσουν τη διατομή του.***

Η εξωτερική δύναμη F που καταπονεί ένα σώμα σε εφελκυσμό ονομάζεται ***εφελκύουσα*** (ή ***εφελκυστική***) ***δύναμη***.



Σχ. 2.2α

(α) Συρματόσχοινο με το ένα άκρο του δεμένο σε σταθερό σημείο. (β) Η άσκηση δυνάμεως στο ελεύθερο άκρο του συρματόσχοινου έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση αντίθετης δυνάμεως στο άλλο άκρο του.

Η καταπόνηση του εφελκυσμού παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Ως χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε εφελκυσμό αναφέρομε, μεταξύ άλλων, τα συρματόσχοινα των γερανών, το σχοινί του βαρούλκου και τις ρυμούλκες των τρακτέρ.

2.2.1 Τάσεις εφελκυσμού.

Όπως έχομε αναφέρει και στην παράγραφο 1.12, η εφαρμογή της εξωτερικής δυνάμεως F στο συρματόσχοινο προκαλεί την εμφάνιση εσωτερικών δυνάμεων σ' αυτό, άρα την εμφάνιση τάσεων στο υλικό του. Οι τάσεις αυτές που εμφανίζονται στα σώματα που καταπονούνται σε εφελκυσμό ονομάζονται ***τάσεις εφελκυσμού***. Αποδεικνύεται ότι στον εφελκυσμό, η εσωτερική δύναμη σε κάθε διατομή του σώματος είναι ίση με την εξωτερική F, άρα κάθετη στη διατομή του σώματος. Συνεπώς, οι τάσεις εφελκυσμού είναι ορθές τάσεις. Οι παραπάνω ιδιότητες των τάσεων εφελκυσμού μάς οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου ορισμού για την τάση εφελκυσμού.

Ως ***τάση εφελκυσμού*** $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ ορίζομε το πηλίκον της δυνάμεως F που ενεργεί κατά τον άξονα στερεού σώματος και το καταπονεί σε εφελκυσμό προς το εμβαδόν A της διατομής του σώματος.

Δηλαδή, έχομε:

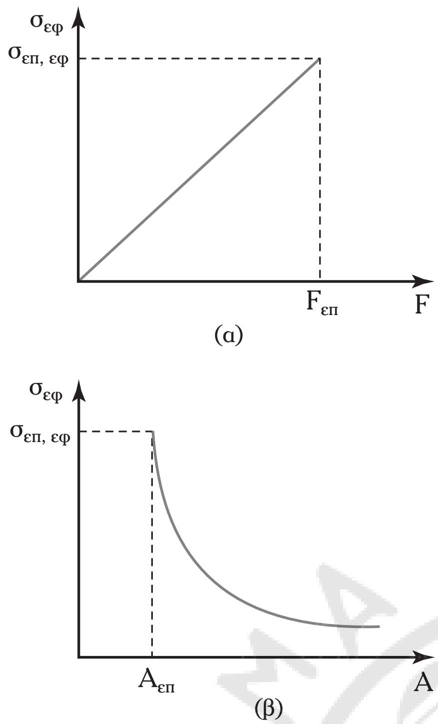
$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A}. \tag{2.1}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι στον υπολογισμό της τάσεως εφελκυσμού λαμβάνομε υπόψη μόνο τη μία από τις δύο συγγραμμικές και αντίρροπες δυνάμεις που καταπονούν το στερεό σώμα σε εφελκυσμό.

Από τη σχέση (2.1) διαπιστώνομε ότι για την τάση εφελκυσμού ισχύουν τα εξής:

1) Η ***τάση εφελκυσμού είναι ανάλογη της εφελκύουσας δυνάμεως***. Στην ίδια διατομή, εάν εφαρμοστεί κάθετα διπλάσια εφελκύουσα δύναμη, η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι διπλάσια, εάν εφαρμοστεί κάθετα τριπλάσια εφελκύουσα δύναμη, η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι τριπλάσια κ.ο.κ.. Δηλαδή, η σχέση μεταξύ τάσεως εφελκυσμού και εφελκύουσας δυνάμεως για την ίδια διατομή είναι γραμμική [σχ. 2.2β(α)].

2) Η ***τάση εφελκυσμού είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του σώματος που εφελκύεται***. Η ίδια εφελκύουσα δύναμη, εάν εφαρμο-



Σχ. 2.2β

(α) Σχέση τάσεως εφελκυσμού και εφελκύουσας δυνάμεως για σταθερή διατομή. (β) Σχέση τάσεως εφελκυσμού και εμβαδού διατομής για σταθερή εφελκύουσα δύναμη.

στεί κάθετα σε διατομή με διπλάσια επιφάνεια, η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι η μισή, εάν εφαρμοστεί κάθετα σε διατομή με τριπλάσια επιφάνεια η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού είναι ίση με το ένα τρίτο κ.ο.κ.. Η σχέση μεταξύ τάσεως εφελκυσμού και εμβαδού διατομής απεικονίζεται στο σχήμα 2.2β(β).

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.1) δεν ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές δυνάμεως και εμβαδού, αλλά μέχρι ορισμένες τιμές που αντιστοιχούν στο όριο θραύσεως του υλικού (βλ. παράγρ. 1.3). Επίσης σημειώνομε ότι το σχήμα 2.2β απεικονίζει τις τάσεις εφελκυσμού μέχρι την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$ (βλ. παράγρ. 2.2.2).

Παράδειγμα 1.

Δύναμη $F = 900$ N δρα κάθετα σε διατομή σώματος και το καταπονεί σε εφελκυσμό.

1) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού, εάν η διατομή είναι τετραγωνική με πλευρά $\alpha = 3$ cm.

2) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού, εάν η διατομή είναι ορθογώνια με πλευρές $\beta = 2{,}25$ cm και $\gamma = 4$ cm.

3) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (1) και (2). Τι παρατηρείτε;

Λύση.

1) Ας ονομάσομε $\sigma_{\varepsilon\varphi,1}$ τη ζητούμενη τάση εφελκυσμού για την περίπτωση της τετραγωνικής διατομής. Το εμβαδόν της τετραγωνικής διατομής A_1 είναι: $A_1 = \alpha^2 = 3^2\,\text{cm}^2 = 9\,\text{cm}^2$.

Έτσι, η τάση εφελκυσμού για την τετραγωνική διατομή δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi,1} = \frac{F}{A_1} = \frac{900\ \text{N}}{9\ \text{cm}^2} = 100\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}\,.$$

2) Ας ονομάσομε $\sigma_{\varepsilon\varphi,2}$ τη ζητούμενη τάση εφελκυσμού για την περίπτωση της ορθογώνιας διατομής. Το εμβαδόν της ορθογώνιας διατομής A_2 είναι: $A_2 = \alpha \cdot \beta = 2{,}25\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$.

Έτσι, η τάση εφελκυσμού για την ορθογώνια διατομή δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi,2} = \frac{F}{A_2} = \frac{900\ \text{N}}{9\ \text{cm}^2} = 100\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}\,.$$

3) Παρατηρούμε ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι ίδιες στις δύο περιπτώσεις. Αυτό οφείλεται στο ότι η ίδια δύναμη δρα στο ίδιο εμβαδόν επιφάνειας. Αυτό που έχει σημασία για την τάση εφελκυσμού είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της διατομής και όχι αυτό καθαυτό το σχήμα της διατομής.

2.2.2 Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού.

Όπως είδαμε στο πείραμα του εφελκυσμού στην παράγραφο 1.3, όταν σ' ένα εφελκυόμενο σώμα εφαρμόζεται μεγάλη εξωτερική δύναμη, μεγαλύτερη από αυτή που μπορεί να αντέξει, τότε το σώμα θραύεται. Για να αποφεύγεται η θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε εφελκυσμό πρέπει οι τάσεις εφελκυσμού που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες απ' την τάση στην οποία το υλικό θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί ένα όριο, πολύ μικρότερο απ' την τάση στην οποία το υλικό θραύεται, πάνω από το οποίο απαγορεύεται να λάβουν τιμές οι τάσεις εφελκυσμού. Δηλαδή, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά τον εφελκυσμό πρέπει να είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες με το όριο αυτό. Η τάση αυτή ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού μιας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή όταν καταπονείται σε εφελκυσμό, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της.

Η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού συμβολίζεται με $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$ και προσδιορίζεται συνήθως με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας. Το φορτίο $F_{\varepsilon\pi}$ που αντιστοιχεί στην επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού ονομάζεται ***επιτρεπόμενο φορτίο εφελκυσμού***.

2.2.3 Συντελεστής ασφαλείας για τον εφελκυσμό.

Συντελεστής ασφαλείας ν για τον εφελκυσμό ονομάζεται ο αριθμός ο οποίος δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$ σε μία κατασκευή απ' την τάση $\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi}$, στην οποία το υλικό θραύεται όταν εφελκύεται.

Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}. \qquad (2.2)$$

Λύνοντας τη σχέση (2.2) ως προς την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού, έχομε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\nu}. \qquad (2.3)$$

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 1.14, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής είναι πολύ σημαντικό στοιχείο γι' αυτήν και δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ο καθορισμός αυτός προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία στα θέματα αυτά και πραγματοποιείται με έναν από τους τρόπους που αναφέραμε στην παράγραφο 1.14.2.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού μιας κατασκευής όταν ο συντελεστής ασφάλειάς της ν επιλέγεται να είναι ίσος με 4. Η τάση θραύσεως του υλικού της κατασκευής στον εφελκυσμό είναι $\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 1.000\ \mathrm{N/cm^2}$.

Λύση.

Ο συντελεστής ασφαλείας της κατασκευής ορίζεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}.$$

Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς τη ζητούμενη επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού έχομε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\nu} = \frac{1.000\ \mathrm{N/cm^2}}{4} = 250\ \mathrm{N/cm^2}.$$

2.2.4 Σχέση εφελκυσμού.

Όπως προαναφέραμε, η τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$, δηλαδή:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}. \qquad (2.4)$$

Η σχέση (2.4) είναι γνωστή ως ***σχέση εφελκυσμού*** και εφαρμόζεται μόνον εφόσον ισχύουν όλες οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

1) Το εφελκυόμενο σώμα είναι ***ευθύγραμμο***. Αν δεν ισχύει η προϋπόθεση αυτή, τότε έχομε την εμφάνιση σύνθετης καταπονήσεως.

2) Ο εφελκυσμός είναι ***αξονικός***. Δηλαδή, η δύναμη που εφελκύει το σώμα ενεργεί στον κεντρικό άξονά του.

2) Το υλικό του εφελκυόμενου σώματος είναι ***ομοιογενές***. Δηλαδή, το υλικό έχει σε όλη την έκταση της μάζας του τις ίδιες ιδιότητες, με αποτέλεσμα οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την καταπόνηση σε εφελκυσμό να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

2.2.5 Εφαρμογές της σχέσεως εφελκυσμού.

Η σχέση εφελκυσμού εφαρμόζεται στα προβλήματα σωμάτων που καταπονούνται ή αναμένεται να καταπονηθούν σε εφελκυσμό. Τα προβλήματα αυτά διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με το ποια δεδομένα απ' αυτά που εμφανίζονται στη σχέση εφελκυσμού είναι γνωστά και ποιο είναι το ζητούμενο. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι ακόλουθες:

1) Κατηγορία Ι – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η εφελκύουσα δύναμη (το φορτίο), το εμβαδόν της διατομής και η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού και μας ζητούν να προσδιορίσομε την τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται στην κατασκευή και να ελέγξομε εάν η εν λόγω τάση είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη (πίν. 2.2.1).

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε την τάση εφελκυσμού από τη σχέση:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A}.$$

β) Συγκρίνομε την τάση εφελκυσμού με την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$? $\sigma_{\varepsilon\varphi}$.

Παράδειγμα 3.

Ράβδος καταπονείται σε εφελκυσμό λόγω της επιδράσεως εξωτερικής δυνάμεως F = 2.500 N. Η διατομή της ράβδου είναι κυκλική με διάμετρο d = 4 cm. Εάν η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 1.000\ N/cm^2$ να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

Λύση.

Για να διαπιστώσομε εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, πρέπει να συγκρίνομε την τάση λειτουργίας σε εφελκυσμό της ράβδου $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ με την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$.

Η τάση λειτουργίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A}.$$

Το εμβαδόν A της κυκλικής διατομής είναι:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4^2 cm^2}{4} = 4 \cdot \pi cm^2 = 12{,}56\ cm^2.$$

Έτσι, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A} = \frac{2.500\ N}{12{,}56\ cm^2} = 199\frac{N}{cm^2}.$$

Συνεπώς, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$. Άρα, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

2) Κατηγορία ΙΙ – Προβλήματα διαστασιολογήσεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η εφελκύουσα δύναμη (το φορτίο) και η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού και μας ζητούν να προσδιορίσομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής του εφελκυόμενου σώματος (πίν. 2.2.2).

Τα προβλήματα διαστασιολογήσεως είναι ιδιαίτερα σημαντικά για την Αντοχή των Υλικών, καθώς αποτελούν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι κατασκευαστές κατά τον σχεδιασμό των κατασκευών.

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

Πίνακας 2.2.1
Υπολογισμός τάσεως λειτουργίας.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εφελκύουσα δύναμη: F	Τάση εφελκυσμού: $\sigma_{\varepsilon\varphi}$
Εμβαδόν διατομής: A	Είναι η τάση εφελκυσμού μικρότερη από την επιτρεπόμενη; $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$? $\sigma_{\varepsilon\varphi}$
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$	

Πίνακας 2.2.2
Διαστασιολόγηση.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εφελκύουσα δύναμη: F	Εμβαδόν διατομής: A
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$	

α) Προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής, λύνοντας τη σχέση εφελκυσμού ως προς αυτό. Έτσι λαμβάνομε:

$$A \geq \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}.$$

β) Επειδή δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει πάντοτε διαθέσιμη διατομή με το μέγεθος επιφάνειας που προσδιορίσαμε στο βήμα (α), επιλέγομε ανάμεσα στις διαθέσιμες διατομές τη μικρότερη από αυτές που ικανοποιούν το αποτέλεσμα του βήματος (α).

γ) Επιβεβαιώνομε ότι για τη διατομή που επιλέγομε στο βήμα (β), η τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού.

Παράδειγμα 4.

Ράβδος με τετραγωνική διατομή πρόκειται να καταπονηθεί σε εφελκυσμό με την εφαρμογή εξωτερικής δυνάμεως F = 40.000 N. Πόση πρέπει να είναι η πλευρά της διατομής της; Η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$.

Λύση.

Για τη ράβδο ισχύει η σχέση εφελκυσμού:

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}. \qquad (1)$$

Εάν ονομάσομε α την πλευρά της τετραγωνικής διατομής της ράβδου, το εμβαδόν της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \alpha^2. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση εφελκυσμού και λύνοντας ως προς την πλευρά α λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\alpha^2} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow \alpha^2 \ge \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ge \sqrt{\frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ge \sqrt{\frac{40.000\ N}{10.000\ N/cm^2}} \Leftrightarrow \alpha \ge 2cm.$$

Άρα, η πλευρά της τετραγωνικής διατομής της ράβδου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με 2 cm.

Παράδειγμα 5.

Πόσα δοκίμια από χάλυβα με ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 8 mm και β = 15 mm πρέπει να συνενώσομε σε παράλληλη δέσμη για να αναρτήσομε φορτίο F = 250.000 N, εάν έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό και η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$ = = 10.000 N/cm^2;

Λύση.

Αρχικά προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής. Για τον σκοπό αυτό λύνομε τη σχέση εφελκυσμού ως προς τη διατομή Α:

$$\frac{F}{A} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow A \ge \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}} = \frac{250.000\ N}{10.000\ N/cm^2} = 25\ cm^2.$$

Επομένως, τα δοκίμια που πρέπει να συνενώσομε αρκεί να έχουν συνολικό εμβαδόν διατομής 25 cm^2. Για να βρούμε πόσα δοκίμια πρέπει να συνενώσομε, υπολογίζομε το εμβαδόν A_δ κάθε δοκιμίου:

$$A_\delta = 8\ mm \cdot 15\ mm = 0{,}8\ cm \cdot 1{,}5\ cm = 1{,}2\ cm^2.$$

Ο αριθμός των δοκιμίων n που απαιτούνται είναι:

$$n = \frac{A}{A_\delta} = \frac{25\ cm^2}{1{,}2\ cm^2} = 20{,}8.$$

Συνεπώς, απαιτούνται 21 δοκίμια.

Πραγματικά, κάνοντας επαλήθευση βρίσκομε ότι η αναπτυσσόμενη τάση εφελκυσμού στα 21 δοκίμια είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{n \cdot A_\delta} = \frac{250.000\ N}{21 \cdot 1{,}2\ cm^2} = 9.921\ \frac{N}{cm^2},$$

δηλαδή μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού.

3) Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού του φορτίου που αντέχει ένα εφελκυόμενο σώμα (ικανότητα φορτίσεως).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά το εμβαδόν της διατομής του σώματος και η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού και μας ζητούν να προσδιορίσομε το φορτίο που επιτρέπεται να ενεργεί στο σώμα όταν καταπονείται σε εφελκυσμό (πίν. 2.2.3).

Για την ***επίλυση των προβλημάτων*** αυτών προσδιορίζομε το φορτίο που μπορεί να αντέξει το σώμα, λύνοντας τη σχέση εφελκυσμού ως προς την εφελκύουσα δύναμη. Έτσι λαμβάνομε: $F \le \sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} \cdot A$.

Πίνακας 2.2.3
Ικανότητα φορτίσεως.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
Εμβαδόν διατομής: Α	Εφελκύουσα δύναμη: F
Επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$	

Παράδειγμα 6.

Ράβδος έχει ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 2 cm και β = 3 cm. Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεως της ράβδου, εάν η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$ = 1.000 N/cm^2;

Λύση.

Για τη ράβδο ισχύει η σχέση εφελκυσμού:

$$\frac{F}{A} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}. \qquad (1)$$

Το εμβαδόν της διατομής της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \alpha \cdot \beta. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση εφελκυσμού και λύνοντας ως προς το φορτίο F λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\alpha \cdot \beta} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow F \le \alpha \cdot \beta \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F \le 2\ cm \cdot 3\ cm \cdot 1.000\ N/cm^2 \Leftrightarrow F \le 6.000\ N.$$

Άρα, το φορτίο εφελκυσμού της ράβδου δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 6.000 N.

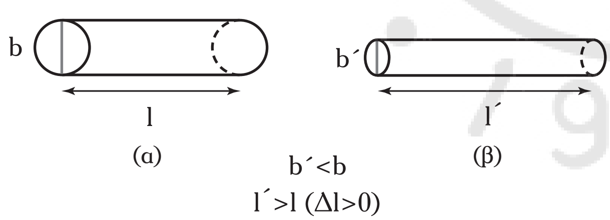
2.2.6 Παραμορφώσεις εφελκυσμού.

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 1.3, οι παραμορφώσεις απ' την καταπόνηση σε εφελκυσμό που προκαλούνται σ' ένα σώμα είναι οι ακόλουθες:

1) ***Αύξηση του μήκους του***, η οποία αφορά στην αύξηση του αρχικού μήκους l κατά Δl κατά τη διεύθυνση εφαρμογής της εξωτερικής δυνάμεως F.

2) ***Ελάττωση της διατομής του***, που αφορά στη διατομή η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση εφαρμογής της δυνάμεως F. Εάν b είναι η αρχική διάσταση της διατομής πριν την εφαρμογή της δυνάμεως, τότε κατά τον εφελκυσμό, η διάσταση αυτή ελαττώνεται κατά $\Delta b = b' - b$ και γίνεται ίση με $b' < b$.

Οι παραμορφώσεις της αυξήσεως του μήκους και της ελαττώσεως της διατομής παρουσιάζονται στο σχήμα 2.2γ. Οι παραμορφώσεις αυτές δεν συμβαίνουν ανεξάρτητα η μία της άλλης, αλλά εμφανίζονται μαζί. Δηλαδή, η αύξηση του μήκους συνοδεύεται με ελάττωση της διατομής του στερεού σώματος. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι συνήθως η αύξηση του μήκους είναι πολύ μικρή σε σχέση με το αρχικό μήκος. Ομοίως, η ελάττωση της διατομής είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μέγεθος της αρχικής διατομής. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλές φορές να μην γίνονται άμεσα αντιληπτές οι παραμορφώσεις αυτές, ωστόσο, συμβαίνουν πάντοτε κατά την καταπόνηση σε εφελκυσμό ενός σώματος. Σημειώνομε ότι το σχήμα 2.2γ(β) δεν παρουσιάζει τη ρεαλιστική εικόνα που έχει το καταπονούμενο σε εφελκυσμό σώμα, αλλά δείχνει μόνο την έννοια των δύο παραμορφώσεων που αναφέρομε. Στην πραγματικότητα το σώμα παρουσιάζει στένωση.



Σχ. 2.2γ
Μήκος και διατομή στερεού σώματος:
(α) Πριν και (β) κατά την καταπόνησή του σε εφελκυσμό.

Οι παραμορφώσεις αυτές στην αναλογική περιοχή υπολογίζονται με τη βοήθεια των ακολούθων σχέσεων:

1) Του ***Νόμου του Hooke*** (βλ. παράγρ. 1.2):

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E}. \tag{2.5}$$

2) Της ***σχέσεως ορισμού της ανηγμένης επιμηκύνσεως*** (βλ. παράγρ. 1.2):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{2.6}$$

3) Της ***σχέσεως ορισμού της εγκάρσιας ανηγμένης παραμορφώσεως*** (βλ. παράγρ. 1.5):

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b' - b}{b}. \tag{2.7}$$

4) Του ***λόγου Poisson*** (βλ. παράγρ. 1.5):

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Η αύξηση του μήκους υπολογίζεται από τη σχέση (2.5). Η ελάττωση της διαστάσεως της διατομής υπολογίζεται συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.5), (2.6) και (2.7) στη σχέση (2.8) λαμβάνομε:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\frac{\Delta b}{b}}{\frac{\Delta l}{l}} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta b \cdot l}{b \cdot \Delta l} \Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b \cdot \Delta l}{l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b}{l} \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b \cdot F}{A \cdot E}. \tag{2.9}$$

Το αρνητικό πρόσημο της μεταβολής $\Delta b = b' - b$ δηλώνει ελάττωση της διατομής.

Σημειώνεται ότι οι ανωτέρω σχέσεις (2.5) και (2.9) ισχύουν στην αναλογική περιοχή. Ακολουθεί χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογισμού των παραμορφώσεων του εφελκυσμού.

Παράδειγμα 7.

Ράβδος με ορθογώνια διατομή διαστάσεων α = 2 cm και β = 3 cm έχει μήκος l = 100 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη F = 9.000 N.

α) Να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

β) Εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις της.

Δίνονται η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$, που βρίσκεται στην αναλογική περιοχή, το μέτρο ελαστικότητας $E = 4{,}4 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και ο λόγος Poisson του υλικού της μ = 0,25 (ίδιος και για τις δύο διαστάσεις της διατομής).

Λύση.

α) Για να διαπιστώσομε εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, πρέπει να συγκρίνομε την τάση λειτουργίας σε εφελκυσμό της ράβδου $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ με την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$.

Η τάση λειτουργίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A}.$$

Το εμβαδόν A της ορθογώνιας διατομής είναι: $A = \alpha \cdot \beta = 2\ cm \cdot 3\ cm = 6\ cm^2$.

Έτσι, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A} = \frac{9.000\ N}{6\ cm^2} = 1.500\ \frac{N}{cm^2}.$$

Συνεπώς, η τάση λειτουργίας της ράβδου είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$. Άρα, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

β) Επειδή η ράβδος φορτίζεται κανονικά, η φόρτισή της γίνεται στην αναλογική περιοχή. Έτσι, για τον υπολογισμό της αυξήσεως του μήκους της ράβδου, εφαρμόζομε τον Νόμο του Hooke:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} =$$

$$= \frac{9.000\ N \cdot 100\ cm}{6\ cm^2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^6\ N/cm^2} = 0{,}034\ cm.$$

Η μεταβολή των διαστάσεων $\alpha = 2$ cm και $\beta = 3$ cm της διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσεως (2.9) θέτοντας $b = \alpha$ και $b = \beta$:

$$\Delta\alpha = -\frac{\mu \cdot \alpha \cdot F}{A \cdot E} =$$

$$= -\frac{0{,}25 \cdot 2\ cm \cdot 9.000\ N}{6\ cm^2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^6\ N/cm^2} = -1{,}7 \cdot 10^{-4}\ cm$$

$$\Delta\beta = -\frac{\mu \cdot \beta \cdot F}{A \cdot E} =$$

$$= -\frac{0{,}25 \cdot 3\ cm \cdot 9.000\ N}{6\ cm^2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^6\ N/cm^2} = -2{,}6 \cdot 10^{-4}\ cm.$$

Ασκήσεις.

1. *Αρχικά, δύναμη $F_1 = 800$ N δρα κάθετα σε διατομή σώματος και το καταπονεί σε εφελκυσμό. Η διατομή του σώματος είναι κυκλική με ακτίνα r = 2 cm. Ακολούθως, στο σώμα δρα επί πλέον της F_1, εφελκυστική δύναμη $F_2 = 1.200$ N.*

α) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται αρχικά λόγω της δυνάμεως F_1.

β) Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται στη συνέχεια λόγω της εφαρμογής του συνδυασμού των δυνάμεων F_1 και F_2.

γ) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β). Τι παρατηρείτε;

2. *Μία ράβδος έχει τετραγωνική διατομή πλευράς α = 3 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη F = 36.000 N. Να υπολογιστεί η τάση εφελκυσμού και να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά. Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 8.000\ N/cm^2$.*

3. *Να υπολογιστεί ο συντελεστής ασφαλείας στον εφελκυσμό μιας κατασκευής, όταν η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού της επιλέγεται να είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 300 N/cm^2$. Η τάση θραύσεως του υλικού της κατασκευής στον εφελκυσμό είναι $\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 1.200\ N/cm^2$.*

4. *Ράβδος από χάλυβα έχει κυκλική διατομή διαμέτρου D = 2 cm και τάση θραύσεως σε εφελκυσμό $\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 400\ N/mm^2$. Η ράβδος χρησιμοποιείται για τη ρυμούλκηση φορτίου. Αν λάβομε συντελεστή ασφαλείας ίσο με ν = 5, να προσδιορισθεί το φορτίο που επιτρέπεται να ρυμουλκηθεί με τη ράβδο.*

5. *Για τη ρυμούλκηση πλοιαρίου απαιτείται δύναμη F = 75.000 N. Έχομε διαθέσιμες δύο χαλύβδινες ράβδους κυκλικής διατομής με διαμέτρους $D_1 = 3$ cm και $D_2 = 4$ cm. Ποια από τις δύο ράβδους πρέπει να χρησιμοποιήσομε; Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$.*

6. *Για τη ρυμούλκηση πλοιαρίου απαιτείται δύναμη F = 45.000 N. Αν για τη ρυμούλκηση είναι διαθέσιμες ράβδοι από χάλυβα κυκλικής διατομής με τάση θραύσεως σε εφελκυσμό $\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 420\ N/mm^2$ και ο συντελεστής ασφαλείας ληφθεί ίσος με ν = 6, να υπολογιστούν:*

α) Η διάμετρος της ράβδου που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τη ρυμούλκηση και

β) το φορτίο θραύσεως της ράβδου.

7. *Ράβδος με τετραγωνική διατομή πλευράς α = 2 cm έχει μήκος l = 120 cm. Η ράβδος εφελκύεται με δύναμη F = 18.000 N.*

α) Να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

β) Εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά, να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις της.

Δίνονται η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό της ράβδου $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ N/cm^2$, που βρίσκεται στην αναλογική περιοχή, το μέτρο ελαστικότητας $E = 4{,}4 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και ο λόγος Poisson του υλικού της μ = 0,30.

2.3 Τάσεις και παραμορφώσεις στη θλίψη.

Η ράβδος του σχήματος 2.3α(α) είναι κατακόρυφη και το ένα άκρο της στηρίζεται στο έδαφος, ενώ το άλλο είναι ελεύθερο. Η ράβδος χαρακτηρίζεται από το μήκος της και από το εμβαδόν της διατομής της.

Ας υποθέσομε ότι κάποια στιγμή στο ελεύθερο άκρο της ράβδου ασκείται κατακόρυφη δύναμη F, με φορά προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3α(β). Η άσκηση της κατακόρυφης δυνάμεως F έχει ως αποτέλεσμα, με βάση το αξίωμα δράσεως-αντιδράσεως, την εμφάνιση μίας δυνάμεως F′ στο άλλο άκρο της ράβδου, στο σημείο στηρίξεώς της στο έδαφος, η οποία είναι αντίθετη της δυνάμεως F. Οι δυνάμεις F και F′ έχουν ίδιο μέτρο, βρίσκονται στον ίδιο άξονα (δηλ. είναι συγγραμμικές), αλλά έχουν αντίθετη φορά (δηλ. είναι αντίρροπες). Οι δύο δυνάμεις F και F′ ενεργούν πάνω στη ράβδο και τείνουν να ελαττώσουν το μήκος της και να αυξήσουν τη διατομή της. Λέμε τότε ότι η ράβδος καταπονείται σε θλίψη.

Σχ. 2.3α
(α) Κατακόρυφη ράβδος στηριζόμενη στο έδαφος. (β) Η άσκηση δυνάμεως στο ελεύθερο άκρο της ράβδου προς τα κάτω έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση αντίθετης δυνάμεως στο άλλο άκρο της.

Γενικότερα: ***Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε θλίψη όταν στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες και αντίρροπες δυνάμεις, οι οποίες έχουν την τάση να ελαττώσουν το μήκος του και να αυξήσουν τη διατομή του.***

Η εξωτερική δύναμη F που καταπονεί ένα σώμα σε θλίψη ονομάζεται ***θλίβουσα (ή θλιπτική) δύναμη***.

Ωστόσο, η άσκηση δύο ίσων και αντιθέτων δυνάμεων πάνω στον άξονα του στερεού σώματος δεν έχει πάντοτε ως μόνη επίπτωση την εμφάνιση καταπονήσεως θλίψεως. Εάν το στερεό σώμα έχει μεγάλο μήκος και μικρή διατομή, τότε είναι δυνατόν να εκδηλώσει λυγισμό. Όπως αναλύεται στο Κεφάλαιο 7, προκειμένου να καταπονείται ένα σώμα σε καθαρή θλίψη, πρέπει το μήκος του l να είναι μικρότερο ή ίσο από το πενταπλάσιο της διαμέτρου του d (εάν η διατομή είναι κυκλική) ή από το οκταπλάσιο της μικρότερης πλευράς του α (εάν η διατομή είναι ορθογωνική). Εάν το μήκος του σώματος είναι μεγαλύτερο, τότε το σώμα μπορεί να εκδηλώσει λυγισμό.

Η καταπόνηση της θλίψεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε θλίψη είναι οι κολόνες ενός καταστρώματος πλοίου, ενός σπιτιού, μιας δεξαμενής, οι βάσεις των εργαλειομηχανών κ.λπ..

2.3.1 Τάσεις στη θλίψη.

Οι τάσεις που εμφανίζονται στα σώματα που καταπονούνται σε θλίψη ονομάζονται ***τάσεις θλίψεως***. Αποδεινύεται ότι στη θλίψη, η εσωτερική δύναμη σε κάθε διατομή του σώματος είναι ίση με την εξωτερική F και άρα κάθετη στη διατομή του σώματος. Συνεπώς, οι τάσεις θλίψεως είναι ορθές τάσεις και υπολογίζονται κατ’ ανάλογο τρόπο με τις τάσεις εφελκυσμού. Έτσι:

Ως τάση θλίψεως $\sigma_{\theta\lambda}$ ορίζομε το πηλίκον της δυνάμεως F που ενεργεί κατά τον άξονα στερεού σώματος και το καταπονεί σε θλίψη προς το εμβαδόν A της διατομής του σώματος.

Δηλαδή, έχομε:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A}. \qquad (2.10)$$

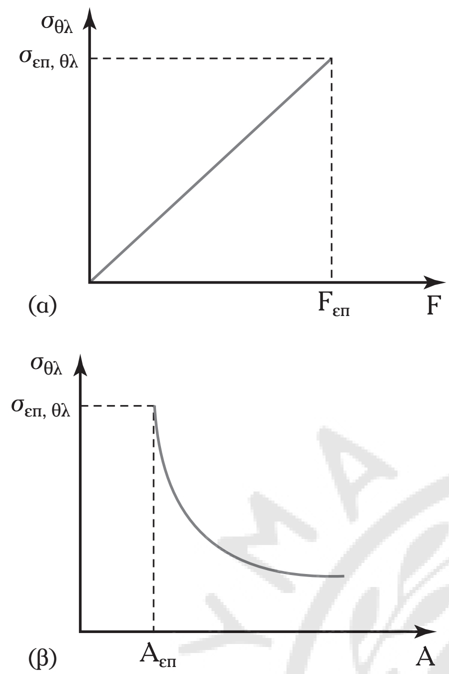
Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση του εφελκυσμού, στον υπολογισμό της τάσεως θλίψεως λαμβάνομε υπόψη μόνο τη μία από τις δύο συγγραμμικές και αντίρροπες δυνάμεις που καταπονούν το στερεό σώμα σε θλίψη.

Από τη σχέση (2.10) προκύπτει ότι για την τάση θλίψεως ισχύουν τα εξής:

1) Η ***τάση θλίψεως είναι ανάλογη της θλίβουσας δυνάμεως***. Η σχέση μεταξύ τάσεως θλίψεως και θλίβουσας δυνάμεως για την ίδια διατομή είναι γραμμική [σχ. 2.3β(α)].

1) Η ***τάση θλίψεως είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του σώματος που θλίβεται***. Η σχέση μεταξύ τάσεως θλίψεως και εμβαδού διατομής απεικονίζεται στο σχήμα 2.3β(β).

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.10) δεν ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές δυνάμεως και εμβαδού, αλλά μέχρι ορισμένες τιμές που αντιστοιχούν στο όριο θραύσεως του υλικού όπως αυτό ορίζεται για τη θλίψη (βλ. παράγρ. 1.4). Επίσης, σημειώνομε ότι το σχήμα 2.3β απεικονίζει τις τάσεις θλίψεως μέχρι την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$, την οποία αναπτύσσομε στην παράγραφο 2.3.2.



Σχ. 2.3β

(α) Σχέση τάσεως θλίψεως και θλίβουσας δυνάμεως για σταθερή διατομή. (β) Σχέση τάσεως θλίψεως και εμβαδού διατομής για σταθερή θλίβουσα δύναμη.

2.3.2 Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως.

Όπως είδαμε στο πείραμα της θλίψεως στην παράγραφο 1.4, όταν σε ένα θλιβόμενο σώμα εφαρμόζεται μεγάλη εξωτερική δύναμη, μεγαλύτερη απ' αυτή που μπορεί να αντέξει, τότε το σώμα αστοχεί/θραύεται. Για να αποφεύγεται η αστοχία/θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε θλίψη πρέπει οι τάσεις θλίψεως που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες από την τάση στην οποία το υλικό αστοχεί/θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί ένα όριο, πολύ μικρότερο απ' την τάση, στην οποία το υλικό αστοχεί/θραύεται, πάνω από το οποίο απαγορεύεται να λάβουν τιμές οι τάσεις θλίψεως. Δηλαδή, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά τη θλίψη πρέπει να είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες με το όριο αυτό. Η τάση αυτή ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση θλίψεως. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως μίας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή όταν καταπονείται σε θλίψη, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της.

Η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως συμβολίζεται με $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$ και προσδιορίζεται συνήθως με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας για τη θλίψη. Το φορτίο $F_{\varepsilon\pi}$, που αντιστοιχεί στην επιτρεπόμενη τάση θλίψεως ονομάζεται ***επιτρεπόμενο φορτίο θλίψεως***.

2.3.3 Συντελεστής ασφαλείας για τη θλίψη.

Συντελεστής ασφαλείας ν ***για τη θλίψη*** ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$ σε μια κατασκευή από την τάση $\sigma_{\theta\rho,\,\theta\lambda}$ στην οποία το υλικό αστοχεί/θραύεται όταν θλίβεται.

Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\sigma_{\theta\rho,\theta\lambda}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}. \qquad (2.11)$$

Λύνοντας τη σχέση (2.11) ως προς την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως, έχομε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\theta\lambda}}{\nu}. \qquad (2.12)$$

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 1.14, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μιας κατασκευής είναι πολύ σημαντικό στοιχείο για την κατασκευή και δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ο καθορισμός αυτός προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία στα θέματα αυτά και πραγματοποιείται μ' έναν από τους τρόπους που ήδη αναφέραμε στην παράγραφο 1.14.

2.3.4 Σχέση θλίψεως.

Κατ' αναλογία της περιπτώσεως του εφελκυσμού, η τάση θλίψεως $\sigma_{\theta\lambda}$ πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$, δηλαδή:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}. \qquad (2.13)$$

Η σχέση (2.13) είναι γνωστή ως ***σχέση θλίψεως***. Κατ' αναλογία με τη σχέση εφελκυσμού, η σχέση θλίψεως εφαρμόζεται μόνον εφόσον ισχύουν όλες οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Το θλιβόμενο σώμα είναι ***ευθύγραμμο***. Αν δεν ισχύει η προϋπόθεση αυτή τότε έχομε την εμφάνιση σύνθετης καταπονήσεως.

β) Η θλίψη είναι ***αξονική***, δηλαδή, η δύναμη που θλίβει το σώμα ενεργεί στον κεντρικό άξονά του.

γ) Το υλικό του θλιβόμενου σώματος είναι ***ομοιογενές***, δηλαδή, το υλικό έχει σε όλη την έκταση της μάζας του τις ίδιες ιδιότητες, με αποτέλεσμα οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την καταπόνηση σε θλίψη να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

2.3.5 Εφαρμογές της σχέσεως θλίψεως.

Η σχέση θλίψεως εφαρμόζεται στα προβλήματα σωμάτων που καταπονούνται ή αναμένεται να καταπονηθούν σε θλίψη. Όπως και στην περίπτωση του εφελκυσμού, τα προβλήματα της θλίψεως διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το ποια δεδομένα από αυτά που εμφανίζονται στη σχέση θλίψεως είναι γνωστά και ποιο είναι το ζητούμενο. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι ακόλουθες:

1) Κατηγορία Ι – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η θλίβουσα δύναμη (το φορτίο), το εμβαδόν της διατομής και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως και μας ζητούν να προσδιορίσομε την τάση θλίψεως που αναπτύσσεται στην κατασκευή και να ελέγξομε εάν η εν λόγω τάση είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη (πίν. 2.3.1).

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

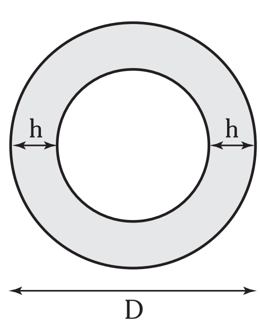
α) Προσδιορίζομε την τάση θλίψεως από τη σχέση:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A}.$$

β) Συγκρίνομε την τάση θλίψεως με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$? $\sigma_{\theta\lambda}$.

Παράδειγμα 8.

Στύλος έχει διατομή σε σχήμα δακτυλίου με εξωτερική διάμετρο D = 20 cm και πάχος h = 4 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3γ. Ο στύλος θλίβεται από μία δύναμη F = 5.000 N. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως που αναπτύσσεται και να εξεταστεί εάν ο στύλος φορτίζεται κανονικά. Η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως του στύλου είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 800\ \text{N/cm}^2$.



Σχ. 2.3γ

Λύση.

Η εσωτερική διάμετρος d του δακτυλίου υπολογίζεται ως εξής d = D – 2h = 20 cm – 2·4 cm = 12 cm.

Άρα, το εμβαδόν της επιφάνειας στην οποία ενεργεί κάθετα το φορτίο F = 5.000 N είναι:

$$A = \pi\frac{D^2}{4} - \pi\frac{d^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}(20^2\,\text{cm}^2 - 12^2\,\text{cm}^2) = 200{,}96\,\text{cm}^2.$$

Η τάση λειτουργίας σε θλίψη της ράβδου $\sigma_{\theta\lambda}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} = \frac{5.000\,\text{N}}{200{,}96\,\text{cm}^2} = 24{,}88\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}.$$

Η τάση λειτουργίας του στύλου είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση σε θλίψη $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$. Άρα, ο στύλος φορτίζεται κανονικά.

2) Κατηγορία ΙΙ – Προβλήματα διαστασιολογήσεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά η θλίβουσα δύναμη (το φορτίο) και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως και μας ζητούν να προσδιορίσομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής του θλιβόμενου σώματος (πίν. 2.3.2).

Όπως έχομε ήδη αναφέρει, τα προβλήματα δια-

Πίνακας 2.3.1
Υπολογισμός τάσεως λειτουργίας.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
Θλίβουσα δύναμη: F	Τάση θλίψεως: $\sigma_{\theta\lambda}$
Εμβαδόν διατομής: A	Είναι η τάση θλίψεως μικρότερη από την επιτρεπόμενη; $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$? $\sigma_{\theta\lambda}$
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$	

Πίνακας 2.3.2
Διαστασιολόγηση.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
Θλίβουσα δύναμη: F	Εμβαδόν διατομής: A
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$	

στασιολογήσεως είναι ιδιαίτερα σημαντικά για την Αντοχή των Υλικών, καθώς αποτελούν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι κατασκευαστές κατά τον σχεδιασμό των κατασκευών.

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής, λύνοντας τη σχέση θλίψεως ως προς αυτό. Έτσι λαμβάνομε:

$$A \geq \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}}.$$

β) Επειδή δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει πάντοτε διαθέσιμη διατομή με το μέγεθος επιφάνειας που προσδιορίσαμε στο βήμα (α), επιλέγομε ανάμεσα στις διαθέσιμες διατομές τη μικρότερη απ' αυτές που ικανοποιούν το αποτέλεσμα του βήματος (α).

γ) Επιβεβαιώνομε ότι για τη διατομή που επιλέγομε στο βήμα (β), η τάση θλίψεως που αναπτύσσεται είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως.

Παράδειγμα 9.

Διαθέτομε τρεις ράβδους με ορθογώνια διατομή, οι οποίες έχουν πλευρές α και β, όπου α = 5 cm και η β λαμβάνει τιμές 1 cm ή 2 cm ή 3 cm. Θέλομε να επιλέξομε μία από τις ράβδους αυτές, προκειμένου να της εφαρμόσομε θλιπτική δύναμη F = 88.000 N. Πόση πρέπει να είναι η πλευρά β της ράβδου που θα επιλέξομε; Η επιτρεπόμενη τάση στη θλίψη είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 10.000\ \text{N/cm}^2$.

Λύση.

Για τη ράβδο ισχύει η σχέση θλίψεως:

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}. \qquad (1)$$

Το εμβαδόν της ορθογώνιας διατομής της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \alpha \cdot \beta. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση θλίψεως και λύνοντας ως προς την πλευρά β λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\alpha\cdot\beta} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta \geq \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow \beta \geq \frac{F}{\alpha\cdot\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \geq \frac{88.000\ \text{N}}{5\ \text{cm}\cdot 10.000\ \text{N}/\text{cm}^2} \Leftrightarrow \beta \geq 1{,}76\ \text{cm}.$$

Άρα, η πλευρά β της ορθογώνιας διατομής της ράβδου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με 1,76cm.

Δεδομένου ότι οι διαθέσιμες ράβδοι έχουν πλευρά β = 1 cm ή β = 2 cm ή β = 3 cm, επιλέγομε τη ράβδο που έχει τη μικρότερη πλευρά β που είναι μεγαλύτερη από 1,76 cm, δηλαδή β = 2 cm. Η τάση λειτουργίας της ράβδου που επιλέξαμε είναι:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\alpha\cdot\beta} = \frac{88.000\ \text{N}}{5\ \text{cm}\cdot 2\ \text{cm}} = 8.800\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2},$$

η οποία επιβεβαιώνομε ότι είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως.

3) Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού του φορτίου που αντέχει ένα θλιβόμενο σώμα (ικανότητα φορτίσεως).

Στα προβλήματα αυτά μας είναι γνωστά το εμβαδόν της διατομής του σώματος και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως και μας ζητούν να προσδιορίσομε το φορτίο που επιτρέπεται να ενεργεί στο σώμα όταν καταπονείται σε θλίψη (πίν. 2.3.3).

Πίνακας 2.3.3
Ικανότητα φορτίσεως.

Δεδομένα	*Ζητούμενα*
Εμβαδόν διατομής: Α	Θλίβουσα δύναμη: F
Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}$	

Για την ***επίλυση των προβλημάτων*** αυτών προσδιορίζομε το φορτίο που μπορεί να αντέξει το σώμα, λύνοντας τη σχέση θλίψεως ως προς τη θλίβουσα δύναμη. Έτσι λαμβάνομε:

$$F \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}\cdot A.$$

Παράδειγμα 10.

Πόσο βάρος επιτρέπεται να έχει μαζί με το περιεχόμενό της μια δεξαμενή η οποία θα στηριχθεί σε βάση με n = 8 πόδια διατομής, $A_1 = 2\ \text{cm}^2$ το καθένα, όταν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 7.000\ \text{N/cm}^2$;

Λύση.

Έστω F_1 η θλιπτική δύναμη που δέχεται κάθε πόδι της βάσεως. Για κάθε πόδι της βάσεως ισχύει η σχέση θλίψεως:

$$\frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda}.$$

Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς την F_1 έχομε:

$$F_1 \leq A_1 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} \Leftrightarrow F_1 \leq 2\,\text{cm}^2 \cdot 7.000\,\text{N/cm}^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_1 \leq 14.000\,\text{N}.$$

Το μέγιστο επιτρεπόμενο συνολικό φορτίο και στα 8 πόδια είναι:

$$F = n \cdot F_1 = 8 \cdot 14.000\ \text{N} = 112.000\,\text{N}.$$

Επομένως, επιτρέπεται να τοποθετηθεί στη βάση δεξαμενή με βάρος μέχρι το πολύ 112.000 N.

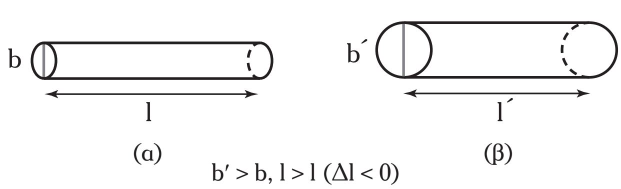
2.3.6 Παραμορφώσεις στη θλίψη.

Όπως είδαμε και στην παράγραφο 1.4, οι παραμορφώσεις από την καταπόνηση σε θλίψη που προκαλούνται σ' ένα σώμα είναι οι ακόλουθες:

1) ***Ελάττωση του μήκους του*** που αφορά στην ελάττωση του αρχικού μήκους l κατά Δl κατά τη διεύθυνση εφαρμογής της εξωτερικής δυνάμεως F. Επειδή μιλούμε για ελάττωση, ισχύει $\Delta l < 0$.

2) ***Αύξηση της διατομής του***. Η αύξηση αυτή αφορά στη διατομή που είναι κάθετη στη διεύθυνση εφαρμογής της δυνάμεως F. Εάν b είναι η αρχική διάσταση της διατομής πριν την εφαρμογή της δυνάμεως, τότε κατά τη θλίψη η διάσταση αυτή αυξάνει κατά $\Delta b = b' - b$ και γίνεται ίση με $b' > b$.

Οι παραμορφώσεις της ελαττώσεως του μήκους και της αυξήσεως της διατομής παρουσιάζονται στο σχήμα 2.3δ. Οι παραμορφώσεις αυτές δεν συμβαίνουν ανεξάρτητα η μία της άλλης, αλλά εμφανίζονται μαζί. Δηλαδή, η ελάττωση του μήκους συνοδεύεται με αύξηση της διατομής του στερεού σώματος. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι συνήθως η ελάττωση του μήκους είναι πολύ μικρή σε σχέση με το αρχικό μήκος. Ομοίως, η αύξηση της διατομής είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μέγεθος της αρχικής διατομής. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλές φορές να μην γίνονται άμεσα αντιληπτές οι παραμορφώσεις αυτές. Ωστόσο, συμβαίνουν πάντοτε κατά την καταπόνηση σε θλίψη ενός σώματος. Σημειώνομε ότι το



Σχ. 2.3δ
Μήκος και διατομή στερεού σώματος: (α) Πριν την καταπόνησή του σε θλίψη. (β) Κατά την καταπόνησή του σε θλίψη.

σχήμα 2.3δ(β) δεν παρουσιάζει τη ρεαλιστική εικόνα που έχει το καταπονούμενο σε θλίψη σώμα, αλλά δείχνει μόνο την έννοια των δύο παραμορφώσεων που αναφέρομε. Στην πραγματικότητα το σώμα παίρνει τη μορφή βαρελιού.

Οι παραμορφώσεις αυτές στην αναλογική περιοχή υπολογίζονται με τη βοήθεια των ακολούθων σχέσεων:

1) Του ***Νόμου του Hooke*** (βλ. παράγρ. 1.2):

$$\Delta l = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E}. \qquad (2.14)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την ελάττωση του μήκους ($\Delta l<0$).

2) Της ***σχέσεως ορισμού της ανηγμένης επιβραχύνσεως*** (βλ. παράγρ. 1.4):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (2.15)$$

3) Της ***σχέσεως ορισμού της εγκάρσιας ανηγμένης παραμορφώσεως*** (βλ. παράγρ. 1.5):

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b' - b}{b}. \qquad (2.16)$$

4) Του ***λόγου Poisson*** (βλ. παράγρ. 1.5):

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}. \qquad (2.17)$$

Η ελάττωση του μήκους υπολογίζεται από τη σχέση (2.14). Η αύξηση της διαστάσεως της διατομής υπολογίζεται συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.14), (2.15) και (2.16) στη σχέση (2.17) λαμβάνομε:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta b/b}{\Delta l/l} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta b \cdot l}{b \cdot \Delta l} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta b = -\frac{\mu \cdot b \cdot \Delta l}{l} \Leftrightarrow \Delta b = \frac{\mu \cdot b}{l} \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta b = \frac{\mu \cdot b \cdot F}{A \cdot E} \qquad (2.18)$$

Το θετικό πρόσημο της μεταβολής $\Delta b = b' - b$ δηλώνει ότι έχομε αύξηση της διατομής.

Σημειώνεται ότι οι ανωτέρω σχέσεις (2.14) και (2.18) ισχύουν στην αναλογική περιοχή. Ακολουθεί χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογισμού των παραμορφώσεων της θλίψεως.

Παράδειγμα 11.

Ράβδος έχει τετραγωνική διατομή πλευράς

$\alpha = 25$ mm και μήκος $l = 120$ cm. Η ράβδος φορτίζεται κανονικά στην αναλογική περιοχή με θλίβουσα δύναμη $F = 48.000$ N. Να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις της. Πόση γίνεται η πλευρά της τετραγωνικής διατομής; Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας $E = 8{,}2 \cdot 10^6$ N/cm^2 και ο λόγος Poisson του υλικού της $\mu = 0{,}30$.

Λύση.

Η ράβδος καταπονείται σε θλίψη, άρα, ελαττώνεται το μήκος της και αυξάνεται η πλευρά της διατομής της.

Το εμβαδόν Α της τετραγωνικής διατομής είναι: $A = \alpha^2 = 25^2$ mm^2 = 625 mm^2 = 6,25 cm^2.

Επειδή η ράβδος φορτίζεται κανονικά στην αναλογική περιοχή, για τον υπολογισμό της ελαττώσεως του μήκους της, εφαρμόζομε τον Νόμο του Hooke:

$$\Delta l = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E} =$$

$$= -\frac{48.000\,\text{N} \cdot 120\,\text{cm}}{6{,}25\,\text{cm}^2 \cdot 8{,}2 \cdot 10^6\,\text{N}/\text{cm}^2} = -0{,}11\,\text{cm}.$$

Η αύξηση της πλευράς της τετραγωνικής διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια του λόγου του Poisson $\mu = -\varepsilon_g/\varepsilon$ αντικαθιστώντας την ανηγμένη επιβράχυνση $\varepsilon = \Delta l/l$ και την εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha}.$$

Συγκεκριμένα έχομε:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta\alpha/\alpha}{\Delta l/l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu = -\frac{\Delta\alpha \cdot l}{\Delta l \cdot \alpha} \Leftrightarrow \Delta\alpha = -\frac{\mu \cdot \Delta l \cdot \alpha}{l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\alpha = -\frac{0{,}3(-0{,}11\,\text{cm}) \cdot 2{,}5\,\text{cm}}{120\,\text{cm}} = 0{,}0007\,\text{cm}.$$

Άρα, κατά την καταπόνηση σε θλίψη η πλευρά της διατομής της ράβδου γίνεται:

$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha = 2{,}5\,\text{cm} + 0{,}0007\,\text{cm} = 2{,}5007\,\text{cm}.$$

2.3.7 Σύγκριση εφελκυσμού και θλίψεως.

Με βάση όσα προαναφέραμε, παρατηρούμε ότι η αντιμετώπιση του εφελκυσμού και της θλίψεως γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Ωστόσο, πρέπει να έχομε κατά νου τις ***μεταξύ εφελκυσμού και θλίψεως ομοιότητες και διαφορές***, οι οποίες παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 2.3.4.

Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο καταπονήσεων έγκειται στο ότι η αντοχή σε εφελκυσμό ενός στοιχείου μιας κατασκευής είναι ανεξάρτητη του μήκους του, ενώ η αντοχή σε θλίψη, εξαρτάται από αυτό λόγω του

Πίνακας 2.3.4
Σύγκριση εφελκυσμού και θλίψεως.

Θέμα	***Εφελκυσμός***	***Θλίψη***
Τάσεις (σε διατομές κάθετες στον άξονα του σώματος)	Ορθές	Ορθές
Εφαρμογή Νόμου Hooke	Στην αναλογική περιοχή	Στην αναλογική περιοχή
Επιτρεπόμενη τάση	Ορίζεται	Ορίζεται
Μεταβολή μήκους	Επιμήκυνση (αύξηση του μήκους ή $\Delta l>0$)	Επιβράχυνση (μείωση του μήκους ή $\Delta l<0$)
Ανηγμένη παραμόρφωση	Ανηγμένη επιμήκυνση ($\varepsilon>0$)	Ανηγμένη επιβράχυνση ($\varepsilon<0$)
Μεταβολή διατομής	Μείωση διαστάσεως διατομής ($\Delta b<0$)	Αύξηση διαστάσεως διατομής ($\Delta b>0$)
Εγκάρσια ανηγμένη παραμόρφωση	Αρνητική ($\varepsilon_g<0$)	Θετική ($\varepsilon_g>0$)
Αντοχή	Ανεξάρτητη του μήκους	Εξαρτάται από το μήκος λόγω του φαινομένου του λυγισμού

φαινομένου του λυγισμού.

Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με την εφαρμογή στην περίπτωση της θλίψεως διαφορετικών τιμών των επιτρεπομένων τάσεων ανάλογα με το μήκος του στοιχείου, ακόμη και εάν το ίδιο το υλικό έχει την ίδια αντοχή τόσο σε θλίψη, όσο και σε εφελκυσμό, όπως ο χάλυβας.

Τη διαδικασία προσδιορισμού των μειωμένων τιμών των επιτρεπομένων τάσεων λόγω του κινδύνου λυγισμού εξετάζομε στο Κεφάλαιο 7.

Ασκήσεις.

1. *Μία κολόνα θα φορτιστεί με θλιπτικό φορτίο $F = 120.000\,N$. Η διατομή της έχει διαστάσεις ορθογωνίου $a = 50\,cm$ και $\beta = 20\,cm$. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως που θα αναπτυχθεί.*

2. *Στύλος με δακτυλιοειδή διατομή με εξωτερική ακτίνα $R = 10\,cm$ και πάχος δακτυλίου $h = 5\,cm$ θλίβεται από μία δύναμη $F = 400.000\,N$. Να υπολογιστεί η τάση θλίψεως που θα αναπτυχθεί.*

3. *Μια κοντή χαλύβδινη κυλινδρική ράβδος καταπονείται σε θλίψη με φορτίο $F = 12.000\,N$. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της ράβδου εάν ο χάλυβας έχει τάση θραύσεως στη θλίψη $\sigma_{\theta\rho,\,\theta\lambda} = 37.000\,N/cm^2$ και ο συντελεστής ασφαλείας έναντι θραύσεως είναι ίσος με $\nu = 6$;*

4. *Κοντό κομμάτι σωλήνα καταπονείται σε θλίψη με φορτίο $F = 20.000\ N$. Η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 12.000\ N/cm^2$. Πόση πρέπει να είναι η εξωτερική διάμετρος D του σωλήνα, όταν ο λόγος της εξωτερικής διαμέτρου D προς την εσωτερική d είναι ίσος με 1,25;*

5. *Μια δεξαμενή γεμάτη με νερό έχει συνολικό βάρος $F = 500.000\ N$. Η δεξαμενή θα στηρίζεται σε $n = 4$ σιδερένιους πασσάλους. Να βρεθεί η διατομή κάθε πασσάλου εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 3.000\,N/cm^2$.*

6. *Δεξαμενή πετρελαίου έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος $a = 2\,m$, πλάτος $b = 1\ m$ και ύψος $c = 1\ m$ και όταν είναι άδεια έχει βάρος $F = 2.200\,N$. Η δεξαμενή στηρίζεται σε $n = 4$ κοντές σιδηρογωνίες ιδίων διαστάσεων $a_1 = 30\,mm$ και $a_2 = 30\,mm$ με διατομή $A = 1{,}74\,cm^2$, η καθεμιά. Η επιτρεπόμενη τάση των σιδηρογωνιών είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 12.0000\,N/cm^2$. Αντέχει η δεξαμενή να γεμίσει πλήρως με πετρέλαιο; Δίνεται το ειδικό βάρος του πετρελαίου $\varepsilon_{\pi\varepsilon\tau} = 8.500\,N/m^3$.*

Υπόδειξη: *Η φόρτιση προέρχεται από το βάρος της δεξαμενής όταν είναι άδεια και το βάρος του πετρελαίου που χωράει. Το βάρος του πετρελαίου υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{\pi\varepsilon\tau} = \varepsilon_{\pi\varepsilon\tau} \cdot V$, όπου V ο όγκος της δεξαμενής.*

7. *Ράβδος έχει κυκλική διατομή ακτίνας $r = 15\ mm$ και μήκος $l = 100\,cm$. Η ράβδος φορτίζεται κανονικά στην αναλογική περιοχή με θλίβουσα δύναμη $F = 58.000\,N$. Να υπολογίσετε τις παραμορφώσεις της. Πόση γίνεται η ακτίνα της κυκλικής διατομής; Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας $E = 6{,}2 \cdot 10^6\,N/cm^2$ και ο λόγος Poisson του υλικού της $\mu = 0{,}32$.*

2.4 Κυλινδρικά δοχεία πιέσεως με λεπτά τοιχώματα.

Τα κυλινδρικά δοχεία πιέσεως με λεπτά τοιχώματα που περιέχουν ρευστό είναι σώματα που καταπονούνται σε εφελκυσμό. Παραδείγματα τέτοιων δοχείων αποτελούν οι λέβητες, οι αεροσυμπιεστές κ.λπ..

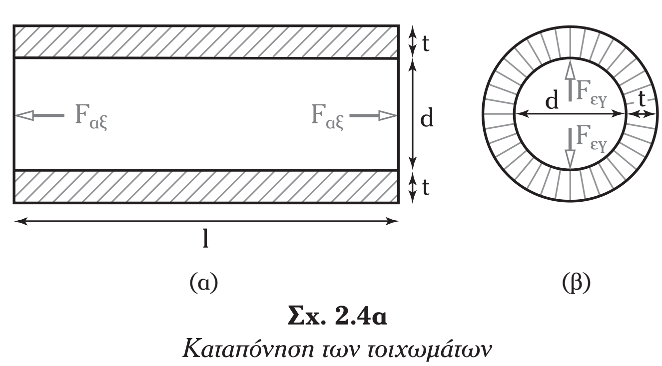
Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτών των σωμάτων είναι τα ακόλουθα:

1) Το πάχος t των τοιχωμάτων τους.
2) Το μήκος τους l και
3) η διάμετρος d του κυλίνδρου.

Τα δοχεία περιέχουν ρευστό με πίεση P. Οι μονάδες μετρήσεως της πιέσεως των ρευστών στο Διεθνές Σύστημα είναι το $1\,N/m^2$, στο C.G.S. το $1\,dyn/cm^2$, στο Τεχνικό Σύστημα το $1\,kp/m^2$ και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το $1\,lb/ft^2$. Στην πράξη η πίεση μετρείται σε N/cm^2 ή N/mm^2.

Προκειμένου να μελετήσομε την καταπόνηση του εφελκυσμού σ' ένα κυλινδικό δοχείο πιέσεως με λεπτά τοιχώματα παρατηρούμε τις τομές του δοχείου κατά τον άξονά του και κάθετα σ' αυτόν (σχ. 2.4α).

Η εσωτερική πίεση καταπονεί τα τοιχώματα του κυλινδρικού δοχείου στις ακόλουθες δύο διευθύνσεις (σχ. 2.4α):



Σχ. 2.4α
Καταπόνηση των τοιχωμάτων κυλινδρικού δοχείου πιέσεως με λεπτά τοιχώματα σε δύο διευθύνσεις. (α) Αξονικά. (β) Εγκάρσια.

1) ***Κατά τον άξονα του δοχείου*** (αξονικά). Στη διεύθυνση αυτή ενεργούν δυνάμεις $F_{αξ}$, που προέρχονται από την πίεση που αναπτύσσεται στις δύο βάσεις του κυλινδρικού δοχείου και δίνονται απ' τη σχέση:

$$F_{αξ} = \frac{π \cdot d^2 \cdot P}{4}. \qquad (2.19)$$

2) ***Κάθετα στον άξονα του δοχείου*** (εγκάρσια). Στη διεύθυνση αυτή ενεργούν εγκάρσιες δυνάμεις $F_{εγ}$ που δίνονται απ' τη σχέση:

$$F_{εγ} = d \cdot l \cdot P. \qquad (2.20)$$

Στη συνέχεια μελετούμε τις καταπονήσεις που δέχεται το κυλινδρικό δοχείο απ' τις ανωτέρω δυνάμεις.

2.4.1 Καταπόνηση από τη δύναμη που ενεργεί αξονικά.

Η δύναμη $F_{αξ}$ που ενεργεί κατά τον άξονα του κυλινδρικού δοχείου καταπονεί κάθετα την εγκάρσια διατομή του δοχείου που έχει σχήμα δακτυλίου, αναπτύσσοντας τάσεις εφελκυσμού παράλληλες στον άξονα του δοχείου. Οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***διαμήκεις τάσεις***. Η επιφάνεια του δακτυλίου απεικονίζεται στο σχήμα 2.4β. Ο δακτύλιος έχει πολύ μικρό πάχος και άρα το εμβαδόν του υπολογίζεται από τη σχέση:

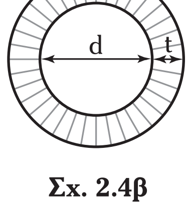
$$A_δ = π \cdot d \cdot t. \qquad (2.21)$$

Οι διαμήκεις τάσεις $σ_{διαμ}$ που αναπτύσσονται λόγω της δυνάμεως $F_{αξ}$ δίνονται από τη σχέση:

$$σ_{διαμ} = \frac{F_{αξ}}{A_δ}. \qquad (2.22)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.19) και (2.21) στη σχέση (2.22), λαμβάνομε:

$$σ_{διαμ} = \frac{F_{αξ}}{A_δ} \Leftrightarrow σ_{διαμ} = \frac{\frac{π \cdot d^2 \cdot P}{4}}{π \cdot d \cdot t} \Leftrightarrow σ_{διαμ} = \frac{d \cdot P}{4 \cdot t}. \qquad (2.23)$$



Σχ. 2.4β
Η δακτυλιοειδής διατομή ενός κυλινδρικού δοχείου με λεπτά τοιχώματα.

Σημειώνομε ότι οι διαμήκεις τάσεις πρέπει να είναι μικρότερες απ' την επιτρεπόμενη τάση.

2.4.2 Καταπόνηση από τη δύναμη που ενεργεί εγκάρσια.

Η δύναμη $F_{εγ}$, παρόλο που ενεργεί κάθετα στον άξονα του κυλινδρικού δοχείου, καταπονεί κάθετα τη διατομή που απεικονίζεται στο σχήμα 2.4γ, αναπτύσσοντας τάσεις εφελκυσμού. Οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***εφαπτομενικές τάσεις***. Η επιφάνεια της διατομής αυτής υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$A = 2 \cdot l \cdot t. \qquad (2.24)$$

Οι εφαπτομενικές τάσεις $σ_{εφαπ}$ που αναπτύσσονται λόγω της δυνάμεως $F_{εγ}$ δίνονται από τη σχέση:

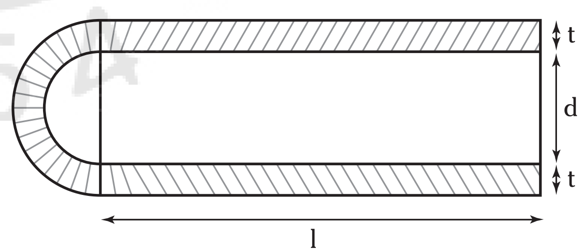
$$σ_{εφαπ} = \frac{F_{εγ}}{A}. \qquad (2.25)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.20) και (2.24) στη σχέση (2.25), λαμβάνομε:

$$σ_{εφαπ} = \frac{F_{εγ}}{A} \Leftrightarrow σ_{εφαπ} = \frac{d \cdot l \cdot P}{2 \cdot l \cdot t} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow σ_{εφαπ} = \frac{d \cdot P}{2 \cdot t}. \qquad (2.26)$$

Για τις εφαπτομενικές τάσεις σημειώνομε ότι πρέπει να είναι μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.23) και (2.26), διαπιστώνομε ότι οι εφαπτομενικές τάσεις είναι διπλάσιες των διαμήκων τάσεων:

$$σ_{εφαπ} = 2 \cdot σ_{διαμ}. \qquad (2.27)$$



Σχ. 2.4γ
Η διατομή ενός κυλινδρικού δοχείου με λεπτά τοιχώματα στην οποία ενεργεί κάθετα η εγκάρσια δύναμη.

2.4.3 Επιλογή πάχους τοιχωμάτων κυλινδρικού δοχείου.

Με βάση όσα προαναφέραμε έχομε μια σύνθετη καταπόνηση, αφού έχομε δύο εφελκυσμούς κατά διαφορετικές διευθύνσεις.

Η επιλογή του πάχους t των τοιχωμάτων των κυλινδρικών δοχείων στηρίζεται στο ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις πρέπει να είναι μικρότερες απ' την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει συνδυαστικά: $\sigma_{\delta\iota\alpha\mu} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$ και $\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$. Όμως, επειδή είναι $\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = 2 \cdot \sigma_{\delta\iota\alpha\mu}$, αρκεί:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}. \qquad (2.28)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.26) στη σχέση (2.28) και λύνοντας ως προς το πάχος t λαμβάνομε:

$$\frac{d \cdot P}{2 \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow t \geq \frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}}. \qquad (2.29)$$

Επομένως, το πάχος των τοιχωμάτων των κυλινδρικών δοχείων πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με:

$$\frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}}.$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι στην πράξη, το πάχος των τοιχωμάτων των κυλινδρικών δοχείων λαμβάνεται λίγο μεγαλύτερο απ' την ανωτέρω τιμή κατά μία ποσότητα Δt, ώστε να προφυλάσσονται από οξείδωση. Δηλαδή, στην πράξη το πάχος επιλέγεται χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$t \geq \frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}} + \Delta t. \qquad (2.30)$$

Η ποσότητα Δt παρέχεται για διάφορες περιπτώσεις στον πίνακα 2.4.

Πίνακας 2.4
Ποσότητα Δt για διάφορα είδη δοχείων και σωλήνων.

Είδος δοχείων	***Δt***	***Είδος σωλήνων***	***Δt***
Χαλύβδινα	0,1 cm	Χαλύβδινοι	0,3 cm
Χάλκινα	0,1 cm	Χάλκινοι	0,15 cm
Χυτοσιδηρά	1,25 cm	Χυτοσιδηροί	0,65 cm

Ωστόσο, στα προβλήματα του παρόντος κεφαλαίου δεν θα λαμβάνομε υπόψη την ανωτέρω ποσότητα Δt.

Παράδειγμα 12.

Κυλινδρικός θάλαμος πιέσεως με λεπτά τοιχώματα μήκους l = 3 m και διαμέτρου d = 1,6 m πρέπει να λειτουργήσει με πίεση $P = 100\ N/cm^2$. Αν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 12.000\ N/cm^2$:

1) Να προσδιοριστεί το ελάχιστο πάχος τοιχωμάτων λαμβάνοντας υπόψη ότι διαθέσιμα πάχη υπάρχουν μόνο σε ακέραια mm.

2) Να υπολογιστούν οι διαμήκεις και οι εφαπτομενικές τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό της παράπλευρης επιφάνειας του θαλάμου για το πάχος που επιλέχθηκε στο ερώτημα 1.

Λύση.

1) Οι αναπτυσσόμενες εφαπτομενικές τάσεις πρέπει να είναι μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση, δηλαδή:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \frac{d \cdot P}{2 \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow t \geq \frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{1{,}6\ m \cdot 100\ N/cm^2}{2 \cdot 12.000\ N/cm^2} \Leftrightarrow t \geq 6{,}67\ mm.$$

Άρα, δεδομένου ότι διαθέσιμα πάχη υπάρχουν μόνο σε ακέραια mm, επιλέγομε ως πάχος τοιχώματος του κυλινδρικού θαλάμου t = 7 mm.

2) Για το πάχος t = 7 mm, οι αναπτυσσόμενες διαμήκεις και εφαπτομενικές τάσεις είναι:

$$\sigma_{\delta\iota\alpha\mu} = \frac{d \cdot P}{4 \cdot t} = \frac{1{,}6\ m \cdot 100\ N/cm^2}{4 \cdot 7\ mm} = 5.714\ N/cm^2$$

και

$$\sigma_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \frac{d \cdot P}{2 \cdot t} = \frac{1{,}6\ m \cdot 100\ N/cm^2}{2 \cdot 7\ mm} = 11.429\ N/cm^2.$$

Ασκήσεις.

1. *Θέλομε να κατασκευάσομε κυλινδρικό δοχείο με λεπτά τοιχώματα με διάμετρο d = 100 cm και μήκος l = 140 cm, το οποίο να αντέχει σε πίεση $P = 80\ N/cm^2$. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 32.000\ N/cm^2$, να υπολογιστεί το πάχος των τοιχωμάτων του δοχείου.*

2. *Κυλινδρικό δοχείο με λεπτά τοιχώματα έχει διάμετρο d = 90 cm, μήκος l = 80 cm και πάχος t = 10 mm. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 18.000\ N/cm^2$, να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη εσωτερική πίεση.*

3. *Κυλινδρικό δοχείο πιέσεως με λεπτά τοιχώματα μήκους l = 2,5 m και διαμέτρου d = 1,5 m πρέπει να λειτουργήσει με πίεση $P = 80\ N/cm^2$. Αν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 14.000\ N/cm^2$:*

α) Να προσδιοριστεί το ελάχιστο πάχος τοιχώματος λαμβάνοντας υπόψη ότι διαθέσιμα πάχη υπάρχουν μόνο σε ακέραια mm.

β) Να υπολογιστούν οι διαμήκεις και οι εφαπτο-

μενικές τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό της παράπλευρης επιφάνειας του δοχείου για το πάχος που επιλέχθηκε στο ερώτημα (α).

2.5 Τάσεις αναπτυσσόμενες από παρεμπόδιση.

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως αναπτύσσονται λόγω της εφαρμογής εξωτερικών δυνάμεων. Ωστόσο, τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως είναι δυνατό να αναπτυχθούν και χωρίς την εφαρμογή εξωτερικών φορτίων, σε σώματα στα οποία συμβαίνει μία θερμοκρασιακή μεταβολή και παρεμποδίζονται να παραμορφωθούν ελεύθερα. Αντίθετα, αν δεν παρεμποδίζεται η παραμόρφωση των σωμάτων, δεν αναπτύσσονται τάσεις.

Συγκεκριμένα, αν μεταβάλλεται η θερμοκρασία ενός σώματος και αυτό δεν έχει τη δυνατότητα να διασταλεί ή να συσταλεί ελεύθερα, τότε αναπτύσσονται στο σώμα τάσεις. Ενίοτε, οι τάσεις αυτές είναι ιδιαίτερα υψηλές, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε μόνιμη παραμόρφωση του σώματος ή ακόμα και σε θραύση. Συνεπώς, πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια στις κατασκευές, ώστε να αποφεύγεται η ανάπτυξη τάσεων από θερμοκρασιακές μεταβολές. Έτσι, ιδίως σε κατασκευές, που υφίστανται συνεχώς μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές επιβάλλεται να λαμβάνονται τα κατάλληλα μέτρα, ώστε να μην παρεμποδίζεται η ελεύθερη παραμόρφωσή τους. Τέτοιες κατασκευές για παράδειγμα είναι οι σωληνώσεις θερμικών εγκαταστάσεων. Ένα μέτρο που λαμβάνομε για την περίπτωσή τους είναι η τοποθέτηση ειδικών εξαρτημάτων στις σωληνώσεις θερμικών εγκαταστάσεων για την παραλαβή των διαστολών. Άλλο παράδειγμα κατασκευών που υφίστανται μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές είναι οι άτρακτοι μηχανών. Ένα μέτρο που λαμβάνομε για την περίπτωσή τους είναι η δημιουργία αξονικών διακένων στα έδρανα στηρίξεώς τους.

Επίσης, ανάπτυξη τάσεων λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής συμβαίνει στις περιπτώσεις κατασκευών που αποτελούνται από δύο ή περισσότερα υλικά με διαφορετικό συντελεστή διαστολής. Το υλικό με τον μεγαλύτερο συντελεστή διαστολής τείνει να διασταλεί περισσότερο από τα άλλα υλικά, τα οποία εμποδίζουν αυτήν τη διαστολή και έτσι δημιουργούνται θερμικές τάσεις.

Περαιτέρω ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των τάσεων που αναπτύσσονται σ' ένα σώμα, όταν αυτό δέχεται εξωτερικό φορτίο και ταυτόχρονα μεταβάλλεται η θερμοκρασία του, χωρίς να έχει δυνατότητα ελεύθερης παραμορφώσεως.

Στη συνέχεια, εξετάζομε αναλυτικά τις περιπτώσεις αναπτύξεως τάσεων λόγω μεταβολών της θερμοκρασίας (αύξηση και μείωση) χωρίς και με την παρουσία εξωτερικών φορτίων.

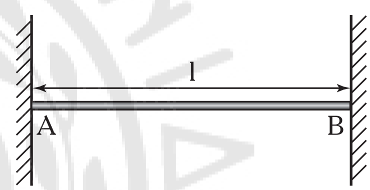
2.5.1 Ανάπτυξη τάσεων λόγω αυξήσεως της θερμοκρασίας.

Ας παρατηρήσομε τη ράβδο του σχήματος 2.5α. Η ράβδος έχει μήκος l και είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή και συστολή της.

Εάν η ράβδος ήταν ελεύθερη στο ένα άκρο της, τότε, όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1.8.1, αύξηση της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta$ ($\Delta\theta>0$) θα προκαλούσε διαστολή της κατά $\Delta l>0$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta, \qquad (2.31)$$

όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής της ράβδου.



Σχ. 2.5α
Ράβδος στερεωμένη στα δύο άκρα της.

Ωστόσο, η στήριξη της ράβδου δεν της επιτρέπει να επιμηκυνθεί ελεύθερα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναπτυχθούν σ' αυτήν τάσεις όμοιες με εκείνες που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ενεργούσε μία θλιπτική δύναμη, ώστε να την επαναφέρει στην αρχική της θέση. Συνεπώς, ***στην περίπτωση της παρεμποδίσεως της ελεύθερης επιμηκύνσεως της ράβδου λόγω αυξήσεως της θερμοκρασίας, έχομε καταπόνηση σε θλίψη.***

Οι τάσεις σ που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ράβδου ενεργούσε θλιπτική δύναμη για να την επαναφέρει στην αρχική της θέση δίνεται, όπως έχομε πει (βλ. παράγρ. 1.4) από τον Νόμο του Hooke:

$$\varepsilon = -\frac{\sigma}{E}. \qquad (2.32)$$

όπου ε είναι η ανηγμένη επιβράχυνση της ράβδου και Ε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της. Η ανηγμένη επιβράχυνση της ράβδου ορίζεται ως:

$$\varepsilon = \frac{-\Delta l}{l}. \qquad (2.33)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.31) και (2.33) στη σχέση (2.32) και λύνοντας ως προς σ λαμβάνομε:

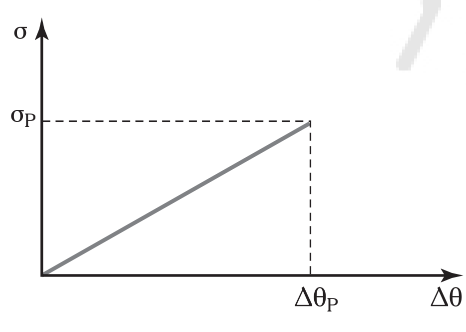
$$\frac{-\Delta l}{l} = -\frac{\sigma}{E} \Leftrightarrow \sigma = \frac{\Delta l \cdot E}{l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{\alpha \cdot l \cdot \Delta\theta \cdot E}{l} \Leftrightarrow \sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta. \quad (2.34)$$

Από τη σχέση (2.34) συμπεραίνομε ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται λόγω της παρεμποδίσεως της ελεύθερης διαστολής ενός σώματος που προκαλείται από την αύξηση της θερμοκρασίας είναι πρώτον ανάλογες της μεταβολής της θερμοκρασίας και δεύτερον εξαρτώνται από το υλικό της ράβδου και συγκεκριμένα από τον συντελεστή θερμικής διαστολής και το μέτρο ελαστικότητάς του.

Το σχήμα 2.5β απεικονίζει τη γραμμική σχέση μεταξύ των αναπτυσσομένων τάσεων και της μεταβολής της θερμοκρασίας. Η σχέση αυτή ισχύει μέχρι το όριο ισχύος του Νόμου του Hooke (σ_P). Για τον λόγο αυτό, πρέπει να επιβεβαιώνεται ότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της σχέσεως (2.34) βρίσκεται όντως εντός της αναλογικής περιοχής ισχύος του Νόμου του Hooke. Εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο ελαστικότητας, τότε οι παραμορφώσεις από τη μεταβολή της θερμοκρασίας καθίστανται μόνιμες. Περαιτέρω, εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο θραύσεως, έχομε θραύση, όπως και στην περίπτωση της επιδράσεως εξωτερικών φορτίων.

Από τη σχέση (2.34) συμπεραίνομε ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται λόγω παρεμποδίσεως της ελεύθερης διαστολής είναι ανεξάρτητες τόσο του μήκους της ράβδου, όσο και της διατομής της.



Σχ. 2.5β

Η σχέση μεταξύ των αναπτυσσομένων τάσεων και της μεταβολής της θερμοκρασίας, όταν παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή.

Παράδειγμα 13.

Να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται σε ράβδο μήκους $l = 2$ m, που είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή της, όταν η θερμοκρασία αυξάνεται από $\theta_1 = 25$ °C σε $\theta_2 = 37$ °C. Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$/°C, το μέτρο ελαστικότητας $E = 3{,}2 \cdot 10^7$ N/cm^2 και η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως της ράβδου εντός της αναλογικής περιοχής $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 10.000$ N/cm^2.

Λύση.

Έχομε μεταβολή της θερμοκρασίας της ράβδου κατά:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 37°C - 25°C = 12°C.$$

Οι τάσεις που αναπτύσσονται στη ράβδο λόγω της παρεμποδίσεως της ελεύθερης διαστολής της υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta = 1{,}3 \cdot 10^{-5}/°C \cdot 3{,}2 \cdot 10^7\,N/cm^2 \cdot 12\,°C = \\ = 4.992 N/cm^2.$$

Οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως. Άρα, όντως η ράβδος καταπονείται στην αναλογική περιοχή, όπου ισχύει ο Νόμος του Hooke και ορθώς εφαρμόσαμε την ανωτέρω σχέση υπολογισμού των αναπτυσσομένων τάσεων.

2.5.2 Ανάπτυξη τάσεων λόγω μειώσεως της θερμοκρασίας.

Ας μελετήσομε τώρα την περίπτωση της μειώσεως της θερμοκρασίας της ράβδου του σχήματος 2.5α, η οποία είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή και συστολή της. Η μείωση της θερμοκρασίας κατά Δθ προκαλεί τη συστολή της κατά Δl που δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\theta, \quad (2.35)$$

όπου α ο συντελεστής θερμικής διαστολής της ράβδου. Ωστόσο, η στήριξη της ράβδου δεν επιτρέπει στη ράβδο την ελεύθερη επιβράχυνση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναπτυχθούν στη ράβδο τάσεις όμοιες με εκείνες που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ενεργούσε μία εφελκυστική δύναμη για να την επαναφέρει στην αρχική της θέση. Συνεπώς, ***στην περίπτωση της παρεμποδίσεως της ελεύθερης επιβραχύνσεως της ράβδου λόγω μειώσεως της θερμοκρασίας, έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό.***

Οι τάσεις σ που θα αναπτύσσονταν εάν στο ελεύθερο άκρο της ράβδου ενεργούσε μια εφελκυστική δύναμη για να την επαναφέρει στην αρχική της θέση δίνεται, όπως έχομε πει, από τον Νόμο του Hooke. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, όπως και στην περίπτωση της αυξήσεως της θερμοκρασίας, καταλήγομε στην ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό των τάσεων που αναπτύσσονται λόγω παρεμποδίσεως της ελεύθερης συστολής ενός σώματος που προκαλείται απ' τη μείωση της θερμοκρασίας:

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta, \qquad (2.36)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Στη σχέση (2.36) η μεταβολή της θερμοκρασίας Δθ αφορά στην απόλυτη τιμή της.

Κατ' αναλογία με την περίπτωση της αυξήσεως της θερμοκρασίας, από τη σχέση (2.36) συμπεραίνομε ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται λόγω παρεμποδίσεως της ελεύθερης συστολής είναι ανάλογες της μεταβολής της θερμοκρασίας, εξαρτώνται από το υλικό της ράβδου και συγκεκριμένα από τον συντελεστή θερμικής διαστολής και το μέτρο ελαστικότητάς του και είναι ανεξάρτητες τόσο του μήκους της ράβδου, όσο και της διατομής της.

Σημειώνομε και εδώ ότι η σχέση (2.36) ισχύει μέχρι το όριο ισχύος του Νόμου του Hooke. Για τον λόγο αυτό, πρέπει να επιβεβαιώνεται ότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της σχέσεως (2.36) βρίσκεται όντως εντός της αναλογικής περιοχής. Εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο ελαστικότητας, τότε οι παραμορφώσεις από τη μεταβολή της θερμοκρασίας γίνονται μόνιμες. Περαιτέρω, εάν οι αναπτυσσόμενες τάσεις υπερβούν το όριο θραύσεως, έχομε θραύση, όπως και στην περίπτωση της επιδράσεως εξωτερικών φορτίων.

Παράδειγμα 14.

Η επιτρεπόμενη τάση εφελυσμού χαλύβδινης ράβδου, που είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή της, βρίσκεται στην αναλογική περιοχή και είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \varepsilon\varphi} = 12.000\ \text{N/cm}^2$. Πόση είναι η επιτρεπόμενη μείωση της θερμοκρασίας; Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ /^\circ\text{C}$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}4 \cdot 10^7\ \text{N/cm}^2$ της ράβδου.

Λύση.

Λόγω της παρεμποδίσεως της ελεύθερης συστολής της ράβδου, η μείωση της θερμοκρασίας έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση τάσεως, η οποία δίνεται από τη σχέση: $\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta$.

Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi,\ \varepsilon\varphi}$. Έτσι έχομε:

$$\sigma \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} \Leftrightarrow \Delta\theta \le \frac{\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}}{\alpha \cdot E} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\theta \le \frac{12.000\ \text{N/cm}^2}{1{,}5 \cdot 10^{-5}\ /^\circ\text{C} \cdot 2{,}4 \cdot 10^7\ \text{N/cm}^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\theta \le 33{,}3^\circ\text{C}.$$

Άρα, η θερμοκρασία επιτρέπεται να μειωθεί το πολύ κατά 33,3°C.

2.5.3 Ανάπτυξη τάσεων λόγω συνδυασμού εξωτερικών φορτίων και μεταβολής της θερμοκρασίας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των τάσεων που αναπτύσσονται σ' ένα σώμα όταν αυτό δέχεται εξωτερικό φορτίο και ταυτόχρονα μεταβάλλεται η θερμοκρασία του, χωρίς να έχει δυνατότητα ελεύθερης παραμορφώσεώς του. Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσονται στο σώμα δύο είδη τάσεων:

α) Τάσεις από τα εξωτερικά φορτία, οι οποίες παρέχονται από τη σχέση:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} \quad \text{και}$$

β) τάσεις από τη μεταβολή της θερμοκρασίας που παρέχονται από τη σχέση: $\sigma_2 = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta$.

Η συνολική τάση $\sigma_{o\lambda}$ που αναπτύσσεται στο σώμα προκύπτει ως το ***αλγεβρικό άθροισμα*** των ανωτέρω τάσεων, δηλαδή:

$$\sigma_{o\lambda} = \sigma_1 + \sigma_2. \qquad (2.37)$$

Επισημαίνομε ότι οι δύο τάσεις προστίθενται αλγεβρικά. Στο αλγεβρικό αυτό άθροισμα, η ***τάση εφελκυσμού***, ανεξαρτήτως του εάν οφείλεται σε εξωτερικά φορτία ή σε μείωση της θερμοκρασίας, ***λαμβάνεται θετική***, ενώ η ***τάση θλίψεως***, ανεξαρτήτως του εάν οφείλεται σε εξωτερικά φορτία ή σε αύξηση της θερμοκρασίας, ***λαμβάνεται αρνητική***.

Φυσικά, η συνολική τάση πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi}$, δηλαδή:

$$\sigma_{o\lambda} \le \sigma_{\varepsilon\pi}. \qquad (2.38)$$

Παράδειγμα 15.

Ράβδος κυκλικής διατομής είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η θερμοκρασία της ράβδου μειώνεται από $\theta_1 = 60$ °C σε $\theta_2 = 25$ °C και δέχεται εξωτερικό εφελκυστικό φορτίο F = 15.000 N. Να διαπιστωθεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά. Δίνονται:

1) Η ακτίνα κυκλικής διατομής της ράβδου: r = 10 mm.

2) Η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού (εντός της αναλογικής περιοχής): $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 22.000$ N/cm^2.

3) Ο συντελεστής θερμικής διαστολής: $\alpha = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$/°C.

4) Το μέτρο ελαστικότητας: $E = 1{,}8 \cdot 10^7$ N/cm^2.

Λύση.

Στη ράβδο αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις από δύο πηγές:

1) Από το εξωτερικό φορτίο: F = 15.000 N.

2) Από τη μείωση της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta = 60$ °C – 25 °C = 35 °C.

Η εφελκυστική τάση από το εξωτερικό φορτίο υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \cdot r^2} = \frac{15.000\,\mathrm{N}}{3{,}14 \cdot 1^2\,\mathrm{cm}^2} = 4.777\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Η εφελκυστική τάση από τη μείωση της θερμοκρασίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_2 = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta = 2{,}1 \cdot 10^{-5}/^\circ\mathrm{C} \cdot 1{,}8 \cdot 10^7\,\mathrm{N/cm^2} \cdot 35^\circ\mathrm{C} = 13.230\,\mathrm{N/cm^2}.$$

Οι δύο τάσεις είναι εφελκυστικές, άρα λαμβάνονται θετικές. Η συνολική τάση υπολογίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των δύο τάσεων:

$$\sigma_{o\lambda} = \sigma_1 + \sigma_2 = 4.777\,\mathrm{N/cm^2} + 13.230\,\mathrm{N/cm^2} = 18.007\,\mathrm{N/cm^2}.$$

Η συνολική τάση είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi}$. Άρα, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

Ασκήσεις.

