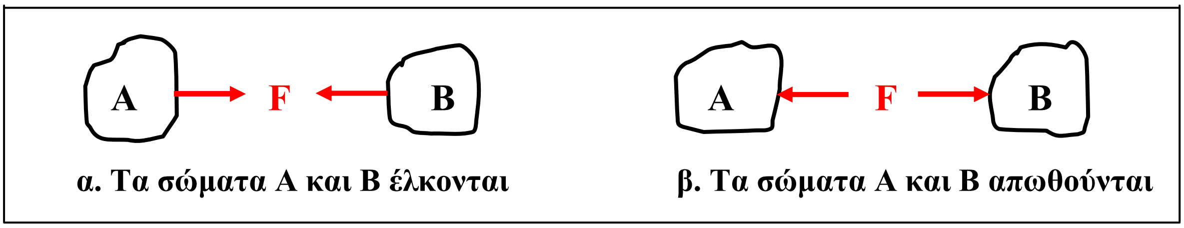
1.Δύναμη

1.1. Ορισμοί

Δύναμη είναι το αίτιο που προκαλεί μεταβολή στην κινητική κατάσταση ενός σώματος ή την παραμόρφωσή του.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Νεύτωνα (**αξίωμα δράσης – αντίδρασης**) για να εμφανιστεί δύναμη είναι απαραίτητο να υπάρχουν **δύο σώματα** **Α** και **Β,** που το καθένα ασκεί στο άλλο τη δύναμη αυτή.
Έτσι αν το σώμα **Α** έλκει (τραβάει) το σώμα **Β** τότε και το σώμα **Β** έλκει (τραβάει) το σώμα **Α** με την ίδια δύναμη (σχήμα 1α). Αν το σώμα **Α** απωθεί (σπρώχνει) το σώμα **Β**, τότε και το σώμα **Β** απωθεί (σπρώχνει) το σώμα **Α** με την ίδια δύναμη (σχήμα 1β).



Σχήμα 1. Η δύναμη ασκείται πάντα μεταξύ δύο σωμάτων

Όταν εξετάζουμε ένα σώμα η δύναμη που αυτό ασκεί σε κάποιο άλλο σώμα λέγεται **δράση**, ενώ η δύναμη που δέχεται από κάποιο άλλο σώμα λέγεται **αντίδραση**.

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο σωμάτων μπορεί να οφείλεται :
α. Στην επαφή των δύο σωμάτων **(δυνάμεις επαφής).**
β. Στην ύπαρξη κάποιου δυναμικού πεδίου **(πεδιακές δυνάμεις ή δυνάμεις πεδίου).**
Στη φύση υπάρχουν τρία είδη δυναμικών πεδίων :

1. Τα **βαρυτικά** πεδία (ή πεδία βαρύτητας)
2. Τα **ηλεκτρικά** πεδία
3. Τα **μαγνητικά** πεδία

Στα βαρυτικά πεδία οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο σωμάτων είναι πάντα ελκτικές. (**Νόμος Παγκόσμιας Έλξης**).
Στα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο σωμάτων μπορεί να είναι ελκτικές (**τα ετερώνυμα έλκονται**) ή απωστικές (**τα ομώνυμα απωθούνται**).

Η δύναμη είναι **διανυσματικό** μέγεθος. Τα χαρακτηριστικά της είναι (σχ. 2) :

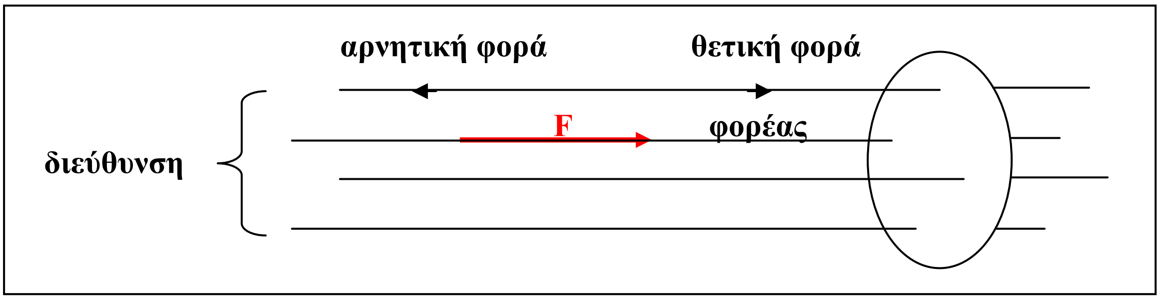
Μέτρο : είναι το μέγεθος της δύναμης και εκφράζεται με το μήκος του διανύσματος.

Φορέας : είναι η ευθεία στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα της δύναμης.

Διεύθυνση : είναι το σύνολο των παραλλήλων ευθειών προς τον φορέα της δύναμης. Δυνάμεις που έχουν την ίδια διεύθυνση (παράλληλες) ονομάζονται και **συγγραμμικές.**

Φορά : Σε κάθε διεύθυνση ορίζεται αυθαίρετα η **θετική** και η **αρνητική** φορά.

Η διεύθυνση και φορά της δύναμης ορίζουν την **κατεύθυνση** της δύναμης.
Η κατεύθυνση χαρακτηρίζεται και αυτή ως **θετική** ή **αρνητική** ανάλογα με τη φορά.



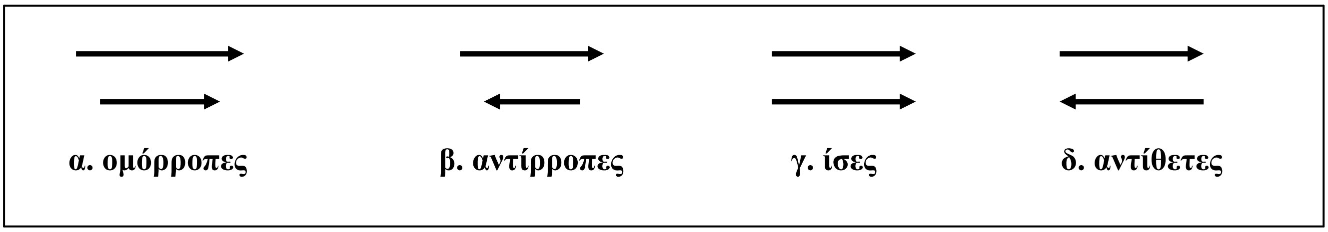
Σχήμα 2. Χαρακτηριστικά δύναμης

Ομόρροπες ονομάζονται οι δυνάμεις που έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (σχ. 3α).

Αντίρροπες ονομάζονται οι δυνάμεις που έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (σχ. 3β).

Ίσες ονομάζονται δύο **ομόρροπες** δυνάμεις με **ίσα μέτρα** (σχ. 3γ).

Αντίθετες ονομάζονται δύο **αντίρροπες** δυνάμεις με **ίσα μέτρα** (σχ. 3δ).



Σχήμα 3. Συγκριτικές σχέσεις δυνάμεων

Μονάδα δύναμης στο διεθνές σύστημα (I.S.) είναι το **1 N (Newton)** και ορίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : **F = mγ** όπου **m η μάζα** του σώματος (σε **Kg**) και **γ η επιτάχυνση** που αποκτά (σε **m/s^2**) κάτω από την επίδραση της **δύναμης F**.
Έτσι : **1 Newton** είναι η δύναμη που όταν ασκηθεί σε σώμα μάζας **1 Kg** του προκαλεί επιτάχυνση ίση με **1 m/s^2. (1N = 1Kg x 1m/s^2).**
Στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται, ανάλογα με το μέγεθος της δύναμης, πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια του **N : 1 KN=10^3N , 1 MN=10^6N , 1 DN=10N, 1dN=10^{-1}N ,** κ.λ.π.

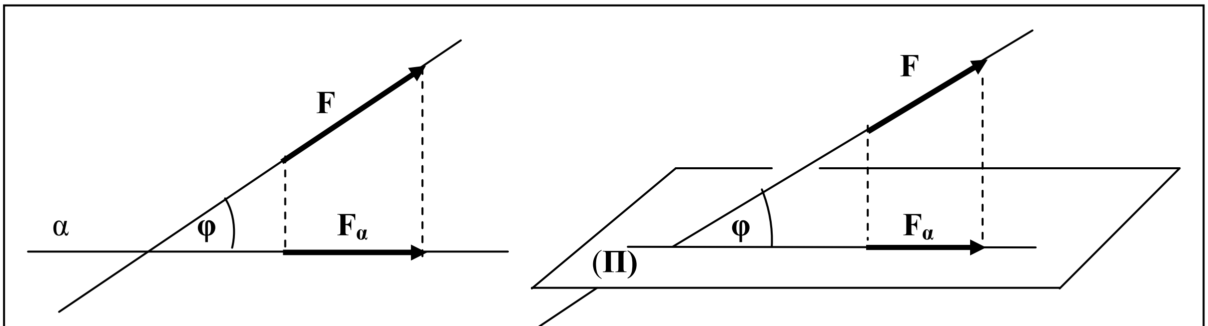
Συνισταμένη δυνάμεων ονομάζεται η δύναμη η οποία επιφέρει τα ίδια **κινηματικά** αποτελέσματα με αυτές (οι οποίες λέγονται **συνιστώσες**).
Όταν μελετάμε την κινητική κατάσταση ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων μπορούμε να αντικαθιστούμε τις συνιστώσες με την συνισταμένη τους ή το αντίστροφο.

<u>**Προσοχή :** Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε δυνάμεις με τη συνισταμένη τους ή το αντίστροφο όταν μελετάμε την αντοχή ή τις παραμορφώσεις ενός σώματος, γιατί το σώμα</u>

ανταποκρίνεται **διαφορετικά** στις δυνάμεις απ' ότι στη συνισταμένη τους από άποψη αντοχής ή παραμορφώσεων.

