



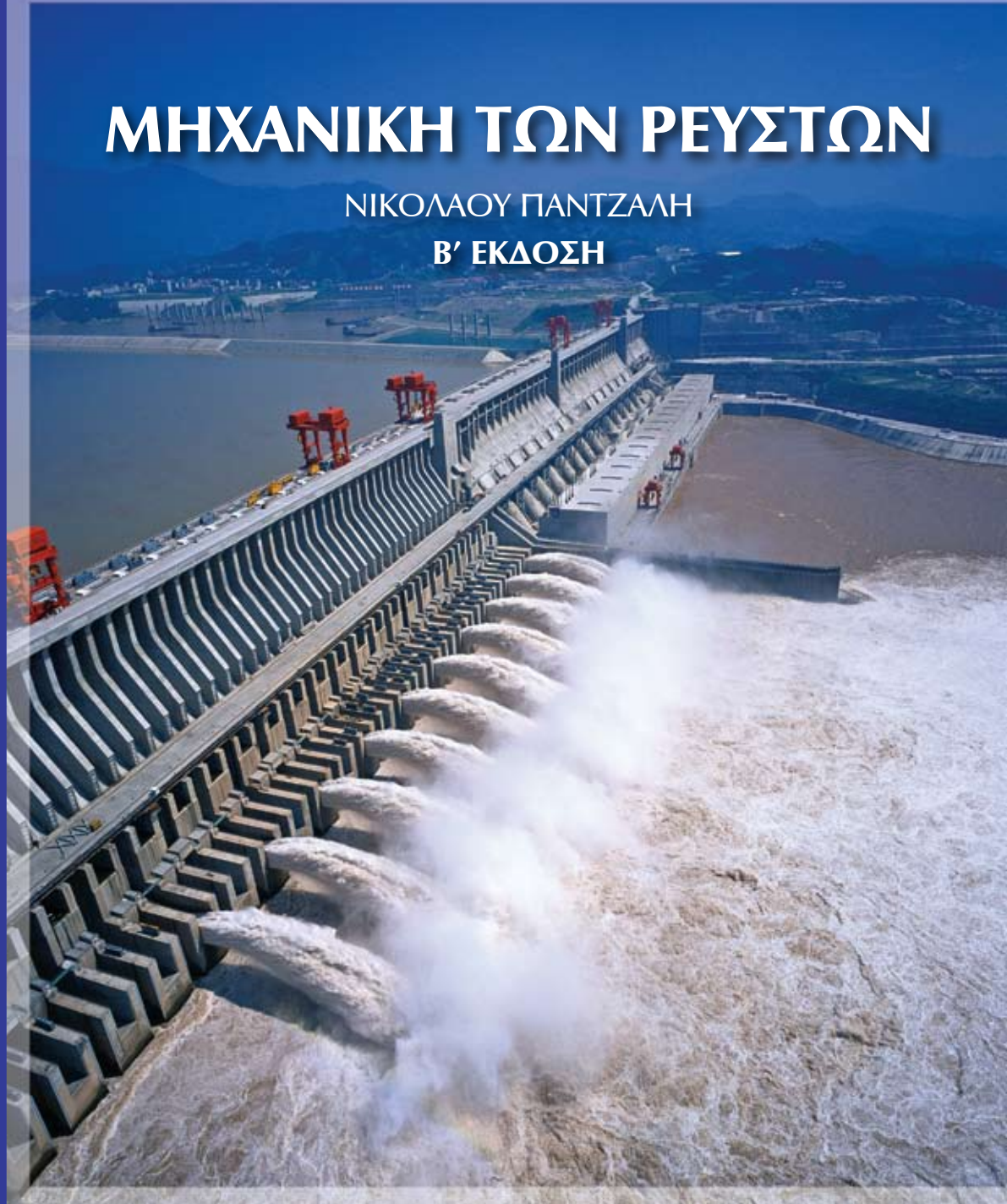
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΠΑΝΤΖΑΛΗ

Β' ΕΚΔΟΣΗ



ΑΘΗΝΑ 2017

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

Α' ΕΚΔΟΣΗ 2008

Β' ΕΚΔΟΣΗ 2017

ISBN: 978-960-337-132-8

Copyright © 2017 Ίδρυμα Ευγενίδου

Απαγορεύεται η ολική ή μερική ανατύπωση του βιβλίου και των εικόνων με κάθε μέσο καθώς και η διασκευή, η προσαρμογή, η μετατροπή και η κυκλοφορία του (Άρθρο 3 του ν. 2121/1993).

Φωτογραφία εξωφύλλου: Το υδροπλεκτρικό φράγμα των Τριών Φαραγγιών στην Κίνα (κατασκευής 2012).

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΤΕΝΙΔΟΥ

Το 1952 ο Ευγένιος Ευγενίδης (1882-1954) όρισε με τη διαθήκη του τη σύσταση του Ιδρύματος Ευγενίδου, του οποίου ως μοναδικό σκοπό έταξε «να συμβάλη εις τήν εκπαίδευσιν νέων έλληνικής ύπηκοότητος έν τῷ έπιστημονικῷ καί τεχνικῷ πεδίῳ». Ο ιδρυτής και χορηγός του Ιδρύματος Ευγενίδου ορθά προέβλεψε ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο της Ελλάδος αποτελεί η άρτια κατάρτιση των Ελλήνων τεχνιῶν κατά τα πρότυπα της επαγγελματικής εκπαίδεύσεως άλλων ευρωπαϊκῶν χωρῶν.

Την 23η Φεβρουαρίου του 1956 εγκρίθηκε η σύσταση του κοινωφελούς Ιδρύματος Ευγενίδου, την διαχείριση του οποίου κατά την ρητή επιθυμία του ιδρυτή του ανέλαβε η αδελφή του Μαριάνθη Σίμου (1895-1981). Τότε ξεκίνησε η υλοποίηση του σκοπού του Ιδρύματος και η εκπλήρωση μιας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου από την Μαριάνθη Σίμου και τους επιστημονικούς συνεργάτες της.

Το έργο της Μαριάνθης Σίμου συνέχισε από το 1981 ο πολύτιμος συνεργάτης και διάδοχος του Ευγενίου Ευγενίδη, Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης (1920-2000). Από το 2000 συνεχιστής του έργου του Ιδρύματος Ευγενίδου έχει αναλάβει ο Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Μία από τις πρώτες δραστηριότητες του Ιδρύματος Ευγενίδου, ευθύς μετά την ίδρυσή του, υπήρξε η συγγραφή και έκδοση κατάλληλων διδακτικῶν εγχειριδίων για τους μαθητές των τεχνικῶν σχολῶν, καθώς διαπιστώθηκε ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητῶν με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθιταν τα ορθά θεμέλια για την παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό. Καρπός αυτής της δραστηριότητας είναι η Βιβλιοθήκη του Τεχνίτη (1957-1975), η οποία αριθμεί 32 τίτλους, η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού (1962-1975), που περιλαμβάνει 50 τίτλους, η Τεχνική Βιβλιοθήκη (1969-1980) με 11 τίτλους και η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού Βοηθού Χημικού (1971-1973) με 3 τίτλους. Επί πλέον, από το 1977 μέχρι σήμερα έχουν εκδοθεί 171 τίτλοι για τους μαθητές των Τεχνικῶν και Επαγγελματικῶν Λυκείων και 16 για τους μαθητές των Σχολῶν Μέσης Τεχνικής και Επαγγελματικής εκπαίδεύσεως.

Ξεχωριστή σειρά βιβλίων του Ιδρύματος Ευγενίδου αποτελεί η Βιβλιοθήκη του Ναυτικού (1967 έως σήμερα), η οποία είναι το αποτέλεσμα της συνεργασίας του Ιδρύματος Ευγενίδου με την Διεύθυνση Εκπαίδεύσεως Ναυτικῶν του Υπουργείου Ναυτιλίας. Η συγγραφή και έκδοση των εκπαιδευτικῶν εγχειριδίων για τους σπουδαστές των ναυτικῶν σχολῶν ανετέθη στο Ίδρυμα Ευγενίδου με την υπ' αριθμ. 61288/5031/9.8.1966 απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και λειτούργησε η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων, η οποία είχε συσταθεί ήδη από το 1958. Η συνεργασία Ιδρύματος Ευγενίδου και Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας ανανεώθηκε με την υπ. αριθμ. Μ2111.1/2/99 υπουργική απόφαση όπως τροποποιήθηκε από την Μ3611.2/05/05/16-12-2005, με την οποία το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή διδακτικῶν εγχειριδίων για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού.

Στην Βιβλιοθήκη του Ναυτικού περιλαμβάνονται συνολικά 134 τίτλοι μέχρι σήμερα: 27 τίτλοι για τις Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού (1967-1979), 42 τίτλοι για τις Ανώτατες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού (1981-2001), 37 τίτλοι για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού, 13 εγχειρίδια κατευθυνόμενης εκπαίδεύσεως επί πλοίου και 15 μεταφράσεις ναυτικῶν εγχειριδίων.

Όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Ναυτικού, εκτός του ότι έχουν συγγραφεί σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας των σχολῶν και ανταποκρίνονται στις ανάγκες των σπουδαστῶν, είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία. Επί πλέον οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων

καταβάλλουν κάθε προσπάθεια ώστε τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και στις δυνατότητες των σπουδαστών.

Την περίοδο 2012-2013 το ΥΝΑ με το υπ' αριθμ. Μ3616/01/2012/26-09-2012 έγγραφο ανέθεσε στην Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου την σύσταση ειδική ομάδας εργασίας εμπειρογνομίων για την επικαιροποίηση των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών για τις ΑΕΝ, τα ΚΕΣΣΕΝ και τα ειδικά σχολεία Πλοίαρχων και Μηχανικών, εφαρμόζοντας τις νέες απαιτήσεις εκπαίδευσης και πιστοποιήσεως ναυτικών της Διεθνούς Συμβάσεως STCW '78 (Standards of Training, Certification and Watchkeeping for seafarers – Manila amendments 2010). Με βάση τα νέα αναλυτικά προγράμματα για τις ΑΕΝ, τα οποία εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά την χρονιά 2013-2014, ξεκίνησε από το 2014 και η επικαιροποίηση των υφισταμένων διδακτικών εγχειριδίων, προκειμένου αυτά να είναι συμβατά με τις νέες διεθνείς απαιτήσεις.