1. *Κολόνα στηρίξεως μήκους $l = 2$ m και κυκλικής διατομής με διάμετρο $d = 30$ mm θερμαίνεται, χωρίς ωστόσο να έχει κανένα περιθώριο ελεύθερης διαστολής. Πόσο επιτρέπεται να αυξηθεί η θερμοκρασία της, όταν το όριο θραύσεως στη θλίψη είναι $\sigma_{\theta\rho,\,\theta\lambda} = 8.000$ N/cm^2 και ο συντελεστής ασφαλείας $\nu = 4$; Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$/°C και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}2 \cdot 10^7$ N/cm^2 της κολόνας.*

2. *Σωλήνωση έχει μήκος $l = 12$ m. Η σωλήνωση στηρίζεται στη μία άκρη της σταθερά, ενώ στην άλλη έχει περιθώριο ώστε να διασταλεί μέχρι $\Delta l_1 = 8$ mm. Πόση τάση θα αναπτυχθεί εάν η θερμοκρασία αυξηθεί κατά $\Delta\theta = 90$°C; Δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$/°C και το μέτρο ελαστικότητας $E = 3{,}2 \cdot 10^7$ N/cm^2 της σωληνώσεως. Θεωρήστε ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις στη σωλήνωση βρίσκονται στην αναλογική περιοχή.*

Υπόδειξη: *Η σωλήνωση μέχρι κάποια θερμοκρασία διαστέλλεται ελεύθερα και στη συνέχεια παρεμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή της.*

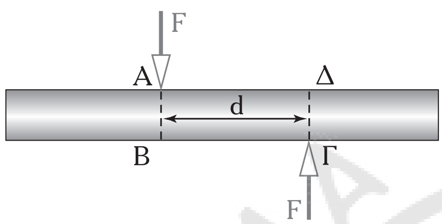
3. *Ράβδος τετραγωνικής διατομής είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η ράβδος δέχεται εξωτερικό θλιπτικό φορτίο $F = 20.000$ N. Πόσο επιτρέπεται να αυξηθεί η θερμοκρασία της; Δίνονται: η πλευρά της τετραγωνικής διατομής της ράβδου: $\beta = 1{,}1$ cm, η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως: $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\theta\lambda} = 24.000$ N/cm^2, ο συντελεστής θερμικής διαστολής: $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$/°C και το μέτρο ελαστικότητας: $E = 2{,}2 \cdot 10^7$ N/cm^2.*

4. *Ράβδος κυκλικής διατομής είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η ράβδος δέχεται εξωτερικό φορτίο $F = 18.000$ N και λειτουργεί σε περιβάλλον, οι θερμοκρασίες του οποίου κυμαίνονται από $\theta_1 = 0$°C έως $\theta_2 = 40$°C. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της ράβδου; Η τάση θραύσεως είναι $\sigma_{\theta\rho} = 48.000$ N/cm^2, ο συντελεστής ασφαλείας $\nu = 3$, ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$/°C και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}3 \cdot 10^7$ N/cm^2.*

5. *Ράβδος ορθογώνιας διατομής με πλευρές $\beta = 1{,}1$ cm και $\gamma = 2{,}2$ cm είναι στερεωμένη σταθερά στα δύο άκρα της κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παρεμποδίζεται η ελεύθερη συστολή και διαστολή της. Η ράβδος δέχεται εξωτερικά φορτία και λειτουργεί σε περιβάλλον, οι θερμοκρασίες του οποίου κυμαίνονται από $\theta_1 = -5$°C έως $\theta_2 = 45$°C. Πόσο εξωτερικό φορτίο επιτρέπεται να φέρει η ράβδος; Η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 20.000$ N/cm^2, ο* *συντελεστής θερμικής διαστολής* $a = 3{,}3 \cdot 10^{-5}\ /°C$ *και το μέτρο ελαστικότητας* $E = 1{,}4 \cdot 10^{7}\ N/cm^{2}$.

2.6 Τάσεις και παραμορφώσεις στη διάτμηση.

Ας θεωρήσομε μία ράβδο στην οποία ενεργούν δύο ίσες και παράλληλες δυνάμεις μέτρου F, αλλά αντίθετης φοράς, οι οποίες απέχουν απόσταση d και η μία ολισθαίνει πάνω στην άλλη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6α. Οι δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα της ράβδου και τείνουν να κόψουν τη ράβδο. Λέμε τότε ότι η ράβδος καταπονείται σε διάτμηση.



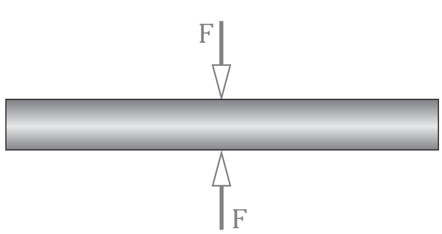
Σχ. 2.6α
Ράβδος που καταπονείται σε διάτμηση.

Συνεπώς: ***Ένα στερεό σώμα καταπονείται σε διάτμηση όταν κάθετα στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες, αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεις, οι οποίες έχουν την τάση να το κόψουν***.

Οι εξωτερικές δυνάμεις που καταπονούν ένα σώμα σε διάτμηση ονομάζονται ***διατμητικές δυνάμεις***.

2.6.1 Τμήση και διάτμηση.

Στην ειδική περίπτωση που η απόσταση μεταξύ των δύο ίσων και παραλλήλων δυνάμεων μέτρου F αλλά αντίθετης φοράς, οι οποίες καταπονούν ένα σώμα σε διάτμηση (σχ. 2.6β) είναι μηδενική, τότε λέμε ότι έχομε καταπόνηση σε ***τμήση*** ή ***καθαρή διάτμηση*** ή ***ψαλιδισμό***.



Σχ. 2.6β
Ράβδος που καταπονείται σε καθαρή διάτμηση.

Στην καταπόνηση της τμήσεως δεν αναπτύσσεται ροπή κάμψεως, άρα δεν υπάρχει κάμψη. Αντίθετα, στην καταπόνηση της διατμήσεως, λόγω της αποστάσεως μεταξύ των δυνάμεων αναπτύσσεται ροπή κάμψεως. Ωστόσο, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων είναι πολύ μικρή. Η καταπόνηση της κάμψεως παρουσιάζεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 5. Επίσης, στην πράξη δεν έχομε τμήση, αλλά μόνο διάτμηση, καθώς στην πραγματικότητα υπάρχει, έστω και πολύ μικρή απόσταση μεταξύ των δύο ίσων και παραλλήλων αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεων που καταπονούν ένα σώμα. Έτσι, πρακτικά οι όροι τμήση και διάτμηση έχουν την ίδια έννοια και θεωρούμε για τους υπολογισμούς μας ότι είναι ταυτόσημοι.

Η καταπόνηση της διατμήσεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε διάτμηση είναι οι ήλοι (καρφιά) και οι κοχλίες (μπουλόνια) που συνδέουν ελάσματα, οι άξονες που κόβονται από ψαλίδι κ.λπ.. Περισσότερες πληροφορίες για την καταπόνηση των ήλων και των κοχλιών σε διάτμηση παρουσιάζονται στην παράγραφο 2.7.2.

2.6.2 Τάσεις στη διάτμηση.

Όπως έχομε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 1, η εφαρμογή των εξωτερικών δυνάμεων μέτρου F που καταπονούν ένα σώμα σε διάτμηση προκαλεί την εμφάνιση εσωτερικών δυνάμεων στο σώμα και άρα την εμφάνιση τάσεων στο υλικό του. Οι τάσεις αυτές που εμφανίζονται στα σώματα που καταπονούνται σε διάτμηση ονομάζονται ***διατμητικές τάσεις***. Αποδεικνύεται ότι στη διάτμηση, η εσωτερική δύναμη σε κάθε διατομή του σώματος είναι ίση με την εξωτερική δύναμη F και άρα εφαπτομενική στη διατομή του σώματος. Οι ανωτέρω ιδιότητες των διατμητικών τάσεων μας οδηγούν στη διατύπωση του ακόλουθου ορισμού για τη διατμητική τάση.

Ως ***διατμητική τάση*** $\tau_{\delta\iota}$ ορίζομε το πηλίκον της δυνάμεως F που ενεργεί εφαπτομενικά στη διατομή στερεού σώματος και το καταπονεί σε διάτμηση προς το εμβαδόν A της διατομής του σώματος.

Δηλαδή, έχομε:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A}\,. \qquad (2.39)$$

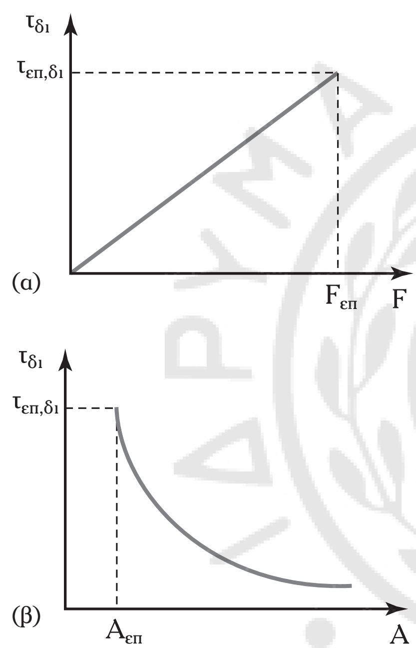
Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.39) ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι οι διατμητικές τάσεις δεν συνδέονται με καμπτικές παραμορφώσεις, τις οποίες παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 5. Επίσης σημειώνομε ότι στον υπολογισμό της διατμητικής τάσεως λαμβάνομε υπόψη μόνο τη μία από τις δύο συγγραμμικές και αντίρροπες δυνάμεις που καταπονούν το στερεό σώμα σε διάτμηση.

Από τη σχέση (2.39) κατανοούμε ότι για τη διατμητική τάση ισχύουν τα εξής:

1) Η ***διατμητική τάση είναι ανάλογη της διατμητικής δυνάμεως*** [σχ. 2.6γ(α)].

2) Η ***διατμητική τάση είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του σώματος που καταπονείται σε διάτμηση*** [σχ. 2.6γ(β)].

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η σχέση (2.39) δεν ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές δυνάμεως και εμβαδού, αλλά μέχρι ορισμένες τιμές που αντιστοιχούν στο όριο θραύσεως του υλικού για την καταπόνησή του σε διάτμηση. Επίσης, σημειώνομε ότι το σχήμα 2.6γ απεικονίζει τις τάσεις διατμήσεως μέχρι την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$ (βλ. παράγρ. 2.6.3).



Σχ. 2.6γ
(α) Σχέση διατμητικής τάσεως και διατμητικής δυνάμεως για σταθερή διατομή. (β) Σχέση διατμητικής τάσεως και εμβαδού διατομής για σταθερή διατμητική δύναμη.

Παράδειγμα 16.

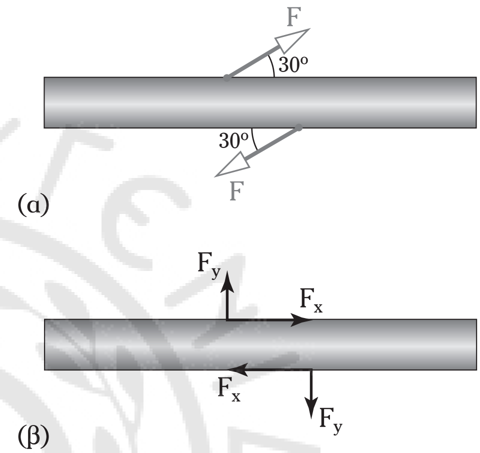
Στη ράβδο του σχήματος 2.6δ(α) ασκούνται δύο ίσες και παράλληλες δυνάμεις μέτρου F = 1.000 N αλλά αντίθετης φοράς. Οι δυνάμεις ενεργούν υπό γωνία φ = 30° ως προς τον άξονα της ράβδου. Να υπολογιστούν οι αναπτυσσόμενες στη ράβδο διατμητικές τάσεις. Δίνεται το εμβαδόν διατομής της ράβδου $A = 2\ cm^2$.

Λύση.

Η ανάπτυξη διατμητικών τάσεων οφείλεται στη δράση διατμητικών δυνάμεων. Οι διατμητικές δυνάμεις είναι αυτές που ενεργούν εφαπτομενικά στη διατομή της ράβδου. Η δύναμη F δεν δρα εφαπτομενικά στη διατομή της ράβδου, αλλά υπό γωνία ϕ = 30° ως προς τον άξονα της ράβδου. Επομένως, απαιτείται η ανάλυση της δυνάμεως F σε δύο συνιστώσες [σχ. 2.6δ(β)]:

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 1.000\ N \cdot \sigma\upsilon\nu 30^o = $$
$$= 1.000\ N \cdot 0{,}866 = 866\ N$$

$$F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = 1.000\ N \cdot \eta\mu 30^o = 1.000\ N \cdot 0{,}5 = 500\ N.$$



Σχ. 2.6δ
Ανάλυση των δυνάμεων.

Η συνιστώσα F_x είναι κάθετη στη διατομή. Η συνιστώσα F_y βρίσκεται στο επίπεδο της διατομής της ράβδου και είναι διατμητική δύναμη. Οι διατμητικές τάσεις $\tau_{\delta\iota}$ που αναπτύσσονται στη ράβδο υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F_y}{A} = \frac{500\ N}{2\ cm^2} = 250\ \frac{N}{cm^2}.$$

Επισημαίνομε ότι εκτός των παραπάνω διατμητικών τάσεων αναπτύσσονται και άλλες τάσεις που οφείλονται στις συνιστώστες F_x.

2.6.3 Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως.

Κατ' αναλογία των περιπτώσεων του εφελκυσμού και της θλίψεως, όταν σε σώμα που καταπονείται σε διάτμηση εφαρμόζεται μεγάλη εξωτερική διατμητική δύναμη, μεγαλύτερη απ' αυτήν που μπορεί να αντέξει, τότε το σώμα θραύεται. Για να αποφεύγεται η θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε διάτμηση πρέπει οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες απ' την τάση, στην οποία το υλικό θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί ένα όριο, πολύ μικρότερο απ' την τάση στην οποία το υλικό θραύεται, πάνω από το οποίο απαγορεύεται να λάβουν τιμές οι διατμητικές τάσεις. Δηλαδή, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά τη διάτμηση πρέπει να είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες με το όριο αυτό. Η τάση αυτή ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως μίας κατασκευής ονομάζεται η μέγιστη τάση που επιτρέπεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή όταν καταπονείται σε διάτμηση, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της.

Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως συμβολίζεται με $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$ και προσδιορίζεται συνήθως με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας ή της επιτρεπόμενης τάσεως εφελκυσμού.

Η έννοια του συντελεστή ασφαλείας είναι ίδια με την αντίστοιχη για τις καταπονήσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως. Πολλές φορές, η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως υπολογίζεται ως ένα ποσοστό της επιτρεπόμενης τάσεως εφελκυσμού. Συνήθως, λαμβάνομε ως επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως το 60% της επιτρεπόμενης τάσεως εφελκυσμού, δηλαδή:

$$\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 0{,}6 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}. \qquad (2.40)$$

Το φορτίο $F_{\varepsilon\pi}$ που αντιστοιχεί στην επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως ονομάζεται ***επιτρεπόμενο φορτίο διατμήσεως.***

Παράδειγμα 17.

Η επιτρεπόμενη τάση στον εφελκυσμό ενός υλικού είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\,\varepsilon\varphi} = 150.000\ N/cm^2$. Ποια είναι η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεώς του;

Λύση.

Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} = 0{,}6 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = 0{,}6 \cdot 150.000\ N/cm^2 = 90.000\ N/cm^2.$$

2.6.4 Συντελεστής ασφαλείας για τη διάτμηση.

Συντελεστής ασφαλείας ν για τη διάτμηση ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$ σε μία κατασκευή από την τάση $\tau_{\theta\rho,\,\delta\iota}$ στην οποία το υλικό θραύεται όταν καταπονείται σε διάτμηση.

Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{\tau_{\theta\rho,\delta\iota}}{\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}}. \qquad (2.41)$$

Λύνοντας τη σχέση (2.41) ως προς την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως, έχομε:

$$\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} = \frac{\tau_{\theta\rho,\delta\iota}}{\nu}. \qquad (2.42)$$

Όπως έχομε αναφέρει και στην παράγραφο 1.14, ο καθορισμός του συντελεστή ασφαλείας μίας κατασκευής είναι πολύ σημαντικό στοιχείο για την κατασκευή και δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ο καθορισμός αυτός προϋποθέτει τόσο την καλή γνώση της αντοχής υλικών και των παραγόντων που επιδρούν στην κατασκευή, όσο και την εμπειρία στα θέματα αυτά και πραγματοποιείται μ' έναν από τους τρόπους που αναφέραμε στην παράγραφο 1.14.2.

2.6.5 Σχέση διατμήσεως.

Όπως προαναφέραμε, η τάση διατμήσεως $\tau_{\delta\iota}$ πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$, δηλαδή:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}. \qquad (2.43)$$

Η σχέση (2.43) είναι γνωστή ως ***σχέση διατμήσεως***.

Η σχέση διατμήσεως εφαρμόζεται υπό την προϋπόθεση ότι το υλικό του καταπονούμενου σώματος είναι ***ομογενές***. Δηλαδή, το υλικό έχει σε όλη την έκταση της μάζας του τις ίδιες ιδιότητες, με αποτέλεσμα οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την καταπόνηση σε διάτμηση να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

2.6.6 Εφαρμογές της σχέσεως διατμήσεως.

Κατ' αναλογία των καταπονήσεων του εφελκυσμού και της θλίψεως, η σχέση διατμήσεως εφαρμόζεται στα προβλήματα σωμάτων που καταπονούνται ή αναμένεται να καταπονηθούν σε διάτμηση. Τα προβλήματα αυτά διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με το ποια δεδομένα από αυτά που εμφανίζονται στη σχέση διατμήσεως είναι γνωστά και ποιο είναι το ζητούμενο. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι εξής:

1) ***Κατηγορία Ι – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.***

Όπως και στις αντίστοιχες περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως, τα δεδομένα και ζητούμενα στοιχεία των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής για τη διάτμηση παρουσιάζονται στον πίνακα 2.6.1.

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε την τάση διατμήσεως από τη σχέση:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A}.$$

β) Συγκρίνομε την τάση διατμήσεως με την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$? $\tau_{\delta\iota}$.

Παράδειγμα 18.

Ήλος καταπονείται σε διάτμηση λόγω της επιδράσεως εξωτερικής δυνάμεως F = 12.500 N. Η διατομή του ήλου είναι κυκλική με διάμετρο d = 1 cm. Εάν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 16.000$ N/cm^2, να εξεταστεί εάν ο ήλος φορτίζεται κανονικά.

Λύση.

Για να διαπιστώσομε εάν ο ήλος φορτίζεται κανονικά, πρέπει να συγκρίνομε την τάση λειτουργίας σε διάτμηση του ήλου $\tau_{\delta\iota}$ με την επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$.

Η διατμητική τάση λειτουργίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A}.$$

Το εμβαδόν A της κυκλικής διατομής είναι:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2\,cm^2}{4} = \frac{\pi}{4}\,cm^2 = 0{,}785\,cm^2.$$

Έτσι, η διατμητική τάση λειτουργίας του ήλου είναι:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} = \frac{12.500\,N}{0{,}785\,cm^2} = 15.924\,\frac{N}{cm^2}.$$

Συνεπώς, η διατμητική τάση λειτουργίας του ήλου είναι οριακά μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$. Άρα, ο ήλος φορτίζεται κανονικά.

2) Κατηγορία II – Προβλήματα διαστασιολογήσεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

Όπως και στις αντίστοιχες περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως, τα δεδομένα και ζητούμενα στοιχεία των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής για τη διάτμηση παρουσιάζονται στον πίνακα 2.6.2.

Τα ***βήματα*** που ακολουθούμε ***για την επίλυση των προβλημάτων*** αυτών είναι τα εξής:

α) Προσδιορίζομε το εμβαδόν της απαιτούμενης διατομής, λύνοντας τη σχέση διατμήσεως ως προς αυτό. Έτσι λαμβάνομε:

$$A \geq \frac{F}{\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}}.$$

β) Επειδή δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει πάντοτε διαθέσιμη διατομή με το μέγεθος επιφάνειας που προσδιορίσαμε στο βήμα (α), επιλέγομε ανάμεσα στις διαθέσιμες διατομές τη μικρότερη απ' αυτές που ικανοποιούν το αποτέλεσμα του βήματος (α).

γ) Επιβεβαιώνομε ότι για τη διατομή που επιλέγομε στο βήμα (β), η διατμητική τάση που αναπτύσσεται είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως.

Πίνακας 2.6.1
Υπολογισμός τάσεως λειτουργίας.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Διατμητική δύναμη: F	Τάση διατμήσεως: $\tau_{\delta\iota}$
Εμβαδόν διατομής: A	Είναι η τάση διατμήσεως μικρότερη από την επιτρεπόμενη; $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$? $\tau_{\delta\iota}$
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$	

Πίνακας 2.6.2
Διαστασιολόγηση.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Διατμητική δύναμη: F	Εμβαδόν διατομής: A
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$	

Παράδειγμα 19.

Κοχλίας πρόκειται να καταπονηθεί σε διάτμηση με δύναμη F = 30.000 N. Εάν οι διαθέσιμοι κοχλίες έχουν διαμέτρους 8 mm, 12 mm, 16 mm, 20 mm, 24 mm και 30 mm, να βρεθεί η διάμετρος της κυκλικής διατομής του κοχλία που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 10.000$ N/cm^2.

Λύση.

Ο κοχλίας θα καταπονείται σε διάτμηση υπό την επίδραση της δυνάμεως F. Έτσι ισχύει η σχέση διατμήσεως:

$$\frac{F}{A} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}\,. \qquad (1)$$

Εάν ονομάσομε d τη διάμετρο της διατομής του κοχλία, το εμβαδόν της διατομής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}\,. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το εμβαδόν αυτό στη σχέση διατμήσεως και λύνοντας ως προς τη διάμετρο d λαμβάνομε:

$$\frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \Leftrightarrow d^2 \geq \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 30.000\,\text{N}}{3{,}14 \cdot 10.000\,\text{N}/\text{cm}^2}} \Leftrightarrow d \geq 1{,}95\,\text{cm}\,.$$

Άρα, η διάμετρος του κοχλία πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με 1,95 cm. Με βάση τους διαθέσιμους κοχλίες, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επιλέξομε τον κοχλία διαμέτρου d = 20 mm = 2 cm. Πραγματικά, η αναπτυσσόμενη τάση διατμήσεως στον κοχλία αυτό είναι:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot 30.000\,\text{N}}{3{,}14 \cdot 2^2\,\text{cm}^2} = 9.554\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

μικρότερη δηλαδή της επιτρεπόμενης τάσεως διατμήσεως.

---

3) *Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού του φορτίου που αντέχει ένα σώμα καταπονούμενο σε διάτμηση (ικανότητα φορτίσεως).*

Όπως και στις αντίστοιχες περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως, τα δεδομένα και ζητούμενα στοιχεία των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής για τη διάτμηση παρουσιάζονται στον πίνακα 2.6.3.

Πίνακας 2.6.3
Ικανότητα φορτίσεως.

Δεδομένα	***Ζητούμενα***
Εμβαδόν διατομής: A	Διατμητική δύναμη: F
Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως: $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota}$	

Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών προσδιορίζομε το φορτίο που μπορεί να αντέξει το σώμα, λύνοντας τη σχέση διατμήσεως ως προς τη διατμητική δύναμη. Έτσι λαμβάνομε: $F \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \cdot A$.

Παράδειγμα 20.

Ήλος έχει κυκλική διατομή εμβαδού $A = 3\,\text{cm}^2$. Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεώς του σε διάτμηση, εάν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 18.000\,\text{N/cm}^2$;

Λύση.

Για τον ήλο ισχύει η σχέση διατμήσεως:

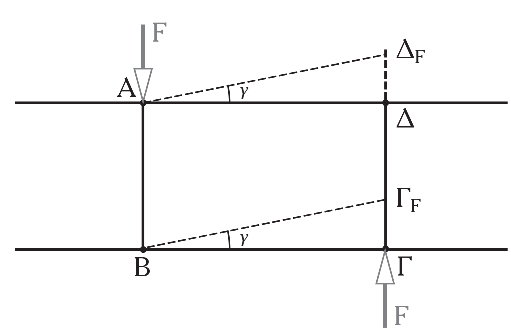
$$\frac{F}{A} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}.$$

Λύνοντας ως προς το φορτίο F λαμβάνομε τη ζητούμενη ικανότητα φορτίσεως του ήλου σε διάτμηση:

$$F \leq A \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} \Leftrightarrow F \leq 3\,\text{cm}^2 \cdot 18.000\,\text{N/cm}^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F \leq 54.000\,\text{N}.$$

2.6.7 *Παραμορφώσεις στη διάτμηση.*

Προκειμένου να μελετήσομε τις παραμορφώσεις στη διάτμηση ας δούμε με λεπτομέρεια τις διατομές μιας περιοχής της ράβδου του σχήματος 2.6ε που καταπονείται σε διάτμηση. Η περιοχή αυτή οριοθετείται από τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Ας υποθέσομε, για λόγους απλότητας, ότι κρατούμε σταθερή τη διατομή ΑΒ. Λόγω της εφαρμογής των δύο δυνάμεων F, οι διατομές της ράβδου από τη διατομή ΑΒ μέχρι τη διατομή ΓΔ ολισθαίνουν η μία πάνω στην άλλη, χωρίς να αλλάζουν οι διαστάσεις τους, με αποτέλεσμα το σώμα να παραμορφώνεται κατά γωνία γ. Συνεπώς, στην καταπόνηση της διατμήσεως έχομε ***ολίσθηση του σώματος κατά γωνία γ.*** Η γωνία ολισθήσεως γ μετρείται σε ακτίνια (rad) ή μοίρες (°). Ισχύει ότι



Σχ. 2.6ε
Παραμορφώσεις στη διάτμηση.

πrad = 180°. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι συνήθως η ολίσθηση είναι πολύ μικρή. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλές φορές να μην γίνεται άμεσα αντιληπτή η παραμόρφωση αυτή. Ωστόσο, η παραμόρφωση αυτή συμβαίνει πάντοτε κατά την καταπόνηση σε διάτμηση ενός σώματος.

Η παραμόρφωση της ολισθήσεως υπολογίζεται από την τάση διατμήσεως $\tau_{\delta\iota}$ με τη βοήθεια του ακόλουθου Νόμου του Hooke που ισχύει για τη γωνία ολισθήσεως στην αναλογική περιοχή:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau_{\delta\iota}, \qquad (2.44)$$

όπου η γωνία ολισθήσεως γ μετρείται σε ακτίνια (rad).

Από τη σχέση (2.44) προκύπτει ότι η γωνία ολισθήσεως είναι ανάλογη της τάσεως διατμήσεως και εξαρτάται από το υλικό.

Η σταθερά G ονομάζεται ***μέτρο ολισθήσεως του υλικού***, εκφράζει τη σχέση υλικού και ολισθήσεως και είναι χαρακτηριστική σταθερά για κάθε υλικό. Το μέτρο ολισθήσεως του υλικού είναι το αντίστοιχο του μέτρου ελαστικότητας που συναντήσαμε στον Νόμο του Hooke για τον εφελκυσμό και τη θλίψη και για τον λόγο αυτό ονομάζεται και ***μέτρο ελαστικότητας σε διάτμηση.*** Οι μονάδες μετρήσεως του μέτρου ολισθήσεως ενός υλικού είναι ίδιες με τις μονάδες μετρήσεως του μέτρου ελαστικότητάς του.

Το μέτρο ελαστικότητας Ε και το μέτρο ολισθήσεως G συνδέονται με τον λόγο Poisson μ, μέσω της ακόλουθης σχέσεως:

$$G = \frac{E}{2\cdot(1+\mu)}. \qquad (2.45)$$

Σημειώνομε ότι γενικά για τη γωνία ολισθήσεως ισχύουν αντίστοιχα όσα ισχύουν για την ανηγμένη παραμόρφωση (επιμήκυνση/επιβράχυνση) στον εφελκυσμό και τη θλίψη (αναλογική περιοχή, ελαστική περιοχή, πλαστική περιοχή, όριο θραύσεως κ.λπ.).

Παράδειγμα 21.

Σε κοχλία αναπτύσσονται τάσεις διατμήσεως $\tau_{\delta\iota} = 8.000\,\text{N/cm}^2$ μικρότερες από την επιτρεπόμενη. Το υλικό του κοχλία έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 2{,}8 \cdot 10^6\,\text{N/cm}^2$ και λόγο Poisson $\mu = 0{,}33$.

1) Να υπολογιστεί το μέτρο ολισθήσεως του υλικού του κοχλία.

2) Να υπολογιστεί η παραμόρφωσή του λόγω της καταπονήσεώς του σε διάτμηση στην αναλογική περιοχή.

Λύση.

1) Το μέτρο ολισθήσεως του υλικού υπολογίζεται με τη βοήθεια του μέτρου ελαστικότητας από τη σχέση:

$$G = \frac{E}{2\cdot(1+\mu)} = \frac{2{,}8\cdot 10^6\ \text{N/cm}^2}{2\cdot(1+0{,}33)} = 1{,}1\cdot 10^6\ \text{N/cm}^2.$$

2) Λόγω της καταπονήσεώς του σε διάτμηση, ο κοχλίας υφίσταται παραμόρφωση ολισθήσεως κατά γωνία γ. Η γωνία ολισθήσεως αυτή υπολογίζεται από τον Νόμο του Hooke:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau_{\delta\iota} = \frac{8.000\ \text{N/cm}^2}{1{,}1\cdot 10^6\ \text{N/cm}^2} = 7{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{rad}.$$

2.6.8 Συνθήκη κοπής.

Μέχρι τώρα είδαμε περιπτώσεις, στις οποίες μας ενδιέφερε να καταπονούμε τα σώματα με τάσεις διατμήσεως μικρότερες από την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως. Ωστόσο, αυτό δεν είναι πάντοτε το επιθυμητό. Αρκετές φορές μας ενδιαφέρει να καταπονήσομε σε διάτμηση ένα σώμα, προκειμένου να το κόψομε. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εφαρμόσομε εξωτερικές δυνάμεις, ώστε να αναπτυχθούν τάσεις διατμήσεως $\tau_{\delta\iota}$ μεγαλύτερες από την τάση θραύσεως $\tau_{\theta\rho,\delta\iota}$ του υλικού του καταπονούμενου σε διάτμηση σώματος. Δηλαδή έχομε κοπή ενός σώματος διατομής Α, στο οποίο ενεργούν διατμητικές δυνάμεις F, όταν:

$$\tau_{\delta\iota} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow \frac{F}{A} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota}. \qquad (2.46)$$

Η σχέση (2.46) αποτελεί τη συνθήκη κοπής ενός σώματος.

Συνήθως, η τάση θραύσεως σε διάτμηση λαμβάνεται ίση με το 80% της τάσεως θραύσεως σε εφελκυσμό $\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}$, δηλαδή:

$$\tau_{\theta\rho,\delta\iota} = 0{,}8\cdot\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}. \qquad (2.47)$$

Σημειώνεται ότι σε αντίθεση με τον εφελκυσμό, όπου η θραύση πραγματοποιείται σε επίπεδο κάθετο προς την εφελκύουσα δύναμη, στη διάτμηση η θραύση πραγματοποιείται σε επίπεδο παράλληλο προς την επιβαλλόμενη δύναμη.

Παράδειγμα 22.

Ποια είναι η απαιτούμενη δύναμη για να κοπεί έλασμα με πάχος $\alpha = 10$ mm και πλάτος $\beta = 12$ mm;

Επίσης, να υπολογιστεί με εφαρμογή του Νόμου του Hooke η διατμητική παραμόρφωση στα άκρα της αποκοπτόμενης επιφάνειας. Δίνονται:

1) Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό του υλικού του ελάσματος $\sigma_{\theta\rho,\,\varepsilon\varphi} = 10.000\ \text{N/cm}^2$.

2) Το μέτρο ελαστικότητάς του $E = 2{,}4 \cdot 10^6\ \text{N/cm}^2$ και

3) ο λόγος Poisson $\mu = 0{,}35$.

Λύση.

1) Η διατμητική τάση θραύσεως υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau_{\theta\rho,\delta\iota} = 0{,}8 \cdot \sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi} = 0{,}8 \cdot 10.000\ \text{N/cm}^2 = 8.000\ \text{N/cm}^2.$$

Η επιφάνεια της διατομής που καταπονείται σε διάτμηση είναι:

$$A = \alpha \cdot \beta = 10\ \text{mm} \cdot 12\ \text{mm} = 1{,}2\ \text{cm}^2.$$

Κοπή του ελάσματος έχομε όταν:

$$\tau_{\delta\iota} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow \frac{F}{A} \geq \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow F \geq A \cdot \tau_{\theta\rho,\delta\iota} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F \geq 1{,}2\ \text{cm}^2 \cdot 8.000\ \text{N/cm}^2 \Leftrightarrow F \geq 9.600\ \text{N}.$$

Άρα, η δύναμη κοπής του ελάσματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 9.600 N.

2) Το μέτρο ολισθήσεως του υλικού υπολογίζεται με τη βοήθεια του μέτρου ελαστικότητας από τη σχέση:

$$G = \frac{E}{2\cdot(1+\mu)} = \frac{2{,}4 \cdot 10^6\ \text{N/cm}^2}{2\cdot(1+0{,}35)} = 8{,}9 \cdot 10^5\ \text{N/cm}^2.$$

Η διατμητική παραμόρφωση γ στα άκρα της αποκοπτόμενης επιφάνειας υπολογίζεται από τον Νόμο του Hooke:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau_{\delta\iota} = \frac{9.600\ \text{N/cm}^2}{8{,}9 \cdot 10^5\ \text{N/cm}^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{rad}.$$

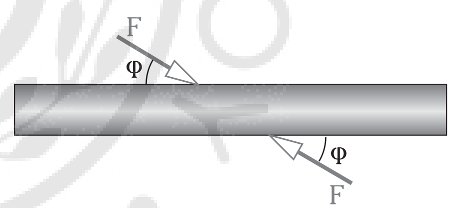
2.6.9 Σύγκριση διατμήσεως με εφελκυσμό και θλίψη.

Με βάση όσα είπαμε παραπάνω, παρατηρούμε ότι η αντιμετώπιση της διατμήσεως πραγματοποιείται ακολουθώντας μεθοδολογία παρόμοια με αυτή που ακολουθούμε στον εφελκυσμό και στη θλίψη. Ωστόσο, πρέπει να έχομε κατά νου τις μεταξύ τους ομοιότητες και διαφορές, οι οποίες παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 2.6.4.

Ασκήσεις.

1. *Στη ράβδο του σχήματος 2.6στ ασκούνται δύο ίσες και παράλληλες δυνάμεις μέτρου $F = 1.000\,N$, αλλά αντίθετης φοράς. Οι δυνάμεις ενεργούν υπό γωνία $\varphi = 45°$ ως προς τον άξονα της ράβδου. Να υπολογιστούν οι αναπτυσσόμενες στη ράβδο διατμητικές τάσεις. Δίνεται το εμβαδόν διατομής της ράβδου $A = 5\ cm^2$.*

2. *Σε έλασμα πάχους $h = 6\,mm$ θα ανοίξομε οπή*



Σχ. 2.6στ

Πίνακας 2.6.4
Ομοιότητες και διαφορές της διατμήσεως με τον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Θέμα	***Διάτμηση***	***Εφελκυσμός***	***Θλίψη***
Τάσεις (σε διατομές κάθετες στον άξονα του σώματος)	Διατμητικές	Ορθές	Ορθές
Εφαρμογή Νόμου Hooke	Στην αναλογική περιοχή	Στην αναλογική περιοχή	Στην αναλογική περιοχή
Επιτρεπόμενη τάση	Ορίζεται	Ορίζεται	Ορίζεται
Παραμορφώσεις	Ολίσθηση κατά γωνία γ	Επιμήκυνση (Δl>0) και μείωση διατομής (Δb<0)	Επιβράχυνση (Δl<0) και αύξηση διατομής (Δb>0)
Θραύση	Σε επίπεδο παράλληλο στην εφαρμοζόμενη δύναμη	Σε επίπεδο κάθετο στην εφαρμοζόμενη δύναμη	Σε κεκλιμένο επίπεδο (ψαθυρά υλικά)

ακτίνας $r = 6\,mm$. Στο κοπτικό εργαλείο εφαρμόζεται δύναμη $F = 180.000\,N$. Να υπολογιστεί η διατμηματική τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια της διατομής.

3. *Για την αποκοπή τμήματος ελάσματος πάχους $h = 10\,mm$ και πλάτους $a = 60\,mm$ θα χρησιμοποιήσομε μηχανικό ψαλίδι. Εάν η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι $F = 40.000\,N$, να υπολογιστεί η εφαρμοζόμενη τάση διατμήσεως.*

4. *Ποια είναι η απαιτούμενη δύναμη για να κοπεί έλασμα με πάχος $h = 8$ mm και πλάτος $t = 45$ mm; Επίσης, να υπολογιστεί με εφαρμογή του Νόμου του Hooke η διατμητική παραμόρφωση στα άκρα της αποκοπτόμενης επιφάνειας. Δίνονται:*
α) Η τάση θραύσεως σε εφελκυσμό του υλικού του ελάσματος $\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi} = 12.000\ N/cm^2$.
β) Το μέτρο ελαστικότητάς του $E = 2{,}6 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και
γ) ο λόγος Poisson $\mu = 0{,}34$.

5. *Κοχλίας έχει κυκλική διατομή εμβαδού $A = 4\,cm^2$. Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεώς του σε διάτμηση, εάν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 24.000\,N/cm^2$;*

6. *Κοχλίας συνδέει δύο ελάσματα, τα οποία φορτίζονται με δύναμη $F = 30.000$ N. Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής του κοχλία; Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\,\delta\iota} = 8.000\ N/cm^2$.*

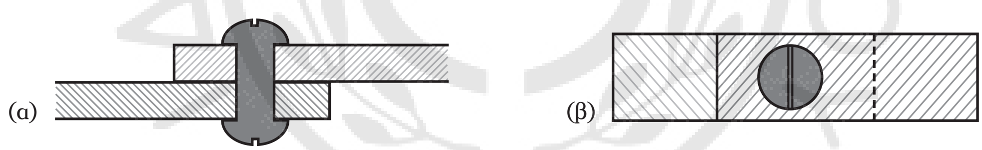
2.7 Σύνθλιψη άντυγας οπής.

Σε πολλές κατασκευές χρησιμοποιούμε ελάσματα, που συνδέονται μεταξύ τους με τη βοήθεια ήλων ή κοχλιών οι οποίοι τοποθετούνται σε ειδικές για τον σκοπό αυτό οπές. Το σχήμα 2.7α παρουσιάζει χαρακτηριστική περίπτωση δύο τέτοιων ελασμάτων που συνδέονται με τη βοήθεια ήλου.

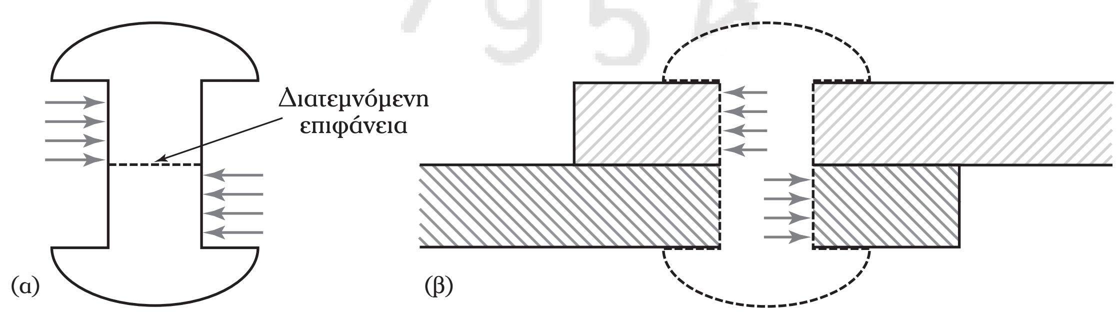
Ο ρόλος του ήλου είναι να μεταφέρει τη φόρτιση από το ένα έλασμα στο άλλο. Ο ίδιος ο ήλος καταπονείται σε διάτμηση. Η μεταφορά της φορτίσεως από το ένα έλασμα στο άλλο πραγματοποιείται μέσω τάσεων, που θλίβουν την κοίλη επιφάνεια της οπής στην οποία είναι τοποθετημένος ο ήλος. Οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***τάσεις συνθλίψεως άντυγας οπής*** και το ***φαινόμενο σύνθλιψη άντυγας***[1] ***οπής***. Δηλαδή:

Σύνθλιψη άντυγας οπής ονομάζεται το φαινόμενο της εμφανίσεως θλιπτικών δυνάμεων στα τοιχώματα οπών, στα οποία τοποθετούνται ήλοι ή κοχλίες με σκοπό τη συνένωση ελασμάτων.

Το σχήμα 2.7β(α) παρουσιάζει τις εσωτερικές



Σχ. 2.7α
Δύο ελάσματα που συνδέονται με τη βοήθεια ήλου: (α) Πρόσοψη. (β) Κάτοψη.



Σχ. 2.7β
(α) Απεικόνιση των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στον ήλο από τα τοιχώματα της οπής των ελασμάτων του σχήματος 2.7α. (β) Απεικόνιση των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στα τοιχώματα της οπής των εν λόγω ελασμάτων από τον ήλο.

[1] Ο όρος ***άντυγα*** είναι συνώνυμος του όρου ***τοίχωμα***. Έτσι, ο όρος ***άντυγα της οπής*** αναφέρεται στα τοιχώματα της οπής.

δυνάμεις που αναπτύσσονται στον ήλο από τα τοιχώματα της οπής, ενώ το σχήμα 2.7β(β) παρουσιάζει τις ίσες και αντίθετες δυνάμεις που αναπτύσσονται στα τοιχώματα της οπής από τον ήλο.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της οπής ενός ελάσματος είναι τα ακόλουθα:

1) Το ύψος της, το οποίο συμπίπτει με το πάχος h του ελάσματος και

2) η διάμετρός της d.

Η παράπλευρη επιφάνεια Α, στην οποία ασκούνται οι τάσεις συνθλίψεως άντυγας οπής έχει εμβαδόν που δίνεται από τη σχέση:

$$A = h \cdot d. \tag{2.48}$$

Έτσι, εάν F είναι το εξωτερικό φορτίο που καταπονεί το έλασμα, τότε η τάση συνθλίψεως άντυγας οπής $\sigma_{αντ}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{A} \Leftrightarrow \sigma_{αντ} = \frac{F}{h \cdot d}. \tag{2.49}$$

2.7.1 Σχέση συνθλίψεως άντυγας οπής.

Όπως ακριβώς συμβαίνει στον εφελκυσμό και τη θλίψη, έτσι και για τη σύνθλιψη άντυγας οπής ορίζεται μία ***επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας οπής*** $\sigma_{επ,\,αντ}$, την οποία δεν πρέπει να υπερβαίνουν οι αναπτυσσόμενες τάσεις συνθλίψεως άντυγας οπής. Έτσι, κατ' αναλογία του εφελκυσμού και της θλίψεως, ορίζεται η ***σχέση συνθλίψεως άντυγας οπής***, η οποία έχει ως εξής:

$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{h \cdot d} \leq \sigma_{επ,αντ}. \tag{2.50}$$

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στη σύνθλιψη άντυγας οπής είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως. Δηλαδή, αφορούν στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας, στον υπολογισμό των διαστάσεων της οπής και στον υπολογισμό του φορτίου που αντέχει η άντυγα της οπής, και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις περιπτώσεις του εφελκυσμού και της θλίψεως.

Παράδειγμα 23.

Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 30 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 20 mm, τοποθετείται ήλος. Εάν το έλασμα φορτίζεται με δύναμη F = 25.000 N, να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής. Φορτίζεται η άντυγα της οπής κανονικά; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $\sigma_{επ,\,αντ} = 6.000\ N/cm^2$.

Λύση.

Η τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{h \cdot d} = \frac{25.000\ N}{30\ mm \cdot 20\ mm} =$$

$$= 41,67\ N/mm^2 = 4.167\ N/cm^2.$$

Η τάση αυτή είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής. Άρα, η άντυγα της οπής φορτίζεται κανονικά.

Παράδειγμα 24.

Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 40 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 18 mm, τοποθετείται ήλος. Εάν η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $\sigma_{επ,\,αντ} = 8.500\ N/cm^2$, να υπολογιστεί η ικανότητα φορτίσεως του ελάσματος.

Λύση.

Εφαρμόζομε τη σχέση συνθλίψεως άντυγας της οπής και λύνομε ως προς το φορτίο:

$$\frac{F}{h \cdot d}. \leq \sigma_{επ,αντ} \Leftrightarrow F \leq h \cdot d \cdot \sigma_{επ,αντ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F \leq 40\ mm \cdot 18\ mm \cdot 8500\ N/cm^2 \Leftrightarrow F \leq 61.200\ N.$$

Ασκήσεις.

1. *Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 20 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 12 mm, τοποθετείται ήλος. Εάν το έλασμα φορτίζεται με δύναμη F = 10.500 N, να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής. Φορτίζεται η άντυγα της οπής κανονικά; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι* $\sigma_{επ,\,αντ} = 8.000\ N/cm^2$.

2. *Διαθέτομε έλασμα πάχους h = 40 mm. Στο έλασμα θέλομε να ανοίξομε οπή για να τοποθετήσομε κοχλία, προκειμένου να φορτίσομε το έλασμα με δύναμη F = 13.000 N. Εάν η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι* $\sigma_{επ,\,αντ} = 5.000\ N/cm^2$, *να υπολογιστεί η διάμετρος της οπής που πρέπει να ανοιχθεί. Οι κοχλίες που διαθέτομε έχουν ακέραιες διαμέτρους σε mm.*

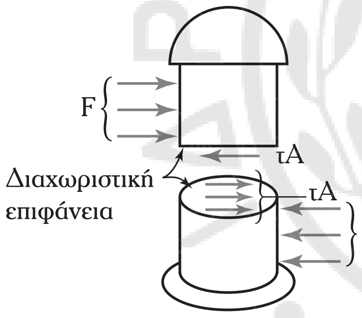
3. *Στην οπή ενός ελάσματος πάχους h = 28 mm, η οποία έχει διάμετρο d = 16 mm, τοποθετείται ήλος.*

Εάν η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής είναι $\sigma_{επ,\,αντ} = 7.200\,N/cm^2$, να υπολογιστεί η ικανότητα φορτίσεως του ελάσματος.

2.7.2 Καταπόνηση ήλων και κοχλιών σε διάτμηση.

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.7, ο ήλος που συνδέει τα δύο ελάσματα του σχήματος 2.7α καταπονείται σε διάτμηση [βλ. σχ. 2.7β(α)]. Γενικότερα, στους συνδέσμους, όπως είναι οι κοχλίες και οι ήλοι, αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις.

Έστω ότι στα δύο μεταλλικά ελάσματα του σχήματος 2.7α, εφαρμόζονται εφελκυστικές δυνάμεις ίσες με F. Ο ήλος καταπονείται σε διάτμηση (σχ. 2.7γ). Η κρίσιμη διατμητική του επιφάνεια είναι αυτή που βρίσκεται στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων. Ειδικότερα, στον ήλο δρουν δύο αντίθετες δυνάμεις ίσες με F και κατά συνέπεια ο ήλος ισορροπεί. Κάθε μία από αυτές τις δύο δυνάμεις είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που δρουν σε όλη την έκταση της επαφής του αντίστοιχου τμήματος του ελάσματος με τον ήλο.



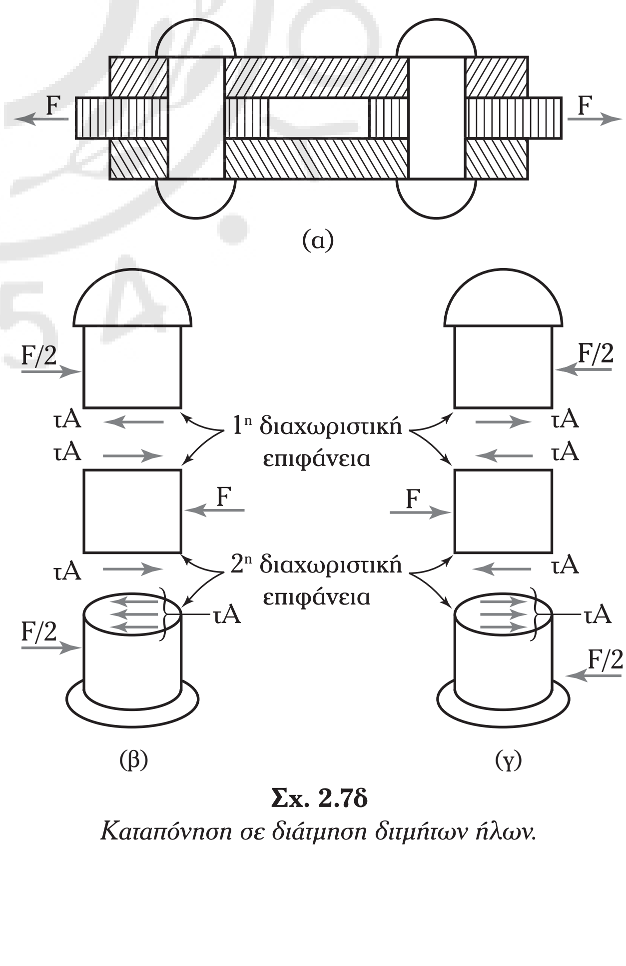
Σχ. 2.7γ
Καταπόνηση σε διάτμηση μονότμητου ήλου.

Για να κατανοήσομε καλύτερα τη διάτμηση στην οποία καταπονείται ο ήλος, ας θεωρήσομε ότι χωρίζεται σε δύο μέρη γύρω από τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων. Το τμήμα του ήλου που βρίσκεται πάνω από τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων ισορροπεί επειδή η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της διαχωριστικής επιφάνειας είναι ίση και αντίθετη της δυνάμεως F που συνθλίβει το πάνω μέρος του ήλου. Ομοίως, το τμήμα του ήλου που βρίσκεται κάτω από τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων ισορροπεί επειδή η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της διαχωριστικής επιφάνειας είναι ίση και αντίθετη της δυνάμεως F που συνθλίβει το κάτω μέρος του ήλου. Αν ονομάσομε με τ τη διατμητική τάση που αναπτύσσεται στη διαχωριστική επιφάνεια, τότε η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων ισούται με τ·Α, όπου Α είναι η επιφάνεια της διατομής του ήλου. Οι διατμητικές δυνάμεις στο κάτω μέρος του ήλου έχουν αντίθετη φορά από τις αντίστοιχες στο άνω μέρος του ήλου, άρα η συνισταμένη τους ισούται με μηδέν. Επειδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κρίσιμη διατμητική επιφάνεια είναι μία, ο ήλος ονομάζεται ***μονότμητος***.

Με βάση τα ανωτέρω, από την ισορροπία των δυνάμεων $(\tau \cdot A - F = 0)$ προκύπτει ότι η διατμητική τάση τ που αναπτύσσεται στον μονότμητο ήλο είναι ίση με:

$$\tau = \frac{F}{A}\,. \qquad (2.51)$$

Στη συνέχεια εξετάζομε την περίπτωση της συνδέσεως ελασμάτων με δίτμητους ήλους. Τέτοια είναι η περίπτωση των δύο ήλων του σχήματος 2.7δ(α). Τα δύο ελάσματα, το επάνω και το κάτω, ονομάζονται ***ελάσματα επικαλύψεως*** ή αλλιώς ***αρμοκαλύπτρες*** και χρησιμοποιούνται για να συνδεθούν καλύτερα οι δύο πλάκες.



Σχ. 2.7δ
Καταπόνηση σε διάτμηση διτμήτων ήλων.

Έστω ότι στις δύο πλάκες του σχήματος 2.7δ(α), εφαρμόζονται εφελκυστικές δυνάμεις ίσες με F. Καθένας από τους δύο ήλους καταπονείται σε διάτμηση σε δύο επιφάνειες. Οι ήλοι αυτοί ονομάζονται ***δίτμητοι***. Οι δύο κρίσιμες διατμητικές επιφάνειες είναι αυτές που βρίσκονται στις διαχωριστικές επιφάνειες των δύο ελασμάτων με τις πλάκες και χωρίζουν κάθε ήλο σε τρία μέρη.

Ειδικότερα, σε καθέναν από τους ήλους δρουν τρεις εξωτερικές δυνάμεις, των οποίων η συνιστάμενη είναι ίση με μηδέν, καθώς ο ήλος ισορροπεί. Στο μεσαίο τμήμα κάθε ήλου δρα συνθλιπτική δύναμη ίση με F. Στο πάνω και στο κάτω τμήμα κάθε ήλου δρουν συνθλιπτικές δυνάμεις κάθε μία ίση με F/2 και με φορά αντίθετη της δυνάμεως που δρα στο μεσαίο τμήμα του ήλου. Το σχήμα 2.7δ(β) απεικονίζει τις δυνάμεις στον αριστερό ήλο και το σχήμα 2.7δ(γ) στον δεξιό ήλο. Κάθε μία από αυτές τις τρεις δυνάμεις είναι στην πραγματικότητα ίση με το άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που δρουν σε όλη την έκταση της επαφής κάθε αντίστοιχου τμήματος ελάσματος ή πλάκας με τον ήλο.

Για να κατανοήσομε καλύτερα τη διάτμηση στην οποία καταπονούνται οι ήλοι, ας θεωρήσομε ξεχωριστά καθένα από τα τρία μέρη κάθε ήλου γύρω από τις δύο διαχωριστικές επιφάνειες. Το άνω τμήμα ισορροπεί επειδή η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της άνω διαχωριστικής επιφάνειας είναι ίση και αντίθετη της δυνάμεως F/2 που συνθλίβει το άνω τμήμα του ήλου. Ομοίως, το κάτω τμήμα του ήλου ισορροπεί επειδή η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της κάτω διαχωριστικής επιφάνειας είναι ίση και αντίθετη της δυνάμεως F/2 που συνθλίβει το κάτω τμήμα του ήλου. Συνεπώς, η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της άνω διαχωριστικής επιφάνειας είναι ίση με τη συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της κάτω διαχωριστικής επιφάνειας. Άρα, οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στις δύο διαχωριστικές επιφάνειες είναι ίσες. Αν ονομάσομε με τ τη διατμητική τάση αυτή, τότε η συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια ισούται με $\tau \cdot A$, όπου A είναι η επιφάνεια της διατομής του ήλου.

Το μεσαίο τμήμα κάθε ήλου, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των δύο διαχωριστικών επιφανειών, ισορροπεί επειδή το άθροισμα της συνισταμένης των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της άνω διαχωριστικής επιφάνειας $(\tau \cdot A)$ με τη συνισταμένη των διατμητικών δυνάμεων που δρουν στη διατομή της κάτω διαχωριστικής επιφάνειας $(\tau \cdot A)$ είναι ίσο και αντίθετο της δυνάμεως F που συνθλίβει το μεσαίο τμήμα του ήλου.

Με βάση τα ανωτέρω, από την ισορροπία των δυνάμεων στο μεσαίο τμήμα του ήλου $(2 \cdot \tau \cdot A - F = 0)$ προκύπτει ότι η διατμητική τάση τ που αναπτύσσεται σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια στον δίτμητο ήλο είναι ίση με:

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot A}. \qquad (2.52)$$

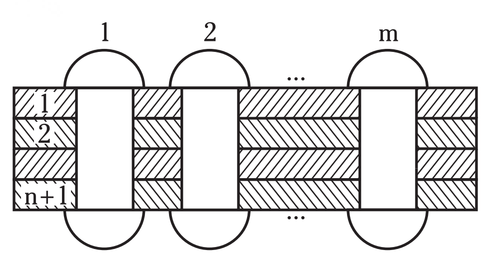
Συγκρίνοντας τη σχέση (2.52) με τη σχέση (2.51) καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι η διατμητική τάση στον δίτμητο ήλο είναι η μισή της διατμητικής τάσεως στον μονότμητο ήλο.

Γενικότερα, στην περίπτωση ενώσεως ελασμάτων με πολύτμητους ήλους ή κοχλίες (σχ. 2.7ε), εάν οι κρίσιμες επιφάνειες κάθε ήλου ή κοχλία που καταπονούνται σε διάτμηση είναι n και ο αριθμός των ήλων ή κοχλιών είναι m για κάθε έλασμα, τότε η διατμητική τάση σε κάθε ήλο ή κοχλία[2] είναι ίση με :

$$\tau = \frac{F}{n \cdot m \cdot A} \qquad (2.53)$$

όπου F είναι η δύναμη που καταπονεί την ένωση και A η διατομή των ήλων ή των κοχλιών.

Επί πλέον, στην περίπτωση αυτή έχομε m οπές σε κάθε έλασμα, με αποτέλεσμα η αναπτυσσόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας σε κάθε μία από τις οπές, λαμ-



Σχ. 2.7ε
Καταπόνηση σε διάτμηση πολυτμήτων ήλων.

[2] Οι διατμητικές τάσεις που καταπονούν στην πράξη τους πολύτμητους ήλους ή τους κοχλίες μιας κατασκευής δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους. Ωστόσο, για λόγους απλότητας, στους υπολογισμούς μας θεωρούμε ότι οι αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις είναι ίσες σε όλους τους ήλους ή τους κοχλίες μιας κατασκευής.

βάνοντας υπόψη τη σχέση (2.50), να είναι ίση με:

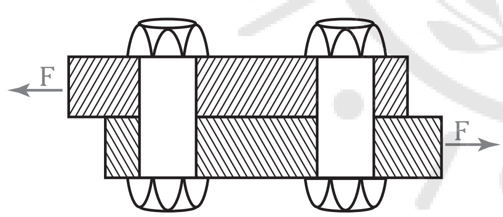
$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{m \cdot h \cdot d} \qquad (2.54)$$

όπου h είναι το πάχος του ελάσματος και d η διάμετρος της οπής.

Προκειμένου οι ήλοι (ή κοχλίες) να αντέχουν την καταπόνηση σε διάτμηση πρέπει να ικανοποιείται για αυτούς η σχέση διατμήσεως (βλ. παράγρ. 2.6.5). Δηλαδή, η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση της σχέσεως (2.53) πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{επ,\,δι}$ του υλικού τους. Κατά τα λοιπά, τα προβλήματα που εμφανίζονται στην καταπόνηση των ήλων και κοχλιών είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που συναντήσαμε στη διάτμηση (παράγρ. 2.6.6). Δηλαδή αφορούν στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας, στον προσδιορισμό της απαιτούμενης διατομής των ήλων και των κοχλιών και στον υπολογισμό της ικανότητας φορτίσεώς τους.

Παράδειγμα 25.

Τα δύο ελάσματα του σχήματος 2.7στ που εφελκύονται με δύναμη F = 40.000 N, ενώνονται με τη βοήθεια δύο ιδίων κοχλιών. Να υπολογιστεί η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος των κοχλιών εάν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση του υλικού τους είναι $\tau_{επ,δι} = 6.400\ \text{N/cm}^2$.



Σχ. 2.7στ
Σύνδεση δύο ελασμάτων με δύο κοχλίες.

Λύση.

Έχομε δύο κοχλίες (m=2) που καταπονούνται σε διάτμηση. Η κρίσιμη διατμητική επιφάνεια κάθε κοχλία είναι μία (n=1) και είναι αυτή που βρίσκεται στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελασμάτων. Δεδομένου ότι οι κοχλίες είναι ίδιοι με διάμετρο d, η κρίσιμη διατμητική τους επιφάνεια έχει εμβαδόν:

$$A = \pi \frac{d^2}{4}. \qquad (1)$$

Η διατμητική τάση σε κάθε κοχλία είναι ίση με:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot m \cdot A}. \qquad (2)$$

Για να αντέχει κάθε κοχλίας στην καταπόνηση σε διάτμηση πρέπει να ισχύει:

$$\tau \le \tau_{επ,\,δι}. \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) στη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$\frac{F}{n \cdot m \cdot A} \le \tau_{επ,δι} \Leftrightarrow \frac{4 \cdot F}{n \cdot m \cdot \pi \cdot d^2} \le \tau_{επ,δι} \Leftrightarrow$$

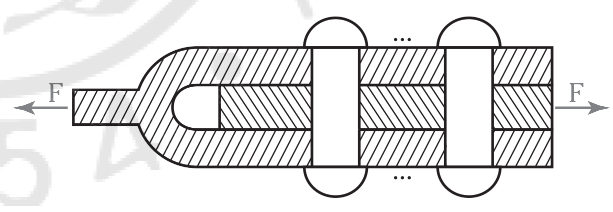
$$\Leftrightarrow d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot F}{n \cdot m \cdot \pi \cdot \tau_{επ,δι}}} \Leftrightarrow d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 40.000\ \text{N}}{1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6.400\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d \ge 1{,}995\ \text{cm} \cong 2\ \text{cm}.$$

Άρα, η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος κάθε κοχλία είναι ίση με 2 cm.

Παράδειγμα 26.

Θέλομε να ενώσομε τρία ελάσματα ίδιου πάχους μέσω ήλων οι οποίοι έχουν διάμετρο d = 2 cm, προκειμένου να μεταδώσουν εφελκυστική δύναμη F = 120.000 N, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2.7ζ. Εάν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση του υλικού των ήλων είναι $\tau_{επ,\,δι} = 7000\ \text{N/cm}^2$ και η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής του υλικού των τριών ελασμάτων είναι $\sigma_{επ,\,αντ} = 6000\ \text{N/cm}^2$ να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός των ήλων και το ελάχιστο πάχος των ελασμάτων που θα απαιτηθούν.



Σχ. 2.7ζ
Σύνδεση τριών ελασμάτων με ήλους.

Λύση.

Οι ήλοι θα καταπονούνται σε διάτμηση. Δεδομένου ότι τα ελάσματα είναι τρία, οι κρίσιμες διατμητικές επιφάνειες κάθε ήλου είναι δύο (n=2) και είναι αυτές που αντιστοιχούν στις διαχωριστικές επιφάνειες των ελασμάτων (δίτμητοι ήλοι). Δεδομένου ότι οι ήλοι είναι ίδιοι με διάμετρο d, οι κρίσιμες διατμητικές επιφάνειές τους έχουν εμβαδόν:

$$A = \pi \frac{d^2}{4}. \qquad (1)$$

Εάν m είναι το πλήθος των ήλων, η διατμητική τάση σε κάθε ήλο είναι ίση με:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot m \cdot A}. \qquad (2)$$

Για να αντέχει κάθε ήλος στην καταπόνηση σε διάτμηση πρέπει να ισχύει:

$$\tau \leq \tau_{επ,δι}. \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) στη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$\frac{F}{n \cdot m \cdot A} \leq \tau_{επ,δι} \Leftrightarrow \frac{4 \cdot F}{n \cdot m \cdot \pi \cdot d^2} \leq \tau_{επ,δι} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{4 \cdot F}{n \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \tau_{επ,δι}} \Leftrightarrow$$

$$m \geq \frac{4 \cdot 120.000\,N}{2 \cdot \pi \cdot (2\,cm)^2 \cdot 7.000\,\frac{N}{cm^2}} \Leftrightarrow m \geq 2{,}73.$$

Άρα, ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός ήλων είναι 3.

Όπως έχομε αναλύσει στην παράγραφο 2.7, στα ελάσματα έχομε σύνθλιψη άντυγας οπής. Η αναπτυσσόμενη τάση συνθλίψεως σε κάθε οπή δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{m \cdot h \cdot d}$$

και για να αντέχει κάθε οπή στην καταπόνηση πρέπει να ισχύει:

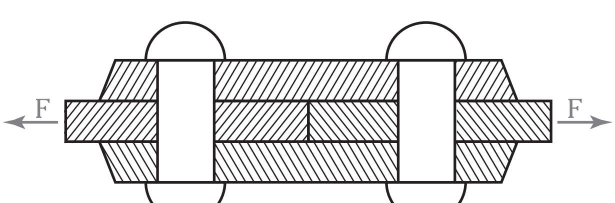
$$\sigma_{αντ} = \frac{F}{m \cdot h \cdot d} \leq \sigma_{επ,αντ} \Leftrightarrow h \geq \frac{F}{m \cdot d \cdot \sigma_{επ,αντ}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h \geq \frac{120.000\,N}{3 \cdot 2\,cm \cdot 6.000\,\frac{N}{cm^2}} \Leftrightarrow h \geq 3{,}33\,cm \cong 3{,}5\,cm.$$

Άρα, το ελάχιστο απαιτούμενο πάχος των ελασμάτων είναι 3,5cm.

Ασκήσεις.

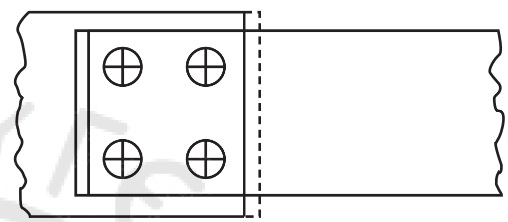
1. *Στη σύνδεση ελασμάτων με δύο αρμοκαλύπτρες του σχήματος 2.7η, η διάμετρος των ήλων είναι*



Σχ. 2.7η

d = 14 mm και η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{επ,δι}$ = 7.000 N/cm^2. Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο F που επιτρέπεται να φέρει η σύνδεση ώστε να είναι ασφαλής από καταπόνηση σε διάτμηση;

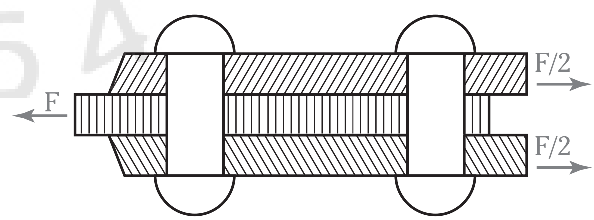
2. *Στο σχήμα 2.7θ απεικονίζεται η σύνδεση δύο ελασμάτων με 4 ήλους διαμέτρου d = 16 cm. Το στατικό φορτίο που φέρει η σύνδεση είναι F = 15.000 N. Ποια πρέπει να είναι η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως του υλικού των ήλων ώστε η σύνδεση να είναι ασφαλής από καταπόνηση σε διάτμηση;*



Σχ. 2.7θ

3. *Δύο ελάσματα ενώνονται με ήλο και καταπονούνται σε διάτμηση με δύναμη F=44.000N. Αν το υλικό του ήλου έχει τάση θραύσεως σε εφελκυσμό $\sigma_{θρ}$ = 3.700N/cm^2 και λάβομε συντελεστή ασφαλείας ν = 5, να υπολογιστεί η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος του ήλου.*

4. *Τρία ελάσματα ενώνονται με δύο πίρους, όπως στο σχήμα 2.7ι. Η διάμετρος κάθε πίρου είναι d = 16 mm και το υλικό του έχει τάση θραύσεως σε εφελκυσμό $\sigma_{θρ}$ = 3.700N/cm^2. Να βρεθεί το επιτρεπόμενο φορτίο με το οποίο μπορούμε να καταπονήσομε την ήλωση εάν ο συντελεστής ασφαλείας ληφθεί ίσος με 4.*



Σχ. 2.7ι

5. *Θέλομε να ενώσομε τρία ελάσματα ίδιου πάχους μέσω 4 ήλων, προκειμένου να μεταδώσουν εφελκυστική δύναμη F = 100.000 N. Εάν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση του υλικού των ήλων είναι $\tau_{επ,δι}$ = 8.000 N/cm^2 και η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας της οπής του υλικού των τριών ελασμάτων είναι $\sigma_{επ,αντ}$ = 10.000N/cm^2, να υπολογιστεί η διάμετρος των ήλων και το ελάχιστο πάχος των ελασμάτων που θα απαιτηθούν.*

2.8 Συγκολλήσεις.

Εκτός από τις περιπτώσεις των ηλώσεων και των κοχλιωτών συνδέσεων που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, διατμητικές τάσεις αναπτύσσονται και στις συγκολλήσεις. Με τον όρο συγκόλληση εννοούμε την ένωση δύο ή περισσοτέρων μεταλλικών κομματιών με τη βοήθεια της θερμάνσεως ή της πιέσεως ή, ακόμη, και με ταυτόχρονη εφαρμογή και των δύο.

Κατά τη διαδικασία της συγκολλήσεως δημιουργείται ανάμεσα στα μεταλλικά κομμάτια που θέλομε να συγκολλήσομε μία κρυσταλλική σύνδεση. Οι μέθοδοι συγκολλήσεως και τα συγκολλητικά υλικά που χρησιμοποιούνται σήμερα δημιουργούν κατασκευές με ποιότητα, αξιοπιστία και αντοχή. Υπάρχουν πολλοί τύποι συγκολλήσεων, όπως η συγκόλληση συμβολής [σχ. 2.8α(α)], η συγκόλληση επικαλύψεως [σχ. 2.8α(β)], η αυχενική συγκόλληση [σχ. 2.8α(γ)], η γωνιακή συγκόλληση [σχ. 2.8α(δ)] και η σημειακή συγκόλληση [σχ. 2.8α(ε)]. Οι συγκολλήσεις καταπονούνται, ανάλογα με τη θέση του φορτίου και της συγκολλημένης επιφάνειας, σε εφελκυσμό, διάτμηση, κάμψη, στρέψη και συνδυασμό αυτών. Στην παρούσα παράγραφο εστιαζόμαστε στην καταπόνηση σε διάτμηση των συγκολλήσεων επικαλύψεως.

Ας θεωρήσομε τα δύο ελάσματα του σχήματος 2.8β(α) στα οποία εφαρμόζεται συγκόλληση επικαλύψεως με δύο ραφές μηκών l_1 και l_2. Το φαινόμενο πάχος της συγκολλήσεως είναι h, ίσο με το πάχος του μικρότερου ελάσματος. Η συγκόλληση καταπονείται σε διάτμηση από μια δύναμη F, η οποία διέρχεται από το κέντρο βάρους της συγκολλήσεως K. Η διατομή που παραλαμβάνει τη δύναμη F βρίσκεται σε γωνία 45°, άρα έχει πάχος $s = 0{,}707h$ [σχ. 2.8β(β)].

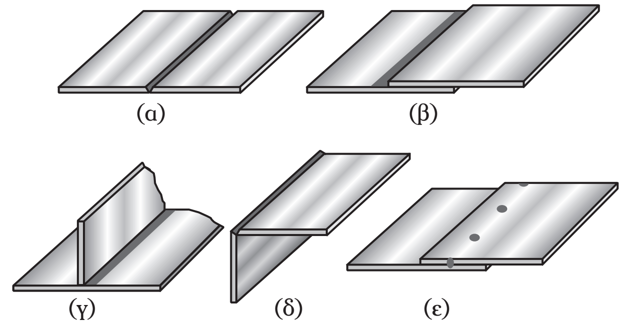
Στο υλικό της συγκολλήσεως αναπτύσσεται διατμητική τάση τ ίση με:

$$\tau = \frac{F}{0{,}707 \cdot h \cdot (l_1 + l_2)}. \qquad (2.55)$$

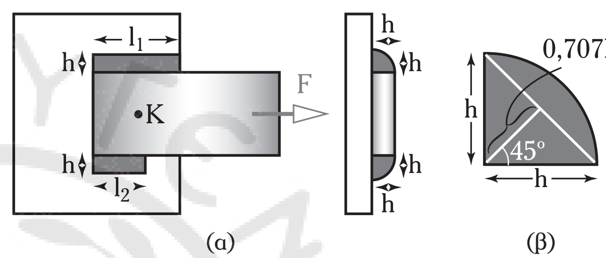
Για να μην υπάρξει αποκόλληση πρέπει η τάση αυτή να μην υπερβαίνει την επιτρεπόμενη διατμητική τάση του υλικού της συγκολλήσεως $\tau_{επ,δι}$, η οποία υπολογίζεται από την τάση θραύσεως του υλικού της συγκολλήσεως $\tau_{θρ}$ με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας ν:

$$\tau = \frac{F}{0{,}707 \cdot h \cdot (l_1 + l_2)} \leq \tau_{επ,δι} = \frac{\tau_{θρ}}{\nu}. \qquad (2.56)$$

Η εξίσωση (2.56) αποτελεί την εξίσωση σχεδιασμού της συγκολλήσεως.



Σχ. 2.8α
Τύποι συγκολλήσεων.



Σχ. 2.8β
Συγκόλληση ελασμάτων.

Σε περίπτωση που είναι επιθυμητή η αποκόλληση, τότε η τάση αυτή πρέπει να υπερβεί την τάση θραύσεως του υλικού της συγκολλήσεως. Το φορτίο που επιτυγχάνει την αποκόλληση είναι το εξής:

$$F > 0{,}707 \cdot h \cdot (l_1 + l_2) \cdot \tau_{θρ}. \qquad (2.57)$$

Παράδειγμα 27.

Στα δύο ελάσματα πάχους $h = 2\,cm$ του σχήματος 2.8β(α) εφαρμόζεται συγκόλληση επικαλύψεως με δύο ραφές μηκών $l_1 = l_2 = 40\,cm$. Το φορτίο που καταπονεί τη συγκόλληση σε διάτμηση είναι $F = 200.000\,N$. Εάν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{επ,δι} = 6.600\,N/cm^2$, να εξεταστεί εάν η συγκόλληση φορτίζεται κανονικά.

Λύση.

Με βάση όσα προαναφέραμε στο υλικό της συγκολλήσεως αναπτύσσεται διατμητική τάση, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

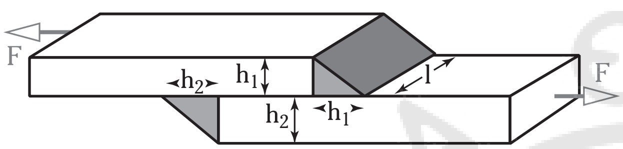
$$\tau = \frac{F}{0{,}707 \cdot h \cdot (l_1 + l_2)} =$$

$$= \frac{200.000\,N}{0{,}707 \cdot 2\,cm \cdot (40\,cm + 40\,cm)} = 1.768{,}03\,N/cm^2.$$

Η τάση αυτή είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}$, συνεπώς η συγκόλληση φορτίζεται κανονικά.

Παράδειγμα 28.

Για τη συνένωση των δύο ελασμάτων του σχήματος 2.8γ χρησιμοποιούνται συγκολλήσεις επικαλύψεως. Τα πάχη των ελασμάτων και των συγκολλήσεων είναι $h_1 = 6\,cm$ και $h_2 = 8\,cm$ και το μήκος της συγκολλήσεως είναι $l = 20\,cm$. Εάν η διατμητική τάση θραύσεως του υλικού της συγκολλήσεως είναι $\tau_{\theta\rho} = 5.600\,N/cm^2$, να υπολογιστεί το φορτίο που απαιτείται για την αποκόλληση.



Σχ. 2.8γ

Λύση.

Έχομε δύο ελάσματα με διαφορετικά πάχη. Η συγκόλληση πραγματοποιείται με δύο ραφές μήκους l, ωστόσο τα πάχη τους είναι διαφορετικά. Το φαινόμενο πάχος της πρώτης συγκολλήσεως είναι h_1, ίσο με το πάχος του μικρότερου ελάσματος και της δεύτερης συγκολλήσεως είναι h_2, ίσο με το πάχος του μεγαλύτερου ελάσματος.

Οι ραφές της συγκολλήσεως καταπονούνται σε διάτμηση από φορτίο F. Οι διατομές των δύο ραφών που παραλαμβάνουν τη δύναμη F βρίσκονται σε γωνία 45°, άρα έχουν πάχη $s_1 = 0{,}707\,h_1$ και $s_2 = 0{,}707\,h_2$. Έτσι η διατμητική τάση που αναπτύσσεται στο υλικό της συγκολλήσεως είναι:

$$\tau = \frac{F}{0{,}707 \cdot (h_1 + h_2) \cdot l}.$$

Για να επιτευχθεί η αποκόλληση, πρέπει η τάση αυτή να υπερβεί την τάση θραύσεως του υλικού της συγκολλήσεως, δηλαδή:

$$\tau > \tau_{\theta\rho} \Leftrightarrow \frac{F}{0{,}707 \cdot (h_1 + h_2) \cdot l} > \tau_{\theta\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F > 0{,}707 \cdot (h_1 + h_2) \cdot l \cdot \tau_{\theta\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F > 0{,}707 \cdot (6\,cm + 8\,cm) \cdot$$

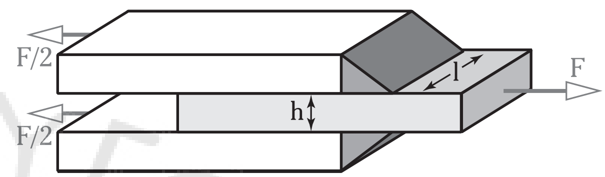
$$\cdot\, 20\,cm \cdot 5.600\,N/cm^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F > 1{,}11 \cdot 10^6\,N.$$

Άρα, το φορτίο που απαιτείται για την αποκόλληση είναι ίσο τουλάχιστον με $F = 1{,}11 \cdot 10^6 N$.

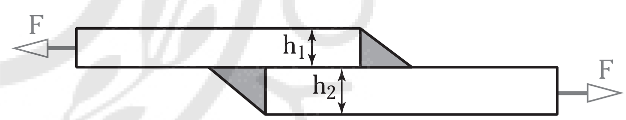
Ασκήσεις.

1. *Τρία ίδια ελάσματα (σχ. 2.8δ) συγκολλούνται μεταξύ τους με δύο συμμετρικές ραφές μήκους $l = 30\,cm$ και πάχους $h = 1\,cm$. Το πρώτο έλασμα παραλαμβάνει με διάτμηση τη δύναμη $F = 30.000\,N$ και τη μοιράζει εξίσου στα δύο συνδεδεμένα ελάσματα. Εάν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} = 6.600\,N/cm^2$, να εξεταστεί εάν η συγκόλληση φορτίζεται κανονικά.*



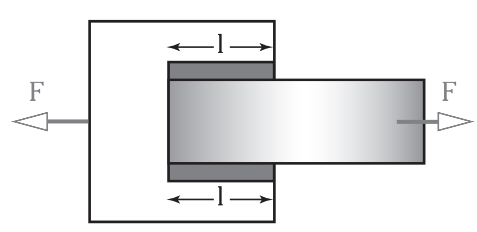
Σχ. 2.8δ

2. *Για τη συνένωση των δύο ελασμάτων του σχήματος 2.8ε χρησιμοποιούνται συγκολλήσεις επικαλύψεως. Τα πάχη των ελασμάτων και των συγκολλήσεων είναι $h_1 = 2\,cm$ και $h_2 = 3\,cm$ και το μήκος της συγκολλήσεως είναι $l = 30\,cm$. Εάν η διατμητική τάση θραύσεως του υλικού της συγκολλήσεως είναι $\tau_{\theta\rho} = 8.600\,N/cm^2$, να υπολογιστεί το φορτίο που απαιτείται για την αποκόλληση.*



Σχ. 2.8ε

3. *Δύο ελάσματα πάχους 10mm συγκολλούνται (σχ. 2.8στ), στις δύο μόνο πλευρές μήκους l. Η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι $F = 120.000\,N$. Να υπολογιστεί το μήκος της συγκολλήσεως l εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\tau_{\varepsilon\pi} = 5.200\,N/cm^2$.*



Σχ. 2.8στ

2.9 Σύνοψη βασικών εννοιών.

1) Σώμα με διατομή Α καταπονείται σε ***εφελκυσμό*** όταν στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες και

αντίθετες εφελκύουσες δυνάμεις F, που προκαλούν τις εξής παραμορφώσεις:

α) Αυξάνουν το μήκος του l κατά:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E},$$

β) ελαττώνουν τη διάσταση b της διατομής του κατά:

$$\Delta b = \frac{\mu \cdot b \cdot F}{A \cdot E}$$

όπου Ε είναι το μέτρο ελαστικότητας και μ ο λόγος Poisson του υλικού.

2) Οι αναπτυσσόμενες τάσεις εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\varphi}$ είναι ορθές και ίσες με F/A σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής. Για να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής του εφελκυόμενου σώματος πρέπει να ικανοποιούν τη ***σχέση εφελκυσμού***:

$$\sigma_{\varepsilon\varphi} = \frac{F}{A} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}.$$

3) Η επιτρεπόμενη τάση εφελκυσμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του συντελεστή ασφάλειας ν από την τάση θραύσεως $\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}$ κατά τον εφελκυσμό:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}}{\nu}.$$

4) Σώμα με διατομή Α καταπονείται σε θλίψη όταν στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες και αντίθετες θλιπτικές δυνάμεις F, που προκαλούν τις εξής παραμορφώσεις:

α) Μειώνουν το μήκος του l κατά

$$\Delta l = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E},$$

β) αυξάνουν τη διάσταση b της διατομής του κατά

$$\Delta b = -\frac{\mu \cdot b \cdot F}{A \cdot E}.$$

5) Οι αναπτυσσόμενες τάσεις θλίψεως $\sigma_{\theta\lambda}$ είναι ορθές και ίσες με F/A σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής. Για να μην υπάρχει κίνδυνος καταστροφής του θλιβόμενου σώματος, πρέπει να ικανοποιούν τη ***σχέση θλίψεως***:

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}.$$

6) Η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του συντελεστή ασφάλειας ν από την τάση θραύσεως $\sigma_{\theta\rho,\theta\lambda}$ κατά τη θλίψη:

$$\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = \frac{\sigma_{\theta\rho,\theta\lambda}}{\nu}.$$

7) Σώμα με διατομή Α καταπονείται σε ***διάτμηση*** όταν κάθετα στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις F, που έχουν την τάση να το κόψουν. Η διάτμηση είναι ***καθαρή*** όταν η απόσταση μεταξύ των δύο δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.

8) Οι αναπτυσσόμενες τάσεις $\tau_{\delta\iota}$ είναι διατμητικές, ίσες με F/A σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής και πρέπει να ικανοποιούν τη ***σχέση διατμήσεως***:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} \le \tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}.$$

9) Η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως $\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του συντελεστή ασφάλειας ν από την τάση θραύσεως $\tau_{\theta\rho,\delta\iota}$ κατά τη διάτμηση:

$$\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} = \frac{\tau_{\theta\rho,\delta\iota}}{\nu}.$$

Συνήθως λαμβάνεται $\tau_{\varepsilon\pi,\delta\iota} = 0{,}6 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\varepsilon\varphi}$.

10) Στη διάτμηση έχομε ολίσθηση του σώματος κατά γωνία:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau_{\delta\iota},$$

όπου G είναι το μέτρο ολισθήσεως του υλικού:

$$G = \frac{E}{[2 \cdot (1+\mu)]}.$$

11) Για την κοπή ενός σώματος πρέπει να ισχύει ***(συνθήκη κοπής)***:

$$\tau_{\delta\iota} = \frac{F}{A} \ge \tau_{\theta\rho,\delta\iota} = 0{,}8 \cdot \sigma_{\theta\rho,\varepsilon\varphi}.$$

12) Με τη βοήθεια των σχέσεων εφελκυσμού, θλίψεως και διατμήσεως λύνομε τα προβλήματα διαστασιολογήσεως και ικανότητας φορτίσεως και υπολογίζομε τις τάσεις λειτουργίας των καταπονουμένων κατασκευών.

13) Σύνθλιψη άντυγας οπής ονομάζεται η εμφάνιση θλιπτικών δυνάμεων στα τοιχώματα οπών διαμέτρου d, στις οποίες τοποθετούνται ήλοι ή κοχλίες για τη συνένωση ελασμάτων πάχους h. Για τις αναπτυσσόμενες τάσεις $\sigma_{\alpha\nu\tau}$ ισχύει η ***σχέση συνθλίψεως άντυγας οπής***:

$$\sigma_{\alpha\nu\tau} = \frac{F}{h \cdot d} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\alpha\nu}$$

όπου F είναι το εξωτερικό φορτίο και $\sigma_{\varepsilon\pi,\alpha\nu}$ η επιτρεπόμενη τάση συνθλίψεως άντυγας οπής.

14) Οι ήλοι και οι κοχλίες καταπονούνται σε διάτμηση. Η διατμητική τάση σε κάθε ήλο ή κοχλία

είναι ίση με:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot m \cdot A}$$

όπου F είναι η δύναμη που καταπονεί την συνένωση των ελασμάτων, A η διατομή των ήλων/κοχλιών, n οι κρίσιμες επιφάνειες κάθε ήλου/κοχλία και m ο αριθμός τους σε κάθε έλασμα.

15) Τα κυλινδρικά δοχεία πιέσεως με λεπτά τοιχώματα (π.χ. οι λέβητες και οι αεροσυμπιεστές) καταπονούνται σε εφελκυσμό. Το πάχος των τοιχωμάτων τους t επιλέγεται ώστε:

$$t \geq \frac{d \cdot P}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}} + \Delta t$$

όπου d είναι η διάμετρος του κυλίνδρου, P η πίεση του ρευστού που περιέχουν, $\sigma_{\varepsilon\pi}$ η επιτρεπόμενη τάση και Δt το πρόσθετο πάχος για την προφύλαξη από οξείδωση.

16) Κατά την παρεμπόδιση της ελεύθερης επιμηκύνσεως (επιβραχύνσεως) ράβδου λόγω αυξήσεως (μειώσεως) της θερμοκρασίας κατά Δθ, αναπτύσσονται εφελκυστικές (θλιπτικές) τάσεις:

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta\theta$$

όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής της ράβδου.

17) Η συνολική ορθή τάση που αναπτύσσεται σε ένα σώμα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους τάσεων:

$$\sigma_{o\lambda} = \sum \sigma_i$$

όπου οι τάσεις εφελκυσμού λαμβάνονται θετικές και οι θλιπτικές αρνητικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κέντρο βάρους και ροπή αδράνειας

3.1 Εισαγωγή.

Για τη μελέτη των καταπονήσεων που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια χρειάζεται να γνωρίζομε τις ιδιότητες της διατομής των σωμάτων, που υφίστανται τις καταπονήσεις αυτές. Οι απαιτούμενες ιδιότητες της διατομής δεν περιορίζονται μόνο στο υλικό και στο εμβαδόν της αλλά, και σε άλλες ιδιότητες, οι οποίες σχετίζονται με το σχήμα της διατομής.

Ειδικότερα:

1) Το κέντρο βάρους ή κεντροειδές.
2) Η ροπή αδράνειας.
3) Η ακτίνα αδράνειας.
4) Η ροπή αντιστάσεως.
5) Η πολική ροπή αδράνειας.
6) Η πολική ροπή αντιστάσεως.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζομε τους ορισμούς των ιδιοτήτων αυτών, καθώς και τον υπολογισμό τους για διατομές με απλά και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα. Ο πίνακας 3.1 παριλαμβάνει τα σύμβολα και τις συνήθεις μονάδες μετρήσεως των νέων (σε σχέση με τα προηγούμενα κεφάλαια) μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 3.1
Σύμβολα και μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Ακτίνα αδράνειας ως προς άξονα x	R_I	m, cm
Θέση κέντρου βάρους	$(x_{κβ}, y_{κβ})$	m, cm
Πολική ροπή αδράνειας ως προς σημείο Ο	I_o	m^4, cm^4
Πολική ροπή αντιστάσεως ως προς σημείο Ο	W_o	m^3, cm^3
Ροπή	M	$N \cdot cm$
Ροπή αδράνειας ως προς άξονα x	I_x	m^4, cm^4
Ροπή αντιστάσεως ως προς άξονα x	W_x	m^3, cm^3

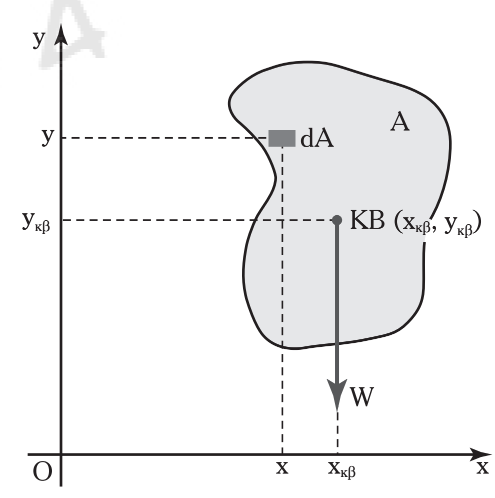
3.2 Κέντρο βάρους.

Κέντρο βάρους μιας διατομής ενός σώματος ονομάζεται το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η συνισταμένη όλων των στοιχειωδών δυνάμεων της βαρύτητας που ενεργούν πάνω της.

Το σχήμα 3.2α παρουσιάζει τη θέση του κέντρου βάρους (ΚΒ) της εικονιζόμενης διατομής. Το κέντρο βάρους αποτελεί το σημείο στο οποίο θεωρείται συγκεντρωμένο ολόκληρο το βάρος W της διατομής.

3.2.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η θέση του κέντρου βάρους;

Στη μελέτη των καταπονήσεων μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η θέση του κέντρου βάρους της διατομής αφενός για να μπορούμε να προσδιορίζομε το είδος της καταπονήσεως και αφετέρου για να υπολογίζομε τις αποστάσεις των σημείων της διατομής από το κέντρο βάρους της. Από τις αποστάσεις αυτές, μεταξύ άλλων, καθορίζεται η αντοχή μιας κατασκευής. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, οι αναπτυσσόμενες τάσεις στα διάφορα σημεία της διατομής ενός σώματος που καταπονείται σε κάμψη εξαρτώνται από τις αποστάσεις τους από το κέντρο βάρους, της διατομής. Όσο πιο μεγάλη είναι η απόσταση ενός σημείου από το κέντρο βάρους, τόσο



Σχ. 3.2α
Κέντρο βάρους διατομής.

πιο ισχυρή είναι η αναπτυσσόμενη τάση στο σημείο αυτό. Επομένως, γνωρίζοντας τη θέση του κέντρου βάρους της διατομής μπορούμε να προσδιορίσομε τα σημεία με τη μεγαλύτερη απόσταση απ' αυτό και άρα τα σημεία, στα οποία αναπτύσσονται οι μεγαλύτερες τάσεις. Οι τάσεις αυτές καθορίζουν την αντοχή του σώματος που καταπονείται σε κάμψη. Επί πλέον, εάν ένα θλιπτικό φορτίο δεν περνάει από το κέντρο βάρους συμμετρικής διατομής, στην οποία εφαρμόζεται, προκαλεί εκτός των άλλων και λυγισμό.

3.2.2 Πώς προσδιορίζεται η θέση του κέντρου βάρους;

Η θέση του κέντρου βάρους μίας ομογενούς[1] διατομής εμβαδού Α σε ένα σύστημα συντεταγμένων Οxy προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του $x_{κβ}$ και $y_{κβ}$ (σχ. 3.2α). Οι συντεταγμένες αυτές υπολογίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$X_{κβ} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \quad \text{και} \quad y_{κβ} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \qquad (3.1)$$

όπου dA είναι η στοιχειώδης επιφάνεια με συντεταγμένες x και y.