1.2. Προβολή δύναμης σε ευθεία ή επίπεδο

Το μέτρο της προβολής μιας δύναμης **F** σε μια ευθεία **α** του επιπέδου της (σχ. 4α) ή σε ένα επίπεδο **Π** (σχ.4β) δίνεται από τη σχέση (1) :



α. Προβολή δύναμης σε ευθεία α **β. Προβολή δύναμης σε επίπεδο Π**

Σχήμα 4. Προβολή δύναμης F σε ευθεία του επιπέδου της ή σε επίπεδο Π

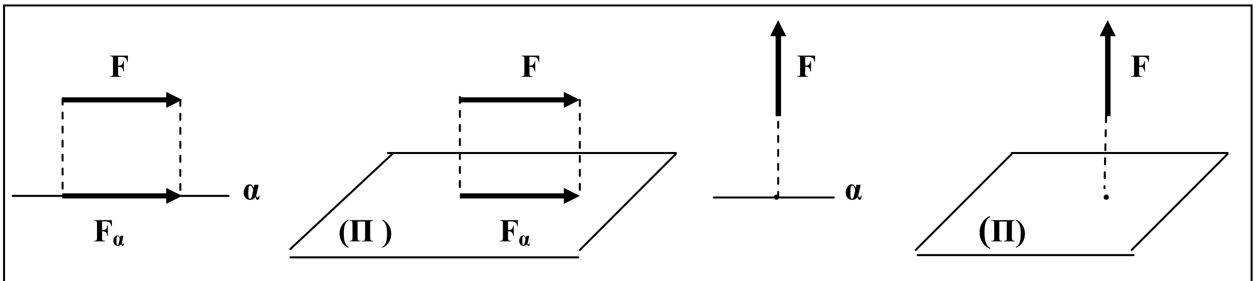
$$\boxed{F_\alpha = F\sigma\upsilon\nu\phi} \quad \textbf{(1)}$$

όπου **φ** η γωνία που σχηματίζει ο φορέας της **F** με την ευθεία **α** ή το επίπεδο **Π**.

Ειδικές περιπτώσεις :

α. Αν η δύναμη **F** είναι παράλληλη με την ευθεία **α** ή το επίπεδο **Π** (σχ. 5α,5β), τότε **φ=0°**, οπότε **συν0°=1,** άρα από την σχέση (1) προκύπτει $\mathbf{F_\alpha = F}$

β. Αν η δύναμη **F** είναι κάθετη στην ευθεία **α** ή στο επίπεδο **Π** (σχ. 5γ,5δ). τότε **φ =90°**, οπότε **συν90°=0**, άρα από τη σχέση (1) προκύπτει $\mathbf{F_\alpha = 0}$.



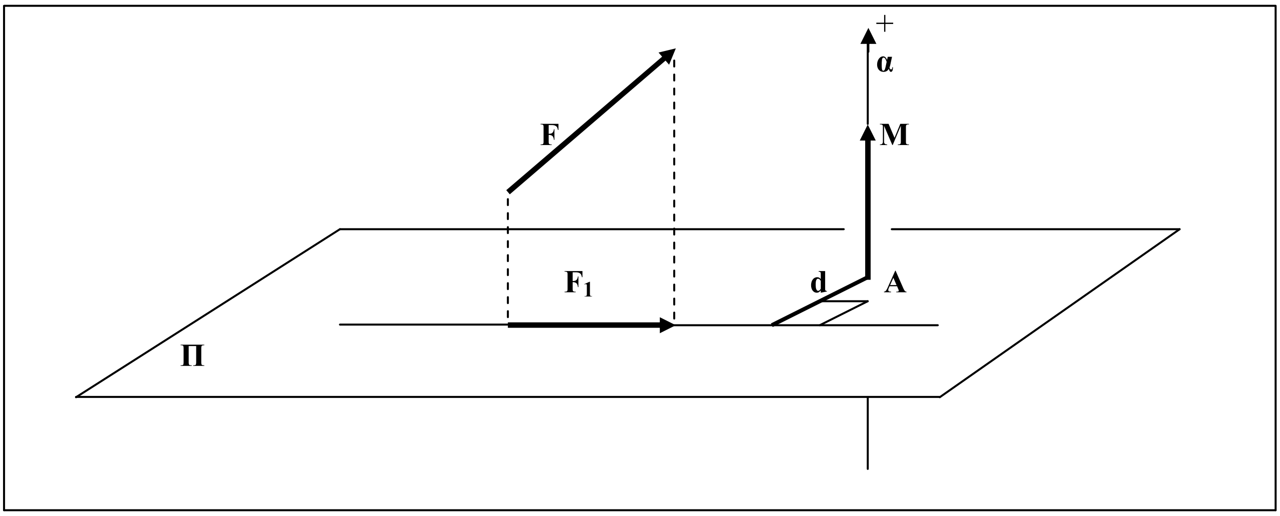
α. F//α ⟶ F=F_α **β. F//Π ⟶ F=F_α** **γ. F ⊥ α ⟶ F_α=0** **δ. F⊥ Π ⟶ F_α=0**

Σχήμα 5. Ειδικές περιπτώσεις προβολής δύναμης

2. Ροπή δύναμης ως προς άξονα

2.1 Ορισμοί

Έστω μια δύναμη **F** και μια ευθεία **α** με καθορισμένη τη θετική και αρνητική φορά (μια τέτοια ευθεία την ονομάζουμε **άξονα**).
Θεωρούμε επίπεδο **Π** κάθετο στον άξονα **α** σε ένα σημείο του **Α.**
Έστω $\mathbf{F_1}$ ορθή προβολή της δύναμης **F** στο επίπεδο **Π** και **d** η απόσταση του σημείου **Α** από τον φορέα της $\mathbf{F_1}$ (σχ. 6).



Σχήμα 6. Ροπή δύναμης ως προς άξονα

Ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα α ορίζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει :

Μέτρο : $\boxed{\mathbf{M = F_1 \times d}}$ **(2)**

(Μονάδες ροπής : <u>1 Nm</u>, 1 KNm, 1 Ncm, 1 Nmm, 1 KNcm, 1 KNmm).

Φορέα τον άξονα **α**

Φορά που ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού :

« Πιάνουμε τον άξονα α με το δεξί μας χέρι έτσι ώστε η φορά των δακτύλων από τον καρπό προς τα νύχια να συμπίπτει με την φορά περιστροφής της δύναμης F_1 γύρω από το σημείο Α. Ο αντίχειρας μας δίνει τη φορά του διανύσματος της ροπής ».

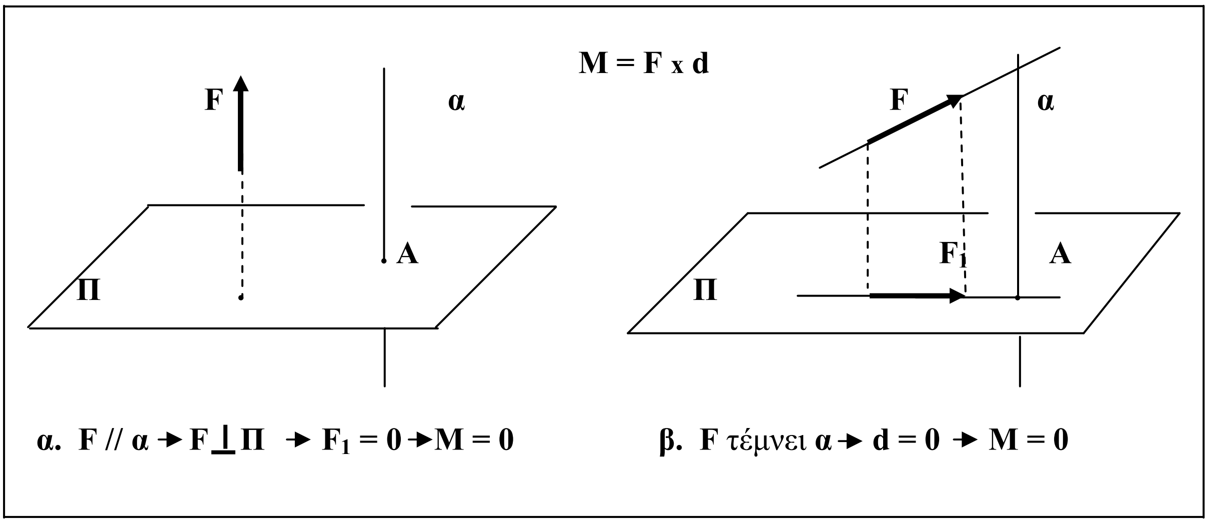
Κατά σύμβαση ορίζουμε σαν **θετική** φορά της ροπής, άρα και του άξονα **α**, τη φορά που αντιστοιχεί σε **ανθωρολογιακή** φορά περιστροφής της $\mathbf{F_1}$ γύρω από το σημείο **Α**
Στο σχήμα **(4)** η ροπή έχει θετική φορά.

Παρατηρήσεις :
1. Όταν η δύναμη **F** είναι **παράλληλη** με τον άξονα **α** τότε θα είναι κάθετη στο επίπεδο **Π**, οπότε η προβολή της σ' αυτό θα είναι **μηδέν** άρα και το μέτρο της ροπής θα είναι **μηδέν** (σχ. 7α).

2. Όταν η δύναμη **F** **τέμνει** τον άξονα **α** τότε ο φορέας της προβολής της στο επίπεδο **Π** διέρχεται από το σημείο **Α**, οπότε η απόσταση του **Α** από αυτόν είναι **μηδέν** άρα και το μέτρο της ροπής θα είναι **μηδέν** (σχ. 7β).

Συνοψίζοντας τις δύο παραπάνω παρατηρήσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα :

« Η ροπή μιας δύναμης ως προς άξονα του επιπέδου της είναι μηδέν »



Σχήμα 7. Πότε η δύναμη δεν έχει ροπή ως προς άξονα

3. Σύνθεση δυνάμεων

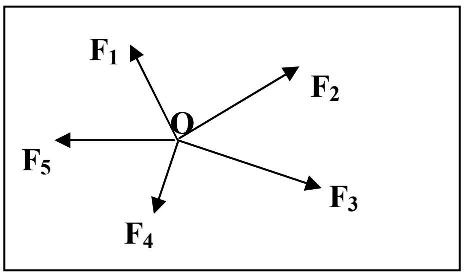
Σύνθεση δυνάμεων ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης της συνισταμένης αυτών, που είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων.

Ανάλυση δύναμης σε συνιστώσες ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης κάποιων δυνάμεων (συνιστώσες), που έχουν συνισταμένη τη δύναμη αυτή.

Η ανάλυση και η σύνθεση είναι πράξεις που γίνονται σύμφωνα με τον **Διανυσματικό Λογισμό** όπως περιγράφονται περιληπτικά παρακάτω.