Με την προσφορά των εκδόσεών του στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα Ευγενίδου συνεχίζει να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση της Ελλάδος, υλοποιώντας επί 60 και πλέον χρόνια το όραμα του ιδρυτή του, αείμνηστου ευεργέτη Ευγενίου Ευγενίδου.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Εμμανουήλ Δρns, Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.

Αχιλλέας Ματοάγγος, Αντιναύαρχος Λ.Σ. (ε.α.).

Βενετία Καλλιπολίτου, Αντιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντρια Ναυτ. Εκπαιδ., Υπ. Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής.

Σύμβουλος επί των εκδόσεων του Ιδρύματος **Κων. Αγγ. Μανάφns**, Ομ. Καθηγ. Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών.

Γραμματέας της Επιτροπής, **Ελευθερία Τελειώνη**.

Διατελέσαντα μέλη της Επιτροπής

Γ. Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, Α. Καλογεράς (1957-1970) Καθηγητής ΕΜΠ, Α. Παπιάς (1955-1983) καθηγητής ΕΜΠ, Χ. Καβουνίδης (1955-1984) Μπχ. Ηλ. ΕΜΠ, Μ. Αγγελόπουλος (1970-2003) ομ. καθηγητής ΕΜΠ, Σπ. Γουλιέλμος (1958) Αντ/ρχος, Ξ. Αντωνιάδης (1959-1966) Αντ/ρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Γ. Τσακίρης (1967-1969) Πλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ελλ. Σίδερης (1967-1969) Υποναύαρχος, Π. Φουσιέρης (1969-1971) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Αλ. Μοσχονάς (1971-1972) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Χρυσανθακόπουλος (1972-1974) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Αθαν. Σωτηρόπουλος (1974-1977) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Γ. Σπαρτιώτης (1977) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., προσωρινός Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Θ. Πουλάκης (1977-1979) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Λυκούδης (1979-1981) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Αναστ. Δημαράκης (1981-1982) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Τσαντίλας (1982-1984) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Α. Σιαυρόπουλος ομ. καθηγητής Πανεπ. Πειραιώς (2003-2008) Ε. Τζαβέλας (1984-1986) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Εξαρχόπουλος (1986-1988) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Α. Μπαρκατσός (1988-1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Παπαναστασίου (1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Γ. Λάμπρου (1989-1992) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Κοκορέτσιος (1992-1993) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Μαρκάκης (1993-1994) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Ζουμπούλης (1994-1995) Πλοίαρχος Λ.Σ., Φ. Ψαρράς (1995-1996) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Γ. Καλαρώνης (1996-1998) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Θ. Ρενιζεπέρης (1998-2000) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Σιεφανάκης (2000-2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Μαρίνος (2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Εξαρχόπουλος (2001-2003) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Μπριλάκης (2003-2004) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ν. Θεμέλαρος (2003-2004) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Κουβέλης (2004-2005) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Δ. Βασιλάκης (2005-2008) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Πετρόπουλος (2008-2009) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Α. Ματοάγγος (2009-2011) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Σέρρης (2011-2012) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Τζαβάρας, (2004-2013) Αντιναύαρχος Λ.Σ. (Ε.Α.), Ι. Τεγόπουλος (1988-2013) ομ. καθηγητής ΕΜΠ, Α. Θεοφανόπουλος (2012-2014) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ..

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΠΑΝΤΖΑΛΗ

Χημικού Μηχανικού
πρώην Καθηγητή ΑΕΝ Μακεδονίας

Επιμέλεια Νικόλαου Τσίτσου
Ναυπηγού Μηχανολόγου Μηχανικού ΕΜΠ,
Καθηγητή ΑΕΝ Ασπρούργου

Β' ΕΚΔΟΣΗ

ΑΘΗΝΑ
2017



ΠΡΟΛΟΓΟΣ Α' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Το βιβλίο αυτό έχει ως βασικό στόχο, να αποτελέσει ουσιαστικό βοήθημα των φοιτητών των Σχολών Μηχανικών των ΑΕΝ στο μάθημα «Μηχανική των Ρευστών». Φιλοδοξία του είναι να δώσει ερεθίσματα και για περαιτέρω εμβάθυνση των Μηχανικών ΕΝ σε ζητήματα που σχετίζονται με τη συμπεριφορά και τη ροή των ρευστών, καθώς και των μηχανημάτων διακινήσεώς τους. Τέλος, αν το βιβλίο αποτελέσει χρήσιμο βοήθημα και για τον επαγγελματία Μηχανικό, θα έχει προσεγγίσει έναν ακόμα στόχο: τη σύνδεση της εκπαιδευτικής διαδικασίας με την άσκηση του επαγγέλματος.

Σημείο εκκινήσεως, αποτέλεσαν οι «Σημειώσεις Μηχανικής των Ρευστών», οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ως βοήθημα στις ΑΕΝ από το 1996 ως σήμερα. Η πολύχρονη διδασκαλία του μαθήματος με βοήθησε να εντοπίσω τα προβλήματα αφομοιώσεως των εννοιών και φαινομένων που συναντάμε στην αντιμετώπιση των προβλημάτων των ρευστών, καθώς επίσης και τις απαιτήσεις των φοιτητών που επιθυμούν να εμβαθύνουν περαιτέρω στη Μηχανική των Ρευστών. Χωρίς να απομακρύνομαι από τη δομή και το πνεύμα του αναλυτικού προγράμματος, προσπάθησα να επεκταθώ στο γνωστικό αντικείμενο, σε βαθμό που να επιτρέπει την καλύτερη κατανόηση των θεμάτων. Σε κάποια κεφάλαια, δίνονται ερεθίσματα για παραπέρα μελέτη, καθώς επίσης και ερεθίσματα για την αξιοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην επίλυση προβλημάτων Μηχανικής των Ρευστών. Ιδιαίτερα οι παράγραφοι που είναι τυπωμένες με μικρότερα γράμματα και που στοχεύουν στην περαιτέρω εμβάθυνση δύνανται να παραληφθούν, χωρίς αυτό να συνεπάγεται την παραμικρή δυσκολία στην κατανόηση των θεμάτων που ακολουθούν.

Όσον αφορά στις μονάδες, ακολουθείται με συνέπεια το καθιερωμένο πλέον SI (Système Internationale). Μονάδες που δεν ενιάσσονται σε αυτό αλλά συναντώνται συχνά στην πράξη, μετατρέπονται στις αντίστοιχες μονάδες του SI. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε, ώστε το βιβλίο να ανταποκρίνεται στις σύγχρονες εξελίξεις. Αυτό αφορά μεταξύ άλλων και στον τομέα της τυποποίησης. Όπου ήταν διαθέσιμα, προιμπίθηκαν τα πρότυπα ISO που διεθνοποιούν τις προδιαγραφές σωλήνων, εξαρτημάτων και σχετικών μηχανημάτων. Σημειώνω όμως ότι η διαδικασία διαμορφώσεως διεθνώς αποδεκτών προδιαγραφών βρίσκεται σε εξέλιξη και η συνεχής ενημέρωση είναι αναγκαία για το Μηχανικό.

Γενικά, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αντιμετώπιση προβλημάτων που συναντά ο Μηχανικός στην επαγγελματική του δραστηριότητα. Ελπίζω ότι η πληθώρα παραδειγμάτων και ασκήσεων, καθώς επίσης τα στοιχεία που περιέχονται στους πίνακες και στα διαγράμματα του κυρίως κειμένου και του παραρτήματος, βοηθούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

Η αναγκαιότητα ενός όσο το δυνατόν πληρέστερου συγγράμματος, προσαρμοσμένου στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των ΑΕΝ ήταν εμφανής. Η προκήρυξη και η ανάθεση από το Ίδρυμα Ευγενίδου της συγγραφής του βιβλίου, αποτέλεσαν για το γράφοντα μια μεγάλη πρόκληση. Σε τι βαθμό ανταποκρίθηκε σ' αυτήν, θα το κρίνουν οι χρήστες του συγγράμματος (συνάδελφοι, καθηγητές και φοιτητές). Θα δεχτώ με χαρά τυχόν διορθώσεις και παρατηρήσεις, ώστε σε μια νέα έκδοση, το σύγγραμμα να προσεγγίζει περισσότερο τους στόχους του.

Αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω το Εκδοτικό Τμήμα του Ιδρύματος Ευγενίδου, για την εμπιστοσύνη που μου επέδειξε, για την άριστη συνεργασία και βοήθεια που μου παρείχε, όσο και για την άρτια επιμέλεια και παρουσίαση του βιβλίου.

Ο συγγραφέας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Η Β' έκδοση του παρόντος βιβλίου κρίθηκε αναγκαία λόγω της εφαρμογής των νέων προγραμμάτων σπουδών στις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού (ΦΕΚ 2303, τεύχος δεύτερο, 16-9-2013).

Η ύλη του βιβλίου αναπτύσσεται σε επτά κεφάλαια. Το πρώτο αναφέρεται στις ιδιότητες των ασυμπίεσιτων ρευστών. Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζονται τα υγρά σε κατάσταση ισορροπίας. Υπολογίζεται η υδροστατική πίεση, γίνεται αναφορά στους φυγοκεντρικούς διαχωριστές, στα όργανα μέτρησης της πίεσης, στο κέντρο πίεσης επιφανειών και στην άνωση.

Το τρίτο κεφάλαιο μελετά την ροή, τα είδη ροής, τον αριθμό Reynolds και την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε κλειστούς αγωγούς (εξίσωση Bernoulli). Η εξοικείωση των σπουδαστών με τη διαστατική ανάλυση, την ομοιότητα και τα είδη της γίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο. Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετάται η διακίνηση των ασυμπίεσιτων ρευστών σε σωλήνες και δίνονται οι ισχύουσες εξισώσεις για τα είδη ροής. Χρησιμοποιείται το διάγραμμα Moody για επίλυση εφαρμογών. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα υγρά κατά την κίνησή τους καθώς και στα συστήματα στήριξης των αγωγών, εξετάζονται στο έκτο κεφάλαιο. Η ύλη ολοκληρώνεται με το έβδομο κεφάλαιο, στο οποίο παρουσιάζονται οι τρόποι σύνδεσης σωλήνων, η δημιουργία δικτύων και τα όργανα μέτρησης παροχής.