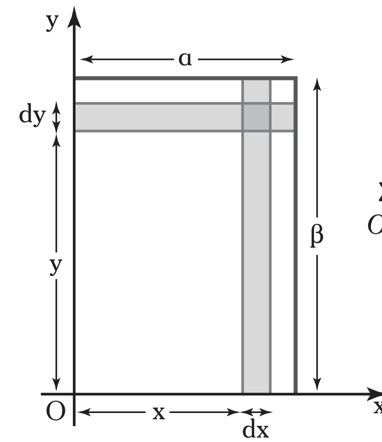
Στην περίπτωση ορθογώνιας διατομής με μικρή πλευρά α και μεγάλη β (σχ. 3.2β) η εφαρμογή των σχέσεων (3.1) δίνει τα εξής (η στοιχειώδης επιφάνεια dA είναι κάθετη στον άξονα Οx ή Οy στον οποίο υπολογίζομε τη συντεταγμένη $X_{κβ}$ ή $y_{κβ}$, αντίστοιχα):

$$X_{κβ} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_O^α xβdx}{\int_O^α βdx} = \frac{\frac{1}{2}βα^2}{βα} = \frac{α}{2} \qquad (3.2)$$

$$y_{κβ} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{\int_O^β yαdy}{\int_O^β αdy} = \frac{\frac{1}{2}αβ^2}{αβ} = \frac{β}{2}. \qquad (3.3)$$

Άρα η θέση του κέντρου βάρους είναι $\left(\frac{α}{2}, \frac{β}{2}\right)$, δηλαδή το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογωνίου.

Γενικότερα, ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους είναι εύκολος για τις διατομές που έχουν απλά



Σχ. 3.2β
Ορθογώνια διατομή.

γεωμετρικά σχήματα. Συγκεκριμένα, το κέντρο βάρους μιας διατομής που είναι ομογενής και συμμετρική βρίσκεται στο σημείο, στο οποίο τέμνονται οι δύο άξονες συμμετρίας της. Αν η διατομή έχει μόνο έναν άξονα συμμετρίας, το κέντρο βάρους βρίσκεται πάνω σε αυτόν.

Η θέση του κέντρου βάρους ομογενών διατομών που έχουν απλά σχήματα παρουσιάζεται στον πίνακα 3.2.1.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται χαλύβδινη δοκός με κυκλική διατομή ακτίνας R = 5 cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Όταν η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου [σχ. 3.2γ(α)].

2) Όταν η αρχή των αξόνων βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στον οριζόντιο άξονα [σχ. 3.2γ(β)].

Λύση.

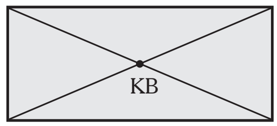
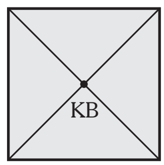
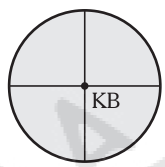
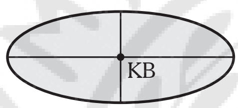
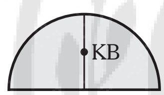
Επειδή η δοκός είναι ομογενής και η διατομή της έχει σχήμα κύκλου, το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου.

1) Το σχήμα 3.2γ(α) απεικονίζει τον κύκλο στο σύστημα συντεταγμένων, που έχει την αρχή των αξόνων στο κέντρο του κύκλου. Έτσι, το κέντρο βάρους της διατομής συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Άρα, το κέντρο βάρους βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες $x_{κβ} = 0$ και $y_{κβ} = 0$ ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

2) Το σχήμα 3.2γ(β) απεικονίζει τον κύκλο στο σύστημα συντεταγμένων που έχει την αρχή των

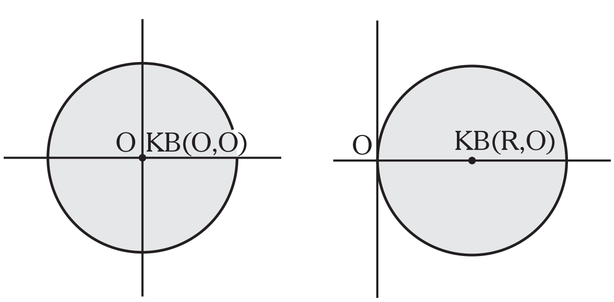
[1] Όλες οι διατομές που εξετάζονται στο παρόν είναι ομογενείς, εκτός και εάν αναφέρεται διαφορετικά.

Πίνακας 3.2.1
Κέντρο βάρους ομογενών διατομών σε απλά σχήματα.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Θέση κέντρου βάρους***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β	Το σημείο τομής των διαγωνίων
Τετράγωνο		Η πλευρά α	Το σημείο τομής των διαγωνίων
Κύκλος		Η διάμετρος D	Το κέντρο του κύκλου
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος ημιάξονας β	Το κέντρο της ελλείψεως
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D	Σε απόσταση $\frac{2 \cdot D}{3 \cdot \pi}$ από το κέντρο του κύκλου πάνω στην κάθετη της διαμέτρου του

αξόνων πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στον οριζόντιο άξονα. Συγκεκριμένα, το κέντρο βάρους βρίσκεται σε απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου από την αρχή των αξόνων. Άρα, το κέντρο βάρους βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες $x_{κβ} = R = 5$ cm και $y_{κβ} = 0$ ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

Η εμφάνιση διαφορετικών αποτελεσμάτων στα ερωτήματα (α) και (β) οφείλεται στη χρήση διαφορετικού συστήματος συντεταγμένων και όχι σε αλλαγή της πραγματικής θέσεως του κέντρου βάρους. Η θέση του κέντρου βάρους παραμένει στο κέντρο του κύκλου.

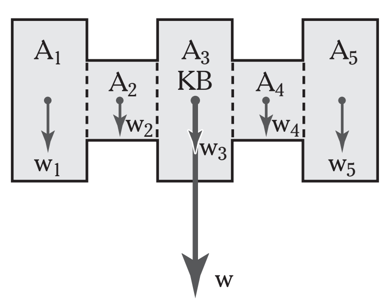


(α) (β)

Σχ. 3.2γ

3.2.3 Υπολογισμός κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων όπως αυτό του σχήματος 3.2δ, στηρίζεται



Σχ. 3.2δ
Η θέση του κέντρου βάρους σώματος με σύνθετο γεωμετρικό σχήμα.

στις εξισώσεις (3.1) και συνίσταται στην ανάλυση των συνθέτων σχημάτων σε απλά επίπεδα σχήματα (τετράγωνα, ορθογώνια κ.λπ.) και στη συνέχεια στο συνδυασμό των αποτελεσμάτων των απλών σχημάτων. Τα απλά σχήματα έχουν το πλεονέκτημα ότι γνωρίζομε τη θέση του κέντρου βάρους τους.

Καθένα από τα απλά επίπεδα σχήματα έχει εμβαδόν A_i και βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες (x_i, y_i), όπου ο δείκτης $i = 1, 2, \ldots, N$ αριθμεί τα N απλά σχήματα, από τα οποία αποτελείται το σύνθετο σχήμα. Η θέση ($x_{κβ}$, $y_{κβ}$) του κέντρου βάρους του σύνθετου γεωμετρικού σχήματος προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

$$x_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \quad \text{και} \quad y_{κβ} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i}. \qquad (3.4)$$

Οι μονάδες μετρήσεως της θέσεως του κέντρου βάρους είναι στο Διεθνές Σύστημα και στο Τεχνικό Σύστημα το 1 m, στο C.G.S το 1 cm, και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το 1 ft.

Οι σχέσεις (3.4) μας οδηγούν στην ανάπτυξη μιας ***αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού του κέντρου βάρους ομογενών συνθέτων σχημάτων***, τα βήματα της οποίας παρουσιάζονται στον πίνακα 3.2.2.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου διευκολύνεται σημαντικά με την καταγραφή των ενδιαμέσων αποτελεσμάτων σε πίνακα, ο οποίος έχει τη μορφή του πίνακα 3.2.3. Στον πίνακα γράφομε το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε απλού σχήματος, τη θέση (x_i, y_i) του κέντρου βάρους, τα γινόμενα του εμβαδού επί τις αποστάσεις x_i και y_i, καθώς και τα αθροίσματα γινομένων και τα πηλίκα που ορίζει η μέθοδος.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσομε τα εξής:

1) Δεν συμβαίνει πάντοτε το κέντρο βάρους μίας διατομής να συμπίπτει υποχρεωτικά με ένα σημείο της. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες το κέντρο βάρους μίας διατομής βρίσκεται εκτός αυτής.

2) Το σύνθετο σχήμα μπορεί να μην προκύπτει εύκολα μόνο με προσθέσεις απλών σχημάτων. Αντίθετα, μπορεί να προκύπτει πολύ πιο εύκολα με προσθέσεις και αφαιρέσεις απλών σχημάτων. Η αναλυτική μέθοδος που περιγράψαμε παραπάνω εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή, αρκεί να θυμόμαστε ότι στις αφαιρέσεις τα εμβαδά των σχημάτων λαμβάνονται με αρνητικό πρόσημο στους υπολογισμούς.

γ) Είναι πιθανό να υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι, με τους οποίους ένα σύνθετο σχήμα μπορεί να αναλυθεί σε απλά. Ωστόσο, η θέση του κέντρου βάρους δεν εξαρτάται από τον τρόπο αναλύ-

Πίνακας 3.2.2
Μέθοδος υπολογισμού του κέντρου βάρους ομογενών συνθέτων σχημάτων.

1) Χωρίζομε το σύνθετο γεωμετρικό σχήμα (σύνθετη επιφάνεια) σε απλά σχήματα (απλές επιφάνειες).
2) Υπολογίζομε το εμβαδόν A_i κάθε απλής επιφάνειας.
3) Υπολογίζομε τη θέση (x_i, y_i) του κέντρου βάρους κάθε απλής επιφάνειας (ως προς την αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων).
4) Υπολογίζομε τα γινόμενα του εμβαδού A_i κάθε απλής επιφάνειας επί τις αποστάσεις x_i και y_i, δηλαδή τα γινόμενα $A_i \cdot x_i$ και $A_i \cdot y_i$.
5) Προσθέτομε τα εμβαδά όλων των απλών επιφανειών και βρίσκομε το άθροισμά τους $\sum_{i=1}^{N} A_i$. Το άθροισμα αυτό αντιστοιχεί στο εμβασδόν της σύνθετης επιφάνειας.
6) Υπολογίζομε τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i$ και $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i$.
7) Διαιρούμε τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i$ και $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i$ διά του εμβαδού της σύνθετης επιφάνειας $\sum_{i=1}^{N} A_i$ και βρίσκομε τη θέση του κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας.

Πίνακας 3.2.3
Καταγραφή αποτελεσμάτων της αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i***	***$A_i \cdot x_i$***	***Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i***	***$A_i \cdot y_i$***
1					
2					
3					
....					
N					
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{N} A_i$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{\kappa\beta} = \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} A_i$		$y_{\kappa\beta} = \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} A_i$	

σεως του σύνθετου σχήματος σε απλά. Όλοι οι τρόποι οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων παρουσιάζεται αναλυτικά στα παραδείγματα που ακολουθούν.

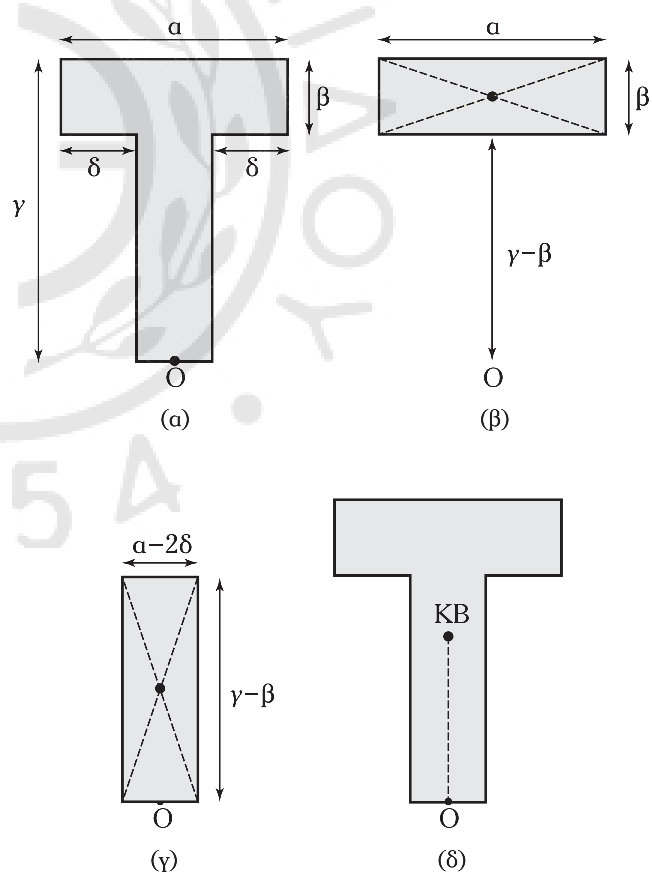
Παράδειγμα 2.

Δίνεται η διατομή του σχήματος 3.2ε(α) με σχήμα «Τ» και με διαστάσεις $\alpha = 6$ cm, $\beta = 2$ cm, $\gamma = 8$ cm και $\delta = 2$ cm. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

Λύση.

Η διατομή με σχήμα «Τ» δεν έχει απλό σχήμα. Μπορούμε όμως να τη χωρίσομε εύκολα σε απλά σχήματα και να εφαρμόσομε την αναλυτική μέθοδο υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Η διατομή με σχήμα «Τ» αποτελείται από δύο ορθογώνια. Το ένα ορθογώνιο απεικονίζεται στο σχήμα 3.2ε(β) και έχει πλευρές τις $\alpha = 6$ cm και $\beta = 2$ cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_1 = 6\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$. Το άλλο ορθογώνιο απεικονίζεται στο σχήμα 3.2ε(γ) και έχει πλευρές $\alpha - 2 \cdot \delta = 6\text{ cm} - 2 \cdot 2\text{ cm} = 2$ cm και $\gamma - \beta = 8\text{ cm} - 2\text{ cm} = 6$ cm. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_2 = 6\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$. Η διατομή με σχήμα «Τ» προκύπτει από την πρόσθεση των δύο αυτών ορθογωνίων.



Σχ. 3.2ε
(α) Διατομή με σχήμα «Τ». (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο. (δ) Η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

Χρησιμοποιούμε ως αρχή των αξόνων Ο το μέσο της βάσεως στηρίξεως της διατομής «Τ». Παρατηρούμε ότι λόγω της συμμετρίας, η διατομή και καθένα από τα δύο ορθογώνια είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που ενώνει τα σημεία τομής των διαγωνίων των δύο ορθογωνίων. Αυτό σημαίνει ότι η οριζόντια συντεταγμένη των σημείων τομής των διαγωνίων των δύο ορθογωνίων είναι ίση με μηδέν.

Το κέντρο βάρους του πρώτου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση $(x_1,\ y_1) = (0,\ \gamma - \beta + \beta/2) = (0{,}8\ \text{cm} - 2\ \text{cm} + 1\ \text{cm}) = (0{,}7\ \text{cm})$.

Το κέντρο βάρους του δεύτερου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση:

$$(x_2,\ y_2) = (0, \frac{\gamma - \beta}{2}) = (0{,}3\ \text{cm}).$$

Το κέντρο βάρους της διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.2.4. Άρα, το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται σε απόσταση 5 cm από το μέσο της βάσεως στηρίξεώς της, δηλαδή στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 3.2ε(δ).

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η διατομή του σχήματος 3.2στ(α). Η διατομή έχει σχήμα «Γ» και οι διαστάσεις της είναι $\alpha = 6\ \text{cm}$, $\beta = 8\ \text{cm}$, $\gamma = 6\ \text{cm}$ και $\delta = 4\ \text{cm}$. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής. Συμπίπτει το κέντρο βάρους της διατομής με κάποιο σημείο της;

Λύση.

Η διατομή με σχήμα «Γ» δεν έχει απλό σχήμα. Μπορούμε όμως να τη χωρίσομε εύκολα σε απλά σχήματα και να εφαρμόσομε την αναλυτική μέθοδο υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Χρησιμοποιούμε ως αρχή των αξόνων το σημείο Ο που είναι το ένα άκρο της βάσεως στηρίξεώς της.

Η διατομή με σχήμα «Γ» αποτελείται από δύο ορθογώνια. Το ένα απεικονίζεται στο σχήμα 3.2στ(β) και έχει πλευρές τις $\delta = 4\ \text{cm}$ και $\beta - \gamma = 2\ \text{cm}$. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_1 = 4\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} = 8\ \text{cm}^2$. Το άλλο απεικονίζεται στο σχήμα 3.2στ(γ) και έχει πλευρές $\alpha - \delta = 6\ \text{cm} - 4\ \text{cm} = 2\ \text{cm}$ και $\beta = 8\ \text{cm}$. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_2 = 2\ \text{cm} \cdot 8\ \text{cm} = 16\ \text{cm}^2$. Η διατομή με σχήμα «Γ» προκύπτει από την πρόσθεση των δύο αυτών ορθογωνίων.

Το κέντρο βάρους του πρώτου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\beta - \gamma}{2},\ \frac{\delta}{2}\right) = (1\ \text{cm}, 2\ \text{cm}).$$

Το κέντρο βάρους του δεύτερου ορθογωνίου βρί-

Πίνακας 3.2.4
Καταγραφή αποτελεσμάτων υπολογισμού της θέσεως του κέντρου βάρους διατομής σχήματος «Τ».

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i***	***$A_i \cdot x_i$***	***Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i***	***$A_i \cdot y_i$***
1	$12\ \text{cm}^2$	0	0	7 cm	$84\ \text{cm}^3$
2	$12\ \text{cm}^2$	0	0	3 cm	$36\ \text{cm}^3$
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 24\text{cm}^2$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i = 0$	–	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i = 120\ \text{cm}^3$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = 0$		$y_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{120\ \text{cm}^3}{24\ \text{cm}^2} = 5\ \text{cm}$	

σκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση:

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{\beta}{2},\ \delta + \frac{\alpha - \delta}{2}\right) = (4\,\text{cm},\ 5\,\text{cm}).$$

Το κέντρο βάρους της διατομής υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.2.5.

Άρα, το κέντρο βάρους του σώματος βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 3 cm και σε κατακόρυφη απόσταση 4 cm από το σημείο O, δηλαδή στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 3.2στ(δ). Το κέντρο βάρους βρίσκεται οριακά πάνω στο σώμα, δηλαδή συμπίπτει με σημείο του σώματος.

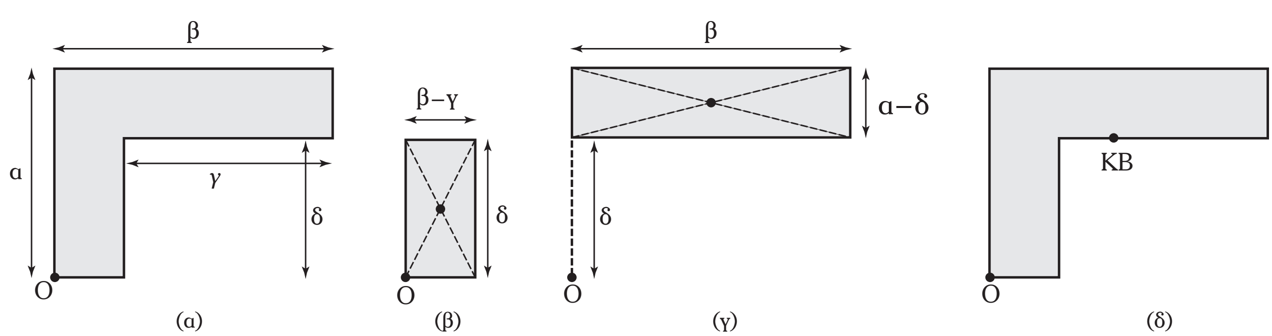
Αρκετές φορές, όπως προαναφέραμε, αντί να χρησιμοποιούμε προσθετικά τα απλά σχήματα εξυπηρετεί καλύτερα να χρησιμοποιούμε αφαιρετικά κάποια απ' αυτά. Μάλιστα, σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι εφικτή η εύρεση απλών σχημάτων που προστιθέμενα μας δίνουν το σύνθετο σχήμα, ενώ είναι εφικτή η εύρεση απλών σχημάτων, μερικά από τα οποία εάν αφαιρεθούν από το άθροισμα των υπολοίπων, μας δίνουν το σύνθετο σχήμα. Η χρήση απλών σχημάτων αφαιρετικά φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4.

Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής του παραδείγματος 3 [σχ. 3.2ζ(α)] χρησιμοποιώντας αφαιρετικά τουλάχιστον ένα απλό σχήμα.

Πίνακας 3.2.5
Καταγραφή αποτελεσμάτων υπολογισμού της θέσεως του κέντρου βάρους διατομής σχήματος «Γ».

Απλό σχήμα	*Εμβαδόν απλού σχήματος A_i*	*Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i*	*$A_i \cdot x_i$*	*Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i*	*$A_i \cdot y_i$*
1	8 cm^2	1 cm	8 cm^3	2 cm	16 cm^3
2	16 cm^2	4 cm	64 cm^3	5 cm	80 cm^3
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 24\ cm^2$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i = 72\ cm^3$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i = 96\ cm^3$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{72\ cm^3}{24\ cm^2} = 3\ cm$		$y_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{96\ cm^3}{24\ cm^2} = 4\ cm$	



Σχ. 3.2στ
(α) Διατομή με σχήμα «Γ». (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο. (δ) Η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

Λύση.

Αντί για τα δύο ορθογώνια που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα 3, μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσομε δύο άλλα ορθογώνια, για τα οποία να εφαρμόσομε την αναλυτική μέθοδο υπολογισμού του κέντρου βάρους συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων. Το ένα ορθογώνιο απεικονίζεται στο σχήμα 3.2ζ(β) και έχει πλευρές τις $\alpha = 6\,\text{cm}$ και $\beta = 8\,\text{cm}$. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_1 = 6\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2$. Το άλλο απεικονίζεται στο σχήμα 3.2ζ(γ) και έχει πλευρές $\gamma = 6\,\text{cm}$ και $\delta = 4\,\text{cm}$. Έτσι το εμβαδόν του είναι $A_2 = 6\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 24\,\text{cm}^2$. Το σώμα με σχήμα «Γ» προκύπτει από την αφαίρεση του δεύτερου ορθογωνίου από το πρώτο.

Το κέντρο βάρους του πρώτου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση:

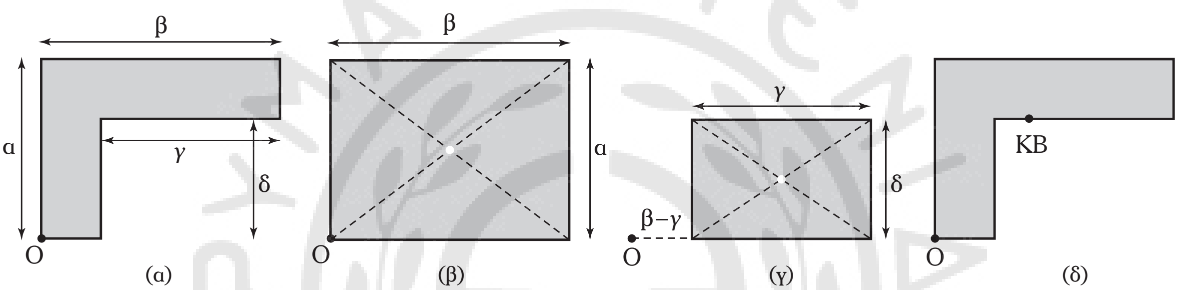
$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\beta}{2},\ \frac{\alpha}{2}\right) = (4\,\text{cm},\ 3\,\text{cm}).$$

Το κέντρο βάρους του δεύτερου ορθογωνίου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, δηλαδή στη θέση:

$$(x_2, y_2) = \left(\beta - \gamma + \frac{\gamma}{2},\ \frac{\delta}{2}\right) = (5\,\text{cm},\ 2\,\text{cm}).$$

Το κέντρο βάρους του σχήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.2.6.

Άρα, το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 3 cm και σε κατακόρυφη απόσταση 4 cm από το σημείο Ο, δηλαδή στη θέση που



Σχ. 3.2ζ
(α) Η διατομή του παραδείγματος 3. (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο. (δ) Η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.

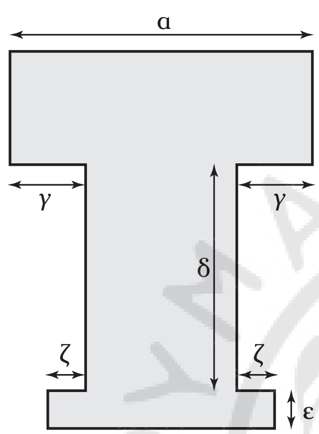
Πίνακας 3.2.6
Καταγραφή αποτελεσμάτων υπολογισμού της θέσεως του κέντρου βάρους διατομής σχήματος «Γ».

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Οριζόντια συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος x_i***	***$A_i \cdot x_i$***	***Κάθετη συντεταγμένη θέσεως απλού σχήματος y_i***	***$A_i \cdot y_i$***
1	$48\,\text{cm}^2$	4 cm	$192\,\text{cm}^3$	3 cm	$144\,\text{cm}^3$
2	$-24\,\text{cm}^2$	5 cm	$-120\,\text{cm}^3$	2 cm	$-48\,\text{cm}^3$
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 24\,\text{cm}^2$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i = 72\,\text{cm}^3$	–	$\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i = 96\,\text{cm}^3$
Θέση Κέντρου Βάρους		$x_{\kappa\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \dfrac{72\,\text{cm}^3}{24\,\text{cm}^2} = 3\,\text{cm}$		$y_{\kappa\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \dfrac{96\,\text{cm}^3}{24\,\text{cm}^2} = 4\,\text{cm}$	

εικονίζεται στο σχήμα 3.2ζ(δ). Το αποτέλεσμα αυτό ταυτίζεται με το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.

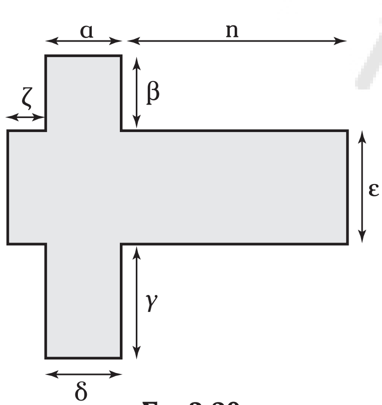
Ασκήσεις.

1. *Δίνεται η διατομή του σχήματος 3.2η. Οι διαστάσεις της είναι $\alpha = 8\,cm$, $\beta = 3\,cm$, $\gamma = 2\,cm$, $\delta = 6\,cm$, $\varepsilon = 1\,cm$ και $\zeta = 1\,cm$. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.*
Υπόδειξη: *Η διατομή αποτελείται από τρία ορθογώνια.*



Σχ. 3.2η

2. *Δίνεται η διατομή του σχήματος 3.2θ. Οι διαστάσεις της είναι $\alpha = 2\,cm$, $\beta = 2\,cm$, $\gamma = 3\,cm$, $\delta = 2\,cm$, $\varepsilon = 3\,cm$, $\zeta = 1\,cm$ και $\eta = 6\,cm$. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής. Συμπίπτει το κέντρο βάρους της διατομής με κάποιο σημείο της;*
Υπόδειξη*: Η διατομή αποτελείται από τρία ορθογώνια.*

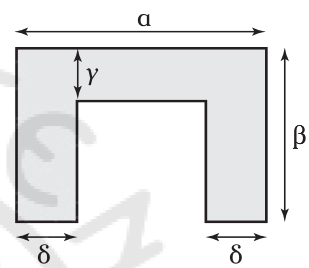


Σχ. 3.2θ

3. *Δίνεται σιδερένια δοκός με διατομή σχήματος τετραγώνου με πλευρά $\alpha = 6\,cm$. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

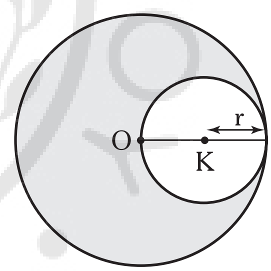
α) Η αρχή των αξόνων βρίσκεται σε σημείο τομής δύο διαδοχικών πλευρών του τετραγώνου.
β) Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του.
γ) Είναι διαφορετικά τα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (α) και (β); Σχολιάστε.

4. *Δίνεται η διατομή σχήματος «Π» που απεικονίζεται στο σχήμα 3.2ι. Οι διαστάσεις της είναι $\alpha = 66\,mm$, $\beta = 46\,mm$, $\gamma = 14\,mm$ και $\delta = 16\,mm$. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής. Συμπίπτει το κέντρο βάρους της διατομής με κάποιο σημείο της;*



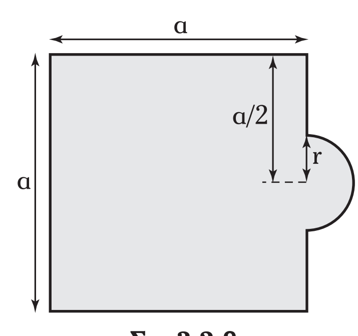
Σχ. 3.2ι

5. *Δίνεται η διατομή του σχήματος 3.2ια. Η ακτίνα του μικρού κύκλου είναι $r = 10\,mm$. Να υπολογιστεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής.*



Σχ. 3.2ια

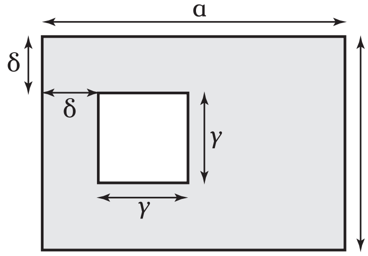
6. *Να βρεθεί η θέση του κέντρου βάρους της διατομής του σχήματος 3.2ιβ. Δίνονται $\alpha = 42\,mm$ και $r = 10\,mm$.*



Σχ. 3.2ιβ

7. *Να βρεθεί η θέση του κέντρου βάρους της δια-*

τομής του σχήματος 3.2ιγ. Δίνονται $a = 54$ mm, $\beta = 38$ mm, $\gamma = 16$ mm και $\delta = 10$ mm.



Σχ. 3.2ιγ

3.3 Ροπή αδράνειας.

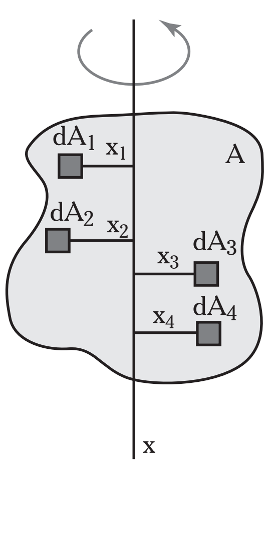
Στο πλαίσιο της Αντοχής Υλικών, μας ενδιαφέρει η ***ροπή αδράνειας επιφάνειας*** και συγκεκριμένα της διατομής του σώματος που καταπονείται. Η ροπή αδράνειας επιφάνειας, την οποία στη συνέχεια αναφέρομε απλά ως ροπή αδράνειας, ορίζεται ως εξής:

Ας θεωρήσομε τη διατομή Α του σχήματος 3.3α. Η διατομή αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες dA_i, οι οποίες περιστρέφονται γύρω από τον άξονα x που περιέχεται στο επίπεδο της διατομής. Η ακτίνα περιστροφής κάθε στοιχειώδους επιφάνειας dA_i συμβολίζεται με x_i.

Ροπή αδράνειας dI_x της στοιχειώδους επιφάνειας dA_i ως προς τον άξονα x ορίζεται το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας dA_i επί το τετράγωνο της αποστάσεώς της x_i από τον άξονα x, δηλαδή:

$$dIx = dA_i \cdot x_i^2.$$

Ροπή αδράνειας I_x της επιφάνειας (διατομής) Α ως προς τον άξονα x ορίζομε το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών επιφανειών που απαρτίζουν την διατομή επί το τετράγωνο της αποστάσεώς τους από τον άξονα.



Σχ. 3.3α
Διατομή που περιστρέφεται γύρω από άξονα.

Με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Λογισμού η ροπή αδράνειας I_x παρέχεται από τη σχέση:

$$I_x = \int_A x^2 dA. \tag{3.5}$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της ροπής αδράνειας*** είναι στο Διεθνές Σύστημα και στο Τεχνικό Σύστημα το 1 m^4, στο C.G.S. το 1 cm^4 και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το 1 ft^4.

Από τη σχέση (3.5) διαπιστώνομε ότι η ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς έναν άξονα εξαρτάται από τους ακόλουθους δύο παράγοντες:

1) ***Από το εμβαδόν της επιφάνειας και***

2) ***από την κατανομή των στοιχειωδών επιφανειών.*** Συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένες είναι οι στοιχειώδεις επιφάνειες από τον άξονα γύρω από τον οποίο περιστρέφεται η επιφάνεια, τόσο πιο μεγάλη είναι και η ροπή αδράνειας της επιφάνειας.

Ειδικότερα, από τη σχέση (3.5) φαίνεται ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται περισσότερο από τη θέση των στοιχειωδών επιφανειών ως προς τον άξονα περιστροφής από ό,τι από το εμβαδόν τους, καθώς η ροπή αδράνειας εξαρτάται από το τετράγωνο των αποστάσεων.

Επίσης, πρέπει να σημειώσομε ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στον συμβολισμό της ροπής αδράνειας I_x τον δείκτη x που δείχνει τον άξονα ως προς τον οποίο η ροπή υπολογίζεται. Η κατανομή των στοιχειωδών επιφανειών υπολογίζεται γύρω από συγκεκριμένο άξονα. Εάν αλλάξει ο άξονας ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδράνειας, τότε αλλάζουν οι αποστάσεις των στοιχειωδών επιφανειών, οι οποίες πλέον υπολογίζονται ως προς τον νέο άξονα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό μίας άλλης τιμής ροπής αδράνειας ως προς τον νέο άξονα.

Τέλος, σημειώνομε ότι στο πλαίσιο της Αντοχής Υλικών μας ενδιαφέρουν μόνο οι άξονες που περιέχονται στο επίπεδο της επιφάνειας. Στο εξής, όπου αναφερόμαστε σε άξονα, ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδράνειας, εννοούμε άξονα που περιέχεται στο επίπεδο της υπό εξέταση επιφάνειας.

3.3.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η ροπή αδράνειας;

Η γνώση της ροπής αδράνειας είναι απαραίτητη για τη μελέτη της κάμψεως και του λυγισμού, τα οποία μελετούμε στα Κεφάλαια 5 και 7 αντίστοιχα. Για παράδειγμα, η ροπή αδράνειας χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον προσδιορισμό της τάσεως λειτουργίας και της παραμορφώσεως σωμάτων που καταπονούνται. Έτσι, η γνώση της ροπής αδράνειας μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές σωμάτων, ώστε αυτά να εμφανίζουν αυξημένη ροπή συγκριτικά με άλλες διατομές. Επίσης, η ροπή αδράνειας μας βοηθά να προσδιορίζομε την κατεύθυνση τοποθετήσεως μίας διατομής ως προς τη διεύθυνση των φορτίων, ώστε να εμφανίζονται στη διατομή οι μικρότερες τάσεις και άρα να προκαλείται η μικρότερη παραμόρφωση.

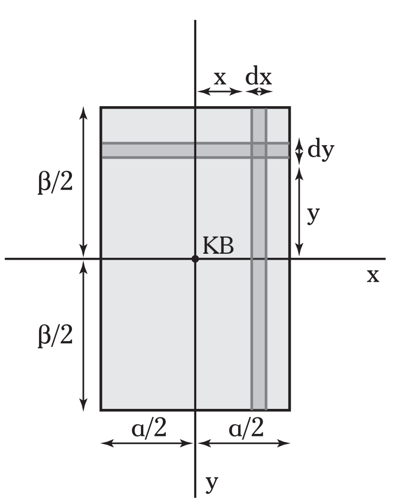
3.3.2 Πώς υπολογίζεται η ροπή αδράνειας;

Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.5). Καταρχήν χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιον άξονα x πρέπει να την υπολογίσομε.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι άξονες που διέρχονται από το κέντρο βάρους των επιφανειών. Οι άξονες αυτοί ονομάζονται ***κεντροβαρικοί άξονες***. Από τους κεντροβαρικούς άξονες ιδιαίτερα σημαντικοί είναι αυτοί που αποτελούν και άξονες συμμετρίας των επιφανειών. Η ροπή αδράνειας επιφανειών με απλά σχήματα είναι συνάρτηση των χαρακτηριστικών μεγεθών των σχημάτων αυτών.

Συγκεκριμένα, για τα διάφορα απλά σχήματα και για τους κεντροβαρικούς άξονές τους που έχουν ενδιαφέρον, η ροπή αδράνειας έχει ως εξής:

1) Το ***ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β) έχει δύο άξονες συμμετρίας (σχ. 3.3β). Ο ένας άξονας συμμετρίας, ο άξονας x, είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και ο άλλος άξονας συμμετρίας, ο άξονας y, είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου. Και οι δύο άξονες συμμετρίας διέρχονται απ' το σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογωνίου, το οποίο συμπίπτει, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, με το κέντρο βάρους του ορθογωνίου.



Σχ. 3.3β
Ορθογώνια επιφάνεια.

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του δίνεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.5) για τη στοιχειώδη επιφάνεια αdy ως εξής:

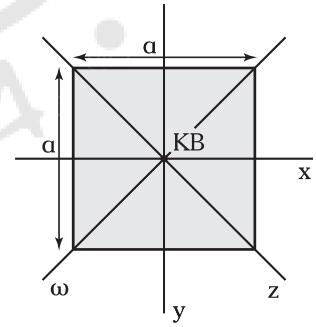
$$I_x = \frac{\alpha \cdot \beta^3}{12} . \qquad (3.6)$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του δίνεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.5) για τη στοιχειώδη επιφάνεια βdx ως εξής:

$$I_y = \frac{\beta \cdot \alpha^3}{12} . \qquad (3.7)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.6) και (3.7) διαπιστώνομε ότι οι ροπές αδράνειας του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ροπή αδράνειας.

2) Το ***τετράγωνο*** (με πλευρά α) έχει δύο άξονες συμμετρίας παράλληλους στις πλευρές του, τους άξονες x και y (σχ. 3.3γ). Επίσης, έχει ως άξονες συμμετρίας τους άξονες z και ω, που είναι οι δύο ευθείες των διαγωνίων του. Και οι τέσσερεις άξονες συμμετρίας διέρχονται από το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου, το οποίο συμπίπτει με το κέντρο βάρους του.



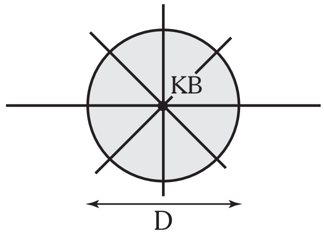
Σχ. 3.3γ
Τετραγωνική επιφάνεια.

Οι ροπές αδράνειας του τετραγώνου ως προς οποιονδήποτε από τους τέσσερεις άξονες συμμετρίας του είναι ίσες και εύκολα, με τη χρήση της σχέσεως (3.5), αποδεικνύεται ότι δίδονται από τη σχέση:

$$I_x = I_y = I_z = I_\omega = \frac{\alpha^4}{12} . \qquad (3.8)$$

3) Ο ***κύκλος*** (με διάμετρο D) έχει άπειρους άξο-

νες συμμετρίας, οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο του (σχ. 3.3δ). Υπενθυμίζομε ότι το κέντρο του κύκλου, συμπίπτει με το κέντρο βάρους του.

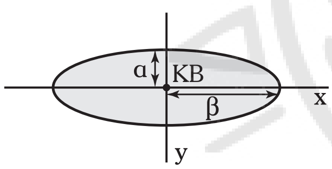


Σχ. 3.3δ
Κυκλική επιφάνεια.

Οι ροπές αδράνειας του κύκλου ως προς οποιονδήποτε από τους άξονες συμμετρίας του είναι ίσες και αποδεικνύεται με τη χρήση της σχέσεως (3.5) ότι δίνονται από τη σχέση:

$$I_x = I_y = \ldots = \frac{\pi \cdot D^4}{64}. \qquad (3.9)$$

4) Η ***έλλειψη*** (με μικρό ημιάξονα α και μεγάλο β) έχει δύο άξονες συμμετρίας (σχ. 3.3ε). Ο ένας άξονας συμμετρίας, ο άξονας x, είναι η ευθεία του μεγάλου άξονα της ελλείψεως, ενώ ο άλλος, ο άξονας y, είναι η ευθεία του μικρού άξονα της ελλείψεως. Και οι δύο άξονες συμμετρίας διέρχονται από το κέντρο της ελλείψεως, το οποίο συμπίπτει με το κέντρο βάρους της.



Σχ. 3.3ε
Ελλειπτική επιφάνεια.

Η ροπή αδράνειας της ελλείψεως ως προς την ευθεία του μεγάλου άξονά της αποδεικνύεται με τη χρήση της σχέσεως (3.5) ότι δίνεται από τη σχέση:

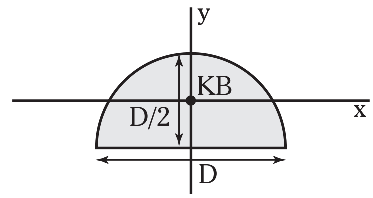
$$I_x = \frac{\pi \cdot \beta \cdot \alpha^3}{4}, \qquad (3.10)$$

ενώ ως προς την ευθεία του μικρού άξονά της δίνεται από τη σχέση:

$$I_y = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta^3}{4}. \qquad (3.11)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.10) και (3.11) διαπιστώνομε ότι οι ροπές αδράνειας της ελλείψεως είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας της. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ροπή αδράνειας.

5) Το ***ημικύκλιο*** (με διάμετρο D) έχει άξονα συμμετρίας, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του, καθώς και από το κέντρο βάρους του και είναι κάθετος στη διάμετρό του (σχ. 3.3στ).



Σχ. 3.3στ
Ημικυκλική επιφάνεια.

Η ροπή αδράνειας του ημικυκλίου ως προς τον ανωτέρω άξονα συμμετρίας του αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{128}. \qquad (3.12)$$

Επίσης, ένας άλλος κεντροβαρικός άξονας είναι αυτός που διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου και είναι παράλληλος στη διάμετρό του, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3στ. Η ροπή αδράνειας του ημικυκλίου ως προς τον ανωτέρω κεντροβαρικό άξονα αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$I_x = 0{,}006875 \cdot D^4. \qquad (3.13)$$

Η ***ροπή αδράνειας επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς κεντροβαρικούς άξονές τους*** παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.3.1.

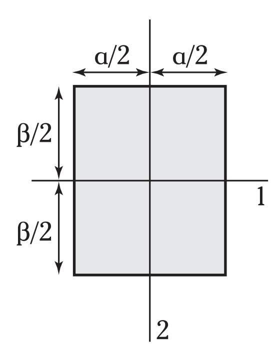
Παράδειγμα 5.

Δίνεται το ορθογώνιο του σχήματος 3.3ζ με πλευρές $\alpha = 4\,cm$ και $\beta = 5\,cm$. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τους ακόλουθους άξονες:

1) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

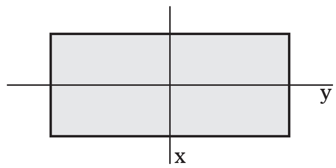
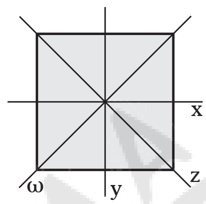
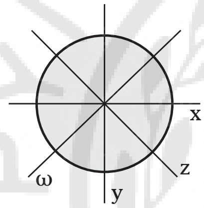
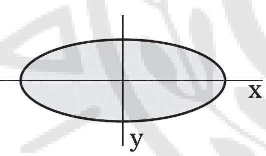
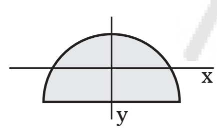
2) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Πώς σχολιάζετε τη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (1) και (2);



Σχ. 3.3ζ

Πίνακα 3.3.1
Ροπή αδράνειας επιφανειών απλών σχημάτων ως προς κεντροβαρικούς άξονες.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Κεντροβαρικός άξονας υπολογισμού της ροπής αδράνειας***	***Ροπή αδράνειας***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Παράλληλος στη μικρή πλευρά.	$I_x = \frac{\alpha \cdot \beta^3}{12}$
			Παράλληλος στη μεγάλη πλευρά.	$I_y = \frac{\beta \cdot \alpha^3}{12}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Παράλληλοι στις πλευρές (δύο άξονες).	$I_x = I_y = I_z = I_\omega = \frac{\alpha^4}{12}$
			Οι ευθείες των διαγωνίων (δύο άξονες).	
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (άπειροι άξονες).	$I_x = I_y = \ldots = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Η ευθεία του μεγάλου άξονα.	$I_x = \frac{\pi \cdot \beta \cdot \alpha^3}{4}$
			Η ευθεία του μικρού άξονα.	$I_y = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta^3}{4}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Κάθετος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου.	$I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$
			Παράλληλος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$I_x = 0{,}006875 \cdot D^4$

Λύση.

1) Από τον πίνακα 3.3.1 γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου I_1 ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 1) ισούται με:

$$I_1 = \frac{\alpha \cdot \beta^3}{12} = \frac{4\ \text{cm} \cdot (5\ \text{cm})^3}{12} = 41{,}67\ \text{cm}^4.$$

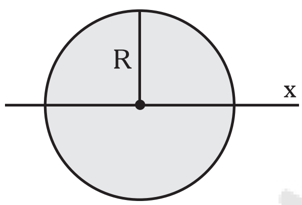
2) Από τον πίνακα 3.3.1 γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου I_2 ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 2) ισούται με:

$$I_2 = \frac{\beta \cdot \alpha^3}{12} = \frac{5\ \text{cm} \cdot (4\ \text{cm})^3}{12} = 26{,}67\ \text{cm}^4.$$

Επιβεβαιώνεται ότι οι ροπές αδράνειας του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του.

Παράδειγμα 6.

Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής του σχήματος 3.3η, ώστε να παρουσιάζει ροπή αδράνειας ίση με $I_x = 12{,}56\ cm^4$ ως προς τον άξονα x που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου;



Σχ. 3.3η

Λύση.

Από τον πίνακα 3.3.1 γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας του κύκλου ως προς τον άξονα x που διέρχεται από το κέντρο του δίνεται από τη σχέση $I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$, όπου $D = 2 \cdot R$ είναι η διάμετρος του κύκλου. Λύνοντας ως προς τη διάμετρο έχομε:

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \Leftrightarrow D^4 = \frac{64 \cdot I_x}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I_x}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 12{,}56\ cm^4}{\pi}} = 4\ cm.$$

Άρα, η ακτίνα του κύκλου πρέπει να είναι

$$R = \frac{D}{2} = \frac{4\ cm}{2} = 2\ cm.$$

Ο προσδιορισμός της ροπής αδράνειας επιφανειών που έχουν σύνθετα σχήματα πραγματοποιείται με διάφορες μεθόδους, μία από τις οποίες παρουσιάζομε στην παράγραφο 3.3.4.

3.3.3 Παράλληλη μετατόπιση αξόνων αδράνειας.

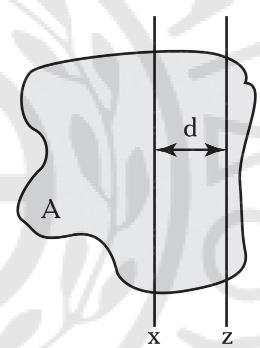
Ο πίνακας 3.3.1 παρουσιάζει τη ροπή αδράνειας απλών σχημάτων ως προς κάποιους συγκεκριμένους άξονες, οι οποίοι είναι κεντροβαρικοί και στη συντριπτική πλειοψηφία τους αποτελούν άξονες συμμετρίας των σχημάτων.

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να προσδιορίσομε τη ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα που δεν είναι κάποιος από τους κεντροβαρικούς, αλλά τις περισσότερες φορές είναι παράλληλος κάποιου απ' αυτούς (σχ. 3.3θ). Απάντηση στο πρόβλημα αυτό μας δίνει η ακόλουθη ιδιότητα, η οποία είναι γνωστή ως ***Θεώρημα του Steiner***:

Αν η ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας A ως προς έναν άξονα x είναι I_x, η ροπή αδράνειας της εν λόγω επιφάνειας ως προς έναν άξονα z που είναι παράλληλος στον άξονα x και απέχει από αυτόν απόσταση d δίνεται από τη σχέση:

$$I_z = I_x + A \cdot d^2. \tag{3.14}$$

Δηλαδή, το Θεώρημα του Steiner μας επιτρέπει να υπολογίζομε πολύ εύκολα τη ροπή αδράνειας ως προς οποιονδήποτε άξονα που είναι παράλληλος σε κάποιον απ' τους άξονες αδράνειας, για τους οποίους η ροπή αδράνειας είναι γνωστή από πίνακες. Το παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζει την εφαρμογή του Θεωρήματος του Steiner.

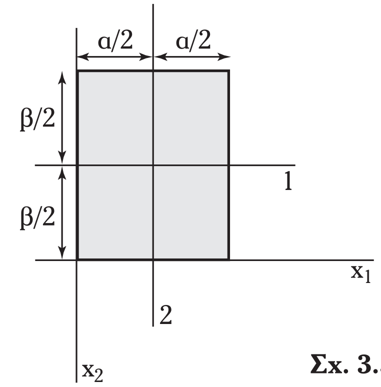


Σχ. 3.3θ
Παράλληλη μετατόπιση.

Παράδειγμα 7.

Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου του παραδείγματος 5 ως προς τους ακόλουθους άξονες:

1) Τον άξονα x_1 που συμπίπτει με τη μικρή πλευρά του ορθογωνίου (σχ. 3.3ι).



Σχ. 3.3ι

2) Τον άξονα x_2 που συμπίπτει με τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου (σχ. 3.3ι).

Σχολιάστε τη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (1) και (2) του παρόντος παραδείγματος και των ερωτημάτων (1) και (2) του παραδείγματος 5.

Λύση.

Από το παράδειγμα 5 για τους άξονες 1 και 2 έχομε:

$$I_1 = 41{,}67\ \text{cm}^4 \text{ και } I_2 = 26{,}67\ \text{cm}^4.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ισούται με:

$$A = \alpha \cdot \beta = 4\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = 20\ \text{cm}^2.$$

1) Ο άξονας x_1 είναι παράλληλος στον άξονα 1 (βλ. παράδ. 5) και απέχει από αυτόν απόσταση $\beta/2$. Έτσι, η ροπή αδράνειας I_{x_1} του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x_1 υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Steiner:

$$I_{x_1} = I_1 + A \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 =$$

$$= 41{,}67\ \text{cm}^4 + 20\ \text{cm}^2 \cdot \left(\frac{5\ \text{cm}}{2}\right)^2 = 166{,}67\ \text{cm}^4.$$

2) Ο άξονας x_2 είναι παράλληλος στον άξονα 2 και απέχει από αυτόν απόσταση $\alpha/2$. Έτσι, η ροπή αδράνειας I_{x_2} του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x_2 υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Steiner:

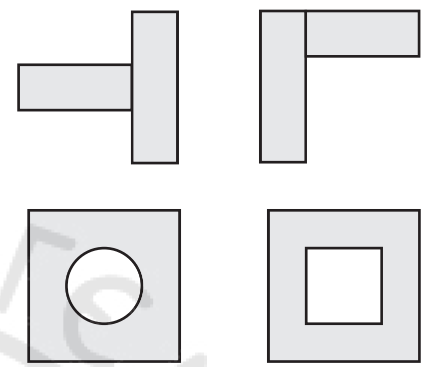
$$I_{x_2} = I_2 + A \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= 26{,}67\ \text{cm}^4 + 20\ \text{cm}^2 \cdot \left(\frac{4\ \text{cm}}{2}\right)^2 = 106{,}67\ \text{cm}^4.$$

Οι τέσσερεις ροπές αδράνειας ως προς τέσσερεις διαφορετικούς άξονες που υπολογίζονται στα δύο παραδείγματα, είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τον άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται. Η επιλογή διαφορετικού άξονα οδηγεί γενικά σε διαφορετική ροπή αδράνειας.

3.3.4 Υπολογισμός ροπών αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων, όπως αυτά του σχήματος 3.3ια, στηρίζεται στην ανάλυσή τους σε απλά σχήματα (τετράγωνα, ορθογώνια κ.λπ.) και στη συνέχεια στον συνδυασμό των αποτελεσμάτων των απλών σχημάτων χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Steiner. Η ροπή αδράνειας των απλών σχημάτων ως προς τους κυρίους άξονες αδράνειάς τους είναι γνωστή.



Σχ. 3.3ια
Παραδείγματα συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Καθένα από τα απλά σχήματα, έχει εμβαδόν A_i και ροπή αδράνειας I_i ως προς άξονα x_i, όπου ο δείκτης $i = 1, 2, ..., N$ αριθμεί τα N απλά σχήματα από τα οποία αποτελείται το σύνθετο σχήμα. Κάθε άξονας x_i είναι παράλληλος του άξονα z ως προς τον οποίο πρέπει να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος. Εάν d_i είναι η απόσταση του άξονα x_i από τον z, η ροπή αδράνειας $I_{z,i}$ κάθε απλού σχήματος ως προς τον z δίνεται από την ακόλουθη σχέση, σύμφωνα με το Θεώρημα του Steiner:

$$I_{z,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2.$$

Η ροπή αδράνειας I_z του σύνθετου σχήματος ως προς τον άξονα z προκύπτει από το άθροισμα των ροπών αδράνειας $I_{z,i}$ όλων των απλών σχημάτων. Δηλαδή ισχύει:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} I_{z,i} \Leftrightarrow I_z = \sum_{i=1}^{N} (I_i + A_i \cdot d_i^2) \ . \quad (3.15)$$

Η σχέση (3.15) μάς οδηγεί στην ανάπτυξη μιας ***αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων***, η οποία παρουσιάζεται στον πίνακα 3.3.2.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου διευκολύνεται σημαντικά με την καταγραφή των ενδιαμέσων αποτελεσμάτων σε πίνακα, ο οποίος έχει τη μορφή του πίνακα 3.3.3.

Πίνακας 3.3.2
Αναλυτική μέθοδος υπολογισμού ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

1) Χωρίζομε το σύνθετο γεωμετρικό σχήμα (σύνθετη επιφάνεια) σε απλά σχήματα (απλές επιφάνειες).
2) Υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας I_i κάθε απλού σχήματος ως προς έναν άξονά του x_i, που είναι παράλληλος στον άξονα z.
3) Υπολογίζομε την απόσταση d_i μεταξύ του άξονα x_i κάθε απλού σχήματος και του άξονα z.
4) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Steiner, υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας $I_{z,i}$ κάθε απλού σχήματος ως προς τον άξονα z.
5) Προσθέτομε τις ροπές αδράνειας $I_{z,i}$ όλων των απλών σχημάτων ως προς τον άξονα z και βρίσκομε το άθροισμά τους $\sum_{i=1}^{N} I_{z,i}$. Το άθροισμα αυτό αντιστοιχεί στη ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος.

Πίνακας 3.3.3
Καταγραφή αποτελεσμάτων της αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων.

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Ροπή αδράνειας απλού σχήματος I_i ως προς άξονα x_i***	***Απόσταση d_i μεταξύ αξόνων x_i και z***	$I_{z,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2$
1				
2				
....				
N				
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{N} A_i$	–	–	$I_z = \sum_{i=1}^{N} I_{z,i}$

Στον πίνακα γράφομε το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε απλού σχήματος, τη ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα x_i, την απόσταση d_i του άξονα x_i από τον z, τη ροπή αδράνειας κάθε απλού σχήματος ως προς τον άξονα z, καθώς και τα αθροίσματα που ορίζει η μέθοδος.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσομε τα εξής:

1) Το σύνθετο σχήμα μπορεί να μην προκύπτει εύκολα με προσθέσεις απλών σχημάτων. Αντίθετα, μπορεί να προκύπτει πολύ πιο εύκολα με προσθέσεις και αφαιρέσεις απλών σχημάτων. Η αναλυτική μέθοδος που περιγράψαμε ανωτέρω εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή, αρκεί να θυμόμαστε ότι στις αφαιρέσεις οι ροπές αδράνειας των σχημάτων λαμβάνονται με αρνητικό πρόσημο στους υπολογισμούς.

2) Είναι πιθανό να υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι, με τους οποίους ένα σύνθετο σχήμα μπορεί να αναλυθεί σε απλά. Ωστόσο, η ροπή αδράνειας ως προς συγκεκριμένο άξονα δεν εξαρτάται από τον τρόπο αναλύσεως του σύνθετου σχήματος σε απλά. Όλοι οι τρόποι οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα για τη ροπή αδράνειας ως προς συγκεκριμένο άξονα.

Η εφαρμογή της ανωτέρω μεθόδου υπολογισμού της ροπής αδράνειας συνθέτων γεωμετρικών σχημάτων παρουσιάζεται αναλυτικά στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 8.

Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του σχήματος «πλάγιο Τ» που απεικονίζεται στο σχήμα 3.3ιβ(α), ως προς τον εικονιζόμενο άξονα x. Δίνονται $\alpha = 2$ cm και $\beta = 4$ cm.

Λύση.

Το σχήμα «Πλάγιο Τ» είναι ένα σύνθετο σχήμα και αποτελείται από δύο ορθογώνια.

Το πρώτο απεικονίζεται στο σχήμα 3.3ιβ(β) και έχει μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β. Άρα το εμβαδόν του είναι $A_1 = α \cdot β$. Ο άξονας x είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από τον πίνακα 3.3.1 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x ισούται με:

$$I_1 = \frac{β \cdot α^3}{12}.$$

Το δεύτερο ορθογώνιο απεικονίζεται στο σχήμα 3.3ιβ(γ) και έχει μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β. Άρα το εμβαδόν του είναι $A_2 = α \cdot β$. Ο άξονας x είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από τον πίνακα 3.3.1 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα x ισούται με:

$$I_2 = \frac{α \cdot β^3}{12}.$$

Η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.3.4.

Σημειώνεται ότι δεν χρειάστηκε να εφαρμόσομε το Θεώρημα του Steiner, καθώς ο άξονας x ήταν κύριος άξονας αδράνειας και για τα δύο απλά σχήματα που αποτελούν το σύνθετο σχήμα «Πλάγιο Τ».

Άρα, η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος «Πλάγιο Τ» ισούται με:

$$I_x = \frac{α \cdot β \cdot \left(α^2 + β^2\right)}{12} =$$

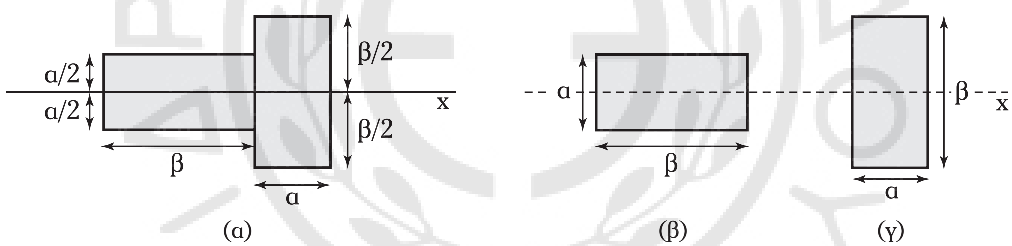
$$= \frac{2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot \left(2^2\text{cm}^2 + 4^2\text{cm}^2\right)}{12} = 13{,}33\text{ cm}^4.$$

Παράδειγμα 9.

Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της τετραγωνικής κοίλης διατομής που απεικονίζεται στο σχήμα 3.3ιγ(α) ως προς τον εικονιζόμενο άξονα z. Δίνονται $α = 4$ cm και $R = 1$ cm.

Λύση.

Το σχήμα 3.3ιγ(α) είναι σύνθετο. Προκύπτει από την αφαίρεση δύο απλών σχημάτων και συγκεκριμένα από την αφαίρεση ενός κύκλου από ένα τετράγω-



Σχ. 3.3ιβ
(α) Το σχήμα «πλάγιο Τ». (β) Το πρώτο ορθογώνιο. (γ) Το δεύτερο ορθογώνιο.

Πίνακας 3.3.4
Υπολογισμός ροπής αδράνειας σύνθετου σχήματος παραδείγματος 8.

Απλό σχήμα	*Εμβαδόν απλού σχήματος A_i*	*Ροπή αδράνειας απλού σχήματος I_i ως προς άξονα x_i*	*Απόσταση d_i μεταξύ αξόνων x_i και x*	*$I_{x,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2$*
1	$A_1 = α \cdot β$	$I_1 = \frac{β \cdot α^3}{12}$	0	$I_{x,1} = \frac{β \cdot α^3}{12}$
2	$A_2 = α \cdot β$	$I_2 = \frac{α \cdot β^3}{12}$	0	$I_{x,2} = \frac{α \cdot β^3}{12}$
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{2} A_i = 2 \cdot α \cdot β$	–	–	$I_x = \sum_{i=1}^{2} I_{x,i} = \frac{α \cdot β \cdot \left(α^2 + β^2\right)}{12}$

νο. Το τετράγωνο απεικονίζεται στο σχήμα 3.3ιγ(β) και έχει πλευρά α και εμβαδόν $A_1 = α^2$. Ο εικονιζόμενος άξονας x είναι παράλληλος στην πλευρά του τετραγώνου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του. Απ' τον πίνακα 3.3.1 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του τετραγώνου ως προς τον άξονα x ισούται με:

$$I_{x,1} = \frac{α^4}{12}.$$

Ο άξονας z είναι παράλληλος στον άξονα x και απέχει απόσταση από αυτόν ίση με $α/2 = 2$ cm. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Steiner υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας του τετραγώνου ως προς τον άξονα z:

$$I_{z,1} = I_{x,1} + A_1 \cdot \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \frac{α^4}{12} + α^2 \cdot \frac{α^2}{4} = \frac{α^4}{3}.$$

Ο κύκλος απεικονίζεται στο σχήμα 3.3ιγ(γ) και έχει ακτίνα R (διάμετρο D = 2R) και εμβαδόν $A_2 = π \cdot R^2$. Ο άξονας x διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Από τον πίνακα 3.3.1 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του κύκλου ως προς τον άξονα x ισούται με:

$$I_{x,2} = \frac{π \cdot D^4}{64} = \frac{π \cdot R^4}{4}.$$

Ο άξονας z είναι παράλληλος στον άξονα x και απέχει απόσταση από αυτόν ίση με $α/2 = 2$ cm. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Steiner υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας του κύκλου ως προς τον άξονα z:

$$I_{z,2} = I_{x,2} + A_2 \cdot \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \frac{π \cdot R^4}{4} + π \cdot R^2 \cdot \frac{α^2}{4} = \frac{π \cdot R^2 \cdot (α^2 + R^2)}{4}.$$

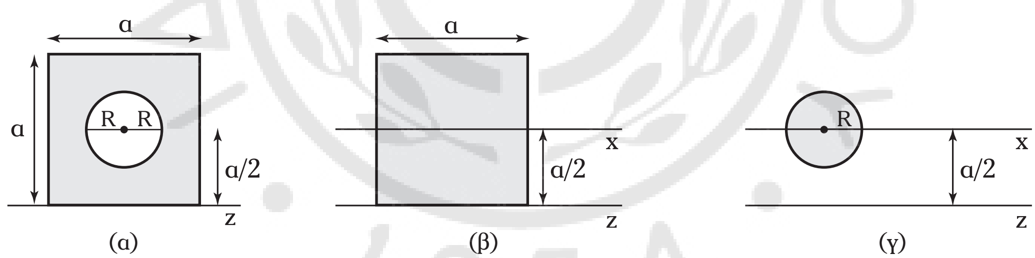
Η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 3.3.5.

Άρα, η ροπή αδράνειας του σύνθετου σχήματος είναι:

$$I_z = I_{z,1} - I_{z,2} = \frac{α^4}{3} - \frac{π \cdot R^2 \cdot (α^2 + R^2)}{4} = \frac{(4\ cm)^4}{3} - \frac{π \cdot (1\ cm)^2 \cdot \left((4\ cm)^2 + (1\ cm)^2\right)}{4} = 71,99\ cm^4.$$

Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας τετραγωνικής διατομής με πλευρά α = 54 mm ως προς τους ακόλουθους άξονες:*



Σχ. 3.3ιγ
(α) Το σχήμα του παραδείγματος 9. (β) Το τετράγωνο. (γ) Ο κύκλος.

Πίνακας 3.3.5
Υπολογισμός ροπής αδράνειας σύνθετου σχήματος παραδείγματος 9.

Απλό σχήμα	***Εμβαδόν απλού σχήματος A_i***	***Ροπή αδράνειας απλού σχήματος I_i ως προς άξονα x_i***	***Απόσταση d_i μεταξύ αξόνων x_i και x***	***$I_{x,i} = I_i + A_i \cdot d_i^2$***
1	$A_1 = α^2$	$I_{x,1} = \frac{α^4}{12}$	$\frac{α}{2}$	$I_{z,1} = \frac{α^4}{3}$
2	$A_2 = π \cdot R^2$	$I_{x,2} = \frac{π \cdot R^4}{4}$	$\frac{α}{2}$	$I_{z,2} = \frac{π \cdot R^2 \cdot (α^2 + R^2)}{4}$
Σύνολο	$A_1 - A_2$	–	–	$I_z = I_{z,1} - I_{z,2}$

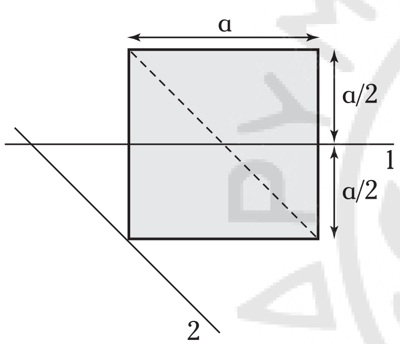
α) Τον άξονα που διέρχεται από μία πλευρά του τετραγώνου.

β) Τον άξονα που διέρχεται από μία διαγώνιο του τετραγώνου.

2. *Ποια πρέπει να είναι η πλευρά τετραγωνικής διατομής για να έχει ροπή αδράνειας ίση με $I = 6{,}75\ cm^4$ ως προς άξονα που διέρχεται από μία πλευρά του τετραγώνου;*

3. *Ορθογώνιο έχει λόγο πλευρών $\beta/\alpha = 1{,}2$. Να υπολογιστούν οι πλευρές α και β του ορθογωνίου, ώστε να έχει ροπή αδράνειας ίση με $I = 90\ cm^4$ ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.*

4. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας για την τετραγωνική διατομή της ασκήσεως 1 ως προς τους ακόλουθους άξονες που απεικονίζονται στο σχήμα 3.3ιδ:*

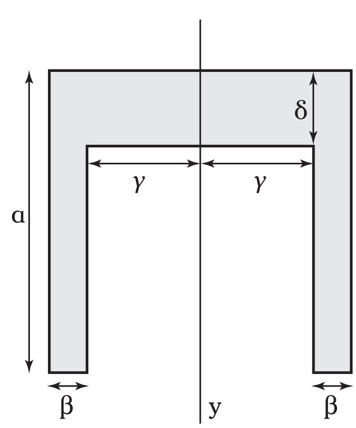


Σχ. 3.3ιδ

α) Τον άξονα που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου (άξονας 1).

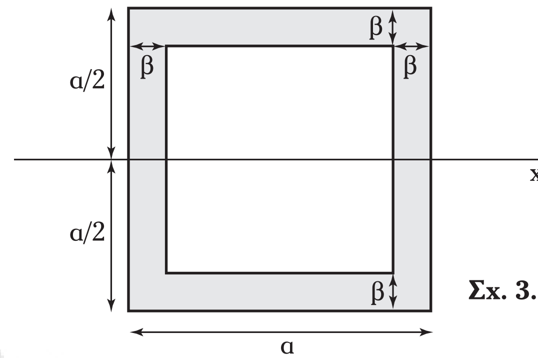
β) Τον άξονα που είναι παράλληλος σε μία διαγώνιο του τετραγώνου και διέρχεται από μια κορυφή του (άξονας 2).

5. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της «διατομής Π» που εικονίζεται στο σχήμα 3.3ιε ως προς άξονα y. Δίνονται $\alpha = 8\ cm$, $\beta = 1\ cm$, $\gamma = 3\ cm$ και $\delta = 2\ cm$.*



Σχ. 3.3ιε

6. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας τετραγωνικής κοίλης διατομής που εικονίζεται στο σχήμα 3.3ιστ ως προς τον άξονα x. Δίνονται $\alpha = 4\ cm$ και $\beta = 1\ cm$.*



Σχ. 3.3ιστ

3.4 Ακτίνα αδράνειας.

Ακτίνα αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς έναν άξονα x ονομάζομε την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου της ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον άξονα x προς το εμβαδόν της.

Δηλαδή, η ακτίνα αδράνειας R_{I_x} μιας επιφάνειας με εμβαδόν Α και ροπή αδράνειας I_x ως προς έναν άξονα x παρέχεται από τη σχέση:

$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}}\,. \tag{3.16}$$

Η ακτίνα αδράνειας έχει διαστάσεις μήκους. Πρέπει να σημειώσομε ότι η ακτίνα αδράνειας εξαρτάται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδράνειάς της που εισάγεται στον αριθμητή της σχέσεως (3.16). Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της ακτίνας αδράνειας R_{I_x} τον δείκτη x που δείχνει τον άξονα ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειας υπολογίζεται.

3.4.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η ακτίνα αδράνειας;

Η γνώση της ακτίνας αδράνειας είναι απαραίτητη για τη μελέτη του λυγισμού, τον οποίο παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 7. Συγκεκριμένα, η ακτίνα αδράνειας χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό του μεγέθους της λυγηρότητας μιας ράβδου. Η λυγηρότητα μας δείχνει την ευαισθησία της ράβδου στο λυγισμό και χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των τάσεων που είναι κρίσιμες για την εμφάνιση του λυγισμού.

3.4.2 Πώς υπολογίζεται η ακτίνα αδράνειας;

Ο υπολογισμός της ακτίνας αδράνειας μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.16). Καταρχάς χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιον άξονα x πρέπει να υπολογίσομε τη ροπή αδράνειας. Έπειτα υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτό, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.3. Στη συνέχεια υπολογίζομε το εμβαδόν Α της επιφάνειας. Τέλος, εφαρμόζομε τη σχέση (3.16) και υπολογίζομε την ακτίνα αδράνειας. Η παραπάνω διαδικασία ισχύει τόσο για τα απλά, όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Για παράδειγμα, το ορθογώνιο *(με μικρή πλευρά α και μεγάλη β)* έχει εμβαδόν:

$$A = \alpha \cdot \beta. \tag{3.17}$$

Η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση (3.16), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.17) και (3.6):

$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \beta^3}{12 \cdot \alpha \cdot \beta}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\beta. \tag{3.18}$$

Η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση (3.16), αντικαθιστώντας σε αυτή τις σχέσεις (3.17) και (3.7):

$$R_{I_y} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\beta \cdot \alpha^3}{12 \cdot \alpha \cdot \beta}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha. \tag{3.19}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.18) και (3.19) διαπιστώνομε ότι οι ακτίνες αδράνειας του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ακτίνα αδράνειας.

Η ***ακτίνα αδράνειας επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς κεντροβαρικούς άξονές*** τους συνοπτικά παρουσιάζεται στον πίνακα 3.4.

Παράδειγμα 10.

Να υπολογιστεί η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου του παραδείγματος 5 ως προς τους ακόλουθους άξονες:

1) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 1).

2) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 2).

Πώς σχολιάζετε τη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ των ερωτημάτων (1) και (2);

Λύση.

1) Από τον πίνακα 3.4 έχομε ότι η ακτίνα αδράνειας του ορθογωνίου R_{I_1} ως προς τον άξονα 1 ισούται με:

$$R_{I_1} = \frac{1}{\sqrt{12}}\beta = \frac{1}{\sqrt{12}} 5 \text{ cm} = 1{,}44 \text{ cm}.$$

2) Από τον πίνακα 3.4 έχομε ότι η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου R_{I_2} ως προς τον άξονα 2 ισούται με:

$$R_{I_2} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot 4 \text{ cm} = 1{,}15 \text{ cm}.$$

Οι ακτίνες αδράνειας του ορθογωνίου ως προς τους δύο άξονες συμμετρίας του είναι διαφορετικές γιατί υπολογίζονται ως προς διαφορετικούς άξονες συμμετρίας.

Παράδειγμα 11.

Για το σχήμα «πλάγιο Τ» του παραδείγματος 8 να υπολογίσετε την ακτίνα αδράνειάς του ως προς τον άξονα x (σχ. 3.3ιβ).

Λύση.

Από το παράδειγμα 8 γνωρίζομε ότι το εμβαδόν του σύνθετου σχήματος «Πλάγιο Τ» ισούται με $A = 2 \cdot \alpha \cdot \beta = 2 \cdot 2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$ και η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα x ισούται με $I_x = 13{,}33 \text{ cm}^4$. Συνεπώς, η ακτίνα αδράνειας του σχήματος ως προς τον άξονα x ισούται με:

$$R_{I_x} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{13{,}33 \text{ cm}^4}{16 \text{ cm}^2}} = 0{,}91 \text{ cm}.$$

3.5 Ροπή αντιστάσεως.

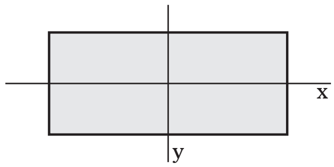
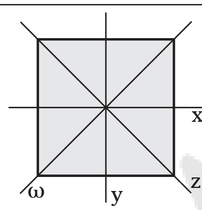
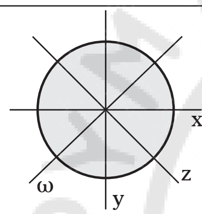
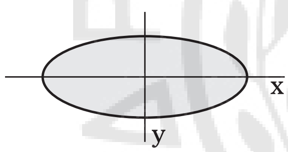
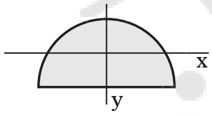
Ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας ως προς άξονα x ονομάζομε το πηλίκον της ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον συγκεκριμένο άξονα προς την απόσταση των ακραίων σημείων της επιφάνειας από τον εν λόγω άξονα.

Ας θεωρήσομε την επιφάνεια του σχήματος 3.5α και τον άξονα x. Στο σχήμα απεικονίζεται η απόσταση d_1 του ακραίου σημείου της επιφάνειας από τον άξονα x.

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς τον άξονα x, $W_{x,1}$ της επιφάνειας του σχήματος 3.5α με ροπή αδράνειας I_x (ως προς τον άξονα x), παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

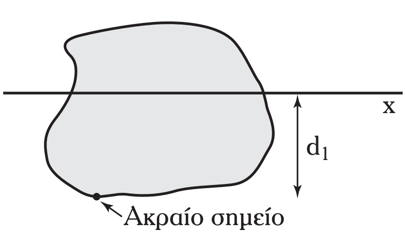
$$W_{x,1} = \frac{I_x}{d_1}. \tag{3.20}$$

Πίνακας 3.4
Ακτίνα αδράνειας επιφανειών απλών σχημάτων ως προς κεντροβαρικούς άξονές τους.

Σχήμα		Χαρακτηριστικά μεγέθη	Κεντροβαρικός άξονας υπολογισμού της ακτίνας αδράνειας	Ακτίνα αδράνειας
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Παράλληλος στη μικρή πλευρά.	$R_{I_x} = \frac{1}{\sqrt{12}}\beta$
			Παράλληλος στη μεγάλη πλευρά.	$R_{I_y} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Παράλληλοι στις πλευρές (δύο άξονες).	$R_{I_x} = R_{I_y} =$
			Οι ευθείες των διαγωνίων (δύο άξονες).	$= R_{I_z} = R_{I_\omega} = \frac{1}{\sqrt{12}}\alpha$
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (άπειροι άξονες).	$R_{I_x} = R_{I_y} = \ldots = \frac{D}{4}$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Η ευθεία του μεγάλου άξονα.	$R_{I_x} = \frac{\alpha}{2}$
			Η ευθεία του μικρού άξονα.	$R_{I_y} = \frac{\beta}{2}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Κάθετος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου.	$R_{I_y} = \frac{1}{4}D$
			Παράλληλος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$R_{I_x} = 0{,}1323 \cdot D$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της ροπής αντιστάσεως*** στο Διεθνές Σύστημα και στο Τεχνικό Σύστημα είναι το $1\,m^3$, στο C.G.S. το $1\,cm^3$ και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το $1\,ft^3$.

Πρέπει να σημειώσομε ότι η ροπή αντιστάσεως εξαρτάται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι αφενός η ροπή



Σχ. 3.5α
Ροπή αντιστάσεως.

αδράνειας που εισάγεται στον αριθμητή της σχέσεως (3.20) και αφετέρου η απόσταση των ακραίων σημείων που εισάγεται στον παρονομαστή της σχέσεως (3.20) εξαρτώνται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζονται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό της ροπής αντιστάσεως τον δείκτη x που δείχνει τον άξονα ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειας και οι αποστάσεις των ακραίων σημείων υπολογίζονται.

Στην περίπτωση που έχομε δύο ακραία σημεία με αποστάσεις $d_1 = d_2 = d$, η ροπή αντιστάσεως είναι:

$$W_{x,1} = W_{x,2} = \frac{I_x}{d}. \qquad (3.21)$$

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι το πλήθος των ακραίων σημείων μίας επιφάνειας εξαρτάται από το είδος της επιφάνειας. Τα ακραία σημεία μπορεί να είναι ένα ή δύο ή περισσότερα ή ακόμη και άπειρα, όπως θα δούμε παρακάτω, ανάλογα με την επιφάνεια.

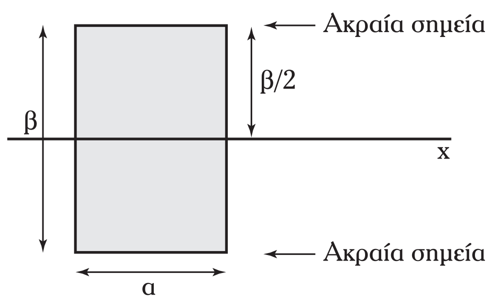
3.5.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η ροπή αντιστάσεως;

Η γνώση της ροπής αντιστάσεως είναι απαραίτητη για τη μελέτη των καταπονήσεων σωμάτων, τις οποίες παρουσιάζομε στα Κεφάλαια 5 και 8. Για παράδειγμα, η ροπή αντιστάσεως χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό των τάσεων λειτουργίας, καθώς και των παραμορφώσεων των σωμάτων που καταπονούνται σε κάμψη. Έτσι, η γνώση της ροπής αντιστάσεως μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές σωμάτων, ώστε αυτά να αντέχουν καταπονούμενα σε κάμψη και να υφίστανται τις μικρότερες παραμορφώσεις κατά την καταπόνησή τους.

3.5.2 Πώς υπολογίζεται η ροπή αντιστάσεως;

Ο υπολογισμός της ροπής αντιστάσεως μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.20). Καταρχάς χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιον άξονα x πρέπει να υπολογίσομε τη ροπή αδράνειας. Έπειτα υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον άξονα αυτό, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.3. Στη συνέχεια υπολογίζομε τις αποστάσεις των ακραίων σημείων της επιφάνειας από τον άξονα x. Τέλος, εφαρμόζομε τη σχέση (3.20) και υπολογίζομε τη ροπή αντιστάσεως. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται τόσο για τα απλά όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Για παράδειγμα στο ***ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη β), όλα τα σημεία των μικρών πλευρών του αποτελούν ακραία σημεία του ως προς τον άξονα συμμετρίας x που είναι παράλληλος στις μικρές πλευρές του (σχ. 3.5β). Οι αποστάσεις τους από τον εν λόγω άξονα είναι:



Σχ. 3.5β
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του ορθογωνίου από τον άξονα x.

$$d_1 = d_2 = \ldots = \frac{\beta}{2}. \qquad (3.22)$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς τον άξονα αυτό δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (3.22) και (3.6):

$$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = \frac{I_x}{d_1} = \frac{\dfrac{\alpha \cdot \beta^3}{12}}{\dfrac{\beta}{2}} = \frac{1}{6}\alpha \cdot \beta^2. \qquad (3.23)$$

Ομοίως, τα ακραία σημεία του ορθογωνίου ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του, είναι όλα τα σημεία των μεγάλων πλευρών του. Οι αποστάσεις τους από τον εν λόγω άξονα είναι:

$$d_1 = d_2 = \ldots = \frac{\alpha}{2}. \qquad (3.24)$$

Έτσι, η ροπή αντιστάσεως ως προς τον άξονα αυτό δίνεται από τη σχέση (3.20), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.24) και (3.7):

$$W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \frac{I_y}{d_1} = \frac{\dfrac{\beta \cdot \alpha^3}{12}}{\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6}\beta \cdot \alpha^2. \qquad (3.25)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.23) και (3.25) διαπιστώνομε ότι οι ροπές αντιστάσεως του ορθογωνίου είναι διαφορετικές για τους δύο άξονες συμμετρίας του. Συνεπώς, έχει μεγάλη σημασία ως προς ποιον άξονα υπολογίζεται η ροπή αντιστάσεως.

Η ***ροπή αντιστάσεως επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς κεντροβαρικούς άξονές τους*** παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.5.

Παράδειγμα 12.

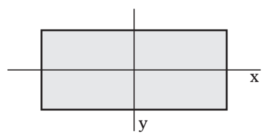
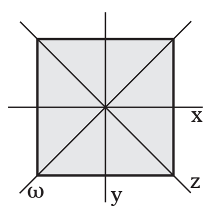
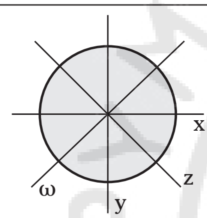
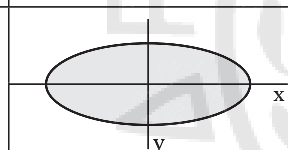
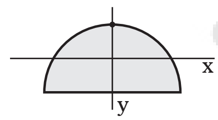
Να υπολογιστεί η ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου του παραδείγματος 5 (πλευρές α = 4 cm και β = 5 cm) ως προς τους ακόλουθους άξονες:

1) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 1).

2) Τον άξονα που είναι παράλληλος στη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του (άξονας 2).

Πίνακας 3.5

Ροπή αντιστάσεως επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς κεντροβαρικούς άξονές τους.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Κεντροβαρικός άξονας υπολογισμού της ροπής αντιστάσεως***	***Ροπή αντιστάσεως***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Παράλληλος στη μικρή πλευρά.	$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = \dfrac{\alpha \cdot \beta^2}{6}$
			Παράλληλος στη μεγάλη πλευρά.	$W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \dfrac{\beta \cdot \alpha^2}{6}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Παράλληλοι στις πλευρές (δύο άξονες).	$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \dfrac{\alpha^3}{6}$
			Οι ευθείες των διαγωνίων (δύο άξονες).	$W_{z,1} = W_{z,2} = W_{\omega,1} = W_{\omega,2} = \dfrac{\alpha^3}{6\sqrt{2}}$
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (άπειροι άξονες).	$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \dfrac{\pi}{32} D^3$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Η ευθεία του μεγάλου άξονα.	$W_{x,1} = W_{x,2} = \dfrac{\pi}{8}\ \beta \cdot \alpha^2$
			Η ευθεία του μικρού άξονα.	$W_{y,1} = W_{y,2} = \dfrac{\pi}{8} \alpha \cdot \beta^2$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Κάθετος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο του ημικυκλίου.	$W_{y,1} = W_{y,2} = \dfrac{\pi}{64} D^3$
			Παράλληλος στη διάμετρο και διέρχεται από το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$W_{x,1} = 0{,}02390 \cdot D^3$

Λύση.

1) Από τον πίνακα 3.5 έχομε ότι η ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς τον άξονα 1 ισούται με:

$$W_{x,1} = W_{x,2} = \ldots = \frac{\alpha \cdot \beta^2}{6} = \frac{4\,\text{cm} \cdot 5^2\,\text{cm}^2}{6} = 16{,}67\,\text{cm}^3.$$

2) Από τον πίνακα 3.5 έχομε ότι η ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς τον άξονα 2 ισούται με:

$$W_{y,1} = W_{y,2} = \ldots = \frac{\beta \cdot \alpha^2}{6} = \frac{5\,\text{cm} \cdot 4^2\,\text{cm}^2}{6} = 13{,}33\,\text{cm}^3.$$

Παρατηρούμε ότι οι ροπές αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς τους δύο άξονες συμμετρίας του είναι διαφορετικές.

Ασκήσεις.

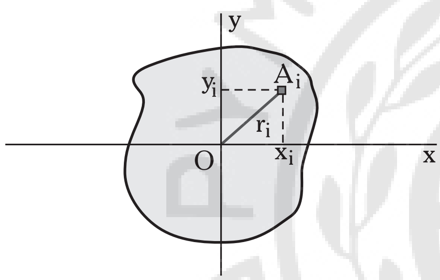
1. *Να υπολογιστεί η ακτίνα αδράνειας και η ροπή αντιστάσεως της τετραγωνικής διατομής της ασκήσεως 1 της παραγράφου 3.3 (σελ. 94) ως προς τους άξονες που αναφέρονται στην ίδια άσκηση.*

2. *Να υπολογιστεί η ακτίνα αδράνειας και η ροπή αντιστάσεως της διατομής της ασκήσεως 5 της παραγράφου 3.3 (σελ. 95) ως προς τον άξονα που αναφέρεται στην ίδια άσκηση.*

3. *Να υπολογίσετε την ακτίνα αδράνειας και τη ροπή αντιστάσεως της διατομής της ασκήσεως 6 της παραγράφου 3.3 (σελ. 95) ως προς τον άξονα που αναφέρεται στην ίδια άσκηση.*

3.6 Πολική ροπή αδράνειας.

Όπως αναφέραμε (παράγρ. 3.1), η πολική ροπή αδράνειας αποτελεί μία ακόμη από τις ιδιότητες των διατομών. Ας θεωρήσομε την επιφάνεια του σχήματος 3.6α και το σημείο O, στο οποίο τέμνονται οι κάθετοι άξονες x και y. Η επιφάνεια αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες A_i οι οποίες απέχουν απόσταση r_i από το σημείο O, που ονομάζεται πόλος.



Σχ. 3.6α
Επιφάνεια και το σημείο τομής O των αξόνων x και y.

Πολική ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς ένα σημείο O ονομάζομε το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών επιφανειών που απαρτίζουν την επιφάνεια επί το τετράγωνο της αποστάσεως των στοιχειωδών επιφανειών από το σημείο O.

Δηλαδή η πολική ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς το σημείο O παρέχεται από τη σχέση $I_O = \sum_i A_i \cdot r_i^2$. Όμως ισχύει ότι $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Επειδή $I_x = \sum_i A_i \cdot x_i^2$ και $I_y = \sum_i A_i \cdot y_i^2$ οι ροπές αδράνειας της επιφάνειας ως προς τους άξονες x και y που τέμνονται στο σημείο O, η πολική ροπή αδράνειας I_O της επιφάνειας παρέχεται από τη σχέση:

$$I_O = I_x + I_y. \qquad (3.26)$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της πολικής ροπής αδράνειας*** στο Διεθνές Σύστημα και στο Τεχνικό Σύστημα είναι το 1 m^4, στο C.G.S. το 1 cm^4 και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το 1 ft^4.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι η πολική ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη θέση του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στον συμβολισμό της πολικής ροπής αδράνειας I_O τον δείκτη O που δείχνει το σημείο, ως προς το οποίο υπολογίζεται. Εάν αλλάξει το σημείο, αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό μιας άλλης τιμής πολικής ροπής αδράνειας ως προς το νέο σημείο.

Τέλος, σημειώνομε ότι στο πλαίσιο της Αντοχής Υλικών μάς ενδιαφέρουν μόνο τα σημεία που περιέχονται στο επίπεδο των διατόμων. Στο εξής, όπου αναφερόμαστε σε σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται η πολική ροπή αδράνειας εννοούμε σημείο που περιέχεται στο επίπεδο της υπό εξέταση διατομής.

3.6.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η πολική ροπή αδράνειας;

Η γνώση της πολικής ροπής αδράνειας είναι απαραίτητη για τη μελέτη των καταπονήσεων σωμάτων σε στρέψη, τις οποίες παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 6. Συγκεκριμένα, η πολική ροπή αδράνειας χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό των μεγίστων τάσεων λειτουργίας, καθώς και των παραμορφώσεων των σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη. Έτσι, η γνώση της πολικής ροπής αδράνειας μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές των σωμάτων, ώστε αυτά να αντέχουν καταπονούμενα σε στρέψη και να υφίστανται τις μικρότερες παραμορφώσεις κατά την καταπόνησή τους.

3.6.2 Πώς υπολογίζεται η πολική ροπή αδράνειας;

Ο υπολογισμός της πολικής ροπής αδράνειας μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.26). Καταρχήν χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιο σημείο O πρέπει να την υπολογίσομε. Έπειτα προσδιορίζομε τους άξονες x και y που τέμνονται στο σημείο O και είναι κάθετοι μεταξύ τους. Ακολούθως υπολογίζομε τις ροπές αδράνειας I_x και I_y της επιφάνειας ως προς τους άξονες x και y, σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 3.3. Τέλος, υπολογίζομε την πολική ροπή αδράνειας προσθέτοντας τις δύο ροπές αδράνειας που υπολογίσαμε, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.26). Η ανωτέρω διαδικασία εφαρμόζεται τόσο για τα απλά όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

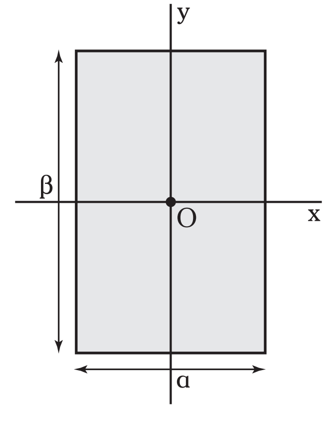
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον υπολογισμό της πολικής ροπής αδράνειας παρουσιάζουν τα σημεία που αποτελούν το κέντρο βάρους των απλών σχημάτων.