3.1. Σύνθεση συνεπίπεδων συντρεχουσών δυνάμεων

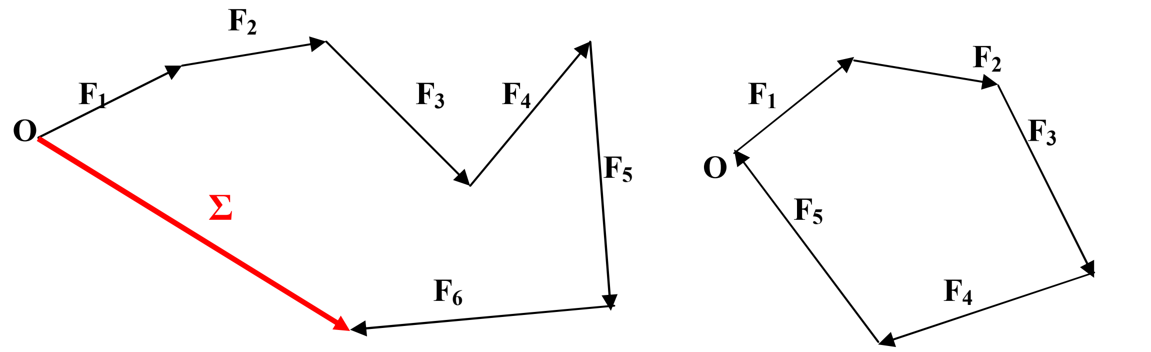
Συντρέχουσες ονομάζονται οι δυνάμεις οι φορείς των οποίων διέρχονται από το ίδιο σημείο **Ο** (σχ. 8).



Σχήμα 8. Συντρέχουσες δυνάμεις

Σύμφωνα με τον διανυσματικό λογισμό η συνισταμένη συνεπίπεδων συντρεχουσών δυνάμεων υπολογίζεται γραφικά ως εξής :

Ξεκινώντας από το σημείο **O**, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις **διαδοχικές**, (η αρχή της επόμενης να συμπίπτει με το τέλος της προηγούμενης). Η δύναμη που έχει αρχή την αρχή της πρώτης (δηλαδή το σημείο **O**) και τέλος το τέλος της τελευταίας είναι η συνισταμένη των δυνάμεων και ο φορέας της διέρχεται από το κοινό σημείο **O** των δυνάμεων (σχ. 9). Το πολύγωνο που έχει πλευρές τις δυνάμεις ονομάζεται **δυναμοπολύγωνο.**
Αν το δυναμοπολύγωνο είναι **ανοικτό**, τότε υπάρχει συνισταμένη (σχ. 9α).Αν το δυναμοπολύγωνο είναι **κλειστό**, τότε η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν (σχ. 9β) :



α. Ανοικτό δυναμοπολύγωνο **β. κλειστό δυναμοπολύγωνο Σ = 0**

Σχήμα 9. Γραφικός υπολογισμός συνισταμένης

<u>Παρατήρηση</u> : Δεν παίζει ρόλο η σειρά της σχεδίασης των δυνάμεων. Με όποια σειρά και να σχεδιαστούν οι δυνάμεις η συνισταμένη θα είναι πάντα η ίδια.

3.2. Σύνθεση δύο συντρεχουσών δυνάμεων

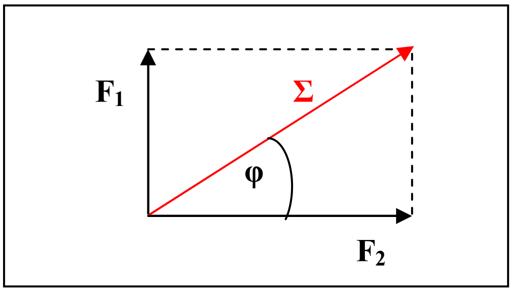
Η συνισταμένη δύο συντρεχουσών δυνάμεων βρίσκεται όπως περιγράψαμε παραπάνω (σχ.10α).
Μπορούμε όμως να την υπολογίσουμε και με τον εξής τρόπο
(**κανόνας του παραλληλογράμμου** σχ.10β) :

Σχεδιάζουμε και τις δύο δυνάμεις με κοινή αρχή το σημείο τομής των φορέων τους. Σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές τις δυνάμεις. Η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με αρχή την κοινή αρχή των δυνάμεων είναι η συνισταμένη τους.

α. Γραφικός υπολογισμός συνισταμένης συντρεχουσών δυνάμεων **β. Υπολογισμός συνισταμένης δύο συντρεχουσών δυνάμεων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου**

Σχήμα 10. Υπολογισμός συνισταμένης δύο συντρεχουσών δυνάμεων

Ειδική περίπτωση : Όταν οι δυνάμεις $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$ είναι κάθετες μεταξύ τους (σχ.11) το μέτρο της συνισταμένης τους και η γωνία **φ** που σχηματίζει με το φορέα μιας δύναμης δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (3) και (4) :



Σχήμα 11. Συνισταμένη δύο καθέτων δυνάμεων

$$\Sigma = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} \qquad \textbf{(3)}$$

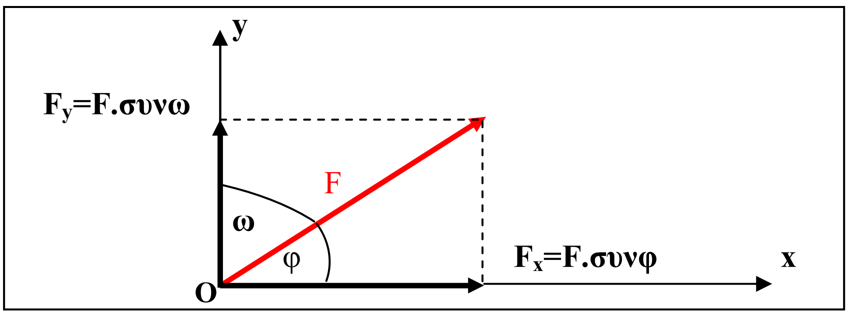
$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{F_1}{F_2} \qquad \textbf{(4)}$$

3.3. Ανάλυση δύναμης σε δύο κάθετες συνιστώσες

Ανάλυση δύναμης **F** σε δύο συνιστώσες ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης δύο δυνάμεων $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$ που να έχουν συνισταμένη την δύναμη **F**.
Η ανάλυση δύναμης σε συνιστώσες είναι κατά κάποιο τρόπο μια διαδικασία αντίστροφη της σύνθεσης δύο δυνάμεων. Ενώ όμως η σύνθεση δίνει μία μόνο λύση, η ανάλυση δίνει άπειρες λύσεις, δηλαδή μπορούμε να βρούμε άπειρα ζευγάρια δυνάμεων που να έχουν συνισταμένη την δεδομένη δύναμη. Αν όμως είναι καθορισμένα ορισμένα στοιχεία για τις ζητούμενες συνιστώσες τότε το πρόβλημα έχει μία λύση. Τέτοια στοιχεία μπορεί να είναι π.χ. οι διευθύνσεις των δύο συνιστωσών ή τα μέτρα τους ή η διεύθυνση της μιας και το μέτρο της άλλης.
Εμείς θα μελετήσουμε την περίπτωση ανάλυσης μιας δύναμης σε δύο **κάθετες** συνιστώσες με γνωστές διευθύνσεις (σχ. 12).
Από την αρχή της Ο δύναμης F φέρουμε δύο άξονες Ox και Oy παράλληλους με τις διευθύνσεις των ζητούμενων συνιστωσών F_x και F_y αντίστοιχα.
Ουσιαστικά οι ζητούμενες συνιστώσες είναι οι προβολές της δύναμης **F** στους άξονες **Ox** και **Oy** αντίστοιχα, οπότε σύμφωνα με τη σχέση **(1)** τα μέτρα των δυνάμεων F_x και F_y θα είναι αντίστοιχα :

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \qquad \textbf{(5)}$$

$$F_y = F \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \qquad \textbf{(6)}$$