Όλα τα κεφάλαια περιέχουν λυμένες εφαρμογές και άλυτες ασκήσεις. Στο τέλος του βιβλίου παρατίθεται Παράρτημα, το οποίο περιέχει διαγράμματα και πίνακες χρήσιμους για τη μελέτη και την επίλυση των ασκήσεων. Πριν από το πρώτο κεφάλαιο υπάρχει πίνακας συμβόλων των χρησιμοποιούμενων φυσικών μεγεθών με τις μονάδες μέτρησης αυτών.

Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται είναι τα ίδια με αυτά που βρίσκονται στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία της Μηχανικής των Ρευστών και η μαθηματική δομή του βιβλίου είναι ανάλογη με το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στις ΑΕΝ. Για τους σημαντικούς τεχνικούς και επιστημονικούς όρους που συναντώνται στο κείμενο, αναγράφεται και η αγγλική τους ονομασία.

Το βιβλίο, ως κύριο βοήθημα του μαθήματος «ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ», θα αποτελέσει σημαντικό εργαλείο μελέτης και στα μαθήματα «ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΜΗΧΑΝΗΜΑΤΑ ΠΛΟΙΩΝ», «ΨΥΚΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΛΙΜΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ», και σε άλλα στα οποία απαντώνται φαινόμενα ροής. Επίσης θα συμβάλει στις πρακτικές εφαρμογές στο πλοίο.

Η επικαιροποίηση αυτή είναι αποτέλεσμα συλλογικής εργασίας. Οφείλω ιδιαίτερος να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του εκδοτικού τμήματος του Ιδρύματος Ευγενίδου για τον επαγγελματισμό τους όσον αφορά στην επιμέλεια της εκδόσεως και για την άψογη συνεργασία μας.

Θα αποτελούσε παράλειψή μου να μην ευχαριστήσω τον Βασίλειο Καρκούλια, Χημικό Μηχανικό, συνταξιούχο καθηγητή της Α.Ε.Ν. Ασπροπύργου, για τις χρήσιμες πληροφορίες που μου μετέφερε από την εφαρμογή στην τάξη της πρώτης εκδόσεως της Μηχανικής των Ρευστών. Ευχαριστώ, επίσης, την κόρη μου Παναγιώτα, διπλωματούχο Μηχανικό Παραγωγής και Διοίκησης Δ.Π.Θ. για τις δημιουργικές παρατηρήσεις της στο τεχνικό μέρος του κειμένου.

Νικόλαος Γ. Τσίτσος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πίνακας συμβόλων.....	
-----------------------	--

Κεφάλαιο Πρώτο **Γενικά για τα ρευστά**

Εισαγωγή στη Μηχανική των Ρευστών.....	1
1.1 Ορισμός ρευστών.....	1
1.2 Ιδιότητες των ρευστών.....	2
1.2.1 Θερμοκρασία.....	2
1.2.2 Πίεση.....	4
1.2.3 Πυκνότητα και ειδικό βάρος.....	5
1.2.4 Σχετική πυκνότητα.....	7
1.2.5 Συμπιεστότητα.....	7
1.2.6 Επιφανειακή τάση – Τάση ατμών.....	8
1.2.7 Ιξώδες ή συνεκτικότητα.....	11
1.2.8 Στοιχειώδης όγκος και πυκνότητα ρευστού.....	14
1.3 Ασκήσεις.....	15

Κεφάλαιο Δεύτερο **Στατική των ρευστών**

2.1 Γενικά.....	16
2.2 Υδροστατική πίεση.....	16
2.2.1 Θεμελιώδης εξίσωση της υδροστατικής.....	16
2.2.2 Πορίσματα και εφαρμογές.....	18
2.2.3 Υδροστατική ισορροπία σε πεδία δυνάμεων.....	21
2.3 Η πίεση της ατμόσφαιρας.....	26
2.4 Μέτρηση της πίεσεως.....	27
2.4.1 Μέτρηση ατμοσφαιρικής πίεσεως: Βαρόμετρα.....	27
2.4.2 Μανόμετρα.....	28
2.5 Δυνάμεις, κέντρο πίεσεως.....	32
2.5.1 Κεντροειδές και κέντρο πίεσεως.....	33
2.5.2 Υπολογισμός δυνάμεων πίεσεως.....	33
2.5.3 Μεθοδολογία υπολογισμού και παραδείγματα.....	38
2.6 Άνωση ή άντωση.....	42
2.7 Πλεύση.....	45
2.7.1 Μέτρηση της πυκνότητας υγρών και στερεών.....	47
2.7.2 Υπολογισμός όγκου (V) σώματος τυχαίου σχήματος.....	48
2.8 Ασκήσεις.....	48

Κεφάλαιο Τρίτο **Κινηματική ρευστών**

3.1 Βασικές έννοιες – Είδη ροής.....	53
--------------------------------------	----

3.1.1	Στρωτή και τυρβώδης ροή.	56
3.1.2	Νόμος ιξώδους ροής του Newton.	56
3.1.3	Ιξώδες ή συνεκτικότητα (μ).	58
3.1.4	Στρωτή και τυρβώδης ροή – Ο αριθμός Reynolds.	58
3.1.5	Ροή σε οριακό στρώμα.	60
3.1.6	Ροή γύρω από στερεά – Οπισθέλκουσα δύναμη.	63
3.2	Οι βασικές εξισώσεις ροής.	65
3.3	Εξίσωση (αρχή) της συνέχειας.	66
3.4	Ισοζύγιο ενέργειας.	68
3.4.1	Μορφές ενέργειας.	68
3.4.2	Ισοζύγιο ενέργειας για μόνιμη ροή.	70
3.4.3	Η εξίσωση Bernoulli.	71
3.4.4	Ενεργειακά ύψη – Πιεζομετρική γραμμή.	71
3.4.5	Διορθωτικοί συντελεστές κινητικής ενέργειας.	73
3.4.6	Δυναμική θεώρηση σε ροή ρευστού: Ισχύς.	74
3.5	Εφαρμογές.	75
3.5.1	Θεώρημα του Torricelli.	75
3.5.2	Σωλήνας Venturi.	76
3.5.3	Σημείο ανακοπής (ή στάσιμο σημείο).	76
3.5.4	Σωλήνας Pitot.	77
3.5.5	Ύψος απωλειών	77
3.5.6	Έργο και ισχύς αντλίας.	78
3.6	Ασκήσεις.	79

Κεφάλαιο Τέταρτο
Διαστατική ανάλυση – Ομοιότητα

4.1	Διαστατική ανάλυση.	83
4.1.1	Εισαγωγή.	83
4.1.2	Διαστάσεις και μονάδες.	83
4.1.3	Ομογενείς εξισώσεις.	84
4.1.4	Αδιάστατοι αριθμοί.	85
4.1.5	Διαστατική ανάλυση.	87
4.1.6	Η μέθοδος Rayleigh.	87
4.1.7	Το θεώρημα Π και η μέθοδος Buckingham.	88
4.2	Ομοιότητα.	89
4.2.1	Γενικά για την ομοιότητα.	89
4.2.2	Γεωμετρική ομοιότητα.	90
4.2.3	Κινηματική ομοιότητα.	91
4.2.4	Δυναμική ομοιότητα.	92
4.3	Ασκήσεις.	93

Κεφάλαιο Πέμπτο
Ροή ασυμπίεστων ρευστών σε σωλήνες

5.1	Εισαγωγή.	94
5.2	Στρωτή και τυρβώδης ροή σε σωλήνες.	94
5.3	Οι βασικές εξισώσεις ροής σε σωλήνες.	97
5.3.1	Εξίσωση συνέχειας.	97
5.3.2	Εξίσωση ενέργειας.	97
5.4	Απώλειες ενέργειας.	99

5.4.1 Γραμμικές απώλειες.	99
5.4.2 Τοπικές απώλειες.	107
5.5 Ολικές απώλειες.	109
5.6 Ασκήσεις.	116

Κεφάλαιο Έκτο **Ορμή και δυνάμεις**

6.1 Θεώρημα ωθήσεως – ορμής.	119
6.2 Η εξίσωση της ορμής.	119
6.3 Διορθωτικοί συντελεστές ορμής.	123
6.4 Δυνάμεις ασκούμενες σε αγωγούς.	124
6.5 Εφαρμογές.	126
6.5.1 Ευθύγραμμος αγωγός σταθερής διατομής.	126
6.5.2 Ακροφύσιο.	127
6.5.3 Αλλαγή διευθύνσεως (γωνίες).	129
6.5.4 Διακλάδωση ροής.	131
6.5.5 Ροή σε ανακλαστήρα.	131
6.5.6 Ροή σε περύγιο.	133
6.6 Η εξίσωση της στροφορμής.	135
6.7 Ασκήσεις.	137

Κεφάλαιο Έβδομο

Σωλήνες, εξαρτήματα, σύνδεση, δίκτυα σωληνώσεων και όργανα ελέγχου ροής

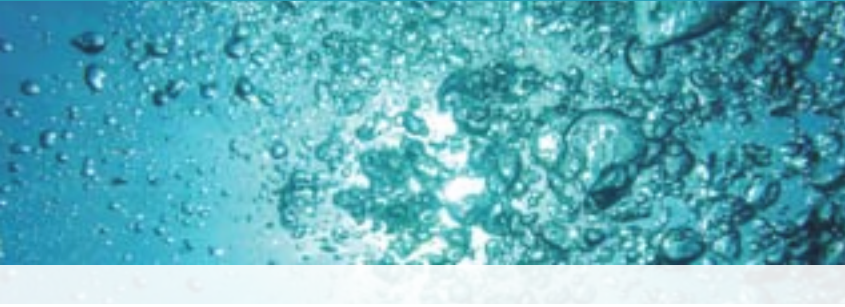
7.1 Σύνδεση σωλήνων σε σειρά.	140
7.1.1 Υπολογισμός του ύψους απωλειών.	141
7.1.2 Υπολογισμός της παροχής.	142
7.1.3 Υπολογισμός διαμέτρου.	144
7.2 Παράλληλη σύνδεση σωλήνων.	146
7.2.1 Υπολογισμός του ύψους απωλειών.	147
7.2.2 Υπολογισμός των παροχών.	148
7.2.3 Υπολογισμός διαμέτρου.	149
7.3 Μεικτή σύνδεση σωλήνων.	150
7.4 Διακλάδωση σωλήνων.	151
7.5 Γενικά για τα δίκτυα.	151
7.6 Υπολογισμός δικτύων σωληνώσεων.	153
7.7 Όργανα μετρήσεως.	154
7.7.1 Γενικά.	154
7.7.2 Όργανα μετρήσεως της παροχής.	155
7.8 Ασκήσεις.	158
Παράρτημα.	161
Ευρετήριο.	168
Βιβλιογραφία.	171

ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Σύμβολο	Μονάδα	Μέγεθος	Σύμβολο	Μονάδα	Μέγεθος
A, S	m ²	Εμβαδόν	I _{xy}	m ⁴	Γινόμενο αδράνειας ως προς τους άξονες x, y
A	N	Άωση	J	kg·m/s	Ορμή
b	m	Βάση (μήκος)	K	Pa	Σταθερά ελαστικότητας
b	m	Πάχος τοιχώματος	L, l	m	Μήκος, Διάστημα
c _p	J/kgK	Ειδική ερμoxωρητικότητα υπό σταθερή πίεση	L _{eq}	m	Ισοδύναμο μήκος
C	-	Συντελεστής τραχύτητας Hazen-Williams	L̄, L	kg·m ² /s	Στροφορμή
C _c	-	Συντελεστής συστολής στομίου (orifice)	m	kg	Μάζα
C _D	-	Συντελεστής οπισθέλκουσας	ḡ	kg/s	Παροχή μάζας
C _v	-	Συντελεστής διορθώσεως ταχύτητας	M	Nm	Ροπή δυνάμεως
C _w	-	Συντελεστής ισάλου πλοίου	n	s ⁻¹	Συχνότητα (ή ταχύτητα) περιστροφής
d	m	Εσωτερική διάμετρος	n	-	Συντελεστής παροχής στομίου
d _h	m	Ισοδύναμη (ή υδραυλική) διάμετρος	ñ	-	Μοναδιαίο διάνυσμα
d _x , d _y	m	Απόσταση άξονα	N	-	Αριθμός μορίων
D	m	Εξωτερική διάμετρος	p	Pa	Πίεση
DN, Φ		Ονομαστική διάμετρος	p _{ατμ}	Pa	Ατμοσφαιρική πίεση
E	kg/ms	Ιξώδες δίνης (ή δινοϊξώδες)	p _{σχ}	Pa	Σχετική πίεση
E	J	Ενέργεια	p _g	Pa	Σχετική πίεση
E _δ	J	Δυναμική ενέργεια	p _v	Pa	Τάση ατμών
E _κ	J	Κινητική ενέργεια	P	W	Ισχύς
Ė	W	Ροή ενέργειας (ισχύς)	P _r	-	Αριθμός Prandtl
Eu	-	Αριθμός Euler	q	J/Kg	Θερμότητα ανά μονάδα μάζας (Θερμοδυναμική)
f	-	Συντελεστής τριβής	Q̇	W	Ροή θερμότητας (θερμική ισχύς)
f _f	-	Συντελεστής τριβής Fanning	V̇	m ³ /s	Παροχή όγκου
F	N	Δύναμη	R, r	m	Ακτίνα
F _D	N	Οπισθέλκουσα δύναμη	R	J/KgK	Σταθερά αερίου (Θερμοδυναμική)
F _κ	N	Κεντρομόλος δύναμη	Re	-	Αριθμός Reynolds
Fr	-	Αριθμός Froude	S	m ² /m	Εξωτερικό εμβαδόν ανά μονάδα μήκους σωλήνα
g	m/s ²	Επιτάχυνση βαρύτητας	T	K	Θερμοκρασία
h	m	Ύψος	T	s	Περίοδος
h	m	Ύψος ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα βάρους)	t	s	Χρόνος
h _f	m	Ύψος γραμμικών απωλειών	u	m/s	Τοπική ταχύτητα
h _k , h _i	m	Ύψος τοπικών απωλειών	u	J/Kg	Ειδική Εσωτερική Ενέργεια (Θερμοδυναμική)
h _i	m	Ύψος απωλειών σωλήνα i	U	J	Εσωτερική Ενέργεια (Θερμοδυναμική)
h _p	m	Ύψος αντλίας	v	m/s	Ταχύτητα
h _t	m	Ύψος στροβίλου	v _r	m/s	Ακτινική συνιστώσα ταχύτητας
K	-	Συντελεστής τοπικών απωλειών	v _u	m/s	Επιτροχία συνιστώσα ταχύτητας
H	m	Ολικό ύψος	V	m ³	Όγκος
h	J/kg	Ειδική ενθαλπία (Θερμοδυναμική)	h	m	Ύψος
H	J	Ενθαλπία (Θερμοδυναμική) ολική	γ _ο	m	Πάχος οριακού στρώματος
I	kg·m ²	Ροπή αδράνειας	w	m/s	Εφαπτομενική ταχύτητα σε πτερωτή αντλίας
I _x	m ⁴	Ροπή αδράνειας επιφάνειας ως προς άξονα x			

Σύμβολο	Μονάδα	Μέγεθος	Σύμβολο	Μονάδα	Μέγεθος
w	J/Kg	Έργο ανά μονάδα μάζας (Θερμοδυναμική)	ε	m	Τραχύτητα
W	J	Έργο (Θερμοδυναμική)	η	-	Βαθμός αποδόσεως
Z	-	Συντελεστής συμπίεστότητας	θ, ω	rad	Γωνία
α	m/s ²	Επιτάχυνση	λ	-	Κλίμακα μήκους
α	K ⁻¹	Συντελεστής γραμμικής διαστολής	μ	kg/ms	Δυναμικό ιξώδες (ή συνεκτικότητα)
α	-	Διορθωτικός συντελεστής κινητικής ενέργειας	ν	m ² /s	Κινηματικό ιξώδες
α _κ	m/s ²	Κεντρομόλος επιτάχυνση	Π	-	Αδιάστατη παράμετρος
α _φ	m/s ²	Φυγόκεντρη επιτάχυνση	ρ	kg/m ³	Πυκνότητα
α _ρ	rad/s ²	Γωνιακή επιτάχυνση	ρ _{σχ}	-	Σχετική πυκνότητα
β	K ⁻¹	Συντελεστής κυβικής διαστολής	σ	N/m	Επιφανειακή τάση
β	Pa ⁻¹	Συμπίεστότητα	Σh	m	Συνολικό ύψος απωλειών
β	-	Συντελεστής διορθώσεως της ορμής	Σh _j	m	Συνολικό ύψος απωλειών βρόχου j
B, W	N	Βάρος	τ	Pa	Διατμητική τάση
B _φ	N	Φαινόμενο βάρος	τ _{εφ}	Pa	Εφελκυστική τάση
γ	N/m ³	Ειδικό βάρος	υ	m ³ /kg	Ειδικός όγκος
γ _{σχ}	-	Σχετικό ειδικό βάρος	Φ		Φυσική ποσότητα
Δ	-	Διαφορά, μεταβολή	ω	rad/s	Γωνιακή ταχύτητα
Δ	tons	Εκτόπισμα πλοίου	Ω	kg·m/s	Ώθηση
			x, y, z	m	Διαστάσεις χώρου





Εισαγωγή στη Μηχανική των Ρευστών.

Η **Μηχανική των Ρευστών** ανήκει στην ευρύτερη ενότητα των Φυσικών επιστημών. Αναπτύχθηκε ως ανεξάρτητος τεχνικός κλάδος με σημαντικές εφαρμογές σε κάθε τομέα της παραγωγικής δραστηριότητας και ισχυρή διασύνδεση με άλλους επιστημονικούς κλάδους (π.χ. θερμοδυναμική, μετάδοση θερμότητας, υδρολογία, μετεωρολογία, ναυπηγία, ιατρική κ.ά.). Ασχολείται με τα φαινόμενα που συναντώνται στα ρευστά υλικά σώματα (και ως τέτοια εννοούμε τα υγρά και τα αέρια), όταν αυτά βρίσκονται σε μακροσκοπική ισορροπία (στατική των ρευστών) και, κυρίως, όταν αυτά ρέουν (δυναμική των ρευστών).

Η **στατική των ρευστών**, μας επιτρέπει να κατανοήσουμε σημαντικές ιδιότητες και φαινόμενα (όπως την ατμοσφαιρική και υδροστατική πίεση, την άνωση και τις δυνάμεις που ασκούν τα ρευστά), να αντιμετωπίσουμε πρακτικά προβλήματα και να αξιοποιήσουμε τα συμπεράσματά μας σε πολλές εφαρμογές όπως μανόμετρα, υδραυλικά πιεστήρια, διαχωριστές βαρύτητας κ.λπ.).

Η **δυναμική των ρευστών**, αποτελεί τον πυρήνα των ζητημάτων που σχετίζονται με τη **μεταφορά μάζας**. Η κατανόηση της συμπεριφοράς των ρευστών είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση προβλημάτων σχετικών με τη ροή τους στους αγωγούς, τη χρήση αντλιών, αεροσυμπιεστών και άλλου σχετικού εξοπλισμού διακινήσεως των ρευστών. Παράλληλα, μας διευκολύνει να κατανοήσουμε τις διεργασίες διαχωρισμού που βασίζονται στη διάχυση και μεταφορά μάζας, στις αεροδυναμικές και υδροδυναμικές διεργασίες κατά την κίνηση στερεών μέσα σε ρευστά (πλοία, αυτοκίνητα, αεροπλάνα κ.λπ.), καθώς επίσης και τις διεργασίες που σχετίζονται με τη μετάδοση θερμότητας.