Τα σημεία αυτά είναι προφανώς σημεία τομείς των κεντροβαρικών αξόνων ως προς τους οποίους έχομε υπολογίσει τη ροπή αδράνειας (βλ. παράγρ. 3.3.2). Επίσης, στις περισσότερες περιπτώσεις τα σημεία αυτά είναι και σημεία συμμετρίας των απλών σχημάτων. Οι πολικές ροπές αδράνειας παρέχονται ως απλές συναρτήσεις των χαρακτηριστικών μεγεθών των απλών σχημάτων.

Για παράδειγμα, στο ***ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη β) το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του (σχ. 3.6β) είναι, όπως έχομε δει, το κέντρο βάρους του. Η πολική ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.26) αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.6) και (3.7):

$$I_O = I_x + I_y = \frac{\alpha \cdot \beta^3}{12} + \frac{\beta \cdot \alpha^3}{12} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2+\beta^2)}{12}. \tag{3.27}$$

Η πολική ροπή αδράνειας επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς το κέντρο βάρους τους παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.6.



Σχ. 3.6β
Σημείο τομής Ο των διαγωνίων ορθογώνιας επιφάνειας.

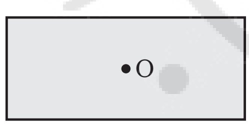
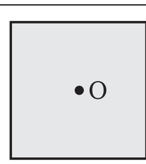
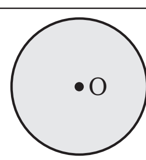
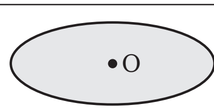
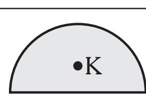
Παράδειγμα 13.

Να υπολογιστεί η πολική ροπή αδράνειας του ορθογωνίου του παραδείγματος 5 (πλευρές α = 4 cm και β = 5 cm) ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του Ο.

Λύση.

Από τον πίνακα 3.6 γνωρίζομε ότι η πολική ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως προς το σημείο τομής

Πίνακας 3.6
Πολική ροπή αδράνειας επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς το κέντρο βάρους τους.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Σημείο υπολογισμού της πολικής ροπής αδράνειας***	***Πολική ροπή αδράνειας***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Σημείο τομής των διαγωνίων.	$I_O = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2+\beta^2)}{12}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Σημείο τομής των διαγωνίων.	$I_O = \frac{\alpha^4}{6}$
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Το κέντρο του κύκλου.	$I_O = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Το κέντρο της ελλείψεως.	$I_O = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2+\beta^2)}{4}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$I_K = 0{,}0314 \cdot D^4$

των διαγωνίων του ισούται με:

$$I_O = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha^2+\beta^2)}{12} =$$

$$= \frac{4\ cm \cdot 5\ cm \cdot (4^2 cm^2 + 5^2 cm^2)}{12} = 68{,}33\ cm^4.$$

3.7 Πολική ροπή αντιστάσεως.

Η πολική ροπή αντιστάσεως ορίζεται κατ' αναλογία της ροπής αντιστάσεως. Συγκεκριμένα:

Πολική ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας ως προς σημείο O ονομάζομε το πηλίκο της πολικής ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς το σημείο O προς την απόσταση των ακραίων σημείων της επιφάνειας από το εν λόγω σημείο.

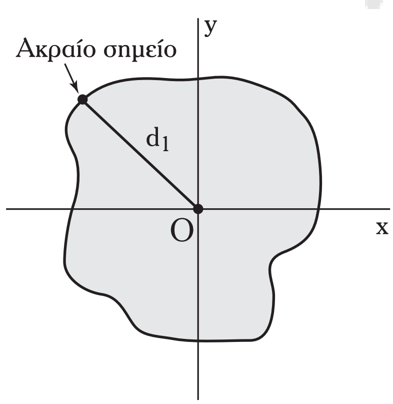
Ας θεωρήσομε την επιφάνεια του σχήματος 3.6α και το σημείο O, στο οποίο τέμνονται οι κάθετοι άξονες x και y. Στο σχήμα 3.7α απεικονίζεται η απόσταση d_1 του ακραίου σημείου της επιφάνειας από το σημείο O.

Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως $W_{O,1}$ της επιφάνειας του σχήματος 3.7α, ως προς το σημείο O, με πολική ροπή αδράνειας I_O παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W_{O,1} = \frac{I_O}{d_1}. \qquad (3.28)$$

Οι ***μονάδες μετρήσεως της πολικής ροπής αντιστάσεως*** στο Διεθνές Σύστημα και στο Τεχνικό Σύστημα είναι το $1\ m^3$, στο C.G.S. το $1\ cm^3$ και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το $1\ ft^3$.

Πρέπει να σημειώσομε ότι η πολική ροπή αντιστάσεως εξαρτάται από τη θέση του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι αφενός



Σχ. 3.7α
Η απόσταση του ακραίου σημείου της επιφάνειας από το σημείο τομής O των αξόνων x και y.

η πολική ροπή αδράνειας που εισάγεται στον αριθμητή της σχέσεως (3.28) και αφετέρου η απόσταση των ακραίων σημείων που εισάγεται στον παρονομαστή της σχέσεως (3.28) εξαρτώνται από τη θέση του σημείου O ως προς το οποίο υπολογίζονται. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε στον συμβολισμό της πολικής ροπής αντιστάσεως τον δείκτη O που δείχνει το σημείο αυτό.

Στην περίπτωση που το σημείο ως προς το οποίο γίνονται οι υπολογισμοί είναι τέτοιο, ώστε να έχομε δύο ακραία σημεία με αποστάσεις $d_1 = d_2 = d$, τότε η πολική ροπή αντιστάσεως είναι:

$$W_{O,1} = W_{O,2} = \frac{I_O}{d}. \qquad (3.29)$$

Τέλος, πρέπει να σημειώσομε ότι το πλήθος των ακραίων σημείων μιας επιφάνειας ως προς ένα σημείο O εξαρτάται από το είδος της επιφάνειας. Το πλήθος των ακραίων σημείων μπορεί να είναι ακόμη και άπειρο, όπως θα δούμε παρακάτω, ανάλογα με την επιφάνεια.

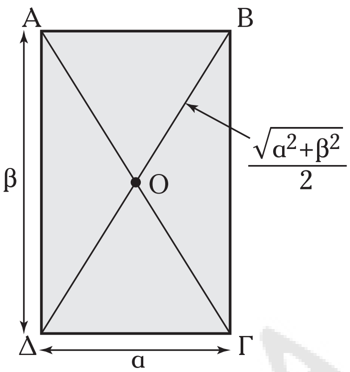
3.7.1 Γιατί μας ενδιαφέρει η πολική ροπή αντιστάσεως;

Η πολική ροπή αντιστάσεως χρησιμοποιείται για τη μελέτη των καταπονήσεων σωμάτων σε στρέψη, τις οποίες παρουσιάζομε στο Κεφάλαιο 6. Συγκεκριμένα, η πολική ροπή αντιστάσεως χρησιμοποιείται, όπως θα δούμε, για τον υπολογισμό των μεγίστων τάσεων λειτουργίας, καθώς και των παραμορφώσεων των σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη. Έτσι, η γνώση της πολικής ροπής αντιστάσεως μας βοηθά να προσδιορίζομε τις κατάλληλες διατομές των σωμάτων, ώστε αυτά να αντέχουν καταπονούμενα σε στρέψη και να υφίστανται τις μικρότερες παραμορφώσεις κατά την καταπόνησή τους.

3.7.2 Πώς υπολογίζεται η πολική ροπή αντιστάσεως;

Ο υπολογισμός της πολικής ροπής αντιστάσεως μίας επιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.28). Καταρχάς χρειάζεται να γνωρίζομε ως προς ποιο σημείο O πρέπει να υπολογίσομε την πολική ροπή αντιστάσεως. Έπειτα υπολογίζομε την πολική ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς το σημείο αυτό, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.6. Στη συνέχεια υπολογίζομε τις αποστάσεις των ακραίων σημείων της επιφάνειας από το σημείο O. Τέλος, εφαρμόζομε τη σχέση (3.28) και υπολογίζομε την πολική ροπή αντιστάσεως. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται τόσο για τα απλά, όσο και για τα σύνθετα σχήματα.

Για παράδειγμα, στο ***ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη β) τα ακραία σημεία του (σχ. 3.7β) ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του Ο είναι



Σχ. 3.7β
Οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του ορθογωνίου από το σημείο τομής των διαγωνίων του.

οι τέσσερεις κορυφές του Α, Β, Γ και Δ. Οι αποστάσεις τους από το σημείο Ο είναι:

$$d_A = d_B = d_\Gamma = d_\Delta = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \quad . \qquad (3.30)$$

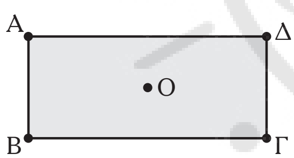
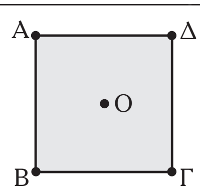
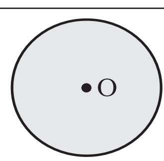
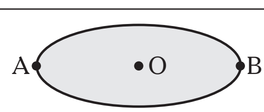
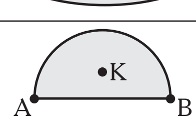
Έτσι, η πολική ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση (3.28), αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (3.27) και (3.30):

$$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{I_O}{d_A} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{12}}{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} = \frac{1}{6}\alpha\cdot\beta\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2} . \qquad (3.31)$$

Η ***πολική ροπή αντιστάσεως επιφανειών που έχουν απλά σχήματα ως προς το κέντρο βάρους τους*** παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 3.7.

Πίνακας 3.7
Πολική ροπή αντιστάσεως επιφανειών απλών σχημάτων ως προς το κέντρο βάρους τους.

Σχήμα		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Σημείο υπολογισμού της πολικής ροπής αντιστάσεως***	***Πολική ροπή αντιστάσεως***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β.	Το σημείο τομής των διαγωνίων.	$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{6}$
Τετράγωνο		Η πλευρά α.	Το σημείο τομής των διαγωνίων.	$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{6}$
Κύκλος		Η διάμετρος D.	Το κέντρο του κύκλου.	$W_O = \frac{\pi\cdot D^3}{16}$
Έλλειψη		Ο μικρός ημιάξονας α και ο μεγάλος β.	Το κέντρο της ελλείψεως.	$W_{O,A} = W_{O,B} = \frac{\pi\cdot\alpha\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{4}$
Ημικύκλιο		Η διάμετρος D.	Το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.	$W_{K,A} = W_{K,B} = 0{,}0578\ D^3$

Παράδειγμα 14.

Να υπολογιστεί η πολική ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου του παραδείγματος 5 (πλευρές $\alpha = 4$ cm και $\beta = 5$ cm) ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του O.

Λύση.

Από τον πίνακα 3.7 γνωρίζομε ότι η πολική ροπή αντιστάσεως του ορθογωνίου ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του ισούται με:

$$W_{O,A} = W_{O,B} = W_{O,\Gamma} = W_{O,\Delta} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{6} =$$

$$= \frac{4\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} \cdot \sqrt{4^2\text{cm}^2 + 5^2\text{cm}^2}}{6} = 21{,}34\ \text{cm}^3.$$

Ασκήσεις.

1. *Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α = 6 cm. Να υπολογιστούν:*
α) Η πολική ροπή αδράνειάς του.
β) Η πολική ροπή αντιστάσεώς του
ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του.

2. *Δίνεται έλλειψη με μικρό ημιάξονα α = 3 cm και μεγάλο β = 5 cm. Να υπολογιστούν:*
α) Η πολική ροπή αδράνειάς της.
β) Η πολική ροπή αντιστάσεώς της
ως προς το σημείο τομής του μεγάλου ημιάξονα με τον μικρό.

3. *Να υπολογιστούν ως προς το κέντρο βάρους της:*
α) Η πολική ροπή αδράνειας.
β) Η πολική ροπή αντιστάσεως της διατομής της ασκήσεως 6 της παραγράφου 3.3.4 (σελ. 95).

3.8 Παράλληλη μετατόπιση και στροφή του συστήματος αξόνων.

Με βάση όσα έχομε αναλύσει στην παράγραφο 3.3 είναι γνωστές ή μπορούμε εύκολα να υπολογίσομε τις ροπές αδράνειας I_x και I_y μιας διατομής ως προς τους άξονες x και y, αντίστοιχα, ενός ορθογώνιου συστήματος αξόνων Oxy. Ωστόσο σε πολλές περιπτώσεις αυτό δεν αρκεί, καθώς μας ενδιαφέρει να υπολογίσομε τις ροπές αδράνειας της διατομής ως προς τους νέους άξονες ορθογώνιου συστήματος Ox′y′ το οποίο προκύπτει μετά από τις ακόλουθες μεταβολές του αρχικού συστήματος αξόνων Oxy:

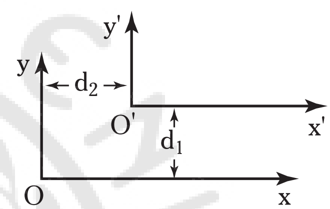
1) παράλληλη μετατόπιση και

2) στροφή των αξόνων.

Στην πρώτη περίπτωση, το αρχικό σύστημα μετατοπίζεται παράλληλα στους άξονές του (σχ. 3.8α). Συγκεκριμένα, η μετατόπιση των αξόνων γίνεται ώστε ο νέος άξονας x′ να είναι παράλληλος στον x και να απέχει από αυτόν απόσταση d_1 και ο νέος άξονας y′ να είναι παράλληλος στον y και να απέχει από αυτόν απόσταση d_2. Έτσι, εάν το κέντρο βάρους μιας διατομής A έχει συντεταγμένες ($x_{\kappa\beta}$, $y_{\kappa\beta}$) στο αρχικό σύστημα αξόνων Oxy, οι συντεταγμένες του ($x'_{\kappa\beta}$, $y'_{\kappa\beta}$) στο σύστημα αξόνων O′xy′ δίνεται από τις σχέσεις:

$$x'_{\kappa\beta} = x_{\kappa\beta} - d_2 \qquad (3.32)$$

$$y'_{\kappa\beta} = y_{\kappa\beta} - d_1. \qquad (3.33)$$



Σχ. 3.8α
Παράλληλη μετατόπιση του συστήματος αξόνων.

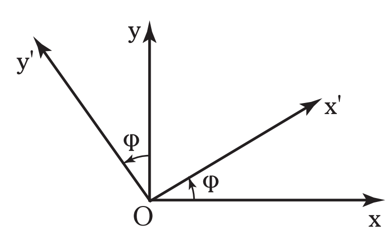
Με βάση το θεώρημα του Steiner (παράγρ. 3.3.3), οι ροπές αδράνειας $I_{x'}$ και $I_{y'}$ της διατομής A ως προς τους νέους άξονες x′ και y′ προσδιορίζονται από τις ροπές αδράνειας I_x και I_y με τη βοήθεια των ακολούθων σχέσεων:

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d_1^2 \qquad (3.34)$$

$$I_{y'} = I_y + A \cdot d_2^2. \qquad (3.35)$$

Στη δεύτερη περίπτωση, το αρχικό σύστημα αξόνων στρέφεται κατά γωνία φ (σχ. 3.8β). Οι συντεταγμένες (x′, y′) στο νέο σύστημα αξόνων οποιουδήποτε σημείου σε σχέση με τις συντεταγμένες του (x, y) στο αρχικό σύστημα αξόνων δίνονται από τις σχέσεις:

$$x' = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi \qquad (3.36)$$



Σχ. 3.8β
Στροφή του συστήματος αξόνων.

$$y' = y \cdot \cos\varphi - x \cdot \sin\varphi. \qquad (3.37)$$

Έτσι, εάν το κέντρο βάρους μιας διατομής Α έχει συντεταγμένες ($x_{κβ}$, $y_{κβ}$) στο αρχικό σύστημα αξόνων Oxy, οι συντεταγμένες του ($x'_{κβ}$, $y'_{κβ}$) στο σύστημα αξόνων Ox′y′ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x'_{κβ} = x_{κβ} \cdot \cos\varphi + y_{κβ} \cdot \sin\varphi \qquad (3.38)$$

$$y'_{κβ} = y_{κβ} \cdot \cos\varphi - x_{κβ} \cdot \sin\varphi. \qquad (3.39)$$

Η ροπή αδράνειας $I_{x'}$ ως προς τον άξονα x′ του νέου συστήματος συντεταγμένων υπολογίζεται ως εξής:

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y \cdot \cos\varphi - x \cdot \sin\varphi)^2 dA =$$
$$= \cos^2\varphi \cdot \int_A y^2 dA + \sin^2\varphi \cdot \int_A x^2 dA -$$
$$- 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \int_A xydA. \qquad (3.40)$$

Η ποσότητα $$I_{xy} = \int_A xydA \qquad (3.41)$$

ονομάζεται ***γινόμενο αδράνειας***. Έχει την ιδιότητα ότι εάν μία διατομή έχει άξονα συμμετρίας, τότε το γινόμενο αδράνειας ως προς το σύστημα αξόνων στο οποίο ένας τουλάχιστον άξονάς του είναι ο άξονας συμμετρίας, ισούται με μηδέν.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.41) και τον ορισμό των ροπών αδράνειας ως προς τους άξονες x και y, δηλαδή:

$$I_x = \int_A y^2 dA \text{ και } I_y = \int_A x^2 dA,$$

η σχέση (3.40) γράφεται:

$$I_{x'} = I_x \cdot \cos^2\varphi + I_y \cdot \sin^2\varphi - I_{xy} \cdot \sin 2\varphi. \qquad (3.42)$$

Ομοίως, η ροπή αδράνειας $I_{y'}$ ως προς τον άξονα y′ του νέου συστήματος συντεταγμένων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I_{y'} = I_x \cdot \sin^2\varphi + I_y \cdot \cos^2\varphi + I_{xy} \cdot \sin 2\varphi. \qquad (3.43)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.42) και (3.43) υπολογίζονται οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες x′ και y′ οποιουδήποτε ορθογώνιου συστήματος Ox′y′ γνωρίζοντας τη στροφή των αξόνων του φ ως προς το σύστημα Oxy και τις ροπές αδράνειας I_x και I_y στο σύστημα αυτό. Η γωνία φ λαμβάνεται θετική εάν η στροφή του συστήματος των αξόνων είναι προς τα αριστερά και αρνητική εάν η στροφή είναι προς τα δεξιά.

Δεδομένου ότι από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι:

$$\cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \text{ και } \sin^2\varphi = \frac{1 - \sin 2\varphi}{2}$$

οι σχέσεις (3.42) και (3.43) γράφονται επίσης στην ακόλουθη μορφή:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - I_{xy} \cdot \sin 2\varphi \qquad (3.44)$$

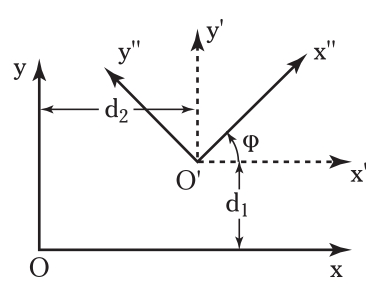
$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + I_{xy} \cdot \sin 2\varphi. \qquad (3.45)$$

Εάν προσθέσομε τις εξισώσεις (3.44) και (3.45) κατά μέλη και λάβομε υπόψη ότι το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς τους άξονες x και y είναι ίσο με την πολική ροπή αδράνειας ως προς το σημείο O, έχομε:

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_O = \text{σταθερό}. \qquad (3.46)$$

Συνεπώς, το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς δύο οποιουσδήποτε άξονες που είναι κάθετοι μεταξύ τους είναι σταθερό, δηλαδή δεν εξαρτάται από τη γωνία στροφής τους και ισούται με την πολική ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων, η οποία παραμένει σταθερή κατά την περιστροφή του συστήματος των αξόνων.

Στη γενικότερη περίπτωση μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των ροπών αδράνειας $I_{x''}$ και $I_{y''}$ ως προς τους άξονες ενός συστήματος αξόνων που έχει προέλθει συνδυαστικά από παράλληλη μετατόπιση και στροφή των αξόνων του αρχικού συστήματος Oxy (σχ. 3.8γ). Εφαρμόζομε διαδοχικά τις σχέσεις (3.34) και (3.35) και (3.42) και (3.43). Συγκεκριμένα, εφαρμόζομε τις σχέσεις (3.34) και (3.35) και υπολογίζομε τις ροπές αδράνειας $I_{x'}$ και $I_{y'}$ στο σύστημα αξόνων O′x′y′ που αντιστοιχεί στην παράλληλη



Σχ. 3.8γ
Παράλληλη μετατόπιση και στροφή του συστήματος αξόνων.

μετατόπιση του Οxy. Στη συνέχεια εφαρμόζομε τις σχέσεις (3.42) και (3.43) και υπολογίζομε τις ροπές αδράνειας $I_{x''}$ και $I_{y''}$ στο σύστημα αξόνων $O'x''y''$ που αντιστοιχεί στη στροφή κατά γωνία φ του συστήματος $O'x'y'$.

Έχοντας υπολογίσει τις ροπές αδράνειας ως προς οποιουσδήποτε άξονες, μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίζομε και τις αντίστοιχες ακτίνες αδράνειας και ροπές αντιστάσεως χρησιμοποιώντας τις σχέσεις υπολογισμού που αναφέρομε στις παραγράφους 3.4 και 3.5.

– Κύριοι άξονες.

Από τα ορθογώνια συστήματα αξόνων ενδιαφέρον παρουσιάζουν εκείνα τα συστήματα των οποίων οι άξονες x και y είναι τέτοιοι, ώστε το γινόμενο αδράνειας της υπό μελέτη διατομής Α είναι ίσο με μηδέν:

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA = 0\,. \qquad (3.47)$$

Οι άξονες αυτοί ονομάζονται ***κύριοι άξονες της διατομής***. Εάν οι άξονες αυτοί διέρχονται από το κέντρο βάρους της διατομής, δηλαδή είναι κεντροβαρικοί, τότε ονομάζονται ***κύριοι κεντροβαρικοί άξονες της διατομής***. Ωστόσο, πολλές φορές αναφέρονται απλά ως κύριοι άξονες.

Οι ροπές αδράνειας των κυρίων αξόνων ονομάζονται ***κύριες ροπές αδράνειας***. Οι κύριες ροπές αδράνειας λαμβάνουν τις ακρότατες τιμές (μέγιστη και ελάχιστη) που λαμβάνει η ροπή αδράνειας μεταξύ όλων των δυνατών στροφών του συστήματος των αξόνων. Οι ακτίνες αδράνειας που αντιστοιχούν στους κύριους άξονες ονομάζονται ***κύριες ακτίνες αδράνειας***.

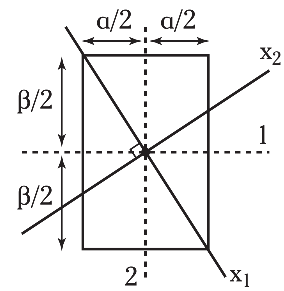
Αν μια διατομή έχει άξονα συμμετρίας, ο άξονας αυτός είναι κύριος άξονας της διατομής, καθώς το γινόμενο αδράνειας ως προς το σύστημα αξόνων στο οποίο ένας τουλάχιστον άξονάς του είναι ο άξονας συμμετρίας, ισούται με μηδέν. Από την ιδιότητα αυτή του γινομένου αδράνειας προκύπτει ότι κάθε άλλος άξονας κάθετος στον άξονα συμμετρίας είναι επίσης κύριος άξονας της διατομής. Επομένως, οι άξονες συμμετρίας κάθε διατομής και οι άξονες που είναι κάθετοι σε αυτούς αποτελούν κύριους άξονες της διατομής.

Παράδειγμα 15.

Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου του Παραδείγματος 15 ως προς τους ακόλουθους άξονες:

1) Τον άξονα x_1 που συμπίπτει με τη μία διαγώνιο του ορθογωνίου (σχ. 3.8δ).

2) Τον άξονα x_2 που είναι κάθετος στον άξονα x_1.



Σχ. 3.8δ

Λύση.

Από το Παράδειγμα 15 γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα 1 (παράλληλος στη μικρή πλευρά που διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων) είναι $I_1 = 41{,}67\ \text{cm}^4$ και ως προς τον άξονα 2 (παράλληλος στη μεγάλη πλευρά που διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων) είναι $I_2 = 26{,}67\ \text{cm}^4$. Επειδή οι άξονες 1 και 2 είναι άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου ισχύει ότι το γινόμενο αδράνειας $I_{1,2} = 0$.

Ο άξονας x_1 προκύπτει από τον άξονα 1 εάν στραφεί προς τα δεξιά κατά γωνία φ, η εφαπτομένη της οποίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta/2}{\alpha/2} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{5\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} = 1{,}25.$$

Άρα η γωνία $\varphi = 51{,}5^\circ$. Ο άξονας x_2 ως κάθετος στον x_1 προκύπτει από τον άξονα 2 εάν στραφεί προς τα δεξιά κατά γωνία φ. Έτσι, οι ζητούμενες ροπές αδράνειας υπολογίζονται με τη βοήθεια των σχέσεων (3.42) και (3.43):

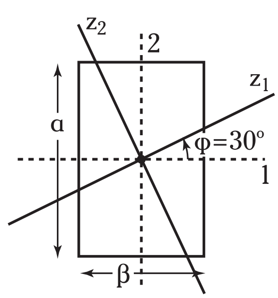
$$\begin{aligned} I_{x1} &= I_1 \cdot \cos^2\varphi + I_2 \cdot \sin^2\varphi - I_{1,2} \cdot \sin 2\varphi = \\ &= 41{,}67\ \text{cm}^4 \cdot \cos^2 51{,}5^\circ + 26{,}67\ \text{cm}^4 \cdot \sin^2 51{,}5^\circ - 0 = \\ &= 32{,}49\ \text{cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x2} &= I_1 \cdot \sin^2\varphi + I_2 \cdot \cos^2\varphi + I_{1,2} \cdot \sin 2\varphi = \\ &= 41{,}67\ \text{cm}^4 \cdot \sin^2 51{,}5^\circ + 26{,}67\ \text{cm}^4 \cdot \cos^2 51{,}5^\circ - 0 = \\ &= 35{,}85\ \text{cm}^4. \end{aligned}$$

Άρα, η ροπή αδράνειας της ορθογώνιας διατομής ως προς τον άξονα x_1 είναι $I_{x1} = 32{,}49\ \text{cm}^4$ και ως προς τον άξονα x_2 είναι $I_{x2} = 35{,}85\ \text{cm}^4$.

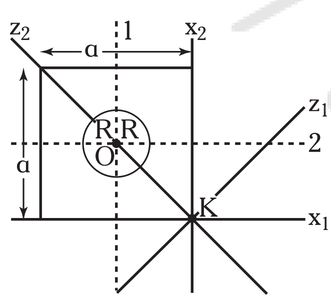
Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου του σχήματος 3.8ε με πλευρές $α = 4$ cm και $β = 3$ cm ως προς τους κάθετους άξονες z_1 και z_2, οι οποίοι διέρχονται από το σημείο τομής των διαγωνίων και έχουν προκύψει από τους άξονες 1 και 2 με στροφή τους κατά γωνία $φ = 30^o$.*



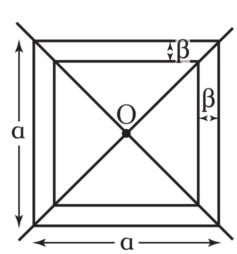
Σχ. 3.8ε

2. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της διατομής του σχήματος 3.8στ ως προς τους ακόλουθους άξονες:*
α) Τους κάθετους άξονες 1 και 2 που διέρχονται από το κέντρο O του κύκλου (το O είναι και το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου).
β) Τους κάθετους άξονες x_1 και x_2, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο K.
γ) Τους κάθετους άξονες z_1 και z_2, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο K. O άξονας z_2 είναι ο άξονας της διαγωνίου του τετραγώνου.
Δίνεται ότι $α = 3$ cm και $R = 1$ cm.



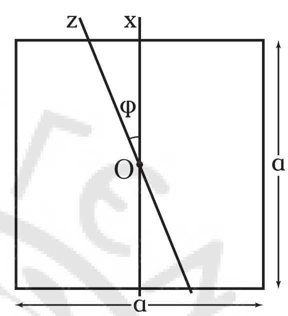
Σχ. 3.8στ

3. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της διατομής του σχήματος 3.8ζ ως προς τους άξονες του ορθογώνιου συστήματος αξόνων που ορίζουν οι διαγώνιες του εσωτερικού τετραγώνου. Δίνεται ότι $α = 3$ cm και $β = 0,5$ cm.*



Σχ. 3.8ζ

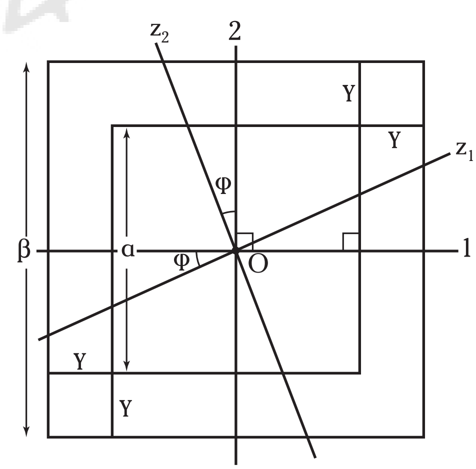
4. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της τετραγωνικής διατομής του σχήματος 3.8η με πλευρά $α = 5$ cm ως προς τον άξονα z, που διέρχετα από το σημείο τομής των διαγωνίων O και σχηματίζει γωνία $φ = 20^o$ με τον κατακόρυφο άξονα x, ο οποίος διέρχεται από τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου.*



Σχ 3.8η

5. *Να υπολογιστούν και να συγκριθούν η ακτίνα αδράνειας της τετραγωνικής διατομής της ασκήσεως 4 ως προς τον άξονα x και τον άξονα z. Τι παρατηρείτε;*

6. *Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της διατομής του σχήματος 3.8θ ως προς τους άξονες z_1 και z_2 οι οποίοι διέρχονται από το σημείο τομής των διαγωνίων O και έχουν προκύψει από τους ορθογώνιους άξονες 1 και 2 με στροφή τους προς τα αριστερά κατά γωνία $φ = 25^o$. Να επιβεβαιωθεί ότι το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς τους άξονες z_1 και z_2 ισούται με την πολική ροπή αδράνειας της διατομής. Δίνονται $α = 4$ cm και $β = 5$ cm.*



Σχ 3.8θ

3.9 Σύνοψη βασικών εννοιών.

Για τη μελέτη της καταπονήσεως ενός σώματος μας ενδιαφέρουν οι ακόλουθες ιδιότητες της διατομής του Α:

1) Το ***κέντρο βάρους*** της.

α) Είναι το σημείο στο οποίο θεωρείται συγκεντρωμένη ολόκληρη η μάζα της διατομής.

β) Στις διατομές με απλά σχήματα το κέντρο βάρους είναι το σημείο τομής των δύο αξόνων συμμετρίας της διατομής.

γ) Στις διατομές με σύνθετα σχήματα αναλύομε τα σύνθετα σχήματα σε απλά και στη συνέχεια βρίσκουμε το κέντρο βάρους συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των απλών σχημάτων (βλ. πίν. 3.2.3).

2) Η ***ροπή αδράνειας*** της ως προς άξονα x:

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα z που είναι παράλληλος στον άξονα x και απέχει απόσταση d από αυτόν, δίνεται από τη σχέση (Θεώρημα του Steiner): $I_z = I_x + A \cdot d^2$.

Οι ροπές αδράνειας ως προς τους κάθετους άξονες x′ και y′ που προκύπτουν από τη στροφή των αξόνων x και y κατά γωνία φ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$I_{x'} = I_x \cdot \cos^2\varphi + I_y \cdot \sin^2\varphi - I_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{y'} = I_x \cdot \sin^2\varphi + I_y \cdot \cos^2\varphi + I_{xy} \cdot \sin 2\varphi.$$

3) Η ***ακτίνα αδράνειας*** ως προς άξονα x:

$$R_{Ix} = \sqrt{\frac{I_x}{A}}.$$

4) Η ***ροπή αντιστάσεως*** ως προς άξονα x:

$$W_x = \frac{I_x}{d},$$

όπου d είναι η απόσταση των ακραίων σημείων της διατομής από τον άξονα x.

5) Η ***πολική ροπή*** αδράνειας ως προς σημείο O:

$$I_O = \int_A r^2 dA.$$

Αν x και y κάθετοι άξονες που τέμνονται στο O, τότε:

$$I_O = I_x + I_y.$$

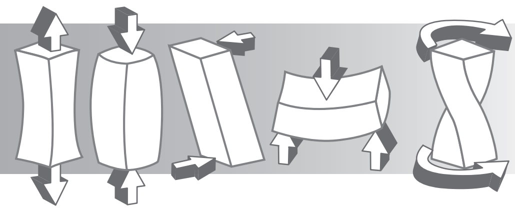
6) Η ***πολική ροπή αντιστάσεως*** ως προς σημείο O:

$$W_O = \frac{I_O}{d},$$

όπου d είναι η απόσταση των ακραίων σημείων της διατομής από το σημείο O.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στατική θεωρία της δοκού



4.1 Εισαγωγή.

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζομε τα βασικά στοιχεία της στατικής θεωρίας της δοκού που είναι απαραίτητα για τη μελέτη των καταπονήσεων της κάμψεως, της στρέψεως και του λυγισμού. Οι καταπονήσεις αυτές αναπτύσσονται στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

Συγκεκριμένα, στο παρόν Κεφάλαιο, ορίζεται η δοκός, οι τρόποι στηρίξεώς της και η κατηγοριοποίηση των δοκών ανάλογα με τον τρόπο στηρίξεώς τους. Αναπτύσσονται οι έννοιες των ορθών και των τεμνουσών δυνάμεων, καθώς και των καμπτικών ροπών.

Ο πίνακας 4.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***συνήθεις μονάδες μετρήσεως*** των νέων (σε σχέση με τα προηγούμενα κεφάλαια) μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 4.1
Σύμβολα και συνήθεις μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Αντίδραση	F_A	N
Ροπή αντιδράσεως	M_A	$N \cdot cm$
Ροπή πακτώσεως	$M_{πακτ}$	$N \cdot cm$

4.2 Τρόποι στηρίξεως δοκού.

Στην καθημερινή πρακτική χρησιμοποιούμε πολλά σώματα για να φέρουν κάποιο ή κάποια φορτία. Ένα τέτοιο σώμα, για να ανταποκριθεί στην απαίτηση να φέρει το φορτίο ή τα φορτία που επιθυμούμε, στηρίζεται σε ένα ή περισσότερα στηρίγματα. Τα στηρίγματα ασκούν δυνάμεις στο σώμα, το οποίο στηρίζουν. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται ***αντιδράσεις***. Το σώμα λέμε ότι βρίσκεται σε ***στατική ισορροπία*** όταν τα φορτία που φέρει είναι ίσα με τις αντιδράσεις που δέχεται από τα στηρίγματα και οι ροπές των φορτίων είναι ίσες με τις ροπές των αντιδράσεων.

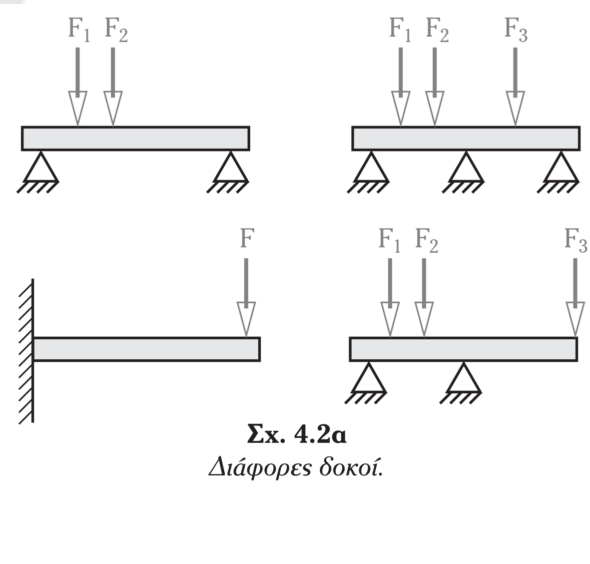
Δοκός ονομάζεται κάθε στερεό σώμα, του οποίου το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής του. Η δοκός στηρίζεται σ' ένα ή περισσότερα σημεία και σ' αυτήν ενεργούν, σε μόνιμη βάση ή όχι, φορτία κάθετα στον οριζόντιο άξονά της.

Σημειώνεται ότι τα φορτία που δέχεται η δοκός μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του άξονά της, αλλά αυτή είναι μία ειδική περίπτωση. Στη γενική περίπτωση, τα φορτία που δέχεται μία δοκός είναι ανομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του άξονά της. Το σχήμα 4.2α παρουσιάζει παραδείγματα δοκών με ένα ή περισσότερα σημεία στηρίξεως και φορτία που είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα ή όχι κατά μήκος του άξονά τους. Επίσης, τα φορτία που δέχεται η δοκός μπορεί να είναι συνεχή (δηλ. να εφαρμόζεται φορτίο σε κάθε σημείο της δοκού) ή ασυνεχή.

Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά της δοκού είναι η στήριξή της σ' ένα ή περισσότερα στηρίγματα. Ο τρόπος στηρίξεως της δοκού είναι ιδιαίτερα σημαντικός, διότι καθορίζει την αντοχή της. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να μελετήσομε συστηματικά τη στήριξη των δοκών. Πριν προχωρήσομε στην ταξινόμηση των δοκών με βάση τους τρόπους στηρίξεώς τους, παρουσιάζομε τα βασικά είδη στηρίξεως ενός άκρου δοκού.

4.2.1 Είδη στηρίξεως.

Τα είδη στηρίξεως ενός άκρου μίας δοκού είναι τα εξής η ***πάκτωση***, η ***άρθρωση*** ή ***σταθερή στήριξη*** και η ***κύλιση*** ή ***κινητή στήριξη***.



Σχ. 4.2α
Διάφορες δοκοί.

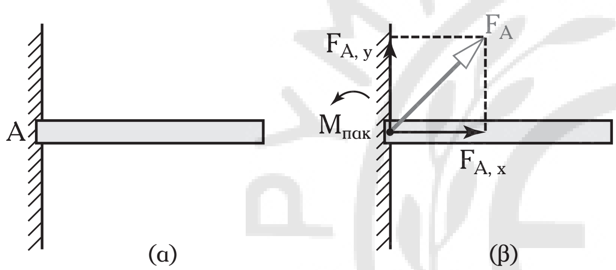
Καθένα από τα ανωτέρω είδη στηρίξεως που απεικονίζονται στα σχήματα 4.2β, 4.2γ και 4.2δ υλοποιείται με διαφορετικό τρόπο και έχει τα δικά του χαρακτηριστικά. Αναλυτικότερα:

1) ***Πάκτωση*** ονομάζεται η στήριξη που πραγματοποιείται εάν ανοίξομε μια τρύπα σ' έναν τοίχο και στερεώσομε μέσα σ' αυτήν το άκρο της δοκού μόνιμα [σχ. 4.2β(α)], χρησιμοποιώντας για παράδειγμα τσιμέντο. Σ' αυτήν την περίπτωση η δοκός βυθίζεται αρκετά μέσα στον τοίχο. Η πάκτωση έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά ως προς την παροχή ελευθερίας μετακινήσεων και στροφής:

α) Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω.

β) Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα δεξιά, ούτε προς τα αριστερά.

γ) Δεν επιτρέπει καμμία στροφή της δοκού.



Σχ. 4.2β
(α) Πάκτωση άκρου δοκού
(β) Δυνάμεις στο πακτωμένο σημείο στηρίξεως.

Συνεπώς, η πάκτωση ενός άκρου μιας δοκού έχει ως αποτέλεσμα, όταν εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα πάνω ή προς τα κάτω ή προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, το άκρο αυτό να μην μετακινείται ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω ούτε προς τα δεξιά ούτε προς τα αριστερά. Επίσης, η πάκτωση έχει ως αποτέλεσμα, όταν μία ροπή προσπαθεί να στρέψει τη δοκό, το άκρο αυτό να μην στρέφεται.

Στο σημείο πακτώσεως αναπτύσσεται ***η αντίδραση*** F_A, καθώς και ροπή, η οποία ονομάζεται ***ροπή πακτώσεως*** $M_{\pi\alpha\kappa}$ [σχ. 4.2β(β)]. Η αντίδραση, μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση και αναλύεται στη γενική περίπτωση σε ***δύο συνιστώσες, μία οριζόντια*** (κατά τον άξονα της δοκού) ***και μία κατακόρυφη*** (κάθετη στον άξονα της δοκού). Αν η αντίδραση έχει μόνο μία από τις δύο συνιστώσες, αυτό εξαρτάται απ' το συνολικό φορτίο της δοκού. Για παράδειγμα, αν το συνολικό φορτίο είναι μόνο κατακόρυφο, η αντίδραση έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα. Στο παράδειγμα 1 (σελ. 113-114) περιγράφομε τον τρόπο υπολογισμού των αντιδράσεων στα σημεία στηρίξεως με πάκτωση.

2) ***Άρθρωση ή σταθερή στήριξη*** ονομάζεται η στήριξη ενός σημείου μίας δοκού σ' ένα άλλο σταθερό σημείο, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, έναν πίρο, έτσι ώστε να είναι εφικτή η στροφή της δοκού [σχ. 4.2γ(α)]. Η άρθρωση ως προς την παροχή ελευθερίας μετακινήσεων και στροφής έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

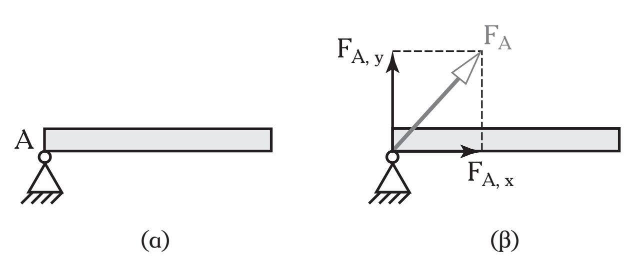
α) Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω.

β) Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα δεξιά, ούτε προς τα αριστερά.

γ) Επιτρέπει τη στροφή της δοκού.

Δηλαδή, η στήριξη της αρθρώσεως δεν επιτρέπει, όπως και η πάκτωση, καμμία μετακίνηση, ωστόσο, σε αντίθεση με την πάκτωση, επιτρέπει στροφή της δοκού. Συνεπώς, η στήριξη σε άρθρωση ενός άκρου μιας δοκού έχει ως αποτέλεσμα, όταν εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα πάνω ή προς τα κάτω ή προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, το άκρο αυτό να μην μετακινείται ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω ούτε προς τα δεξιά ούτε προς τα αριστερά. Ωστόσο, η άρθρωση έχει ως αποτέλεσμα, όταν μια ροπή προσπαθεί να στρέψει τη δοκό, το άκρο αυτό να στρέφεται.

Στο σημείο στηρίξεως με άρθρωση αναπτύσσεται ***αντίδραση*** F_A. Η αντίδραση, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2γ(β), μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση και αναλύεται στη γενική περίπτωση σε ***δύο συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη***. Αν η αντίδραση έχει μόνο μία από τις δύο συνιστώσες, αυτό εξαρτάται από το συνολικό φορτίο της δοκού. Για παράδειγμα, εάν το συνολικό φορτίο είναι μόνο κατακόρυφο, η αντίδραση έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα. Στην παράγραφο 4.2.3 περιγράφομε τον τρόπο υπολογισμού των αντιδράσεων στα σημεία στηρίξεως με άρθρωση.



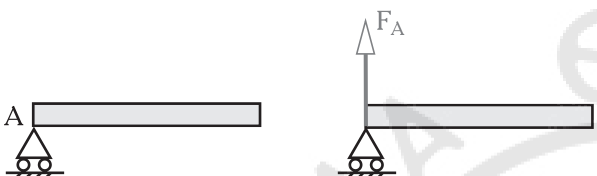
Σχ. 4.2γ
(α) Στήριξη άκρου δοκού με άρθρωση.
(β) Δυνάμεις στην άρθρωση.

3) ***Κύλιση ή κινητή στήριξη*** ονομάζεται η στήριξη ενός σημείου μίας δοκού σε κινητό σημείο, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, έδρανο κυλίσεως, έτσι ώστε να είναι εφικτή η στροφή της δοκού και η μετακίνησή της κατά μία κατεύθυνση [σχ. 4.2δ(α)]. Η κύλιση έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά ως προς την παροχή ελευθερίας μετακινήσεων και στροφής:

α) Δεν επιτρέπει καμμία μετακίνηση της δοκού ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω.

β) Επιτρέπει τη μετακίνηση της δοκού προς τα δεξιά και προς τα αριστερά.

γ) Επιτρέπει τη στροφή της δοκού.



(α) (β)

Σχ. 4.2δ

(α) Στήριξη άκρου δοκού με κύλιση.
(β) Δυνάμεις στην κύλιση.

Δηλαδή, η στήριξη της κυλίσεως δεν επιτρέπει, όπως και η πάκτωση και η άρθρωση, καμμία μετακίνηση ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω. Ωστόσο, σε αντίθεση με την άρθρωση και την πάκτωση, η κύλιση επιτρέπει τη μετακίνηση της δοκού προς τα δεξιά και προς τα αριστερά, καθώς και τη στροφή της δοκού. Τα ***χαρακτηριστικά*** της ***πακτώσεως***, της ***αρθρώσεως*** και της ***κυλίσεως*** παρουσιάζονται συγκριτικά στον πίνακα 4.2.1.

Συνεπώς, η στήριξη με κύλιση ενός άκρου δοκού έχει ως αποτέλεσμα, όταν μια εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα πάνω ή προς τα κάτω, το άκρο αυτό να μην μετακινείται ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω. Αντίθετα, όταν μια εξωτερική δύναμη προσπαθεί να μετακινήσει τη δοκό προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, το άκρο αυτό μπορεί να μετακινείται προς τα δεξιά και προς τα αριστερά. Επίσης, όταν μία ροπή προσπαθεί να στρέψει τη δοκό, το άκρο αυτό επιτρέπει στη δοκό να στρέφεται.

Η κύλιση απαντάται πολύ συχνά στην καθημερινή πράξη, ιδίως σε περιπτώσεις που η αξιοποίηση των χαρακτηριστικών της κυλίσεως είναι απαραίτητη για την ακεραιότητα της κατασκευής. Ως παράδειγμα στηρίξεως με κύλιση αναφέρομε τη στήριξη μιας ατράκτου[1], το μήκος της οποίας αναμένεται να υφίσταται μεταβολές (διαστολή και συστολή) λόγω αυξομειώσεων της θερμοκρασίας. Αν η άτρακτος είχε στερεωθεί με τη μέθοδο της πακτώσεως ή της αρθρώσεως, τότε θα αναπτύσσονταν πολύ μεγάλες τάσεις στην άτρακτο, οι οποίες θα μπορούσαν να την καταστρέψουν. Αντίθετα, η κύλιση δεν εμποδίζει τη διαστολή και συστολή της ατράκτου και έτσι δεν αναπτύσσονται οι πολύ μεγάλες αυτές τάσεις που θα μπορούσαν να την καταστρέψουν. Άλλο παράδειγμα χρησιμοποιήσεως της κυλίσεως αποτελούν οι γέφυρες που δεν έχουν ενδιάμεσα άλλα στηρίγματα.

Στο σημείο στηρίξεως με κύλιση αναπτύσσεται ***αντίδραση*** F_A, η οποία, είναι κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως [σχ. 4.2δ(β)]. Στην παράγραφο 4.2.3 περιγράφομε τον τρόπο υπολογισμού των αντιδράσεων στα σημεία στηρίξεως με κύλιση. Ο πίνακας 4.2.2 παρουσιάζει συγκριτικά τα ***χαρακτηριστικά των αντιδράσεων*** που εμφανίζονται στις ***τρεις περιπτώσεις στηρίξεως άκρων***.

Πίνακας 4.2.1
Σύγκριση χαρακτηριστικών των τριών ειδών στηρίξεως δοκού.

Είδος στηρίξεως	***Δυνατότητα μετακινήσεως πάνω-κάτω***	***Δυνατότητα μετακινήσεως δεξιά-αριστερά***	***Δυνατότητα στροφής***
Πάκτωση	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ
Άρθρωση	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Κύλιση	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ

Πίνακας 4.2.2
Σύγκριση αντιδράσεων των τριών περιπτώσεων στηρίξεως δοκών.

Είδος στηρίξεως	***Αντίδραση***	***Ροπή πακτώσεως***
Πάκτωση	Οποιαδήποτε διεύθυνση	ΝΑΙ
Άρθρωση	Οποιαδήποτε διεύθυνση	ΟΧΙ
Κύλιση	Κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως	ΟΧΙ

[1] Η έννοια της ατράκτου αναπτύσσεται στην παράγραφο 6.6.

4.2.2 Κατηγοριοποίηση δοκών με βάση τον τρόπο στηρίξεώς τους.

Μία δοκός μπορεί να στηρίζεται σε ένα, δύο, τρία ή περισσότερα σημεία. Επίσης, καθένα από τα σημεία στηρίξεως, όπως ήδη αναφέραμε, μπορεί να στηρίζεται με πάκτωση, με άρθρωση ή με κύλιση.

Οι συνδυασμοί του πλήθους των σημείων στηρίξεως μίας δοκού με τα είδη στηρίξεως οδηγεί σε μία ποικιλία δυνατών τρόπων στηρίξεως των δοκών σε στατική ισορροπία. Ωστόσο, υπάρχουν και ορισμένοι περιορισμοί. Για παράδειγμα, ενώ μία δοκός η οποία στηρίζεται μόνο σ' ένα σημείο με πάκτωση μπορεί να ισορροπεί χωρίς άλλη στήριξη, εντούτοις η δοκός δεν μπορεί να στηριχθεί μόνο σ' ένα σημείο με άρθρωση. Στην τελευταία περίπτωση η δοκός απαιτεί και ένα ακόμη σημείο στηρίξεως, ώστε να βρεθεί σε στατική ισορροπία.

Απ' το σύνολο όλων των δυνατών συνδυασμών στηρίξεως των δοκών, μας ενδιαφέρουν οι ακόλουθες έξι κατηγορίες στηρίξεως σε οριζόντια θέση. Μία δοκός λοιπόν ονομάζεται:

1) ***Πρόβολος*** όταν στηρίζεται μόνο στο ένα άκρο με πάκτωση [σχ. 4.2ε(α)].

2) ***Αμφιέρειστη*** όταν στηρίζεται στα δύο άκρα της, στο ένα με άρθρωση και στο άλλο με κύλιση [σχ. 4.2ε(β)].

3) ***Προέχουσα*** όταν στηρίζεται σε δύο σημεία, από τα οποία το ένα σημείο στηρίξεως βρίσκεται στην άκρη της δοκού, ενώ το άλλο άκρο της δοκού προεξέχει από το άλλο σημείο στηρίξεως. Η στήριξη στο ένα σημείο γίνεται με άρθρωση και στο άλλο με κύλιση [σχ. 4.2ε(γ)].

4) ***Αμφιπροέχουσα*** όταν στηρίζεται σε δύο σημεία, στο ένα με άρθρωση και στο άλλο με κύλιση, ενώ τα δύο άκρα της δοκού προεξέχουν από τα δύο σημεία στηρίξεώς της [σχ. 4.2ε(δ)].

5) ***Αμφίπακτη*** όταν στηρίζεται και στα δύο άκρα με πάκτωση [σχ. 4.2ε(ε)].

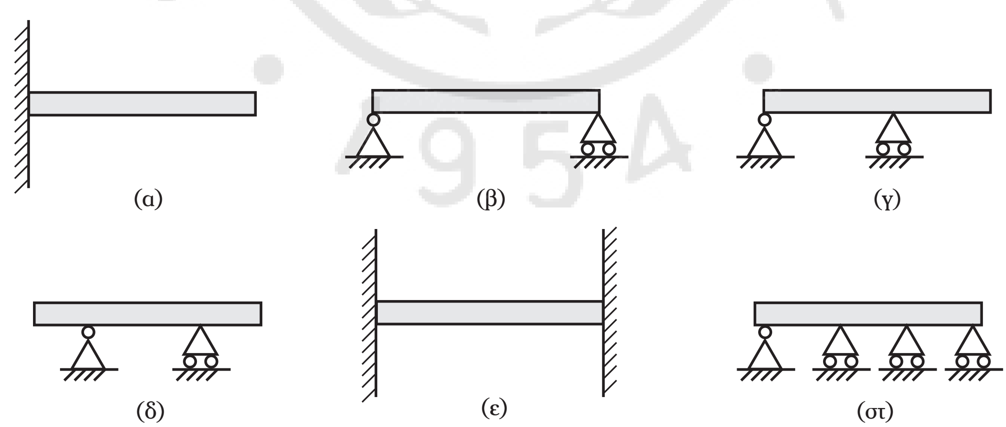
6) ***Συνεχής*** όταν στηρίζεται σε τρία ή περισσότερα σημεία [σχ. 4.2ε(στ)].

Τα ***χαρακτηριστικά*** καθεμίας απ' τις ανωτέρω ***κατηγορίες δοκών*** παρουσιάζονται ***συγκριτικά*** στον πίνακα 4.2.3.

4.2.3 Συνθήκες στατικής ισορροπίας δοκού.

Μία δοκός λέμε ότι βρίσκεται σε ***στατική ισορροπία*** όταν τα φορτία που φέρει (σηκώνει) είναι ίσα και αντίθετα με τις αντιδράσεις που δέχεται απ' τα στηρίγματα και οι ροπές των φορτίων είναι ίσες και αντίθετες με τις ροπές των αντιδράσεων.

Εάν με ΣF συμβολίσομε τη συνισταμένη των φορτίων, με ΣF_A τη συνισταμένη των αντιδράσεων, με ΣM_F τη συνισταμένη ροπή των φορτίων ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο αναφοράς και με ΣM_A τη συνισταμένη ροπή των αντιδράσεων[2] ως προς το σημείο αναφοράς, οι συνθήκες στατικής ισορροπίας της δοκού γράφονται στη μορφή:



Σχ. 4.2ε
Κατηγορίες δοκών.
(α) Πρόβολος δοκός. (β) Αμφιέρειστη δοκός. (γ) Προέχουσα δοκός. (δ) Αμφιπροέχουσα δοκός.
(ε) Αμφίπακτη δοκός. (στ) Συνεχής δοκός.

[2] Η συνισταμένη ροπή των αντιδράσεων περιλαμβάνει και τις ροπές πακτώσεως (εφόσον υπάρχουν).

Πίνακας 4.2.3
Σύγκριση κατηγοριών δοκών.

Κατηγορία δοκού	***Πλήθος σημείων στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη 1ου σημείου στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη 2ου σημείου στηρίξεως***	***Θέση και στήριξη επομένων σημείων στηρίξεως***
Πρόβολος δοκός	1	Άκρο δοκού	–	–
		Πάκτωση	–	–
Αμφιέρειστη δοκός	2	Άκρο δοκού	Άκρο δοκού	–
		Άρθρωση	Κύλιση	–
Προέχουσα δοκός	2	Άκρο δοκού	Πιο εσωτερικά του άλλου άκρου δοκού	–
		Άρθρωση	Κύλιση	–
		Κύλιση	Άρθρωση	
Αμφιπροέχουσα δοκός	2	Πιο εσωτερικά του ενός άκρου δοκού	Πιο εσωτερικά του άλλου άκρου δοκού	–
		Άρθρωση	Κύλιση	–
Αμφίπακτη δοκός	2	Άκρο δοκού	Άκρο δοκού	–
		Πάκτωση	Πάκτωση	–
Συνεχής δοκός	3 ή περισσότερα	Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε
		Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε	Οποιαδήποτε

$$\sum F + \sum F_A = 0 \qquad (4.1)$$

$$\sum M_F + \sum M_A = 0. \qquad (4.2)$$

Η σχέση (4.1) γράφεται ξεχωριστά για τις οριζόντιες και για τις κάθετες συνιστώσες των δυνάμεων. Αν χρησιμοποιήσομε τους δείκτες x και y για να δηλώσομε τις οριζόντιες και τις κάθετες συνιστώσες των δυνάμεων, αντίστοιχα, η σχέση (4.1) γράφεται:

$$\sum F_x + \sum F_{A,x} = 0 \quad \text{και} \quad \sum F_y + \sum F_{A,y} = 0. \qquad (4.3)$$

Σημειώνεται ότι τα αθροίσματα των σχέσεων (4.2) και (4.3) είναι αλγεβρικά, δηλαδή, για τις δυνάμεις λαμβάνεται υπόψη η φορά τους για τον καθορισμό του προσήμου τους (θετικό πρόσημο για δυνάμεις με φορά προς τα πάνω ή προς τα δεξιά και αρνητικό για δυνάμεις με φορά προς τα κάτω ή προς τα αριστερά). Ομοίως, για τις ροπές λαμβάνεται υπόψη η φορά τους για τον καθορισμό του προσήμου τους (θετικό πρόσημο για ροπές με φορά δεξιόστροφη και αρνητικό για ροπές με φορά αριστερόστροφη).

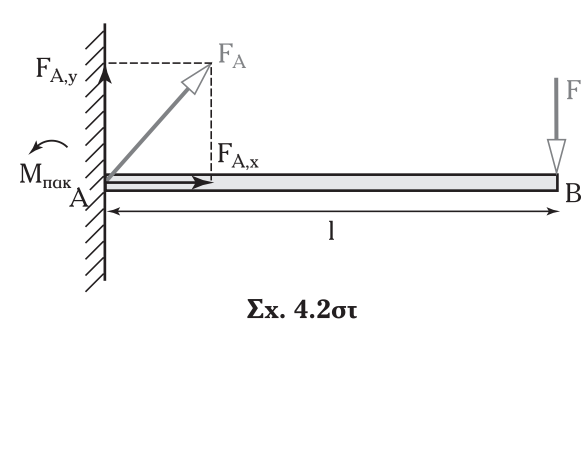
Οι ανωτέρω σχέσεις μάς βοηθούν να προσδιορίζομε άγνωστες δυνάμεις, όπως είναι οι δυνάμεις αντιδράσεως στα στηρίγματα των δοκών.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η πρόβολος δοκός μήκους $l = 120\,cm$ του σχήματος 4.2στ, στο άκρο B της οποίας ενεργεί κατακόρυφο φορτίο $F = 200\,N$. Να υπολογιστούν η αντίδραση και η ροπή πακτώσεως στο άκρο στηρίξεώς της A.

Λύση.

Στο πακτωμένο άκρο στηρίξεως A εφαρμόζεται η αντίδραση F_A, η οποία αναλύεται στην οριζόντια



Σχ. 4.2στ

συνιστώσα $F_{A,x}$ και στην κατακόρυφη συνιστώσα $F_{A,y}$. Επίσης, στη στήριξη A εμφανίζεται η ροπή πακτώσεως $M_{πακ}$.

Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο A, το φορτίο F προσπαθεί να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα (όπως και οι δείκτες του ρολογιού). Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F είναι:

$$M = F \cdot l = 200\ \text{N} \cdot 120\ \text{cm} = 24.000\ \text{N} \cdot \text{cm}.$$

Επειδή η αντίδραση F_A εφαρμόζεται στο άκρο A, η ροπή της ως προς το A είναι μηδενική:

$$M_A = 0.$$

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

1) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και των φορτίων που ενεργούν στη δοκό, τόσο κατά την οριζόντια διεύθυνση, όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$FA,x = 0 \qquad (1)$$

$$FA,y - F = 0. \qquad (2)$$

2) Το αλγεβρικό άθροισμα της ροπής του φορτίου και της ροπής πακτώσεως που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M - M_{πακ} = 0. \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M_{πακ} = M \Leftrightarrow M_{πακ} = 24.000\ \text{N} \cdot \text{cm}.$$

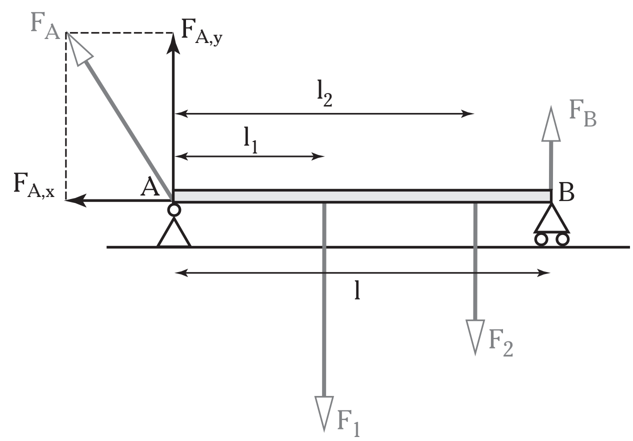
Από τη σχέση (1) βλέπομε ότι η αντίδραση F_A έχει μηδενική οριζόντια συνιστώσα. Αυτό οφείλεται στο ότι το εφαρμοζόμενο φορτίο είναι κατακόρυφο. Από τη σχέση (2) λαμβάνομε:

$$F_{A,y} = F = 200\ \text{N}.$$

Άρα, η αντίδραση από το στήριγμα είναι $F_A = 200$ N και η ροπή πακτώσεως $M_{πακ} = 24.000\ \text{N} \cdot \text{cm}$.

Παράδειγμα 2.

Για την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 4.2ζ που έχει μήκος $l = 100$ cm, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της, όταν στη δοκό εφαρμόζονται δύο κατακόρυφα φορτία $F_1 = 600$ N και $F_2 = 400$ N σε αποστάσεις $l_1 = 40$ cm και $l_2 = 80$ cm, αντίστοιχα, από το ένα άκρο της δοκού.



Σχ. 4.2ζ

Λύση.

Το άκρο A της δοκού στηρίζεται σε άρθρωση, ενώ το άκρο B της δοκού με κύλιση. Η αντίδραση F_A στο άκρο A είναι (εν γένει) πλάγια και αναλύεται σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την $F_{A,x}$ και σε μία κατακόρυφη συνιστώσα, την $F_{A,y}$, όπως δείχνει το σχήμα 4.2ζ. Η αντίδραση F_B στο άκρο B είναι κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως, δηλαδή είναι κάθετη στον άξονα της δοκού.

Οι, F_1, F_2, F_A, και F_B αποτελούν τις τέσσερεις δυνάμεις που ενεργούν στη δοκό. Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο A, το φορτίο F_1 προσπαθεί να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα (όπως και οι δείκτες του ρολογιού). Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F_1 είναι:

$$M_1 = F_1 \cdot l_1 = 600\ \text{N} \cdot 40\ \text{cm} = 24.000\ \text{N} \cdot \text{cm}.$$

Το φορτίο F_2 προσπαθεί και αυτό να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα. Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F_2 είναι:

$$M_2 = F_2 \cdot l_2 = 400\ \text{N} \cdot 80\ \text{cm} = 32.000\ \text{N} \cdot \text{cm}.$$

Η αντίδραση F_B προσπαθεί να στρέψει τη δοκό αριστερόστροφα (αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού). Η ροπή που προκαλεί η αντίδραση F_B είναι:

$$M_B = -F_B \cdot l.$$

Επειδή η αντίδραση F_A εφαρμόζεται στο άκρο A, η ροπή της ως προς το A είναι μηδενική:

$$M_A = 0.$$

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

1) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και των φορτίων που ενεργούν στη δοκό, τόσο κατά την

οριζόντια διεύθυνση όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$F_1 + F_2 - F_{A,y} - F_B = 0 \quad (1)$$

$$F_{A,x} = 0. \quad (2)$$

2) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των αντιδράσεων και των ροπών των φορτίων που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M_1 + M_2 + M_A + M_B = 0. \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M_1 + M_2 + M_B = 0 \Leftrightarrow$$

$$M_1 + M_2 = 0 + F_B \cdot l \Leftrightarrow F_B = \frac{M_1 + M_2}{l} =$$

$$= \frac{24.000\,N \cdot cm + 32.000\,N \cdot cm}{100\,cm} = 560\,N.$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνομε:

$$F_{A,y} = F_1 + F_2 - F_B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{A,y} = 600\,N + 400\,N - 560\,N = 440\,N.$$

Από τη σχέση (2) συμπεραίνομε ότι η αντίδραση F_A έχει μηδενική οριζόντια συνιστώσα. Αυτό οφείλεται στο ότι όλα τα εφαρμοζόμενα φορτία είναι κατακόρυφα.

Άρα, οι αντιδράσεις είναι

$$F_A = 440\,N \;\; \text{και} \;\; F_B = 560\,N.$$

Παράδειγμα 3.

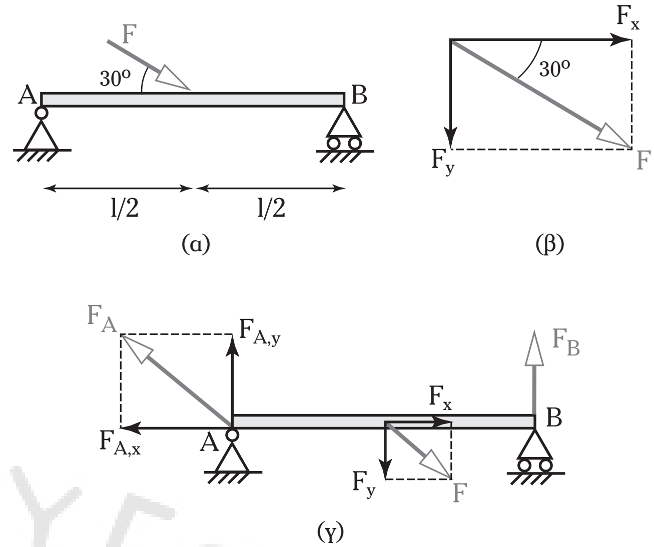
Δίνεται η αμφιέρειστη δοκός μήκους $l = 80$ cm που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2η(α). Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της όταν στο μέσο της δοκού εφαρμόζεται φορτίο F = 400 N υπό γωνία 30^o ως προς τον άξονα της δοκού.

Λύση.

Καταρχάς αναλύομε το φορτίο F = 400 N σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την F_x και σε μία κατακόρυφη, την F_y, όπως δείχνει το σχήμα 4.2η(β). Έχομε:

$$F_x = F \cdot \text{συνθ} = 400\,N \cdot \text{συν}30^o = 400\,N \cdot 0{,}866 = 346{,}4\,N.$$

$$F_y = F \cdot \text{ημθ} = 400\,N \cdot \text{ημ}30^o = 400\,N \cdot 0{,}5 = 200\,N.$$



Σχ. 4.2η

Το άκρο Α της δοκού στηρίζεται σε άρθρωση, ενώ το άκρο Β της δοκού με κύλιση. Η αντίδραση F_A στο άκρο Α είναι πλάγια και αναλύεται σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την $F_{A,x}$ και σε μία κατακόρυφη, την $F_{A,y}$, όπως δείχνει το σχήμα 4.2η(γ). Η αντίδραση F_B στο άκρο Β είναι κάθετη στην επιφάνεια κυλίσεως, δηλαδή είναι κάθετη στον άξονα της δοκού.

Οι F, F_A και F_B αποτελούν τις τρεις δυνάμεις που ενεργούν στη δοκό. Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο Α, το φορτίο F προσπαθεί να στρέψει τη δοκό δεξιόστροφα. Η ροπή που προκαλεί το φορτίο F είναι:

$$M = F_y \cdot \frac{l}{2} = 200\,N \cdot \frac{80\,cm}{2} = 8.000\,N \cdot cm.$$

Η αντίδραση F_B προσπαθεί να στρέψει τη δοκό αριστερόστροφα. Η ροπή που προκαλεί η αντίδραση F_B είναι:

$$M_B = -F_B \cdot l.$$

Επειδή, η αντίδραση F_A εφαρμόζεται στο άκρο Α, η ροπή της ως προς το Α είναι μηδενική:

$$M_A = 0.$$

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

1) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και του φορτίου που ενεργούν στη δοκό, τόσο κατά την οριζόντια διεύθυνση όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$F_x - F_{A,x} = 0. \quad (1)$$

$$F_B + F_{A,y} - F_y = 0. \qquad (2)$$

2) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των αντιδράσεων και της ροπής του φορτίου που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M + M_A + M_B = 0. \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M + M_A + M_B = 0 \Leftrightarrow M = 0 + F_B \cdot l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_B = \frac{M}{l} = \frac{8.000\,N\cdot cm}{80\,cm} = 100\,N.$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνομε:

$$F_{A,x} = F_x \Leftrightarrow F_{A,x} = 346{,}4\,N.$$

Από τη σχέση (2) λαμβάνομε:

$$F_B + F_{A,y} - F_y = 0 \Leftrightarrow$$
$$F_{A,y} = F_y - F_B = 200\,N - 100\,N = 100\,N$$[3].

Η αντίδραση F_A δίνεται από τη σχέση:

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} = \sqrt{346{,}4^2 + 100^2}\,N = 360{,}6\,N.$$

Άρα, οι αντιδράσεις είναι

$$F_A = 360{,}6\,N \text{ και } F_B = 100\,N.$$

Παράδειγμα 4.

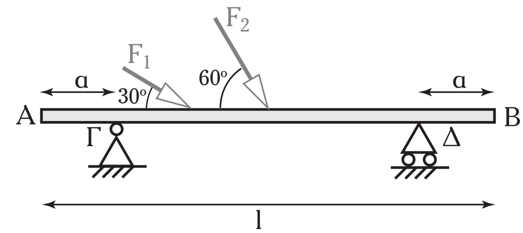
Δίνεται η αμφιπροέχουσα δοκός μήκους l=120 cm που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2θ(α). Τα δύο σημεία στηρίξεως απέχουν αποστάσεις α = 20 cm από τα άκρα της δοκού. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της, όταν στη δοκό εφαρμόζονται τα ακόλουθα δύο φορτία:

1) Το φορτίο $F_1 = 200$ N υπό γωνία 30° ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση $l_1 = 40$ cm από το άκρο Α της δοκού και

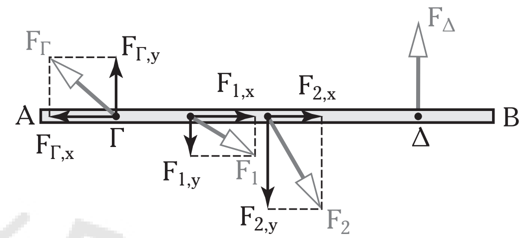
2) το φορτίο $F_2 = 500$ N υπό γωνία 60° ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση $l_2 = 60$ cm από το άκρο Α της δοκού l.

Λύση.

Καταρχάς αναλύομε τα φορτία $F_1 = 200$ N και $F_2 = 500$ N σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες:



(α)



(β)

Σχ. 4.2θ

$$F_{1,x} = F_1 \cdot συν30^o = 200\,N \cdot 0{,}866 = 173{,}2\,N \text{ και}$$

$$F_{1,y} = F_1 \cdot ημ30^o = 200\,N \cdot 0{,}5 = 100\,N$$

$$F_{2,x} = F_2 \cdot συν60^o = 500\,N \cdot 0{,}5 = 250\,N \text{ και } F_{2,y} = F_2 \cdot ημ60^o = 500\,N \cdot 0{,}866 = 433\,N.$$

Η δοκός στηρίζεται στο σημείο Γ σε άρθρωση και στο Δ σε κύλιση. Η αντίδραση $F_Γ$ στο σημείο Γ είναι πλάγια και αναλύεται στην οριζόντια $F_{Γ,x}$ και στην κατακόρυφη συνιστώσα $F_{Γ,y}$ [σχ. 4.2θ(β)]. Η αντίδραση $F_Δ$ στο σημείο Δ είναι κάθετη στην επιφάνεια, δηλαδή κάθετη στον άξονα της δοκού.

Οι F_1, F_2, $F_Γ$ και $F_Δ$ αποτελούν τις δυνάμεις που ενεργούν στη δοκό. Λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο Α, τα φορτία F_1 και F_2 προσπαθούν να στρέψουν τη δοκό δεξιόστροφα. Οι ροπές που προκαλούν τα φορτία F_1 και F_2 είναι:

$$M_1 = F_{1,y} \cdot l_1 = 100\,N \cdot 40\,cm = 4.000\,N\cdot cm \text{ και}$$

$$M_2 = F_{2,y} \cdot l_2 = 433\,N \cdot 60\,cm = 25.980\,N\cdot cm.$$

Οι αντιδράσεις $F_Γ$ και $F_Δ$ προσπαθούν να στρέψουν τη δοκό αριστερόστροφα. Οι ροπές που προκαλούν είναι:

$$M_Γ = F_{Γ,y} \cdot α = -20\,cm \cdot F_{Γ,y} \text{ και}$$

$$M_Δ = -F_Δ \cdot (l - α) = -100\,cm \cdot F_Δ.$$

[3] Παρατηρούμε ότι οι $F_{A,y}$ και F_B είναι ίσες μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στο ότι το φορτίο εφαρμόζεται στο μέσο της δοκού. Εάν το φορτίο εφαρμοζόταν σε άλλο σημείο της δοκού, τότε οι αντιδράσεις δεν θα ήταν ίσες.

Επειδή η δοκός βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύει ότι:

1) Το αλγεβρικό άθροισμα των αντιδράσεων και των φορτίων που ενεργούν στη δοκό, τόσο κατά την οριζόντια διεύθυνση, όσο και κατά την κατακόρυφη ισούται με μηδέν:

$$F_{1,x} + F_{2,x} - F_{\Gamma,x} = 0 \qquad (1)$$

$$F_{\Gamma,y} + F_{\Delta} - F_{1,y} - F_{2,y} = 0. \qquad (2)$$

2) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των αντιδράσεων και των ροπών των φορτίων που ενεργούν στη δοκό ισούται με μηδέν:

$$M_1 + M_2 + M_{\Gamma} + M_{\Delta} = 0. \qquad (3)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνομε:

$$F_{1,x} + F_{2,x} - F_{\Gamma,x} = 0 \Leftrightarrow F_{\Gamma,x} = F_{1,x} + F_{2,x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_{\Gamma,x} = 173{,}2\ N + 250\ N = 423{,}2\ N.$$

Από τη σχέση (2) λαμβάνομε:

$$F_{\Gamma,y} + F_{\Delta} = F_{1,y} + F_{2,y} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_{\Gamma,y} + F_{\Delta} = 100\ N + 433\ N \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_{\Gamma,y} + F_{\Delta} = 533\ N. \qquad (4)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνομε:

$$M_1 + M_2 = -(M_{\Gamma} + M_{\Delta}) \Leftrightarrow 20 \cdot F_{\Gamma,y} + 100 \cdot F_{\Delta} =$$
$$= 29.980\ N \Leftrightarrow F_{\Gamma,y} + 5 \cdot F_{\Delta} = 1.499\ N. \qquad (5)$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (5) και (4) κατά μέλη έχομε:

$$4 \cdot F_{\Delta} = 1.499\ N - 533\ N \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_{\Delta} = \frac{966}{4} N = 241{,}5\ N.$$

Έτσι, από τη σχέση (4) έχομε:

$$F_{\Gamma,y} = 533\ N - F_{\Delta} = 533\ N - 241{,}5\ N = 291{,}5\ N.$$

Η αντίδραση F_{Γ} δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\Gamma} = \sqrt{F_{\Gamma,x}^2 + F_{\Gamma,y}^2} =$$
$$= \sqrt{423{,}2^2 + 291{,}5^2} N = 513{,}9\ N.$$

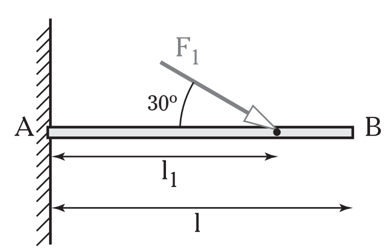
Άρα, οι αντιδράσεις είναι

$$F_{\Gamma} = 513{,}9\ N \text{ και } F_{\Delta} = 241{,}5\ N.$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσομε ότι δεν είναι πάντοτε εφικτός ο υπολογισμός των αγνώστων αντιδράσεων των στηριγμάτων χρησιμοποιώντας μόνο τις σχέσεις (4.1) και (4.2). Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει μόνο όταν οι άγνωστες αντιδράσεις είναι ίσες με το πλήθος των εξισώσεων που ορίζουν οι σχέσεις (4.1) και (4.2). Η σχέση (4.1) αναλύεται σε δύο εξισώσεις (βλ. σχέση 4.3)· μία για τις οριζόντιες συνιστώσες των δυνάμεων και μία για τις κατακόρυφες. Η σχέση (4.2) αναλύεται σε μία εξίσωση. Έτσι έχομε συνολικά τρεις εξισώσεις και άρα μπορούμε να επιλύσομε τα προβλήματα, στα οποία έχουμε τρεις άγνωστες αντιδράσεις. Τέτοιου είδους είναι τα προβλήματα των παραδειγμάτων 1-4. Ωστόσο, υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες έχομε περισσότερες από τρεις άγνωστες αντιδράσεις, όπως η συνεχής δοκός με τέσσερα στηρίγματα, του σχήματος 4.2ε(στ). Το ένα στήριγμα αφορά σε άρθρωση και τα υπόλοιπα σε κύλιση. Στο πρώτο στήριγμα έχομε άγνωστη την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της αντιδράσεως (δύο συνιστώσες) και σε καθένα από τα τρία στηρίγματα της κυλίσεως έχομε άγνωστη την κατακόρυφη συνιστώσα της αντιδράσεως. Έτσι έχομε πέντε άγνωστες αντιδράσεις, ενώ οι εξισώσεις μας είναι τρεις. Επομένως, για να υπολογιστούν οι άγνωστες αντιδράσεις χρειάζονται και άλλες συνθήκες πέραν των σχέσεων (4.1) και (4.2).

Ασκήσεις.

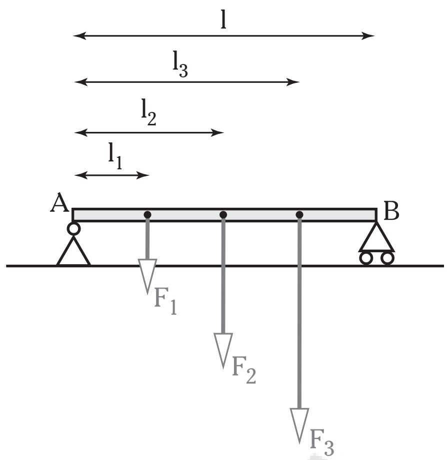
1. *Δίνεται η πρόβολος δοκός μήκους $l = 100\ cm$ (σχ. 4.2ι). Σε απόσταση $l_1 = 80\ cm$ από το σημείο πακτώσεως Α ενεργεί φορτίο $F_1 = 80\ N$ υπό γωνία 30^o ως προς τον άξονα της δοκού, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Να υπολογιστούν η αντίδραση και η ροπή πακτώσεως στο άκρο στηρίξεως Α.*



Σχ. 4.2ι

2. *Για την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 4.2ια, που έχει μήκος $l = 80\ cm$, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της όταν σ' αυτήν εφαρμόζονται τρία κατακόρυφα φορτία $F_1 = 120\ N$, $F_2 = 160\ N$ και $F_3 = 180\ N$ σε αποστά-*

σεις $l_1 = 20\,cm$, $l_2 = 40\,cm$ και $l_3 = 60\,cm$, αντίστοιχα, από το ένα άκρο της δοκού.



Σχ. 4.2ια

3. *Δίνεται η αμφιέρειστη δοκός μήκους $l = 180\,cm$ που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2ιβ. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στα δύο σημεία στηρίξεώς της, όταν στη δοκό εφαρμόζονται τα ακόλουθα τρία φορτία:*

α) Το φορτίο $F_1 = 100\,N$ υπό γωνία 30^o ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση $l_1 = 50\,cm$ από το άκρο A.

β) Το φορτίο $F_2 = 200\,N$ υπό γωνία 45^o ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση $l_2 = 100\,cm$ από το άκρο A.

γ) Το φορτίο $F_3 = 100\,N$ υπό γωνία 60^o ως προς τον άξονα της δοκού σε απόσταση $l_2 = 140\,cm$ από το άκρο A, όπως δείχνει το σχήμα 4.2ιβ.

4.3 Ορθές και τέμνουσες δυνάμεις, καμπτικές ροπές.

Στην παράγραφο 1.12 είδαμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις που ενεργούν σ' ένα σώμα, για παράδειγμα σε μία δοκό, λόγω της επιδράσεως εξωτερικών δυνάμεων είναι αυτές που προέρχονται από τις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων του υλικού της δοκού. Οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις, με κριτήριο τη διεύθυνσή τους ως προς τη διατομή της δοκού, διακρίνονται σε ***ορθές*** και ***τέμνουσες***.

1) ***Ορθή δύναμη*** μίας διατομής δοκού ονομάζεται η εσωτερική δύναμη που ενεργεί κάθετα στην εν λόγω διατομή [σχ. 4.3α(α)]. Η φορά της ορθής δυνάμεως σε μία διατομή δοκού καθορίζει εάν έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό ή καταπόνηση σε θλίψη. Εάν η ορθή δύναμη έχει φορά προς το εσωτερικό της δοκού, τότε έχομε καταπόνηση σε θλίψη. Εάν έχει φορά προς το εξωτερικό της δοκού, τότε έχομε καταπόνηση σε εφελκυσμό.

2) ***Τέμνουσα δύναμη*** μιας διατομής δοκού ονομάζεται η εσωτερική δύναμη που βρίσκεται επάνω στο επίπεδο της διατομής [σχ. 4.3α(β)].

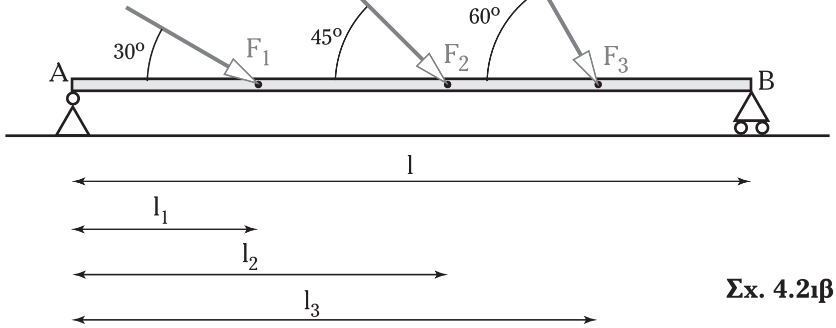
Στις διατομές όπου υπάρχουν τέμνουσες δυνάμεις αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις.

Εκτός από τις ορθές και τις τέμνουσες δυνάμεις, στα μεγέθη που χαρακτηρίζουν την εντατική κατάσταση ενός σώματος ανήκουν και οι καμπτικές ροπές.

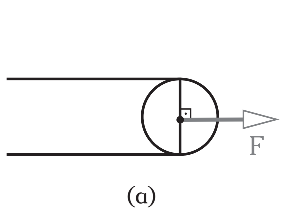
Καμπτική ροπή ή ***ροπή κάμψεως*** σε μια συγκεκριμένη θέση δοκού ονομάζεται το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς την εν λόγω θέση όλων των δυνάμεων που βρίσκονται αριστερά της θέσεως αυτής.

Η έννοια των καμπτικών ροπών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μελέτη της καταπονήσεως της κάμψεως, την οποία μελετούμε στο Κεφάλαιο 5. Προς το παρόν σημειώνομε ότι σε όποιες περιοχές δοκού η καμπτική ροπή είναι θετική, τότε οι κάτω ίνες της στις περιοχές αυτές εφελκύονται, ενώ οι πάνω θλίβονται. Αντίθετα, σε όποιες περιοχές μιας δοκού η καμπτική ροπή είναι αρνητική, τότε οι κάτω ίνες της δοκού στις περιοχές αυτές θλίβονται, ενώ οι πάνω εφελκύονται.

Οι μονάδες μετρήσεως των ορθών και των τε-



Σχ. 4.2ιβ



Σχ. 4.3α
(α) Ορθή δύναμη. (β) Τέμνουσα δύναμη.

μνουσών δυνάμεων (μονάδες δυνάμεως) είναι στο Διεθνές Σύστημα το 1 N, στο C.G.S. το 1 dyn, στο Τεχνικό Σύστημα το 1 kp και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το 1 lb. Οι μονάδες μετρήσεως των καμπτικών ροπών (μονάδες ροπής) είναι στο Διεθνές Σύστημα το 1 N·m, στο C.G.S. το 1 dyn·cm, στο Τεχνικό Σύστημα το1 kp·m και στο Αγγλικό Τεχνικό Σύστημα το 1 lb·ft.

Από τους ορισμούς της ορθής και της τέμνουσας δυνάμεως προκύπτει ότι τόσο η ορθή, όσο και η τέμνουσα δύναμη αφορούν στη συγκεκριμένη διατομή της δοκού, στην οποία αντιστοιχούν. Η ορθή και η τέμνουσα δύναμη της διατομής μιας δοκού δεν χαρακτηρίζουν από μόνες τους την κατάσταση φορτίσεως της δοκού. Κατ' ανάλογο τρόπο η καμπτική ροπή αφορά στη συγκεκριμένη διατομή της δοκού, στην οποία αντιστοιχεί. Η καμπτική ροπή της διατομής μιας δοκού δεν χαρακτηρίζει από μόνη της την κατάσταση φορτίσεως της δοκού.

Η κατάσταση φορτίσεως της δοκού χαρακτηρίζεται από το σύνολο των τιμών των ορθών δυνάμεων, το σύνολο των τιμών των τεμνουσών δυνάμεων και το σύνολο των τιμών των καμπτικών ροπών που αντιστοιχούν σε όλες τις διατομές της δοκού. Δηλαδή, η κατάσταση φορτίσεως της δοκού χαρακτηρίζεται από τη χωρική εξέλιξη της ορθής δυνάμεως κατά μήκος της δοκού, από τη χωρική εξέλιξη της τέμνουσας δυνάμεως κατά μήκος της δοκού και από τη χωρική εξέλιξη της καμπτικής ροπής κατά μήκος της δοκού. Η χωρική εξέλιξη της ορθής δυνάμεως κατά μήκος της δοκού παρουσιάζεται στο Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ). Η χωρική εξέλιξη της τέμνουσας δυνάμεως κατά μήκος της δοκού παρουσιάζεται στο Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ). Η χωρική εξέλιξη της καμπτικής ροπής κατά μήκος της δοκού παρουσιάζεται στο Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ).

4.3.1 Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.

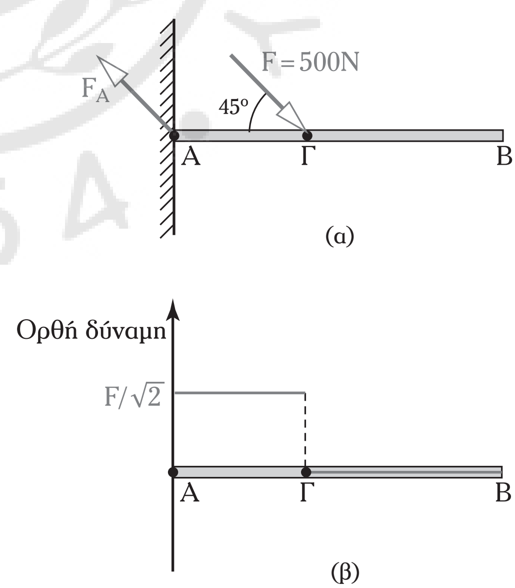
Ως ***Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ)*** μιας δοκού ονομάζεται η γραφική παράσταση της ορθής δυνάμεως σε κάθε διατομή της δοκού ως προς την απόσταση κάθε διατομής από το ένα άκρο της.

Το σχήμα 4.3β(β) παρουσιάζει ως παράδειγμα το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ) για τη δοκό του σχήματος 4.3β(α). Η δοκός είναι μία πρόβολος δοκός, στο σημείο Γ της οποίας ενεργεί φορτίο F υπό γωνία 45°, ενώ στο άκρο της Α ενεργεί η αντίδραση F_A από το στήριγμα που είναι αντίθετη της F. Ο κατακόρυφος άξονας του ΔΟΔ αντιστοιχεί στο μέγεθος της ορθής δυνάμεως και ο οριζόντιος στην απόσταση από το αριστερό άκρο της δοκού. Από το σχήμα 4.3β(β) παρατηρούμε ότι η ορθή δύναμη είναι σταθερή στο τμήμα της δοκού μεταξύ των σημείων Α και Γ και μηδενική μεταξύ των σημείων Γ και Β.

Η κατασκευή του Διαγράμματος Ορθών Δυνάμεων μίας δοκού σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως προϋποθέτει τον υπολογισμό των ορθών δυνάμεων για όλες τις διατομές της δοκού. Ο ***υπολογισμός των ορθών δυνάμεων*** σε μία δοκό γίνεται εφαρμόζοντας τους ακόλουθους κανόνες:

1) Η ορθή δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή μιας δοκού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής και

2) η ορθή δύναμη λαμβάνεται θετική εάν εφελκύει την τυχούσα διατομή και αρνητική εάν τη θλίβει.



Σχ. 4.3β
(α) Πρόβολος δοκός σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως. (β) Το Διάγραμμας Ορθών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στη δοκό.

Παράδειγμα 5.

Να σχεδιαστεί το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων της αμφιέρειστης δοκού του παραδείγματος 3.

Λύση.

Ήδη από το παράδειγμα 3 γνωρίζομε ότι το φορτίο F = 400 N αναλύεται σε δύο συνιστώσες: σε μία οριζόντια, την $F_x = 346{,}4$ N και σε μία κατακόρυφη συνιστώσα, την $F_y = 200$ N. Επίσης, υπολογίσαμε τις αντιδράσεις των στηριγμάτων: $F_A = 360{,}6$ N και $F_B = 100$ N. Η αντίδραση F_A αναλύεται στην οριζόντια συνιστώσα $F_{A,x} = 346{,}4$ N και την κατακόρυφη $F_{A,y} = 100$ N.

Η ορθή δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή της δοκού ΑΒ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής.

Χωρίζομε τη δοκό στα εξής δύο τμήματα:

1) ***Τμήμα ΑΓ***, όπου Γ είναι το σημείο εφαρμογής του φορτίου F.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΑΓ [σχ. 4.3γ(α)], πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού ενεργεί μόνο η δύναμη $F_{A,x} = 346{,}4$ N. Η δύναμη αυτή εφελκύει τη διατομή. Συνεπώς, η ορθή δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΑΓ είναι θετική και ίση με 346,4 N.