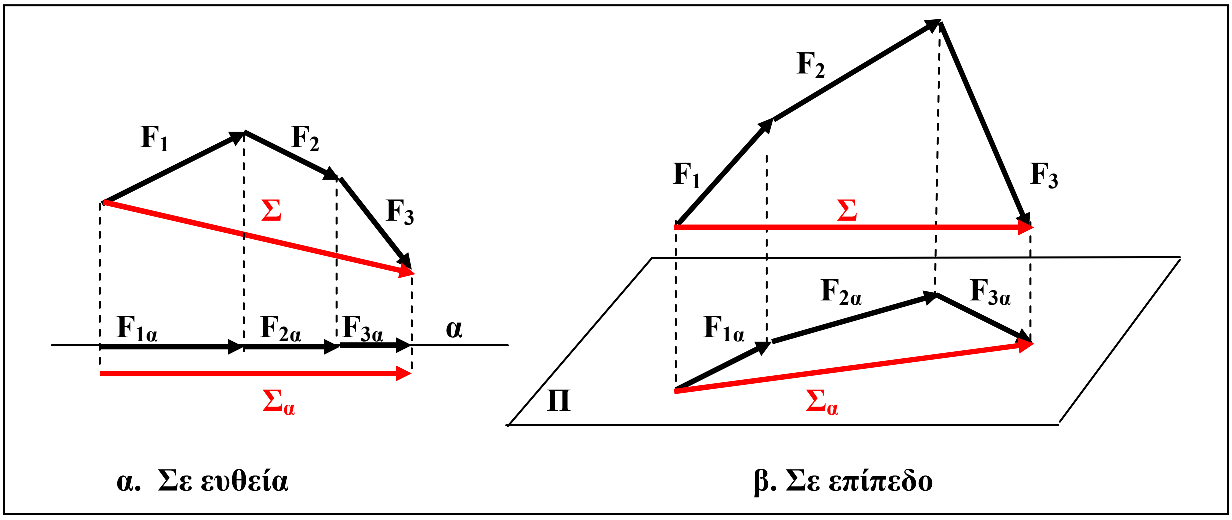


Σχήμα 12. Ανάλυση δύναμης σε κάθετες συνιστώσες

3.4. Σύνθεση πολλών συντρεχουσών δυνάμεων

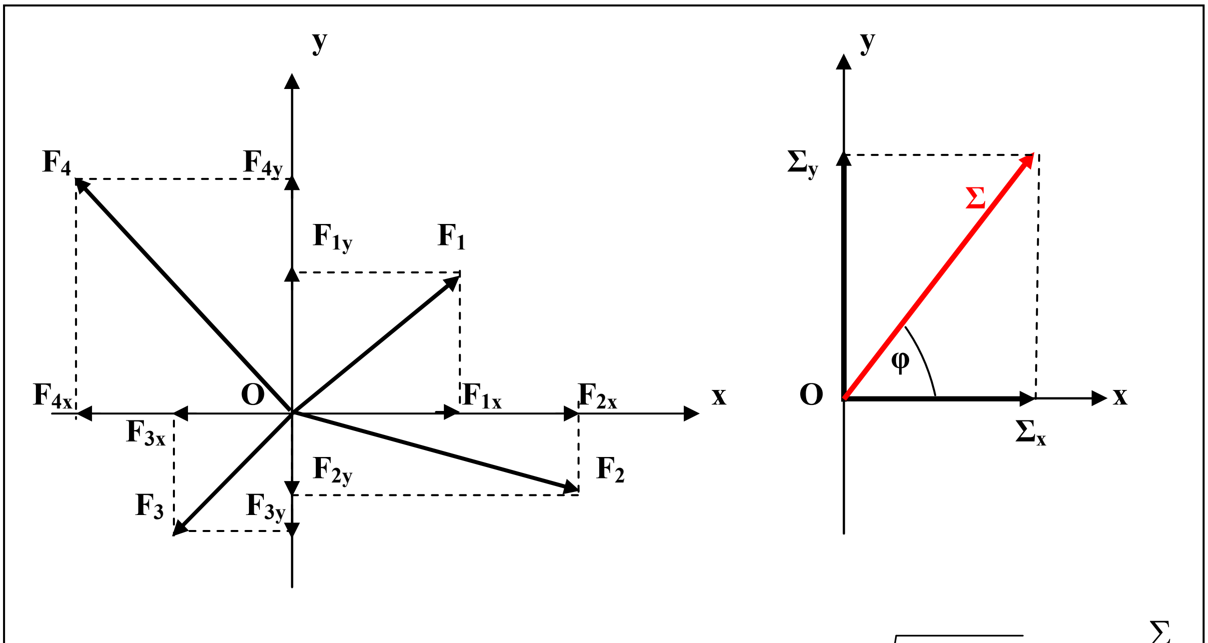
Τη συνισταμένη πολλών συνεπίπεδων συντρεχουσών δυνάμεων, εκτός από τον γραφικό τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε να την υπολογίσουμε και αναλυτικά στηριζόμενοι στο **θεώρημα των προβολών** :

> ***« Η συνισταμένη των προβολών δυνάμεων σε ευθεία ή επίπεδο είναι ίση με την προβολή της συνισταμένης των δυνάμεων αυτών στην ευθεία ή στο επίπεδο ».*** (σχ. 13)



Σχήμα 13. Θεώρημα προβολών

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η ακόλουθη (σχ. 14) :



$\Sigma_x = \Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x} - F_{4x}$ $\quad$ $\Sigma_y = \Sigma F_y = F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} + F_{4y}$

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2}\ ,\ \varepsilon\phi\phi = \frac{\Sigma_y}{\Sigma_x}$$

Σχήμα 14. Σύνθεση δυνάμεων με την μέθοδο των προβολών

α. Επιλέγουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων **Ox** , **Oy** με αρχή το σημείο **O** που συντρέχουν οι δυνάμεις.

β. Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε συνιστώσες παράλληλες με τους δύο άξονες σύμφωνα με τις σχέσεις **(5)** και **(6).** (ουσιαστικά προβάλλουμε τις δυνάμεις στους άξονες Ox και Oy).
Προφανώς όποια δύναμη βρίσκεται πάνω σε κάποιον άξονα δεν χρειάζεται ανάλυση.

γ. Όσες προβολές έχουν τη θετική φορά του αντίστοιχου άξονα τις χαρακτηρίζουμε με το πρόσημο (+) **,** ενώ όσες έχουν την αρνητική φορά με το πρόσημο **(-).**
Με τον τρόπο αυτό καθιστούμε τις προβολές των δυνάμεων προσημασμένους (αλγεβρικούς) αριθμούς, όπου η αριθμητική (απόλυτη) τιμή εκφράζει το μέτρο και το πρόσημο τη φορά της προβολής.

δ. Βρίσκουμε τη συνισταμένη των προβολών $\mathbf{\Sigma F_x}$ **,** $\mathbf{\Sigma F_y}$ των δυνάμεων σε κάθε άξονα αντίστοιχα προσθέτοντας αυτές αλγεβρικά.

ε. Σύμφωνα με το θεώρημα των προβολών η συνισταμένη των προβολών σε κάθε άξονα είναι ίση με την προβολή της ζητούμενης συνισταμένης **Σ** στον αντίστοιχο άξονα, δηλαδή : $\mathbf{\Sigma_x=\Sigma F_x}$ και $\mathbf{\Sigma_y=\Sigma F_y}$.

στ. Υπολογίζουμε τη συνισταμένη **Σ** κατά μέτρο και κατεύθυνση σύμφωνα με τις σχέσεις **(7)** και **(8)** αντίστοιχα :

$$\boxed{\Sigma = \sqrt{\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2}} \quad \textbf{(7)} \qquad \boxed{\varepsilon\varphi\phi = \frac{\Sigma_y}{\Sigma_x}} \quad \textbf{(8)}$$

__**Σημείωση :**__ Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνισταμένη πολλών συντρεχουσών δυνάμεων που δεν είναι συνεπίπεδες**,** αρκεί να σχεδιάσουμε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων **Ox , Oy , Oz** και να εφαρμόσουμε το θεώρημα των προβολών και για τους τρεις άξονες, οπότε θα έχουμε :

για τον άξονα Ox : $\mathbf{\Sigma_x = \Sigma F_{ix}}$

για τον άξονα Oy : $\mathbf{\Sigma_y = \Sigma F_{iy}}$

Για τον άξονα Oz : $\mathbf{\Sigma_z = \Sigma F_{iz}}$

οπότε το μέτρο της συνισταμένης θα είναι : $\Sigma = \sqrt{\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2}$

__3.5. Σύνθεση παραλλήλων δυνάμεων__

Θεωρούμε επίπεδο **Π** κάθετο στη διεύθυνση των δυνάμεων και ορίζουμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων **Ox , Oy , Oz** όπου οι άξονες **Ox** και **Oy** βρίσκονται πάνω στο επίπεδο **Π** και ο άξονας **Oz** είναι κάθετος σ' αυτό. Προφανώς οι δυνάμεις έχουν την διεύθυνση του άξονα **Oz**, οπότε και η συνισταμένη τους θα έχει την ίδια διεύθυνση, Προσημαίνουμε με το πρόσημο **(+)** όσες δυνάμεις έχουν τη θετική φορά του άξονα **Oz** και με το πρόσημο **(-)** όσες έχουν την αρνητική.

Προσθέτουμε αλγεβρικά τις δυνάμεις : $\boxed{\Sigma=\Sigma F_i}$ **(9)**

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος που θα προκύψει θα είναι το μέτρο της συνισταμένης ενώ το πρόσημό του θα δηλώνει την φορά της.
Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε την κατεύθυνση της συνισταμένης.
Ο φορέας της συνισταμένης βρίσκεται με εφαρμογή του **θεωρήματος των ροπών** :

> ***« Η ροπή της συνισταμένης δυνάμεων ως προς έναν άξονα είναι ίση με τη συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα αυτόν.»***

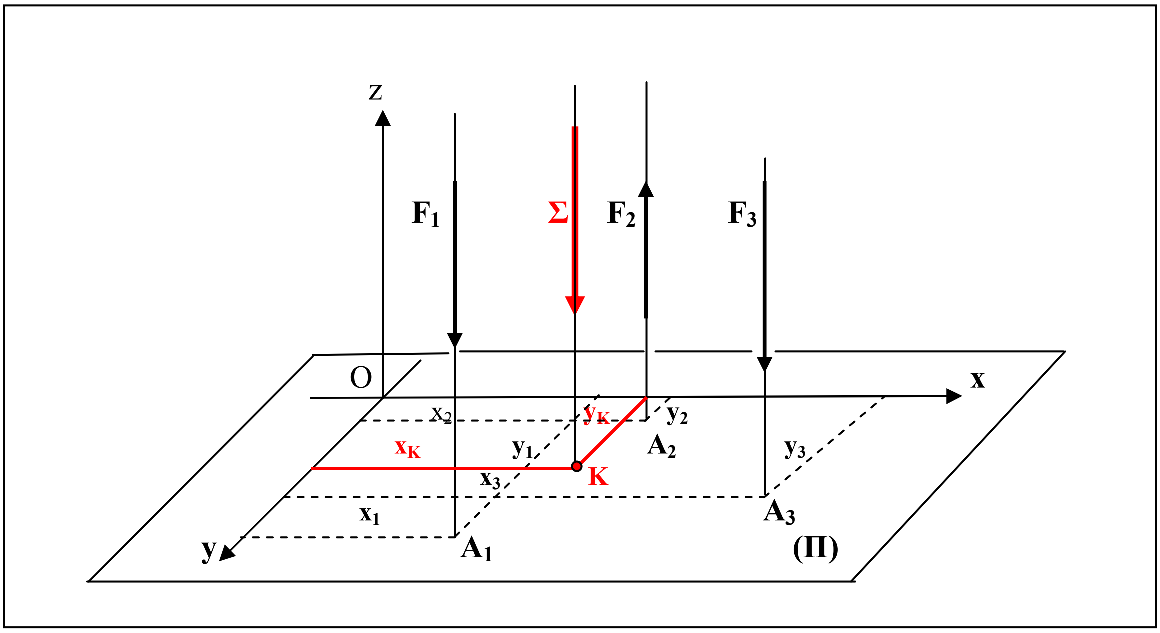
Ονομάζουμε $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ κ.ο.κ. τα σημεία τομής των δυνάμεων με το επίπεδο **Π** και $\mathbf{x_1,y_1}$, $\mathbf{x_2,y_2}$, $\mathbf{x_3,y_3}$ κ.ο.κ. τις συντεταγμένες των σημείων αυτών ως προς τους άξονες **Ox , Oy** αντίστοιχα (σχ. 15). Ονομάζουμε **K** το σημείο τομής της συνισταμένης με το επίπεδο **Π** και $\mathbf{x_K,y_K}$ τις συντεταγμένες του **K** ως προς τους άξονες **Ox** και **Oy** αντίστοιχα.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών για κάθε έναν από του άξονες **Ox** , **Oy** :

Για τον άξονα **Oy :** $\Sigma\cdot x_K=\sum(F_i\cdot x_i)\Rightarrow \boxed{x_K=\dfrac{\sum(F_i\cdot x_i)}{\Sigma}}$ **(10)**

Για τον άξονα **Ox :** $\Sigma\cdot y_K=\sum(F_i\cdot y_i)\Rightarrow \boxed{y_K=\dfrac{\sum(F_i\cdot y_i)}{\Sigma}}$ **(11)**

Έτσι προσδιορίζεται το σημείο **K** από το οποίο διέρχεται ο φορέας της συνισταμένης.