Το πεδίο της Μηχανικής των Ρευστών είναι ευρύτατο και αγγίζει σχεδόν κάθε ανθρώπινη προσπάθεια. Οι επιστήμες της μετεωρολογίας, της φυσικής ωκεανογραφίας και της υδρολογίας ασχολούνται με τις φυσικές ροές του νερού και του αέρα. Η ια-

τρική με τη ροή του αέρα (μελέτη του αναπνευστικού συστήματος), με την κυκλοφορία του αίματος (αιμοδυναμική) κ.ά.. Όλα τα προβλήματα μεταφορών περιλαμβάνουν την κίνηση ρευστών, με πολύ αναπτυγμένους ειδικούς κλάδους (αεροδυναμική αεροσκαφών και αυτοκινήτων, ναυτική υδροδυναμική κ.ά.). Σχεδόν όλη η παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας αξιοποιεί τη ροή είτε του νερού είτε του ατμού. Όλα τα προβλήματα καύσεως περιλαμβάνουν τη διακίνηση ρευστών, όπως επίσης τα πιο κλασικά προβλήματα της αρδεύσεως, του ελέγχου των πλημμυρών, της παροχής νερού, της στεγανώσεως, της διαθέσεως των λυμάτων, της διακινήσεως του πετρελαίου και του φυσικού αερίου.

Η σημασία των ρευστών για τον τομέα της ναυτιλίας είναι τεράστια. Εκτός από τα ζητήματα που σχετίζονται με την άνωση, την πλευση και την κίνηση του πλοίου στη θάλασσα, το ίδιο το πλοίο αποτελεί μία σχετικά αυτόνομη παραγωγική μονάδα, στην οποία συναντάμε πολλά είδη ρευστών (νερό διαφόρων χρήσεων, καύσιμα, λάδια, υδρατμό, αέρα κ.λπ.). Οι σωληνώσεις και τα μηχανήματα διακινήσεως αυτών των ρευστών δεν περιορίζονται μόνο στο μηχανοστάσιο, αλλά εκτείνονται σε όλο το πλοίο. Η μελέτη και η κατανόηση επομένως της συμπεριφοράς των ρευστών είναι εξαιρετικά σημαντική για τον Μηχανικό.

1.1 Ορισμός ρευστών.

Εμπειρικά γνωρίζουμε ότι ως ρευστά θεωρούνται σώματα χωρίς σταθερό σχήμα που έχουν τη δυνατότητα να ρέουν (σε αντίθεση με τα στερεά). Τέτοια σώματα είναι το νερό, ο αέρας και γενικότερα όλα τα **υγρά** και τα **αέρια**. Αλλά εμπειρικά γνωρίζουμε επίσης πως και λεπτόκοκκα στερεά (π.χ. άμμος, σιτάρι) «ρέουν». Από την άλλη, κάποια υγρά ευρισκόμενα σε χαμηλές θερμοκρασίες, σε αρκετές περιπτώσεις ρέουν με δυσκολία (παχύρρευστα υγρά). Ο εμπειρικός προσδιορισμός της έννοιας λοιπόν δεν αρκεί. Πρέπει να εξετάσουμε και το αίτιο που προκαλεί τη ροή (πιο σωστά, την απώλεια της καταστάσεως ισορροπίας και τη μεταβολή της κινητικής καταστάσεως). Αν

σε οριζόντιο επίπεδο τοποθετήσουμε ένα στερεό σώμα αυτό θα ισορροπήσει. Το ίδιο θα συμβεί αν τοποθετήσουμε μικρή ποσότητα νερού (μία σταγόνα). Αν όμως το επίπεδο αποκτήσει κάποια κλίση, το στερεό, υπό την επίδραση του βάρους του, θα κινηθεί σαν ενιαίο σώμα (χωρίς να αλλάξουν οι σχετικές θέσεις των μορίων του). Το ίδιο θα συμβεί και με το νερό αλλά όχι ενιαία, αφού μικρές ποσότητες θα παραμείνουν στην επιφάνεια κατά μήκος της διαδρομής του. Τα στρώματα μορίων που απέχουν περισσότερο από το επίπεδο, θα ολισθαίνουν πάνω στα υποκείμενα στρώματα και θα κινούνται πιο γρήγορα. Λέμε πως το νερό *ρέει* (αφού το στερεό σώμα *μετακινείται*).

Εκείνο που προκαλεί την έναρξη της ροής, είναι μια δύναμη κατά τη διεύθυνση της κινήσεως. Πιο συγκεκριμένα, για να παρατηρηθεί το φαινόμενο της ροής, πρέπει να εφαρμοσθεί στο ρευστό μια **διατμητική δύναμη** και να προκληθεί **συνεχής, ανομοιομορφη και οριστική μετακίνηση των μορίων του σώματος κατά τη διεύθυνσή της**. Στη φυσική ροή του νερού σε ένα ποτάμι, το ρόλο της διατμητικής δύναμης τον διαδραματίζει η συνιστώσα του βάρους του κατά τη διεύθυνση της κοίτης του ποταμού. Στη φυσική ροή του αέρα (άνεμοι), οριζόντια διατμητική δύναμη είναι η δύναμη που δημιουργείται λόγω διαφοράς πιέσεως στην ατμόσφαιρα. (Η φυσική ροή του αέρα αποτελεί πιο πολύπλοκο ζήτημα, αφού και η διαφορά θερμοκρασίας από τόπο σε τόπο, σε συνδυασμό με τη γήινη βαρύτητα, δύναται να προκαλέσει αξιόλογα τοπικά ρεύματα).

Ως **ρευστά** λοιπόν χαρακτηρίζονται τα σώματα εκείνα που υφιστάμενα διατμητική τάση, δεν παραμένουν σε κατάσταση στατικής ισορροπίας, ούτε κινούνται ενιαία, αλλά οι υπερκείμενες στοιχειώδεις μάζες τους ολισθαίνουν στα υποκείμενα στρώματα του σώματος.

1.2 Ιδιότητες των ρευστών.

Όπως σε όλες τις φυσικές επιστήμες, έτσι και στη Μηχανική των Ρευστών, οι τρεις βασικές θερμοδυναμικές ιδιότητες των σωμάτων [**θερμοκρασία (T), πίεση (p), πυκνότητα (ρ)**] παίζουν καθοριστικό ρόλο. Όταν μελετάμε την ενεργειακή συμπεριφορά των ρευστών, αξιοποιούμε τις (θερμοδυναμικές) ιδιότητες **εσωτερική ενέργεια (u), ενθαλπία (h) και εντροπία (s)**, καθώς επίσης την **ειδική θερμότητα (c)**. Χρήσιμες είναι επίσης η **επιφανειακή τάση (σ)** και η **τάση ατμών (p_v)** των υγρών. Η ιδιότητα όμως που διαδραματίζει εξαιρετικό ρόλο στη ροή των ρευστών (και τα διαχωρίζει από τα στερεά σώματα),

είναι το **ιξώδες** (ή **συνεκτικότητα**) **μ**. Τέλος, αν αντικείμενο μελέτης είναι η ροή θερμότητας, χαρακτηριστική ιδιότητα του ρευστού αποτελεί ο **συντελεστής μεταφοράς θερμότητας α**.

Οι τιμές των παραπάνω ιδιοτήτων, οι οποίες καθορίζουν την κατάσταση ενός ρευστού, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Γενικά, γνωρίζοντας τη θερμοκρασία και την πίεση ενός ρευστού, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των υπολοίπων, αξιοποιώντας πίνακες, διαγράμματα ή τύπους:

$$\rho = \rho(T, p) \quad h = h(T, p) \quad \mu = \mu(T, p) \quad \text{κ.λπ.}$$

Όμως, κατά τη διεργασία μεταβάσεως ενός ρευστού από την υγρή στην αέρια κατάσταση (βρασμός) ή αντίστροφα (υγροποίηση, συμπύκνωση), η παραπάνω εξάρτηση από την πίεση και τη θερμοκρασία δεν ισχύει. Π.χ. το νερό σε ατμοσφαιρική πίεση βράζει στους 100°C (373°K) (πίν. 1 Παραρτήματος). Σε όλη τη διάρκεια του βρασμού έχουμε $p = 101,3 \text{ kPa}$ και $T = 373^\circ \text{ K}$. Όλες όμως οι άλλες ιδιότητες του μείγματος υγρού νερού και υδρατμών μεταβάλλονται. Αυτό συμβαίνει επειδή το υγρό νερό έχει διαφορετικές ιδιότητες (πυκνότητα, ενθαλπία, συνεκτικότητα κ.λπ.) από τους υδρατμούς ίδιας πιέσεως και θερμοκρασίας. Άρα εξετάζουμε ένα σύστημα με δύο διαφορετικά ρευστά. Το ίδιο θα παρατηρήσουμε εξετάζοντας μείγμα νερού και αέρα ή μείγμα δύο μη αναμειγμένων υγρών (π.χ. νερό και λάδι). Στις περιπτώσεις αυτές μιλάμε για **ρευστό σύστημα δύο φάσεων**. Για τους υπολογισμούς πρέπει να λάβουμε υπόψη τις ιδιότητες των δύο φάσεων, καθώς και την αναλογία με την οποία συνυπάρχουν. Τα διαλύματα (ομογενή μείγματα) ορισμένης περιεκτικότητας, έχουν κοινές ιδιότητες σε όλη τη μάζα τους, και θα θεωρούνται ρευστά μίας φάσεως.

Ως εκ τούτου, αν δεν διευκρινίζεται διαφορετικά, θεωρούμε πως έχουμε συστήματα **μίας φάσεως**.

1.2.1 Θερμοκρασία.

Όπως γνωρίζουμε από τη φυσική, η θερμοκρασία εξαρτάται από τη μέση ταχύτητα των μορίων του σώματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η μέση ταχύτητα, τόσο μεγαλύτερη και η θερμοκρασία του. Σε συνδυασμό με την πίεση, καθορίζει τη φυσική κατάσταση του σώματος, αν δηλαδή απ' αυτήν ένα σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ρευστού.

1) Η αλλαγή της φυσικής καταστάσεως των σωμάτων.

Σε σχετικά χαμηλές θερμοκρασίες, τα μόρια ενός σώματος κινούνται ελάχιστα. Πιο συγκεκριμένα, τα

λαντώνονται γύρω από ένα κέντρο ισορροπίας. Δεν απομακρύνονται από τη θέση τους λόγω των ισχυρών διαμοριακών δυνάμεων. Το σώμα βρίσκεται σε **στερεά κατάσταση**. Προσδίδοντας στο σώμα ενέργεια (συνήθως θερμότητα), αυξάνεται η μέση ταχύτητα των μορίων του, άρα αυξάνεται η θερμοκρασία του. Υπάρχει μια θερμοκρασία, χαρακτηριστική για κάθε σώμα, στην οποία το σώμα περνά από τη **στερεά** στην **υγρή κατάσταση (σημείο τήξεως)**. Αν ακολουθήσουμε τον αντίστροφο δρόμο (δηλ. αφαίρεση ενέργειας από το υγρό), στην ίδια ακριβώς θερμοκρασία το σώμα θα στερεοποιηθεί (**σημείο πήξεως**).