2) ***Τμήμα ΓΒ.***

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΓΒ [σχ. 4.3γ(α)], πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού ενεργούν οι δυνάμεις $F_{A,x} = 346{,}4$ N και $F_x = 346{,}4$ N. Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες και έτσι το αλγεβρικό άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν. Συνεπώς, η ορθή δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΓΒ είναι μηδενική.

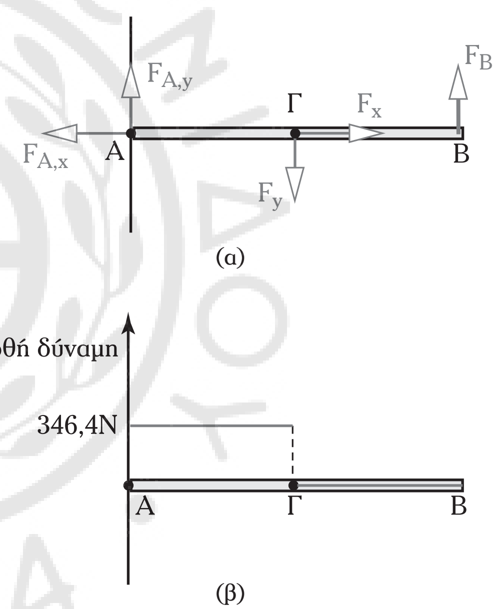
Με βάση τα παραπάνω, το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων της δοκού διαμορφώνεται όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.3γ(β).

4.3.2 Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.

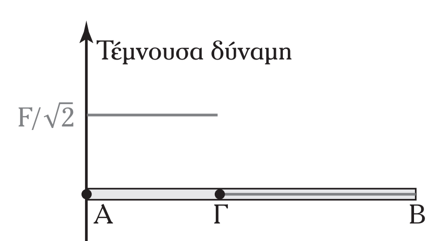
Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ) δοκού ονομάζεται η γραφική παράσταση της τέμνουσας δυνάμεως σε κάθε διατομή της δοκού ως προς την απόσταση κάθε διατομής απ' το ένα άκρο της.

Το σχήμα 4.3δ παρουσιάζει ως παράδειγμα το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων για τη δοκό του σχήματος 4.3β(α). Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο μέγεθος της τέμνουσας δυνάμεως και ο οριζόντιος στην απόσταση από το αριστερό άκρο της δοκού. Από το σχήμα 4.3δ παρατηρούμε ότι η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή στο τμήμα της δοκού μεταξύ των σημείων Α και Γ και μηδενική μεταξύ των σημείων Γ και Β. Η ομοιότητα του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων με το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων για τη δοκό του σχήματος 4.3β(α) είναι συμπτωματική (τυχαία) και οφείλεται στο γεγονός ότι το φορτίο δρα υπό γωνία 45°. Στη γενική περίπτωση το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων μιας δοκού είναι διαφορετικό από το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεών της.

Η κατασκευή του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων μίας δοκού σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως προϋποθέτει τον υπολογισμό των τεμνουσών δυνάμεων για όλες τις διατομές της. Ο ***υπολο-***



Σχ. 4.3γ
Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στη δοκό του παραδείγματος 3.



Σχ. 4.3δ
Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στο δοκό του σχήματος 4.3β(α).

γισμός των τεμνουσών δυνάμεων σε μια δοκό γίνεται εφαρμόζοντας τους εξής κανόνες:

1) Η τέμνουσα δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή μιας δοκού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν κάθετα στον άξονά της και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής.

2) Η φορά της τέμνουσας δυνάμεως είναι αντίθετη απ' αυτήν που δείχνει το πρόσημο του αλγεβρικού αθροίσματος και

3) η τέμνουσα δύναμη λαμβάνεται[4] θετική όταν κατευθύνεται προς τα κάτω και αρνητική όταν κατευθύνεται προς τα πάνω.

Παράδειγμα 6.

Να σχεδιαστεί το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων της αμφιέρειστης δοκού του παραδείγματος 3.

Λύση.

Η τέμνουσα δύναμη που ενεργεί σε τυχούσα διατομή της δοκού ΑΒ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν κάθετα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής.

Χωρίζομε τη δοκό στα εξής δύο τμήματα:

1) ***Τμήμα ΑΓ.***

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΑΓ (σχ. 4.3ε), κάθετα στον άξονα της δοκού ενεργεί μόνο η δύναμη $F_{A,y} = 100$ N. Η δύναμη αυτή κατευθύνεται προς τα πάνω. Συνεπώς, η τέμνουσα δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΑΓ κατευθύνεται προς τα κάτω και είναι θετική και ίση με 100 N.

2) ***Τμήμα ΓΒ***

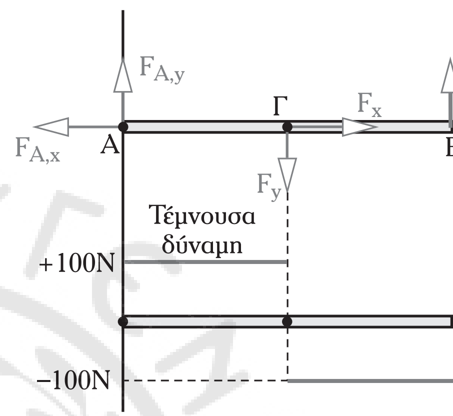
Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΓΒ (σχ. 4.3ε), κάθετα στον άξονα της δοκού ενεργούν οι δυνάμεις $F_{A,y} = 100$ N και $F_y = 200$ N. Η συνισταμένη τους είναι ίση με 100 N και έχει φορά προς τα κάτω. Συνεπώς, η τέμνουσα δύναμη σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΓΒ κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική και ίση με 100 N.

Με βάση τα ανωτέρω, το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων της δοκού διαμορφώνεται όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.3ε.

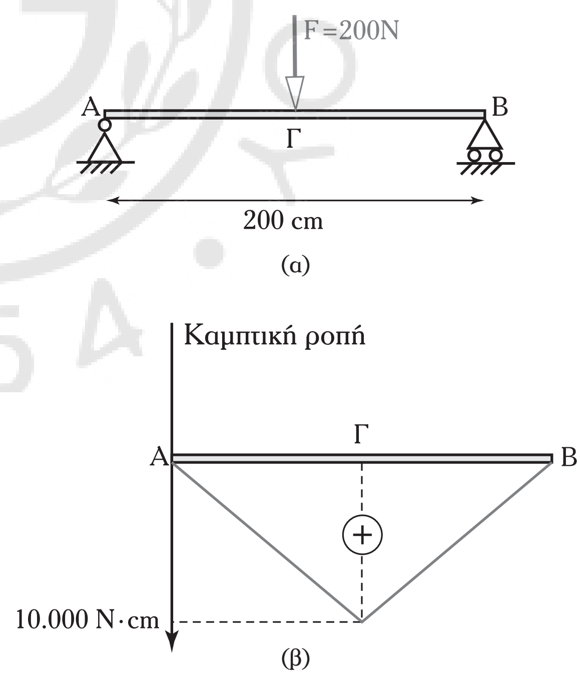
4.3.3 Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ) μιας δοκού ονομάζεται η γραφική παράσταση της καμπτικής ροπής σε κάθε διατομή της δοκού ως προς την απόσταση κάθε διατομής από το ένα άκρο της.

Το σχήμα 4.3στ(β) παρουσιάζει ως παράδειγμα το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών για την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 4.3στ(α), στο μέσο της οποίας εφαρμόζεται κατακόρυφο φορτίο F. Ο κατακόρυφος άξονας του διαγράμματος αντιστοιχεί στο μέγεθος



Σχ. 4.3ε
Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων που αντιστοιχεί στη δοκό του Παραδείγματος 3.



Σχ. 4.3στ
(α) Αμφιέρειστη δοκός. (β) Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών που αντιστοιχεί στη δοκό.

---
[4] Το πρόσημο τίθεται συμβατικά.

της καμπτικής ροπής και ο οριζόντιος στην απόσταση απ' το αριστερό άκρο της δοκού. Από το σχήμα 4.3στ(β) παρατηρούμε ότι η καμπτική ροπή είναι θετική σε όλο το μήκος της δοκού. Επίσης, η καμπτική ροπή έχει τη μέγιστη τιμή της ($+10.000\,\text{N}\cdot\text{cm}$) στο μέσο της ράβδου Γ. Η καμπτική ροπή αυξάνει γραμμικά από την τιμή 0 στη μέγιστη τιμή της στο τμήμα ΑΓ της δοκού και μειώνεται γραμμικά από τη μέγιστη τιμή της στην τιμή 0 στο τμήμα ΓΒ της δοκού.

Η κατασκευή του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών μίας δοκού σε συγκεκριμένη κατάσταση φορτίσεως προϋποθέτει τον υπολογισμό των καμπτικών ροπών για όλες τις διατομές της. Ο ***υπολογισμός των καμπτικών ροπών*** σε μία δοκό γίνεται εφαρμόζοντας τους εξής κανόνες:

1) Η καμπτική ροπή τυχούσας διατομής μιας δοκού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν στη δοκό και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής. Οι ροπές των δυνάμεων υπολογίζονται ως προς το κέντρο της διατομής.

2) Η φορά της καμπτικής ροπής είναι αντίθετη απ' αυτήν που δείχνει το πρόσημο του αλγεβρικού αθροίσματος και

3) η καμπτική ροπή λαμβάνεται θετική όταν είναι αριστερόστροφη και αρνητική όταν είναι δεξιόστροφη.

Παράδειγμα 7.

Να σχεδιαστεί το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών της αμφιέρειστης δοκού του παραδείγματος 3.

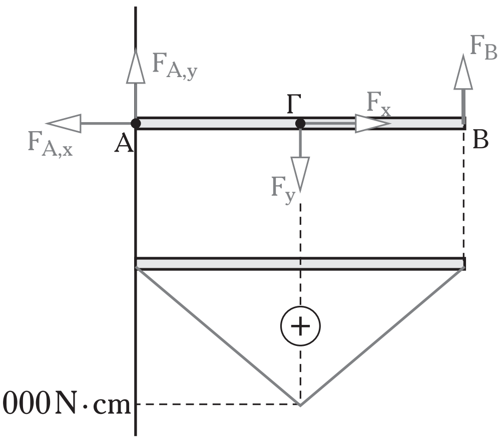
Λύση.

Η καμπτική ροπή που ενεργεί σε τυχούσα διατομή της δοκού ΑΒ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν και βρίσκονται προς τα αριστερά της υπό εξέταση τυχούσας διατομής. Οι ροπές των δυνάμεων υπολογίζονται ως προς το κέντρο της διατομής.

Χωρίζομε τη δοκό στα εξής δύο τμήματα:

1) ***Τμήμα ΑΓ***.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΑΓ (σχ. 4.3ζ), ενεργεί μόνο η ροπή της δυνάμεως $F_{A,y}=100\,\text{N}$. Για τη διατομή που βρίσκεται σε απόσταση x, $0\leq x\leq 40\,\text{cm}$, από το άκρο Α, η ροπή της δυνάμεως αυτής ισούται με $M=F_{A,y}\cdot x=100\cdot x$ και έχει φορά δεξιόστροφη. Συνεπώς, η καμπτική ροπή σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΑΓ που βρίσκεται σε απόσταση, x, $0\leq x\leq 40\,\text{cm}$, από το άκρο Α, είναι αριστερόστροφη και άρα θετική και εξαρτάται από την απόσταση x μέσω της σχέσεως $100\cdot x$, όπου $0\leq x\leq 40\,\text{cm}$. Η σχέση αυτή είναι γραμμική.



Σχ. 4.3ζ
Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών που αντιστοιχεί στη δοκό του παραδείγματος 3.

2) ***Τμήμα ΓΒ***.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΓΒ (σχ. 4.3ζ), ενεργούν οι ροπές των δυνάμεων $F_{A,y}=100\,\text{N}$ και $F_y=200\,\text{N}$. Για τη διατομή που βρίσκεται σε απόσταση x, $40<x\leq 80\,\text{cm}$, από το άκρο Α, η ροπή της δυνάμεως $F_{A,y}$ ισούται με $M_1=F_{A,y}\cdot x=100\cdot x$ και η ροπή της δυνάμεως F_y ισούται με $M_2=F_{A,y}\cdot(x-40)=200\cdot(x-40)$.

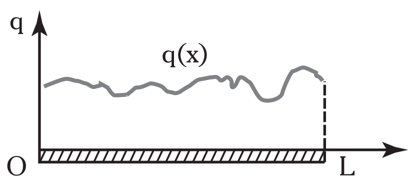
Η συνισταμένη των δύο ροπών είναι ίση με $M=M_1-M_2=100\cdot x-200\cdot(x-40)=8.000-100\cdot x$ και έχει φορά δεξιόστροφη. Συνεπώς, η καμπτική ροπή σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού στο τμήμα ΓΒ που βρίσκεται σε απόσταση x, $40<x\leq 80\,\text{cm}$, από το άκρο Α, είναι αριστερόστροφη άρα θετική και εξαρτάται από την απόσταση x μέσω της σχέσεως $8.000-100\cdot x$, όπου $40<x\leq 80\,\text{cm}$. Η σχέση αυτή είναι γραμμική.

Με βάση τα ανωτέρω, το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών της δοκού διαμορφώνεται όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.3ζ.

4.3.4 Η περίπτωση των κατανεμημένων φορτίων.

Αντίστοιχα όσων αναφέραμε για τα συγκεντρωμένα φορτία (παράγρ. 4.3.1 – 4.3.3) ισχύουν και για τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων ΔΟΔ, ΔΤΔ και ΔΚΡ για τις περιπτώσεις των κατανεμημένων φορτίων. Ειδικότερα, ας θεωρήσομε την φόρτιση της δοκού μήκους L του σχήματος 4.3η με το κατανεμημένο φορτίο που δίνεται από τη σχέση $q=q\,(x)$.

Η σχέση αυτή ονομάζεται καμπύλη φορτίσεως και εκφράζει το φορτίο σε συνάρτηση με την απόσταση x από το άκρο Α της δοκού. Στη γενική περίπτωση η q(x) αφορά σε φορτίο ανομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος της δοκού.



Σχ. 4.3η
Φόρτιση δοκού με κατανεμημένο φορτίο.

Για τη σχεδίαση των ΔΟΔ, ΔΤΔ και ΔΚΡ απαιτείται αρχικά ο προσδιορισμός του μεγέθους και της θέσεως στην οποία ενεργεί η συνισταμένη δύναμη (φορτίο) F. Η συνισταμένη F υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$F = \int_0^L q(x)dx \qquad (4.4)$$

η οποία εκφράζει την F ως το άθροισμα όλων των επιμέρους συνιστωσών q(x) κατά μήκος της δοκού. Η θέση x_F της συνισταμένης F υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη ότι η ροπή της ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών, δηλαδή:

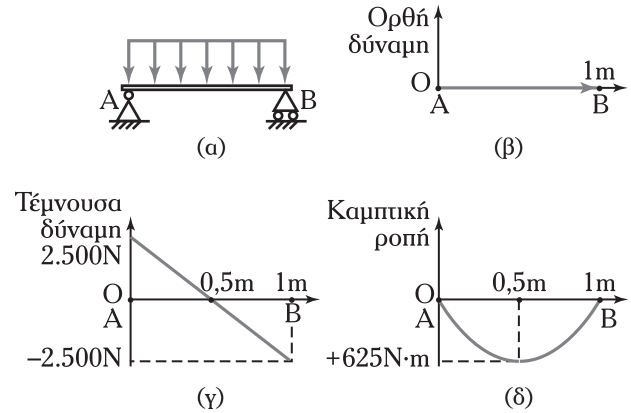
$$F \cdot x_F = \int_0^L x \cdot q(x)dx \Leftrightarrow x_F = \frac{\int_0^L x \cdot q(x)dx}{F}. \qquad (4.5)$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι αντιδράσεις στα άκρα στηρίξεως της δοκού. Ο υπολογισμός βασίζεται στις συνθήκες στατικής ισορροπίας της δοκού, δηλαδή στις εξισώσεις (4.2) και (4.3).

Οι υπολογισμοί των ορθών δυνάμεων, των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών πραγματοποιείται εφαρμόζοντας τους κανόνες που αναφέραμε στις παράγραφους 4.3.1, 4.3.2 και 4.3.3, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι τα απαιτούμενα αθροίσματα όλων των δυνάμεων ή όλων των ροπών που απαιτούνται για τους υπολογισμούς υπολογίζονται με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού (βλ. τα παραδείγματα που ακολουθούν).

Παράδειγμα 8.

Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος 4.3θ(α) έχει μήκος L=1 m και φορτίζεται με κατακόρυφο, ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q = 5.000 N/m σε όλο το μήκος της. Να σχεδιαστούν:



Σχ. 4.3θ
(α) Η δοκός του Παραδείγματος 8 (β) Το ΔΟΔ (γ) Το ΔΤΔ (δ) Το ΔΚΡ.

1) το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ).
2) το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ).
3) το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ).

Λύση.

Επειδή το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο, το συνολικό φορτίο που καταπονεί τη δοκό είναι:

$$F = \int_0^L q dx = q \cdot \int_0^L dx = q \cdot L = \frac{5.000\,N}{m} \cdot 1\,m = 5.000\,N.$$

Η θέση x_F της συνισταμένης F υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη ότι η ροπή της ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών, δηλαδή:

$$F \cdot x_F = \int_0^L x \cdot q dx \Leftrightarrow x_F = \frac{q \cdot \int_0^L x \cdot dx}{F} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_F = \frac{q \cdot \frac{1}{2} \cdot L^2}{q \cdot L} = \frac{L}{2} = \frac{1\,m}{2} = 0,5\,m.$$

Με άλλα λόγια, η συνισταμένη βρίσκεται στο μέσο της δοκού, όπως αναμενόταν, λόγω της συμμετρίας.

Οι αντιδράσεις F_A και F_B στα άκρα Α και Β της δοκού, αντίστοιχα, είναι τέτοιες ώστε:

$$F = F_A + F_B. \qquad (1)$$

Επίσης, λόγω της συμμετρίας οι αντιδράσεις F_A και F_B είναι ίσες, δηλαδή:

$$F_A = F_B. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνομε ότι:

$$F_A = F_B = \frac{F}{2} = 2.500\,N. \qquad (3)$$

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού που βρίσκεται στη θέση x δεν ενεργεί καμία δύναμη πάνω ή παράλληλα στον άξονα της δοκού. Συνεπώς, το ΔΟΔ της δοκού που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.3θ(β) απεικονίζει τη μηδενική ορθή δύναμη κατά μήκος της δοκού.

Αντίθετα, αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν δυνάμεις κάθετα στον άξονα της δοκού. Ειδικότερα, ενεργούν η αντίδραση F_A και το κατακόρυφο, ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο από το άκρο Α μέχρι την θέση της διατομής. Η αντίδραση F_A κατευθύνεται προς τα πάνω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα κάτω και είναι θετική. Το κατακόρυφο, ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο από το άκρο Α μέχρι την θέση της διατομής κατευθύνεται προς τα κάτω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική. Έτσι, η συνολική τέμνουσα δύναμη F(x) στη θέση x παρέχεται από τη σχέση:

$$F(x) = F_A - \int_0^x q dy = F_A - q \cdot \int_0^x dy =$$
$$= F_A - q \cdot x = 2.500\,N - 5.000\,N/m \cdot x. \qquad (4)$$

Το σχήμα 4.3θ(γ) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (4) η οποία αποτελεί το ΔΤΔ της δοκού. Η εξίσωση (4) είναι πρώτου βαθμού και απεικονίζεται με μια ευθεία με αρνητική κλίση που τέμνει τον άξονα των τετμημένων για $x = 1/2\,m$.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν η ροπή της αντιδράσεως F_A και η ροπή του κατακόρυφου, ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου από το άκρο Α μέχρι την θέση της διατομής. Η ροπή της αντιδράσεως F_A έχει μέτρο $F_A \cdot x$ και φορά δεξιόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι αριστερόστροφη και άρα θετική. Η ροπή του κατακόρυφου, ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου από το άκρο Α μέχρι την θέση της διατομής είναι αριστερόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι δεξιόστροφη και άρα αρνητική. Έτσι, η συνολική καμπτική ροπή M(x) στη θέση x παρέχεται από τη σχέση:

$$M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x y \cdot q dy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - 2\int_0^x y \cdot dy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M(x) = 2.500\,N \cdot x - 2500\,N/m \cdot x^2. \qquad (5)$$

Το σχήμα 4.3θ(δ) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (5) η οποία αποτελεί το ΔΚΡ της δοκού. Η εξίσωση (5) είναι δευτέρου βαθμού και απεικονίζεται με μία παραβολή. Για $x = 0$, η (5) δίνει $M(0) = 0$. Επίσης, για $x = L = 1\,m$, η (5) δίνει $M(L) = 0$. Η μέγιστη τιμή της ροπής κάμψεως λαμβάνεται για $x = L/2 = 1/2\,m$ και είναι ίση με $M(L/2) = 625\,N \cdot m$.

Παράδειγμα 9.

Η δοκός του σχήματος 4.3ι(α) έχει μήκος $L = 4\,m$ και φορτίζεται με κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο σε όλο το μήκος της. Η μέγιστη τιμή της φορτίσεως είναι $q(L) = 4.000\,N/m$ και η ελάχιστη τιμή $q(0) = 0$. Να σχεδιαστούν:

α) το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ) και

β) το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ).

Λύση.

Η δοκός, όπως φαίνεται από το σχήμα 4.3ι(α) είναι αμφιέρειστη και φορτίζεται με τριγωνικό φορτίο σε όλο το μήκος της. Η εξίσωση φορτίσεως είναι γραμμική και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$q(x) = \alpha \cdot x + b. \qquad (1)$$

Δεδομένου ότι $q(0) = 0$ και $q(L) = 4.000\,N/m$, από την εξίσωση (1) έχομε:

$$q(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

$$q(L) = \frac{4.000\,N}{m} \Leftrightarrow \alpha \cdot L = \frac{4.000\,N}{m} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{4.000\,N}{4 \cdot m^2} = 1.000\frac{N}{m^2}.$$

Άρα η εξίσωση φορτίσεως είναι:

$$q(x) = 1.000\frac{N}{m^2} \cdot x. \qquad (2)$$

Η συνισταμένη του συνολικού φορτίου που καταπονεί τη δοκό είναι:

$$F = \int_0^L q(x)dx = \int_0^L \alpha \cdot x dx = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot L^2 =$$
$$= 1.000\frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 m^2 = 8.000\,N.$$

Η θέση x_F της συνισταμένης F υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη ότι η ροπή της ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών, δηλαδή:

$$F \cdot x_F = \int_0^L x \cdot q(x)dx \Leftrightarrow x_F = \frac{\int_0^L x \cdot q(x)dx}{F} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_F = \frac{\int_0^L \alpha \cdot x^2 dx}{F} \Leftrightarrow x_F = \frac{\alpha \cdot L^3}{3 \cdot F} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_F = \frac{1.000 \frac{N}{m^2} \cdot 4^3 m^3}{3 \cdot 8.000\,N} = 2{,}666\,m.$$

Οι αντιδράσεις F_A και F_B στα άκρα A και B της δοκού, αντίστοιχα, είναι τέτοιες ώστε:

$$F = F_A + F_B. \quad (3)$$

Από τη στατική ισορροπία της δοκού για τη συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν στη δοκό ως προς το άκρο A έχομε:

$$F \cdot x_F - F_B \cdot L = 0. \quad (4)$$

Από την εξίσωση (4) έχομε:

$$F_B = \frac{F \cdot x_F}{L} = \frac{8.000\,N \cdot 2{,}666\,m}{4\,m} = 5.333\,N.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3) λαμβάνομε:

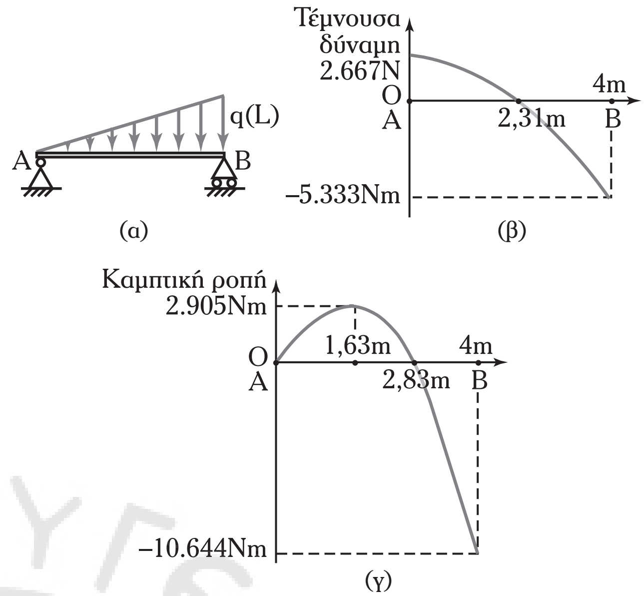
$$F_A = F - F_B = 8.000\,N - 5.333\,N = 2.667\,N.$$

Αριστερά, οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν δυνάμεις κάθετα στον άξονα της δοκού. Ειδικότερα, ενεργούν η αντίδραση F_A και το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής. Η αντίδραση F_A κατευθύνεται προς τα πάνω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα κάτω και είναι θετική. Το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής κατευθύνεται προς τα κάτω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική. Έτσι η συνολική τέμνουσα δύναμη F(x) στη θέση x παρέχεται από τη σχέση:

$$F(x) = F_A - \int_0^x q(y)dy = F_A - \int_0^x \alpha \cdot y dy =$$

$$= F_A - \frac{\alpha}{2} \cdot x^2 = 2.667\,N - 500 \frac{N}{m^2} \cdot x^2. \quad (5)$$

Το σχήμα 4.3ι(β) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (5) η οποία αποτελεί το ΔΤΔ



Σχ. 4.3ι
(α) Η δοκός του Παραδείγματος 9
(β) Το ΔΤΔ (γ) Το ΔΚΡ.

της δοκού. Η εξίσωση (5) είναι δευτέρου βαθμού και απεικονίζεται με μία παραβολή. Για $x = 0$, η (5) δίνει $F(0) = 2.667\,N$. Επίσης, για $x = L = 4\,m$, η (5) δίνει $F(L) = -5.333\,N$ και για $x = 2{,}31\,m$ είναι $F(2{,}31) = 0$.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν η ροπή της αντιδράσεως F_A και η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής. Η ροπή της αντιδράσεως F_A έχει μέτρο $F_A \cdot x$ και φορά δεξιόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι αριστερόστροφη και άρα θετική. Η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής είναι αριστερόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι δεξιόστροφη και άρα αρνητική. Έτσι η συνολική καμπτική ροπή M(x) στη θέση x παρέχεται από τη σχέση:

$$M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x y \cdot q(y)dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - \alpha \cdot \int_0^x y^2 \cdot dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - \frac{\alpha \cdot x^3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = 2.667\,N \cdot x - 333 \frac{N}{m^2} \cdot x^3. \quad (6)$$

Το σχήμα 4.3ι(γ) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (6), η οποία αποτελεί το ΔΚΡ της δοκού. Η εξίσωση (6) είναι τρίτου βαθμού. Για $x = 0$, η (6) δίνει $M(0) = 0$ και για $x = L = 4\,m$ δίνει $M(L) = -10.644\,N \cdot m$.

Παράδειγμα 10.

Στη δοκό του Παραδείγματος 9, επί πλέον του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου, ενεργεί και συγκεντρωμένο φορτίο $F_1 = 5.000\,N$ στο μέσο M της δοκού [σχ. 4.3ια(α)]. Να σχεδιαστούν εκ νέου:

1) το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ) και

2) το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ).

Λύση.

Όπως αναλύθηκε στο Παράδειγμα 9, η εξίσωση φορτίσεως της αμφιέρειστης δοκού είναι:

$$q(x) = \alpha \cdot x = 1.000 \frac{N}{m^2} \cdot x. \qquad (1)$$

Επίσης, όπως αναλύθηκε στο Παράδειγμα 9, η συνισταμένη του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου που καταπονεί τη δοκό είναι:

$$F = \int_0^L q(x)dx = \int_0^L \alpha \cdot x dx = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot L^2 =$$

$$= 1.000 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 m^2 = 8.000\,N.$$

και η θέση της x_F είναι:

$$x_F = 2{,}666\,m.$$

Οι αντιδράσεις F_A και F_B στα άκρα A και B της δοκού, αντίστοιχα, είναι τέτοιες ώστε:

$$F + F_1 = F_A + F_B. \qquad (2)$$

Από τη στατική ισορροπία της δοκού για τη συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν στη δοκό ως προς το άκρο A έχομε:

$$F_1 \cdot \frac{L}{2} + F \cdot x_F - F_B \cdot L = 0. \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (3) έχομε:

$$F_B = \frac{F \cdot x_F + F_1 \cdot \frac{L}{2}}{L} =$$

$$= \frac{8.000\,N \cdot 2{,}666\,m + 5.000\,N \cdot 2\,m}{4\,m} = 7.832\,N.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) λαμβάνομε:

$$F_A = F + F_1 - F_B =$$
$$= 8.000\,N + 5.000\,N - 7.832\,N = 5.168\,N.$$

Χωρίζομε τη δοκό στα εξής δύο τμήματα:

1) Τμήμα AM.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα AM που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν δυνάμεις κάθετα στον άξονα της δοκού. Ειδικότερα, ενεργούν η αντίδραση F_A και το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής. Η αντίδραση F_A κατευθύνεται προς τα πάνω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα κάτω και είναι θετική. Το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής κατευθύνεται προς τα κάτω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική. Έτσι η συνολική τέμνουσα δύναμη F(x) στη θέση x του τμήματος AM παρέχεται από τη σχέση:

$$F(x) = F_A - \int_0^x q(y)dy = F_A - \int_0^x \alpha \cdot y dy =$$

$$= F_A - \frac{\alpha}{2} \cdot x^2 \Rightarrow F(x) = 5.168\,N - 500 \frac{N}{m^2} \cdot x^2,$$

$$0 < x < \frac{L}{2}. \qquad (4)$$

Το σχήμα 4.3ια(β) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (4) η οποία αποτελεί το ΔΤΔ της δοκού για το τμήμα AM. Η εξίσωση (4) είναι δευτέρου βαθμού και απεικονίζεται με μία παραβολή. Για $x = 0$, η (4) δίνει $F(0) = 5.168\,N$, ενώ για $x = L/2 = 2\,m$, η (4) δίνει $F(L/2) = 3.168\,N$.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα AM που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν η ροπή της αντιδράσεως F_A και η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής. Η ροπή της αντιδράσεως F_A έχει μέτρο $F_A \cdot x$ και φορά δεξιόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι αριστερόστροφη και άρα θετική. Η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο A μέχρι την θέση της διατομής είναι αριστερόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι δεξιόστροφη και άρα αρνητική. Έτσι η συνολική καμπτική ροπή M(x) στη θέση x του τμήματος AM παρέχεται από τη σχέση:

$$M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x y \cdot q(y)dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - \alpha \cdot \int_0^x y^2 \cdot dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = F_A \cdot x - \frac{\alpha \cdot x^3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = 5.168\,N \cdot x - 333\frac{N}{m^2} \cdot x^3,$$

$$0<x<\frac{L}{2}. \qquad (5)$$

Το σχήμα 4.3ια(γ) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (5) η οποία αποτελεί το ΔΚΡ της δοκού για το τμήμα ΑΜ. Η εξίσωση (5) είναι τρίτου βαθμού. Για $x = 0$, η (5) δίνει $M(0) = 0$ και για $x = L/2 = 2\,m$ δίνει $M(L/2) = 7.672\,N \cdot m$.

2) Τμήμα ΜΒ.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΜΒ που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν δυνάμεις κάθετα στον άξονα της δοκού. Ειδικότερα, ενεργούν η αντίδραση F_A, το συγκεντρωμένο στη θέση Μ φορτίο F_1 και το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο Α μέχρι την υπόψη θέση της διατομής. Η αντίδραση F_A κατευθύνεται προς τα πάνω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα κάτω και είναι θετική. Το συγκεντρωμένο φορτίο F_1 κατευθύνεται προς τα κάτω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική. Το κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το άκρο Α μέχρι την υπόψη θέση της διατομής κατευθύνεται προς τα κάτω, κατά συνέπεια η αντίστοιχη τέμνουσα δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω και είναι αρνητική. Έτσι η συνολική τέμνουσα δύναμη F(x) στη θέση x του τμήματος ΜΒ παρέχεται από τη σχέση:

$$F(x) = F_A - F_1 - \int_0^x q(y)dy =$$

$$= F_A - F_1 - \int_0^x \alpha \cdot y dy =$$

$$= F_A - F_1 - \frac{\alpha}{2} \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = 168\,N - 500\frac{N}{m^2} \cdot x^2,$$

$$\frac{L}{2}<x<L. \qquad (6)$$

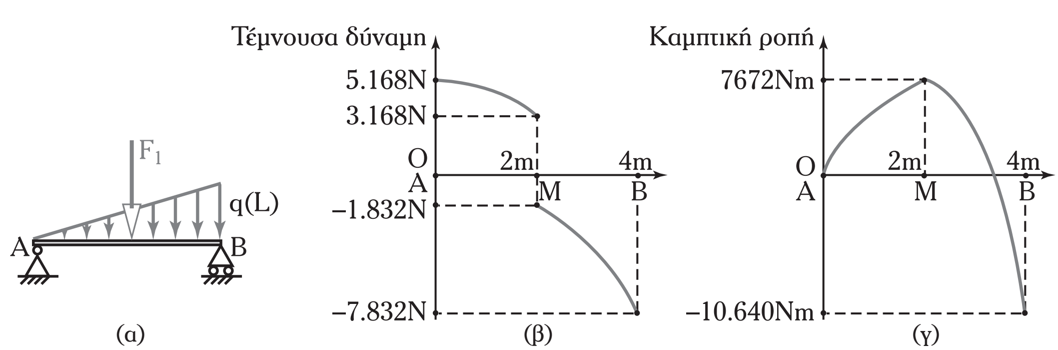
Το σχήμα 4.3ια(β) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (6) η οποία αποτελεί το ΔΤΔ της δοκού για το τμήμα ΜΒ. Η εξίσωση (6) είναι δευτέρου βαθμού και απεικονίζεται με μία παραβολή.

Για $x = L/2 = 2\,m$, η (6) δίνει $F(L/2) = -1.832\,N$, ενώ για $x = L = 4\,m$, η (6) δίνει $F(L) = -7.832\,N$.

Αριστερά οποιασδήποτε τυχαίας διατομής της δοκού στο τμήμα ΜΒ που βρίσκεται στη θέση x ενεργούν η ροπή της αντιδράσεως F_A, η ροπή του συγκεντρωμένου φορτίου F_1 και η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο Α μέχρι την θέση της διατομής. Η ροπή της αντιδράσεως F_A έχει μέτρο $F_A \cdot x$ και φορά δεξιόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι αριστερόστροφη και άρα θετική. Η ροπή του συγκεντρωμένου φορτίου F_1 έχει μέτρο:

$$F_1 \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

και φορά αριστερόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι δεξιόστροφη και άρα αρνητική. Η ροπή του κατακόρυφου τριγωνικού φορτίου από το άκρο Α μέχρι την θέση της διατομής είναι αριστερόστροφη, κατά συνέπεια η αντίστοιχη



Σχ. 4.3ια

(α) Η δοκός του Παραδείγματος 10 (β) Το ΔΤΔ (γ) Το ΔΚΡ.

καμπτική ροπή είναι δεξιόστροφη και άρα αρνητική. Έτσι η συνολική καμπτική ροπή M(x) στη θέση x του τμήματος MB παρέχεται από τη σχέση:

$$M(x) = F_A \cdot x - F_1 \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) - \int_0^x y \cdot q(y)dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = (F_A - F_1) \cdot x + F_1 \cdot \frac{L}{2} - \alpha\int_0^x y^2 \cdot dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = (F_A - F_1) \cdot x + F_1 \cdot \frac{L}{2} - \frac{\alpha \cdot x^3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x) = 10.000\,N \cdot m +$$

$$+168\,N \cdot x - 333\frac{N}{m^2} \cdot x^3,$$

$$\frac{L}{2} < x < L. \qquad (7)$$

Το σχήμα 4.3ια(γ) παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (7), η οποία αποτελεί το ΔΚΡ της δοκού για το τμήμα MB. Η εξίσωση (7) είναι τρίτου βαθμού. Για:

$$x = \frac{L}{2} = 2\,m,$$

η (7) δίνει $M\left(\frac{L}{2}\right) = 7.672\,N \cdot m$

και για $x = L = 4\,m$ δίνει $M(L) = -10.640\,N \cdot m$.

4.3.5 Ιδιότητες των Διαγραμμάτων Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών.

Τα Διαγράμματα Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Στα αφόρτιστα τμήματα μιας δοκού:

α) Η τέμνουσα δύναμη παριστάνεται με ευθεία παράλληλη στον άξονα της δοκού.

β) Η αντίστοιχη καμπτική ροπή είναι ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως την τέμνουσα δύναμη. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά από τη σύγκριση των διαγραμμάτων των σχημάτων 4.3ε και 4.3ζ.

2) Η καμπτική ροπή διατομής μιας δοκού είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των επιφανειών του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων, που βρίσκεται αριστερά της εν λόγω διατομής.

3) Η καμπτική ροπή σε μία θέση μιας δοκού μπορεί να υπολογιστεί εάν προσθέσομε αλγεβρικά την τιμή της καμπτικής ροπής σε άλλη θέση με το εμβαδόν του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων που αντιστοιχεί ανάμεσα στις δύο θέσεις.

4) Η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή της καμπτικής ροπής εμφανίζεται στη διατομή, στην οποία η τέμνουσα δύναμη αλλάζει πρόσημο, δηλαδή από θετική γίνεται αρνητική ή το αντίθετο.

Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά από τη σύγκριση των διαγραμμάτων των σχημάτων 4.3ε και 4.3ζ.

Τέλος, σχετικά με τη φυσική σημασία των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών σημειώνομε ότι το σύστημα των εξωτερικών δυνάμεων που βρίσκονται στα αριστερά της υπό εξέταση διατομής της δοκού αντικαθίσταται από την τέμνουσα δύναμη, η οποία ενεργεί στο επίπεδο διατομής και από την καμπτική ροπή.

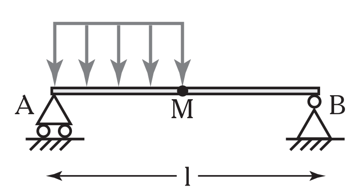
Η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή ισορροπούνται απ' τις εσωτερικές τάσεις που αναπτύσσονται στην υπό εξέταση διατομή και αντιπροσωπεύουν την επίδραση στο αριστερό του τμήματος της δοκού που βρίσκεται δεξιά της υπό εξέταση διατομής.

Ασκήσεις.

1. *Για την αμφιέρειστη δοκό της ασκήσεως 2 της παραγράφου 4.2 (σελ. 117) να σχεδιαστούν:*
α) Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.
β) Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.
γ) το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

2. *Για την αμφιέρειστη δοκό της ασκήσεως 3 της παραγράφου 4.2 (σελ. 118) να σχεδιαστούν:*
α) Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.
β) Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων.
γ) Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

3. *Η δοκός του σχήματος 4.3ιβ έχει μήκος $L = 3\,m$ και φορτίζεται με κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q = 3.000\,N/m$ από το άκρο της A μέχρι το μέσο της M.*

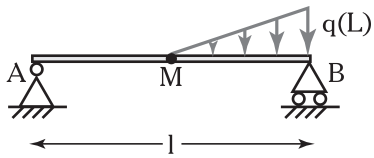


Σχ. 4.3ιβ

Να σχεδιαστούν το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

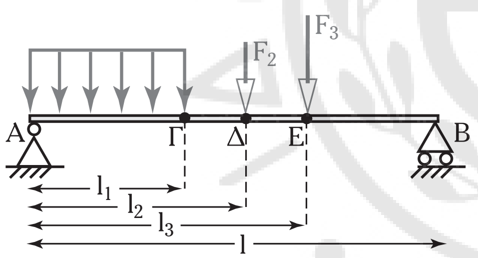
4. *Η δοκός του σχήματος 4.3ιγ έχει μήκος $L = 5\,m$*

και φορτίζεται με κατακόρυφο τριγωνικό φορτίο από το μέσο της Μ μέχρι το άκρο της Β. Η μέγιστη τιμή της φορτίσεως είναι q(L) = 3.000 N/m και η ελάχιστη τιμή q (L/2) = 0. Να σχεδιαστούν το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.



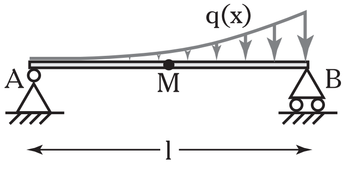
Σχ. 4.3ιγ

5. *Δοκός, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3ιδ, έχει μήκος L = 6 m και καταπονείται με κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q = 1.500 N/m από το άκρο της Α μέχρι το σημείο Γ, το οποίο απέχει από το σημείο Α απόσταση l_1 = 2 m. Επίσης, καταπονείται και από τα συγκεντρωμένα φορτία F_2 = 2.100 N και F_3 = 2.800 N, τα οποία ενεργούν στα σημεία Δ και Ε που απέχουν από το σημείο Α αποστάσεις l_2 = 3 m και l_3 = 4 m, αντίστοιχα. Να σχεδιαστούν το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.*



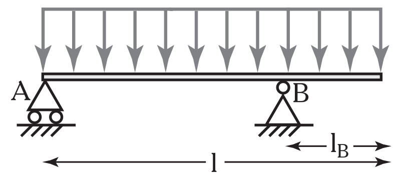
Σχ. 4.3ιδ

6. *Η δοκός του σχήματος 4.3ιε έχει μήκος L = 4 m και φορτίζεται με κατανεμημένο φορτίο q(x) = 800N/$m^3 \cdot x^2$ κατά μήκος του δοκού. Να σχεδιαστούν το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.*



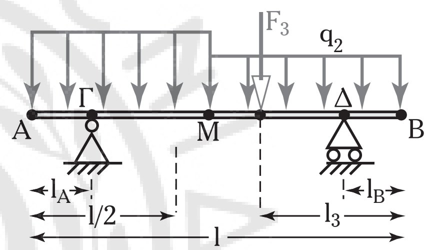
Σχ. 4.3ιε

7. *Δίνεται η προέχουσα δοκός του σχήματος 4.3ιστ με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο q = 2.000 N/m. Να κατασκευαστούν το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών της δοκού. Δίνεται ότι L = 3 m και L_B = 0,5 m.*



Σχ. 4.3ιστ

8. *Η αμφιπροέχουσα δοκός του σχήματος 4.3ιζ καταπονείται με κατανεμημένα φορτία q_1 = 6.200 N/m και q_2 = 2.000 N/m και μεμονωμένο φορτίο F_3=6.500N. Να κατασκευαστούν το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών της δοκού. Δίνεται ότι L = 6 m, L_A = L_B = 0,5 m και L_3 = 1,5 m.*



Σχ. 4.3ιζ

4.4 Σύνοψη βασικών εννοιών.

Οι βασικότερες έννοιες του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται στις εξής:

1) ***Δοκός*** ονομάζεται κάθε στερεό σώμα, του οποίου το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής του.

2) Στη δοκό ενεργούν φορτία, κατανεμημένα ή μεμονωμένα.

3) Η στήριξη των άκρων της δοκού μπορεί να γίνει με ***πάκτωση, άρθρωση*** ή ***κύλιση***.

4) Με βάση τον τρόπο στηρίξεώς τους οι δοκοί διακρίνονται σε πρόβολους, αμφιέρειστους, προέχουσες, αμφιπροέχουσες, αμφίπακτους και συνεχείς.

5) Οι δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στη δοκό ονομάζονται ***αντιδράσεις***.

6) Οι αντιδράσεις υπολογίζονται με τη βοήθεια των συνθηκών ***στατικής ισορροπίας*** της δοκού, σύμφωνα με τις οποίες τα φορτία που φέρει είναι ίσα και αντίθετα με τις αντιδράσεις και οι ροπές των φορτίων είναι ίσες και αντίθετες με τις ροπές των αντιδράσεων:

$$\sum F_x + \sum F_{A,x} = 0 \qquad \sum F_y + \sum F_{A,y} = 0$$

$$\sum M_F + \sum M_A = 0.$$

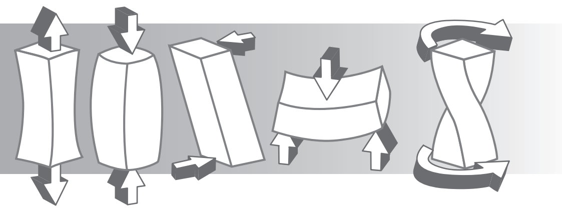
7) Οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στη δοκό διακρίνονται σε ορθές και τέμνουσες. Το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων (ΔΟΔ) και το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ) παρουσιάζουν τις δυνάμεις αυτές σε κάθε διατομή της δοκού.

8) Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ) παρουσιάζει τις καμπτικές ροπές σε κάθε διατομή της δοκού.

Η καμπτική ροπή σε μια συγκεκριμένη θέση είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς τη θέση αυτή όλων των δυνάμεων που βρίσκονται αριστερά της θέσεως αυτής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Κάμψη



5.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε την καταπόνηση της κάμψεως. Συγκεκριμένα, παρέχομε τον ορισμό και τα είδη κάμψεως και αναλύομε την περίπτωση της καθαρής κάμψεως εξηγώντας τις προκαλούμενες τάσεις και παραμορφώσεις. Επίσης, περιγράφομε τον τρόπο επιλύσεως της εξισώσεως της ελαστικής γραμμής.

Ο πίνακας 5.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

5.2 Η καταπόνηση της κάμψεως.

Ας θεωρήσομε τη δοκό του σχήματος 5.2α. Η δοκός είναι οριζόντια και στηρίζεται στα δύο άκρα της. Στη δοκό δεν ενεργεί καμμία εξωτερική δύναμη. Ο άξονάς της είναι ευθύγραμμος. Στη συνέχεια, στη δοκό ενεργούν δύο δυνάμεις F_1 και F_2, οι οποίες είναι κάθετες στον άξονά της. Αποτέλεσμα της δράσεως των δύο δυνάμεων είναι ότι η δοκός υφίσταται καμπύλωση και ο άξονάς της λαμβάνει καμπύλη μορφή. Η παραμόρφωση αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2α(β). Λέμε στην περίπτωση αυτή ότι η δοκός καταπονείται σε κάμψη.

Γενικότερα:

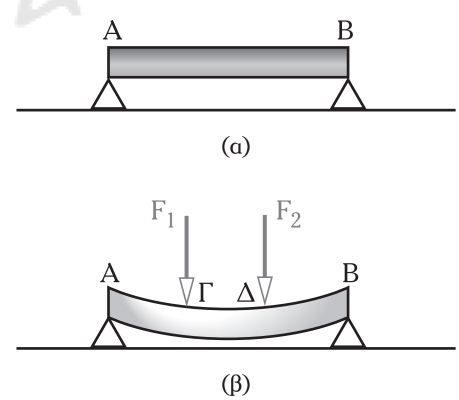
Ένα σώμα λέμε ότι καταπονείται σε κάμψη όταν στηρίζεται σ' ένα ή περισσότερα σημεία και οι δυνάμεις που ενεργούν σ' αυτό είναι κάθετες στον άξονά του.

Εάν παρατηρήσομε με μεγαλύτερη προσοχή τη δοκό του σχήματος 5.2α(β) που καταπονείται σε κάμψη, βλέπομε ότι το ένα τμήμα της –αυτό που βρίσκεται πάνω από τον άξονά της– θλίβεται, ενώ το άλλο –αυτό που βρίσκεται κάτω από τον άξονά της– εφελκύεται. Το γεγονός αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί και με το Διάγραμμα Καπτικών Ροπών της δοκού, το οποίο κατασκευάζεται σύμφωνα με όσα αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4. Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών για τη δοκό του σχήματος 5.2α(β) παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2β. Το διάγραμμα είναι θετικό, κάτι που σημαίνει ότι το τμήμα της δοκού που βρίσκεται πάνω από τον άξονά της θλίβεται, ενώ το τμήμα της που βρίσκεται κάτω από τον άξονα εφελκύεται.

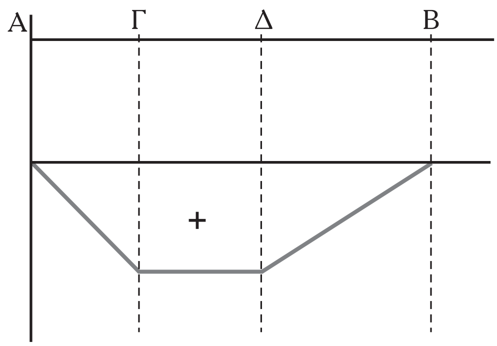
Η καταπόνηση της κάμψεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας

Πίνακας 5.1
Σύμβολα και μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	*Συμβολισμός*	*Συνήθεις μονάδες μετρήσεως*
Ακτίνα ελαστικής γραμμής	R	m, cm
Απόσταση από άξονα	y	cm, mm
Βέλος κάμψεως	f	m, cm
Γωνία στροφής των ακραίων διατομών	φ	rad, °
Επιτρεπόμενη τάση κάμψεως	$\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$	N/cm^2, N/mm^2
Επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως	$f_{\varepsilon\pi}$	m, cm
Μέγιστο βέλος κάμψεως	f_{max}	m, cm
Τάση κάμψεως	$\sigma_{\kappa\alpha}$	N/cm^2, N/mm^2



Σχ. 5.2α
(α) Δοκός στην οποία δεν ενεργεί εξωτερική δύναμη.
(β) Η δοκός του σχήματος (α) που καταπονείται σε κάμψη.



Σχ. 5.2β
Το διάγραμμα καμπτικών ροπών για τη δοκό του σχήματος 5.2α που καταπονείται σε κάμψη.

ζωή. Παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε κάμψη είναι οι δοκοί (πρόβολοι, αμφιέρειστες, προέχουσες, αμφιπροέχουσες κ.λπ.), οι γερανογέφυρες, οι άξονες που είναι στερεωμένοι στο σώμα μηχανών κ.λπ..

– Είδη κάμψεων.

Στην παράγραφο 4.3 είδαμε τις έννοιες των ορθών δυνάμεων, των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών μιας δοκού. Με κριτήριο το ποιες είναι οι ορθές δυνάμεις, οι τέμνουσες δυνάμεις και οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται σε μία δοκό που καταπονείται σε κάμψη, οι κάμψεις διακρίνονται στις εξής τρεις κατηγορίες:

1) ***Καθαρή κάμψη*** που έχομε όταν συντρέχουν σωρευτικά οι ακόλουθες συνθήκες:
α) Η ορθή δύναμη είναι μηδενική.
β) Η τέμνουσα δύναμη είναι μηδενική.
γ) Η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός.

Το σχήμα 5.2γ(α) παρουσιάζει μία δοκό, στην οποία το τμήμα ΕΖ καταπονείται σε καθαρή κάμψη, αφού οι δύο δυνάμεις είναι ίσες και συμμετρικές ως προς το μέσο του ΓΔ.

2) ***Κοινή κάμψη*** που έχομε όταν συντρέχουν σωρευτικά οι ακόλουθες συνθήκες:
α) Η ορθή δύναμη είναι μηδενική.
β) Η τέμνουσα δύναμη είναι διάφορη του μηδενός.
γ) Η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός.

Το σχήμα 5.2γ(β) παρουσιάζει μία δοκό που καταπονείται σε κοινή κάμψη.

3) ***Σύνθετη κάμψη*** που έχομε όταν συντρέχουν σωρευτικά οι ακόλουθες συνθήκες:
α) Η ορθή δύναμη είναι διάφορη του μηδενός.
β) Η τέμνουσα δύναμη είναι διάφορη του μηδενός.
γ) Η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός.

Το σχήμα 5.2γ(γ) παρουσιάζει μία δοκό που καταπονείται σε σύνθετη κάμψη.

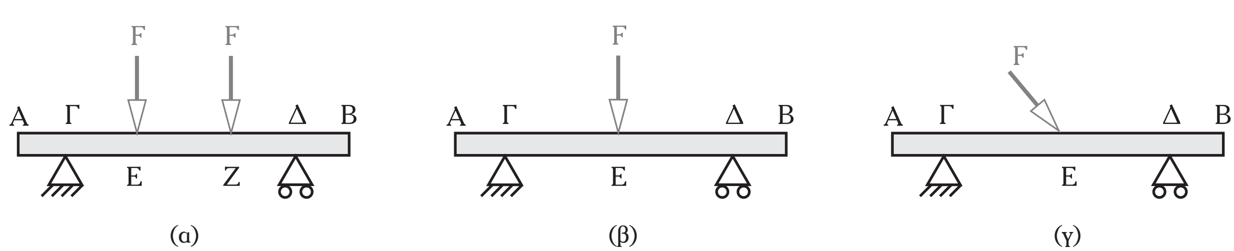
Περαιτέρω, με κριτήριο τη διεύθυνση των εξωτερικών φορτίων που ενεργούν στη δοκό που καταπονείται σε κάμψη, οι κάμψεις διακρίνονται στις εξής δύο κατηγορίες:

1) ***Συμμετρική κάμψη*** που έχομε όταν όλα τα εξωτερικά φορτία ενεργούν στη διεύθυνση κύριου άξονα αδράνειας του καταπονούμενου σώματος. Το σχήμα 5.2δ(α) παρουσιάζει τη διατομή μίας δοκού που καταπονείται σε συμμετρική κάμψη.

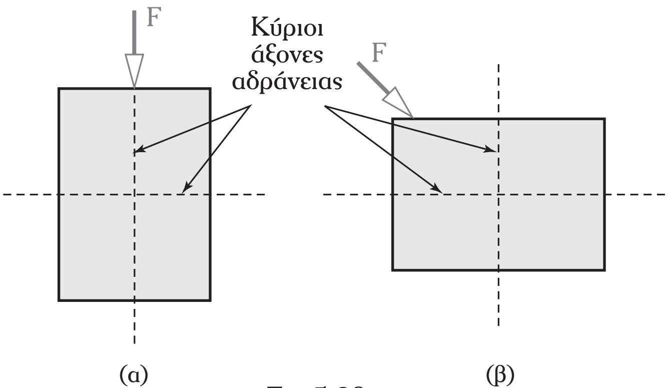
2) ***Μη συμμετρική ή λοξή κάμψη*** που έχομε όταν ένα τουλάχιστον εξωτερικό φορτίο δεν ενεργεί στη διεύθυνση κύριου άξονα αδράνειας του καταπονούμενου σώματος. Το σχήμα 5.2δ(β) παρουσιάζει τη διατομή μίας δοκού που καταπονείται σε μη συμμετρική ή λοξή κάμψη.

Συνδυάζοντας τις ανωτέρω δύο κατηγοριοποιήσεις κάμψεων, οι κάμψεις διακρίνονται στις ακόλουθες έξι κατηγορίες:
1) Συμμετρική καθαρή κάμψη.
2) Συμμετρική κοινή κάμψη.
3) Συμμετρική σύνθετη κάμψη.
4) Μη συμμετρική ή λοξή καθαρή κάμψη.
5) Μη συμμετρική ή λοξή κοινή κάμψη.
6) Μη συμμετρική ή λοξή σύνθετη κάμψη.

Από τις ανωτέρω περιπτώσεις εξετάζομε λεπτο-



Σχ. 5.2γ
Δοκός που καταπονείται σε:
(α) Καθαρή κάμψη. (β) Κοινή κάμψη. (γ) Σύνθετη κάμψη.



Σχ. 5.2δ
Διάμετρος δοκού που καταπονείται σε:
(α) Συμμετρική κάμψη. (β) Λοξή κάμψη.

μερώς στη συνέχεια την περίπτωση της συμμετρικής καθαρής κάμψεως[1].

5.3 Συμμετρική καθαρή κάμψη.

Ας θεωρήσομε τη δοκό του σχήματος 5.3α(α) που καταπονείται σε κάμψη λόγω της δράσεως των κατακορύφων δυνάμεων F_1 και F_2. Επειδή στο τμήμα ΓΔ ισχύει ότι:

1) η ορθή δύναμη είναι μηδενική [σχ. 5.3α(β)],

2) η τέμνουσα δύναμη είναι μηδενική [σχ. 5.3α(γ)] και,

3) η καμπτική ροπή είναι διάφορη του μηδενός [σχ. 5.3α(δ)],

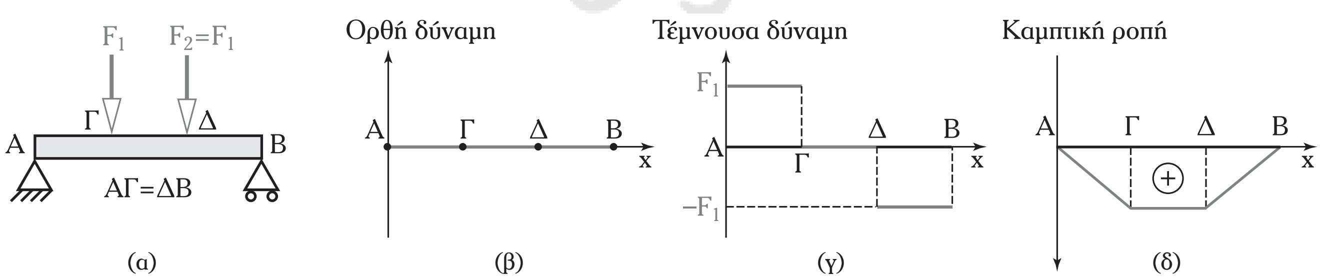
η καταπόνηση στο τμήμα ΓΔ είναι καθαρή κάμψη.

Αποτέλεσμα της δράσεως των εξωτερικών φορτίων είναι ότι η δοκός υφίσταται καμπύλωση και ο άξονάς της παίρνει καμπύλη μορφή. Για να εξετάσομε με λεπτομέρεια τι συμβαίνει ακριβώς κατά την κάμψη θεωρούμε ότι η δοκός αποτελείται από δέσμες παραλλήλων ινών, οι οποίες είναι τοποθετημένες κατά οριζόντια στρώματα, παράλληλα προς τον άξονά της. Το σχήμα 5.3β(α) παρουσιάζει την εικόνα των δεσμών παραλλήλων ινών πριν την εφαρμογή των φορτίων. Κατά την εφαρμογή των φορτίων, οι ίνες δεν συμπεριφέρονται όλες κατά τον ίδιο τρόπο. Συγκεκριμένα, οι ίνες που είναι πάνω από τον άξονα της δοκού εμφανίζουν ελάττωση του μήκους τους, δηλαδή καταπονούνται σε θλίψη. Μάλιστα, οι ίνες αυτές ελαττώνουν το μήκος τους τόσο, όσο περισσότερο απέχουν από τον άξονα της δοκού. Αντίθετα, οι ίνες που είναι κάτω από τον άξονα της δοκού εμφανίζουν αύξηση του μήκους τους, δηλαδή καταπονούνται σε εφελκυσμό. Μάλιστα, οι ίνες αυτές αυξάνουν το μήκος τους τόσο, όσο περισσότερο απέχουν από τον άξονα της δοκού.

Μεταξύ των ινών που θλίβονται και αυτών που εφελκύονται υπάρχει ένα στρώμα ινών που ούτε θλίβονται ούτε εφελκύονται, αλλά, όπως λέμε, παραμένουν ***ουδέτερες***. Το επίπεδο στο οποίο οι ίνες αυτές βρίσκονται ονομάζεται ***ουδέτερο επίπεδο***. Η τομή του ουδέτερου επιπέδου με τη διατομή της δοκού είναι ευθεία και ονομάζεται ***ουδέτερη γραμμή.*** Ο γεωμετρικός άξονας της δοκού βρίσκεται πάνω στο ουδέτερο επίπεδο και γι' αυτό ονομάζεται ***ουδέτερος άξονας***.

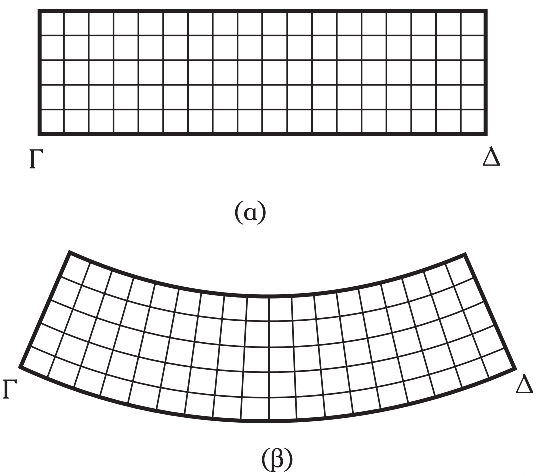
Το συνολικό αποτέλεσμα των ινών που εφελκύονται ανάλογα με την απόστασή τους από τον άξονα της δοκού, που παραμένουν ουδέτερες και των ινών που θλίβονται ανάλογα με την απόστασή τους από τον άξονα της δοκού, είναι η δημιουργία ολισθήσεως μεταξύ των στρωμάτων τους. Το σχήμα 5.3β(β) παρουσιάζει την εικόνα των δεσμών παραλλήλων ινών κατά την εφαρμογή των φορτίων.

Συνεπώς, ***η καθαρή κάμψη είναι μία σύνθετη καταπόνηση αποτελούμενη από καταπονήσεις***



Σχ. 5.3α
(α) Δοκός που καταπονείται σε καθαρή κάμψη. (β) Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων.
(γ) Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων. (δ) Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

[1] Οι υπόλοιπες κατηγορίες δεν αναπτύσσονται στο παρόν βιβλίο επειδή δεν περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα του μαθήματος «Αντοχή Υλικών».



Σχ. 5.3β
Η εικόνα των δεσμών παραλλήλων ινών της δοκού στο τμήμα ΓΔ: (α) Πριν να ενεργήσουν τα φορτία. (β) Κατά την καταπόνηση σε καθαρή κάμψη.

σε εφελκυσμό και θλίψη. Άρα, για τη μελέτη της καθαρής κάμψεως πρέπει να λάβομε υπόψη τις εμφανιζόμενες ορθές τάσεις θλίψεως και εφελκυσμού[2]. Η μελέτη αυτή απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Ωστόσο, η επίλυση του συστήματος αυτού είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και γι' αυτόν το λόγο δεν μπορεί να τύχει εφαρμογής στα καθημερινά τεχνικά προβλήματα. Έτσι, έχει προταθεί η χρησιμοποίηση μίας άλλης προσεγγίσεως για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών, η οποία ονομάζεται ***τεχνική θεωρία της κάμψεως***.

5.3.1 Η τεχνική θεωρία της κάμψεως.

Η τεχνική θεωρία της κάμψεως αναπτύχθηκε στηριζόμενη στις ακόλουθες παραδοχές:

1) Πριν από την παραμόρφωσή της, η δοκός είναι ***ευθύγραμμη***.

2) Η δοκός έχει ***σταθερή διατομή*** σε όλο το μήκος της και η μεγαλύτερη διάσταση της εγκάρσιας διατομής είναι μικρότερη από το μισό του μήκους της δοκού.

3) Οι εξωτερικές δυνάμεις είναι ***συνεπίπεδες*** (βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο), ενεργούν κάθετα στον άξονα της δοκού και δεν καταπονούν το σώμα σε στρέψη, εφελκυσμό ή θλίψη, αλλά μόνο σε κάμψη.

4) Οι εγκάρσιες διατομές, που είναι επίπεδες πριν την καμπτική παραμόρφωση παραμένουν ***επίπεδες και μετά την παραμόρφωση***.

5) Το υλικό της δοκού είναι ***ομογενές***, δηλαδή έχει σε όλα τα σημεία του τις ίδιες ιδιότητες, ***ισότροπο***, δηλαδή έχει τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις και ***ακολουθεί τον Νόμο του Hooke*** έχοντας το ίδιο μέτρο ελαστικότητας για τις αναπτυσσόμενες εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις.

Εάν τουλάχιστον μία από τις ανωτέρω παραδοχές της τεχνικής θεωρίας της κάμψεως δεν ισχύει σε κάποιο πρόβλημα κάμψεως που καλούμαστε να αντιμετωπίσομε, τότε πρέπει να έχομε κατά νου ότι οι λύσεις που λαμβάνομε από την εφαρμογή της δεν θα είναι ικανοποιητικές για το πρόβλημά μας.

5.3.2 Οι τάσεις στη συμμετρική καθαρή κάμψη.

Σύμφωνα με την τεχνική θεωρία της κάμψεως, η τάση κάμψεως σε ένα σημείο της διατομής δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη, όπως αυτή του σχήματος 5.3γ(α), εξαρτάται από:

1) Το μέγεθος των φορτίων.

2) Τη θέση των φορτίων.

3) Το μήκος της δοκού.

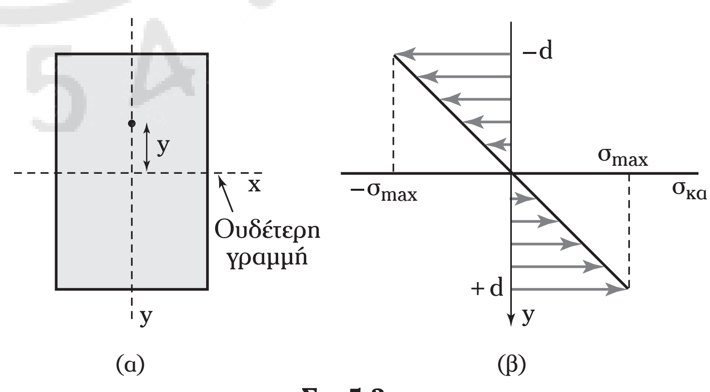
4) Το μέγεθος της διατομής.

5) Τη μορφή της διατομής.

6) Την τοποθέτηση της διατομής σε σχέση με τη διεύθυνση των φορτίων.

7) Την απόσταση του σημείου της διατομής από τον άξονα.

Η εξάρτηση από το μέγεθος των φορτίων, το μήκος της δοκού και τη θέση των φορτίων εκφράζεται μέσω της καμπτικής ροπής Μ που είναι συνάρτηση αυτών. Η εξάρτηση από το μέγεθος και τη μορφή τη



Σχ. 5.3γ
(α) Ορθογώνια διατομή δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. (β) Η γραφική παράσταση της τάσεως κάμψεως $\sigma_{\kappa\alpha}$ ως προς την απόσταση y.

[2] Στην περίπτωση της κοινής κάμψεως επί πλέον των ορθών τάσεων εμφανίζονται και διατμητικές τάσεις.

διατομής καθώς και από την τοποθέτησή της σε σχέση με τη διεύθυνση του φορτίου, εκφράζεται μέσω της ροπής αδράνειας I_x που είναι συνάρτηση αυτών.

Οι ανωτέρω εξαρτήσεις εκφράζονται στην ακόλουθη σχέση που παρέχει την τάση κάμψεως $\sigma_{\kappa\alpha}$ σε ένα σημείο διατομής δοκού που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα x που είναι και ουδέτερη γραμμή της κάμψεως:

$$\sigma_{\kappa\alpha} = \frac{M}{I_x} \cdot y. \qquad (5.1)$$

Από η σχέση (5.1) διαπιστώνομε ότι η τάση κάμψεως σ' ένα σημείο της διατομής της δοκού:

1) Είναι ανάλογη της καμπτικής ροπής.

2) Είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας της διατομής.

3) Είναι ανάλογη της αποστάσεως y του σημείου από τον άξονα x.

Έτσι, για σταθερή καμπτική ροπή, η γραφική παράσταση της τάσεως κάμψεως $\sigma_{\kappa\alpha}$ ως προς την απόσταση y είναι ευθεία γραμμή και απεικονίζεται στο σχήμα 5.3γ(β). Η απόσταση y λαμβάνει αρνητικές και θετικές τιμές ανάλογα με το εάν το σημείο ενδιαφέροντος είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα x, αντίστοιχα. Έτσι, οι τάσεις κάμψεως λαμβάνουν και αρνητικές και θετικές τιμές. Όλα τα σημεία της ανώτερης γραμμής της διατομής έχουν την ίδια μέγιστη αρνητική τάση και όλα τα σημεία της κατώτερης την ίδια μέγιστη θετική τάση. Οι θετικές τάσεις αντιστοιχούν σε εφελκυστικές τάσεις και οι αρνητικές σε θλιπτικές. Το γεγονός αυτό έρχεται σε συμφωνία με το σχήμα 5.3β(β).

Συνεπώς, δεδομένου ότι η καμπτική ροπή είναι σταθερή σε όλη τη διατομή, ***η τάση κάμψεως μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο της διατομής*** και λαμβάνει τις ακρότατες τιμές της στα άκρα της διατομής που έχουν τη μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα x. Έτσι, εάν είναι y = ±d οι αποστάσεις των ακραίων σημείων της διατομής από τον άξονα των x, ***οι ακρότατες τιμές της τάσεως κάμψεως*** στην υπό εξέταση διατομή δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = \pm \frac{M}{I_x} \cdot d. \qquad (5.2)$$

Το πρόσημο (–) αναφέρεται σε θλιπτική τάση και το πρόσημο (+) σε εφελκυστική (για θετική καμπτική ροπή). Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ροπής αντιστάσεως ως προς τον άξονα x που παρουσιάζομε στην παράγραφο 3.5, έχομε:

$$W_x = \frac{I_x}{d}. \qquad (5.3)$$

η σχέση (5.2) γράφεται:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = \pm \frac{M}{W_x}. \qquad (5.4)$$

5.3.3 Η σχέση κάμψεως.

Για να αποφεύγεται η θραύση των σωμάτων κατά την καταπόνησή τους σε (συμμετρική καθαρή) κάμψη, πρέπει οι τάσεις που αναπτύσσονται να είναι πολύ μικρότερες από την τάση στην οποία το υλικό θραύεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να οριστεί μία επιτρεπόμενη τάση κάμψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}$, ώστε η τάση κάμψεως να είναι απολύτως μικρότερη από την επιτρεπόμενη. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$-\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \le \sigma_{\kappa\alpha} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \le \frac{M}{I_x} \cdot y \le \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}. \qquad (5.5)$$

Η σχέση (5.5) αποτελεί τη ***σχέση κάμψεως***. Η ανισότητα $-\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \le \sigma_{\kappa\alpha}$ χρησιμοποιείται προκειμένου να καλύψει και την περίπτωση των θλιπτικών τάσεων που είναι αρνητικές.

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.4), η σχέση (5.5) για y = ±d γράφεται:

$$-\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \le \pm \frac{M}{W_x} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}. \qquad (5.6)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί μία άλλη έκφραση της σχέσεως κάμψεως, η οποία κυρίως χρησιμοποιείται στην επίλυση των προβλημάτων (συμμετρικής καθαρής) κάμψεως. Το πρόσημο (–) αναφέρεται σε θλιπτική τάση και το (+) σε εφελκυστική. Λόγω της συμμετρίας, οι δύο ακρότατες τιμές είναι αντίθετες. Έτσι, στα προβλήματα αρκεί να θεωρούμε μόνο την εφελκυστική τιμή (τη μέγιστη τιμή αυτής).

5.3.4 Εφαρμογές της σχέσεως κάμψεως.

Η σχέση κάμψεως χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων της καθαρής κάμψεως. Κατ' αναλογία των καταπονήσεων του εφελκυσμού, της θλίψεως και της διατμήσεως, τα προβλήματα της καθαρής κάμψεως διακρίνονται στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

1) Κατηγορία I – Προβλήματα στα οποία ζητείται να υπολογιστεί η τάση λειτουργίας της κατασκευής.

2) Κατηγορία II – Προβλήματα διαστασιολογή-

σεως (ή υπολογισμού απαιτούμενης διατομής).

3) Κατηγορία ΙΙΙ – Προβλήματα υπολογισμού ικανότητας φορτίσεως (ή μέγιστης καμπτικής ροπής).

Η διαδικασία επιλύσεως των ανωτέρω προβλημάτων είναι ανάλογη μ' αυτήν που ακολουθήσαμε στις απλές καταπονήσεις του Κεφαλαίου 2. Επί πλέον, πρέπει να έχομε κατά νου τα ακόλουθα:

Πρώτον το ρόλο της δυνάμεως που είχαμε στις καταπονήσεις του Κεφαλαίου 2 έχει στην καταπόνηση της κάμψεως «αναλάβει» η καμπτική ροπή. Εάν η τελευταία δεν δίνεται απευθείας, πρέπει να υπολογιστεί με τη βοήθεια του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφομε στην παράγραφο 4.3.3.

Δεύτερον το ρόλο της επιφάνειας της διατομής που είχαμε στις καταπονήσεις του Κεφαλαίου 2 έχει στην καταπόνηση της κάμψεως «αναλάβει» η ροπή αντιστάσεως. Εάν η τελευταία δεν δίνεται απευθείας, πρέπει να υπολογιστεί με τη διαδικασία που περιγράφεται στην παράγραφο 3.5 ή από τον πίνακα 3.5.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η δοκός ΑΒ του σχήματος 5.3δ(α) με ορθογώνια διατομή διαστάσεων $\alpha = 2$ cm και $\beta = 4$ cm. Η δοκός στηρίζεται στη μικρή πλευρά της διατομής της [σχ. 5.3δ(β)]. Το τμήμα της δοκού ΓΔ καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στη δοκό παρουσιάζονται στο σχήμα 5.3δ(γ). Να υπολογιστεί η μέγιστη τάση κάμψεως στις διατομές της δοκού στο τμήμα της ΓΔ. Εάν η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 8.000$ N/cm^2, φορτίζεται το τμήμα ΓΔ της δοκού κανονικά;

Λύση.

Λόγω της συμμετρίας, αρκεί να αναφερθούμε μόνο στις εφελκυστικές τάσεις. Από το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών έχομε ότι η καμπτική ροπή στο τμήμα ΓΔ είναι: $M = 15.000\ \mathrm{N \cdot cm}$.

Η ροπή αντιστάσεως της ορθογώνιας διατομής ως προς τον άξονα x, που είναι παράλληλος στη μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι (βλ. πίν. 3.5):

$$W_x = \frac{\alpha \cdot \beta^2}{6} = \frac{2\mathrm{cm} \cdot (4\ \mathrm{cm})^2}{6} = 5{,}33\ \mathrm{cm}^3.$$

Η μέγιστη τάση κάμψεως παρέχεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = \frac{M}{W_x} = \frac{15.000\ \mathrm{N \cdot cm}}{5{,}33 \cdot \mathrm{cm}^3} = 2.814{,}3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Επειδή η τάση αυτή είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη, το τμήμα ΓΔ της δοκού φορτίζεται κανονικά.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί ποια πρέπει να είναι η πλευρά της διατομής δοκού με τετραγωνική διατομή, η οποία θα καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη εάν αναπτύσσεται μέγιστη καμπτική ροπή $M = 54.000\ \mathrm{N \cdot cm}$ και η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 12.000\ \mathrm{N/cm^2}$.

Λύση.

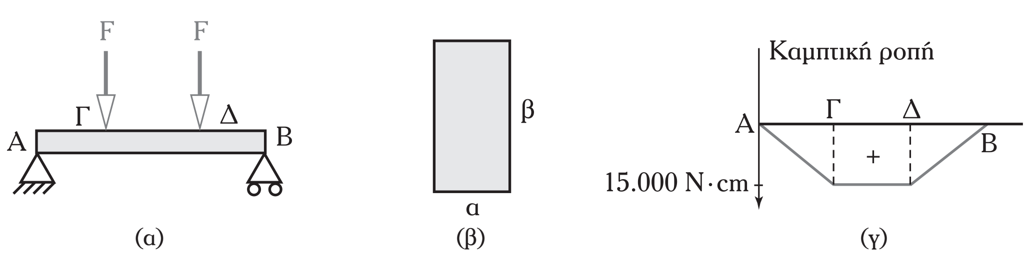
Λόγω της συμμετρίας, αρκεί να αναφερθούμε μόνο στις εφελκυστικές τάσεις. Η μέγιστη τάση κάμψεως αναπτύσσεται στα ακραία σημεία της διατομής. Από τη σχέση της κάμψεως έχομε ότι πρέπει:

$$\frac{M}{W_x} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}, \qquad (1)$$

όπου η ροπή αντιστάσεως της τετραγωνικής διατομής με πλευρά α είναι (βλ. πίν. 3.5):

$$W_x = \frac{\alpha^3}{6}. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) και λύνοντας ως προς την πλευρά α έχομε:



Σχ. 5.3δ
(α) Δοκός ΑΒ. (β) Η διατομή της δοκού. (γ) Το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών.

$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow \frac{M}{\frac{\alpha^3}{6}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 \geq \frac{6 \cdot M}{\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}} \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot M}{\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 54.000\ N{\cdot}cm}{12.000\ N/cm^2}} \Leftrightarrow \alpha \geq 3\ cm.$$

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί η μέγιστη καμπτική ροπή που επιτρέπεται να αναπτύσσεται σε δοκό με κυκλική διατομή ακτίνας $R = 2$ cm, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 7.000\ N/cm^2$.

Λύση.

Λόγω της συμμετρίας, αρκεί να αναφερθούμε μόνο στις εφελκυστικές τάσεις. Η μέγιστη τάση κάμψεως αναπτύσσεται στα ακραία σημεία της διατομής. Από τη σχέση της κάμψεως έχομε ότι πρέπει:

$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha}. \qquad (1)$$

Η ροπή αντιστάσεως της κυκλικής διατομής με ακτίνα R είναι (βλ. πίν. 3.5):

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot R^3}{4}. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) και λύνοντας ως προς τη ζητούμενη καμπτική ροπή έχομε:

$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow \frac{M}{\frac{\pi \cdot R^3}{4}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot R^3}{4} \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot 2^3 cm^3}{4} \cdot 7.000 \frac{N}{cm^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq 43.960\ N{\cdot}cm.$$

Άρα, η μέγιστη επιτρεπόμενη καμπτική ροπή είναι 43.960 N · cm.

Ασκήσεις.

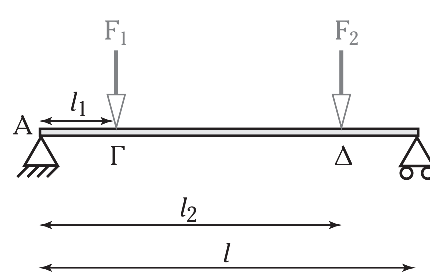
1. *Να υπολογιστεί η μέγιστη καμπτική ροπή που επιτρέπεται να αναπτύσσεται σε δοκό με τετραγωνική διατομή πλευράς $a = 4$ cm, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 12.000\ N/cm^2$.*

2. *Να υπολογιστεί ποια πρέπει να είναι η ακτίνα της διατομής δοκού με κυκλική διατομή, η οποία θα καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη εάν αναπτύσσεται καμπτική ροπή $M = 40.000\ N \cdot cm$ και η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 10.000\ N/cm^2$.*

3. *Δίνεται δοκός ΑΒ με τετραγωνική διατομή πλευράς $\beta = 4$ cm. Το τμήμα της δοκού ΓΔ καταπονείται σε σύμμετρη καθαρή κάμψη. Οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στο τμήμα ΓΔ είναι $M = 12.000\ N \cdot cm$. Να υπολογισθεί η μέγιστη τάση κάμψεως στις διατομές της δοκού στο τμήμα της ΓΔ. Εάν η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 18.000\ N/cm^2$, φορτίζεται το τμήμα ΓΔ της δοκού κανονικά;*

4. *Δίνεται δοκός μήκους $l = 100$ cm με ορθογώνια διατομή διαστάσεων $a = 4$ cm και $\beta = 3$ cm. Η δοκός στηρίζεται στα δύο άκρα της και στα σημεία Γ και Δ αυτής εφαρμόζονται δύο φορτία $F_1 = 4.000$ N και $F_2 = 4.000$ N σε αποστάσεις $l_1 = 20$ cm και $l_2 = 80$ cm, αντίστοιχα από το ένα άκρο της δοκού, όπως δείχνει το σχήμα 5.3ε. Να υπολογιστεί η μέγιστη τάση κάμψεως στις διατομές της δοκού μεταξύ των σημείων της Γ και Δ. Η στήριξη της δοκού πραγματοποιείται ως προς τη μεγάλη πλευρά της ορθογώνιας διατομής της.*

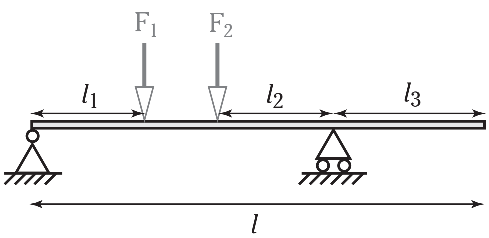
   Υπόδειξη: *Προσδιορίστε πρώτα τη μέγιστη καμπτική ροπή ακολουθώντας τη διαδικασία κατασκευής του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών που παρουσιάζομε στην παράγραφο 4.3.3.*



Σχ. 5.3ε

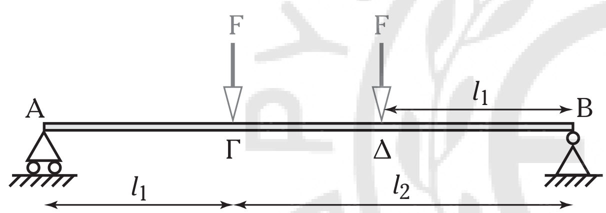
5. *Ποια πρέπει να είναι η διάμετρος της κυκλικής διατομής της δοκού μήκους $l = 120$ cm του σχή-*

ματος 5.3στ, στην οποία ενεργούν οι δυνάμεις $F_1 = 3.000\,N$ και $F_2 = 3.000\,N$ σε αποστάσεις $l_1 = 30\,cm$ και $l_2 = 30\,cm$, αντίστοιχα, όταν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 6.000\,N/cm^2$; Δίνεται $l_3 = 40\,cm$.



Σχ. 5.3στ

6. *Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που επιτρέπεται να εφαρμοστεί στη δοκό του σχήματος 5.3ζ, όταν η διατομή της είναι τετραγωνική με πλευρά $a = 2\,cm$ ώστε το τμήμα της ΓΔ να φορτίζεται κανονικά; Δίνονται $l_1 = 50\,cm$ και $l_2 = 90\,cm$ και η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 12.000\,N/cm^2$.*



Σχ. 5.3ζ

7. *Δοκός που έχει ορθογώνια διατομή διαστάσεων $a = 4\,cm$ και $\beta = 6\,cm$ καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη με καμπτική ροπή $M = 40.000\,N \cdot cm$. Ποια είναι η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη δοκό στις ακόλουθες περιπτώσεις:*
α) Όταν η διατομή τοποθετηθεί με την πλευρά $a = 4\,cm$ κατακόρυφα;
β) Όταν η διατομή τοποθετηθεί με την πλευρά $\beta = 6\,cm$ κατακόρυφα;
Εάν η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 12.000\,N/cm^2$, η δοκός φορτίζεται κανονικά και στις δύο περιπτώσεις;

5.4 Παραμορφώσεις της καθαρής κάμψεως.

Σε κάθε δοκό που καταπονείται σε κάμψη δημιουργούνται παραμορφώσεις του γεωμετρικού της άξονα που αποτελεί τον ουδέτερο άξονα, με αποτέλεσμα να τον μετατοπίζουν από την ευθύγραμμη οριζόντια θέση σε μία καμπύλη γραμμή. Οι παραμορφώσεις μετρούνται με τη μετατόπιση κάθε σημείου του ουδέτερου άξονα από τη θέση που είχε πριν την καταπόνηση σ’ αυτήν που βρίσκεται μετά τη φόρτιση. Η μετατόπιση αυτή ονομάζεται βέλος κάμψεως ή βύθιση και συμβολίζεται με f. Δηλαδή:

Βέλος κάμψεως ή ***βύθιση*** ενός σημείου του ουδέτερου άξονα της δοκού που καταπονείται σε κάμψη ονομάζεται η μετατόπισή του από τη θέση που είχε πριν τη φόρτιση στη θέση που βρίσκεται μετά απ’ αυτήν.

Όλα τα βέλη κάμψεως δεν έχουν την ίδια τιμή και εξαρτώνται από τους εξής παράγοντες:

1) Είναι ανάλογα της φορτίσεως.

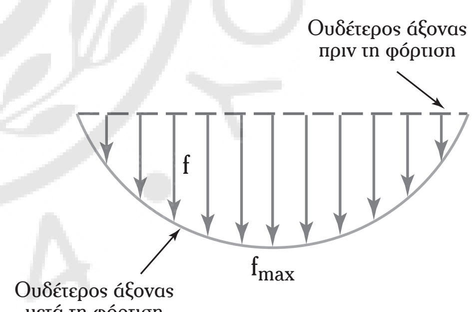
2) Εξαρτώνται από τα σημεία όπου οι φορτίσεις ενεργούν.

3) Εξαρτώνται από τις διαστάσεις της δοκού.

4) Εξαρτώνται από τη ροπή αδράνειας της διατομής.

5) Εξαρτώνται από τον τρόπο στηρίξεως της δοκού.

Σε κάποια θέση το βέλος κάμψεως λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του f_{max}. Το μεγαλύτερο βέλος κάμψεως μίας δοκού ονομάζεται ***βέλος κάμψεως της δοκού***. Το σχήμα 5.4α παρουσιάζει τον ουδέτερο άξονα πριν τη φόρτιση, τον ουδέτερο άξονα κατά τη φόρτιση και τα βέλη κάμψεως μίας δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη.



Σχ. 5.4α
Τα βέλη κάμψεως.

Η μέγιστη τιμή του βέλους κάμψεως πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μια επιτρεπόμενη τιμή $f_{\varepsilon\pi}$:

$$f_{max} \leq f_{\varepsilon\pi}. \tag{5.7}$$

Ο υπολογισμός του βέλους κάμψεως των δοκών πραγματοποιείται με διάφορες μεθόδους, των οποίων η εφαρμογή ωστόσο δεν είναι εύκολη. Για τον σκοπό αυτόν χρησιμοποιούμε τα βέλη κάμψεως που παρέχονται από πίνακες (πίν. 5.4.1).

Οι επιτρεπόμενες τιμές του βέλους κάμψεως πα-

Πίνακας 5.4.1
Βέλη κάμψεως δοκών.

Δοκός	*Παράμετροι*	*Βέλος κάμψεως*
Πρόβολος δοκός με εφαρμογή κάθετου φορτίου στο ελεύθερο άκρο	Φορτίο F, μήκος δοκού l, ροπή αδράνειας I_m, μέτρο ελαστικότητας E	$f_{max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_m}$, στην άκρη της δοκού
Πρόβολος δοκός με εφαρμογή κάθετου φορτίου σε απόσταση από το πακτωμένο άκρο	Φορτίο F, μήκος δοκού l, ροπή αδράνειας I_m, μέτρο ελαστικότητας E, απόσταση από το πακτωμένο άκρο α	$f_{max} = \frac{F \cdot \alpha^3}{3 \cdot E \cdot I_m}$, στην άκρη της δοκού
Αμφιέρειστη δοκός με εφαρμογή δύο καθέτων ίσων φορτίων σε ίσες αποστάσεις από τα δύο άκρα	Φορτία F, μήκος δοκού l, ροπή αδράνειας I_m, μέτρο ελαστικότητας E, αποστάσεις από τα άκρα α	$f_{max} = \frac{F \cdot \alpha \cdot (8 \cdot \alpha^2 + 12 \cdot \alpha \cdot \beta + 3\beta^2)}{24 \cdot E \cdot I_m}$ $\beta = 1 - 2 \cdot \alpha$

Πίνακας 5.4.2
Επιτρεπόμενες τιμές βέλους κάμψεως.

Είδος έργου	*Επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως*
Σιδηροκατασκευή	$f_{\varepsilon\pi} = l/400$
Οικοδομικές κατασκευές	$f_{\varepsilon\pi} = l/400$
Ξύλινοι δοκοί	$f_{\varepsilon\pi} = l/300$
Άτρακτοι μηχανών	$f_{\varepsilon\pi} = l/1.000$ έως $f_{\varepsilon\pi} = 3 \cdot l/1.000$
Δύσκαμπτοι άτρακτοι μηχανών	$f_{\varepsilon\pi} = l/1.000$ έως $f_{\varepsilon\pi} = 5 \cdot l/1.000$
Γερανογέφυρες (ηλεκτροκίνητες)	$f_{\varepsilon\pi} = l/1.000$ έως $f_{\varepsilon\pi} = 13 \cdot l/1.000$
Σκυρόδεμα	$f_{\varepsilon\pi} = l/500$

ρέχονται επίσης από πίνακες (πίν. 5.4.2), ως συνάρτηση του μήκους l της δοκού.

Με βάση τη σχέση (5.7), το μέγιστο βέλος κάμψεως μας οδηγεί στην επιλογή της διατομής μιας δοκού. Συγκεκριμένα, υπολογίζομε την απαιτούμενη ροπή αδράνειας και απ' αυτήν τις διαστάσεις της διατομής. Σημειώνομε ότι οι σχέσεις (5.7) και (5.6) πρέπει να συναληθεύουν. Αυτό σημαίνει ότι εάν σε μία δοκό παρουσιαστεί βέλος κάμψεως μεγαλύτερο απ' το επιτρεπόμενο, παρόλο που μπορεί οι αναπτυσσόμενες τάσεις κάμψεως να είναι μικρότερες απ' την επιτρεπόμενη, εντούτοις πρέπει να αυξήσομε τη διατομή, ώστε το μέγιστο βέλος κάμψεως να γίνει μικρότερο απ' το επιτρεπόμενο.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται αμφιέρειστη δοκός μήκους $l = 90$ cm με κυκλική διατομή, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη με την εφαρμογή δύο καθέτων ίσων φορτίων $F = 1.000$ N σε ίσες αποστάσεις $\alpha = 5$ cm από τα δύο άκρα της δοκού. Να υπολογιστεί η μικρότερη ακτίνα της κυκλικής διατομής της δοκού στρογγυλοποιημένη στον πλησιέστερο ακέραιο που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί, εάν το επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως είναι $f_{\varepsilon\pi} = l/400$, η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} = 7.000$ N/cm^2 και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της είναι $E = 2 \cdot 10^6$ N/cm^2.