<u>Σημείωση :</u> ***Στις παραπάνω σχέσεις οι δυνάμεις F_i μπαίνουν ως αλγεβρικοί αριθμοί που έχουν θετικό ή αρνητικό πρόσημο ανάλογα με τη φορά κάθε δύναμης σε σχέση με τον άξονα Oz και απόλυτη τιμή το μέτρο κάθε δύναμης.***

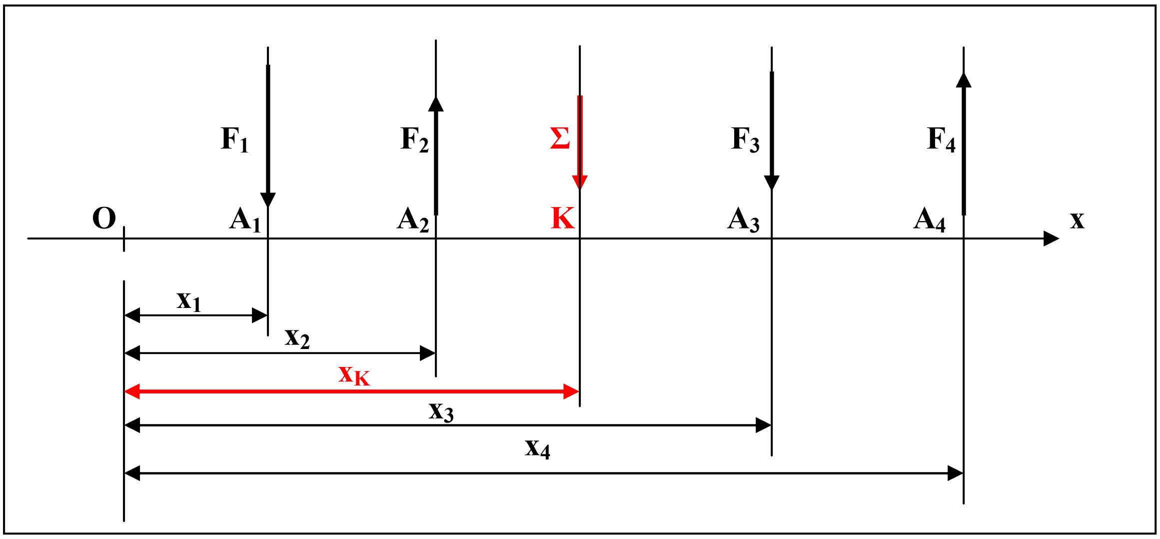


Σχήμα 15. Σύνθεση παραλλήλων δυνάμεων

3.6. Ειδικές περιπτώσεις

3.6.1. Σύνθεση συνεπίπεδων παράλληλων δυνάμεων

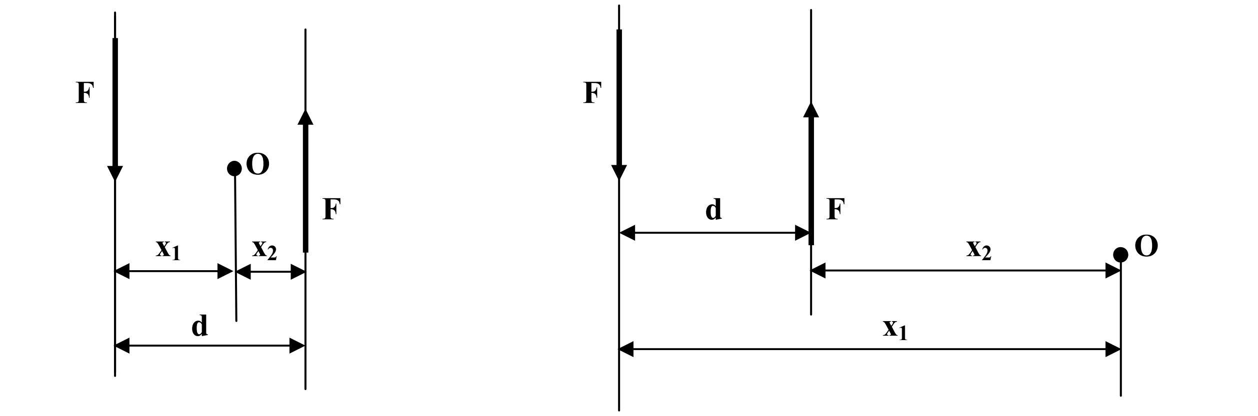
Το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης των δυνάμεων αυτών υπολογίζεται όπως και στη γενική περίπτωση.
Για τον προσδιορισμό του φορέα της συνισταμένης ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:
Θεωρούμε άξονα **Ox** στο επίπεδο των δυνάμεων κάθετο στη διεύθυνση τους και εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών ως προς άξονα **Oy** κάθετο στο επίπεδό τους (σχ.16).
Η απόσταση $\mathbf{x_K}$ του σημείου **K** στο οποίο η συνισταμένη τέμνει τον άξονα **Ox** βρίσκεται από τη σχέση **(10)**.



Σχήμα 16. Σύνθεση συνεπίπεδων παράλληλων δυνάμεων

3.6.2. Ζεύγος

Ζεύγος ονομάζεται ένα σύστημα δύο αντίθετων δυνάμεων με διαφορετικούς φορείς.
Το επίπεδο το οποίο ορίζουν οι δυνάμεις ονομάζεται **επίπεδο του ζεύγους**.
Η συνισταμένη των δυνάμεων ενός ζεύγους είναι προφανώς μηδέν.
Η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων ενός ζεύγους ως προς τυχαίο άξονα είναι διάφορη του μηδενός και είναι σταθερή ως προς οποιονδήποτε άξονα.
Η σταθερή συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων ενός ζεύγους ως προς οποιονδήποτε άξονα κάθετο στο επίπεδό του ονομάζεται **ροπή του ζεύγους.**
Στο σχήμα (17) αποδεικνύεται ότι η ροπή ζεύγους είναι σταθερή ως προς οποιονδήποτε άξονα κάθετο στο επίπεδό του.



α. $\Sigma M = F \times x_1 + F \times x_2 = F \times (x_1+x_2) = F \times d$ **β.** $\Sigma M = F \times x_1 - F \times x_2 = F \times (x_1 - x_2) = F \times d$

Σχήμα 17. Η ροπή ζεύγους είναι σταθερή ως προς οποιονδήποτε άξονα κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους

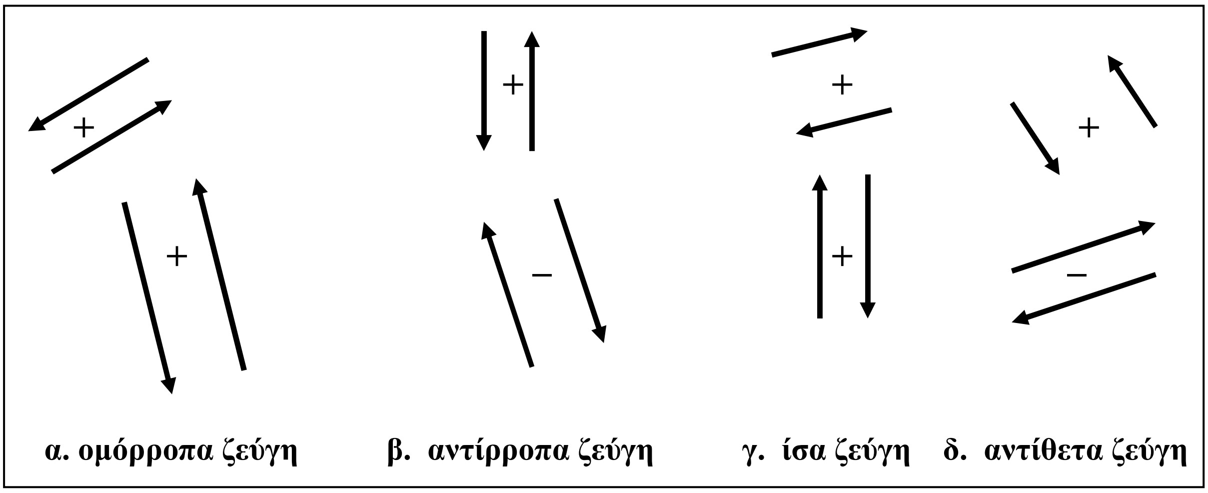
Η ροπή ζεύγους είναι **ελεύθερο διάνυσμα,** δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει φορέα οποιαδήποτε ευθεία κάθετη στο επίπεδό του.
Ζεύγη που τα επίπεδά τους είναι παράλληλα ονομάζονται **συγγραμμικά.**
Οι ροπές συγγραμμικών ζευγών είναι συγγραμμικά διανύσματα.
Γι αυτό, όταν πρόκειται περί συγγραμμικών ζευγών, μπορούμε να υποκαταστήσουμε τα διανύσματα των ροπών με αλγεβρικούς (προσημασμένους) αριθμούς, όπου το πρόσημο δηλώνει τη φορά και η απόλυτη τιμή του το μέτρο του διανύσματος της ροπής.
Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τη ροπή ενός ζεύγους ως εξής :
Ροπή ζεύγους ορίζεται το γινόμενο του μέτρου της μιας δύναμης **F** επί την απόσταση **d** των φορέων των δυνάμεων.
Η ροπή ενός ζεύγους είναι **θετική** όταν οι δυνάμεις τείνουν να περιστραφούν γύρω από σημείο, που βρίσκεται ανάμεσα στους φορείς των δυνάμεων, κατά φορά **αντίθετη** αυτής των δεικτών του ρολογιού (σχ. 18α). Τότε και το ζεύγος χαρακτηρίζεται **θετικό.**
Η ροπή ενός ζεύγους είναι αρνητική όταν οι δυνάμεις τείνουν να περιστραφούν γύρω από σημείο, που βρίσκεται ανάμεσα στους φορείς των δυνάμεων, **κατά τη φορά** περιστροφής των δεικτών του ρολογιού **(**σχ. 18β). Τότε και το ζεύγος χαρακτηρίζεται **αρνητικό.**

α. Η ανθωρολογιακή φορά περιστροφής δίνει θετική ροπή ζεύγους: $M = F \times d$

β. Η ωρολογιακή φορά περιστροφής δίνει αρνητική φορά ροπής ζεύγους: $M = -F \times d$