Σε ένα υγρό, τα μόρια δεν έχουν συγκεκριμένη θέση, αλλά κινούνται ελεύθερα σε χώρο περιορισμένο από τα τοιχώματα του δοχείου και την **ελεύθερη επιφάνεια** του υγρού. Η κινητική ενέργεια των μορίων του υγρού είναι πολύ μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια που είχαν, όταν το σώμα βρισκόταν σε στερεά κατάσταση. Λόγω της αυξημένης κινητικής ενέργειας, οι διαμοριακές δυνάμεις δεν δύνανται να συγκρατήσουν τα μόρια σε συγκεκριμένες θέσεις, όπως συμβαίνει στο στερεό σώμα. Ο ρόλος των διαμοριακών δυνάμεων έχει μειωθεί.

Συνεχίζοντας να προσδίδουμε ενέργεια στο υγρό, η μέση ταχύτητα των μορίων του αυξάνεται και άλλο, επομένως και η θερμοκρασία του. Για ορισμένη τιμή πίεσεως, υπάρχει μια συγκεκριμένη θερμοκρασία, χαρακτηριστική για κάθε σώμα, στην οποία το υγρό μετατρέπεται σε αέριο (ατμό), προσλαμβάνοντας ενέργεια (**σημείο ζέσεως ή βρασμού**). Κατά την αντίστροφη πορεία, ο ατμός υγροποιείται αποβάλλοντας ενέργεια (**σημείο υγροποίησης**). Το σημείο ζέσεως ενός σώματος είναι αρκετά υψηλότερο από το σημείο τήξεως. Στην **αέρια κατάσταση** δεν υπάρχει συγκεκριμένη ελεύθερη επιφάνεια. Τα μόρια του σώματος κινούνται ελεύθερα σε όλο το διαθέσιμο χώρο. Η κινητική τους ενέργεια είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της υγρής καταστάσεως. Καθώς η μέση απόσταση των μορίων είναι πολύ μεγάλη (σε σχέση με την αντίστοιχη απόσταση στην υγρή κατάσταση), οι διαμοριακές δυνάμεις είναι πολύ μικρές και στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρούνται αμελητέες.

2) Το φαινόμενο της διαστολής.

Αν έχουμε ένα σώμα σε σταθερή πίεση και ορισμένη φυσική κατάσταση, η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε αύξηση του όγκου του, που οφείλεται στην αύξηση της μέσης ταχύτητας των μορίων. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **διαστολή**.

Το ποσοστό της αυξήσεως είναι διαφορετικό για

κάθε σώμα και καθορίζεται από έναν συντελεστή γνωστό ως **συντελεστή κυβικής διαστολής**. Αυτός είναι χαρακτηριστικός για κάθε σώμα (αποτελεί φυσική ιδιότητα του σώματος) και μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία (αυξάνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία).

Όταν μειώνεται η θερμοκρασία του σώματος, παρατηρείται το αντίστροφο φαινόμενο (**συστολή**).

Η μεταβολή του όγκου ενός σώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta T \quad (1.1)$$

όπου: V_0 ο αρχικός όγκος του σώματος, ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας του και β ο συντελεστής κυβικής διαστολής.

Ο συντελεστής κυβικής διαστολής των στερεών είναι της τάξεως του 10^{-5} K^{-1} και των υγρών της τάξεως του 10^{-2} έως 10^{-3} K^{-1} (πίν. 1.2.1).

Πίνακας 1.2.1
Συντελεστές κυβικής
διαστολής διαφόρων στερεών.

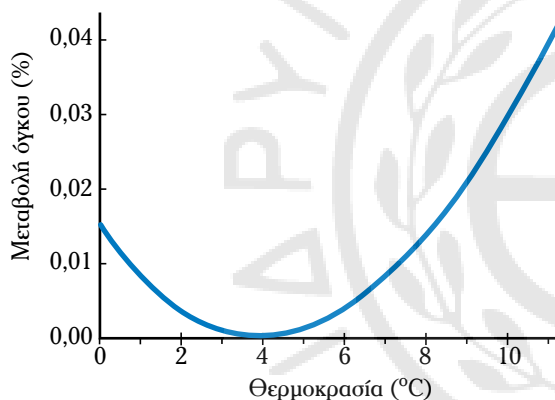
Υλικό	β (10^{-6} K^{-1}) (20°C)
Κράμα Invar	0,4
Σίδηρος	36
Χαλκός	50
Νερό	207
Υδράργυρος	181
Γλυκερίνη	490
Ελαιόλαδο	682
Πετρέλαιο ($d_{sx}=0,845$)	900
Κηροζίνη	990
Οινόπνευμα	1012
Τετρακλωράνθρακας	1184
Αέρας (0°C)	3660

Στα αέρια ο συντελεστής κυβικής διαστολής δεν εξαρτάται από το είδος του αερίου, αλλά μόνο από τη θερμοκρασία T_0 . Όπως προκύπτει από τους νόμους των αερίων (διεργασία σταθερής πίεσεως): $\beta = 1/T_0$.

Εάν ο όγκος V_0 αντιστοιχεί σε θερμοκρασία $T_0 = 273^\circ\text{C}$, τότε για τα αέρια: $\beta = 1/273 \text{ K}^{-1} = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Αξιοσημείωτη είναι η ανωμαλία που παρουσιάζεται στη συστολή του νερού. Πιο συγκεκριμένα, καθώς

μειώνεται η θερμοκρασία του, παρατηρούμε το φαινόμενο της συστολής (μείωση όγκου). Αλλά το φαινόμενο αντιστρέφεται σε θερμοκρασία 4°C (ακριβέστερα στους 3,984°C) όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2α. Σ' αυτήν τη θερμοκρασία το νερό παρουσιάζει τον ελάχιστο ειδικό όγκο (άρα τη μέγιστη πυκνότητα). Καθώς η θερμοκρασία μειώνεται από τους 4 στους 0°C, το νερό διαστέλλεται (ο συντελεστής διαστολής γίνεται αρνητικός). Στους 0°C στερεοποιείται. Η κρυστάλλωση του νερού οδηγεί σε παραπέρα αύξηση του όγκου. Το νερό σε στερεή κατάσταση (πάγος) σε 0°C, έχει όγκο κατά 9,1% μεγαλύτερο από τον αντίστοιχο του υγρού. Αυτός είναι ο λόγος που ο πάγος επιπλέει στο υγρό νερό. Στις τεχνικές εφαρμογές πρέπει να λαμβάνομε υπόψη το φαινόμενο αυτό και να παίρνομε τα αναγκαία μέτρα όταν υπάρχει πιθανότητα στερεοποιήσεως του νερού (λόγω χαμηλών θερμοκρασιών) μέσα σε δοχεία ή σωληνώσεις, αφού η διαστολή μπορεί να προκαλέσει σοβαρές ζημιές.



Σχ. 1.2α
Διαστολή νερού.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη Μηχανική των Ρευστών έχει και η **γραμμική διαστολή** των στερεών. Ένα στερεό με πολύ αναπτυγμένη τη μία διάστασή του (μήκος) σε σχέση με τις άλλες δύο (π.χ. μια μεταλλική ράβδος ή ένας σωλήνας), κατά τις θερμοκρασιακές μεταβολές πιθανόν να υποστεί αξιόλογη μεταβολή της διαστάσεως αυτής. Η μεταβολή του μήκους υπολογίζεται από εξίσωση ανάλογη με την (1.1):

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (1.2)$$

όπου: α είναι ο **συντελεστής γραμμικής διαστολής**, ίσος με το 1/3 του β .

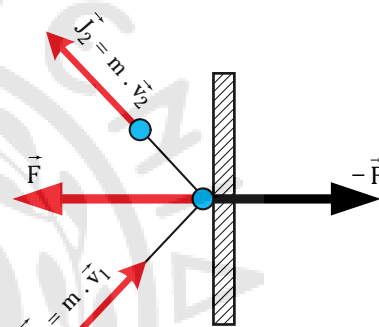
1.2.2 Πίεση.

Τα μόρια των ρευστών κινούμενα με σχετικά μεγάλες ταχύτητες στο χώρο τους, συγκρούονται μετα-

ξύ τους, επί των τοιχωμάτων των δοχείων που τα περιέχουν, αλλά και επί ξένων σωμάτων που βρίσκονται μέσα στη μάζα τους. Οι κρούσεις αυτές ασκούν δυνάμεις κάθετες στις επιφάνειες, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2β. Το μόριο, προσπίπτοντας στην επιφάνεια με ορμή \vec{J}_1 , ανακλάται με διαφορετική ορμή \vec{J}_2 . Σύμφωνα με το θεώρημα της μεταβολής της ορμής (κεφ. 6), προκειμένου να μεταβληθεί η ορμή του μορίου πρέπει να ασκηθεί πάνω του κατάλληλη δύναμη \vec{F} για ορισμένο χρόνο:

$$\vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow \vec{F} = \frac{\vec{J}_2 - \vec{J}_1}{\Delta t}$$

όπου: Δt ο χρόνος που διαρκεί η κρούση και \vec{F} η δύναμη που ασκεί το τοίχωμα στο μόριο.



Σχ. 1.2β
Κρούση μορίου.

Σύμφωνα με την Αρχή δράσεως-αντιδράσεως, το μόριο ασκεί δύναμη ίση και αντίθετη επί του τοιχώματος. Η συνισταμένη (κάθετη) δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια είναι το άθροισμα των δυνάμεων που οφείλονται στις κρούσεις όλων των μορίων επί αυτής.