Λύση.

Η ακτίνα της κυκλικής διατομής πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα και η σχέση της κάμψεως:

$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\kappa\alpha} \qquad (1)$$

και η σχέση για το επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως:

$$f_{max} \leq f_{\varepsilon\pi}. \qquad (2)$$

Το μέγιστο βέλος κάμψεως για τη δοκό του παραδείγματος δίνεται από τον πίνακα 5.4.1:

$$f_{max} = \frac{F \cdot \alpha \cdot (8 \cdot \alpha^2 + 12 \cdot \alpha \cdot \beta + 3\beta^2)}{24 \cdot E \cdot I_m}$$

όπου $\beta = l - 2 \cdot \alpha = 90\text{ cm} - 2 \cdot 5\text{ cm} = 80\text{ cm}$ και I_m η ροπή αδράνειας της διατομής.

Επειδή $f_{επ} = l/400$, έχομε:

$$\frac{F \cdot α \cdot (8 \cdot α^2 + 12 \cdot α \cdot β + 3β^2)}{24 \cdot E \cdot I_m} \leq \frac{l}{400} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_m \geq \frac{400 \cdot F \cdot α \cdot (8 \cdot α^2 + 12 \cdot α \cdot β + 3β^2)}{24 \cdot E \cdot l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_m \geq \frac{400 \cdot 1.000\ N \cdot 5\ cm \cdot (8 \cdot 5^2 cm^2 + 12 \cdot 5\ cm \cdot 80\ cm + 3 \cdot 80^2 cm^2)}{24 \cdot 2 \cdot 10^6\ N/cm^2 \cdot 90\ cm} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_m \geq 11{,}2\ cm^4.$$

Από τον πίνακα 3.3.1 έχομε ότι η ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής δίνεται από τη σχέση:

$$I_m = \frac{π \cdot D^4}{64} = \frac{π \cdot r^4}{4}.$$

Έτσι έχομε:

$$\frac{π \cdot r^4}{4} \geq 11{,}2\ cm^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^4 \geq 14{,}27\ cm^4 \Leftrightarrow r \geq 1{,}94\ cm. \qquad (3)$$

Η ζητούμενη ακτίνα της κυκλικής διατομής πρέπει να ικανοποιεί και τη σχέση κάμψεως.

Η καμπτική ροπή στο τμήμα της δοκού μεταξύ των δύο δυνάμεων είναι:

$$M = F \cdot α = 1.000\ N \cdot 5\ cm = 5.000\ N \cdot cm.$$

Από τον πίνακα 3.5 έχομε ότι η ροπή αντιστάσεως της κυκλικής διατομής δίνεται από τη σχέση:

$$W_x = \frac{π}{32} D^3 = \frac{π \cdot r^3}{4}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση κάμψεως έχομε:

$$\frac{M}{W_x} \leq σ_{επ,κα} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{\frac{π \cdot r^3}{4}} \leq σ_{επ,κα} \Leftrightarrow r^3 \geq \frac{4 \cdot M}{π \cdot σ_{επ,κα}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 \geq \frac{4 \cdot 5.000\ N \cdot cm}{π \cdot 7.000\ N/cm^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 \geq 0{,}91\ cm^3 \Leftrightarrow r \geq 0{,}97\ cm. \qquad (4)$$

Οι ανισότητες (3) και (4) πρέπει να συναληθεύουν. Άρα πρέπει $r \geq 1{,}94$ cm. Επειδή η ακτίνα πρέπει να είναι στρογγυλοποιημένη στον πλησιέστερο ακέραιο, επιλέγομε $r = 2$ cm.

5.4.1 Υπολογισμός ελαστικής γραμμής.

Μας ενδιαφέρει επίσης, να προσδιορίζομε το σχήμα της καμπύλης, στην οποία μετατοπίζεται ο γεωμετρικός άξονας της δοκού από την ευθύγραμμη οριζόντια θέση, δηλαδή, όπως λέμε, να προσδιορίζομε το σχήμα της ελαστικής γραμμής της δοκού.

Ως ελαστική γραμμή ονομάζομε την καμπύλη στην οποία μετατρέπεται ο άξονας της δοκού κατά την καταπόνηση σε κάμψη.

Ας θεωρήσομε τη δοκό μήκους *l* του σχήματος 5.4β(α), η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Ο άξονας της δοκού καμπυλώνεται, έχοντας τα κοίλα προς τα πάνω.

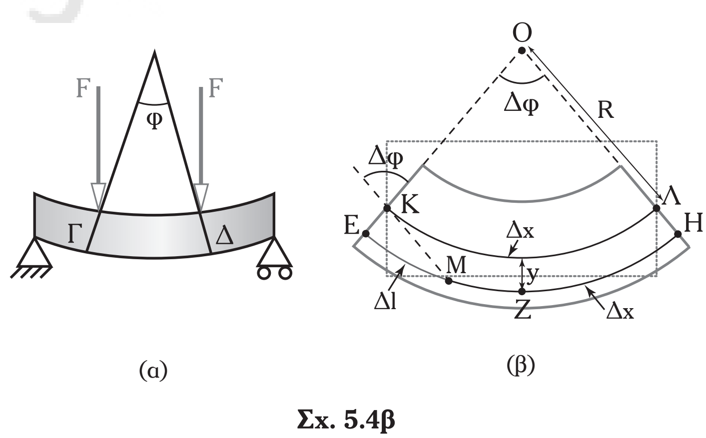
Ας θεωρήσομε στοιχειώδες τμήμα της δοκού που έχει μήκος Δx, το οποίο φαίνεται σε μεγέθυνση στο σχήμα 5.4β(β). Η γραμμή ΚΛ αποτελεί τον ουδέτερο άξονα. Πριν τη φόρτιση της δοκού, το στοιχειώδες τμήμα ήταν ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Μετά τη φόρτιση, παραμορφώνεται· ωστόσο με βάση τις υποθέσεις της τεχνικής θεωρίας της κάμψεως [παράγρ. 5.3.1(4)], οι ακραίες διατομές του παραμένουν επίπεδες. Λόγω της παραμορφώσεως, οι ακραίες αυτές διατομές είναι συγκλίνουσες, σχηματίζοντας μεταξύ τους γωνία Δφ. Το σημείο τομής τους Ο αποτελεί το κέντρο καμπυλότητάς τους με ακτίνα R. Ισχύει ότι:

$$Δx = R \cdot Δφ. \qquad (5.8)$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσομε την τυχαία ίνα ΕΖΗ του στοιχειώδους τμήματος, η οποία βρίσκεται σε απόσταση y από τη γραμμή ΚΛ. Η ίνα αυτή υφίσταται επιμήκυνση Δl που δίνεται από τη σχέση:

$$Δl = y \cdot Δφ. \qquad (5.9)$$

Όμως, για την επιμήκυνση Δl ισχύει ο Νόμος του



Σχ. 5.4β
(α) Δοκός καταπονούμενη σε συμμετρική καθαρή κάμψη. (β) Στοιχειώδες τμήμα της δοκού.

Hooke (βλ. σχέσεις 1.4 και 1.5). Έτσι έχομε:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{\Delta x}. \qquad (5.10)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της δοκού και σ η αναπτυσσόμενη τάση κάμψεως στην ίνα ΕΖΗ. Η τάση αυτή δίνεται από τη σχέση κάμψεως (βλ. σχέση 5.1):

$$\sigma = \frac{M}{I_m} \cdot y\,, \qquad (5.11)$$

όπου M η καμπτική ροπή και I_m η ροπή αδράνειας της διατομής της δοκού ως προς τον άξονα της ουδέτερης γραμμής.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.8), (5.9) και (5.11) στη σχέση (5.10) έχομε:

$$\frac{M}{I_m} \cdot y = E \cdot \frac{y \cdot \Delta\varphi}{R \cdot \Delta\varphi} \Leftrightarrow R = \frac{E \cdot I_m}{M}. \qquad (5.12)$$

Συνεπώς, η ελαστική γραμμή είναι ***κυκλικό τόξο*** με ακτίνα:

$$R = \frac{E \cdot I_m}{M}.$$

Επισημαίνομε ότι η ελαστική γραμμή είναι κυκλικό τόξο μόνο στις περιοχές της δοκού στις οποίες αναπτύσσεται καθαρή κάμψη, δηλαδή η τιμή της καμπτικής ροπής είναι σταθερή.

Γενικότερα, κατά την καταπόνηση σε κάμψη, σε κάθε σημείο της δοκού με τετμημένη x αντιστοιχεί, όπως προαναφέραμε, ένα βέλος κάμψεως f που είναι συνάρτηση του x, δηλαδή $f = f(x)$. Έτσι η ελαστική γραμμή εκφράζεται ως μία εξίσωση, η οποία είναι γνωστή ως ***εξίσωση ελαστικής γραμμής***. Η εύρεση της εξισώσεως ελαστικής γραμμής είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των βελών κάμψεως f(x) καθώς αυτά πρέπει να είναι μικρότερα από τα μέγιστα επιτρεπόμενα βέλη κάμψεως $f_{επ}$ για να μην υπάρξει αστοχία της κατασκευής.

Για τον υπολογισμό της εξισώσεως της ελαστικής γραμμής απαιτούνται επί πλέον των παραδοχών της παραγράφου 5.3.1 και οι ακόλουθες:

1) Η καμπυλότητα σε κάθε σημείο της καμπύλης της ελαστικής γραμμής εξαρτάται μόνο από την καμπτική ροπή.

2) Το μέγιστο βέλος κάμψεως είναι πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος της δοκού.

3) Το μήκος της δοκού είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με τη μεγαλύτερη διάσταση της διατομής της, ώστε η παραμόρφωση στρεβλώσεως της διατομής λόγω τυχόν διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται είναι πολύ μικρή σε σχέση με την παραμόρφωση της δοκού λόγω καμπτικών ροπών.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η καμπτική ροπή είναι γενικά συνάρτηση της τετμημένης x κάθε σημείου της δοκού (βλ. παράγρ. 4.3.3), αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της ελαστικής γραμμής είναι η εξής:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I_m}. \qquad (5.13)$$

Η εξίσωση (5.13) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής και η ποσότητα $E \cdot I_m$ ονομάζεται μέτρο δυσκαμψίας. Σημειώνεται ότι η ανωτέρω εξίσωση ισχύει και στην περίπτωση της μεταβλητής καμπτικής ροπής κατά μήκος της δοκού.

Η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής επιλύεται με διάφορες μεθόδους. Μία από αυτές είναι η μέθοδος της διπλής ολοκληρώσεως. Με βάση τη μέθοδο αυτή, ολοκληρώνομε την εξίσωση (5.13) δύο φορές. Στις περιπτώσεις που η καμπτική ροπή έχει διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις στα διάφορα τμήματα της δοκού, η ολοκλήρωση γίνεται κατά τμήματα.

Ως αποτέλεσμα της πρώτης ολοκληρώσεως λαμβάνομε την κλίση df/dx της καμπύλης της ελαστικής γραμμής σε κάθε σημείο της δοκού με τετμημένη x:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{E \cdot I_m} \cdot \left(\int M(x)dx + c_1 \right) \qquad (5.14)$$

όπου c_1 είναι η σταθερά της πρώτης ολοκληρώσεως, η οποία, όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπολογίζεται με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών λόγω στηρίξεως των δοκών. Η κλίση df/dx σε κάθε σημείο της καμπύλης της ελαστικής γραμμής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζουν ο άξονας των τετμημένων x με την εφαπτομένη της καμπύλης στο εν λόγω σημείο.

2) Μπορεί να λάβει και θετικές και αρνητικές τιμές.

3) Σε κάθε σημείο μεταβολής της φορτίσεως της δοκού, οι κλίσεις (οριακά) αριστερά και δεξιά του σημείου είναι ίσες.

Ως αποτέλεσμα της δεύτερης ολοκληρώσεως λαμβάνομε το βέλος κάμψεως $f = f(x)$:

$$f = -\frac{1}{E \cdot I_m} \cdot \left(\iint M(x)dx + c_1 \cdot x + c_2 \right) \quad (5.15)$$

όπου c_2 είναι η σταθερά της δεύτερης ολοκληρώσεως, η οποία επίσης υπολογίζεται με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών λόγω στηρίξεως των δοκών. Το βέλος κάμψεως $f = f(x)$ μπορεί να λάβει και θετικές και αρνητικές τιμές. Επίσης, σε κάθε σημείο μεταβολής της φορτίσεως της δοκού, τα βέλη κάμψεως (οριακά) αριστερά και δεξιά του σημείου είναι ίσα.

Ο υπολογισμός των σταθερών της διπλής ολοκληρώσεως υπολογίζεται ανάλογα με τον τρόπο στηρίξεως των δοκών ως εξής:

1) Άρθρωση.

Η διατομή στο σημείο της αρθρώσεως έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται αλλά δεν μετακινείται (βλ. πίν. 4.2.1). Συνεπώς, στο σημείο της αρθρώσεως το βέλος κάμψεως είναι μηδενικό. Έτσι, για το παράδειγμα της δοκού του σχήματος 5.4γ(α) που διαθέτει άρθρωση στο ένα άκρο της Α το οποίο βρίσκεται στη θέση με τετμημένη x=0, η οριακή συνθήκη είναι η εξής:

$$\frac{df}{dx}(0) \neq 0 \qquad f(0)=0. \tag{5.16}$$

2) Κύλιση.

Η διατομή στο σημείο της κυλίσεως έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται αλλά δεν μετακινείται πάνω-κάτω (βλ. πίν. 4.2.1). Συνεπώς, στο σημείο της κυλίσεως το βέλος κάμψεως είναι μηδενικό. Έτσι, για το παράδειγμα της δοκού του σχήματος 5.4γ(β) που διαθέτει κύλιση στο ένα άκρο της Β το οποίο βρίσκεται στη θέση με τετμημένη $x = L$, η οριακή συνθήκη είναι η εξής:

$$\frac{df}{dx}(L) \neq 0 \qquad f(L)=0. \tag{5.17}$$

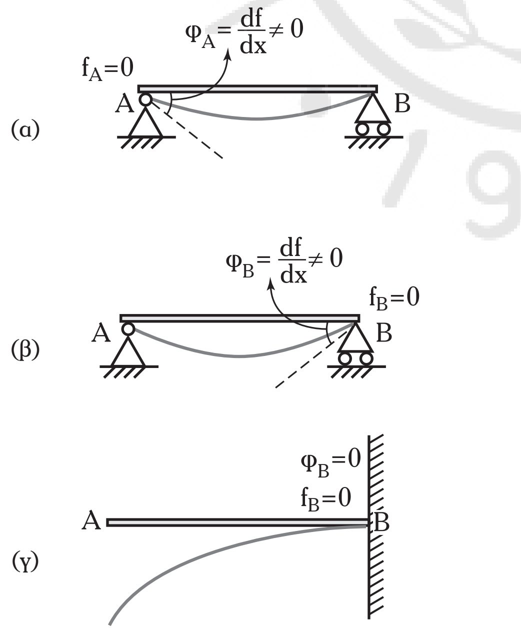
3) Πάκτωση.

Η διατομή κάθε πακτωμένου άκρου της δοκού δεν στρέφεται ούτε μετακινείται (βλ. πίν. 4.2.1). Συνεπώς, σε κάθε πακτωμένο άκρο η κλίση της ελαστικής γραμμής και το βέλος κάμψεως είναι μηδενικά. Έτσι, για το παράδειγμα της δοκού του σχήματος 5.4γ(γ) που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της Β το οποίο βρίσκεται στη θέση με τετμημένη x=L, η οριακή συνθήκη είναι η εξής:

$$\frac{df}{dx}(L)=0 \qquad f(L)=0. \tag{5.18}$$

Περαιτέρω, ο υπολογισμός του βέλους κάμψεως σε περιπτώσεις συνθέτων φορτίσεων πραγματοποιείται με τη μέθοδο της επαλληλίας. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή αναλύομε τη σύνθετη φόρτιση σε n επιμέρους απλούστερες φορτίσεις. Η καμπτική ροπή της σύνθετης φορτίσεως είναι ίση με το άθροισμα των καμπτικών ροπών των επιμέρους φορτίσεων. Σε κάθε επιμέρους φόρτιση αντιστοιχεί ένα βέλος κάμψεως f_i. Το βέλος κάμψεως f της σύνθετης φορτίσεως ισούται με το άθροισμα των επιμέρους βελών κάμψεως, δηλαδή:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i. \tag{5.19}$$



Σχ. 5.4γ
Παραδείγματα ελαστικής γραμμής δοκών.

5.4.2 Γωνία στροφής των ακραίων διατομών.

Στη μελέτη της κάμψεως ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο υπολογισμός της γωνίας στροφής των ακραίων διατομών της δοκού (ή του τμήματός της) που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη. Η γωνία αυτή είναι η γωνία φ που φαίνεται στο σχήμα 5.4β(α). Αποδεικνύεται ότι η γωνία φ δίνεται από τη σχέση (σε ακτίνια):

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I_m}. \tag{5.20}$$

Η ποσότητα $E \cdot I_m$ που εμφανίζεται στις σχέσεις (5.12) και (5.20) ονομάζεται ***μέτρο δυσκαμψίας***. Από τη σχέση (5.20) έχομε ότι η ποσότητα $E \cdot I_m / l$ αποτελεί την καμπτική ροπή που χρειάζεται η δοκός, ώστε να στραφούν οι ακραίες διατομές της κατά μοναδιαία γωνία στροφής.

Παράδειγμα 5.

Για τη δοκό του παραδείγματος 4, να υπολογιστούν:

1) Η ακτίνα καμπυλότητας της ελαστικής γραμμής και

2) η γωνία στροφής των ακραίων διατομών του τμήματος της δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη.

Λύση.

1) Η ελαστική γραμμή είναι κυκλικό τόξο με ακτίνα:

$$R = \frac{E \cdot I_m}{M}.$$

Η ροπή αδράνειας για $r = 2$ cm είναι:

$$I_m = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot 2^4 \mathrm{cm}^4}{4} = 12{,}56\ \mathrm{cm}^4.$$

Έτσι έχομε:

$$R = \frac{E \cdot I_m}{M} = \frac{2 \cdot 10^6\ \mathrm{N/cm^2} \cdot 12{,}56\ \mathrm{cm}^4}{5.000\ \mathrm{N{\cdot}cm}} =$$

$$= 5.024\ \mathrm{cm} = 50{,}24\ \mathrm{m}.$$

2) Η γωνία στροφής των ακραίων διατομών της δοκού υπολογίζεται από τη σχέση:

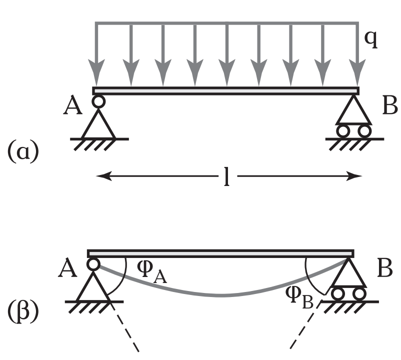
$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I_m} = \frac{5.000\ \mathrm{N{\cdot}cm} \cdot 90\ \mathrm{cm}}{2 \cdot 10^6\ \mathrm{N/cm^2} \cdot 12{,}56\ \mathrm{cm}^4} =$$

$$= 17{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad} \approx 1^\circ.$$

Παράδειγμα 6.

Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος 5.4δ(α) έχει μήκος $L = 2$ m και φορτίζεται με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q = 3.000$ N/m σε όλο το μήκος της. Το μέτρο δυσκαμψίας της είναι $E \cdot I_m = 2.500\ \mathrm{N \cdot m^2}$. Να υπολογιστούν:

1) το μέγιστο βέλος κάμψεως και η θέση του, καθώς και



Σχ. 5.4δ

2) οι κλίσεις στα άκρα της δοκού.

Λύση.

Επειδή το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο, το συνολικό φορτίο που καταπονεί τη δοκό είναι:

$$F = q \cdot L = \frac{3.000\ \mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} = 6.000\ \mathrm{N}.$$

Οι αντιδράσεις F_A και F_B στα άκρα Α και Β της δοκού, αντίστοιχα, είναι τέτοιες ώστε:

$$F = F_A + F_B. \tag{1}$$

Επίσης, λόγω της συμμετρίας οι αντιδράσεις F_A και F_B είναι ίσες, δηλαδή:

$$F_A = F_B. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνομε ότι:

$$F_A = F_B = \frac{F}{2} = \frac{q \cdot L}{2} = 3.000\ \mathrm{N}. \tag{3}$$

Η καμπτική ροπή, όπως έχομε αναφέρει (βλ. παράγρ. 4.3.4, Παράδειγμα 8), για την περίπτωση ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου, υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M(x) = F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}. \tag{4}$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής είναι η εξής:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{E \cdot I_m}\left(F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}\right) \tag{5}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της διπλής ολοκληρώσεως στην εξίσωση (5) λαμβάνομε αρχικά την κλίση:

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{1}{E \cdot I_m} \cdot \left[\int\left(F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}\right) dx + c_1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{df}{dx}(x) = -\frac{1}{E \cdot I_m} \cdot \left(\frac{F_A}{2} \cdot x^2 - \frac{q \cdot x^3}{6} + c_1\right) \tag{6}$$

και στη συνέχεια το βέλος κάμψεως:

$$f(x) = -\frac{1}{E \cdot I_m} \cdot \left[\int\left(\frac{F_A}{2} \cdot x^2 - \frac{q \cdot x^3}{6} + c_1\right) dx + c_2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{E \cdot I_m} \cdot \left(\frac{F_A}{6} \cdot x^3 - \frac{q \cdot x^4}{24} + c_1 \cdot x + c_2\right). \tag{7}$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα, έχομε:

$$f(0)=0 \quad \text{και} \quad f(L)=0 \tag{8}$$

Έτσι, για $f(0)=0$ από την εξίσωση (7) λαμβάνομε:

$$f(0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{F_A}{6}\cdot 0^3-\frac{q\cdot 0^4}{24}+c_1\cdot 0+c_2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot c_2=0 \Leftrightarrow c_2=0. \tag{9}$$

Ομοίως, για $f(L)=0$ από την εξίσωση (6) λαμβάνομε:

$$f(L)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{F_A}{6}\cdot L^3-\frac{q\cdot L^4}{24}+c_1\cdot L\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1=-\frac{F_A}{6}\cdot L^2+\frac{q\cdot L^3}{24}. \tag{10}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3) η σταθερά c_1 υπολογίζεται από την (10) ως εξής:

$$c_1=-\frac{q\cdot L}{2\cdot 6}\cdot L^2+\frac{q\cdot L^3}{24}=-\frac{q\cdot L^3}{24}. \tag{11}$$

Εισάγοντας τις σταθερές στις εξισώσεις (6) και (7) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3) λαμβάνομε:

$$\frac{df}{dx}(x)=-\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{q\cdot L}{4}\cdot x^2-\frac{q}{6}\cdot x^3-\frac{q\cdot L^3}{24}\right) \tag{12}$$

και

$$f(x)=-\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{q\cdot L}{12}\cdot x^3-\frac{q}{24}\cdot x^4-\frac{q\cdot L^3}{24}\cdot x\right). \tag{13}$$

Το μέγιστο βέλος κάμψεως f_{max} αντιστοιχεί σε εκείνο το σημείο της δοκού με τετμημένη x_{max} στο οποίο η κλίση είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{df}{dx}(x_{max})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{q\cdot L}{4}\cdot x_{max}^2-\frac{q}{6}\cdot x_{max}^3-\frac{q\cdot L^3}{24}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{q\cdot L}{4}\cdot x_{max}^2-\frac{q}{6}\cdot x_{max}^3-\frac{q\cdot L^3}{24}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6L\cdot x_{max}^2-4\cdot x_{max}^3-L^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot x_{max}^3-6L\cdot x_{max}^2+L^3=0 \Leftrightarrow x_{max}=\frac{L}{2}.$$

Άρα, το μέγιστο βέλος κάμψεως βρίσκεται στο μέσο της δοκού. Σημειώνεται ότι στο σημείο αυτό η εφαπτομένη στην ελαστική γραμμή είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Το μέγιστο βέλος κάμψεως υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξισώσεως (13):

$$f_{max}=f(x_{max})=$$

$$=-\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left[\frac{q\cdot L}{12}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^3-\frac{q}{24}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^4-\frac{q\cdot L^3}{24}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{1}{96}-\frac{1}{384}-\frac{1}{48}\right)=\frac{5q\cdot L^4}{384E\cdot I_m}=$$

$$=\frac{5\cdot 3.000\,\text{N/m}\cdot 2^4\,\text{m}^4}{384\cdot 2.500\,\text{N}\cdot\text{m}^2}=0{,}25\,\text{m}.$$

Οι ζητούμενες κλίσεις φ_A και φ_B στα άκρα της δοκού υπολογίζονται από την εξίσωση (12) θέτοντας $x=0$ και $x=L$. Συγκεκριμένα, έχομε:

$$\varphi_A=\frac{df}{dx}(0)=-\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{q\cdot L}{4}\cdot 0^2-\frac{q}{6}\cdot 0^3-\frac{q\cdot L^3}{24}\right)=$$

$$=\frac{q\cdot L^3}{24\cdot E\cdot I_m}=\frac{3.000\,\text{N/m}\cdot 2^3\,\text{m}^3}{24\cdot 2.500\,\text{N}\cdot\text{m}^2}=0{,}4\,\text{rad ή } 22{,}9^\circ$$

και

$$\varphi_B=\frac{df}{dx}(L)=-\frac{1}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{q\cdot L}{4}\cdot L^2-\frac{q}{6}\cdot L^3-\frac{q\cdot L^3}{24}\right)=$$

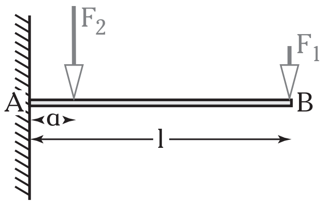
$$=\frac{q\cdot L^3}{E\cdot I_m}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)=\frac{-q\cdot L^3}{24\cdot E\cdot I_m}=$$

$$=\frac{-3.000\,\text{N/m}\cdot 2^3\,\text{m}^3}{24\cdot 2.500\,\text{N}\cdot\text{m}^2}=-0{,}4\,\text{rad ή }-22{,}9^\circ.$$

Οι κλίσεις φ_A και φ_B είναι αντίθετες ως απόρροια της συμμετρίας. Το αρνητικό πρόσημο της φ_B δηλώνει την αντίθετη φορά της σε σχέση με τη φ_A, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.4δ(β).

Παράδειγμα 7.

Στην πρόβολο δοκό του σχήματος 5.4ε με μήκος $l=2\,\text{m}$ ενεργούν τα μεμονωμένα φορτία $F_1=520\,\text{N}$ και $F_2=760\,\text{N}$. Το φορτίο F_1 ενεργεί στο ελεύθερο άκρο της και το φορτίο F_2 σε απόσταση $\alpha=0{,}5\,\text{m}$ από το πακτωμένο άκρο της. Το μέτρο δυσκαμψίας της είναι $E\cdot I_m=38.000\,\text{N}\cdot\text{m}^2$. Να υπολογιστεί το μέ-



Σχ. 5.4ε

γιστο βέλος κάμψεως και η θέση του. Εάν $f_{επ} = 0,1\ m$, φορτίζεται η δοκός κανονικά;

Λύση.

Ο υπολογισμός των βελών κάμψεως της δοκού μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο της επαλληλίας. Αναλύομε τη σύνθετη φόρτιση των δύο μεμονωμένων φορτίων στη φόρτιση του φορτίου F_1 και στη φόρτιση του φορτίου F_2 ξεχωριστά.

Σύμφωνα με τον πίνακα 5.4.1,

1) το βέλος κάμψεως που προκύπτει από το φορτίο F_1 έχει μέγιστη τιμή:

$$f_{1,max} = \frac{F_1 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_m} \qquad (1)$$

και βρίσκεται στην άκρη της δοκού, δηλαδή στη θέση $x = l$.

2) το βέλος κάμψεως που προκύπτει από το φορτίο F_2 έχει μέγιστη τιμή:

$$f_{2,max} = \frac{F_2 \cdot \alpha^3}{3 \cdot E \cdot I_m} \qquad (2)$$

και βρίσκεται στην άκρη της δοκού, δηλαδή στη θέση $x = l$.

Συνεπώς, το μέγιστο βέλος κάμψεως που προκύπτει και από τα δύο φορτία F_1 και F_2 βρίσκεται στη θέση $x = l$ και έχει τιμή:

$$f_{max} = f_{1,max} + f_{2,max} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{max} = \frac{F_1 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_m} + \frac{F_2 \cdot \alpha^3}{3 \cdot E \cdot I_m} = \frac{520\ N \cdot 2^3\ m^3}{3 \cdot 38.000\ N \cdot m^2} +$$

$$+ \frac{760\ N \cdot 0,5^3\ m^3}{3 \cdot 38.000\ N \cdot m^2} = 0,037\ m.$$

Επειδή το μέγιστο βέλος κάμψεως είναι μικρότερο από την επιτρεπόμενη τιμή βέλους κάμψεως $f_{επ}$, η δοκός φορτίζεται κανονικά.

5.4.3 Σύγκριση συμμετρικής καθαρής κάμψεως με εφελκυσμό και θλίψη.

Στα προηγούμενα είδαμε ότι η συμμετρική καθαρή κάμψη έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων. Για λόγους καλύτερης κατανοήσεως της κάμψεως παραθέτομε στον πίνακα 5.4.3 συνοπτικά τις ομοιότητες και τις διαφορές της κάμψεως με τον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Ασκήσεις.

1. *Δίνεται αμφιέρειστη δοκός μήκους $l = 120\ cm$ με τετραγωνική διατομή, η οποία καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη με την εφαρμογή δύο καθέτων ίσων φορτίων $F = 1.500\ N$ σε ίσες αποστάσεις $a = 15\ cm$ από τα δύο άκρα της δοκού. Να υπολογιστεί η πλευρά της τετραγωνικής διατομής της δοκού στρογγυλοποιημένη στον πλησιέστερο ακέραιο που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί, εάν το επιτρεπόμενο βέλος κάμψεως είναι $f_{επ} = l/300$,*

Πίνακας 5.4.3
Σύγκριση της κάμψεως με τον αφελκυσμό και τη θλίψη.

Θέμα	***Κάμψη***	***Εφελκυσμός***	***Θλίψη***
Είδος τάσεων	Ορθές	Ορθές	Ορθές
Εφελκυστικές ή θλιπτικές τάσεις	Εφελκυστικές και θλιπτικές	Μόνο εφελκυστικές	Μόνο θλιπτικές
Μεταβλητότητα τάσεων στη διατομή	Μεταβλητή τάση	Σταθερή τάση	Σταθερή τάση
Επιτρεπόμενη τάση	Ορίζεται	Ορίζεται	Ορίζεται
Παραμορφώσεις	Βέλος κάμψεως, αλλαγή σχήματος ουδέτερου άξονα, στροφή των ακραίων διατομών	Επιμήκυνση (αύξηση του μήκους) και μείωση διατομής	Επιβράχυνση (μείωση του μήκους) και αύξηση διατομής

η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως $\sigma_{επ,κα} = 8.500\,N/cm^2$ και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της είναι $E = 1{,}9 \cdot 10^6\,N/cm^2$.

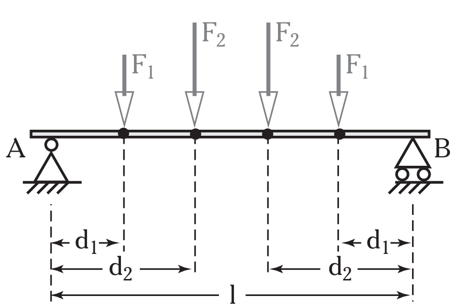
2. *Για τη δοκό της ασκήσεως 1, να υπολογιστούν:*
   α) Η ακτίνα καμπυλότητας της ελαστικής γραμμής.
   β) Η γωνία στροφής των ακραίων διατομών του τμήματος της δοκού που καταπονείται σε συμμετρική καθαρή κάμψη.

3. *Για τη δοκό της ασκήσεως 3 της παραγράφου 4.3.5, να υπολογιστούν:*
   α) το μέγιστο βέλος κάμψεως και η θέση του
   β) οι κλίσεις στα άκρα της δοκού.
   Το μέτρο δυσκαμψίας της είναι $E \cdot I_m = 25.000\,N \cdot m^2$.

4. *Για τη δοκό της ασκήσεως 4 της παραγράφου 4.3.5, να υπολογιστεί το μέγιστο βέλος κάμψεως και η θέση του. Το μέτρο δυσκαμψίας της είναι $E \cdot I_m = 36.000\,N \cdot m^2$. Εάν $f_{επ} = 0{,}15\,m$, φορτίζεται η δοκός κανονικά;*

5. *Για τη δοκό κυκλικής διατομής της ασκήσεως 5 της παραγράφου 4.3.5, να υπολογιστεί το μέγιστο βέλος κάμψεως και η θέση του. Το μέτρο ελαστικότητάς της είναι $E = 2 \cdot 10^9\,N/m^2$. Εάν $f_{επ} = 0{,}08\,m$, να υπολογιστεί ποια πρέπει να είναι η διατομή της δοκού ώστε να φορτίζεται κανονικά.*

6. *Στην αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 5.4στ με μήκος $l = 5\,m$ ενεργούν δύο ζεύγη μεμονωμένων ίσων φορτίων $F_1 = 820\,N$ και $F_2 = 940\,N$. Το ζεύγος των φορτίων F_1 ενεργεί σε αποστάσεις $d_1 = 1\,m$ από τα άκρα της δοκού και το ζεύγος των φορτίων F_2 ενεργεί σε αποστάσεις $d_2 = 2\,m$ από τα άκρα της. Το μέτρο δυσκαμψίας της δοκού είναι $E \cdot I_m = 57.000\,N \cdot m^2$. Να υπολογιστεί το μέγιστο βέλος κάμψεως και η θέση του. Εάν $f_{επ} = 0{,}15\,m$, φορτίζεται η δοκός κανονικά;*



Σχ. 5.4στ
Η δοκός της Ασκήσεως 6.

5.5 Σύνοψη βασικών εννοιών.

Οι βασικότερες έννοιες του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται στις εξής:

1) Καταπόνηση μιας δοκού σε κάμψη έχομε όταν στηρίζεται σ' ένα ή περισσότερα σημεία και ενεργούν σε αυτή δυνάμεις κάθετες στον άξονά της με αποτέλεσμα την καμπύλωσή της.

2) Η ***καθαρή κάμψη*** είναι μια σύνθετη καταπόνηση που ***αποτελείται από καταπονήσεις σε εφελκυσμό και σε θλίψη***. Μεταξύ των ινών που θλίβονται και αυτών που εφελκύονται υπάρχουν ***ουδέτερες ίνες***, οι οποίες συνιστούν το ουδέτερο επίπεδο. Η τομή του ουδέτερου επιπέδου με τη διατομή ονομάζεται ***ουδέτερη γραμμή*** (άξονας x).

3) Η ***τάση κάμψεως*** $\sigma_{κα}$ μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο της διατομής, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_{κα} = \frac{M}{I_x} \cdot y$$

όπου M είναι η καμπτική ροπή, I_x η ροπή αδράνειάς της και y η απόσταση του σημείου της διατομής από την ουδέτερη γραμμή. Η τάση κάμψεως λαμβάνει τις ακρότατες τιμές της στα ακραία σημεία της διατομής.

4) Η ***σχέση κάμψεως*** είναι:

$$-\sigma_{επ,κα} \leq \pm \frac{M}{W_x} \leq -\sigma_{επ,κα}$$

όπου W_x είναι η ροπή αντιστάσεως ως προς τον άξονα x.

5) ***Βέλος κάμψεως*** f ενός σημείου του άξονα της δοκού ονομάζεται η μετατόπιση του σημείου από τη θέση που είχε πριν την καταπόνηση σε κάμψη στη θέση που βρίσκεται κατά την καταπόνηση.

6) Η μέγιστη τιμή του βέλους κάμψεως πρέπει να μην υπερβαίνει μια επιτρεπόμενη τιμή $f_{επ}$, δηλαδή $f_{max} \leq f_{επ}$.

7) ***Ελαστική γραμμή*** είναι η καμπύλη στην οποία μετατρέπεται ο άξονας δοκού που καταπονείται σε κάμψη. Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής είναι:

$$\frac{d^2 f}{d^2 x} = -\frac{M(x)}{E \cdot I_m}$$

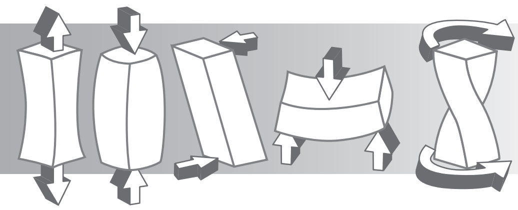
όπου η ποσότητα $E \cdot I_m$ ονομάζεται μέτρο δυσκαμψίας.

8) Η ***γωνία στροφής*** των ακραίων διατομών της δοκού μήκους l που καταπονείται σε κάμψη δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I_m}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Στρέψη



6.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε την καταπόνηση της στρέψεως. Συγκεκριμένα, δίνομε τον ορισμό της, παρουσιάζομε ξεχωριστά τις περιπτώσεις της στρέψεως σε δοκό κυκλικής και μη κυκλικής διατομής, αναπτύσσομε παραδείγματα εφαρμογής της και εξηγούμε τις προκαλούμενες τάσεις και παραμορφώσεις. Περαιτέρω, εξετάζομε τις περιπτώσεις της στρέψεως ράβδου με λεπτά τοιχώματα και της στρέψεως περιστρεφόμενου άξονα και παραθέτομε σχετικά παραδείγματα.

Ο πίνακας 6.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 6.1
Σύμβολα και μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Αριθμός στροφών ανά μονάδα χρόνου	n	rpm, rps
Γωνιακή παραμόρφωση (ολισθήσεως)	γ	rad,°
Επιτρεπόμενη τάση στρέψεως	$\tau_{επ,\,στ}$	N/cm^2, N/mm^2
Ισχύς	P	W, PS, kpm/s
Μέγιστη τάση στρέψεως	τ_{max}	N/cm^2, N/mm^2
Στροφή	θ	rad,°
Τάση στρέψεως	$\tau_{στ}$	N/cm^2, N/mm^2

6.2 Η καταπόνηση της στρέψεως.

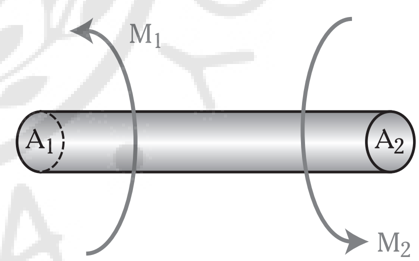
Ας θεωρήσομε τη ράβδο του σχήματος 6.2α. Στη διατομή A_1 της ράβδου ενεργεί ροπή M_1, ενώ στη διατομή A_2 ροπή M_2 και μάλιστα η ροπή M_2 είναι ίση με τη M_1, αλλά αντίθετης φοράς. Η ροπή M_1 τείνει να περιστρέψει τη διατομή A_1 της ράβδου κατά τη φορά που δείχνει το σχετικό βέλος στο σχήμα, ενώ η ροπή M_2 τείνει να περιστρέψει τη διατομή A_2 της ράβδου κατά την αντίθετη φορά. Στην κατάσταση αυτή η ράβδος λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη.

Γενικότερα:

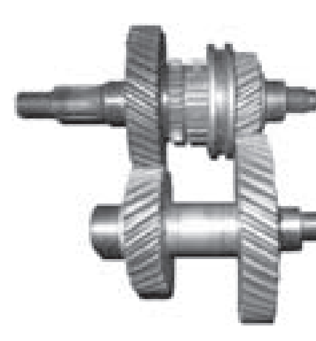
Ένα στερεό σώμα λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη όταν σε δύο διατομές κάθετες στον άξονα του σώματος ενεργούν δύο ροπές ίσες αλλά αντίθετης φοράς.

Η καταπόνηση της στρέψεως παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη είναι τα ημιαξόνια των αυτοκινήτων, ο κορμός του κατσαβιδιού κατά την περιστροφή μιας βίδας, ο άξονας ενός ηλεκτροκινητήρα κ.λπ..

Επίσης, στην καθημερινή μας ζωή η καταπόνηση της στρέψεως εμφανίζεται πολλές φορές ταυτοχρόνως με άλλες καταπονήσεις, όπως με κάμψη, θλίψη ή εφελκυσμό. Χαρακτηριστικά αναφέρομε το παράδειγμα των δύο ατράκτων με γρανάζια του σχήματος 6.2β. Κάθε μία από τις δύο ατράκτους καταπονείται



Σχ. 6.2α
Ράβδος που καταπονείται σε στρέψη.

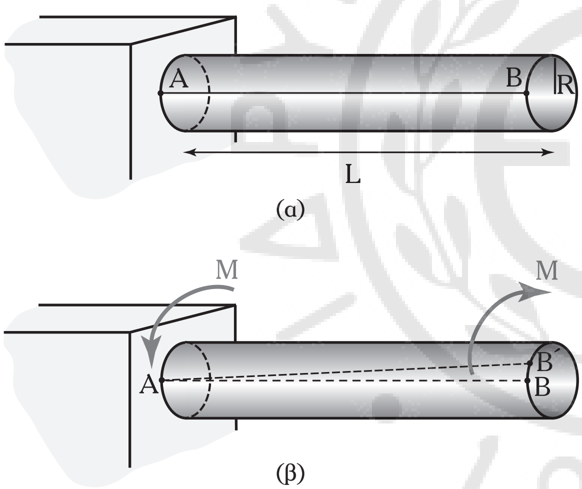


Σχ. 6.2β
Δύο άτρακτοι με γρανάζια.

σε στρέψη. Ταυτόχρονα, κάθε μία από τις δύο ατράκτους καταπονείται σε κάμψη, η οποία οφείλεται στη δύναμη που εξασκεί το γρανάζι της άλλης ατράκτου. Περισσότερες πληροφορίες για την έννοια των ατράκτων παρουσιάζομε στην παράγραφο 6.6. και για την σύνθετη καταπόνηση στρέψεως και κάμψεως στην παράγραφο 8.8.

6.3 Τάσεις στρέψεως σε δοκό κυκλικής διατομής.

Προκειμένου να μελετήσομε αναλυτικά την καταπόνηση της στρέψεως, ας θεωρήσομε τη δοκό κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α. Η δοκός είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της και έχει μήκος L και ακτίνα R ή ισοδύναμα διάμετρο D = 2 R. Πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε καταπονήσεως σε στρέψη μπορούμε να χαράξομε στην περιφέρεια της δοκού ένα ευθύγραμμο τμήμα AB παράλληλο στον άξονα της δοκού.



Σχ. 6.3α
Δοκός κυκλικής διατομής: (α) Πριν την καταπόνηση σε στρέψη. (β) Καταπονούμενη σε στρέψη.

Στη συνέχεια, στο ελεύθερο άκρο της δοκού εφαρμόζομε ροπή M, η οποία ονομάζεται ***ροπή στρέψεως***. Με την εφαρμογή της ροπής αυτής, στο πακτωμένο άκρο της δοκού εμφανίζεται ροπή ίση και αντίθετη με την M, η οποία προέρχεται από το πακτωμένο άκρο. Κατά συνέπεια, η δοκός καταπονείται σε στρέψη.

Η καταπόνηση σε στρέψη της δοκού χαρακτηρίζεται από τα εξής:

1) Το σημείο B του ελεύθερου άκρου της δοκού περιστρέφεται[1] φτάνοντας σε νέα θέση B′, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.3β(α). Η περιστροφή του σημείου B γίνεται κατά γωνία θ, η οποία ονομάζεται ***στροφή***. Η στροφή αποτελεί το μέτρο της παραμορφώσεως της κυκλικής διατομής του ελεύθερου άκρου της ράβδου.

Το μήκος του διανυόμενου τόξου BB΄ ισούται με:

$$BB' = R \cdot \theta \qquad (6.1)$$

όπου η στροφή θ μετρείται σε ακτίνια.

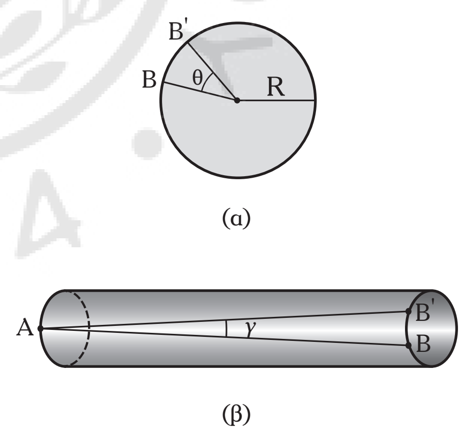
2) Ανάλογη περιστροφή μ' αυτήν που εκτελεί το σημείο B εκτελούν και όλα τα ενδιάμεσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος AB.

3) Έτσι, το ευθύγραμμο τμήμα AB μετακινείται φτάνοντας σε νέα θέση AB΄, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.3β(β). Η μετακίνηση του τμήματος AB γίνεται κατά γωνία γ, η οποία ονομάζεται ***γωνιακή παραμόρφωση (ολισθήσεως)***. Το διανυόμενο τόξο BB΄ έχει μήκος ίσο με:

$$BB' = L \cdot \gamma, \qquad (6.2)$$

όπου η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια.

Με συνδυασμό των εξισώσεων (6.1) και (6.2) προκύπτει η ακόλουθη σχέση μεταξύ της γωνιακής



Σχ. 6.3β
Κατά την καταπόνηση σε στρέψη της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α: (α) Το σημείο B περιστρέφεται κατά γωνία θ. (β) Το ευθύγραμμο τμήμα AB μετακινείται κατά γωνία γ.

[1] Έχομε κάνει την παραδοχή ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται πριν από την παραμόρφωση πάνω σε μία οποιαδήποτε διατομή της δοκού κάθετη στον άξονά της εξακολουθούν να βρίσκονται στην ίδια κάθετη διατομή και μετά την παραμόρφωσή της.

παραμορφώσεως ολισθήσεως και της στροφής, που εμφανίζει η διατομή του ελεύθερου άκρου της δοκού:

$$\gamma = \frac{R \cdot \theta}{L}. \qquad (6.3)$$

Ας εξετάσομε στη συνέχεια, με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, την παραμόρφωση που προκαλείται από την καταπόνηση σε στρέψη, σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της δοκού. Κάθε ενδιάμεσο τυχαίο σημείο B_x του τμήματος ΑΒ χαρακτηρίζεται απ' την απόστασή του x από το πακτωμένο άκρο. Λόγω της ροπής στρέψεως, το σημείο B_x περιστρέφεται φτάνοντας σε νέα θέση B_x' (σχ. 6.3γ). Έτσι, συνολικά η κυκλική διατομή της δοκού που αντιστοιχεί στο σημείο B_x περιστρέφεται κατά στροφή θ_x, η οποία εξαρτάται από την απόσταση x. Η στροφή θ_x αποτελεί το μέτρο της παραμορφώσεως της κυκλικής διατομής της δοκού που βρίσκεται σε απόσταση x από το πακτωμένο άκρο. Το μήκος του διανυόμενου τόξου B_xB_x' ισούται με:

$$B_xB_x' = R \cdot \theta_x \qquad (6.4)$$

όπου η στροφή θ_x μετρείται σε ακτίνια.

Εξάλλου, η μετακίνηση του τμήματος AB_x γίνεται κατά τη γωνιακή παραμόρφωση γ, η οποία είναι σταθερή για όλες τις διατομές της δοκού (για συγκεκριμένη ροπή στρέψεως). Το διανυόμενο τόξο B_xB_x' έχει μήκος ίσο με:

$$B_xB_x' = x \cdot \gamma \qquad (6.5)$$

όπου η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια.

Με συνδυασμό των εξισώσεων (6.4) και (6.5) προκύπτει η ακόλουθη σχέση μεταξύ της στροφής που εμφανίζει η διατομή της δοκού που βρίσκεται σε απόσταση x και της αποστάσεως x:

$$\theta_x = \frac{\gamma}{R} x. \qquad (6.6)$$

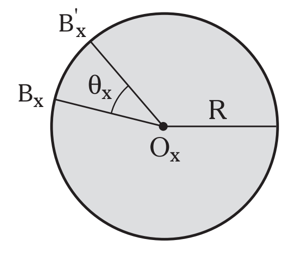
Συνεπώς, για συγκεκριμένη ροπή στρέψεως:

Η στροφή μίας διατομής της δοκού κυκλικής διατομής μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση της διατομής από το πακτωμένο άκρο της δοκού.

Έτσι, όσο πλησιάζομε προς το ελεύθερο άκρο της δοκού, τόσο μεγαλύτερη είναι η στροφή.

Ειδικές περιπτώσεις:

1) Όπως προκύπτει από την εξίσωση (6.6) θέτοντας x = 0, η στροφή για τη διατομή του πακτωμένου άκρου είναι ίση με το μηδέν.



Σχ. 6.3γ
Κατά την καταπόνηση σε στρέψη της δοκού κυκλικής διατομής (σχ. 6.3α) το σημείο B_x περιστρέφεται κατά γωνία θ_x.

2) Όπως προκύπτει από την εξίσωση (6.6) θέτοντας x = L η στροφή για τη διατομή του ελεύθερου άκρου είναι ίση με:

$$\theta = \frac{\gamma}{R} L,$$

σε πλήρη συμφωνία με την εξίσωση (6.3).

6.3.1 Ο Νόμος του Hooke για τη στρέψη.

Στη συνέχεια, ας εξετάσομε τι συμβαίνει όταν μεταβάλλομε τη ροπή στρέψεως που ενεργεί στο ελεύθερο άκρο της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α. Καταρχάς, εάν σταματήσομε την εφαρμογή της ροπής στρέψεως (περίπτωση μηδενικής ροπής στρέψεως) τότε, τόσο η γωνιακή παραμόρφωση όσο και η στροφή όλων των διατομών της δοκού αναιρούνται.

Εάν διπλασιάσομε τη ροπή στρέψεως, τότε η στροφή των διατομών της δοκού διπλασιάζεται. Το ίδιο ισχύει και για τη γωνιακή παραμόρφωση. Εάν τριπλασιάσομε τη ροπή στρέψεως, τότε η στροφή των διατομών της δοκού τριπλασιάζεται. Εάν, στη συνέχεια μηδενίσομε την εφαρμογή της ροπής στρέψεως τότε και πάλι, τόσο η γωνιακή παραμόρφωση όσο και η στροφή όλων των διατομών της δοκού αναιρούνται. Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι ο Νόμος του Hooke ισχύει και για την καταπόνηση της στρέψεως σε δοκό κυκλικής διατομής.

Συνεπώς, ο νόμος του Hooke για τη στρέψη διατυπώνεται ως εξής:

1) ***Η στροφή είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως.***

2) ***Η γωνιακή παραμόρφωση είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως.***

Κατ' αναλογία των περιπτώσεων του εφελκυσμού και της θλίψεως και επειδή όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μέγιστη τάση στρέψεως είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως, ο Νόμος του Hooke γράφεται επίσης στην ακόλουθη μορφή:

$$\tau_{max} = G \cdot \gamma \qquad (6.7)$$

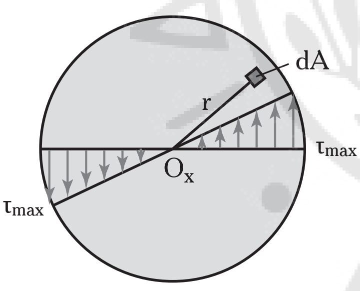
όπου τ_{max} η μέγιστη τάση στρέψεως (βλ. παράγρ. 6.3.2) και G το μέτρο ολισθήσεως του υλικού.

Επισημαίνεται ότι η γωνιακή παραμόρφωση γ μειώνεται για σημεία στο εσωτερικό μιας διατομής και μηδενίζεται στο κέντρο της. Έτσι οι τάσεις στρέψεως έχουν μηδενική τιμή στο κέντρο της κυκλικής διατομής και μέγιστη τιμή στην περιφέρεια του κύκλου με γραμμική μεταβολή στο ενδιάμεσο.

Ωστόσο, όπως συμβαίνει και στις αντίστοιχες περιπτώσεις των άλλων καταπονήσεων, το ανωτέρω φαινόμενο εμφανίζεται μέχρι ένα όριο. Έτσι και στην περίπτωση της στρέψεως έχομε το ***όριο αναλογίας της στρέψεως,*** το ***όριο ελαστικότητας της στρέψεως*** και το ***όριο διαρροής της στρέψεως*** (βλ. παράγρ. 1.3 σχετικά με το πείραμα του εφελκυσμού). Εάν κατά τη στρέψη, η εφαρμοζόμενη ροπή στρέψεως υπερβεί το όριο ελαστικότητας της στρέψεως, τότε έχομε μόνιμη παραμόρφωση, η οποία εκδηλώνεται με μόνιμη στροφή.

6.3.2 Οι τάσεις στρέψεως και η σχέση στρέψεως.

Στο επίπεδο κάθε διατομής της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α, αναπτύσσονται, λόγω της ροπής στρέψεως, διατμητικές τάσεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι τάσεις αυτές ονομάζονται ***τάσεις στρέψεως***.



Σχ. 6.3δ
Διατομή της δοκού κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α.

Στη συνέχεια, ας θεωρήσομε τη διατομή Α της δοκού που απεικονίζεται στο σχήμα 6.3δ. Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA της διατομής υπάρχει τάση στρέψεως $\tau_{στ}$, λόγω της εφαρμοζόμενης σε αυτό εσωτερικής δυνάμεως F_{dA}, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$F_{dA} = \tau_{στ} \cdot dA. \qquad (6.8)$$

Η δύναμη F_{dA} προκαλεί μία εσωτερική ροπή M_{dA} στο στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA που βρίσκεται σε απόσταση r από τον άξονα της δοκού. Η ροπή M_{dA}, λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (6.8), δίνεται από τη σχέση:

$$M_{dA} = F_{dA} \cdot r \Leftrightarrow M_{dA} = \tau_{στ} \cdot r \cdot dA. \qquad (6.9)$$

Δεδομένου ότι η διατομή βρίσκεται σε ισορροπία, το άθροισμα όλων των ροπών M_{dA} όλων των στοιχειωδών τμημάτων επιφάνειας dA της διατομής ισούται με τη ροπή στρέψεως Μ, δηλαδή έχομε:

$$M = \int_A \tau_{στ} \cdot r \cdot dA. \qquad (6.10)$$

Όμως, η τάση στρέψεως $\tau_{στ}$ δεν είναι σταθερή και μάλιστα εξαρτάται από την απόσταση r της στοιχειώδους επιφάνειας dA από το κέντρο της κυκλικής διατομής, στην οποία αντιστοιχεί. Συγκεκριμένα, η τάση στρέψεως $\tau_{στ}$ είναι μεγαλύτερη στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής και ελαττώνεται όσο η απόσταση r μικραίνει (σχ. 6.3δ). Η τάση στρέψεως $\tau_{στ}$ είναι μηδενική στο κέντρο της κυκλικής διατομής. Το σχήμα 6.3ε απεικονίζει τη σχέση μεταξύ της τάσεως στρέψεως $\tau_{στ}$ και της αποστάσεως r. Η σχέση αυτή είναι της μορφής:

$$\tau_{στ} = K \cdot r \qquad (6.11)$$

όπου Κ είναι μια σταθερά αναλογίας.

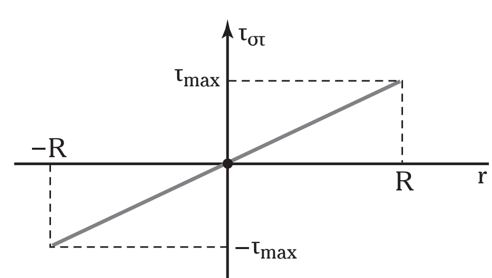
Γράφοντας τη σχέση (6.11) για την τάση στρέψεως στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής της δοκού (όπου r = R) έχομε:

$$\tau_{max} = K \cdot R. \qquad (6.12)$$

Η τάση τ_{max} αντιπροσωπεύει τη μέγιστη τάση στρέψεως που αντιστοιχεί στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής της δοκού. Απαλείφοντας τη σταθερά Κ από τις σχέσεις (6.11) και (6.12) έχομε:

$$\tau_{στ} = \frac{\tau_{max}}{R} \cdot r. \qquad (6.13)$$

Περαιτέρω, εισάγοντας τη σχέση (6.13) στη σχέση (6.10) λαμβάνομε:



Σχ. 6.3ε
Η τάση στρέψεως είναι ανάλογη της αποστάσεως από το κέντρο της κυκλικής διατομής.

$$M = \int_A \frac{\tau_{max}}{R} \cdot r \cdot r \cdot dA \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{\tau_{max}}{R} \cdot \int_A r^2 dA. \quad (6.14)$$

Όμως το ολοκλήρωμα

$$I_0 = \int_A r^2 dA \quad (6.15)$$

αποτελεί την ***πολική ροπή αδράνειας*** (παράγρ. 3.6). Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.15) στην εξίσωση (6.14) και λύνοντας ως προς τη μέγιστη τάση στρέψεως, λαμβάνομε:

$$\tau_{max} = \frac{R}{I_o} \cdot M. \quad (6.16)$$

Επίσης, το πηλίκον

$$W_0 = \frac{I_o}{R} \quad (6.17)$$

είναι η πολική ροπή αντιστάσεως (παράγρ. 3.7). Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.17) στην εξίσωση (6.16) και λύνοντας ως προς τη μέγιστη τάση στρέψεως, λαμβάνομε:

$$\tau_{max} = \frac{1}{W_o} \cdot M. \quad (6.18)$$

Η σχέση (6.18), όπως και η σχέση (6.16), χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μέγιστης τάσεως στρέψεως. Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη από την ***επιτρεπόμενη τάση στρέψεως***, η οποία συμβολίζεται με $\tau_{επ,στ}$. Δηλαδή, με βάση τις σχέσεις (6.16) και (6.18), πρέπει να ισχύει:

$$\tau_{max} = \frac{R}{I_o} \cdot M \leq \tau_{επ,στ} \quad (6.19)$$

ή ισοδύναμα

$$\tau_{max} = \frac{1}{W_o} \cdot M \leq \tau_{επ,στ}. \quad (6.20)$$

Για την κυκλική διατομή της δοκού διαμέτρου D, τα μεγέθη της πολικής ροπής αδράνειας και της πολικής ροπής αντιστάσεως δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις (βλ. πίν. 3.6 και 3.7):

$$I_o = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \quad (6.21)$$

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16}. \quad (6.22)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.21) στην (6.19) είτε τη σχέση (6.22) στην (6.20) λαμβάνομε:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{επ,στ}. \quad (6.23)$$

Η σχέση (6.23) αποτελεί τη ***σχέση στρέψεως για δοκό κυκλικής διατομής*** και χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων στρέψεως για δοκούς κυκλικής διατομής.

Παράδειγμα 1.

Η τάση θραύσεως ενός υλικού σε εφελκυσμό είναι ίση με $\sigma_{θρ,εφ} = 3.000\ N/cm^2$. Να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως εάν λαμβάνεται ίση με το 80% της τάσεως θραύσεως σε εφελκυσμό.

Λύση.

Η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι:

$$\tau_{επ,σπ} = 0{,}8 \cdot \sigma_{θρ,εφ} = 0{,}8 \cdot 3.000\ N/cm^2 = 2.400\ N/cm^2.$$

6.3.3 Προβλήματα στρέψεως.

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στη στρέψη δοκών κυκλικής διατομής είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων που έχομε μελετήσει. Δηλαδή, αφορούν:

1) Στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας.
2) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της διατομής.
3) Στον υπολογισμό της ικανότητας φορτίσεως.

και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων.

Παράδειγμα 2.

Ποια είναι η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου $D = 40\ mm$ όταν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $4.000\ N/cm^2$;

Λύση.

Λύνομε τη σχέση στρέψεως για δοκό κυκλικής διατομής ως προς τη ροπή στρέψεως:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{επ,στ} \Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \tau_{επ,στ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot 4^3\ cm^3}{16} \cdot 4.000 N/cm^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq 50.240\ N \cdot cm.$$

Άρα η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί στη δοκό είναι $M_{max} = 50.240\ N \cdot cm$.

6.3.4 Υπολογισμός στροφής και γωνιακής παραμορφώσεως.

Όπως προαναφέραμε, η παραμόρφωση που υφίσταται η δοκός κυκλικής διατομής του σχήματος 6.3α, η οποία καταπονείται σε στρέψη μετρείται πρώτον από τη γωνιακή παραμόρφωση της δοκού και δεύτερον από τη στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού.

Ακολουθεί η παρουσίαση του υπολογισμού καθεμιάς από τις παραμορφώσεις αυτές.

1) Γωνιακή παραμόρφωση της δοκού.

Από τον Νόμο του Hooke για τη στρέψη γνωρίζομε ότι η γωνιακή παραμόρφωση της δοκού που καταπονείται σε στρέψη είναι ανάλογη της μέγιστης τάσεως στρέψεως, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\tau_{max} = G \cdot \gamma \qquad (6.24)$$

όπου η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια και G είναι το μέτρο ολισθήσεως του υλικού που καταπονείται σε στρέψη.

Ο πίνακας 6.3 παρουσιάζει το ***μέτρο ολισθήσεως για διάφορα υλικά***.

Λύνοντας τη σχέση (6.24) ως προς τη γωνιακή παραμόρφωση έχομε:

$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G}. \qquad (6.25)$$

Δεδομένου ότι η μέγιστη τάση στρέψεως τ_{max} πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση στρέψεως $\tau_{επ,στ}$, συμπεραίνομε ότι η γωνιακή παραμόρφωση πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μία μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή $\gamma_{επ}$ που ισούται με:

$$\gamma_{επ} = \frac{\tau_{επ,στ}}{G}. \qquad (6.26)$$

Αντικαθιστώντας τη μέγιστη τάση στρέψεως τ_{max} από τη σχέση (6.19) στην εξίσωση (6.25) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (6.26) έχομε:

$$\gamma = \frac{R}{I_o \cdot G} \cdot M \le \gamma_{επ}. \qquad (6.27)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας τη μέγιστη τάση στρέψεως τ_{max} από τη σχέση (6.20) στην εξίσωση (6.25) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (6.26) έχομε:

$$\gamma = \frac{1}{W_o \cdot G} \cdot M \le \gamma_{επ}. \qquad (6.28)$$

Οι σχέσεις (6.27) και (6.28) παρέχουν τη γωνία ολισθήσεως όταν είναι γνωστές η πολική ροπή

Πίνακας 6.3
Μέτρο ολισθήσεως για διάφορα υλικά.

Υλικό	***Μέτρο ολισθήσεως***
Ορείχαλκος κασσιτέρου	$3{,}5 \cdot 10^6$ N/cm^2
Ορείχαλκος ψευδαργύρου	$3{,}0 \cdot 10^6$ N/cm^2
Αλουμίνιο	$2{,}7 \cdot 10^6$ N/cm^2
Χαλκός	$4{,}0 \cdot 10^6$ N/cm^2
Φαιός σίδηρος	$4{,}0 \cdot 10^6$ N/cm^2
Σφυρήλατος σίδηρος	$7{,}0 \cdot 10^6$ N/cm^2
Χάλυβας	$8{,}0 \cdot 10^6$ N/cm^2

αδράνειας I_o ή η πολική ροπή αντιστάσεως W_o της δοκού, αντίστοιχα.

Περαιτέρω, αντικαθιστώντας τη σχέση (6.21), που ορίζει την πολική ροπή αδράνειας κυκλικής διατομής της δοκού στη σχέση (6.27) ή ισοδύναμα τη σχέση (6.22) που ορίζει την πολική ροπή αντιστάσεως της κυκλικής διατομής της δοκού στη σχέση (6.28), λαμβάνομε:

$$\gamma = \frac{16}{\pi \cdot G \cdot D^3} \cdot M \le \gamma_{επ} \qquad (6.29)$$

όπου, υπενθυμίζομε, η γωνία γ μετρείται σε ακτίνια.

Η σχέση (6.29) παρέχει τη γωνιακή παραμόρφωση σε σχέση με την εξωτερική ροπή στρέψεως.

Από τη σχέση (6.29) διαπιστώνομε ότι η γωνιακή παραμόρφωση της δοκού:

α) Είναι ανάλογη της εξωτερικής ροπής στρέψεως.

β) Εξαρτάται από το υλικό της δοκού. Όσο πιο μικρό είναι το μέτρο ολισθήσεως του υλικού τόσο πιο μεγάλη είναι η γωνιακή παραμόρφωση (για την ίδια ροπή στρέψεως και για δοκούς με κυκλικές διατομές ίδιας διαμέτρου).

γ) Εξαρτάται από τη διάμετρο της δοκού. Όσο πιο μεγάλη είναι η διάμετρος της δοκού τόσο πιο μικρή είναι η γωνιακή παραμόρφωση (για την ίδια ροπή στρέψεως και για το ίδιο υλικό).

2) Στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού.

Η στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσεως (6.6):

$$\theta_x = \frac{\gamma}{R} x.$$

Δεδομένου ότι, όπως προαναφέραμε, η γωνιακή παραμόρφωση πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή $\gamma_{επ}$, η στροφή κάθε κυκλικής διατομής της δοκού πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή $\theta_{x,\varepsilon\pi}$, η οποία ισούται με:

$$\theta_{x,\varepsilon\pi} = \frac{\gamma_{\varepsilon\pi}}{R} \cdot x\,. \qquad (6.30)$$

Σημειώνομε ότι η μέγιστη στροφή δεν είναι ίδια για όλες τις κυκλικές διατομές της δοκού, αλλά εξαρτάται από την απόσταση x της κυκλικής διατομής από το πακτωμένο άκρο.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.27) στην σχέση (6.6) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (6.30) έχομε:

$$\theta_x = \frac{M}{I_o \cdot G} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi} \qquad (6.31)$$

όπου η στροφή μετρείται σε ακτίνια. Το γινόμενο της πολικής ροπής αδράνειας επί του μέτρου ολισθήσεως του υλικού:

$$M\Delta\Sigma = I_o \cdot G \qquad (6.32)$$

ονομάζεται ***μέτρο δυστρεψίας***. Το μέτρο δυστρεψίας μιας δοκού δείχνει πόσο δύσκολα παραμορφώνεται η δοκός στρεπτικά όταν ασκούνται επάνω της στρεπτικές ροπές. Το μέτρο είναι αντίστοιχο του μέτρου δυσκαμψίας που αφορά στην καταπόνηση σε κάμψη και αναφέραμε στην παράγραφο 5.4.2. Από τη σχέση (6.31) διαπιστώνομε ότι όσο πιο μεγάλο είναι το μέτρο δυστρεψίας, τόσο πιο μικρή είναι η στροφή.

Περαιτέρω, αντικαθιστώντας τη σχέση (6.21) που ορίζει την πολική ροπή αδράνειας της δοκού κυκλικής διατομής, στη σχέση (6.31) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $D = 2 \cdot R$, έχομε:

$$\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi} \qquad (6.33)$$

όπου, υπενθυμίζομε, η γωνία θ_x μετρείται σε ακτίνια.

Η σχέση (6.33) παρέχει τη στροφή σε σχέση με την εξωτερική ροπή.

Σημειώνομε ότι πολλές φορές οι μέγιστες επιτρεπόμενες τιμές $\gamma_{\varepsilon\pi}$ και $\theta_{x,\varepsilon\pi}$ ορίζονται ανεξαρτήτως της σχέσεώς τους με την $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$. Έτσι όταν εξετάζομε τη στρέψη μιας δοκού πρέπει οι σχέσεις (6.23), (6.29) και (6.31) να συναληθεύουν ώστε η δοκός να καταπονείται σε στρέψη εντός των επιτρεπομένων ορίων.

Παράδειγμα 3.

Ποια είναι η μέγιστη τάση στρέψεως και ποιες παραμορφώσεις αναμένεται να δημιουργηθούν σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής, διαμέτρου $D = 8$ cm και μήκους $L = 100$ cm, που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της και στο άλλο δέχεται εξωτερική ροπή στρέψεως $M = 10.000\ N \cdot cm$; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως;

Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}45^o/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 1000\ N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 8 \cdot 10^6\ N/cm^2$.

Λύση.

Η μέγιστη τάση στρέψεως υπολογίζεται από τη σχέση στρέψεως:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \Leftrightarrow \tau_{max} =$$
$$= \frac{16}{\pi \cdot 8^3 cm^3} \cdot 10.000\ N \cdot cm = 99{,}5 N/cm^2.$$

Η μέγιστη τάση στρέψεως είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση στρέψεως.

Η παραμόρφωση που υφίσταται η δοκός μετρείται από τη γωνιακή παραμόρφωση και τη στροφή κάθε κυκλικής διατομής της. Η γωνιακή παραμόρφωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G} \Leftrightarrow \gamma = \frac{99{,}5 N/cm^2}{8 \cdot 10^6 N/cm^2} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} rad.$$

Η στροφή της δοκού στο ελεύθερο άκρο της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta_x = \frac{\gamma}{R} x$$

για $x = L$:

$$\theta_L = \frac{\gamma}{R} L = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-5}}{4\ cm} 100\ cm =$$
$$= 3 \cdot 10^{-4}\ rad = 3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{180^o}{\pi} = 0{,}017^o.$$

Όμως, η επιτρεπόμενη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού είναι:

$$\theta_{L,\varepsilon\pi} = 0{,}45^o/m \cdot 100\ cm = 0{,}45^o,$$

δηλαδή μεγαλύτερη από τη στροφή που υπολογίσαμε μόλις προηγούμενα. Συνεπώς, η ράβδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής ροπής στρέψεως $M = 10.000\ N \cdot cm$. Η στροφή της δοκού στο ελεύθερο άκρο της ισούται με $0{,}017^o$.

Παράδειγμα 4.

Ποια είναι η μέγιστη εξωτερική ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου $D = 6\,cm$ και μήκους $L = 90\,cm$ που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}25^o/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 3.000\,N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 7 \cdot 10^6\,N/cm^2$.

Λύση.

Η εξωτερική ροπή στρέψεως πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα:

1) Η σχέση στρέψεως: $\tau = \dfrac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$ και

2) η σχέση που μας δίνει τη στροφή:

$$\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}.$$

Από τη σχέση στρέψεως έχομε:

$$M \leq \frac{\pi \cdot D^3 \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\,\sigma\tau}}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq \frac{\pi \cdot 6^3\,cm^3 \cdot 3000\,N/cm^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq 12{,}7 \cdot 10^4\,N \cdot cm.$$

Από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού έχομε:

$$\frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{x,\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq \theta_{x,\varepsilon\pi} \cdot \frac{\pi \cdot G \cdot D^4}{32} \Leftrightarrow M \leq 4{,}4 \cdot 10^{-5}\,rad/cm \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi \cdot 7 \cdot 10^6\,N/cm^2 \cdot 6^4\,cm^4}{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \leq 3{,}9 \cdot 10^4\,N \cdot cm.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις συμπεραίνομε ότι η μέγιστη εξωτερική ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί στη ράβδο είναι ίση με $M = 3{,}9 \cdot 10^4\,N \cdot cm$.

Ασκήσεις.

1. *Ποια είναι η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε δοκό κυκλικής διατομής ακτίνας $R = 10\,mm$, όταν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $2.500\,N/cm^2$;*

2. *Ποια είναι η μέγιστη ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε δοκό κυκλικής διατομής με διάμετρο $D = 60\,mm$ και μήκος $L = 50\,cm$, ώστε η στροφή να μην υπερβαίνει τις $0{,}3^o/m$; Δίνεται το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 8 \cdot 10^6\,N/cm^2$.*

3. *Ποια μέγιστη τάση στρέψεως και ποιες παραμορφώσεις αναμένεται να δημιουργηθούν σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου $D = 6\,cm$ και μήκους $L = 60\,cm$, που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της και δέχεται εξωτερική ροπή στρέψεως $M = 8.000\,N \cdot cm$; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}35^o/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 3.000\,N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 7{,}1 \cdot 10^6\,N/cm^2$.*

4. *Ποια είναι η μέγιστη εξωτερική ροπή στρέψεως που επιτρέπεται να εφαρμοστεί σε μία χαλύβδινη δοκό κυκλικής διατομής διαμέτρου $D = 7\,cm$ και μήκους $L = 80\,cm$, που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της; Δίνεται ότι η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{x,\varepsilon\pi} = 0{,}3^o/m$, η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.500\,N/cm^2$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού ισούται με $G = 8{,}3 \cdot 10^6\,N/cm^2$.*

6.4 Τάσεις στρέψεως σε δοκό μη κυκλικής διατομής.

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε την περίπτωση της καταπονήσεως σε στρέψη δοκού κυκλικής διατομής. Στη γενική περίπτωση καταπόνηση σε στρέψη μπορεί να υφίσταται δοκός οποιουδήποτε σχήματος διατομής. Έτσι, μία δοκός μπορεί να έχει διατομή σχήματος τετραγώνου, ορθογωνίου, ελλείψεως κ.λπ..

Η μελέτη της καταπονήσεως σε στρέψη των δοκών αυτών λόγω της εφαρμογής εξωτερικής ροπής στρέψεως M γίνεται με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για τη μελέτη της περιπτώσεως δοκού κυκλικής διατομής. Ωστόσο, όταν οι διατομές δεν είναι κυκλικές, το πρόβλημα περιπλέκεται γιατί οι κυκλικές διατομές είναι οι μόνες που παραμένουν επίπεδες μετά τη στρεπτική παραμόρφωση. Συγκεκριμένα, ***όλες οι άλλες διατομές***

πλην του δακτυλίου στρεβλώνονται. Έτσι χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές σχέσεις.

Η ανάλυση καταλήγει στα ακόλουθα συμπεράσματα:

1) Στην περίπτωση της τετραγωνικής διατομής η μέγιστη τάση στρέψεως εμφανίζεται στο μέσο των τεσσάρων πλευρών του τετραγώνου, ενώ η ελάχιστη, που ισούται με μηδέν, εμφανίζεται στις άκρες των πλευρών του (κορυφές).

2) Στην περίπτωση της ορθογώνιας διατομής η μέγιστη τάση στρέψεως εμφανίζεται στο μέσον των δύο μεγάλων πλευρών του ορθογωνίου, ενώ η ελάχιστη, που ισούται με μηδέν, εμφανίζεται στις άκρες των πλευρών του (κορυφές).

Ακολουθώντας την ίδια πορεία, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, για τη γενική περίπτωση δοκού τυχαίας διατομής Α αποδεικνύονται οι ακόλουθες σχέσεις:

1) Μέγιστη τάση στρέψεως:

$$\tau_{max} = \frac{1}{W_A} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}, \qquad (6.34)$$

2) Στροφή:

$$\theta_x = \frac{M}{I_A \cdot G} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}. \qquad (6.35)$$

όπου το μέγεθος W_A είναι αντίστοιχο του μεγέθους της πολικής ροπής αντιστάσεως που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο για την περίπτωση της κυκλικής διατομής. Ομοίως, το μέγεθος I_A είναι αντίστοιχο του μεγέθους της πολικής ροπής αδράνειας που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο για την περίπτωση της κυκλικής διατομής. Τα μεγέθη W_A και I_A είναι αυτά που διαφοροποιούνται μεταξύ των δοκών διαφόρων διατομών, καθώς εξαρτώνται απ' το είδος της διατομής κάθε δοκού. Το παράδειγμα που ακολουθεί διευκρινίζει τα παραπάνω για την περίπτωση ορθογώνιας διατομής.

Παράδειγμα 5.

Ποια είναι η μέγιστη τάση στρέψεως που αναπτύσσεται σε μία δοκό ορθογώνιας διατομής, στην οποία εφαρμόζεται εξωτερική ροπή στρέψεως ίση με $M = 2 \cdot 10^4\,N \cdot cm$; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως; Δίνεται ότι η αντίστοιχη πολική ροπή αντιστάσεως της διατομής της δοκού είναι $W = 20\,cm^3$ και η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.000\,N/cm^2$.

Λύση.

Η μέγιστη τάση στρέψεως υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tau_{max} = \frac{M}{W} = \frac{2 \cdot 10^4\ N \cdot cm}{20\ cm^3} = 1.000\ N/cm^2.$$

Επειδή $\tau_{max} < \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$, η δοκός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως.

Ασκήσεις.

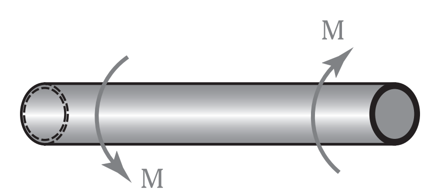
1. *Πόση ροπή στρέψεως επιτρέπεται να ενεργήσει σε μία δοκό με τετραγωνική διατομή πλευράς $a = 50\,mm$; Η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.000\,N/cm^2$ και η αντίστοιχη πολική ροπή αντιστάσεως δίνεται από τη σχέση $W = 0{,}2 \cdot a^3$.*

2. *Ποια είναι η μέγιστη τάση στρέψεως που αναπτύσσεται σε μία δοκό ορθογωνικής διατομής, στην οποία εφαρμόζεται εξωτερική ροπή στρέψεως ίση με $M = 3 \cdot 10^4\,N \cdot cm$; Μπορεί η δοκός να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της εξωτερικής αυτής ροπής στρέψεως; Δίνεται ότι η αντίστοιχη πολική ροπή αντιστάσεως της διατομής της δοκού είναι $W = 30\,cm^3$ και η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 5.000\,N/cm^2$.*

6.5 Στρέψη ράβδου με λεπτά τοιχώματα.

Ας μελετήσομε τώρα την καταπόνηση σε στρέψη ράβδου δακτυλιοειδούς διατομής με λεπτά τοιχώματα, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα 6.5. Μία τέτοια ράβδος είναι γνωστή και ως ***κοιλοδοκός*** με

(α)



(β)

Σχ. 6.5
Κοιλοδοκός με λεπτά τοιχώματα: (α) Πριν την καταπόνηση σε στρέψη. (β) Καταπόνηση σε στρέψη.

λεπτά τοιχώματα. Η κοιλοδοκός έχει μήκος L και ακτίνες R_1 και R_2 ($R_1 > R_2$) ή ισοδύναμα διαμέτρους $D_1 = 2 \cdot R_1$ και $D_2 = 2 \cdot R_2$ ($D_1 > D_2$) αντίστοιχα και πάχος $t = R_1 - R_2$. Η κοιλοδοκός καταπονείται σε στρέψη λόγω της εφαρμογής αντίρροπων εξωτερικών ροπών στρέψεως M στα άκρα της.

Η μελέτη της καταπονήσεως σε στρέψη της κοιλοδοκού γίνεται με τον ίδιο τρόπο, όπως παρουσιάστηκε και στις προηγούμενες παραγράφους για την περίπτωση της δοκού κυκλικής διατομής και για τη γενική περίπτωση δοκού μη κυκλικής διατομής. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τις σχέσεις (6.34) και (6.35) της δοκού μη κυκλικής διατομής για την περίπτωση που η διατομή είναι ένας δακτύλιος με διαμέτρους D_1 και D_2.

Η πολική ροπή αδράνειας του δακτυλίου με μικρό πάχος t δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{\pi}{32} \cdot \left(D_1 + D_2\right)^3 \cdot t. \qquad (6.36)$$

Η πολική ροπή αντιστάσεως του δακτυλίου με μικρό πάχος t δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{\pi}{8}\left(D_1 + D_2\right)^2 \cdot t. \qquad (6.37)$$

Πολλές φορές, αντί για τις διαμέτρους D_1 και D_2 του δακτυλίου, είναι γνωστή η μέση ακτίνα του:

$$r = \frac{D_1 + D_2}{4}. \qquad (6.38)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.38) στις σχέσεις (6.36) και (6.37) λαμβάνομε τις ακόλουθες σχέσεις για την πολική ροπή αδράνειας και την πολική ροπή αντιστάσεως του δακτυλίου:

$$I = 2\pi \cdot r^3 \cdot t \qquad (6.39)$$

$$W = 2\pi \cdot r^2 \cdot t. \qquad (6.40)$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω σχέσεις (6.40) και (6.39) στις σχέσεις (6.34) και (6.35), αντίστοιχα, λαμβάνομε:

1) Μέγιστη τάση στρέψεως (αντιστοιχεί στο μικρότερο πάχος):

$$\tau_{max} = \frac{1}{2\pi \cdot r^2 \cdot t} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}. \qquad (6.41)$$

2) Στροφή:

$$\theta_x = \frac{M}{2\pi \cdot G \cdot r^3 \cdot t} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}. \qquad (6.42)$$

Η σχέση (6.41) αποτελεί τη ***σχέση στρέψεως για κοιλοδοκό*** με λεπτά τοιχώματα και η σχέση (6.42) παρέχει τη στροφή σε σχέση με την εξωτερική ροπή στρέψεως. Η σχέση (6.41) χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων στρέψεως κοιλοδοκών με λεπτά τοιχώματα. Τα προβλήματα που εμφανίζονται είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων που έχομε μελετήσει. Δηλαδή, αφορούν:

1) Στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας.

2) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της διατομής.

3) Στον υπολογισμό της ικανότητας φορτίσεως και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις περιπτώσεις των υπολοίπων καταπονήσεων.

Παράδειγμα 6.

Κοιλοδοκός με λεπτά τοιχώματα έχει μήκος $L = 60$ cm και μέση ακτίνα $r = 4$ cm. Η κοιλοδοκός καταπονείται σε στρέψη με εξωτερική ροπή στρέψεως $M = 30.000$ N · cm. Να υπολογιστεί το πάχος των τοιχωμάτων της εάν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi} = 3.000$ N/cm^2 και η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}20^o$/m. Δίνεται το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 7 \cdot 10^6$ N/cm^2. Επίσης, το πάχος λαμβάνει τιμές που είναι πολλαπλάσια του 0,1 cm.

Λύση.

Το πάχος του τοιχώματος πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε να ικανοποιούνται:

1) Η σχέση στρέψεως:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2\pi r^2 \cdot t} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi} \text{ και}$$

2) η σχέση που μας δίνει τη στροφή:

$$\theta_x = \frac{M}{2\pi \cdot G \cdot r^3 \cdot t} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}.$$

Από τη σχέση στρέψεως έχομε:

$$\frac{M}{2\pi r^2 \cdot t} \leq \tau_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow t \geq \frac{M}{2\pi r^2 \cdot \tau_{\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{30.000 \text{ N} \cdot \text{cm}}{2\pi \cdot 4^2 \text{cm}^2 \cdot 3.000 \text{ N/cm}^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq 0{,}10 \text{ cm}.$$

Από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού ($x = L$) έχομε:

$$\frac{M}{2\pi \cdot Gr^3 t} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{2\pi \cdot Gr^3 t} \cdot L \leq \theta_{\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{M}{2\pi \cdot G \cdot \theta_{\varepsilon\pi} r^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{30.000 \text{ N} \cdot \text{cm}}{2\pi \cdot 7 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5} \text{rad/cm} \cdot 4^3 \text{cm}^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq 0{,}31 \text{ cm}.$$

Από τις δύο παραπάνω τιμές λαμβάνομε τη μεγαλύτερη, στρογγυλοποιώντας τη στη μεγαλύτερη τυποποιημένη τιμή. Άρα έχομε $t = 0{,}40$ cm.

Άσκηση.

Κοιλοδοκός με λεπτά τοιχώματα έχει μήκος $L = 80\,cm$ και μέση ακτίνα $r = 5\,cm$. Η κοιλοδοκός καταπονείται σε στρέψη με εξωτερική ροπή στρέψεως $M = 48.000\,N \cdot cm$. Να υπολογιστεί το πάχος των τοιχωμάτων της εάν η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi} = 4.800\,N/cm^2$ και η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}30^o/m$. Δίνεται το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 6 \cdot 10^6\,N/cm^2$.

6.6 Στρέψη περιστρεφόμενου άξονα.

Στην παράγραφο αυτή εξετάζομε τη στρέψη περιστρεφόμενου άξονα ή αλλιώς ατράκτου.

Άτρακτος ονομάζεται κάθε άξονας κυκλικής ή κοίλης διατομής ή μερικές φορές τετραγωνικής διατομής, ο οποίος περιστρεφόμενος μεταφέρει ισχύ και καταπονείται σε στρέψη ή ταυτόχρονα σε κάμψη και στρέψη, λόγω των γραναζιών ή τροχαλιών που φέρει για τη μετάδοση της κινήσεως.

Το σχήμα 6.6 παρουσιάζει ατράκτους που φέρουν γρανάζια ή ιμάντες για τη μετάδοση της κινήσεως.

Σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει στις προηγούμενες παραγράφους, για τη μελέτη της στρέψεως της ατράκτου πρέπει να γνωρίζομε τη ροπή στρέψεως. Ωστόσο, στην περίπτωση των ατράκτων, συνήθως δεν είναι γνωστή η ροπή στρέψεως M, αλλά είναι γνωστά τα ακόλουθα μεγέθη:

1) Η ισχύς P την οποία η άτρακτος (καλείται να) μεταφέρει, και

2) ο αριθμός των στροφών, n της ατράκτου ανά μονάδα χρόνου.

Όμως, από τα μεγέθη αυτά είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ροπής στρέψεως μέσω της σχέσεως:

$$P = M \cdot \omega \qquad (6.43)$$

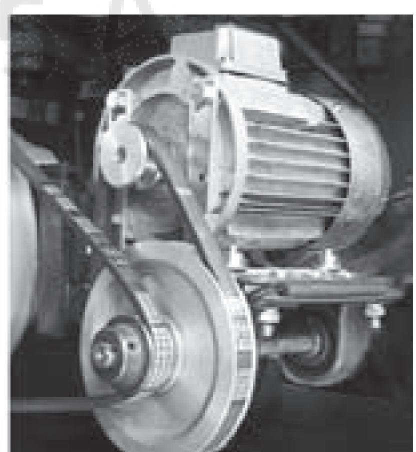
όπου με ω συμβολίζεται η γωνιακή ταχύτητα της ατράκτου που δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n. \qquad (6.44)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.43) και (6.44) και λύνοντας ως προς τη ροπή στρέψεως, λαμβάνομε:

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}. \qquad (6.45)$$

Έχοντας υπολογίσει τη ροπή στρέψεως, εφαρμόζομε τις υπόλοιπες σχέσεις που συναντήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους ανάλογα με τη διατομή της ατράκτου.



Σχ. 6.6
Παραδείγματα ατράκτων που φέρουν γρανάζια ή ιμάντα.

6.6.1 Μονάδες μετρήσεως ισχύος και αριθμού στροφών ανά μονάδα χρόνου.

Στο σημείο αυτό, αναφορικά με τις μονάδες μετρήσεως των μεγεθών της ισχύος P και του αριθμού των στροφών ανά μονάδα χρόνου n, πρέπει να σημειώσομε τα ακόλουθα:

Η σχέση μεταξύ των μονάδων μετρήσεως της ισχύος είναι η εξής:

1 PS = 75 kpm/s = 736 W = 0,736 kW.

Η σχέση μεταξύ των μονάδων μετρήσεως του αριθμού των στροφών ανά μονάδα χρόνου είναι η εξής: 1 rpm = 1/60 rps.

6.6.2 Διαστασιολόγηση περιστρεφόμενου άξονα.

Στην παράγραφο αυτή εξετάζομε το πρόβλημα της διαστασιολογήσεως της ατράκτου, εστιάζοντας το ενδιαφέρον μας στην άτρακτο κυκλικής διατομής. Θέλομε να υπολογίσομε τη διάμετρο της διατομής της, ώστε η άτρακτος να είναι σε θέση να μεταφέρει συγκεκριμένη ισχύ, με συγκεκριμένο αριθμό στροφών ανά λεπτό, χωρίς να γίνει υπέρβαση του ορίου αντοχής της.

Όπως έχομε αναφέρει, για να μην γίνει υπέρβαση του ορίου αντοχής της ατράκτου πρέπει η μέγιστη τάση στρέψεως να μην υπερβεί την επιτρεπόμενη τιμή τάσεως στρέψεως και η στροφή να μην υπερβεί την επιτρεπόμενη τιμή στροφής.

Για την περίπτωση δοκού κυκλικής διατομής ισχύει η σχέση (6.23):

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \le \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}.$$

Αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη σχέση (6.45):

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}$$

και λύνοντας ως προς τη διάμετρο D, έχομε:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \le \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$$

$$\Leftrightarrow D^3 \ge \frac{8 \cdot P}{\pi^2 \cdot n \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{8 \cdot P}{\pi^2 \cdot n \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}}}. \qquad (6.46)$$

Με όμοιο τρόπο από τη σχέση (6.33):

$$\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \le \theta_{x,\varepsilon\pi},$$

για x = L, αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη σχέση (6.45):

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}$$

και λύνοντας ως προς τη διάμετρο D έχομε:

$$\frac{32}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot L \le \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D^4 \ge \frac{16 \cdot P \cdot L}{\pi^2 \cdot G \cdot n \cdot \theta_{L,\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D \ge \sqrt[4]{\frac{16 \cdot P \cdot L}{\pi^2 \cdot G \cdot n \cdot \theta_{L,\varepsilon\pi}}}. \qquad (6.47)$$

Έτσι έχομε δύο τιμές για τη διάμετρο D της ατράκτου. Απ' αυτές παίρνομε τη μεγαλύτερη τιμή.

Ανάλογα με τα παραπάνω αντιμετωπίζεται και το πρόβλημα της διαστασιολογήσεως ατράκτου με διατομή που είναι διαφορετική από την κυκλική που εξετάσαμε.

Παράδειγμα 7.

Ράβδος κυκλικής διατομής έχει μήκος L = 50 cm. Η ράβδος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα n = 300 rpm για τη μεταφορά ισχύος P = 15 kW. Να υπολογιστεί πόση κατ' ελάχιστον πρέπει να είναι η διάμετρος της κυκλικής διατομής της ράβδου. Δίνεται ότι για τη ράβδο η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 4.500\ N/cm^2$, η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}20°/m$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 6 \cdot 10^6\ N/cm^2$.