Σχήμα 18. Πρόσημο της ροπής ζεύγους

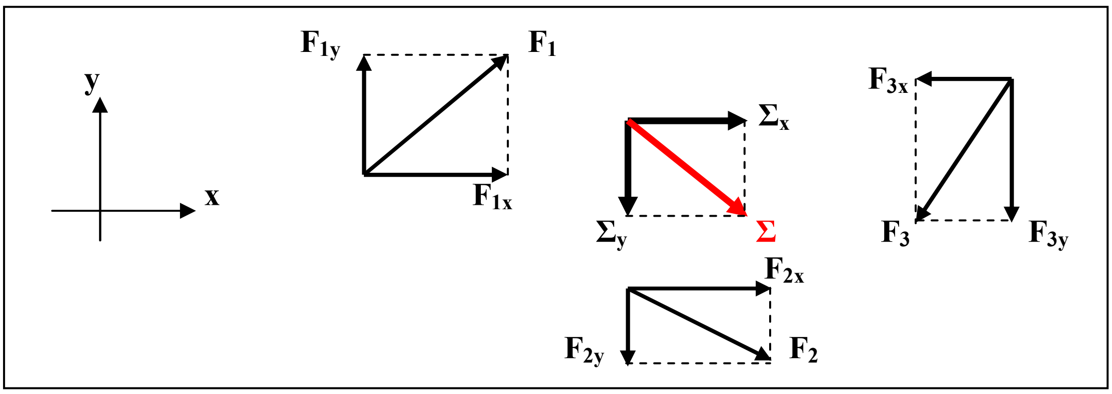
Δύο συγγραμμικά ζεύγη ονομάζονται **ομόρροπα** όταν οι ροπές τους είναι **ομόσημες.**
Δύο συγγραμμικά ζεύγη ονομάζονται **αντίρροπα** όταν οι ροπές τους είναι **ετερόσημες.**
Δύο συγγραμμικά ζεύγη ονομάζονται **ίσα** όταν οι ροπές τους είναι **ίσες.**
Δύο συγγραμμικά ζεύγη ονομάζονται **αντίθετα** όταν οι ροπές τους είναι **αντίθετες.**(σχ.19)



Σχήμα 19. Σχέσεις ζευγών

3.7. Σύνθεση τυχαίων συνεπίπεδων δυνάμεων

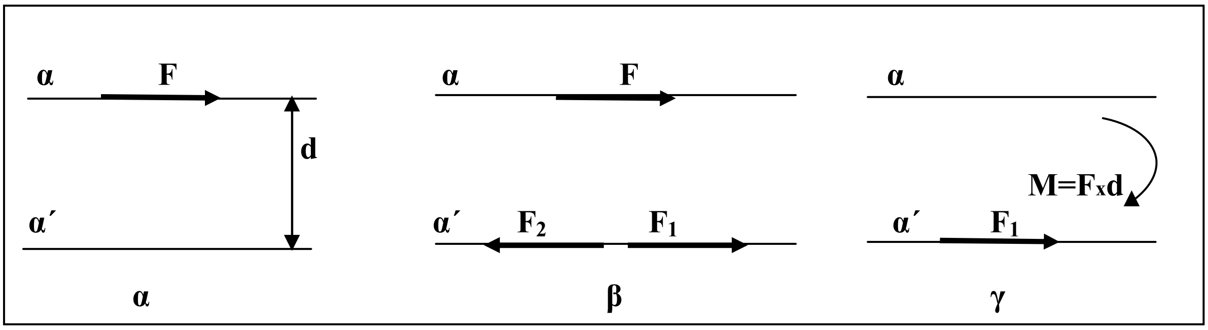
Για τη σύνθεση τυχαίων συνεπίπεδων δυνάμεων ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία (σχ.20) :
α. Ορίζουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων **Ox , Oy** στο επίπεδο των δυνάμεων.
β. Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε δύο συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες σύμφωνα με τις σχέσεις **(6)** και **(7).** Έτσι προκύπτουν δύο ομάδες δυνάμεων, μια παράλληλη με τον άξονα **Ox** και μια παράλληλη με τον άξονα **Oy**.
γ. Βρίσκουμε τη συνισταμένη $\mathbf{\Sigma F_x}$ των παράλληλων προς τον άξονα **Ox** και τη συνισταμένη $\mathbf{\Sigma F_y}$ των παράλληλων προς τον άξονα **Oy** .
Σύμφωνα με το θεώρημα των προβολών αυτές είναι ίσες με τις προβολές **Σx** και **Σy** της ζητούμενης συνισταμένης **Σ.**
δ. Βρίσκουμε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης Σ σύμφωνα με τις σχέσεις**(3)** και **(4).** Ο φορέας της θα διέρχεται από το σημείο τομής των φορέων των $\mathbf{\Sigma_x}$ και $\mathbf{\Sigma_y}$.



Σχήμα 20. Σύνθεση τυχαίων συνεπίπεδων δυνάμεων

3.8. Παράλληλη μεταφορά δύναμης

Η δύναμη είναι **ολισθαίνον διάνυσμα**, δηλαδή μπορεί να μετακινηθεί (να ολισθήσει) πάνω στο φορέα της χωρίς να μεταβληθεί η δράση της (τα αποτελέσματά της).
Μπορούμε να μετακινήσουμε τη δύναμη σε άλλο φορέα της ίδιας διεύθυνσης ως εξής :
Έστω μια δύναμη **F** και **α** ο φορέας της (σχ. 21α). Θέλουμε να μεταφέρουμε τη δύναμη **F** σε φορέα **α΄** παράλληλο με τον **α** και σε απόσταση **d** από αυτόν.
Σχεδιάζουμε στο νέο φορέα **α΄** μια δύναμη $\mathbf{F_1}$ ίση με την **F** και μια δύναμη $\mathbf{F_2}$ αντίθετη της **F**(σχ.21β). Προφανώς η δύναμη **F** ισοδυναμεί με το σύστημα των δυνάμεων $\mathbf{F, F_1, F_2}$ αφού οι δυνάμεις $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$, ως αντίθετες, έχουν συνισταμένη μηδέν.
Οι δυνάμεις **F** και $\mathbf{F_2}$ αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων** με ροπή $\mathbf{M = F \times d}$.
Έτσι το σύστημα των τριών δυνάμεων $\mathbf{F, F_1, F_2}$ ισοδυναμεί με τη δύναμη $\mathbf{F_1}$ και τη ροπή του ζεύγους **M** (σχ.21γ).
Άρα τελικά η δύναμη **F** μπορεί να αντικατασταθεί από τη ίση της δύναμη $\mathbf{F_1}$ και από μία ροπή $\mathbf{M = F \times d}$.



Σχήμα 21. Παράλληλη μεταφορά δύναμης

3.9 Σύνθεση τυχαίων δυνάμεων στο χώρο

Για να προσδιορίσουμε τον φορέα της συνισταμένης τυχαίων δυνάμεων ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

α. Ορίζουμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων **Ox , Oy , Oz** .

β. Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε τρεις συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες ($\mathbf{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}}$). (προφανώς όσες δυνάμεις έχουν τη διεύθυνση κάποιου άξονα δεν χρειάζονται ανάλυση)

γ. Βρίσκουμε τη συνισταμένη των συνιστωσών για κάθε άξονα :

$$\Sigma_x = \Sigma F_{ix}, \quad \Sigma_y = \Sigma F_{iy}, \quad \Sigma_z = \Sigma F_{iz}$$

δ. Μεταφέρουμε παράλληλα τις δύο από τις τρεις δυνάμεις $\mathbf{\Sigma_x , \Sigma_y , \Sigma_z}$ σε φορείς που διέρχονται από κάποιο σημείο **K** του φορέα της τρίτης. Έτσι προκύπτουν τρεις δυνάμεις ίσες με τις $\mathbf{\Sigma_x ,\Sigma_y , \Sigma_z}$ συντρέχουσες στο σημείο **K** και δύο ζεύγη από τις δυνάμεις που μεταφέραμε παράλληλα.

ε. Βρίσκουμε τη συνισταμένη των τριών αυτών συντρεχουσών δυνάμεων και τη συνισταμένη των δύο ζευγών και καταλήγουμε σε μία δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το σημείο **K** και σε ένα ζεύγος.

<u>**Συμπέρασμα**</u> **:** ***Στη γενική περίπτωση ένα σύστημα τυχαίων δυνάμεων στο χώρο μπορεί να αντικατασταθεί με μία δύναμη και ένα ζεύγος.***

Ειδικές περιπτώσεις :

1. Αν η δύναμη που βρήκαμε **τύχει** να είναι παράλληλη με το επίπεδο του ζεύγους, τότε μπορούμε να φέρουμε το παράλληλο επίπεδο προς το επίπεδο του ζεύγους που να περιέχει τη δύναμη και να μεταφέρουμε την δύναμη παράλληλα πάνω στο επίπεδο αυτό σε κατάλληλη απόσταση ώστε το ζεύγος που θα προκύψει από την παράλληλη μεταφορά να είναι αντίθετο του προηγούμενου ζεύγους ώστε τα δύο ζεύγη να έχουν συνισταμένη μηδέν, οπότε το σύστημα των τυχαίων δυνάμεων στο χώρο έχει συνισταμένη τη δύναμη που προέκυψε από την παράλληλη μεταφορά.
2. Αν στο βήμα **(ε)** προκύψει συνισταμένη δύναμη μηδέν και ζεύγος διάφορο του μηδενός τότε το σύστημα των τυχαίων δυνάμεων στο χώρο μπορεί να αντικατασταθεί με ένα ζεύγος.
   Καταχρηστικά λέμε ότι οι δυνάμεις έχουν συνισταμένη το ζεύγος.
3. Αν κατά το βήμα **(ε)** προκύψει και συνισταμένη δύναμη μηδέν και το ζεύγος μηδέν τότε λέμε ότι το σύστημα των δυνάμεων **ισορροπεί**.

<u>Παρατήρηση :</u>Ο προσδιορισμός της συνισταμένης **τυχαίων δυνάμεων στο χώρο** δεν προσδιορίζεται γραφικά αλλά μόνον **αναλυτικά** λόγω της αδυναμίας σχεδίασης ευθειών του χώρου στο επίπεδο.

4. <u>Ισορροπία δυνάμεων</u>

Υπενθυμίζουμε την **αρχή της αδράνειας :**

> ***«όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων αυτών ως προς οποιονδήποτε άξονα είναι μηδέν, το σώμα ισορροπεί, δηλαδή παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση)».***

Άρα για να ισορροπεί ένα σώμα πρέπει και η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να είναι μηδέν, αλλά και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων αυτών ως προς οποιονδήποτε άξονα να είναι μηδέν.
Αν όμως η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν τότε θα είναι μηδέν και οι προβολές της σε κάθε άξονα, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα των προβολών, πρέπει η συνισταμένη των προβολών των δυνάμεων σε κάθε άξονα να είναι μηδέν.