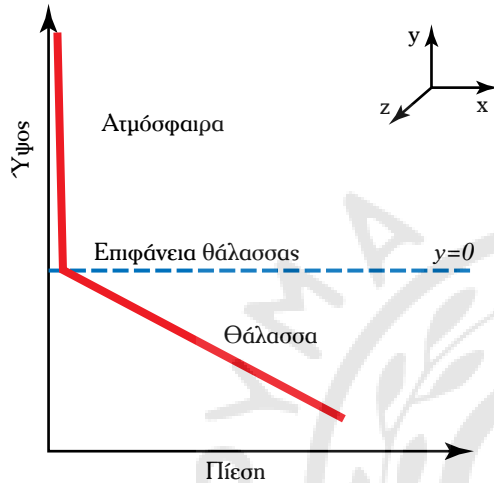
Η πίεση του ρευστού σε κάποιο σημείο, είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, που το ρευστό ασκεί σε σώμα που βρέθηκε στο σημείο αυτό. Παρατηρούμε πως η πίεση που ασκεί το ρευστό εξαρτάται από τη μέση ταχύτητα των μορίων και τον ρυθμό των κρούσεων.

Η πίεση λοιπόν των ρευστών είναι αποτέλεσμα μοριακών κρούσεων. Κατά συνέπεια, είναι αδύνατο να λάβει αρνητικές τιμές. Παράλληλα δεν πρέπει να μας διαφεύγει το γεγονός πως η δύναμη πύεσεως που ασκείται από το ρευστό σε μια επιφάνεια, σύμφωνα με την Αρχή δράσεως-αντιδράσεως, προϋποθέτει ή συνεπάγεται την ύπαρξη ίσης και αντίθετης δυνάμεως που ασκεί η επιφάνεια στο ρευστό.

Στο **πεδίο βαρύτητας**, τα υποκείμενα στρώματα

του αέρα υφίστανται πίεση από τα υπερκείμενα (λόγω του βάρους τους). Έτσι, η πίεση αυξάνεται καθώς μειώνεται το ύψος. **Η ατμοσφαιρική πίεση οφείλεται στο βάρος του αέρα** και ασκείται σε όλα τα σώματα που βρίσκονται βυθισμένα σ' αυτόν.

Το ίδιο φαινόμενο παρουσιάζεται σε όλα τα ρευστά. Έτσι, αφού στην επιφάνεια της θάλασσας επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση, καθώς βυθιζόμαστε στη θάλασσα (δηλ. αυξάνει το βάθος), η πίεση αυξάνεται (σχ. 1.2γ).



Σχ. 1.2γ
Μεταβολή της πίεσεως.

Στα αέρια που βρίσκονται σε ισορροπία, όταν δεν υπάρχουν σημαντικές υψομετρικές διαφορές, η πίεση θεωρείται (κατά πολύ ικανοποιητική προσέγγιση) σταθερή σε όλη τη μάζα του αερίου. Αντίθετα, η πίεση στα υγρά μεταβάλλεται σημαντικά σε συνάρτηση με το ύψος.

Συνοψίζοντας, η πίεση ενός ρευστού εξαρτάται από τη θερμοκρασία, την πυκνότητα, το πεδίο βαρύτητας, το ύψος, καθώς και από άλλες δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό. Όταν το ρευστό βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας, η πίεση καλείται **στατική**, ενώ όταν ρέει (οπότε υπάρχει και η προσαυτολινομένη κίνηση των μορίων), **δυναμική**.

Στη Μηχανική των Ρευστών συχνά μας ενδιαφέρει η **σχετική πίεση** P_g ή P_{ox} . Αυτή ορίζεται ως η διαφορά της (απόλυτης) πίεσεως από την πίεση της ατμόσφαιρας:

$$P_{abs} = P_g + P_{ατμ} \quad \text{ή} \quad P_{abs} = P_g + P_{εξ}$$

όπου: P_{abs} η απόλυτη πίεση, P_g η πίεση (σχετική) που δείχνει το μανόμετρο (gauge), $p_{ατμ}$ η πίεση της ατμόσφαιρας και $p_{εξ}$ η εξωτερική πίεση γενικά.

Η πίεση, σε συνδυασμό με τη θερμοκρασία, καθο-

ρίζει τη φυσική κατάσταση των σωμάτων. Επηρεάζει επίσης σημαντικά όλες τις ιδιότητες των ρευστών και ιδιαίτερα των αερίων. Ταυτόχρονα, είναι η σημαντικότερη παράμετρος της συμπεριφοράς των ρευστών και για τούτο θα τη μελετήσουμε διεξοδικά στα επόμενα κεφάλαια.

1.2.3 Πυκνότητα και ειδικό βάρος.

Πυκνότητα (density) ενός σώματος καλείται η μάζα του ανά μονάδα όγκου. Η πυκνότητα είναι αντίστροφη του ειδικού όγκου:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1}{\upsilon} \quad (1.3)$$

όπου: υ ο **ειδικός όγκος** (specific volume).

Ειδικό βάρος (specific weight) αντίστοιχα καλείται το βάρος ανά μονάδα όγκου:

$$\gamma = \frac{B}{V} \quad (1.3a)$$

Οι δύο ιδιότητες δεν είναι ανεξάρτητες. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.3a) το βάρος ($B = m \cdot g$) και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (1.3) προκύπτει η σχέση:

$$\gamma = \rho \cdot g \quad (1.3b)$$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην πυκνότητα (η οποία αποτελεί βασική ιδιότητα των σωμάτων). Γνωρίζοντας την πυκνότητα ενός σώματος, μπορούμε, αν χρειάζεται, να υπολογίσουμε και το ειδικό βάρος από την εξίσωση (1.3β).

Τα ρευστά είναι ομογενή σώματα, δηλαδή, σε συγκεκριμένες συνθήκες πίεσεως και θερμοκρασίας, έχουν την ίδια πυκνότητα σε όλα τα σημεία τους.

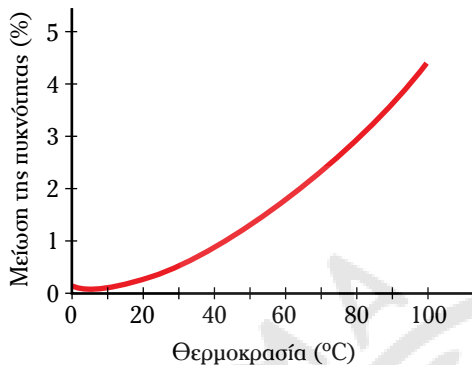
Η πυκνότητα των υγρών είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την πυκνότητα των αερίων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα μόρια των υγρών βρίσκονται σε μικρές αποστάσεις μεταξύ τους (δηλ. τα υγρά έχουν μεγάλη μοριακή συγκέντρωση), σε σχέση με τα μόρια των αερίων. Για παράδειγμα, σε κανονικές συνθήκες πίεσεως και θερμοκρασίας, η πυκνότητα του νερού είναι 785 φορές μεγαλύτερη απ' την πυκνότητα του αέρα, ενώ στους 100°C το υγρό νερό έχει 1600 φορές μεγαλύτερη πυκνότητα από υδρατμό ίδιας θερμοκρασίας.

1) Επίδραση της θερμοκρασίας.

Η μεταβολή της θερμοκρασίας επηρεάζει την πυκνότητα των σωμάτων.

Λόγω του φαινομένου της διαστολής (παράγρ. 1.2.1), η **αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί** σε

αύξηση του όγκου του σώματος, άρα **σε μείωση της πυκνότητας**. Εξαιρέση παρουσιάζει το νερό από τους 0°C ως τους 4°C: Η πυκνότητά του αυξάνεται όταν η θερμοκρασία του αυξάνεται από τους 0°C ως τους 4°C, όπου και λαμβάνει την μέγιστη τιμή της (σχ. 1.2α). Αλλά από τους 4°C και πάνω, συμπεριφέρεται κανονικά: η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε μείωση της πυκνότητάς του (σχ. 1.2β).



Σχ. 1.2β

Μεταβολή της πυκνότητας του νερού σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία.

Η διαστολή είναι εντονότερη στα αέρια σε σχέση με τα υγρά. Για παράδειγμα, ο συντελεστής διαστολής του πετρελαίου είναι 4 φορές μικρότερος από του αέρα και ο συντελεστής διαστολής του νερού περίπου 17 φορές (πίν. 1.2.1). Έτσι, αν η θερμοκρασία αυξηθεί από τους 20 στους 30°C (με σταθερή πίεση), ο όγκος του αέρα θα αυξηθεί κατά 3,2%, του πετρελαίου κατά 0,9%, και η αύξηση του όγκου του νερού θα είναι λίγο μεγαλύτερη από 0,2%. Αντίστοιχα θα είναι τα ποσοστά μειώσεως της πυκνότητας των τριών σωμάτων.

Γενικά, όταν οι θερμοκρασιακές μεταβολές είναι μικρές, μπορούμε να θεωρήσουμε με ικανοποιητική προσέγγιση πως η πυκνότητα των **υγρών** δεν μεταβάλλεται. Αλλά σε προβλήματα με σημαντικές αλλαγές της θερμοκρασίας ή σε αυτά που απαιτείται μεγάλη ακρίβεια υπολογισμών, πρέπει να χρησιμοποιούμε ακριβείς τιμές της πυκνότητας. Σ' αυτό βοηθούν οι πίνακες πυκνότητας διαφόρων υγρών σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία τους. Στον πίνακα 2 του Παραρτήματος βλέπουμε την πυκνότητα του χημικά καθαρού νερού για 0 ως 100°C. Παρατηρούμε πως η μέγιστη πυκνότητα παρουσιάζεται στους 4°C.

2) Επίδραση της πίεσεως.

Η **πίεση επηρεάζει ελάχιστα την πυκνότητα των υγρών**, τόσο, που για τις συνηθισμένες μεταβο-

λές της πίεσεως που συναντάμε στις τεχνικές εφαρμογές, να θεωρούμε την πυκνότητα των υγρών σταθερή. Αλλά για πολύ μεγάλες αυξήσεις της πίεσεως, πρέπει να λάβουμε υπόψη την αύξηση της πυκνότητας και των υγρών. Για παράδειγμα, αν η πίεση του νερού αυξηθεί από 1 σε 10 bar, η πυκνότητά του θα μείνει πρακτικά αμετάβλητη, αφού αν αυξηθεί στα 100 bar η πυκνότητα θα αυξηθεί μόλις κατά 0,5%. Αν όμως η πίεση γίνει 1000 bar, θα έχουμε αξιόλογη αύξηση της πυκνότητας κατά 5%.