Λύση.

Για να μην γίνει υπέρβαση του ορίου αντοχής της ατράκτου πρέπει η μέγιστη τάση στρέψεως να μην υπερβαίνει την επιτρεπόμενη τιμή τάσεως στρέψεως και η στροφή να μην υπερβαίνει την επιτρεπόμενη τιμή στροφής.

Η ροπή στρέψεως υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{15.000\ W}{2 \cdot \pi \cdot 300 \cdot 1/60 sec} = 477{,}7\ N \cdot m =$$

$$= 477{,}7\ N \cdot 100\ cm = 47.770\ N \cdot cm.$$

Έτσι, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, η ζητούμενη διάμετρος πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις ακόλουθες σχέσεις:

1) Τη σχέση στρέψεως:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \le \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \text{ και}$$

2) τη σχέση που μας δίνει τη στροφή:

$$\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}.$$

Από τη σχέση στρέψεως έχομε:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow D^3 \geq \frac{16 \cdot M}{\pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D^3 \geq \frac{16 \cdot 47.770\ N \cdot cm}{\pi \cdot 4.500\ N/cm^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D^3 \geq 54{,}09\ cm^3 \Leftrightarrow D \geq 3{,}8\ cm.$$

Από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού ($x = L$) έχομε:

$$\frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow D^4 \geq \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot \theta_{\varepsilon\pi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D^4 \geq \frac{32 \cdot 47.770\ N{\cdot}cm}{\pi \cdot 6 \cdot 10^6 N/cm^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5} rad/cm} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D^4 \geq 2.318\ cm^4 \Leftrightarrow D \geq 6{,}94\ cm.$$

Από τις δύο παραπάνω τιμές λαμβάνομε τη μεγαλύτερη, στρογγυλοποιώντας την στη μεγαλύτερη τυποποιημένη τιμή. Άρα έχομε $D = 7\ cm$.

Παράδειγμα 8.

Αντέχει η ράβδος του Παραδείγματος 7 να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα $n = 600$ rpm για τη μεταφορά ισχύος $P = 35$ kW; Εάν όχι, να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα με την οποία επιτρέπεται να περιστρέφεται η άτρακτος για τη μεταφορά της ανωτέρω ισχύος.

Λύση.

Η ροπή στρέψεως υπολογίζεται από τη σχέση:

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}.$$

Η ζητούμενη συχνότητα πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις ακόλουθες σχέσεις:

1) Τη σχέση στρέψεως:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \text{ και}$$

2) τη σχέση που μας δίνει τη στροφή:

$$\theta_x = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}.$$

Αντικαθιστώντας τη ροπή στρέψεως στη σχέση στρέψεως έχομε:

$$\frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} \Leftrightarrow n \geq \frac{8 \cdot P}{\pi^2 \cdot D^3 \cdot \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{8 \cdot 35.000\ N \cdot 100\ cm/sec}{\pi^2 \cdot 7^3\ cm^3 \cdot 4.500\ N/cm^2} \Leftrightarrow n \geq 1{,}84\ /\ sec \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1{,}84 \frac{60}{60sec} \Leftrightarrow n \geq 110{,}4\ rpm.$$

Ομοίως, από τη σχέση που μας δίνει τη στροφή στο ελεύθερο άκρο της δοκού ($x = L$) έχομε:

$$\frac{32 \cdot M}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{L,\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \frac{32 \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot L \leq \theta_{\varepsilon\pi} \cdot L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \cdot P}{\pi^2 \cdot n \cdot G \cdot D^4} \leq \theta_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow n \geq \frac{16 \cdot P}{\pi^2 \cdot \theta_{\varepsilon\pi} \cdot G \cdot D^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{16 \cdot 35.000\ N \cdot 100cm\ /\ sec}{\pi^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5} rad\ /\ cm \cdot 6 \cdot 10^6 N\ /\ cm^2 \cdot 7^4 cm^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq 11{,}26\ /\ sec \Leftrightarrow n \geq 11{,}26 \frac{60}{60\ sec} \Leftrightarrow n \geq 676\ rpm$$

Άρα, η ράβδος δεν αντέχει να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα $n = 600$ rpm για τη μεταφορά της ισχύος $P = 35$ kW. Η ελάχιστη συχνότητα που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί για τη μεταφορά της ισχύος αυτής είναι $n_{min} = 676$ rpm.

Ασκήσεις.

1. *Ράβδος κυκλικής διατομής έχει μήκος $L = 100$ cm. Η ράβδος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα $n = 400$ rpm για τη μεταφορά ισχύος $P = 30$ kW. Να υπολογιστεί πόση κατ' ελάχιστον πρέπει να είναι η διάμετρος της κυκλικής διατομής της ράβδου. Δίνεται ότι για τη ράβδο η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως είναι $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau} = 6.000\ N/cm^2$, η επιτρεπόμενη στροφή είναι $\theta_{\varepsilon\pi} = 0{,}30^o/m$ και το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού $G = 8{,}6 \cdot 10^6\ N/cm^2$.*

2. *Ποια είναι η μέγιστη ισχύς που επιτρέπεται να μεταφέρει η ράβδος της ασκήσεως 1 όταν χρησιμοποιείται ως άτρακτος περιστρεφόμενη με συχνότητα $n = 600$ rpm;*

6.7 Σύνοψη βασικών εννοιών.

Οι βασικότερες έννοιες του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται στις εξής:

1) Ένα σώμα καταπονείται σε στρέψη όταν σε δύο διατομές κάθετες στον άξονά του ενεργούν δύο ίσες ροπές M αντίθετης φοράς (ροπές στρέψεως).

2) Η ***σχέση στρέψεως*** έχει ως εξής:

$$\tau_{max} = \frac{1}{W_O} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$$

όπου τ_{max} είναι η μέγιστη τάση στρέψεως, $\tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}$ η επιτρεπόμενη τάση στρέψεως και W_O η πολική ροπή αντιστάσεως της διατομής του σώματος.

3) Η καταπόνηση σε στρέψη έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή των διατομών του σώματος κατά γωνία θ, η οποία ονομάζεται ***στροφή.***

Η στροφή θ_x κάθε διατομής είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως M και της αποστάσεώς της x από το άκρο του σώματος:

$$\theta_x = \frac{1}{I_O \cdot G} \cdot M \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}$$

όπου I_O είναι η πολική ροπή αδράνειας της διατομής, G το μέτρο ολισθήσεως του υλικού της δοκού και $\theta_{x,\varepsilon\pi}$ η επιτρεπόμενη στροφή.

4) Η στρέψη ***δοκού κυκλικής διατομής*** διαμέτρου D που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο έχει ως αποτέλεσμα:

– την περιστροφή των διατομών της κατά στροφή θ_x:

$$\theta_x = \frac{32}{\pi \cdot G \cdot D^4} \cdot M \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}.$$

– τη ***γωνιακή παραμόρφωση*** γ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο άκρα της, η οποία είναι ανάλογη της ροπής στρέψεως M:

$$\gamma = \frac{16}{\pi \cdot G \cdot D^3} \cdot M \leq \gamma_{\varepsilon\pi}$$

όπου $\gamma_{\varepsilon\pi}$ είναι η επιτρεπόμενη γωνιακή παραμόρφωση.

Η σχέση στρέψεώς της έχει ως εξής:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}.$$

5) Η στροφή των διατομών ***ράβδου με λεπτά τοιχώματα*** με διατομή δακτυλίου πάχους t και μέσης ακτίνας r υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta_x = \frac{1}{2\pi \cdot G \cdot r^3 \cdot t} \cdot M \cdot x \leq \theta_{x,\varepsilon\pi}.$$

Η σχέση στρέψεώς της έχει ως εξής:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2\pi \cdot r^2 \cdot t} \cdot M \leq \tau_{\varepsilon\pi,\sigma\tau}\ .$$

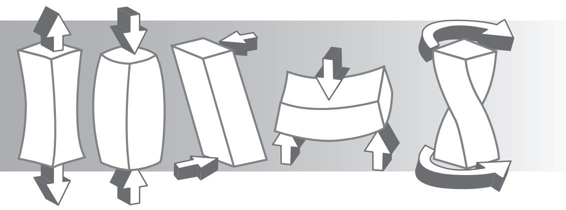
6) ***Άτρακτος*** ονομάζεται κάθε άξονας, συνήθως κυκλικής διατομής, ο οποίος περιστρεφόμενος με n στροφές ανά μονάδα χρόνου μεταφέρει ισχύ P και καταπονείται σε στρέψη ή ταυτόχρονα σε κάμψη και στρέψη, λόγω των γραναζιών ή τροχαλιών που φέρει για τη μετάδοση της κινήσεως.

Η ροπή στρέψεως M της ατράκτου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Λυγισμός



7.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τον λυγισμό. Συγκεκριμένα, παρέχομε τον ορισμό του, παρουσιάζομε τους λόγους για τους οποίους εμφανίζεται, αναλύομε την έννοια του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και ορίζομε τα μεγέθη του ισοδύναμου μήκους λυγισμού και της λυγηρότητας. Περαιτέρω, παραθέτομε τη θεωρία του Euler και τη μέθοδο των συντελεστών ω και αναπτύσσομε σχετικά παραδείγματα.

Ο πίνακας 7.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

7.2 Ο λυγισμός.

Ας θεωρήσομε τη λεπτή και μακριά ράβδο του σχήματος 7.2. Στη ράβδο ενεργούν δύο δυνάμεις, οι οποίες έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά. Οι δύο δυνάμεις έχουν την τάση να μειώσουν το μήκος της ράβδου, δηλαδή έχομε καταπόνηση σε θλίψη. Η θλιβόμενη ράβδος για σχετικά μικρές τιμές του θλιπτικού φορτίου ισορροπεί ευθύγραμμη. Αυξανομένου του φορτίου υπάρχει κάποια τιμή για την οποία η ράβδος εκτρέπεται από την ευθύγραμμη θέση ισορροπίας της και ισορροπεί καμπυλωμένη. Το φορτίο αυτό ονομάζεται κρίσιμο φορτίο λυγισμού (βλ. παράγρ. 7.3). Στην κατάσταση αυτή λέμε ότι η αντοχή της ράβδου σε θλίψη εξαντλείται με εκδήλωση λυγισμού.

Συνεπώς σε μια ευθύγραμμη ράβδο λέμε ότι εκδηλώνεται λυγισμός όταν σ' αυτήν ενεργούν αξονικά δύο ίσες και αντίρροπες δυνάμεις κατά τέτοιον μέτρο, ώστε η ράβδος εκτρέπεται από την ευθύγραμμη θέση ισορροπίας και ισορροπεί καμπυλωμένη.

Εάν μετά το λυγισμό οι αναπτυσσόμενες τάσεις σε όλες τις θέσεις της ράβδου είναι μικρότερες από το όριο ελαστικότητας, τότε μετά την αφαίρεση των φορτίων η ράβδος επανέρχεται στην ευθύγραμμη θέση της. Στην περίπτωση αυτή έχομε ελαστικό λυγισμό. Εάν σε κάποιες θέσεις της ράβδου αναπτυχθούν μόνιμες παραμορφώσεις, η ράβδος δεν επανέρχεται στην ευθύγραμμη θέση της ή δεν επανέρχεται πλήρως. Στην περίπτωση αυτή έχομε ανελαστικό λυγισμό. Σε κάθε περίπτωση θεωρείται ότι η στάθμη του εξωτερικού φορτίου που προκαλεί λυγισμό αντιστοιχεί σε εξάντληση της αντοχής της ράβδου σε θλίψη.

Ο λυγισμός, παρά τις όποιες ομοιότητες έχει με τη θλίψη και την κάμψη, είναι διαφορετικός τόσο απ' τη θλίψη όσο και απ' την κάμψη. Συγκεκριμένα, ο λυγισμός δεν είναι τύπος καταπονήσεως όπως η θλίψη και η κάμψη, αλλά μορφή αστοχίας. Επίσης, παρόλο που στο λυγισμό οι δύο δυνάμεις ενεργούν όπως και στη θλίψη, δηλαδή αξονικά, έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά, εντούτοις ο λυγισμός διαφέρει απ' τη θλίψη γιατί στον λυγισμό η ράβδος κάμπτεται, ενώ

Πίνακας 7.1
Σύμβολα και μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις μονάδες μετρήσεως***
Επιτρεπόμενη τάση λυγισμού	$\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}$	N/cm^2, N/mm^2
Ισοδύναμο μήκος λυγισμού	l_α	cm, mm
Κρίσιμη τάση λυγισμού	σ_κ	N/cm^2, N/mm^2
Κρίσιμο φορτίο λυγισμού	F_κ	N
Λυγηρότητα	λ	Αδιάστατο
Οριακή λυγηρότητα	$\lambda_{o\rho}$	Αδιάστατο
Συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού	α	Αδιάστατο
Συντελεστής λυγισμού	ω	Αδιάστατο

Σχ. 7.2
Ράβδος στην οποία ενεργούν θλιπτικές δυνάμεις.

στην περίπτωση της θλίψεως παραμένει ευθύγραμμη. Σημειώνομε ότι ο λυγισμός συνοδεύεται πάντοτε και από καταπόνηση σε θλίψη, ωστόσο η θλίψη δεν συνοδεύεται απαραίτητα από λυγισμό.

Συγκριτικά με την κάμψη, αναφέρομε ότι, παρόλο που και στον λυγισμό και στην κάμψη η ράβδος χάνει την ευθύγραμμη μορφή της και κάμπτεται, εντούτοις ο λυγισμός διαφέρει απ' την κάμψη γιατί στον λυγισμό οι δυνάμεις ενεργούν αξονικά, ενώ στην κάμψη δρουν εγκάρσια στον άξονα της ράβδου.

Περαιτέρω, ο λυγισμός εμφανίζεται μετά από μία τιμή δυνάμεως, πράγμα που δεν συμβαίνει ούτε στη θλίψη ούτε στην κάμψη. Αυτό αποτελεί ένα ακόμη σημείο ως προς το οποίο ο λυγισμός διαφέρει από τη θλίψη και την κάμψη.

Επίσης, για να έχομε λυγισμό, πρέπει το μήκος του σώματος L να είναι μεγαλύτερο από το πενταπλάσιο της διαμέτρου d της διατομής του (εάν η διατομή είναι κυκλική) ή το οκταπλάσιο της μικρότερης πλευράς α της διατομής του (εάν η διατομή δεν είναι κυκλική). Δηλαδή, πρέπει να ισχύει η ανισότητα:

$$L > 5 \cdot d \quad ή \quad L > 8 \cdot α. \qquad (7.1)$$

– Λόγοι εμφανίσεως του λυγισμού.

Από συστηματικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν για την εξήγηση της εμφανίσεως του φαινομένου του λυγισμού, προκύπτει ότι μια θλιβόμενη ράβδος σε στάθμη φορτίσεως χαμηλότερη από τη στάθμη που προκαλεί λυγισμό ισορροπεί ευθύγραμμη και ευσταθώς. Αυτό σημαίνει ότι εάν κάποιος εκτρέψει τη ράβδο από την ευθύγραμμη θέση ισορροπίας της, η ράβδος θα επανέλθει μέσω μίας ταλαντώσεως στην αρχική της ευθύγραμμη θέση. Για τη στάθμη του κρίσιμου φορτίου λυγισμού η ράβδος ισορροπεί ευθύγραμμη σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας. Εάν για κάποιο ασήμαντο αίτιο ή ατέλεια, η ράβδος εκτραπεί από την ευθύγραμμη ισορροπία της, εμφανίζει λυγισμό. Τα αίτια αυτά είναι τα εξής:

α) Το υλικό του σώματος είναι ελαττωματικό με αποτέλεσμα την ανομοιομορφία στην κατανομή των τάσεων, που εφαρμόζονται στη διατομή του σώματος.

β) Λόγω κακής κατασκευής, το σώμα έχει μικρή καμπυλότητα.

γ) Υπάρχουν διάφορες ατέλειες στην κατασκευή του σώματος.

δ) Οι εφαρμοζόμενες στο σώμα δυνάμεις δεν είναι απολύτως αξονικές. Δηλαδή, υπάρχει μικρή απόκλιση της εφαρμοζόμενης δυνάμεως απ' τον άξονα του σώματος. Θεωρητικά, οι δυνάμεις που καταπονούν ένα σώμα σε λυγισμό ενεργούν στον άξονά του. Ωστόσο, λόγω του μεγάλου μήκους του σώματος συγκριτικά με τη διατομή του, οι δυνάμεις δεν ενεργούν ακριβώς πάνω στον άξονά του. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την πρόκληση πλευρικής κάμψεως στο σώμα.

ε) Υπάρχουν διάφοροι κραδασμοί στο σώμα που ενεργούν εγκάρσια στον άξονά του. Οι κραδασμοί αυτοί είναι συνηθισμένοι στις μηχανές και προέρχονται από τη λειτουργία τους. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και οι σεισμικές δονήσεις, οι οποίες επηρεάζουν τις κολόνες των κτηρίων.

Καθένας από τους λόγους αυτούς έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ροπών κάμψεως στο σώμα. Οι ροπές αυτές αυξάνουν την καμπυλότητα του σώματος.

Λυγισμός παρατηρείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή. Ως χαρακτηριστικά παραδείγματα στερεών σωμάτων στα οποία μπορεί να εκδηλωθεί ο λυγισμός αναφέρομε τα έμβολα των υδραυλικών ανυψωτήρων, τα έμβολα των υδραυλικών ανελκυστήρων, τα υποστυλώματα των κατοικιών, τις κολόνες των υποστέγων και τους διωστήρες των μηχανών.

7.3 Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Ας μελετήσομε σχολαστικά την επενέργεια μεταβλητής δυνάμεως που δρα κατά τον άξονα λεπτής και μακριάς ράβδου. Το ένα άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο, ενώ το άλλο είναι ελεύθερο [σχ. 7.3(α)]. Η δύναμη δρα στο ελεύθερο άκρο της. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της εφαρμοζόμενης δυνάμεως η ράβδος θλίβεται με αποτέλεσμα να βραχύνεται, αλλά παραμένει ευθύγραμμη [σχ. 7.3(β)]. Στην κατάσταση αυτή, όπως ήδη έχομε αναφέρει, εάν η ράβδος καμπυλωθεί ελαφρά από κάποια εξωτερική αιτία, τότε μόλις η αιτία αυτή αρθεί, η ράβδος επανέρχεται αμέσως στην αρχική της ευθύγραμμη θέση. Η κατάσταση αυτή είναι μια κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας.

Εάν συνεχίσομε να αυξάνομε κι άλλο την εφαρμοζόμενη δύναμη, παρατηρούμε ότι η δύναμη φτάνει σε μία τιμή $F_κ$ [σχ. 7.3(γ)], από την οποία και μετά, για τους λόγους που προαναφέραμε εξαντλείται η αντοχή της ράβδου σε θλίψη και η ράβδος λυγίζει [σχ. 7.3(δ)]. Η τιμή της δυνάμεως αυτής ονομάζεται ***κρίσιμο φορτίο λυγισμού*** και συμβολίζεται με $F_κ$. Συνεπώς:

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού ονομάζεται η αξονική θλιπτική δύναμη από την οποία και μετά εμφανίζεται ο λυγισμός.

Ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού είναι ιδιαίτερα σημαντικός για τη μη εκδήλωση του λυγισμού και δεν πρέπει να γίνεται υπέρβασή του.

Εκτός από την εξωτερική εφαρμοζόμενη δύναμη, ο λυγισμός εξαρτάται και από άλλους παράγοντες. Αυτοί είναι οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού, το σχήμα της διατομής της ράβδου, το μήκος της και ο τρόπος στηρίξεώς της στα άκρα. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μιας ράβδου εξαρτάται από τον τρόπο στερεώσεως των άκρων της ράβδου, το μήκος της ράβδου, το σχήμα της διατομής της ράβδου και το μέτρο ελαστικότητας της ράβδου.

7.4 Ισοδύναμο μήκος λυγισμού και λυγηρότητα μιας ράβδου.

Πριν προχωρήσομε στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, παρουσιάζομε τις έννοιες του ισοδύναμου μήκους λυγισμού και της λυγηρότητας μιας ράβδου, τις οποίες χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού αποτελεί ένα ισοδύναμο μήκος της ράβδου που λυγίζει. Για τον ορισμό της έννοιας του ισοδύναμου μήκους λυγισμού χρειάζεται να εξετάσομε τους τρόπους στερεώσεως των άκρων ράβδου που εμφανίζει λυγισμό. Η λυγηρότητα μιας ράβδου χαρακτηρίζει την ευαισθησία της ράβδου στον λυγισμό.

7.4.1 Τρόποι στερεώσεως των άκρων ράβδου.

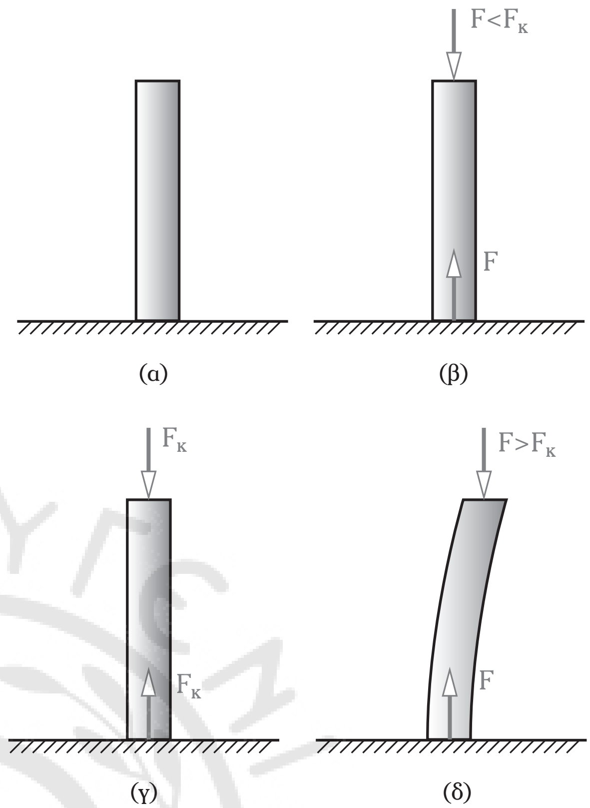
Οι δυνατοί τρόποι στερεώσεως των άκρων μιας ράβδου που εμφανίζει λυγισμό είναι οι εξής:

1) Η ***ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο*** [σχ. 7.4(α)]. Με τον τρόπο αυτό στερεώνονται οι πάσσαλοι, οι στύλοι μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, τα έμβολα ανυψωτήρων συνεργείων αυτοκινήτων κ.λπ..

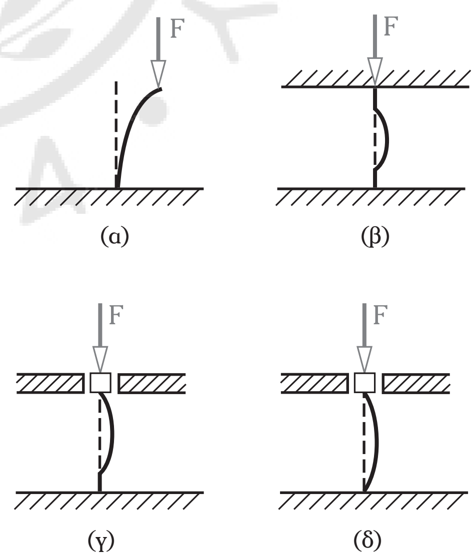
2) ***Αμφίπακτη ράβδος*** [σχ. 7.4(β)]. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα και η μία πάκτωση μπορεί να μετακινείται κατά τον άξονα της ράβδου. Τα δομικά υποστυλώματα αποτελούν παράδειγμα αμφίπακτης ράβδου.

3) Η ***ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και το άλλο άκρο της είναι αρθρωτό*** [σχ. 7.4(γ)]. Το αρθρωτό άκρο μπορεί να μετακινείται κατά τον άξονα της ράβδου.

4) ***Αμφιαρθρωτή ράβδος*** [σχ. 7.4(δ)]. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο άκρα της ράβδου στηρίζο-



Σχ. 7.3
Μελέτη ράβδου που εκδηλώνει λυγισμό. (α) Δεν δρα εξωτερική δύναμη. (β) Δρα μικρή εξωτερική δύναμη. (γ) Δρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. (δ) Δρα φορτίο μεγαλύτερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.



Σχ. 7.4
Τρόποι στερεώσεως των άκρων ράβδου: (α) Ράβδος πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο. (β) Αμφίπακτη ράβδος. (γ) Ράβδος πακτωμένη στο ένα άκρο και αρθρωτή στο άλλο. (δ) Αμφιαρθρωτή ράβδος.

νται με άρθρωση και μία από τις αρθρώσεις μπορεί να μετακινείται κατά τον άξονά της.

7.4.2 Ισοδύναμο μήκος λυγισμού.

Καθεμία απ' τις ανωτέρω τέσσερεις περιπτώσεις στερεώσεως της ράβδου χαρακτηρίζεται από το ***ισοδύναμο μήκος λυγισμού*** της. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού δεν είναι το πραγματικό μήκος της ράβδου, αλλά ένα ισοδύναμο μήκος που είναι συνάρτηση του πραγματικού μήκους της l. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού μάς επιτρέπει να εξετάζομε κατά ενιαίο τρόπο το λυγισμό της ράβδου στις ανωτέρω τέσσερεις περιπτώσεις στερεώσεως, αρκεί να αναφερόμαστε σ' αυτό αντί για το πραγματικό μήκος της. Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού $l_α$ συνδέεται με το πραγματικό μήκος l της ράβδου μέσω της ακόλουθης σχέσεως:

$$l_α = α \cdot l \qquad (7.2)$$

όπου ο συντελεστής α εξαρτάται από τον τρόπο στερεώσεως της ράβδου.

Ο πίνακας 7.4 παρουσιάζει τις τιμές του συντελεστή α για τις τέσσερεις περιπτώσεις στερεώσεως της ράβδου.

Παράδειγμα 1.

Ράβδος έχει μήκος l = 90 cm. Να υπολογιστεί το ισοδύναμο μήκος λυγισμού της ράβδου στις ακόλουθες περιπτώσεις στηρίξεως:

1) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο.

2) Αμφίπακτη ράβδος.

3) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και το άλλο της είναι αρθρωτό.

4) Αμφιαρθρωτή ράβδος.

Πίνακας 7.4
Οι τιμές του συντελεστή του ισοδύναμου μήκους λυγισμού.

Τρόπος στερεώσεως ράβδου	*Συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού*
Πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο άκρο	2
Αμφίπακτη	0,5
Πακτωμένη στο ένα άκρο και αρθρωτό το άλλο	0,7
Αμφιαρθρωτή	1

Λύση.

Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού για τις τέσσερεις περιπτώσεις υπολογίζεται ως εξής:

1) $l_{α,1} = α_1 \cdot l = 2 \cdot 90\ cm = 180\ cm$

2) $l_{α,2} = α_2 \cdot l = 0,5 \cdot 90\ cm = 45\ cm$

3) $l_{α,3} = α_3 \cdot l = 0,7 \cdot 90\ cm = 63\ cm$

4) $l_{α,4} = α_4 \cdot l = 1 \cdot 90\ cm = 90\ cm$.

7.4.3 Λυγηρότητα ράβδου.

Μία ράβδος χαρακτηρίζεται από τη λυγηρότητά της. ***Λυγηρότητα λ*** ονομάζεται το μέγεθος ***που ισούται με το πηλίκον του ισοδύναμου μήκους λυγισμού $l_α$ προς την ακτίνα αδράνειας $R_{I_δ}$ της διατομής της ράβδου:***

$$λ = \frac{l_α}{R_{I_δ}}. \qquad (7.3)$$

Η λυγηρότητα ράβδου είναι μέγεθος που δείχνει την ευαισθησία της ράβδου στον λυγισμό.

Όπως γνωρίζομε από την παράγραφο 3.4, η ακτίνα αδράνειας $R_{I_δ}$ της ράβδου υπολογίζεται από την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου της ροπής αδράνειας $I_δ$ της διατομής της ράβδου προς τη διατομή Α, δηλαδή:

$$R_{I_δ} = \sqrt{\frac{I_δ}{A}}. \qquad (7.4)$$

Επίσης, από τη σχέση (7.2) γνωρίζομε ότι $l_α = α \cdot l$, όπου ο συντελεστής α εξαρτάται απ' τον τρόπο στερεώσεως της ράβδου. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7.4) και (7.2) στη σχέση (7.3), λαμβάνομε:

$$λ = α \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_δ}}. \qquad (7.5)$$

Από τη σχέση (7.3) καταλήγομε στο ότι η λυγηρότητα είναι καθαρός αριθμός (δηλ. δεν έχει μονάδες). Επίσης, από τη σχέση (7.5) συμπεραίνομε ότι η λυγηρότητα εξαρτάται από:

1) Το μήκος της ράβδου.

2) Τον τρόπο στερεώσεως της ράβδου.

3) Την επιφάνεια της διατομής της ράβδου.

4) Τη ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου, η οποία εξαρτάται από τη μορφή της διατομής και τις διαστάσεις αυτής.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί η λυγηρότητα αμφιαρθρωτής ράβδου που έχει μήκος $l = 100$ cm και κυκλική διατομή ακτίνας $r = 20$ mm.

Λύση.

Η λυγηρότητα της ράβδου παρέχεται ως εξής :

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}}. \qquad (1)$$

Το εμβαδόν της κυκλικής διατομής είναι:

$$A = \pi \cdot r^2. \qquad (2)$$

Από τον πίνακα 3.3.1, η ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής είναι:

$$I_\delta = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}. \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) έχομε:

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}} = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot r^2}{\frac{\pi \cdot r^4}{4}}} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot l}{r} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 100 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 100.$$

Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί το ισοδύναμο μήκος λυγισμού ράβδου που έχει μήκος $l = 120$ cm, είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της, ενώ το άλλο είναι αρθρωτό.*

2. *Να υπολογιστεί η λυγηρότητα αμφίπακτης ράβδου που έχει μήκος $l = 90$ cm και τετραγωνική διατομή πλευράς $x = 5$ cm.*

3. *Η λυγηρότητα αμφιαρθρωτής ράβδου που έχει μήκος $l = 120$ cm και τετραγωνική διατομή ισούται με $\lambda = 110$. Να υπολογιστεί η πλευρά της τετραγωνικής διατομής.*

7.5 Ο τύπος του Euler.

Το πρόβλημα της ευρέσεως του κρίσιμου φορτίου λυγισμού απασχόλησε τον Ελβετό μαθηματικό Leonard Euler (1707-1783). Ο Euler μελέτησε τον λυγισμό ράβδου κάνοντας τις ακόλουθες υποθέσεις:

1) Η ράβδος είναι ιδανικά ευθύγραμμη, δηλαδή έχει σταθερή διατομή σε όλο το μήκος της.

2) Η ράβδος αποτελείται από ισότροπο υλικό, δηλαδή παρουσιάζει τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες σε όλες τις κατευθύνσεις.

3) Η φόρτιση της ράβδου είναι ιδανικά αξονική, κάτι που σημαίνει ότι η δύναμη που προκαλεί τον λυγισμό ενεργεί ακριβώς στον άξονα της ράβδου.

4) Η καταπόνηση λαμβάνει χώρα στην ελαστική περιοχή. Αυτό σημαίνει ότι η καταπόνηση λαμβάνει χώρα στην περιοχή όπου ισχύει ο Νόμος του Hooke. Δηλαδή, η αναπτυσσόμενη τάση είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας, σημείο από το οποίο και πέρα δεν ισχύει ο Νόμος του Hooke, σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει στο Κεφάλαιο 1.

Ο Euler υπολόγισε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού F_κ της ράβδου από τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός και ως ***τύπος του Euler (1η μορφή)***:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{l_\alpha^2} \qquad (7.6)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου, I_δ είναι η ροπή αδράνειας της διατομής της και l_α είναι το ισοδύναμο μήκος λυγισμού της.

Αντικαθιστώντας στον τύπο (7.6) το ισοδύναμο μήκος από τη σχέση (7.2) $l_\alpha = \alpha \cdot l$, όπου l είναι το μήκος της ράβδου και α ο συντελεστής που εξαρτάται από τον τρόπο στερεώσεώς της, λαμβάνομε:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{\alpha^2 \cdot l^2}. \qquad (7.7)$$

Από τη σχέση (7.7) διαπιστώνομε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες:

1) Το είδος του υλικού και συγκεκριμένα το μέτρο ελαστικότητάς του.

2) Τη ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου, η οποία καθορίζεται από τη μορφή και τις διαστάσεις της διατομής.

3) Το μήκος της ράβδου.

4) Τον τρόπο στερεώσεώς της.

Παρατηρούμε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι το ίδιο για όλες τις ράβδους ίδιας διατομής και ίδιου μήκους, οι οποίες είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό, ανεξαρτήτως του ορίου θραύσεώς τους. Δηλαδή, όλες οι ράβδοι ίδιας διατομής και ίδιου μήκους που είναι κατασκευασμένες από χάλυβα έχουν το ίδιο κρίσιμο φορτίο λυγισμού, παρόλο που η ποιότητα του χάλυβα μπορεί να είναι διαφορετική από ράβδο σε ράβδο.

Ωστόσο, μία ράβδος έχει διαφορετική ακτίνα αδράνειας ως προς κάθε κεντροβαρικό της άξονα και επομένως και διαφορετική λυγηρότητα.

Η ράβδος, εάν το φορτίο της σταδιακά αυξάνεται, θα λυγίσει καμπτόμενη ως προς τον άξονα ως προς τον οποίο έχει τη μεγαλύτερη λυγηρότητα.

Τέλος, τονίζομε και πάλι ότι ο τύπος του Euler εφαρμόζεται στην ελαστική περιοχή.

Παράδειγμα 3.

Να γραφεί ο τύπος του Euler για τους ακόλουθους τρόπους στερεώσεως ράβδου μήκους l, της οποία η διατομή έχει ροπή αδράνειας ίση με I_δ και το υλικό της έχει μέτρο ελαστικότητας ίσο με E:

1) Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο.

2) Και τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα.

Λύση.

1) Για την περίπτωση αυτή $\alpha = 2$. Έτσι, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δίνεται από τη σχέση:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{4 \cdot l^2}.$$

2) Για την περίπτωση αυτή $\alpha = 0{,}5$. Έτσι, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δίνεται από τη σχέση:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{0{,}5^2 \cdot l^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{l^2}.$$

7.5.1 Κρίσιμη τάση λυγισμού.

Εκτός από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, μας ενδιαφέρει και η τάση που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Η τάση αυτή ονομάζεται κρίσιμη τάση λυγισμού. Δηλαδή:

Κρίσιμη τάση λυγισμού είναι η τάση που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Η κρίσιμη τάση λυγισμού σ_κ ορίζεται ως το πηλίκον του κρίσιμου φορτίου λυγισμού F_κ προς τη διατομή A της ράβδου, δηλαδή:

$$\sigma_\kappa = \frac{F_\kappa}{A}. \qquad (7.8)$$

Η κρίσιμη τάση λυγισμού αποτελεί την τάση από την οποία η ράβδος εκδηλώνει λυγισμό.

7.5.2 Δεύτερη μορφή του τύπου του Euler.

Αντικαθιστώντας τον τύπο (7.6) στη σχέση (7.8) έχομε:

$$\sigma_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{A \cdot l_\alpha^2}. \qquad (7.9)$$

Όμως, η ακτίνα αδράνειας της ράβδου είναι:

$$R_{I_\delta} = \sqrt{\frac{I_\delta}{A}} \text{ ή } R_{I_\delta}^2 = \frac{I_\delta}{A}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7.9) λαμβάνομε:

$$\sigma_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot R_{I_\delta}^2}{l_\alpha^2}. \qquad (7.10)$$

Από τη σχέση (7.3) γνωρίζομε ότι η λυγηρότητα λ της ράβδου ισούται με:

$$\lambda = \frac{l_\alpha}{R_{I_\delta}}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7.10) έχομε:

$$\sigma_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \qquad (7.11)$$

Η σχέση (7.11) παρέχει την κρίσιμη τάση λυγισμού μίας ράβδου και είναι γνωστή ως ***δεύτερη μορφή του τύπου του Euler***. Από τη σχέση (7.11) διαπιστώνομε ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες:

1) Το είδος του υλικού της ράβδου και συγκεκριμένα το μέτρο ελαστικότητάς του και

2) τη λυγηρότητα της ράβδου.

Παρατηρούμε ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού δεν εξαρτάται από το όριο θραύσεως του υλικού. Για παράδειγμα, η κρίσιμη τάση λυγισμού των χαλυβδίνων ράβδων δεν εξαρτάται από την τάση θραύσεως των διαφόρων ποιοτήτων του χάλυβα, αλλά απ' τη λυγηρότητα κάθε ράβδου.

Παράδειγμα 4.

Να υπολογιστεί η κρίσιμη τάση λυγισμού ράβδου που έχει λυγηρότητα $\lambda = 160$. Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της $E = 2 \cdot 10^6\ N/cm^2$.

Λύση.

Η κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6\ N/cm^2}{160^2} = 770\ N/cm^2.$$

7.5.3 Περιοχή ισχύος του τύπου του Euler.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, ο τύπος του Euler εφαρμόζεται στην ελαστική περιοχή. Επομένως, η κρίσιμη τάση λυγισμού πρέπει να είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού της ράβδου

σ_p, δηλαδή:

$$\sigma_\kappa \leq \sigma_P. \tag{7.12}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (7.11) στη σχέση (7.12) και λύνοντας ως προς τη λυγηρότητα λ λαμβάνομε:

$$\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_P \Leftrightarrow \lambda^2 \geq \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P} \Leftrightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P}}. \tag{7.13}$$

Η ποσότητα $\lambda_{\text{ορ}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P}}$ (7.14)

που βρίσκεται στο δεξί σκέλος της ανισότητας (7.13) ονομάζεται ***οριακή λυγηρότητα***. Η οριακή λυγηρότητα αποτελεί τη λυγηρότητα που αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας της ράβδου. Ο πίνακας 7.5.1 παρουσιάζει την οριακή λυγηρότητα ορισμένων υλικών.

Αντικαθιστώντας την ποσότητα (7.14) στην ανισότητα (7.13) λαμβάνομε:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{ορ}}. \tag{7.15}$$

Η σχέση (7.15) ορίζει τις τιμές λυγηρότητας για τις οποίες εφαρμόζεται ο τύπος του Euler.

Παράδειγμα 5.

Το υλικό μιας ράβδου έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 4,8 \cdot 10^6$ N/cm^2 και όριο αναλογίας $\sigma_p = 12.000$ N/cm^2. Η ράβδος έχει τετραγωνική διατομή πλευράς b = 2 cm, μήκος l = 120 cm και τα δύο άκρα της είναι πακτωμένα.

1) Να υπολογιστεί η οριακή λυγηρότητα του υλικού της ράβδου.

2) Να υπολογιστεί η λυγηρότητα της ράβδου.

3) Μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Euler για τη ράβδο;

Πίνακας 7.5.1
Οριακή λυγηρότητα ορισμένων υλικών.

Υλικό	***Οριακή λυγηρότητα***
Ξύλο	100
Μαλακός χάλυβας (St 37, St 42)	100
Σκληρός χάλυβας (St 50, St 60)	88
Χάλυβας ελατηρίων	60
Χυτοσίδηρος	80
Κράματα αλουμινίου	65

Λύση.

1) Η οριακή λυγηρότητα του υλικού της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\lambda_{\text{ορ}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 4,8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2}{12.000 \text{ N/cm}^2}} = 62,8.$$

2) Επειδή η ράβδος είναι αμφίπακτη, ο συντελεστής ισοδύναμου μήκους της είναι: α = 0,5. Η λυγηρότητά της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}}.$$

Το εμβαδόν της διατομής είναι: $A = b^2$. Από τον πίνακα 3.3.1 έχομε ότι η ροπή αδράνειας της τετραγωνικής διατομής είναι:

$$I_\delta = \frac{b^4}{12}.$$

Έτσι, η λυγηρότητα της ράβδου είναι:

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_\delta}} = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{b^2}{\frac{b^4}{12}}} = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{12}{b^2}} =$$

$$= 0,5 \cdot 120 \text{ cm} \cdot \sqrt{\frac{12}{2^2 \text{cm}^2}} = 103,9.$$

3) Επειδή η λυγηρότητα της ράβδου είναι μεγαλύτερη από την οριακή λυγηρότητα, ο τύπος του Euler μπορεί να εφαρμοστεί.

7.5.4 Επιτρεπόμενη τάση λυγισμού.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η τάση που πρέπει να αναπτύσσεται σε ράβδο για να μην εκδηλώσει λυγισμό πρέπει να είναι μικρότερη από την κρίσιμη τάση λυγισμού σ_κ. Μάλιστα, για λόγους ασφαλείας η τάση αυτή πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από την κρίσιμη τάση λυγισμού. Έτσι, ορίζεται μια ανώτατη τιμή τάσεως, μέχρι την οποία επιτρέπεται να φορτιστεί η ράβδος για να μην εκδηλώσει λυγισμό. Αυτή η ανώτατη τιμή τάσεως ονομάζεται επιτρεπόμενη τάση λυγισμού και συμβολίζεται με $\sigma_{\text{επ,λυ}}$. Δηλαδή:

Επιτρεπόμενη τάση λυγισμού μιας ράβδου είναι η ανώτατη τιμή τάσεως μέχρι την οποία επιτρέπεται να φορτιστεί η ράβδος, ώστε να μην λυγίσει.

Η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού πρέπει να είναι κατά πολλές φορές μικρότερη από την κρίσιμη τάση λυγισμού. Ονομάζομε ***συντελεστή ασφαλείας*** *ν* τον αριθμό που μας δείχνει πόσες φορές μικρότερη είναι η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού $\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}$ απ' την κρίσιμη τάση λυγισμού σ_{κ}. Δηλαδή, ο συντελεστής ασφαλείας ορίζεται ως εξής:

$$v = \frac{\sigma_{\kappa}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}}. \qquad (7.16)$$

Ο πίνακας 7.5.2 παρουσιάζει τους συντελεστές ασφαλείας που έχουν οριστεί στην πράξη για ορισμένα υλικά.

Πίνακας 7.5.2
Συντελεστές ασφαλείας
για ορισμένα υλικά.

Υλικό	*Συντελεστής Ασφαλείας*
Ξύλο	10 έως 15
Χυτοσίδηρος	8
Χάλυβας	5
Υλικό βάκτρου εμβόλου	10
Υλικό διωστήρα	5

Παράδειγμα 6.

Δίνεται ο συντελεστής ασφαλείας $v = 8$ και η κρίσιμη τάση λυγισμού $\sigma_{\kappa} = 12.000\ \text{N/cm}^2$. Να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού.

Λύση.

Από τον ορισμό του συντελεστή ασφαλείας:

$$v = \frac{\sigma_{\kappa}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon} = \frac{\sigma_{\kappa}}{v} \Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}$$

$$= \frac{12.000\ \text{N/cm}^2}{8} = 1.500\ \text{N/cm}^2.$$

Ο συντελεστής ασφαλείας χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων διαστασιολογήσεως σωμάτων, προκειμένου να μην εκδηλώσουν λυγισμό. Με τη βοήθειά του προσδιορίζεται η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού και στη συνέχεια οι διαστάσεις του σώματος, ώστε να μην λυγίσει.

7.5.5 Προβλήματα λυγισμού.

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στο λυγισμό είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που απαντώνται στις περιπτώσεις των καταπονήσεων που έχομε μελετήσει. Δηλαδή, αφορούν:

1) Στον υπολογισμό της τάσεως λειτουργίας.

2) Στον υπολογισμό διαστάσεων της διατομής.

3) Στον υπολογισμό του φορτίου για να μην εκδηλωθεί λυγισμός.

και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις περιπτώσεις των καταπονήσεων. Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.

Σε αμφίπακτη ράβδο μήκους $l = 240\ \text{cm}$ με κυκλική διατομή διαμέτρου $d = 45\ \text{mm}$ ενεργεί αξονικά θλιπτική δύναμη $F = 5.000\ \text{N}$. Αν η ράβδος έχει οριακή λυγηρότητα $\lambda_{op} = 90$ και ο συντελεστής ασφαλείας είναι $v = 5$ να εξεταστεί εάν η ράβδος φορτίζεται κανονικά. Δίνεται $E = 2 \cdot 10^6\ \text{N/cm}^2$.

Λύση.

Για να φορτίζεται η ράβδος κανονικά πρέπει η δύναμη φορτίσεως να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το επιτρεπόμενο φορτίο, το οποίο είναι v = 5 φορές μικρότερο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Το τελευταίο υπολογίζεται από τον τύπο του Euler, εφόσον αυτός μπορεί όντως να εφαρμοστεί, δηλαδή εφόσον η λυγηρότητα της ράβδου είναι μεγαλύτερη απ' την οριακή.

Αρχικά υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας της διατομής:

$$I_{\delta} = \frac{\pi\, d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4{,}5^4\ \text{cm}^4}{64} = 20{,}12\ \text{cm}^4.$$

Στη συνέχεια υπολογίζομε την επιφάνεια της διατομής:

$$A = \frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4{,}5^2\,\text{cm}^2}{4} = 15{,}90\ \text{cm}^2.$$

Επειδή η ράβδος είναι αμφίπακτη έχομε: $\alpha = 0{,}5$.

Άρα, η λυγηρότητα της ράβδου είναι:

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sqrt{\frac{A}{I_{\delta}}} = 0{,}5 \cdot 240\ \text{cm} \cdot \sqrt{\frac{15{,}90\ \text{cm}^2}{20{,}12\ \text{cm}^4}} = 106{,}7.$$

Διαπιστώνομε ότι η λυγηρότητα της ράβδου είναι μεγαλύτερη από την οριακή. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσομε τον τύπο του Euler για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου. Έχομε:

$$F_{\kappa} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\delta}}{\alpha^2 \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6\,\text{N/cm}^2 \cdot 20{,}12\ \text{cm}^4}{0{,}5^2 \cdot 240^2\,\text{cm}^2} =$$

$$= 27.552\,\text{N}.$$

Άρα το επιτρεπόμενο φορτίο είναι:

$$F_{επ} = F_κ/v = 27.552\ N/5 = 5.510\ N.$$

Επειδή η δύναμη F = 5.000 N είναι μικρότερη από το επιτρεπόμενο φορτίο, η ράβδος φορτίζεται κανονικά.

Παράδειγμα 8.

Στύλος έχει τετραγωνική διατομή και μήκος $l = 5$ m. Στηρίζεται με πάκτωση και στα δύο άκρα του και φορτίζεται με φορτίο F = 3.900 N που δρα αξονικά. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του στύλου είναι $E = 100.000\ N/cm^2$, ο συντελεστής ασφαλείας είναι $v = 3$ και η οριακή λυγηρότητα $λ_{ορ} = 70$. Να βρεθεί η πλευρά της διατομής του στύλου.

Λύση.

Αρχικά υπολογίζομε το ισοδύναμο μήκος του στύλου: $l_α = α \cdot l = 0,5 \cdot 5\ m = 250\ cm$.

Υπολογίζομε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού με τη βοήθεια του συντελεστή ασφαλείας (θεωρώντας $F_{επ} = F$):

$$v = \frac{F_κ}{F} \Leftrightarrow F_κ = vF = 3 \cdot 3900\ N = 11.700\ N.$$

Δεχόμαστε ότι ισχύει ο τύπος του Euler και από αυτόν υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας:

$$F_κ = \frac{π^2\ E\ I_δ}{l_α^{\ 2}} \Leftrightarrow I_δ = \frac{F_κ\ l_α^{\ 2}}{π^2\ E} =$$

$$= \frac{11.700\ N \cdot 250^2 cm^2}{3,14^2 \cdot 10^5\ N/cm^2} = 741,7\ cm^4.$$

Γνωρίζομε ότι η ροπή αδράνειας δίνεται απ' τη σχέση:

$$I_δ = \frac{b^4}{12}.$$

Υπολογίζομε την πλευρά της διατομής:

$$b = \sqrt[4]{12 I_δ} = \sqrt[4]{12 \cdot 741,7\ cm^4} = 9,7\ cm.$$

Επιλέγομε $b = 10$ cm.

Πρέπει να ελέγξομε την ισχύ του τύπου του Euler. Αρχικά, υπολογίζομε τη ροπή αδράνειας από την πλευρά που βρήκαμε:

$$I_δ = \frac{b^4}{12} = \frac{10^4 cm^4}{12} = 833\ cm^4.$$

Η διατομή έχει εμβαδόν:

$$A = b^2 = 10^2\ cm^2 = 100\ cm^2.$$

Άρα, ο συντελεστής λυγηρότητας είναι:

$$λ = l_α \sqrt{\frac{A}{I_δ}} = 250\ cm \sqrt{\frac{100\ cm^2}{833\ cm^4}} = 86,6.$$

Επειδή η λυγηρότητα είναι μεγαλύτερη από την οριακή, συμπεραίνομε ότι ισχύει ο τύπος του Euler.

Ασκήσεις.

1. *Το υλικό μιας ράβδου έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 5,2 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και όριο αναλογίας $σ_p = 10.000\ N/cm^2$. Η ράβδος έχει κυκλική διατομή διαμέτρου $D = 6$ cm και μήκος $l = 150$ cm και τα δύο άκρα της είναι στερεωμένα με άρθρωση.*
α) Να υπολογιστεί η οριακή λυγηρότητα του υλικού της ράβδου.
β) Να υπολογιστεί η λυγηρότητα της ράβδου.
γ) Μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Euler για τη ράβδο;

2. *Να εξετάσετε εάν μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Euler για τη ράβδο της ασκήσεως 1 όταν αυτή τοποθετηθεί με το ένα άκρο της πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο.*

3. *Αμφιαρθρωτός στύλος έχει κυκλική διατομή διαμέτρου $d = 20$ cm και ύψος $l = 3$ m. Ο στύλος δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο. Εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του είναι $E = 3,4 \cdot 10^6\ N/cm^2$, να υπολογίσετε:*
α) Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.
β) Την κρίσιμη τάση λυγισμού.
γ) Την επιτρεπόμενη τάση λυγισμού για συντελεστή ασφαλείας $v = 5$.

4. *Στύλος πακτωμένος στο ένα άκρο του και ελεύθερος στο άλλο έχει μήκος $l = 60$ cm. Ο στύλος δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο F = 20.000 N. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του στύλου είναι $E = 4,3 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και ο συντελεστής ασφαλείας $v = 6$. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος του στύλου για να μην λυγίσει;*

5. *Ράβδος έχει μήκος $l = 50$ cm και τετραγωνική διατομή με πλευρά $x = 5$ cm. Ποια είναι η ικανότητα φορτίσεως της ράβδου σε λυγισμό; Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου $E = 4,3 \cdot 10^6\ N/cm^2$ και ο συντελεστής ασφαλείας $v = 4$.*

6. *Αμφιαρθρωτή ράβδος με ορθογώνια διατομή $b = 30\,mm \times c = 50\,mm$ δέχεται αξονική θλιπτική δύναμη. Ποιο είναι το ελάχιστο μήκος της ράβδου για το οποίο εφαρμόζεται ο τύπος του Euler; Δίνεται το όριο αναλογίας $\sigma_p = 24.000\,N/cm^2$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2,7 \cdot 10^6\,N/cm^2$ του υλικού της ράβδου.*

7.6 Οι τύποι Tetmajer.

Ο λυγισμός στην πλαστική περιοχή, δηλαδή για λυγηρότητες μικρότερες της οριακής, μελετήθηκε από τον Γερμανό μηχανικό Tetmajer τον 19ο αιώνα. Ο Tetmajer πραγματοποίησε πολλά πειράματα, με τη βοήθεια των οποίων υπολόγισε τη σχέση μεταξύ της κρίσιμης τάσεως λυγισμού σ_κ και της λυγηρότητας λ. Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως τύπος Tetmajer. Ο τύπος Tetmajer είναι ο ακόλουθος:

$$\sigma_\kappa = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_2 \cdot \lambda^2 \qquad (7.17)$$

όπου οι συντελεστές α_0, α_1 και α_2 είναι γνωστοί ως σταθερές του Tetmajer, εξαρτώνται από το υλικό και προσδιορίζονται πειραματικά. Ο συντελεστής $\alpha_2 \approx 0$. Ο πίνακας 7.6 παρουσιάζει τιμές των συντελεστών α_0 και α_1 για διάφορα υλικά για τις περιοχές της λυγηρότητας λ.

Το σχήμα 7.6 παρουσιάζει συνολικά την κρίσιμη τάση λυγισμού στην ελαστική και στην πλαστική περιοχή ως συνάρτηση της λυγηρότητας.

Συγκεκριμένα, διακρίνομε τις ακόλουθες τρεις περιοχές τιμών λυγηρότητας:

1) Για $\lambda > \lambda_{o\rho}$.

Αντιστοιχεί στην ελαστική περιοχή. Η $\lambda_{o\rho}$ είναι η λυγηρότητα αναλογίας που αντιστοιχεί στο σημείο αναλογίας σ_P. Η σχετική γραφική παράσταση είναι η καμπύλη του Euler και η κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίζεται από τον τύπο του Euler.

2) Για $\lambda_\delta < \lambda < \lambda_{o\rho}$.

Αντιστοιχεί στην πλαστική περιοχή. Η σχετική γραφική παράσταση είναι η καμπύλη του Tetmajer και η κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίζεται από τον τύπο του Tetmajer. Επειδή $\alpha_2 \approx 0$, η καμπύλη του Tetmajer προσεγγίζεται από την ευθεία $\sigma_\kappa = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot \lambda$.

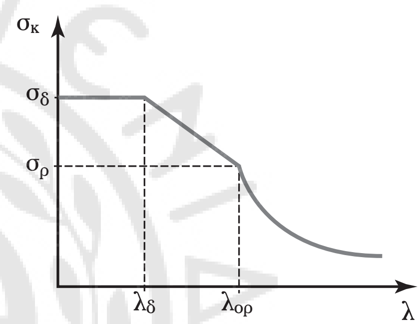
3) Για $\lambda < \lambda_\delta$.

Η λ_δ είναι η λυγηρότητα διαρροής που αντιστοιχεί στο σημείο διαρροής σ_δ. Η σχετική γραφική παράσταση είναι η οριζόντια ευθεία $\sigma_\kappa = \sigma_\delta$.

Αφού υπολογιστεί η κρίσιμη τάση λογισμού, επιλέγεται ο κατάλληλος συντελεστής ασφαλείας ν, ώστε να εξασφαλίζεται ότι η αναπτυσσόμενη τάση είναι μικρότερη ή ίση με την επιτρεπόμενη.

Πίνακας 7.6
Οι σταθερές του Tetmajer.

Υλικό	***α_0***	***α_1***	***Περιοχές του λ***
Κράματα αργιλίου	3850	32,6	λ < 65
Νικελούχος χάλυβας	4700	23,05	λ < 86
Χάλυβας St37	2891	8,175	60 < λ < 100
Χάλυβας St48	4691	26,175	60 < λ < 100
Χάλυβας St52	5891	38,175	60 < λ < 100
Χυτοσίδηρος	7760	120	λ < 80



Σχ. 7.6
Η κρίσιμη τάση λυγισμού.

Παράδειγμα 9.

Ράβδος από χυτοσίδηρο έχει λυγηρότητα $\lambda = 60$ και αναμένεται να έχει τάση λειτουργίας $\sigma = 80\,N/m^2$. Εάν ο συντελεστής ασφαλείας ισούται με $\nu = 5$, να εξεταστεί εάν η τάση λειτουργίας είναι μικρότερη της επιτρεπόμενης.

Λύση.

Από τον πίνακα 7.6, διαπιστώνομε ότι η λυγηρότητα της ράβδου είναι μικρότερη από την οριακή λυγηρότητα. Συνεπώς η ράβδος θα λειτουργεί στην πλαστική περιοχή. Η κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίζεται από τον τύπο του Tetmajer:

$$\sigma_\kappa = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_2 \cdot \lambda^2.$$

Από τον πίνακα 7.6 για το χυτοσίδηρο έχομε $\alpha_0 = 7.760$ και $\alpha_1 = 120$, ενώ $\alpha_2 \approx 0$. Αντικαθιστώντας στον τύπο του Tetmajer τις τιμές των συντελεστών και της λυγηρότητας υπολογίζομε την κρίσιμη τάση λυγισμού:

$$\sigma_\kappa = 7.760 - 120 \cdot 60 + 0 \cdot 60^2 = 560\,\mathrm{N/m^2}.$$

Επειδή ο συντελεστής ασφαλείας είναι $v = 5$, η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_\kappa}{v} = \frac{560\mathrm{N/m^2}}{5} = 112\ \mathrm{N/m^2}.$$

Συνεπώς η τάση λειτουργίας $\sigma = 80\,\mathrm{N/m^2}$ είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τάση.

Ασκήσεις.

1. *Στύλος από κράμα αργιλίου έχει λυγηρότητα $\lambda = 50$ και τάση λειτουργίας $\sigma = 580\,N/m^2$. Εάν ο συντελεστής ασφαλείας ισούται με $\upsilon = 4$, να εξεταστεί εάν ο στύλος θα λειτουργεί κανονικά.*

2. *Να υπολογιστεί η απαιτούμενη διάμετρος στύλου κυκλικής διατομής από χάλυβα St37 με μήκος $l = 1{,}2\,m$, ο οποίος είναι πακτωμένος στο κάτω άκρο του και καταπονείται σε θλίψη από αξονική δύναμη $F = 160.000\,N$. Δίνονται ο συντελεστής ασφάλειας $\upsilon = 15$ και το $E = 220 \cdot 10^7 N/m^2$.*

7.7 Η μέθοδος των συντελεστών ω.

Στην παράγραφο 7.5.4 αναφέραμε ότι για την επίλυση των προβλημάτων διαστασιολογήσεως σώματος ώστε να μην εκδηλωθεί λυγισμός, χρησιμοποιείται η έννοια του συντελεστή ασφαλείας. Ωστόσο, ο συντελεστής αυτός έχει υποκειμενικό χαρακτήρα. Ο καθορισμός του γίνεται με βάση την προσωπική εκτίμηση του προσώπου που επιλύει το πρόβλημα διαστασιολογήσεως. Η εκτίμηση αυτή πολλές φορές πηγάζει απ' την εμπειρία του. Ο υποκειμενικός αυτός χαρακτήρας, ιδίως σε περιπτώσεις κατασκευών στις οποίες παρουσιάζονται πολλοί αστάθμητοι παράγοντες, καθώς και σε περιπτώσεις ελλείψεως αρκετής εμπειρίας, μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές αστοχίες.

Προκειμένου να αποφευχθεί ο υποκειμενικός χαρακτήρας με τη χρήση του συντελεστή ασφαλείας, αναπτύχθηκε η ***μέθοδος των συντελεστών ω***. Η μέθοδος αναπτύχθηκε από τους Γερμανικούς Κανονισμούς DIN και δεν βασίζεται στον ανθρώπινο παράγοντα. Η μέθοδος, όπως μαρτυρά και το όνομά της, βασίζεται στους συντελεστές ω.

7.7.1 Πεδίο εφαρμογής της μεθόδου των συντελεστών ω.

Η μέθοδος αυτή βρίσκει εφαρμογή στις δομικές κατασκευές, όπως είναι η κατασκευή γεφυρών, γερανών, οικοδομών κ.λπ. και στη μελέτη των στύλων. Ωστόσο, δεν εφαρμόζεται σε μηχανολογικές κατασκευές, δηλαδή για τον υπολογισμό εξαρτημάτων μηχανών. Έτσι, η μέθοδος αυτή δεν χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς σε πρέσσες, υδραυλικούς ανυψωτήρες, διωστήρες, γρύλους, βάκτρα, κοχλίες κ.λπ.. Επίσης, η μέθοδος των συντελεστών ω εφαρμόζεται ανεξάρτητα από την περιοχή παραμορφώσεων, δηλαδή ανεξάρτητα απ' το εάν τα σώματα εκδηλώνουν λυγισμό στην ελαστική ή στην πλαστική περιοχή. Με άλλα λόγια η μέθοδος εφαρμόζεται για οποιαδήποτε λυγηρότητα.

7.7.2 Ο συντελεστής ω.

Ως ***συντελεστής ω*** ή ***συντελεστής λυγισμού ω*** ορίζεται ο λόγος της επιτρεπόμενης τάσεως σε θλίψη $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ προς την επιτρεπόμενη τάση σε λυγισμό $\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}$:

$$\omega = \frac{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}}. \qquad (7.18)$$

Ο συντελεστής ω είναι καθαρός αριθμός και επειδή ισχύει $\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon} < \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Ο συντελεστής ω εξαρτάται από το υλικό και τη λυγηρότητα.

Ο πίνακας 7.7.1 παρουσιάζει τις ***τιμές του συντελεστή ω για διάφορα υλικά*** και για διάφορες τιμές της λυγηρότητας λ. Οι τιμές αυτές παρέχονται από τους Γερμανικούς Κανονισμούς DIN.

Μεγαλύτερη ανάλυση των τιμών του ω παρέχεται στους πίνακες του Παραρτήματος ΙΙ. Οι πίνακες αυτοί έχουν τη μορφή του πίνακα 7.7.2.

Έτσι, εάν θέλομε να βρούμε την τιμή του συντελεστή ω για τιμή λυγηρότητας $\lambda = 27$ από τον πίνακα 7.7.2, βρίσκομε τη γραμμή που αντιστοιχεί σε $\lambda = 20$ και τη στήλη που αντιστοιχεί σε $\lambda + = 7$. Το σημείο τομής της εν λόγω γραμμής με την εν λόγω στήλη, μας δίνει την τιμή του $\omega = 1{,}04$.

Στις περιπτώσεις που η τιμή της λυγηρότητας δεν περιλαμβάνεται ακριβώς στον πίνακα, τότε χρησιμοποιούμε γραμμική παρεμβολή, προκειμένου να υπολογίσομε την τιμή του ω που αντιστοιχεί στην εν λόγω τιμή της λυγηρότητας. Η γραμμική παρεμβολή εφαρμόζεται σύμφωνα με το παράδειγμα 10.

Πίνακας 7.7.1.
Τιμές του συντελεστή ω για διάφορα υλικά και διάφορες τιμές της λυγηρότητας λ.

λ	Χάλυβας St 37 St 38	Χάλυβας St 52	Ξύλο	Χυτοσίδηρος
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,00	1,00	1,07	1,01
20	1,04	1,06	1,15	1,05
30	1,08	1,11	1,25	1,11
40	1,14	1,19	1,36	1,22
50	1,21	1,28	1,50	1,39
60	1,30	1,41	1,67	1,67
70	1,41	1,58	1,87	2,21
80	1,55	1,79	2,14	3,50
90	1,71	2,05	2,50	4,43
100	1,90	2,53	3,00	5,45
110	2,11	3,06	3,73	6,63
120	2,43	3,65	4,55	7,78
130	2,85	4,28	5,48	9,25
140	3,31	4,96	6,51	10,70
150	3,80	5,70	7,65	12,30
160	4,32	6,48	8,91	14,00
170	4,88	7,32	10,29	15,80
180	5,47	8,21	11,80	17,70
190	6,10	9,14	13,43	19,70
200	6,75	10,13	15,20	21,90
210	7,45	11,17	17,11	
220	8,17	12,26	19,17	
230	8,93	13,40	21,37	
240	9,73	14,59	23,73	
250	10,55	15,83	26,25	

Πίνακας 7.7.2
Πίνακας συντελεστών λυγισμού.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02
20	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Παράδειγμα 10.

Η τιμή της λυγηρότητας μιας ράβδου από χάλυβα St 37 είναι $\lambda = 111{,}5$. Ποιος είναι ο συντελεστής ω της ράβδου;

Λύση.

Ο πίνακας 7.7.1 δεν μας δίνει απευθείας τη ζητούμενη τιμή για $\lambda = 111{,}5$. Η τιμή $\lambda = 111{,}5$ βρίσκεται μεταξύ των τιμών $\lambda_1 = 110$ και $\lambda_2 = 120$, με αντίστοιχες τιμές $\omega_1 = 2{,}11$ και $\omega_2 = 2{,}43$. Για να υπολογίσομε τη ζητούμενη τιμή πραγματοποιούμε γραμμική παρεμβολή εφαρμόζοντας την ακόλουθη σχέση:

$$\omega = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda - \lambda_1) =$$

$$= 2{,}11 + \frac{2{,}43 - 2{,}11}{120 - 110}(111{,}5 - 110) = 2{,}158.$$

7.7.3 Τα βήματα της μεθόδου των συντελεστών ω.

Η μέθοδος βασίζεται στην ακόλουθη ανισότητα:

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}. \qquad (7.19)$$

Δηλαδή, σύμφωνα με τη μέθοδο των συντελεστών ω, το θλιπτικό φορτίο F πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή ω και το γινόμενο διαιρείται με το εμβαδό A της διατομής. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει πρέπει να είναι μικρότερο απ' την επιτρεπόμενη τάση στη θλίψη.

Η ανισότητα (7.19) θυμίζει την ανισότητα

$$\sigma_{\theta\lambda} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$$

που ισχύει στην καθαρή θλίψη χωρίς λυγισμό. Δηλαδή, η μέθοδος των συντελεστών ω μετατρέπει τους υπολογισμούς του λυγισμού σε υπολογισμούς θλίψεως με τη χρήση των συντελεστών ω.

Η μέθοδος των συντελεστών ω εφαρμόζεται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1) Επιλογή των διαστάσεων της διατομής:

α) Κατ' εκτίμηση ή

β) με τη βοήθεια της σχέσεως που ισχύει για τη θλίψη:

$$A > \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}$$

και σχετική προσαύξηση.

2) Υπολογισμός του ισοδύναμου μήκους λυγισμού: $l_a = a \cdot l$.

3) Υπολογισμός της ακτίνας αδράνειας:

$$R_{I_\delta} = \sqrt{I_\delta / A}.$$

4) Υπολογισμός της λυγηρότητας: $\lambda = l_\alpha / R_{I_\delta}$.

5) Εύρεση απ' τον αντίστοιχο πίνακα του συντελεστή ω.

6) Εφαρμογή της σχέσεως:

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A}.$$

7) Έλεγχος της ανισότητας: $\sigma \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$.

Εάν η ανισότητα ισχύει, τότε έγινε επιλογή κατάλληλης διατομής.

Εάν η ανισότητα δεν ισχύει ξεκινάμε τη διαδικασία από το σημείο (1) επιλέγοντας μεγαλύτερες διαστάσεις διατομής.

Το παράδειγμα 11 παρουσιάζει την εφαρμογή των ανωτέρω βημάτων.

Παράδειγμα 11.

Ξύλινος στύλος με τετράγωνη διατομή έχει μήκος $l = 4$ m. Αν ο στύλος στηρίζεται με άρθρωση στα δύο άκρα και δέχεται αξονικό φορτίο $F = 12.000$ N, να βρεθεί με χρήση της μεθόδου των συντελεστών ω η κατάλληλη διατομή του στύλου. Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = 700\ \text{N/cm}^2$.

Λύση.

1) Αρχικά επιλέγομε την πλευρά b της διατομής A με τη βοήθεια της σχέσεως που ισχύει για τη θλίψη:

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow b^2 = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}} \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{12.000\text{N}}{700\text{N/cm}^2}} = 4{,}14\text{cm}.$$

Θεωρώντας και σχετική προσαύξηση λαμβάνομε $b = 8$ cm.

2) Υπολογίζομε το ισοδύναμο μήκος λυγισμού:

$$l_\alpha = \alpha \cdot l = 1 \cdot 4\ \text{m} = 400\ \text{cm}.$$

3) Υπολογίζομε την ακτίνα αδράνειας:

$$R_{I_\delta} = \sqrt{\frac{I_\delta}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b^4}{12}}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \sqrt{\frac{8^2\,\text{cm}^2}{12}} = 2{,}31\ \text{cm}.$$

4) Υπολογίζομε τη λυγηρότητα του στύλου:

$$\lambda = \frac{l_\alpha}{R_{I_\delta}} = \frac{400\text{cm}}{2{,}31\text{cm}} = 173{,}2.$$

5) Από τον πίνακα του Παραρτήματος II για την περίπτωση του ξύλου βρίσκομε το συντελεστή $\omega = 10{,}73$.

6) Εφαρμόζομε τη σχέση

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} = 10{,}73 \cdot \frac{12.000\ \text{N}}{8^2\,\text{cm}^2} = 2.012\ \text{N/cm}^2.$$

7) Επειδή $\sigma > \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ δεν έχομε επιλέξει κατάλληλη διατομή.

Επαναλαμβάνομε τα προηγούμενα λαμβάνοντας $b = 12$ cm. Έχομε:

$$R_{I_\delta} = \sqrt{\frac{I_\delta}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b^4}{12}}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \sqrt{\frac{12^2\,\text{cm}^2}{12}} = 3{,}46\ \text{cm},$$

$$\lambda = \frac{l_\alpha}{R_{I_\delta}} = \frac{400\ \text{cm}}{3{,}46\ \text{cm}} = 115{,}60,\ \omega = 4{,}21.$$

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} = 4{,}21 \cdot \frac{12.000\ \text{N}}{12^2\,\text{cm}^2} = 350{,}8\ \text{N/cm}^2.$$

Άρα, η επιλογή $b = 12$ cm είναι κατάλληλη.

Σχετικά με τη μέθοδο των συντελεστών ω σημειώνομε τα ακόλουθα σημεία:

1) Η μέθοδος δεν υπολογίζει συγκεκριμένες πραγματικές τάσεις. Η $\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} \quad \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$ είναι μια φανταστική τάση.

2) Η μέθοδος ελέγχει την ευστάθεια μιας θλιβόμενης ράβδου, ώστε να μην λυγίσει.

3) Ακριβώς επειδή η μέθοδος είναι μέθοδος ελέγχου, δεν μπορούμε με τη βοήθειά της να υπολογίσομε την απαιτούμενη διατομή λύνοντας τον τύπο:

$$\sigma = \omega \cdot \frac{F}{A} \quad \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}.$$

Για να υπολογίσομε απ' τη σχέση αυτή τη διατομή πρέπει να έχομε διαθέσιμο τον συντελεστή ω. Ωστόσο, ο συντελεστής ω εξαρτάται από τη λυγηρότητα και ο υπολογισμός της λυγηρότητας εξαρτάται από τις διαστάσεις της διατομής.

Άσκηση.

Ράβδος με κυκλική διατομή έχει μήκος $l = 2{,}2$ m. Αν η ράβδος στηρίζεται με πάκτωση και στα δύο άκρα και δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο $F = 20.000$ N, να βρεθεί με χρήση της μεθόδου των συντελεστών ω η κατάλληλη διατομή της ράβδου. Δίνεται η επι-

τρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = 900\,N/cm^2$.

7.8 Σύνοψη βασικών εννοιών.

Οι βασικότερες έννοιες του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται στις εξής:

1) ***Λυγισμός*** εκδηλώνεται σε ευθύγραμμη ράβδο όταν, κατά την καταπόνησή της σε θλίψη, η ράβδος εκτρέπεται από την ευθύγραμμη θέση και ισορροπεί καμπυλωμένη.

2) Κάθε ράβδος χαρακτηρίζεται από:

α) το ισοδύναμο μήκος λυγισμού: $l_\alpha = \alpha \cdot l$, όπου l είναι το μήκος της και ο συντελεστής α εξαρτάται από τον τρόπο στερεώσεως της ράβδου

β) και τη λυγηρότητά της:

$$\lambda = \frac{l_\alpha}{R_{I_\delta}},$$

όπου R_{I_δ} είναι η ακτίνα αδράνειας της διατομής της.

3) Η αξονική θλιπτική δύναμη F_κ από την οποία και μετά εμφανίζεται ο λυγισμός ονομάζεται ***κρίσιμο φορτίο λυγισμού***. Η τάση σ_κ που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ονομάζεται ***κρίσιμη τάση λυγισμού***.

4) Στην ελαστική περιοχή τα F_κ και σ_κ υπολογίζονται από τον ***τύπο του Euler***:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\delta}{l_\alpha^2} \quad \text{ή} \quad \sigma_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας και I_δ η ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου. Ο τύπος του Euler ισχύει για λυγηρότητες μεγαλύτερες ή ίσες της οριακής τιμής

$$\lambda_{o\rho} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_P}},$$

όπου σ_P το όριο αναλογίας του υλικού της ράβδου.

5) Στην πλαστική περιοχή η σ_κ υπολογίζεται από τον ***τύπο του Tetmajer***:

$$\sigma_\kappa = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_2 \cdot \lambda^2$$

όπου οι συντελεστές α_0, α_1 και α_2 προσδιορίζονται πειραματικά.

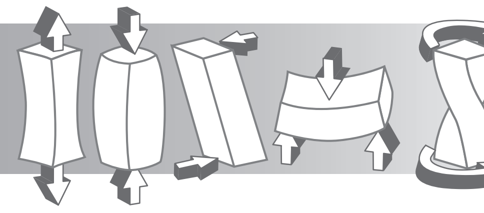
6) Η ***επιτρεπόμενη τάση λυγισμού*** υπολογίζεται ως $\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon} = \sigma_\kappa / \nu$, όπου ν ο συντελεστής ασφάλειας.

7) Για την επίλυση προβλημάτων διαστασιολογήσεως ώστε να μην εκδηλωθεί λυγισμός χρησιμοποιείται η ***μέθοδος των συντελεστών ω***. Ο συντελεστής ω ορίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}}{\sigma_{\varepsilon\pi,\lambda\upsilon}}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Σύνθετες καταπονήσεις



8.1 Εισαγωγή.

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε τις απλές καταπονήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις σύνθετες καταπονήσεις. Σύνθετη καταπόνηση έχομε όταν ένα στερεό σώμα καταπονείται ταυτόχρονα σε δύο ή περισσότερα είδη απλών καταπονήσεων.

Οι απλές καταπονήσεις που έχομε μελετήσει αφορούν στις περιπτώσεις αξονικής καταπονήσεως σωμάτων σε εφελκυσμό και θλίψη από δυνάμεις κάθετες στη διατομή τους, οι οποίες εφαρμόζονται σε σημεία που συμπίπτουν με το κέντρο βάρους της διατομής των σωμάτων.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις, κατά τις οποίες η καταπόνηση σωμάτων προέρχεται από δυνάμεις κάθετες στη διατομή τους, οι οποίες εφαρμόζονται σε σημεία που δεν συμπίπτουν με το κέντρο βάρους της διατομής των σωμάτων. Λέμε τότε ότι έχομε έκκεντρη κάθετη φόρτιση. Δηλαδή:

Έκκεντρη κάθετη φόρτιση ενός σώματος έχομε όταν εφαρμόζεται σε αυτό δύναμη κάθετη στη διατομή του, με σημείο εφαρμογής διαφορετικό από το κέντρο βάρους της.

Η απόσταση του σημείου εφαρμογής των καθέτων στη διατομή δυνάμεων από το κέντρο βάρους της διατομής ονομάζεται ***εκκεντρότητα***. Η εκκεντρότητα συμβολίζεται ως e.

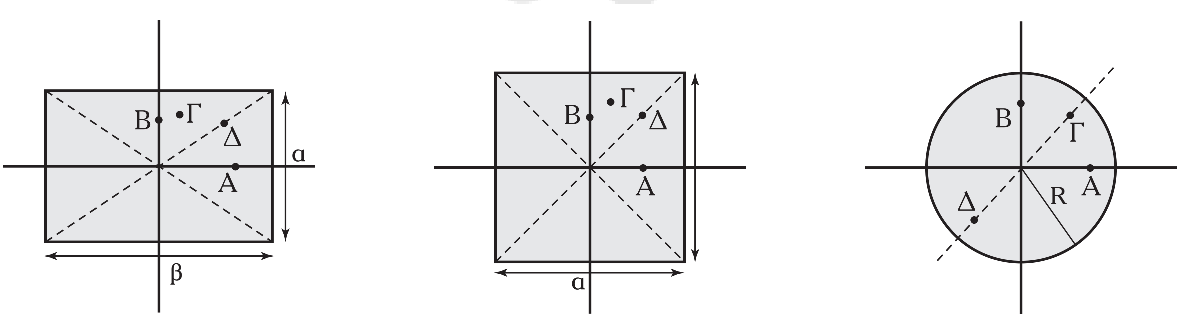
Ανάλογα με την ακριβή θέση του σημείου εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως, αυτή διακρίνεται σε:

1) ***Απλή εκκεντρότητα***, που έχομε όταν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως βρίσκεται πάνω σ' έναν από τους κύριους άξονες της διατομής. Επί πλέον, εάν ο κύριος άξονας πάνω στον οποίο βρίσκεται το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως είναι και άξονας συμμετρίας, τότε λέμε ότι έχομε ***απλή σύμμετρη εκκεντρότητα***.

2) ***Διπλή εκκεντρότητα***, που έχομε όταν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως δεν βρίσκεται σ' έναν από τους κύριους άξονες της διατομής, αλλά σε τυχαίο σημείο.

Το σχήμα 8.1 παρουσιάζει διάφορες περιπτώσεις σημείων εφαρμογής έκκεντρης κάθετης φορτίσεως. Τα σημεία Α και Β της ορθογώνιας διατομής παρουσιάζουν απλή εκκεντρότητα και μάλιστα απλή σύμμετρη εκκεντρότητα, ενώ τα σημεία Γ και Δ αυτής παρουσιάζουν διπλή εκκεντρότητα. Τα σημεία Α, Β και Δ της τετραγωνικής διατομής παρουσιάζουν απλή σύμμετρη εκκεντρότητα, ενώ το σημείο Γ διπλή εκκεντρότητα. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ της κυκλικής διατομής παρουσιάζουν απλή σύμμετρη εκκεντρότητα.

Σε πλήρη αντιστοιχία με την προαναφερθείσα κατηγοριοποίηση της εκκεντρότητας σε απλή και διπλή, οι καταπονήσεις που προκαλούνται από έκκεντρη



Σχ. 8.1
Παραδείγματα εφαρμογής σημείων έκκεντρης κάθετης φορτίσεως σε:
(α) Ορθογώνια διατομή, (β) τετραγωνική διατομή και (γ) κυκλική διατομή.

κάθετη φόρτιση κατηγοριοποιούνται στις ακόλουθες δύο κατηγορίες:

1) ***Απλές (έκκεντρες) καταπονήσεις,*** οι οποίες συμβαίνουν στις περιπτώσεις απλής εκκεντρότητας. Στην περίπτωση που έχομε απλή σύμμετρη εκκεντρότητα, οι προκαλούμενες καταπονήσεις ονομάζονται ***απλές σύμμετρες καταπονήσεις***.

2) ***Ασύμμετρες*** ή ***λοξές καταπονήσεις***, οι οποίες συμβαίνουν στις περιπτώσεις διπλής εκκεντρότητας.

Οι καταπονήσεις που προκαλούνται από έκκεντρη κάθετη φόρτιση είναι ο έκκεντρος εφελκυσμός και η έκκεντρη θλίψη σε αντιστοιχία του αξονικού εφελκυσμού και της αξονικής θλίψεως, που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Οι ανωτέρω έκκεντρες καταπονήσεις είναι σύνθετες. Απ' αυτές μας απασχολεί στη συνέχεια κυρίως η έκκεντρη θλίψη.

Ειδικότερα, στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζομε την έννοια της ισοδύναμης τάσεως και της ουδέτερης γραμμής, αναλύομε την καταπόνηση της έκκεντρης θλίψεως, περιγράφομε την έννοια του πυρήνα διατομής και μελετούμε την καταπόνηση της έκκεντρης θλίψεως σε υλικά χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό, τον λυγισμό στην έκκεντρη θλίψη, τη σύνθετη καταπόνηση της στρέψεως και της αξονικής καταπονήσεως καθώς και τη σύνθετη καταπόνηση στρέψεως και κάμψεως.

Ο πίνακας 8.1 περιλαμβάνει τα ***σύμβολα*** και τις ***μονάδες μετρήσεως*** των νέων μεγεθών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Πίνακας 8.1
Σύμβολα και μονάδες μετρήσεως μεγεθών.

Μέγεθος	***Συμβολισμός***	***Συνήθεις Μονάδες Μετρήσεως***
Ακρότατο διατμητικής τάσεως	$\tau_{\alpha\kappa\rho}$	N/cm^2
Ακρότατο ισοδύναμης τάσεως	$\sigma_{\alpha\kappa\rho}$	N/cm^2
Απόσταση αδρανούς περιοχής διατομής	h_ε	cm, mm
Απόσταση σημείου εφαρμογής φορτίου	h	cm, mm
Γωνία	φ	°, rad
Εκκεντρότητα	e	cm, mm
Ισοδύναμη τάση	$\sigma_{\iota\sigma}$	N/cm^2
Μέγιστη τάση	σ_{max}	N/cm^2

8.2 Ισοδύναμη τάση.

Οι σύνθετες καταπονήσεις αναλύονται σ' ένα σύνολο απλών καταπονήσεων. Σε καθεμία από τις καταπονήσεις αυτές αναπτύσσονται οι αντίστοιχες τάσεις, οι οποίες, ανάλογα με το είδος της απλής καταπονήσεως, μπορεί να είναι ***ορθές*** ή ***διατμητικές***. Από το σύνολο των τάσεων αυτών υπολογίζεται μία ***ισοδύναμη τάση***, η οποία τις αντιπροσωπεύει. Η τάση αυτή συμβολίζεται με $\sigma_{\iota\sigma}$. Η λειτουργία της κατασκευής είναι ασφαλής όταν η ισοδύναμη τάση είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση του υλικού της $\sigma_{\varepsilon\pi}$:

$$\sigma_{\iota\sigma} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}. \qquad (8.1)$$

Η ισοδύναμη τάση υπολογίζεται ως εξής:

1) Συνύπαρξη πολλών ορθών τάσεων.

Αν σε μία διατομή υπάρχουν πολλές ορθές τάσεις, τότε η ισοδύναμη προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμά τους, δηλαδή:

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sum_{\kappa} \sigma_{\kappa} \ . \qquad (8.2)$$

Στο παραπάνω αλγεβρικό άθροισμα, οι εφελκυστικές τάσεις λαμβάνονται θετικές και οι θλιπτικές αρνητικές.

2) Συνύπαρξη ορθών και διατμητικών τάσεων.

Αν σε μία διατομή υπάρχουν ορθές τάσεις σ και διατμητικές τ, για την εύρεση της ισοδύναμης τάσεως έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις και έχουν προταθεί αντίστοιχες σχέσεις. Οι αρχές των βασικών θεωρητικών προσεγγίσεων παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 1.14, κατά την περιγραφή των κριτηρίων αστοχίας. Από τις προταθείσες σχέσεις υπολογισμού της ισοδύναμης τάσεως αναφέρομε τις εξής:

α) ***Θεωρία της μέγιστης ορθής τάσεως***

$$\sigma_{\iota\sigma} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right). \qquad (8.3)$$

β) ***Θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσεως***

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\,. \qquad (8.4)$$

γ) ***Θεωρία μέγιστου έργου παραμορφώσεως***

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}\,. \qquad (8.5)$$

Παράδειγμα 1.

Σε σώμα αναπτύσσονται οι ακόλουθες μέγιστες τάσεις:

1) Εφελκυστική τάση $\sigma_{\varepsilon\varphi} = 8.000\ N/cm^2$.

2) Θλιπτική τάση $\sigma_{\theta\lambda} = 12.000\ N/cm^2$.

3) Διατμητική τάση $\tau = 3.000\ N/cm^2$.

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη τάση, χρησιμοποιώντας τη θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσεως. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 14.000\ N/cm^2$, το σώμα φορτίζεται κανονικά;

Λύση.

Αρχικά υπολογίζομε την ισοδύναμη ορθή τάση:

$$\sigma = \sigma_{\varepsilon\varphi} - \sigma_{\theta\lambda} = 8.000\ N/cm^2 - 12.000\ N/cm^2 = = -4.000\ N/cm^2.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσεως, η ισοδύναμη τάση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} =$$
$$= \sqrt{(-4.000\ N/cm^2)^2 + 4 \cdot (3.000\ N/cm^2)^2} =$$
$$= 7.211\ N/cm^2.$$

Επειδή η ισοδύναμη τάση είναι μικρότερη απ' την επιτρεπόμενη, συμπεραίνομε ότι το σώμα φορτίζεται κανονικά.

– Ουδέτερη γραμμή.

Όπως είδαμε ανωτέρω, η ορθή τάση σ' ένα σημείο προκύπτει ως το αλγεβρικό άθροισμα των ορθών τάσεων που αναπτύσσονται σ' αυτό. Έτσι, υπάρχουν σημεία όπου το αλγεβρικό άθροισμα των ορθών τάσεων είναι μηδέν. Τα σημεία αυτά συνήθως σχηματίζουν μια γραμμή, η οποία ονομάζεται ***ουδέτερη γραμμή***. Δηλαδή, η ουδέτερη γραμμή είναι η γραμμή που περιλαμβάνει τα σημεία, στα οποία η συνολική ορθή τάση μηδενίζεται. Εκατέρωθεν της ουδέτερης γραμμής υπάρχουν σημεία με θετική συνολική ορθή τάση (εφελκυστικές τάσεις) και σημεία με αρνητική συνολική ορθή τάση (θλιπτικές τάσεις). Με άλλα λόγια:

Ουδέτερη γραμμή διατομής ονομάζεται η γραμμή που χωρίζει τη διατομή σε περιοχή όπου αναπτύσσονται εφελκυστικές και σε περιοχή όπου αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις.

Στην περίπτωση της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως, η ουδέτερη γραμμή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Η θέση της ουδέτερης γραμμής εξαρτάται από το σημείο εφαρμογής της κάθετης δυνάμεως.

2) Το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται πάντοτε μεταξύ του σημείου που ενεργεί η κάθετη στη διατομή δύναμη και της ουδέτερης γραμμής.

3) Εξαιτίας της ανωτέρω ιδιότητας, υπάρχει μία θέση εφαρμογής της κάθετης δυνάμεως, για την οποία η ουδέτερη γραμμή εφάπτεται της διατομής ή συμπίπτει με μία πλευρά της.

4) Όταν η δύναμη τείνει να εφαρμοστεί στο κέντρο βάρους της διατομής, δηλαδή έχομε αξονική καταπόνηση, η ουδέτερη γραμμή τείνει στο άπειρο.

5) Όταν η εκκεντρότητα της κάθετης φορτίσεως τείνει στο άπειρο, έχομε καθαρή κάμψη και τότε η ουδέτερη γραμμή τείνει στο κέντρο βάρους.

Άσκηση.

Σε σώμα αναπτύσσονται οι ακόλουθες μέγιστες τάσεις:

α) Εφελκυστική τάση $\sigma_{\varepsilon\varphi} = 6.000\ N/cm^2$.

β) Θλιπτική τάση $\sigma_{\theta\lambda} = 4.500\ N/cm^2$.

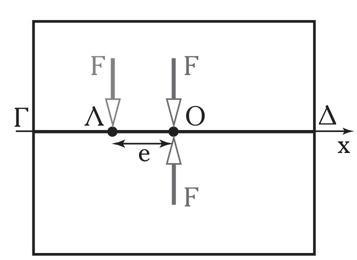
γ) Διατμητική τάση $\tau = 4.000\ N/cm^2$.

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη τάση, χρησιμοποιώντας τη θεωρία της μέγιστης ορθής τάσεως. Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 22.000\ N/cm^2$, *το σώμα φορτίζεται κανονικά;*

8.3 Έκκεντρη θλίψη.

Ας θεωρήσομε τη διατομή εμβαδού Α του σχήματος 8.3α, στο σημείο Λ της οποίας εφαρμόζεται κάθετη έκκεντρη θλιπτική δύναμη F με απλή σύμμετρη εκκεντρότητα e (το σημείο Λ βρίσκεται πάνω σε άξονα συμμετρίας του σώματος).

Προκειμένου να προσδιορίσομε τις αναπτυσσόμενες τάσεις στη διατομή, θεωρούμε ότι στο κέντρο βάρους Ο της διατομής εφαρμόζονται δύο δυνάμεις παράλληλες και ίσες με F, αλλά με αντίθετες μεταξύ τους φορές. Με τον τρόπο αυτό έχομε ένα ισοδύναμο σύστημα τριών δυνάμεων, το οποίο αποτελείται:



Σχ. 8.3α
Εφαρμογή κάθετης έκκεντρης θλιπτικής δυνάμεως F με απλή σύμμετρη εκκεντρότητα e.

Πρώτον από τη δύναμη F που ενεργεί στο κέντρο βάρους O και είναι ομόρροπη με την κάθετη έκκεντρη θλιπτική δύναμη F και ***δεύτερον*** από το ζεύγος των υπολοίπων δύο δυνάμεων F που δίνουν ροπή:

$$M = F \cdot e. \qquad (8.6)$$

Έτσι έχομε σύνθετη καταπόνηση:

1) Η δύναμη F που ενεργεί στο κέντρο βάρους O και είναι ομόρροπη με την κάθετη έκκεντρη θλιπτική δύναμη F προκαλεί ***αξονική θλίψη***. Οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις, σύμφωνα με όσα έχομε πει, είναι:

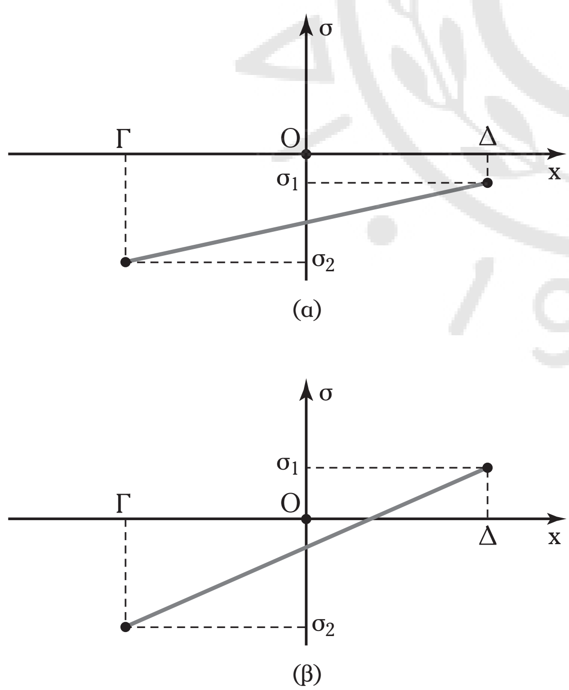
$$\sigma_{\theta\lambda} = -\frac{F}{A}\,, \qquad (8.7)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι έχομε θλίψη (αρνητικές τάσεις).