Με τον ίδιο συλλογισμό πρέπει και η συνισταμένη των προβολών των ροπών των δυνάμεων ως προς οποιονδήποτε άξονα σε κάθε άξονα να είναι μηδέν.
Δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Sigma F_{ix}=0 & (\alpha) \\ \Sigma F_{iy}=0 & (\beta) \\ \Sigma F_{iz}=0 & (\gamma) \end{array}} \quad (12) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \Sigma M_{ix}=0 & (\alpha) \\ \Sigma M_{iy}=0 & (\beta) \\ \Sigma M_{iz}=0 & (\gamma) \end{array}} \quad (13)$$

Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται **σχέσεις στατικής ισορροπίας**.

4.1 Ειδικές περιπτώσεις

α. Αν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι **συνεπίπεδες,** ορίζουμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων **Οx, Oy, Oz** εκ των οποίων οι άξονες **Οx** και **Oy** ανήκουν στο επίπεδο των δυνάμεων ενώ ο άξονας **Oz** είναι κάθετος σ' αυτό.
Τότε οι προβολές των δυνάμεων στο άξονα **Oz** είναι μηδέν, οπότε η σχέση **(12γ)** δεν έχει νόημα. Επίσης δεν έχουν νόημα οι σχέσεις **(13α)** και **(13β)** , δεδομένου ότι οι ροπές των δυνάμεων ως προς τους άξονες **Οx** και **Oy** είναι μηδέν (αφού οι άξονες ανήκουν στο επίπεδο των δυνάμεων). Έτσι απομένουν τελικά οι σχέσεις **(12α), (12β)** και **(13γ),** οι οποίες αποτελούν και τις **εξισώσεις στατικής ισορροπίας συνεπίπεδων** δυνάμεων.

β. Αν οι δυνάμεις είναι **συντρέχουσες** σε ένα σημείο **Ο** , τότε ορίζουμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων **Οx, Oy, Oz** με αρχή το σημείο Ο οπότε οι σχέσεις **(13α), (13β), (13γ)** δεν έχουν νόημα αφού όλες οι δυνάμεις τέμνουν και τους τρεις άξονες άρα οι ροπές τους ως προς τους άξονες είναι μηδέν. Έτσι απομένουν οι σχέσεις **(12α), (12β), (12γ),** οι οποίες αποτελούν τις **εξισώσεις στατικής ισορροπίας συντρεχουσών δυνάμεων.**

γ. Αν οι δυνάμεις είναι **συνεπίπεδες και συντρέχουσες** σε ένα σημείο **Ο,** τότε ορίζουμε ένα σύστημα αξόνων **Οx , Oy** στο επίπεδο των δυνάμεων, οπότε οι σχέσεις **(12γ), (13α), (13β), (13γ)** δεν έχουν νόημα. Έτσι απομένουν οι σχέσεις **(12β)** και **(12γ),** οι οποίες αποτελούν τις **εξισώσεις ισορροπίας συνεπίπεδων συντρεχουσών δυνάμεων.**

δ. Αν οι δυνάμεις είναι και **συνεπίπεδες και παράλληλες** τότε ορίζουμε έναν άξονα **Οx** στο επίπεδο των δυνάμεων παράλληλο προς τις δυνάμεις και έναν άξονα **Oz** κάθετο στο επίπεδο τους, οπότε οι σχέσεις **(12β), (12γ), (13α), (13β)** δεν έχουν νόημα. Έτσι απομένουν οι σχέσεις **(12α) και (13γ),** οι οποίες αποτελούν τις **εξισώσεις στατικής ισορροπίας συνεπίπεδων παράλληλων δυνάμεων.**

ε. Αν οι δυνάμεις είναι **ομόφορες** θεωρούμε ως άξονα **Οx** τον φορέα τους, οπότε η σχέση **(12α)** αποτελεί την **εξίσωση στατικής ισορροπίας ομόφορων δυνάμεων.**

4.2 Προβλήματα στατικής ισορροπίας συνεπίπεδων δυνάμεων

Όπως είδαμε παραπάνω οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας για κάθε περίπτωση δυνάμεων είναι καθορισμένος. Αυτό σημαίνει ότι ένα πρόβλημα στατικής ισορροπίας μπορεί να επιλυθεί με τις εξισώσεις αυτές αν υπάρχουν τόσες άγνωστες δυνάμεις όσες και οι εξισώσεις ισορροπίας. Ένα τέτοιο πρόβλημα λέγεται **στατικό.**
Αν όμως ο αριθμός των αγνώστων δυνάμεων υπερβαίνει τον αριθμό των εξισώσεων στατικής ισορροπίας , τότε οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας δεν επαρκούν για την επίλυση του προβλήματος. Τέτοια προβλήματα ονομάζονται **υπερστατικά.** Ορισμένα από αυτά μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια κάποιων εξισώσεων από την **Αντοχή Υλικών,** όχι όμως όλα.

5. Γεωμετρία επίπεδων επιφανειών

5.1. Κέντρο βάρους επιφάνειας

Έστω επίπεδη επιφάνεια **A** και **Π** το επίπεδό της.
Θεωρούμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων **Ox, Oy, Oz.**
Οι άξονες **Ox** και **Oy** βρίσκονται πάνω στο επίπεδο **Π** της επιφάνειας, ενώ ο άξονας **Oz** είναι κάθετος στο επίπεδο **Π** (σχ. 22).
Θεωρούμε ότι η επιφάνεια **A** αποτελείται από άπειρες στοιχειώδεις επιφάνειες και έστω **dA** μία από αυτές.
Η στοιχειώδης επιφάνεια **dA** ορίζεται σαν διάνυσμα ($\vec{\alpha}$), το οποίο έχει μέτρο το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφάνειας **dA**, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας **dA** (στην προκειμένη περίπτωση το επίπεδο **Π**) και φορά **αυθαίρετη** (ίδια όμως για όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες), οπότε και η επίπεδη επιφάνεια **A** παριστάνεται με διάνυσμα ($\vec{A}$) που ορίζεται σαν η **συνισταμένη** των στοιχειωδών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ οπότε έχει μέτρο το άθροισμα των μέτρων των στοιχειωδών επιφανειών **dA**, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο **Π**, και φορά τη φορά των διανυσμά- των $\vec{\alpha}$ (σχ.22).

Κέντρο βάρους (ή κεντροειδές) K της επιφάνειας A ονομάζεται το σημείο K του επιπέδου Π της επιφάνειας A από το οποίο διέρχεται ο φορέας του διανύσματος $\vec{A}$.

Για τον υπολογισμό της θέσης του κέντρου βάρους **K** εφαρμόζουμε τη διαδικασία της παραγράφου 3.5 και τις σχέσεις (9), (10) και (11), στις οποίες τα αθροίσματα έχουν αντικατασταθεί με επιφανειακά ολοκληρώματα, δεδομένου ότι έχουμε άθροίσματα απείρων όρων και απείρως μικρών.

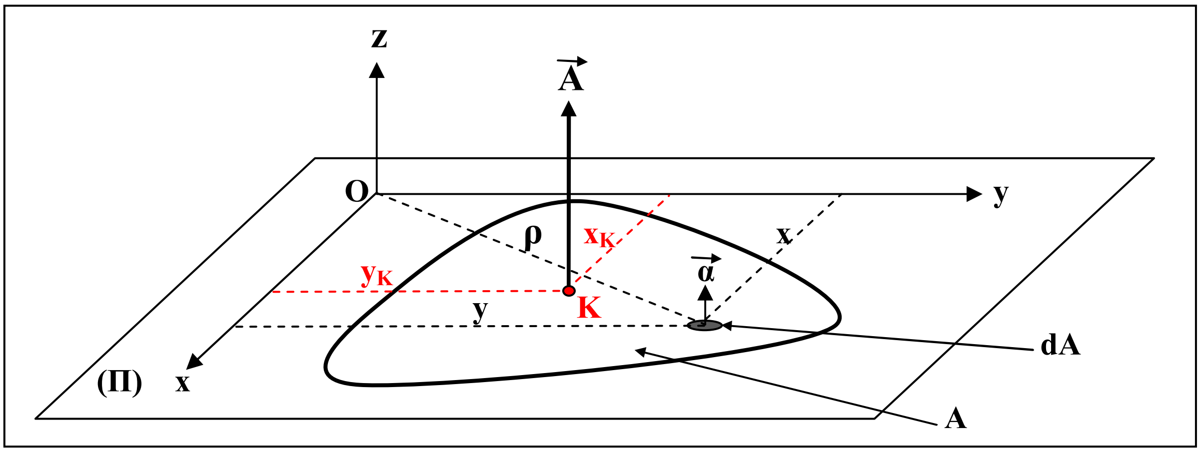
Άρα το εμβαδόν της επιφάνειας θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{A = \int_A dA} \qquad \textbf{(14)}$$

και οι συντεταγμένες $\mathbf{x_K}$ και $\mathbf{y_K}$ του κέντρου βάρους **K** της επιφάνειας από τις σχέσεις :

$$\boxed{x_K = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A x \cdot dA}{A}} \qquad \textbf{(15)}$$

$$\boxed{y_K = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A y \cdot dA}{A}} \qquad \textbf{(16)}$$



Σχήμα 22. Κέντρο βάρους επίπεδης επιφάνειας

Θεώρημα 1
«Όταν μια επίπεδη επιφάνεια έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο βάρους της βρίσκεται πάνω στον άξονα αυτόν»

Άμεση απόρροια του θεωρήματος αυτού είναι :

Θεώρημα 2
«Όταν μια επιφάνεια έχει περισσότερους του ενός άξονες συμμετρίας, το κέντρο βάρους της είναι η τομή των αξόνων αυτών»

Έτσι το κέντρο βάρους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των μεσοπαραλλήλων των πλευρών του, του ρόμβου το σημείο τομής των διαγωνίων του, του κύκλου το γεωμετρικό του κέντρο κ.λ.π.

5.2. Ροπές και ακτίνες αδράνειας επίπεδης επιφάνειας ως προς άξονα

Στην Φυσική, και συγκεκριμένα στην περιστροφική κίνηση, ορίζεται η έννοια της **μαζικής ροπής αδράνειας** στερεού σώματος ως προς άξονα περιστροφής, η οποία εκφράζει την αδράνεια της ύλης του σώματος όταν περιστρέφεται γύρω από άξονα, ή πιο απλά την αντίσταση που προβάλλει το σώμα όταν επιχειρείται μεταβολή στην περιστροφική του κίνηση γύρω από κάποιον άξονα περιστροφής.
Κατ' επέκταση ορίζεται και η **ροπή αδράνειας επίπεδης επιφάνειας ως προς άξονα**, που εκφράζει κατά κάποιον τρόπο την αντίσταση της επιφάνειας σε κάθε επιχειρούμενη πειστροφική κίνησή της γύρω από τον άξονα αυτόν.
Οι ροπές αδράνειας της επίπεδης επιφάνειας **A** του σχήματος 22 ως προς τους άξονες **Ox, Oy, Oz** δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (σχήμα 22) :

Ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Ox :

$$\boxed{J_x = \int_A y^2 \cdot dA} \quad \textbf{(17)}$$

Ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Oy :

$$\boxed{J_y = \int_A x^2 \cdot dA} \quad \textbf{(18)}$$

Ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Oz : $\boxed{J_P = \int_A \rho^2 \cdot dA}$ **(19)**

Οι ροπές αδράνειας **J_x** και **J_y** ονομάζονται **αξονικές** ενώ η **J_P** ονομάζεται **πολική**.

Είναι προφανές ότι : $\boxed{J_P = J_x + J_y}$ **(20)**

Κατ' επέκταση των παραπάνω σχέσεων ορίζεται και ένα μαθηματικό μέγεθος χωρίς κάποια φυσική σημασία, το **γινόμενο αδράνειας** που υπολογίζεται από την σχέση :

Γινόμενο αδράνειας ως προς τους άξονες Ox και Oy : $\boxed{J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA}$ **(21)**

Από τις σχέσεις (17), (18), και (19) , προκύπτει ότι η μονάδα της ροπής αδράνειας και του γινομένου αδράνειας είναι το **$1m^4$**.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Οι αξονικές και η πολική ροπή αδράνειας είναι **πάντοτε θετικοί αριθμοί**, ενώ το γινόμενο αδράνειας μπορεί να είναι **θετικό, αρνητικό ή μηδέν**.

2. Η πολική ροπή αδράνειας μιας επίπεδης επιφάνειας είναι **σταθερή,** ανεξάρτητη από τους δύο άξονες **Ox, Oy**.

3. Το γινόμενο αδράνειας ως προς κεντροβαρικό άξονα συμμετρίας είναι **μηδέν**.

Ως **ακτίνα αδράνειας** επίπεδης επιφάνειας ως προς άξονα ορίζεται το μέγεθος :

$$\boxed{i = \sqrt{\frac{J}{A}}} \quad \textbf{(21)}$$

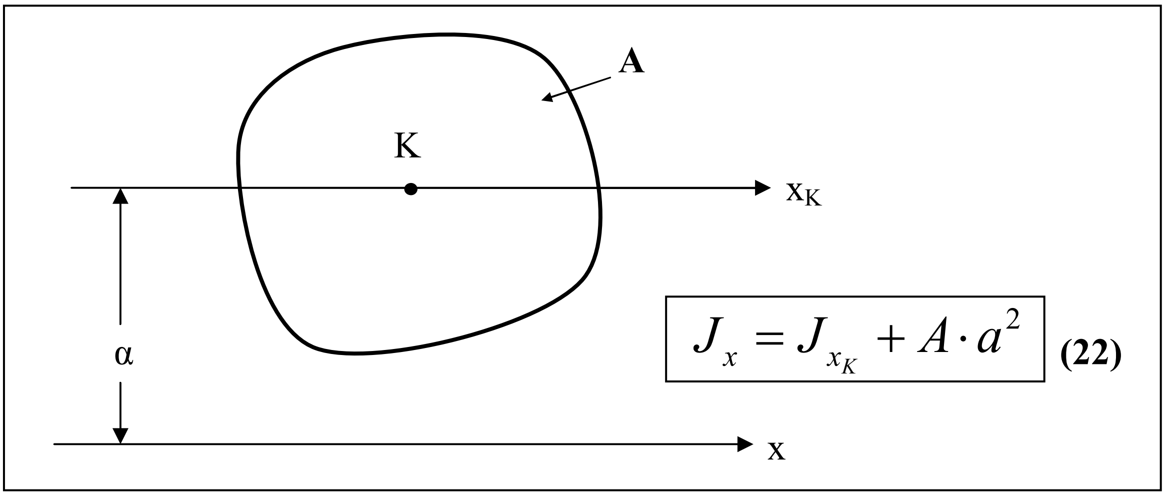
όπου **J** : η ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον άξονα και
A : το εμβαδόν της επιφάνειας.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι μονάδα της ακτίνας αδράνειας είναι το **1m**.

Κατ' αντιστοιχία με τις ροπές αδράνειας, και οι ακτίνες αδράνειας ως προς τους άξονες **Ox** και **Oy** του επιπέδου της επιφάνειας **i_x** και **i_y** ονομάζοντα **αξονικές** ενώ η ακτίνα αδράνειας i_P ως προς τον άξονα **Oz** τον κάθετο στο επίπεδο της επιφάνειας **πολική.**

5.3. Θεώρημα Steiner

«Η ροπή αδράνειας επίπεδης επιφάνειας ως προς άξονα του επιπέδου της είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον παράλληλο άξονα που περνά από το κέντρο βάρους της επιφάνειας (κεντροβαρικός) και του γινομένου του εμβαδού της επιφάνειας επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων.»



$$J_x = J_{x_K} + A \cdot a^2 \qquad \textbf{(22)}$$

Σχήμα 23. Θεώρημα Steiner

Στροφή του συστήματος αξόνων-Κύριοι άξονες αδράνειας

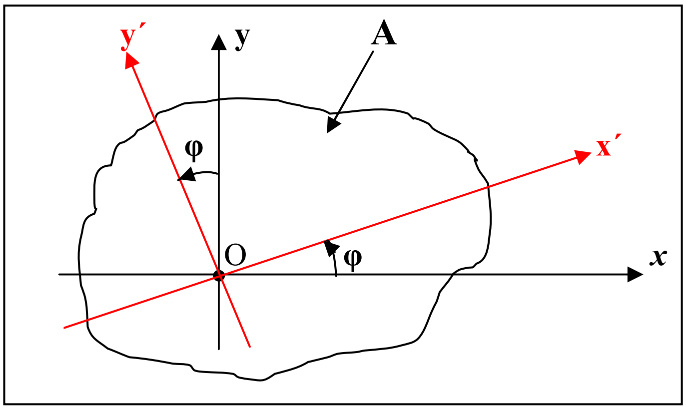
Έστω ότι γνωρίζουμε τις αξονικές ροπές και το γινόμενο αδράνειας μιας επιφάνειας **A** ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων **xOy.** Θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων **x΄O y΄**του οποίου οι άξονες σχηματίζουν γωνία **φ** με τους αρχικούς.(σχ. 24)
Αποδεικνύεται ότι οι αξονικές ροπές και το γινόμενο αδράνειας της επιφάνειας A ως προς το νέο σύστημα αξόνων δίνονται από τις σχέσεις :

$$J_{x'} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi - J_{xy} \cdot \eta\mu 2\varphi \qquad \textbf{(23)}$$

$$J_{y'} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi + J_{xy} \cdot \eta\mu 2\varphi \qquad \textbf{(24)}$$

$$J_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \eta\mu 2\varphi + J_{xy} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi \qquad \textbf{(25)}$$

<u>Σημείωση :</u> Η γωνία φ = $\widehat{xOx'}$ θεωρείται θετική όταν έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού



Σχήμα 24. Στροφή αξόνων

Οι σχέσεις (23),(24) και (25) ισχύουν προφανώς και για **κεντροβαρικούς** άξονες.
Από τη σχέση (20) προκύπτει ότι το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς ένα σύστημα κεντροβαρικών ορθογωνίων αξόνων είναι σταθερό ίσο με την πολική ροπή αδράνειας που είναι σταθερή). Επομένως από όλα τα συστήματα κεντροβαρικών ορθογωνίων αξόνων θα υπάρχει ένα που η ροπή αδράνειας της επιφάνειας θα είναι **η μέγιστη** ως προς τον ένα άξονα και **η ελάχιστη** ως προς τον άλλον. Οι άξονες αυτοί (της μέγιστης και της ελάχιστης ροπής αδράνειας) ονομάζονται **κύριοι άξονες αδράνειας** της επιφάνειας και συμβολίζονται : η μέγιστη με $\mathbf{J_1}$ και η ελάχιστη με $\mathbf{J_2}$.
Για τον υπολογισμό της θέσης των κυρίων αξόνων αδράνειας και του μέτρου των αντιστοίχων ροπών αδράνειας, παραγωγίζουμε την $\mathbf{J_x}$ ή την J_y ως προς τη γωνία **φ**, μηδενίζουμε την παράγωγο και βρίσκουμε την γωνία $\boldsymbol{\varphi_o}$ την οποία σχηματίζουν οι κύριοι άξονες αδράνειας με τους δοσμένους. Μετά από πράξεις βρίσκουμε :

$$\boxed{\varepsilon\varphi 2\varphi_o = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}} \qquad \mathbf{(26)}$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή της γωνίας $\boldsymbol{\varphi_o}$ στις σχέσεις (23),(24),(25) έχουμε :

$$\boxed{J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4\cdot J_{xy}^2}} \qquad \mathbf{(27)}$$

(Το πρόσημο **(+)** αντιστοιχεί στην $\mathbf{J_1}$ και το πρόσημο **(-)** στην $\mathbf{J_2}$)

$$\boxed{J_{12} = 0} \qquad \mathbf{(28)}$$

Δηλαδή το γινόμενο αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες αδράνειας είναι μηδέν.

Οι αξονικές ροπές αδράνειας ως προς ένα σύστημα αξόνων που σχηματίζουν γωνία φ με τους κύριους άξονες αδράνειας δίνονται από τις σχέσεις (23),(24),(25) αρκεί να αντικαταστήσουμε την $\mathbf{J_x}$ με την J_1, την $\mathbf{J_y}$ με την $\mathbf{J_2}$ και την $\mathbf{J_{xy}= 0}$, οπότε έχουμε :

$$\boxed{J_x = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi} \qquad \textbf{(29)}$$

$$\boxed{J_y = \frac{J_1 + J_2}{2} - \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi} \qquad \textbf{(30)}$$

$$\boxed{J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \eta\mu 2\varphi} \qquad \textbf{(31)}$$

<u>Σημείωση</u> : Οι κύριοι κεντροβαρικοί άξονες καθώς και οι κύριες ροπές αδράνειας έχουν ιδιαίτερη σημασία και για μη συμμετρικές διατομές για τις οποίες και πρέπει να προσδιορίζονται.