2) Το ζεύγος των υπολοίπων δύο δυνάμεων F προκαλεί ***κάμψη.*** Εάν W είναι η ροπή αντιστάσεως της διατομής, οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις, σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει και λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (5.4), κυμαίνονται μεταξύ των τιμών:

$$\sigma_{\kappa\alpha} = \pm\frac{M}{W} \Leftrightarrow \sigma_{\kappa\alpha} = \pm\frac{F \cdot e}{W}\,. \qquad (8.8)$$

Έτσι, η συνολική ορθή τάση που αναπτύσσεται



Σχ. 8.3β

Η γραφική παράσταση των συνολικών τάσεων που αναπτύσσονται σε έκκεντρη θλίψη: (α) Για $e < W/A$. (β) Για $e > W/A$.

στο σώμα προκύπτει ως το αλγεβρικό άθροισμα των δύο παραπάνω τάσεων και κυμαίνεται μεταξύ των ακολούθων τιμών:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{W}\,. \qquad (8.9)$$

Η γραφική παράσταση των αναπτυσσομένων συνολικών τάσεων παρουσιάζεται στο σχήμα 8.3β.

Από τη σχέση (8.9) διαπιστώνομε τα εξής:

1) Η μέγιστη τάση αναπτύσσεται στο μέρος όπου εφαρμόζεται η δύναμη F και είναι θλιπτική.

2) Εάν έχομε μικρή εκκεντρότητα, ώστε:

$$\frac{F}{A} > \frac{F \cdot e}{W},$$

τότε στη διατομή έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις [σχ. 8.3β(α)].

3) Υπάρχει μία τιμή εκκεντρότητας και συγκεκριμένα η:

$$e = \frac{W}{A},$$

για την οποία αρχίζουν να εμφανίζονται μηδενικές τάσεις.

4) Εάν έχομε μεγάλη εκκεντρότητα, ώστε:

$$\frac{F}{A} < \frac{F \cdot e}{W},$$

τότε στη διατομή έχομε τόσο θλιπτικές όσο και εφελκυστικές τάσεις [σχ. 8.3β(β)].

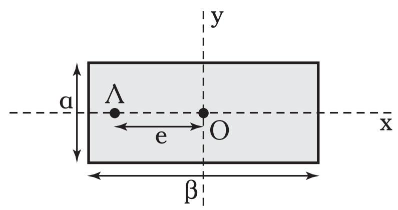
5) Η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται στην πλευρά της διατομής που είναι αντίθετη σ' αυτήν, στην οποία ενεργεί η δύναμη. Η ουδέτερη γραμμή πλησιάζει προς το κέντρο βάρους όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα. Εάν έχομε άπειρη εκκεντρότητα, τότε η ουδέτερη γραμμή περνά απ' το κέντρο βάρους και έχομε περίπτωση καθαρής κάμψεως. Εάν η εκκεντρότητα είναι μηδενική, τότε η ουδέτερη γραμμή τείνει στο άπειρο και έχομε αξονική θλίψη.

Η ανωτέρω ανάλυση εφαρμόζεται κατ' αναλογία και στην περίπτωση κατά την οποία έχομε έκκεντρη κάθετη εφελκυστική δύναμη.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η ορθογώνια διατομή του σχήματος 8.3γ με πλευρές $\alpha = 2$ cm και $\beta = 3$ cm. Στο σημείο Λ, το οποίο απέχει απόσταση e από το κέντρο βάρους O, δρα κάθετη θλιπτική δύναμη $F = 10.000$ N. Να υπολογιστούν:

1) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις.



Σχ. 8.3γ

2) Η εκκεντρότητα e για την οποία αρχίζομε να έχομε και μηδενικές τάσεις.

3) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις.

4) Τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται στην περίπτωση 2.

Λύση.

Το εμβαδόν της ορθογώνιας διατομής ισούται με: $A = \alpha \cdot \beta = 2\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$.

Η ροπή αντιστάσεώς της ως προς τον άξονα x είναι (πίν. 3.5):

$$W = \frac{1}{6}\alpha \cdot \beta^2 = \frac{1}{6} 2\,\text{cm} \cdot 3^2\,\text{cm}^2 = 3\,\text{cm}^3.$$

Τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται κατά την έκκεντρη θλίψη είναι:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{W}. \qquad (1)$$

Μηδενισμό της τάσεως αρχίζομε να έχομε όταν:

$$\frac{F}{A} = \frac{F \cdot e}{W} \Leftrightarrow e = \frac{W}{A} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{\frac{1}{6}\alpha \cdot \beta^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\beta}{6} = \frac{3\,\text{cm}}{6} = 0{,}5\,\text{cm}.$$

Έτσι:

1) Έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις όταν η εκκεντρότητα είναι μικρότερη από 0,5 cm.

2) Μηδενικές τάσεις αρχίζομε να έχομε όταν η εκκεντρότητα είναι ίση με 0,5 cm.

3) Έχομε και εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις όταν η εκκεντρότητα είναι μεγαλύτερη από 0,5 cm.

4) Στην περίπτωση που έχομε e = 0,5 cm, τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται δίνονται από τη σχέση (1):

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{W} = -\frac{10.000\,\text{N}}{6\,\text{cm}^2} \pm \frac{10.000\,\text{N} \cdot 0{,}5\,\text{cm}}{3\,\text{cm}^3},$$

δηλαδή είναι σ = 0 και σ = –3.333 N/cm^2.

Άσκηση.

Δίνεται κυκλική διατομή ακτίνας r = 3 cm. Στη διατομή δρα έκκεντρη κάθετη θλιπτική δύναμη F = 8.000 N. Να υπολογιστούν:

α) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις.

β) Η εκκεντρότητα e για την οποία αρχίζομε να έχομε και μηδενικές τάσεις.

γ) Η εκκεντρότητα e για την οποία έχομε εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις.

δ) Τα ακρότατα των τάσεων που αναπτύσσονται στις ανωτέρω περιπτώσεις.

Εάν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 22.000$ N/cm^2, το σώμα φορτίζεται κανονικά σε όλες τις περιπτώσεις;

8.4 Πυρήνας διατομής.

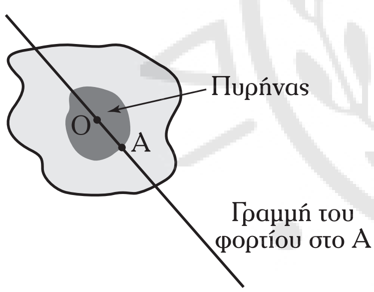
Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, η έκκεντρη κάθετη φόρτιση ενός σώματος προκαλεί τόσο εφελκυστικές, όσο και θλιπτικές τάσεις στη διατομή του καταπονούμενου σώματος. Κάτι ανάλογο είδαμε και στο Κεφάλαιο 5, στην περίπτωση της καταπονήσεως σε καθαρή κάμψη μίας αμφιέρειστης δοκού, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση εφελκυομένων και θλιβομένων ινών στη δοκό. Επομένως, για να μην αστοχεί ένα υλικό καταπονούμενο με έκκεντρη κάθετη φόρτιση πρέπει να αντέχει και σε εφελκυσμό και σε θλίψη.

Ωστόσο, υπάρχουν υλικά τα οποία, παρόλο που παρουσιάζουν μεγάλη αντοχή στην καταπόνηση σε θλίψη, εντούτοις παρουσιάζουν πολύ μικρή ή και μηδαμινή αντοχή στην καταπόνηση σε εφελκυσμό. Παραδείγματα τέτοιων υλικών είναι ο χυτοσίδηρος, το άοπλο σκυρόδεμα, το έδαφος, τα κεραμικά υλικά κ.ά..

Για να αποφεύγεται κατά την έκκεντρη κάθετη φόρτιση η αστοχία των σωμάτων που είναι φτιαγμένα από τα υλικά αυτά, πρέπει η διατομή τους να κατασκευάζεται κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να μην παρουσιάζονται κατά την καταπόνηση καθόλου εφελκυστικές τάσεις, αλλά μόνο θλιπτικές. Αυτό επιτυγχάνεται εάν η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται εκτός της περιμέτρου της διατομής του σώματος ή στη χειρότερη περίπτωση εφάπτεται σ' αυτήν. Για να ικανοποιηθεί η ανωτέρω συνθήκη για τη θέση της ουδέτερης γραμμής πρέπει η θέση του σημείου εφαρμογής της κάθετης φορτίσεως να βρίσκεται σε συγκεκριμένη περιοχή της διατομής. Ή ισοδύναμα, πρέπει να προσδιοριστεί μια περιοχή της διατομής γύρω από το κέντρο βάρους της, η οποία έχει την ιδιότητα ότι εάν στα σημεία που βρίσκονται μέσα στην περιοχή αυτή εφαρμοστεί έκκεντρη κάθετη θλιπτική φόρτιση δεν θα παρουσιαστούν εφελκυστικές τάσεις στη διατομή, αλλά μόνο θλιπτικές. Η περιοχή αυτή ονομάζεται πυρήνας της διατομής. Δηλαδή:

Πυρήνας της διατομής ενός σώματος ονομάζεται η περιοχή της διατομής γύρω απ' το κέντρο βάρους της, η οποία περιλαμβάνει όλα τα σημεία, στα οποία εάν εφαρμοστεί έκκεντρη κάθετη θλιπτική φόρτιση θα παρουσιαστούν μόνο θλιπτικές και καθόλου εφελκυστικές τάσεις στη διατομή.

Το σχήμα 8.4α παρουσιάζει παράδειγμα πυρήνα διατομής ενός σώματος. Ο πυρήνας σημειώνεται με κόκκινο χρώμα. Το σημείο Ο αποτελεί το κέντρο βάρους της διατομής. Ας θεωρήσομε ένα σημείο Α της διατομής που βρίσκεται στην περιφέρεια του πυρήνα της διατομής, στο οποίο εφαρμόζεται έκκεντρη κάθετη φόρτιση. Η ευθεία που ενώνει το σημείο Α με το κέντρο βάρους Ο ονομάζεται ***γραμμή του φορτίου***. Η απόσταση του Α από το κέντρο βάρους Ο ονομάζεται ***ακτίνα του πυρήνα*** ή ***ακτίνα αντιστάσεως της διατομής***.



Σχ. 8.4α
Παράδειγμα πυρήνα διατομής.

8.4.1 Ιδιότητες πυρήνων διατομών.

Οι πυρήνες των διατομών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Ο πυρήνας διατομής είναι πάντα ένα κυρτό σχήμα. Δεν υπάρχουν κοίλοι πυρήνες διατομής.

2) Η μορφή του πυρήνα διατομής εξαρτάται μόνο απ' το σχήμα της διατομής.

3) Εάν η διατομή ενός σώματος είναι πολυγωνική με ν πλευρές, τότε ο πυρήνας της είναι επίσης ένα πολύγωνο με ν πλευρές. Μάλιστα, σε κάθε πλευρά της πολυγωνικής διατομής αντιστοιχεί μία κορυφή του πυρήνα και σε κάθε κορυφή της πολυγωνικής διατομής αντιστοιχεί μία πλευρά του πυρήνα. Το σημείο του πυρήνα που αντιστοιχεί σε μία πλευρά της πολυγωνικής διατομής ονομάζεται ***αντίπολος της πλευράς***.

4) Εάν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως διατρέχει την περίμετρο του πυρήνα μιας διατομής, τότε η ουδέτερη γραμμή περιβάλλει τη διατομή.

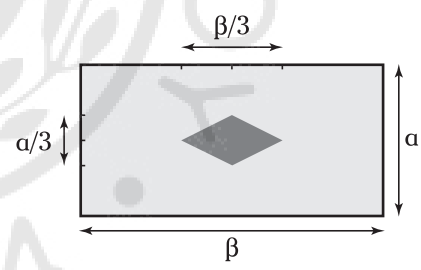
5) Εάν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης φορτίσεως περιγράφει την περίμετρο μιας διατομής, τότε η ουδέτερη γραμμή περιγράφει τον πυρήνα.

8.4.2 Πυρήνες διατομής απλών σχημάτων.

Εξετάζομε τις ακόλουθες περιπτώσεις απλών σχημάτων:

1) ***Ορθογώνιο*** (με μικρή πλευρά α και μεγάλη πλευρά β).

Προκειμένου να προσδιορίσομε την περίμετρο του πυρήνα, πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό του, να βρούμε τα σημεία εφαρμογής της έκκεντρης κάθετης δυνάμεως, ώστε οι πλευρές του ορθογωνίου να γίνουν ουδέτερη γραμμή. Αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας τη διατομής του ορθογωνίου είναι ένας ρόμβος με το ίδιο κέντρο και διαγώνιες ίσες με α/3 και β/3. Το σχήμα 8.4β παρουσιάζει την ορθογώνια διατομή με τον πυρήνα της.



Σχ. 8.4β
Ορθογώνια διατομή με τον πυρήνα της.

Όταν η μία πλευρά του ορθογωνίου μεγαλώσει πολύ, τότε ο πυρήνας του τείνει να γίνει μια λωρίδα πλάτους ίση με το ένα τρίτο της άλλης πλευράς.

2) ***Τετράγωνο*** (με πλευρά α).

Η περίπτωση του τετραγώνου αντιμετωπίζεται όπως και η περίπτωση του ορθογωνίου. Αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας του τετραγώνου είναι τετράγωνο με το ίδιο κέντρο και διαγώνιες ίσες με α/3. Το σχήμα 8.4γ παρουσιάζει την τετραγωνική διατομή με τον πυρήνα της.

3) ***Κύκλος*** (με διάμετρο D).

Αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας του κύκλου είναι κύκλος με το ίδιο κέντρο και διάμετρο ίση με D/8. Το σχήμα 8.4δ παρουσιάζει την κυκλική διατομή με τον πυρήνα της.

Τα ανωτέρω συνοψίζονται στον πίνακα 8.4.

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί ο πυρήνας τετραγωνικής διατομής με πλευρά $\alpha = 4\,\text{cm}$. Πόσο είναι το εμβαδόν του συγκριτικά με το μέγεθος της διατομής;

Λύση.

Ο πυρήνας της τετραγωνικής διατομής είναι τετράγωνο με το ίδιο κέντρο και διαγώνιες ίσες με α/3 όπως φαίνεται στο σχήμα 8.4γ. Η πλευρά α_π του πυρήνα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_\pi = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{6}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2} = \sqrt{2}\,\frac{\alpha}{6} = \sqrt{2}\,\frac{4\ \text{cm}}{6} = 0{,}94\ \text{cm}.$$

Ο λόγος του εμβαδού του πυρήνα προς το εμβαδόν της τετραγωνικής διατομής είναι:

$$\frac{E_\pi}{E} = \frac{\alpha_\pi^2}{\alpha^2} = \frac{0{,}94^2\,\text{cm}^2}{4^2\,\text{cm}^2} = 0{,}055.$$

Ασκήσεις.

1. *Να υπολογιστεί ο πυρήνας ορθογώνιας διατομής με πλευρές $\alpha = 4\,cm$ και $\beta = 6\,cm$. Πόσο είναι το εμβαδόν του συγκριτικά με το μέγεθος της διατομής;*

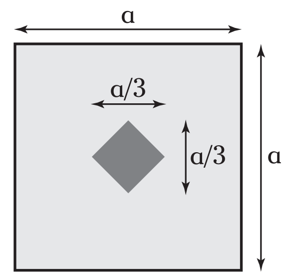
2. *Να υπολογιστεί ο πυρήνας κυκλικής διατομής με ακτίνα $R = 2\,cm$. Πόσο είναι το εμβαδόν του συγκριτικά με το μέγεθος της διατομής;*

8.5 Έκκεντρη θλίψη χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό.

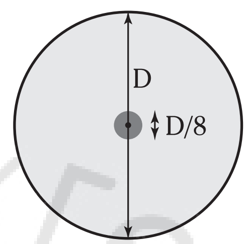
Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η έκκεντρη θλιπτική δύναμη αναγκαστικά πρέπει να δρα έξω από τον πυρήνα της διατομής και το υλικό δεν διαθέτει αντοχή σε εφελκυσμό, φροντίζομε ώστε να αναπτυχθούν θλιπτικές τάσεις σε ένα μόνο τμήμα της διατομής, ενώ το υπόλοιπό της να παραμείνει αδρανές. Η περιοχή αυτή ονομάζεται ***αδρανής περιοχή της διατομής***.

Η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή της διατομής από την αδρανή είναι ευθεία γραμμή. Ο προσδιορισμός της απαιτεί πολύπλοκους υπολογισμούς. Αποδεικνύεται ότι εάν η διατομή έχει τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας και το σημείο εφαρμογής του φορτίου βρίσκεται πάνω σ' αυτόν, τότε η γραμμή αυτή είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας της διατομής. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνομε ότι η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή απ' την αδρανή δεν είναι η ουδέτερη γραμμή της διατομής.

Η αντιμετώπιση των προβλημάτων της έκκεντρης θλίψεως υλικών χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό εξαρτάται απ' το σχήμα της διατομής. Στη συνέχεια παραθέτομε τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τον υπολογισμό της γραμμής που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή απ' την αδρανή για τις περιπτώσεις της ορθογώνιας και της κυκλικής διατομής.

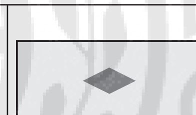
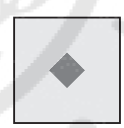
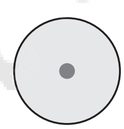


Σχ. 8.4γ
Τετραγωνική διατομή με τον πυρήνα της.



Σχ. 8.4δ
Κυκλική διατομή με τον πυρήνα της.

Πίνακας 8.4
Πυρήνες διατομής απλών σχημάτων.

Σχήμα διατομής		***Χαρακτηριστικά μεγέθη***	***Πυρήνας διατομής***
Ορθογώνιο		Η μικρή πλευρά α και η μεγάλη πλευρά β	Ρόμβος με διαγώνιες α/3 και β/3
Τετράγωνο		Η πλευρά α	Τετράγωνο με διαγώνιες α/3
Κύκλος		Η διάμετρος D	Κύκλος με διάμετρο D/8

8.5.1 Ορθογώνια διατομή.

Ας θεωρήσομε την ορθογώνια διατομή με πλευρές α και β του σχήματος 8.5α(α). Το σχήμα απεικονίζει και τον πυρήνα της διατομής. Στο σημείο Μ που βρίσκεται πάνω στον άξονα των y, σε απόσταση h από την πλευρά ΑΔ, εφαρμόζεται έκκεντρα κάθετο θλιπτικό φορτίο F.

Το σημείο Μ πρέπει να βρίσκεται εκτός του πυρήνα της ορθογώνιας διατομής. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει (η αρχή των αξόνων Ο βρίσκεται στο μέσο της πλευράς ΑΔ):

$$h < \frac{\beta}{3}. \tag{8.10}$$

Η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή από την αδρανή είναι η ευθεία ε που εικονίζεται στο σχήμα 8.5α(α). Αποδεικνύεται[1] ότι η γραμμή αυτή βρίσκεται σε απόσταση h_ε ίση με $3 \cdot h$ από την πλευρά ΑΔ, δηλαδή:

$$h_\varepsilon = 3 \cdot h. \tag{8.11}$$

Επίσης, οι αναπτυσσόμενες θλιπτικές τάσεις κατά μήκος του άξονα των y (είναι αρνητικές ως θλιπτικές) κυμαίνονται κατ' απόλυτη τιμή από μηδέν στη γραμμή ε μέχρι μία μέγιστη τιμή σ_{max} στην πλευρά ΑΔ. Ειδικότερα, η σχέση των τάσεων αυτών ως προς την απόστασή τους από την πλευρά ΑΔ είναι γραμμική. Η σχέση αυτή παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 8.5α(β) (εμφανίζονται οι απόλυτες τιμές τάσεων). Επίσης το σχήμα 8.5α(γ) παρουσιάζει την κατανομή των τάσεων κατά μήκος του τμήματος ΟΝ.

Η μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) θλιπτική τάση που αναπτύσσεται[2] παρέχεται από την ακόλουθη σχέση[3]:

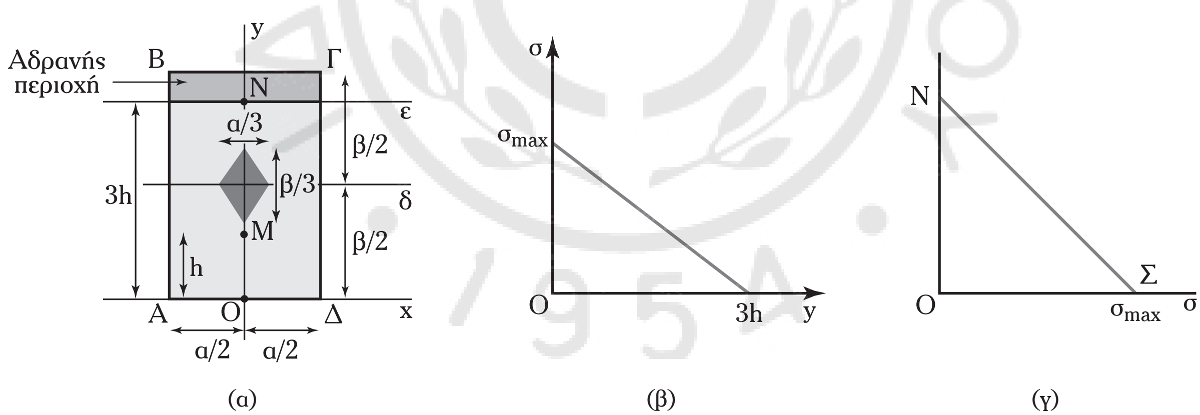
$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot \alpha \cdot h}. \tag{8.12}$$

Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$, δηλαδή πρέπει:

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot \alpha \cdot h} \quad \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}. \tag{8.13}$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί τη ***σχέση έκκεντρης θλίψεως ορθογώνιας διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό***.

Εάν το σημείο εφαρμογής του θλιπτικού φορτίου F βίσκεται πάνω στην ευθεία δ, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα των x, σε απόσταση $h < \frac{\alpha}{3}$ από το μέσο της πλευράς ΓΔ, με παρόμοιο τρόπο καταλήγομε στην ακόλουθη αντίστοιχη σχέση έκκεντρης θλίψεως:



Σχ. 8.5α

(α) Ορθογώνια διατομή με τον πυρήνα της που καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη με την εφαρμογή φορτίου στο σημείο Μ. (β) Η εξάρτηση των αναπτυσσομένων θλιπτικών τάσεων σε σχέση με την απόσταση κατά τον άξονα των y. (γ) Κατανομή των τάσεων.

---

[1] Επειδή η συνισταμένη δύναμη που προκύπτει από τις επί μέρους δυνάμεις επί των στοιχειωδών μικρών επιφανειών της ενεργού διατομής πρέπει να περνάει από το σημείο Μ αλλά και από το κέντρο βάρους του τριγωνικού διαγράμματος του σχήματος 8.5α(γ) προκύπτει ότι $ON = 3 \cdot OM$.

[2] Η εξωτερική δύναμη F πρέπει να ισορροπείται από το στερεό των τάσεων που είναι τριγωνικό πρίσμα με βάση το τρίγωνο ΟΝΣ του σχήματος 8.5α(γ) και ύψος $ΑΔ = α$. Έτσι ισχύει $F = \frac{1}{2}\ 3h\ \sigma_{max}\ \alpha$, απ' όπου προκύπτει η σχέση (8.12).

[3] Προσέξτε ότι στον παρονομαστή υπάρχει η πλευρά α που είναι η κάθετη στον άξονα συμμετρίας y, πάνω στον οποίο βρίσκεται το σημείο εφαρμογής του φορτίου.

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot \beta \cdot h} \cdot \ \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} . \qquad (8.14)$$

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στην έκκεντρη θλίψη ορθογώνιας διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που συναντήσαμε στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων. Δηλαδή, αφορούν:

1) Στον υπολογισμό της μέγιστης τάσεως λειτουργίας.

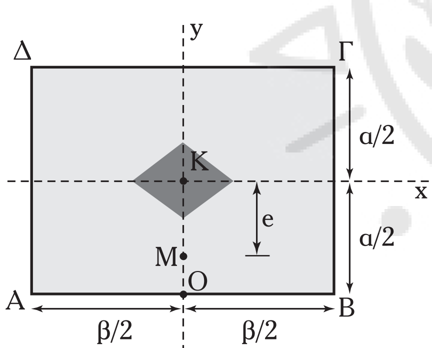
2) Στον υπολογισμό των διαστάσεων της ορθογώνιας διατομής.

3) Στον υπολογισμό του φορτίου που αντέχει η ορθογώνια διατομή

και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων.

Παράδειγμα 4.

Ράβδος από υλικό με μηδενική αντοχή σε εφελκυσμό έχει ορθογώνια διατομή διαστάσεων $\alpha = 3\,cm \times \beta = 4\,cm$. Η ράβδος καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη από δύναμη που ενεργεί σε σημείο Μ που απέχει απόσταση $e = 1\,cm$ από το κέντρο βάρους της διατομής Κ, όπως δείχνει το σχήμα 8.5β. Να προσδιοριστεί το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο, εάν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = 8.000\,N/cm^2$.



Σχ. 8.5β

Λύση.

Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας y της διατομής και απέχει απόσταση

$$h = \frac{\alpha}{2} - e = \frac{3\,cm}{2} - 1\,cm = 0{,}5\,cm$$

από το σημείο Ο. Ο πυρήνας της διατομής καλύπτει αποστάσεις μέχρι $\alpha/6 = 0{,}5\,cm$ από το κέντρο βάρους Κ πάνω στον άξονα y. Επομένως, το σημείο Μ βρίσκεται εκτός του πυρήνα της διατομής.

Το ζητούμενο φορτίο δίνεται από τη σχέση έκκεντρης θλίψεως ορθογώνιας διατομής, χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό[4]:

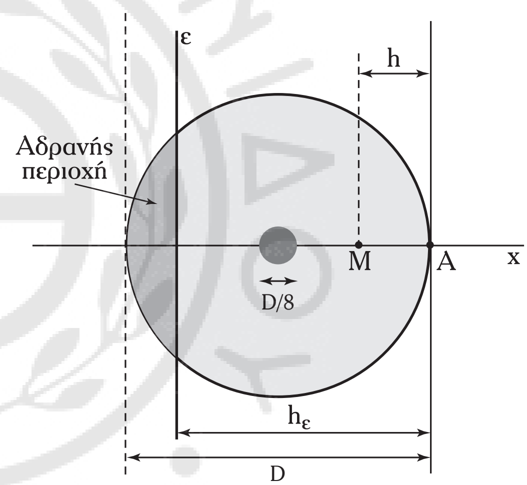
$$\frac{2 \cdot F}{3 \cdot \beta \cdot h} \le \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \Leftrightarrow F \le \frac{3}{2} \cdot \beta \cdot h \cdot \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} \Leftrightarrow$$

$$F \le \frac{3}{2} \cdot 4\,cm \cdot 0{,}5\,cm \cdot 8.000\,N/cm^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F \le 24.000\,N.$$

8.5.2 Κυκλική διατομή.

Ας θεωρήσομε την κυκλική διατομή διαμέτρου D του σχήματος 8.5γ. Το σχήμα απεικονίζει και τον πυρήνα της διατομής. Στο σημείο Μ που βρίσκεται πάνω στον άξονα των x, σε απόσταση h από το σημείο Α, εφαρμόζεται έκκεντρα κάθετο θλιπτικό φορτίο F.



Σχ. 8.5γ

Κυκλική διατομή με τον πυρήνα της που καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη με την εφαρμογή φορτίου στο σημείο Μ.

Για να υπάρχει αδρανής περιοχή, το σημείο Μ πρέπει να βρίσκεται εκτός του πυρήνα της κυκλικής διατομής. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$h < \frac{7 \cdot D}{16}. \qquad (8.15)$$

Η γραμμή που διαχωρίζει τη θλιβόμενη περιοχή από την αδρανή είναι η ευθεία ε που εικονίζεται στο σχήμα 8.5γ. Αποδεικνύεται ότι η γραμμή αυτή βρίσκεται σε απόσταση h_ε από το σημείο Α, η οποία

[4] Χρησιμοποιούμε στον παρονομαστή την πλευρά β, καθώς αυτή είναι η κάθετη στον άξονα y.

δίνεται από τη σχέση:

$$h_\varepsilon = 2{,}33 \cdot h + 2{,}33 \cdot \frac{h^3}{D^2}. \qquad (8.16)$$

Επίσης, οι αναπτυσσόμενες θλιπτικές τάσεις (είναι αρνητικές ως θλιπτικές) κυμαίνονται κατ' απόλυτη τιμή από μηδέν στη γραμμή ε μέχρι μια μέγιστη τιμή σ_{max}, η οποία παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{max} = \left(0{,}372 + 0{,}112\frac{h}{D}\right) \cdot \frac{F}{h\sqrt{h_\varepsilon \cdot h}}. \qquad (8.17)$$

Η τάση αυτή πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$, δηλαδή πρέπει:

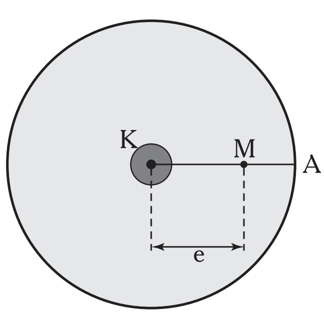
$$\sigma_{max} = \left(0{,}372 + 0{,}112\frac{h}{D}\right) \cdot \frac{F}{h\sqrt{h_\varepsilon \cdot h}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}. \qquad (8.18)$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί τη ***σχέση έκκεντρης θλίψεως κυκλικής διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό***.

Τα προβλήματα που εμφανίζονται στην έκκεντρη θλίψη κυκλικής διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό είναι αντίστοιχα των προβλημάτων που συναντήσαμε στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις περιπτώσεις των απλών καταπονήσεων.

Άσκηση.

Ράβδος από υλικό με αμελητέα αντοχή σε εφελκυσμό έχει κυκλική διατομή ακτίνας $r = 8\,cm$. Η ράβδος καταπονείται σε έκκεντρη θλίψη από δύναμη που ενεργεί στο σημείο Μ το οποίο απέχει απόσταση $e = 5\,cm$ από το κέντρο βάρους της διατομής Κ, όπως δείχνει το σχήμα 8.5δ. Να προσδιοριστεί το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο εάν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως είναι $\sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda} = 6.000\,N/cm^2$.

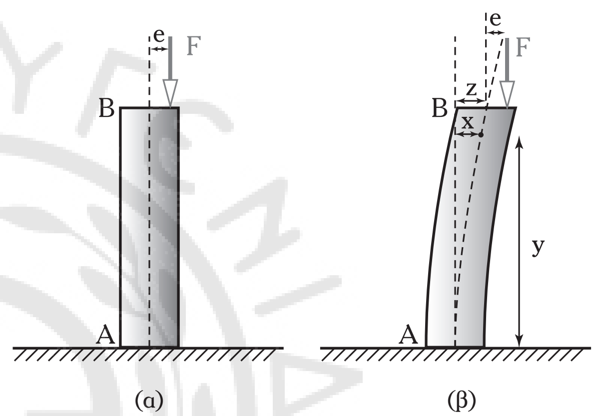


Σχ. 8.5δ

8.6 Έκκεντρη θλίψη και λυγισμός.

Στο Κεφάλαιο 7 μελετήσαμε την εκδήλωση λυγισμού σε ράβδους που καταπονούνται σε αξονική θλίψη. Στην παράγραφο αυτή μελετούμε την περίπτωση του λυγισμού ράβδων που καταπονούνται σε έκκεντρη θλίψη.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη ράβδο του σχήματος 8.6α(α) με μήκος L, η οποία στηρίζεται με πάκτωση στο κάτω άκρο της. Στο πάνω άκρο της η ράβδος δέχεται θλιπτική δύναμη F, η οποία δεν ενεργεί αξονικά αλλά έκκεντρα, με εκκεντρότητα e. Αυξάνοντας σταδιακά τη θλιπτική δύναμη F παρατηρούμε ότι η ράβδος αρχίζει να εμφανίζει καμπύλωση, δηλαδή να λυγίζει [σχ. 8.6α(β)].



Σχ. 8.6α

(α) Ράβδος στην οποία εφαρμόζεται έκκεντρη θλιπτική δύναμη. (β) Η ράβδος λυγίζει.

Η καμπύλωση της ράβδου περιγράφεται από την απόκλιση x (κατά τον οριζόντιο άξονα) κάθε διατομής της ράβδου, η οποία υπολογίζεται από τον αρχικό κατακόρυφο άξονα της ράβδου [σχ. 8.6α(β)]. Είναι εμφανές ότι η απόκλιση x δεν είναι η ίδια για όλες τις διατομές της ράβδου, αλλά εξαρτάται από τη θέση κάθε διατομής, δηλαδή από την απόσταση y κάθε διατομής από το πακτωμένο άκρο της ράβδου. Η διατομή του πακτωμένου άκρου της ράβδου που βρίσκεται στη θέση $y_A = 0$ εμφανίζει μηδενική απόκλιση x ($x_A = 0$). Η διατομή του πάνω άκρου της ράβδου που βρίσκεται στη θέση $y_B = L$ εμφανίζει τη μέγιστη απόκλιση x, την οποία ονομάζομε z ($x_B = z$). Έτσι, το σημείο εφαρμογής της θλιπτικής δυνάμεως στο σχήμα 8.6α(β) απέχει από τον αρχικό κατακόρυφο άξονα της ράβδου απόσταση $x = z + e$.

Η καμπτική ροπή Μ σε οποιαδήποτε τυχαία διατομή της ράβδου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M = F \cdot (z + e - x). \qquad (8.19)$$

Αποδεικνύεται ότι η απόκλιση x κάθε διατομής της ράβδου από τον αρχικό κατακόρυφο άξονά της παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$x=(z+e)\cdot\left[1-\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_{\delta}}}y\right)\right],\quad (8.20)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου, I_{δ} η ροπή αδράνειας της διατομής της και συν η συνάρτηση του συνημιτόνου.

Θέτοντας $y_A=0$ στην εξίσωση (8.20), για τη διατομή του πακτωμένου άκρου της ράβδου λαμβάνομε:

$$x_A=(z+e)\cdot\left[1-\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_{\delta}}}0\right)\right]=$$

$$=(z+e)\cdot(1-1)=0.$$

Από την εξίσωση (8.20) μπορούμε να υπολογίσομε την απόκλιση z του πάνω άκρου της ράβδου, θέτοντας $y_B = L$ και $x_B = z$:

$$z=(z+e)\cdot\left[1-\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_{\delta}}}L\right)\right]\Leftrightarrow z=$$

$$=z-z\cdot\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_{\delta}}}L\right)+e\cdot\left[1-\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_{\delta}}}L\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=e\cdot\frac{1-\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_{\delta}}}L\right)}{\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_{\delta}}}L\right)}.\quad (8.21)$$

Η σχέση (8.21) περιγράφει την εξάρτηση της αποκλίσεως z από τη θλιπτική δύναμη F για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας (σχ. 8.6β).

Γνωρίζομε από τη σχέση (7.6) ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για ράβδο πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο (συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού α = 2) είναι:

$$F_{\kappa}=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_{\delta}}{4\cdot L^2}.\quad (8.22)$$

Το συνημίτονο της σχέσεως (8.21) όταν η F γίνει ίση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (σχέση 8.22) είναι:

$$\text{συν}\left(\sqrt{\frac{F_{\kappa}}{E\cdot I_{\delta}}}L\right)=\text{συν}\left(\sqrt{\frac{\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_{\delta}}{4\cdot L^2}}{E\cdot I_{\delta}}}L\right)=$$

$$=\text{συν}\frac{\pi\cdot L}{2\cdot L}=\text{συν}\frac{\pi}{2}=0.$$

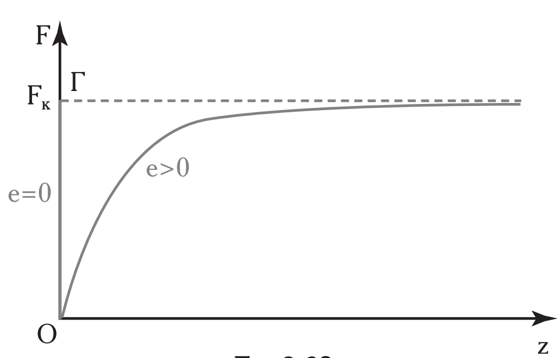
Έτσι για $F=F_{\kappa}$, η σχέση (8.21) οδηγεί σε άπειρη τιμή της αποκλίσεως z (για $e>0$). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της μηδενικής εκκεντρότητας ($e=0$). Στην περίπτωση αυτή, για $F=F_{\kappa}$, η σχέση (8.21) οδηγεί σε απροσδιόριστη τιμή της αποκλίσεως z.

Από το σχήμα 8.6β συμπεραίνομε τα εξής:

1) Η σχέση ανάμεσα στην απόκλιση z και τη θλιπτική δύναμη F δεν είναι γραμμική.

2) Για μηδενική εκκεντρότητα [δηλαδή για αξονική καταπόνηση ($e=0$)] και θλιπτική δύναμη μικρότερη από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, η γραφική παράσταση αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ (πράσινη γραμμή). Δηλαδή έχομε μηδενική απόκλιση z όσο η θλιπτική δύναμη είναι μικρότερη από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (βλ. Κεφ. 7).

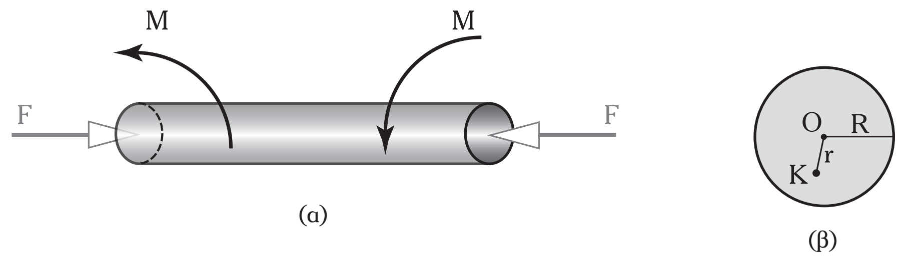
3) Για μη μηδενική εκκεντρότητα, η απόκλιση z αρχικά (για μικρές τιμές της θλιπτικής δυνάμεως) αυξάνει με αργό ρυθμό με την αύξηση της θλιπτικής δυνάμεως F. Στη συνέχεια, όσο αυξάνει η θλιπτική δύναμη τόσο πιο μεγάλη είναι η αύξηση της αποκλίσεως z. Όταν η θλιπτική δύναμη πλησιάζει την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ο ρυθμός αυξήσεως της αποκλίσεως z είναι ακόμη μεγαλύτερος και μάλιστα η απόκλιση τείνει στο άπειρο.



Σχ. 8.6β
Σχέση αποκλίσεως z και δυνάμεως F για την έκκεντρη θλίψη.

8.7 Στρέψη και αξονική καταπόνηση.

Είναι συχνή η περίπτωση μια ράβδος να καταπονείται ταυτοχρόνως και σε στρέψη και σε θλίψη ή εφελκυσμό. Το σχήμα 8.7 παρουσιάζει μια ράβδο με κυκλική διατομή ακτίνας R που καταπονείται συγχρόνως σε στρέψη από ροπή M και σε θλίψη από αξονική δύναμη F.



Σχ. 8.7
(α) Ράβδος που καταπονείται συγχρόνως σε στρέψη και θλίψη. (β) Η κυκλική διατομή της ράβδου.

Ας θεωρήσομε τώρα ένα τυχαίο σημείο Κ της διατομής της ράβδου, το οποίο απέχει απόσταση r από το κέντρο βάρους Ο. Σ' αυτό, σύμφωνα με όσα έχομε αναφέρει στα Κεφάλαια 2 και 6, αναπτύσσονται οι ακόλουθες τάσεις:

1) Διατμητική τάση τ, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{2 \cdot M \cdot r}{\pi \cdot R^4}\,. \qquad (8.23)$$

2) Ορθή τάση σ, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{F}{\pi \cdot R^2}\,. \qquad (8.24)$$

Ο συνδυασμός αυτών των δύο τάσεων παρέχει την ισοδύναμη τάση που εφαρμόζεται στο σημείο Κ.

Αποδεικνύεται ότι οι ακρότατες τιμές της ισοδύναμης τάσεως, με βάση τη θεωρία της μέγιστης ορθής τάσεως, που αναπτύσσονται στη ράβδο παρέχονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}}\right). \qquad (8.25)$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι οι ακρότατες τιμές της διατμητικής τάσεως παρουσιάζονται στα άκρα της διατομής και παρέχονται από τη σχέση:

$$\tau_{\alpha\kappa\rho} = \pm \frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}}\,. \qquad (8.26)$$

Η ράβδος φορτίζεται κανονικά εάν οι τάσεις των σχέσεων (8.25) και (8.26) είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες επιτρεπόμενες τιμές.

Παράδειγμα 5.

Σε ράβδο κυκλικής διατομής με διάμετρο $D = 4$ cm, εφαρμόζεται αξονική θλιπτική δύναμη $F = 25.000$ N συγχρόνως με ροπή στρέψεως $M = 800\, N \cdot cm$. Να υπολογιστούν:

1) Τα ακρότατα των αναπτυσσομένων τάσεων.
2) Τα ακρότατα των διατμητικών τάσεων.

Λύση.

1) Τα ακρότατα των αναπτυσσομένων τάσεων δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\alpha\kappa\rho} = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}}\right) =$$

$$= -\frac{25.000\, N}{2 \cdot \pi \cdot 2^2 cm^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 \cdot 800^2 N^2 \cdot cm^2}{25.000^2 N^2 \cdot 2^2 cm^2}}\right) =$$

$$= -1.992\, N/cm^2 \text{ και } +2\, N/cm^2.$$

2) Τα ακρότατα των διατμητικών τάσεων δίνονται από τη σχέση:

$$\tau_{\alpha\kappa\rho} = \pm \frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}} = \pm \frac{25.000 N}{2 \cdot \pi \cdot 2^2 cm^2}$$

$$\sqrt{1 + \frac{16 \cdot 800^2\, N^2 \cdot cm^2}{25.000^2\, N^2 \cdot 2^2 cm^2}} = \pm 997 \frac{N}{cm^2}\,.$$

Άσκηση.

Σε ράβδο κυκλικής διατομής με ακτίνα $r = 18$ mm, εφαρμόζεται θλιπτική δύναμη $F = 12.000$ N συγχρόνως με ροπή στρέψεως $M = 120\, N \cdot cm$. Να υπολογιστούν:
α) Τα ακρότατα των αναπτυσσομένων τάσεων.
β) Τα ακρότατα των διατμητικών τάσεων.
Εάν οι επιτρεπόμενες τάσεις είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 10.000\, N/cm^2$ και $\tau_{\varepsilon\pi} = 1.500\, N/cm^2$, φορτίζεται η ράβδος κανονικά;

8.8 Στρέψη και κάμψη.

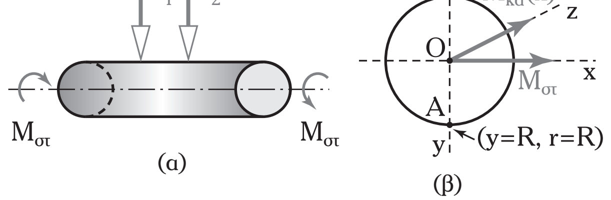
Η σύνθετη καταπόνηση της στρέψεως και της κάμψεως, η οποία ονομάζεται και ***στρεπτοκα-***

μπτική καταπόνηση, εμφανίζεται συνήθως στις ατράκτους που χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά ισχύος. Ειδικότερα, στρεπτοκαμπτική καταπόνηση υφίστανται οι έλικες των πλοίων και των αεροπλάνων, οι άξονες των μηχανών εσωτερικής καύσεως, οι άξονες των στροβιλοκινητήρων κ.ά..

Η μελέτη της στρεπτοκαμπτικής καταπονήσεως στηρίζεται στην αρχή της επαλληλίας. Μελετούμε ξεχωριστά τη στρέψη και την κάμψη και, εφόσον και οι δύο βρίσκονται στην αναλογική περιοχή, προσθέτομε τις επιμέρους τάσεις για να υπολογίσομε τις τάσεις της σύνθετης καταπονήσεως. Ειδικότερα, για τις επιμέρους καταπονήσεις της στρέψεως και της κάμψεως προσδιορίζομε τις τάσεις τους και τις διευθύνσεις αυτών και στη συνέχεια υπολογίζομε τη μέγιστη διατμητική τάση, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 8.2, και τις αντίστοιχες παραμορφώσεις. Όπως, έχομε αναπτύξει στα Κεφάλαια 5 και 6, στη στρέψη εμφανίζονται διατμητικές τάσεις, ενώ στη γενική περίπτωση της κάμψεως εμφανίζονται και ορθές και διατμητικές τάσεις. Ωστόσο, οι διατμητικές τάσεις της κάμψεως είναι συνήθως πολύ μικρότερες των διατμητικών τάσεων της στρέψεως και έτσι συνήθως δεν τις λαμβάνομε υπόψη για τον υπολογισμό της μέγιστης διατμητικής τάσεως. Για καλύτερη ακρίβεια πρέπει στους υπολογισμούς μας να λαμβάνομε υπόψη και τις διατμητικές τάσεις της κάμψεως. Οι ορθές τάσεις της κάμψεως είναι σημαντικές και διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό τη μέγιστη διατμητική τάση.

Στο σχήμα 8.8 παρουσιάζεται δοκός κυκλικής διατομής με ακτίνα R που υφίσταται στρεπτοκαμπτική καταπόνηση. Συγκεκριμένα, η ροπή $M_{στ}$ καταπονεί τη δοκό σε στρέψη και ταυτοχρόνως εγκάρσια φορτία την καταπονούν σε καθαρή κάμψη. Τα εγκάρσια φορτία έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση καμπτικής ροπής $M_{κα}(x)$ στην τυχούσα διατομή της δοκού που βρίσκεται στη θέση x από το άκρο της.

Η καμπτική ροπή $M_{κα}(x)$ έχει ως αποτέλεσμα



Σχ. 8.8
Δοκός που καταπονείται σε κάμψη και στρέψη.

την ανάπτυξη ορθών τάσεων $σ_x$ σε κάθε διατομή της δοκού. Όπως έχομε δει στο Κεφάλαιο 5, αυτές οι ορθές τάσεις εξαρτώνται από την απόσταση y κάθε σημείου της διατομής από τον ουδέτερο άξονα της z σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$σ_x(y) = \frac{M_{κα}(x)}{I_z}\,y \qquad (8.27)$$

όπου I_z είναι η ροπή αδράνειας της διατομής. Η μέγιστη τιμή των ορθών τάσεων $σ_x$ εμφανίζεται για $y = R$, δηλαδή:

$$σ_{x,max} = σ_x(R) = \frac{M_{κα}(x)}{I_z}\,R. \qquad (8.28)$$

Η ροπή στρέψεως $M_{στ}$ έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση διατμητικών τάσεων $τ_x$ σε κάθε διατομή της δοκού. Όπως έχομε δει στο Κεφάλαιο 6, αυτές οι διατμητικές τάσεις εξαρτώνται από την απόσταση r κάθε σημείου της διατομής από το κέντρο της O, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$τ_x(r) = \frac{M_{στ}}{I_O}\,r \qquad (8.29)$$

όπου I_O είναι η πολική ροπή αδράνειας της διατομής ως προς το κέντρο της O. Η μέγιστη τιμή των διατμητικών τάσεων $τ_x$ εμφανίζεται για $r = R$, δηλαδή:

$$τ_{x,max} = τ_x(R) = \frac{M_{στ}}{I_O}\,R. \qquad (8.30)$$

Ο συνδυασμός των ανωτέρω ορθών και διατμητικών τάσεων παρέχει την ισοδύναμη τάση που εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε σημείο της καταπονούμενης δοκού. Αποδεικνύεται ότι οι ακρότατες τιμές των ορθών τάσεων (γνωστές και ως κύριες τάσεις) που αναπτύσσονται στη δοκό παρέχονται από την ακόλουθη σχέση:

$$σ_{1,2} = \frac{σ_{x,max}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{σ_{x,max}}{2}\right)^2 + τ_{x,max}^2} \qquad (8.31)$$

όπου η $σ_1$ αντιστοιχεί στη μέγιστη και η $σ_2$ στην ελάχιστη ορθή τάση. Οι $σ_1$ και $σ_2$ αναπτύσσονται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνίες $φ_0$ και $90^o + φ_0$ με τον άξονα των x. Η γωνία $φ_0$ παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tan 2φ_0 = \frac{2 \cdot τ_{x,max}}{σ_{x,max}}. \qquad (8.32)$$

Οι ακρότατες τιμές των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στη δοκό παρέχονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{x.max}}{2}\right)^2 + \tau_{x,max}^2}. \qquad (8.33)$$

Οι τ_1 και τ_2 αναπτύσσονται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνίες φ_τ και $90^o + \varphi_\tau$ με τον άξονα των x. Η γωνία φ_τ παρέχεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tan 2\varphi_\tau = \frac{-\sigma_{x.max}}{2\cdot\tau_{x.max}}. \qquad (8.34)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.32) και (8.34) παρατηρούμε ότι $\tan 2\varphi_0 \cdot \tan 2\varphi_\tau = -1$. Αυτό σημαίνει ότι οι ακρότατες τιμές των διατμητικών τάσεων $\tau_{1,2}$ αναπτύσσονται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνία 45^o με τα επίπεδα των ακροτάτων τιμών των τάσεων $\sigma_{1,2}$.

Παράδειγμα 6.

Άτρακτος με ακτίνα της κυκλικής διατομής της $R = 50\,mm$ καταπονείται ταυτοχρόνως από καμπτική ροπή $M_{\kappa\alpha} = 200\,N\cdot m$ και ροπή στρέψεως $M_{\sigma\tau} = 100\,N\cdot m$. Να υπολογιστούν οι ακρότατες τιμές και η διεύθυνση των ορθών και διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στις διατομές της ατράκτου.

Λύση.

Η καμπτική ροπή $M_{\kappa\alpha}$ έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ορθών τάσεων σ_x σε κάθε διατομή της ατράκτου ίσων με:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_{\kappa\alpha}}{I_z}\,y,$$

όπου y η απόσταση κάθε σημείου της διατομής από τον ουδέτερο άξονα της z και I_z η ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής. Από τον πίνακα 3.3.1 έχομε ότι η I_z ισούται με:

$$I_z = \frac{\pi\cdot D^4}{64} = \frac{\pi\cdot R^4}{4} = \frac{\pi\cdot 50^4\,mm^4}{4} = 4,9\cdot 10^{-6}\,m^4.$$

Η μέγιστη τιμή των ορθών τάσεων σ_x εμφανίζεται για $y = R$ και είναι ίση με:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_{\kappa\alpha}}{I_z}R = \frac{200N\cdot m}{4,9\cdot 10^{-6}\,m^4}\,50\,mm =$$
$$= 2,04\cdot 10^6\,N/m^2.$$

Η ροπή στρέψεως $M_{\sigma\tau}$ έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων τ_x σε κάθε διατομή της ατράκτου ίσων με:

$$\tau_x(r) = \frac{M_{\sigma\tau}}{I_O}\,r,$$

όπου r η απόσταση κάθε σημείου της διατομής από το κέντρο της Ο και I_O η πολική ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής. Από τον πίνακα 3.6 έχομε ότι η I_O ισούται με:

$$I_O = \frac{\pi\cdot D^4}{32} = \frac{\pi\cdot R^4}{2} = \frac{\pi\cdot 50^4\,mm^4}{2} = 9,8\cdot 10^{-6}\,m^4.$$

Η μέγιστη τιμή των διατμητικών τάσεων τ_x εμφανίζεται για r=R και είναι ίση με:

$$\tau_{x,max} = \frac{M_{\sigma\tau}}{I_o}R = \frac{100\,N\cdot m}{9,8\cdot 10^{-6}\,m^4}\,50\,mm =$$
$$= 5,1\cdot 10^5\,N/m^2.$$

Οι ακρότατες τιμές των ορθών τάσεων που αναπτύσσονται στις διατομές της ατράκτου είναι:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x,max}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x,max}}{2}\right)^2 + \tau_{x,max}^2} =$$
$$= \frac{2,04\cdot 10^6 N/m^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,04\cdot 10^6 N/m^2}{2}\right)^2 + (5,1\cdot 10^5 N/m^2)^2}.$$

Έτσι η μέγιστη τιμή είναι: $\sigma_1 = 2,16\cdot 10^6\,N/m^2$ και η ελάχιστη τιμή είναι $\sigma_2 = -0,12\cdot 10^6\,N/m^2$.

Οι σ_1 και σ_2 αναπτύσσονται σε επίπεδα που η διεύθυνσή τους παρέχεται από τις γωνίες φ_0 και $90^o + \varphi_0$ με τον άξονα των x. Η φ_0 παρέχεται από τη σχέση:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\cdot\tau_{x,max}}{\sigma_{x,max}} = \frac{2\cdot 5,1\cdot 10^5 N/m^2}{2,04\cdot 10^6 N/m^2} = 0,5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\varphi_0 = 26,56^o \Rightarrow \varphi_0 = 13,28^o.$$

Οι ακρότατες τιμές των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στην άτρακτο παρέχονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{x.max}}{2}\right)^2 + \tau_{x,max}^2} =$$
$$= \pm\sqrt{\left(\frac{2,04\cdot 10^6 N/m^2}{2}\right)^2 + (5,1\cdot 10^5 N/m^2)^2}.$$

Έτσι η μέγιστη τιμή είναι $\tau_1 = 1,14\cdot 10^6 N/m^2$ και η ελάχιστη τιμή είναι $\tau_2 = -1,14\cdot 10^6 N/m^2$.

Οι τ_1 και τ_2 αναπτύσσονται σε επίπεδα που η διεύθυνσή τους παρέχεται από τις γωνίες φ_τ και $90^o + \varphi_\tau$ με τον άξονα των x. Η φ_τ παρέχεται από τη σχέση:

$$\tan 2\varphi_\tau = \frac{-\sigma_{x,max}}{2 \cdot \tau_{x,max}} = \frac{-2{,}04 \cdot 10^6 \, N/m^2}{2 \cdot 5{,}1 \cdot 10^5 \, N/m^2} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\varphi_\tau = -63{,}44^o \Rightarrow \varphi_\tau = -31{,}72^o.$$

Παρατηρούμε ότι $\varphi_0 - 45^o = \varphi_\tau$, δηλαδή οι ακρότατες τιμές των διατμητικών τάσεων $\tau_{1,2}$ αναπτύσσονται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνία 45^o με τα επίπεδα των ακροτάτων τιμών των ορθών τάσεων $\sigma_{1,2}$.

Ασκήσεις.

1. *Άτρακτος με διάμετρο της κυκλικής διατομής της $D = 80\,mm$ καταπονείται ταυτοχρόνως από καμπτική ροπή $M_{\kappa\alpha} = 3.200\,N \cdot m$ και ροπή στρέψεως $M_{\sigma\tau} = 1.800\,N \cdot m$. Να υπολογιστούν οι ακρότατες τιμές και η διεύθυνση των ορθών και διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στις διατομές της ατράκτου.*

2. *Άτρακτος με ακτίνα της κυκλικής διατομής της $R = 30\,mm$ καταπονείται ταυτοχρόνως από καμπτική ροπή $M_{\kappa\alpha} = 1.200\,N \cdot m$ και ροπή στρέψεως $M_{\sigma\tau} = 3.800\,N \cdot m$. Εάν για το υλικό της ατράκτου οι επιτρεπόμενες τάσεις είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 2{,}4 \cdot 10^6\,N/m^2$ και $\tau_{\varepsilon\pi} = 0{,}8 \cdot 10^6\,N/m^2$ να εξεταστεί εάν η άτρακτος φορτίζεται κανονικά.*

3. *Άτρακτος με κυκλική διατομή καταπονείται ταυτοχρόνως από καμπτική ροπή $M_{\kappa\alpha} = 2.500\,N \cdot m$ και ροπή στρέψεως $M_{\sigma\tau} = 3.500\,N \cdot m$. Εάν για το υλικό της ατράκτου οι επιτρεπόμενες τάσεις είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 2{,}2 \cdot 10^6\,N/m^2$ και $\tau_{\varepsilon\pi} = 0{,}9 \cdot 10^6\,N/m^2$ να υπολογιστεί η ακτίνα της κυκλικής διατομής της ατράκτου που πρέπει να χρησιμοποιηθεί.*

8.9 Σύνοψη βασικών εννοιών.

Οι βασικότερες έννοιες του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται στις εξής:

1) Η ***ισοδύναμη τάση*** $\sigma_{\iota\sigma}$ αντιπροσωπεύει το σύνολο των ορθών και διατμητικών τάσεων των συνθέτων καταπονήσεων. Υπολογίζεται με τη βοήθεια διαφόρων θεωριών:

α) Θεωρία μέγιστης ορθής τάσεως:

$$\sigma_{\iota\sigma} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right).$$

β) Θεωρία μέγιστης διατμητικής τάσεως:

$$\sigma_{\iota\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}.$$

Στην περίπτωση συνυπάρξεως πολλών ορθών τάσεων, η ισοδύναμη τάση είναι:

$$\sigma = \sum \sigma_i.$$

2) ***Έκκεντρη κάθετη φόρτιση*** έχομε όταν εφαρμόζεται δύναμη κάθετη στη διατομή ενός σώματος και το σημείο εφαρμογής της είναι διαφορετικό από το κέντρο βάρους της.

Εκκεντρότητα e ονομάζεται η απόσταση του σημείου εφαρμογής της δυνάμεως από το κέντρο βάρους της διατομής.

3) ***Απλή έκκεντρη καταπόνηση*** έχομε όταν το σημείο εφαρμογής της έκκεντρης φορτίσεως βρίσκεται πάνω σε κύριο άξονα της διατομής. Διαφορετικά έχομε ***ασύμμετρη*** ή ***λοξή καταπόνηση***.

4) Η ***(απλή) έκκεντρη θλίψη*** αποτελεί σύνθετη καταπόνηση που αναλύεται σε αξονική θλίψη και κάμψη.

Εάν η εκκεντρότητα $e < W/A$ (W και A η ροπή αντιστάσεως και το εμβαδόν της διατομής αντίστοιχα), έχομε μόνο θλιπτικές τάσεις.

Εάν $e = W/A$, εμφανίζονται και μηδενικές τάσεις.

Εάν $e > W/A$, έχομε και θλιπτικές και εφελκυστικές τάσεις.

Η ***ουδέτερη γραμμή*** της διατομής τη χωρίζει σε περιοχή με εφελκυστικές και σε περιοχή με θλιπτικές τάσεις.

5) ***Πυρήνας της διατομής*** ονομάζεται η περιοχή της γύρω από το κέντρο βάρους της που περιλαμβάνει τα σημεία στα οποία η εφαρμογή έκκεντρης κάθετης φορτίσεως έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μόνο θλιπτικών τάσεων.

Το σχήμα και οι διαστάσεις του πυρήνα εξαρτώνται από το σχήμα και τις διαστάσεις της διατομής.

6) Εάν το υλικό δεν διαθέτει αντοχή σε εφελκυσμό και το σημείο εφαρμογής της φορτίσεως πρέπει να είναι εκτός του πυρήνα της διατομής, το φορτίζομε ώστε να έχομε θλιπτικές τάσεις σε ένα μόνο τμήμα της διατομής και το υπόλοιπο να παραμένει αδρανές (αδρανής περιοχή).

7) Για ορθογώνια διατομή διαστάσεων αxβ, με β > α, και φόρτιση σε σημείο της μεσοπαραλλήλου των πλευρών β, η ***σχέση έκκεντρης θλίψεως χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό*** είναι:

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot F}{3 \cdot a \cdot h} \leq \sigma_{\varepsilon\pi,\theta\lambda}$$

όπου $h < \beta/3$ η απόσταση του σημείου εφαρμογής της φορτίσεως F από το μέσο της πλευράς α.

8) Εάν η φόρτιση F αυξηθεί, η ράβδος εμφανίζει λυγισμό. Η απόκλιση x από τον αρχικό κατακόρυφο άξονα κάθε διατομής της ράβδου που βρίσκεται στη θέση y είναι:

$$x = (z + e) \cdot \left[1 - \sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I_\delta}}\ y\right)\right]$$

όπου z η μέγιστη απόκλιση, E το μέτρο ελαστικότητας και I_δ η ροπή αδράνειας της διατομής.

9) Στη ***σύνθετη καταπόνηση στρέψεως και θλίψεως ή εφελκυσμού*** ράβδου κυκλικής διατομής ακτίνας R, η ισοδύναμη τάση παρουσιάζει τις ακρότατες τιμές:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}}\right).$$

Η διατμητική τάση έχει ακρότατες τιμές:

$$\tau_{1,2} = \pm\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{16 \cdot M^2}{F^2 \cdot R^2}}.$$

10) Στη ***στρεπτοκαμπτική καταπόνηση*** δοκού κυκλικής διατομής ακτίνας R, οι κύριες τάσεις παρουσιάζουν τις ακρότατες τιμές:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x,max}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x,max}}{2}\right)^2 + \tau_{x,max}^2},$$

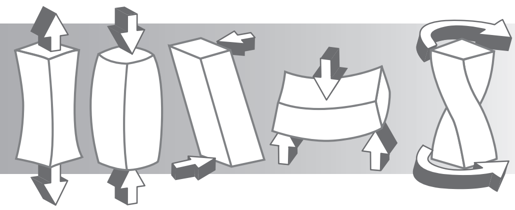
$$\sigma_{x,max} = \frac{M_{\kappa\alpha}}{I_z} R, \qquad \tau_{x,max} = \frac{M_{\sigma\tau}}{I_O} R.$$

όπου $M_{\kappa\alpha}$ και $M_{\sigma\tau}$ είναι οι ροπές κάμψεως και στρέψεως, αντίστοιχα και I_z και I_O είναι η ροπή αδρανείας και η πολική ροπή αδράνειας της διατομής ως προς το κέντρο της, αντίστοιχα.

Οι ακρότατες τιμές των διατμητικών τάσεων είναι:

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{x,max}}{2}\right)^2 + \tau_{x,max}^2}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Πίνακας αντιστοιχίσεως Ελληνικής και Αγγλικής ορολογίας

Ελληνικός όρος	***Αγγλικός όρος***
Αντοχή υλικών	Strength of Materials
Αστοχία υλικού	Material failure
Άτρακτος	Shaft
Διάτμηση	Shear
Δοκός	Beam
Δύναμη	Force
Εγκοπές	Notches
Εκκεντρότητα	Eccentricity
Ερπυσμός	Creep
Εφελκυσμός	Tensile
Θλίψη	Compression
Κάμψη	Bending
Κέντρο βάρους (Κεντροειδές)	Center of gravity (Centroid)
Κόπωση	Fatigue
Κρίσιμο φορτίο	Critical force
Λυγηρότητα	Slenderness
Λυγισμός	Buckling
Μέτρο ελαστικότητας	Modulus of elasticity
Όλκιμο υλικό	Ductile material
Όριο ελαστικότητας	Yield strength
Όριο θραύσεως	Ultimate strength
Ροπή	Moment
Ροπή αδράνειας	Moment of inertia
Σκληρόμετρο	Durometer
Σκληρότητα	Hardness
Στρέψη	Torsion
Συγκέντρωση τάσεων	Stress Concentration
Τάση	Stress
Τάση θραύσεως	Breaking strength
Τάση κοπώσεως	Fatigue stress
Ψαθυρό υλικό	Brittle material

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

Πίνακες συντελεστών λυγισμού

Α) Χάλυβας St37.

λ	**λ+**									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02
20	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10
40	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16
50	1,17	1,18	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25
60	1,26	1,27	1,29	1,30	1,31	1,32	1,34	1,35	1,36	1,38
70	1,39	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56
80	1,59	1,61	1,63	1,66	1,69	1,71	1,74	1,78	1,81	1,84
90	1,88	1,92	1,95	2,00	2,04	2,09	2,14	2,19	2,24	2,30
100	2,36	2,41	2,46	2,51	2,56	2,61	2,66	2,71	2,76	2,81
110	2,86	2,91	2,97	3,02	3,07	3,13	3,18	3,24	3,29	3,35
120	3,40	3,46	3,52	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,87	3,93
130	4,00	4,06	4,12	4,18	4,25	4,31	4,37	4,44	4,50	4,57
140	4,63	4,70	4,77	4,83	4,90	4,97	5,04	5,11	5,18	5,25
150	5,32	5,39	5,46	5,53	5,61	5,68	5,75	5,83	5,90	5,98
160	6,05	6,13	6,20	6,28	6,36	6,44	6,51	6,59	6,67	6,75
170	6,83	6,91	6,99	7,08	7,16	7,24	7,32	7,41	7,49	7,57
180	7,66	7,75	7,83	7,92	8,00	8,09	8,18	8,27	8,36	8,44
190	8,53	8,62	8,72	8,81	8,90	8,99	9,08	9,17	9,27	9,36
200	9,46	9,55	9,65	9,74	9,84	9,94	10,03	10,13	10,23	10,33
210	10,43	10,53	10,63	10,73	10,83	10,93	11,03	11,13	11,24	11,34
220	11,44	11,55	11,65	11,76	11,86	11,97	12,08	12,18	12,29	12,40
230	12,51	12,62	12,72	12,83	12,94	13,06	13,17	13,28	13,39	13,50
240	13,62	13,73	13,84	13,96	14,08	14,19	14,31	14,42	14,54	14,66
250	14,78	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Β) Χάλυβες St52 (DIN 1050).

λ	**λ+**									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03
20	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06
30	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,12
40	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21
50	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33
60	1,35	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52
70	1,54	1,57	1,59	1,62	1,65	1,68	1,71	1,74	1,78	1,81
80	1,85	1,89	1,93	1,98	2,03	2,08	2,13	2,19	2,25	2,32
90	2,39	2,47	2,55	2,64	2,74	2,84	2,96	3,08	3,22	3,38

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	3,55	3,62	3,69	3,76	3,84	3,91	3,98	4,06	4,14	4,21
110	4,29	4,37	4,45	4,53	4,61	4,69	4,77	4,85	4,94	5,02
120	5,11	5,19	5,28	5,37	5,45	5,54	5,63	5,72	5,81	5,90
130	5,99	6,09	6,18	6,27	6,37	6,46	6,56	6,66	6,75	6,85
140	6,95	7,05	7,15	7,25	7,35	7,46	7,56	7,66	7,77	7,87
150	7,98	8,09	8,19	8,30	8,41	8,52	8,63	8,74	8,85	8,97
160	9,08	9,19	9,31	9,42	9,54	9,65	9,77	9,89	10,01	10,13
170	10,25	10,37	10,49	10,61	10,75	10,86	10,98	11,11	11,24	11,36
180	11,49	11,62	11,75	11,88	12,01	12,14	12,27	12,40	12,53	12,67
190	12,80	12,94	13,07	13,21	13,35	13,48	13,62	13,76	13,90	14,04
200	14,18	14,53	14,47	14,61	14,76	14,90	15,05	15,20	15,34	15,49
210	15,64	15,79	15,94	16,09	16,24	16,39	16,55	16,70	16,85	17,01
220	17,16	17,32	17,48	17,64	17,79	17,95	18,11	18,27	18,44	18,60
230	18,76	18,92	19,09	19,25	19,42	19,58	19,75	19,92	20,09	20,26
240	20,43	20,60	20,77	20,94	21,11	21,29	21,46	21,64	21,81	21,99
250	22,16	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Γ) Χυτοσίδηρος.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05
20	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10
30	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21
40	1,22	1,24	1,25	1,27	1,29	1,31	1,32	1,34	1,36	1,37
50	1,39	1,42	1,45	1,47	1,50	1,53	1,56	1,59	1,61	1,64
60	1,67	1,72	1,78	1,83	1,89	1,94	1,99	2,05	2,10	2,16
70	2,21	2,34	2,47	2,60	2,73	2,86	2,98	3,11	3,24	3,37
80	3,50	3,59	3,69	3,78	3,87	3,97	4,06	4,15	4,24	4,34
90	4,43	4,53	4,63	4,74	4,84	4,94	5,04	5,14	5,25	5,35
100	5,45	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Δ) Ξύλο.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,06
10	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15
20	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24
30	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35
40	1,36	1,38	1,39	1,40	1,42	1,43	1,44	1,46	1,47	1,49
50	1,50	1,52	1,53	1,55	1,56	1,58	1,60	1,61	1,63	1,65
60	1,67	1,69	1,70	1,72	1,74	1,76	1,79	1,81	1,83	1,85
70	1,87	1,90	1,92	1,95	1,97	2,00	2,03	2,05	2,08	2,11
80	2,14	2,17	2,21	2,24	2,27	2,31	2,34	2,38	2,42	2,46

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	2,50	2,54	2,58	2,63	2,68	2,73	2,78	2,83	2,88	2,94
100	3,00	3,07	3,14	3,21	3,28	3,35	3,43	3,50	3,57	3,65
110	3,73	3,81	3,89	3,97	4,05	4,13	4,21	4,29	4,38	4,46
120	4,55	4,64	4,73	4,82	4,91	5,00	5,09	5,19	5,28	5,38
130	5,48	5,57	5,67	5,77	5,88	5,98	6,08	6,19	6,29	6,40
140	6,51	6,62	6,73	6,84	6,95	7,07	7,18	7,30	7,41	7,53
150	7,65	7,77	7,90	8,02	8,14	8,27	8,39	8,52	8,65	8,78
160	8,91	9,04	9,18	9,31	9,45	9,58	9,72	9,86	10,00	10,15
170	10,29	10,43	10,58	10,73	10,88	11,03	11,18	11,33	11,48	11,64
180	11,80	11,95	12,11	12,27	12,44	12,60	12,76	12,93	13,09	13,26
190	13,43	13,61	13,78	13,95	14,12	14,30	14,48	14,66	14,84	15,03
200	15,20	15,38	15,57	15,76	15,95	16,14	16,33	16,52	16,71	16,91
210	17,11	17,31	17,51	17,71	17,92	18,12	18,33	18,53	18,74	18,95
220	19,17	19,38	19,60	19,81	20,03	20,25	20,47	20,69	20,92	21,14
230	21,37	21,60	21,83	22,06	22,30	22,53	22,77	23,01	23,25	23,49
240	23,73	23,98	24,22	24,47	24,72	24,97	25,22	25,48	25,73	25,99
250	26,25	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ε) Κράματα αλουμινίου Al-Cu-Mg.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
20	1,03	1,04	1,06	1,07	1,10	1,11	1,13	1,14	1,16	1,17
30	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37
40	1,39	1,41	1,44	1,46	1,49	1,52	1,54	1,56	1,59	1,63
50	1,66	1,69	1,73	1,76	1,80	1,83	1,87	1,90	1,93	1,96
60	1,99	2,05	2,11	2,16	2,22	2,28	2,34	2,39	2,45	2,51
70	2,57	2,65	2,73	2,81	2,88	2,96	3,04	3,12	3,20	3,28
80	3,36	3,45	3,54	3,63	3,72	3,81	3,90	3,99	4,08	4,17
90	4,26	4,36	4,46	4,56	4,66	4,75	4,85	4,95	5,05	5,15
100	5,25	5,36	5,47	5,58	5,69	5,80	5,92	6,03	6,14	6,25
110	6,36	6,48	6,60	6,72	6,84	6,96	7,08	7,21	7,33	7,45
120	7,57	7,70	7,83	7,96	8,09	8,22	8,35	8,48	8,62	8,74
130	8,88	9,02	9,16	9,31	9,45	9,59	9,73	9,87	10,02	10,16
140	10,30	10,45	10,60	10,75	10,91	11,06	11,21	11,36	11,52	11,67
150	11,82	11,98	12,15	12,31	12,47	12,63	12,80	12,96	13,12	13,29
160	13,45	13,62	13,79	13,97	14,15	14,32	14,49	14,67	14,84	15,02
170	15,19	15,37	15,55	15,74	15,93	16,11	16,29	16,48	16,66	16,85
180	17,03	17,22	17,42	17,61	17,80	18,00	18,20	18,40	18,60	18,78
190	18,97	19,17	19,38	19,58	19,79	19,99	20,20	20,40	20,61	20,81
200	21,02	21,23	21,45	21,66	21,88	22,09	22,31	22,52	22,74	22,95
210	23,17	23,39	23,62	23,85	24,07	24,30	24,53	24,75	24,98	25,20
220	25,43	25,67	25,90	26,14	26,38	26,61	26,85	27,10	27,32	27,56

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
230	27,80	28,05	28,54	28,80	29,03	29,28	29,33	29,53	29,78	30,02
240	30,27	30,53	30,78	31,04	31,30	31,55	31,81	32,07	32,33	32,58
250	32,84	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ΣΤ) Κράματα αλουμινίου Al-Mg3, F18.

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02
30	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06
40	1,06	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14
50	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,22	1,22	1,23	1,25
60	1,26	1,27	1,28	1,29	1,31	1,32	1,33	1,34	1,36	1,37
70	1,38	1,39	1,40	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,51
80	1,52	1,53	1,55	1,57	1,58	1,60	1,62	1,63	1,64	1,66
90	1,68	1,70	1,72	1,74	1,76	1,77	1,79	1,81	1,83	1,85
100	1,87	1,89	1,91	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07
110	2,09	2,12	2,16	2,19	2,23	2,26	2,29	2,33	2,36	2,39
120	2,43	2,47	2,51	2,56	2,60	2,64	2,68	2,72	2,76	2,81
130	2,85	2,89	2,94	2,98	3,03	3,07	3,12	3,16	3,21	3,25
140	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,54	3,60	3,64	3,69	3,71
150	3,79	3,84	3,89	3,95	3,99	4,05	4,10	4,15	4,21	4,26
160	4,31	4,37	4,42	4,48	4,53	4,59	4,65	4,70	4,76	4,81
170	4,87	4,93	4,99	5,05	5,11	5,16	5,22	5,28	5,34	5,40
180	5,46	5,52	5,58	5,64	5,71	5,77	5,83	5,89	5,95	6,02
190	6,08	6,14	6,21	6,28	6,34	6,41	6,48	6,54	6,61	6,67
200	6,74	6,81	6,88	6,95	7,02	7,08	7,15	7,22	7,29	7,36
210	7,43	7,50	7,57	7,65	7,72	7,79	7,87	7,94	8,01	8,09
220	8,16	8,23	8,30	8,38	8,45	8,52	8,60	8,67	8,74	8,82
230	8,92	8,99	9,08	9,16	9,24	9,31	9,39	9,47	9,55	9,63
240	9,71	9,79	9,87	9,95	10,04	10,12	10,20	10,28	10,37	10,45
250	10,53	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ζ) Χάλυβας St 37 (DIN 4114).

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
30	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13
40	1,14	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,19	1,19	1,20
50	1,21	1,22	1,23	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29
60	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40
70	1,41	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,50	1,52	1,53
80	1,55	1,56	1,58	1,59	1,61	1,62	1,64	1,66	1,68	1,69

(συνεχίζεται)

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	1,71	1,73	1,74	1,76	1,78	1,80	1,82	1,84	1,86	1,88
100	1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07	2,09
110	2,11	2,14	2,16	2,18	2,21	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81
130	2,85	2,90	2,94	2,99	3,03	3,08	3,12	3,17	3,22	3,26
140	3,31	3,36	3,41	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75
150	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,06	4,11	4,16	4,22	4,27
160	4,32	4,38	4,43	4,49	4,54	4,60	4,65	4,71	4,77	4,82
170	4,88	4,94	5,00	5,05	5,11	5,17	5,23	5,29	5,35	5,41
180	5,47	5,53	5,59	5,66	5,72	5,78	5,84	5,91	5,97	6,03
190	6,10	6,16	6,23	6,29	6,36	6,42	6,49	6,55	6,62	6,69
200	6,75	6,82	6,89	6,96	7,03	7,10	7,17	7,24	7,31	7,38
210	7,45	7,52	7,59	7,66	7,73	7,81	7,88	7,95	8,03	8,10
220	8,17	8,25	8,32	8,40	8,47	8,55	8,63	8,70	8,78	8,86
230	8,93	9,01	9,09	9,17	9,25	9,33	9,41	9,49	9,57	9,65
240	9,73	9,81	9,89	9,97	10,05	10,14	10,22	10,30	10,39	10,47
250	10,55	Δεν απαιτείται παρεμβολή για ενδιάμεσες τιμές								

Η) Χάλυβας St 52 (DIN 4114).

λ	λ+									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11
30	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18
40	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27
50	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40
60	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,49	1,51	1,53	1,54	1,56
70	1,58	1,60	1,62	1,64	1,66	1,68	1,70	1,72	1,74	1,77
80	1,79	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	1,93	1,95	1,98	2,01
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,38	2,43	2,48
100	2,53	2,58	2,64	2,69	2,74	2,79	2,85	2,90	2,95	3,01
110	3,06	3,12	3,18	3,23	3,29	3,35	3,41	3,47	3,53	3,59
120	3,65	3,71	3,77	3,83	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22
130	4,28	4,35	4,41	4,48	4,55	4,62	4,69	4,75	4,82	4,89
140	4,96	5,04	5,11	5,18	5,25	5,33	5,40	5,47	5,55	5,62
150	5,70	5,78	5,85	5,93	6,01	6,09	6,16	6,24	6,32	6,40
160	6,48	6,57	6,65	6,73	6,81	6,90	6,98	7,06	7,15	7,23
170	7,32	7,41	7,49	7,58	7,67	7,76	7,85	7,94	8,03	8,12
180	8,21	8,30	8,39	8,48	8,58	8,67	8,76	8,86	8,95	9,05
190	9,14	9,24	9,34	9,44	9,53	9,63	9,73	9,83	9,93	10,03
200	10,13	10,23	10,34	10,44	10,54	10,65	10,75	10,85	10,96	11,06
210	11,17	11,28	11,38	11,49	11,60	11,71	11,82	11,93	12,04	12,15
220	12,26	12,37	12,48	12,60	12,71	12,82	12,94	13,05	13,17	13,28
230	13,40	13,52	13,63	13,75	13,87	13,99	14,11	14,23	14,35	14,47
240	14,59	14,71	14,83	14,96	15,08	15,20	15,33	15,45	15,58	15,71
250	15,83	Δεν απαιτείται παρεμβολή για ενδιάμεσες τιμές								

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ
Ερωτήσεις Κεφαλαίων

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 1.

1. *Τι ονομάζεται τάση που αναπτύσσεται σε μία επιφάνεια; Ποια είναι τα είδη των τάσεων;*
2. *Ποιος είναι ο νόμος ελαστικότητας του Hooke και ποιο το πεδίο εφαρμογής του;*
3. *Σχεδιάστε ένα τυπικό διάγραμμα εφελκυσμού-θλίψεως. Τι συμβαίνει σε καθένα από τα τμήματά του;*
4. *Ποια υλικά ονομάζονται όλκιμα και ποια ψαθυρά; Σχεδιάστε ενδεικτικά διαγράμματα εφελκυσμού των ολκίμων και των ψαθυρών υλικών. Αναφέρατε παραδείγματα ολκίμων και ψαθυρών υλικών.*
5. *Περιγράψτε τις επιδράσεις που έχει η μεταβολή της θερμοκρασίας στις διαστάσεις μιας ράβδου, καθώς και στα όρια αντοχής της. Εξαρτώνται οι επιδράσεις αυτές από το υλικό της ράβδου;*
6. *Τι είναι ο ερπυσμός ενός υλικού; Ποια μεγέθη χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της ιδιότητας του ερπυσμού των υλικών;*
7. *Τι ονομάζεται κόπωση ενός υλικού; Τι μας δείχνει το διάγραμμα κοπώσεως;*
8. *Τι ονομάζεται συγκέντρωση τάσεων; Πώς ορίζεται ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων;*
9. *Ποιος είναι ο ορισμός της επιφανειακής πιέσεως και ποιες οι μονάδες μετρήσεώς της; Γιατί χρησιμοποιούμε μεγάλες επιφάνειες επαφής μεταξύ δύο σωμάτων, προκειμένου να μεταβιβαστούν μεγάλες θλιπτικές δυνάμεις απ' το ένα στο άλλο;*
10. *Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι καταπονήσεις; Αναφέρατε παραδείγματα απλών καταπονήσεων.*
11. *Πότε λέμε ότι ένα υλικό αστοχεί; Τι είναι η επιτρεπόμενη τάση και τι ο συντελεστής ασφαλείας;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 2.

1. *Πότε λέμε ότι ένα σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό; Ποιες είναι οι παραμορφώσεις των σωμάτων που καταπονούνται σε εφελκυσμό και πώς υπολογίζονται;*
2. *Διατυπώστε τη σχέση εφελκυσμού και εξηγήστε τα μεγέθη που αυτή περιλαμβάνει. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να τηρούνται, ώστε να ισχύει η σχέση εφελκυσμού;*
3. *Πότε λέμε ότι ένα σώμα καταπονείται σε θλίψη; Ποιες είναι οι παραμορφώσεις των σωμάτων που καταπονούνται σε θλίψη και πώς υπολογίζονται;*
4. *Διατυπώστε τη σχέση θλίψεως και εξηγήστε τα μεγέθη που αυτή περιλαμβάνει. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να τηρούνται, ώστε να ισχύει η σχέση θλίψεως;*
5. *Τι είδους τάσεις εμφανίζονται σε κυλινδρικά δοχεία πιέσεως με λεπτά τοιχώματα που περιέχουν ρευστό; Από ποιους παράγοντες εξαρτώνται οι τάσεις αυτές;*
6. *Ποιες τάσεις αναπτύσσονται σ' ένα σώμα όταν παρεμποδίζεται η ελεύθερη μεταβολή του μήκους του κατά τις θερμοκρασιακές μεταβολές; Από ποιους παράγοντες εξαρτώνται οι τάσεις αυτές;*
7. *Πότε λέμε ότι ένα σώμα καταπονείται σε διάτμηση; Ποιες είναι οι παραμορφώσεις των σωμάτων που καταπονούνται σε διάτμηση και πώς υπολογίζονται;*
8. *Διατυπώστε τη σχέση διατμήσεως και εξηγήστε τα μεγέθη που αυτή περιλαμβάνει. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να τηρούνται, ώστε να ισχύει η σχέση διατμήσεως;*
9. *Ποιο φαινόμενο ονομάζεται σύνθλιψη άντυγας οπής και από ποια σχέση περιγράφεται;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 3.

1. *Ποιες είναι οι ιδιότητες της διατομής μιας δοκού;*
2. *Ποιο είναι το Θεώρημα του Steiner και ποια η σημασία του για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας επιφανειών;*
3. *Πώς ορίζονται η ακτίνα αδράνειας και η ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας; Ποιες είναι οι μονάδες μετρήσεως καθενός από τα δύο μεγέθη;*
4. *Πώς ορίζονται η πολική ροπή αδράνειας και η πολική ροπή αντιστάσεως μιας επιφάνειας; Ποιες είναι οι μονάδες μετρήσεως καθενός από τα δύο μεγέθη;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 4.

1. *Σε ποιες βασικές κατηγορίες διακρίνονται οι δοκοί με κριτήριο τον τρόπο στηρίξεώς τους; Σχεδιάστε χαρακτηριστικό σχήμα για καθεμία απ' τις κατηγορίες αυτές.*

2. *Ποιες είναι οι δύο κατηγορίες, στις οποίες ταξινομούνται οι εσωτερικές δυνάμεις μιας δοκού και σε τι διαφέρουν μεταξύ τους; Τι απεικονίζουν το Διάγραμμα Ορθών Δυνάμεων και το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων;*

3. *Τι απεικονίζει το Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών και πώς σχεδιάζεται; Ποια η σχέση μεταξύ του Διαγράμματος Τεμνουσών Δυνάμεων και του Διαγράμματος Καμπτικών Ροπών;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 5.

1. *Πότε ένα σώμα καταπονείται σε κάμψη;*

2. *Δώστε τη σχέση κάμψεως στην περίπτωση της συμμετρικής καθαρής κάμψεως και εξηγήστε τα μεγέθη που περιλαμβάνει. Τι εκφράζει η σχέση κάμψεως;*

3. *Τι ονομάζομε ουδέτερο επίπεδο, τι ουδέτερη γραμμή και τι ελαστική γραμμή ενός σώματος που καταπονείται σε κάμψη;*

4. *Ποιες είναι οι παραμορφώσεις που εμφανίζονται στη συμμετρική καθαρή κάμψη;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 6.

1. *Πότε ένα σώμα καταπονείται σε στρέψη; Αναφέρατε τουλάχιστον δύο παραδείγματα σωμάτων που καταπονούνται σε στρέψη.*

2. *Ποια είναι η σχέση στρέψεως για δοκό κυκλικής διατομής και ποια τα μεγέθη που η σχέση περιλαμβάνει;*

3. *Ποια είναι η σχέση που παρέχει τη στροφή δοκού κυκλικής διατομής σε σχέση με την εξωτερική ροπή στρέψεως;*

4. *Ποια είναι η σχέση στρέψεως για κοιλοδοκό και ποια τα μεγέθη που η σχέση περιλαμβάνει;*

5. *Πώς υπολογίζομε τη διάμετρο ατράκτου (διαστασιολόγηση) κυκλικής διατομής, ώστε να είναι σε θέση να μεταφέρει συγκεκριμένη ισχύ με συγκεκριμένο αριθμό στροφών ανά λεπτό;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 7.

1. *Πότε λέμε ότι μία ράβδος εκδηλώνει λυγισμό; Αναφέρατε παραδείγματα σωμάτων που εκδηλώνουν λυγισμό.*

2. *Τι ονομάζομε κρίσιμο φορτίο λυγισμού και από ποιους παράγοντες εξαρτάται;*

3. *Ποιος είναι ο τύπος του Euler στις δύο μορφές του και ποιες οι παραδοχές, στις οποίες στηρίζεται η εξαγωγή τους;*

4. *Τι είναι η οριακή λυγηρότητα και τι η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού; Για ποιο λόγο τις χρησιμοποιούμε;*

5. *Ποια είναι τα βήματα της μεθόδου των συντελεστών ω;*

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 8.

1. *Πότε έχομε έκκεντρη κάθετη φόρτιση και τι ονομάζομε εκκεντρότητα;*

2. *Τι ονομάζομε ισοδύναμη τάση; Πώς υπολογίζεται η ισοδύναμη τάση στην περίπτωση που έχομε μόνο ορθές τάσεις;*

3. *Πώς μπορεί να φορτιστεί με έκκεντρη θλίψη, ώστε να μην υποστεί θραύση, ράβδος με ορθογώνια διατομή από υλικό που έχει μηδενική αντοχή σε εφελκυσμό; Διατυπώστε τη σχέση έκκεντρης θλίψεως ορθογώνιας διατομής χωρίς αντοχή σε εφελκυσμό.*

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Τ

Φ

Ψ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδριανόπουλος Ν., Κυριαζή Ε. και Λιακόπουλος Κ., *Πειραματική Αντοχή των Υλικών*, Εκδόσεις Συμεών, 1991.

Βελαώρας Ι., *Αντοχή Υλικών*, Εκδόσεις Ίων, 2003.

Βουθούνης Π., *Τεχνική Μηχανική – Αντοχή των Υλικών*, 2010.

Γδουτός Ε., *Μηχανική του Στερεού Σώματος Ι και ΙΙ*, Εκδόσεις Κυριακίδη, 1979.

Γκαρούτσος Γ., *Μηχανική Παραμορφώσιμου Στερεού ΙΙ: Αντοχή Υλικών*, Εκδόσεις SPIN, 2008.

Κερμανίδης Θ., *Αντοχή Υλικών*, Εκδόσεις Κυριακίδη, 1990.

Κοϊμτζής Μ., *Αντοχή των Υλικών Α′*, University Studio Press, 2001.

Κωβαίος Μ., «*Αντοχή των Υλικών*, Αθήνα, 1977.

Λόκκας Φ., *Εγχειρίδιο Αρχών και Μεθόδων στην Αντοχή Υλικών*, ΤΕΙ Λάρισας, 2003.

Παπαμίχος Ε., *Αντοχή των υλικών*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2006.

Πανταλέων Ε., *Δομομηχανική ΙΙ – Αντοχή Υλικών*, Έκδοση Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, 2001.

Σωτηροπούλου Α. και Πασσά Δ., *Αντοχή Υλικών – Εργαστηριακές Εφαρμογές*, Εκδόσεις Ίων, 2003.

Χαρώνης Π., *Αντοχή των Υλικών*, Σύγχρονη Εκδοτική, 2002.

Beer F. and Johnston R., *Mechanics for Engineers – Statics*, McGraw-Hill Book Company, 1987.

Beer F. and Johnston R., *Mechanics for Engineers – Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, 1987.

Feodosyev V., *Strength of Materials*, MIR Publishers, 1976.

Gere J.and Timosenko S., *Mechanics of Materials*, PWS-KEN Publishing Company, 1990.

Nash W., *Strength of Materials*, Schaum's outline series, Εκδόσεις ΕΣΠΙ, 1988.

Timoshenko S. and Gere J., *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold Co., 1973.

Urry S. and Turner P. *Strength of Materials and Mechanics of Solids*, Pitman Publishing, 1974.

Ο Λέοναρντ Όιλερ (1707 – 1783)
πρωτοπόρος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός.

Επίδειξη των διαφορετικών τρόπων λυγισμού κατά «Όιλερ»
ανάλογα με τον τρόπο στηρίξεως της δοκού.

ISBN 978-960-337-097-0