Τα ρευστά, των οποίων η πυκνότητα μεταβάλλεται με την πίεση καλούνται **συμπιεστά**, ενώ εκείνα των οποίων η πυκνότητα μένει πρακτικά αμετάβλητη, καλούνται **ασυμπιεστά**.

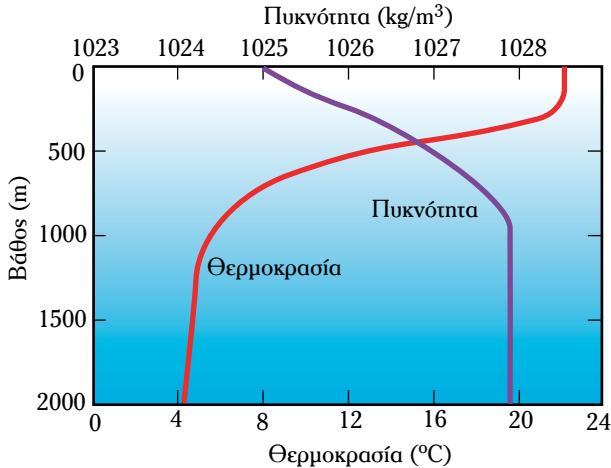
Συμπιεστά ρευστά είναι τα αέρια αφού τα υγρά θεωρούνται ασυμπιεστά.

3) Επίδραση διαλυμένων ουσιών.

Οι διαλυμένες στερεές ουσίες αυξάνουν την πυκνότητα των υγρών. Όταν ποσότητα στερεού διαλύεται σε υγρό διαλύτη, η μάζα αυξάνεται. Δεν έχουμε όμως και αντίστοιχη αύξηση του όγκου (συνήθως μάλιστα υπάρχει ελαφρά μείωση του όγκου – συστολή λόγω διαλύσεως). Αυτό οφείλεται στη χημική συγγένεια μεταξύ του υγρού και του διαλυόμενου σώματος και εξηγείται με τους μηχανισμούς της διαλύσεως. Σχηματικά, τα μόρια (ή ιόντα) της ουσίας που διαλύεται, παρεμβάλλονται μεταξύ των μορίων του υγρού και οι διαμοριακές δυνάμεις ενισχύονται, άρα η μέση απόσταση των μορίων μειώνεται. Αποτέλεσμα είναι μία μικρή, αλλά χαρακτηριστική αύξηση της πυκνότητας του διαλύματος.

Το φαινόμενο έχει ιδιαίτερη σημασία για το νερό, το οποίο σε φυσική κατάσταση περιέχει πάντοτε διαλυμένες αρκετές στερεές ουσίες (κυρίως άλατα). Για τούτο η πυκνότητα του φυσικού νερού είναι λίγο μεγαλύτερη της αντίστοιχης του χημικά καθαρού. Σε θερμοκρασίες 0°C ως 20°C η πυκνότητα του φυσικού νερού λαμβάνεται κατά προσέγγιση ίση με 1000 kg/m³. Το θαλασσινό νερό, το οποίο έχει μεγάλη περιεκτικότητα διαλυμένων αλάτων (κυρίως χλωριούχου νατρίου) έχει μεγαλύτερη πυκνότητα (περίπου 1025 – 1028 kg/m³, σχ. 1.2ε).

Αν αναμείξουμε δύο υγρά με πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 , η πυκνότητα του διαλύματος που προκύπτει κυμαίνεται ανάμεσα στις πυκνότητες των δύο υγρών και εξαρτάται από την αναλογία αναμείξεως. Η μάζα του διαλύματος είναι ίση με το άθροισμα των μαζών: $m = m_1 + m_2$. Ο όγκος του όμως είναι λίγο μικρότε-



Σχ. 1.2ε

Πυκνότητα του θαλασσινού νερού.

ρος από το άθροισμα των όγκων: $V \leq V_1 + V_2$.

Αν θεωρήσουμε $V \cong V_1 + V_2$, μπορούμε να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση την πυκνότητα του διαλύματος. Ακριβής υπολογισμός της πυκνότητας των υγρών διαλυμάτων γίνεται με τη χρήση σχετικών πινάκων.

Την πυκνότητα των υγρών τη μετράμε χρησιμοποιώντας ειδικά όργανα, τα **πυκνόμετρα**, τα οποία θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

1.2.4 Σχετική πυκνότητα.

Συχνά αντί της πυκνότητας ενός σώματος, χρησιμοποιούμε τη **σχετική πυκνότητα** (specific gravity). Αυτή είναι καθαρός αριθμός που συγκρίνει την πυκνότητα του σώματος με την πυκνότητα άλλου που λαμβάνεται ως βάση συγκρίσεως:

$$\rho_{\text{ox}} = \frac{\rho}{\rho_{\beta}} \quad (1.4)$$

Για τα υγρά (και τα στερεά) ως βάση συγκρίσεως χρησιμοποιείται η πυκνότητα του καθαρού νερού σε 20°C: $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$ (κατά προσέγγιση 1000 kg/m^3).

Για τα αέρια χρησιμοποιείται συνήθως η πυκνότητα του αέρα σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσεως: $\rho_{\text{αέρα}} = 1,205 \text{ kg/m}^3$ (για $T = 293^\circ \text{K}$ και $p = 101,3 \text{ kPa}$).

Η σχετική πυκνότητα ισούται με το σχετικό ειδικό βάρος:

$$\gamma_{\text{ox}} = \gamma/\gamma_{\beta} = (\rho \cdot g)/(\rho_{\beta} \cdot g) = \rho/\rho_{\beta} = \rho_{\text{ox}}$$

Η σχετική πυκνότητα είναι ανεξάρτητη από τις χρησιμοποιούμενες μονάδες (είναι καθαρός αριθμός) και σ' αυτό το σημείο πλεονεκτεί έναντι της πυκνότητας (ή του ειδικού βάρους).

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθούν οι μάζες 10 m^3 πετρελαίου σε θερμοκρασίες 20°C και 40°C αν η πυκνότητά του στους 20°C είναι 845 kg/m^3 και ο συντελεστής κυβικής διαστολής είναι $\beta = 9 \cdot 10^{-4} \cdot \text{K}^{-1}$.

Λύση.

Στους 20°C:

$$m_{20} = \rho_{20} \cdot V \Rightarrow m_{20} = 845 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m}^3 = 8450 \text{ kg}$$

$$m_{40} = \rho_{40} \cdot V_{40} \quad \text{ή} \quad \rho_{40} = m_{20}/V_{40}, \quad V_{40} = V_{20} + \Delta V$$

$$\Delta V = V_{20} \cdot \beta \cdot \Delta T = (10 \text{ m}^3) \cdot (9 \cdot 10^{-4} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (20 \text{ K}) = 0,18 \text{ m}^3$$

$$V_{40} = 10 \text{ m}^3 + 0,18 \text{ m}^3 = 10,18 \text{ m}^3$$

$$\rho_{40} = 8450/10,18 \text{ kg/m}^3 = 830 \text{ kg/m}^3$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθεί η μάζα 50 lt βενζίνης με σχετική πυκνότητα 0,745.

Λύση.

Υπολογισμός της πυκνότητας της βενζίνης:

$$\rho_{\text{ox}} = \rho_{\text{B}}/\rho_{\text{v}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{B}} = \rho_{\text{ox}} \rho_{\text{v}} = 0,745 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 = 745 \text{ kg/m}^3$$

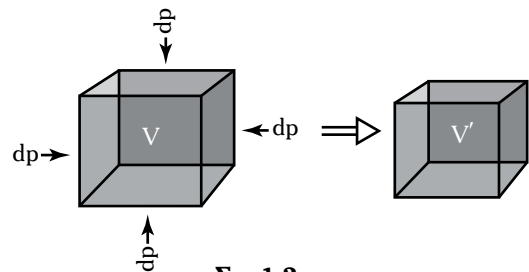
$$V_{\text{B}} = 50 \text{ lt} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\rho_{\text{B}} = m_{\text{B}}/V_{\text{B}} \quad \text{ή}$$

$$m_{\text{B}} = \rho_{\text{B}} \cdot V_{\text{B}} = (745 \text{ kg/m}^3) \cdot (50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = 37,2 \text{ kg}$$

1.2.5 Συμπιεσιότητα (σχ. 1.2στ).

Ταξινομώντας τα ρευστά σε ασυμπίεστα (υγρά) και συμπίεστα (αέρια), διευκρινίσαμε ότι απόλυτα ασυμπίεστο υλικό δεν υπάρχει. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε έλλειψη οποιασδήποτε ελαστικότητας. Το γεγονός πως τα ηχητικά κύματα διαδίδονται μέσω των συνεκτικών στερεών και των υγρών, άμεσα αποδεικνύει πως τα σώματα αυτά έχουν κάποια ελαστικότητα.



Σχ. 1.2στ
Συμπιεσιότητα.

Όταν σε ένα συνεκτικό στερεό ασκηθεί επαρκής δύναμη, τα μόριά του υφίστανται μία μικρή σχετική μετακίνηση. Δεν εγκαταλείπουν τη θέση τους, αλλά μετακινούνται λίγο και έχουμε τα φαινόμενα της ελαστικής ή πλαστικής παραμορφώσεως. (Ανάλογα με τη διεύθυνση και τη φορά της δύναμης παραμορφώσεως: έχουμε κάμψη, εφελκυσμό, θλίψη αλλά και στρέψη αν υπάρχει ροπή στρέψεως). Όταν η δύναμη είναι θλιπτική, παρατηρείται μία ελάχιστη μείωση του όγκου.

Στα ρευστά σώματα τα μόρια δεν έχουν συγκεκριμένη θέση, αλλά κινούνται άτακτα στο διαθέσιμο χώρο. Με την αύξηση της πίεσεως (δηλ. της κάθετης θλιπτικής δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας), μειώνεται η μέση απόσταση των μορίων, άρα και ο όγκος τους. Όπως είδαμε, η αύξηση του όγκου είναι έντονη στα αέρια, αφού στα υγρά είναι ελάχιστη, για τούτο συνήθως θεωρείται αμελητέα και λαμβάνεται υπόψη μόνο για εξαιρετικά μεγάλες πιέσεις. Η μείωση του όγκου των ρευστών εξαρτάται από τη μέση απόσταση των μορίων του σώματος και από την ένταση των ενδομοριακών δυνάμεων, διαφέρει επομένως από σώμα σε σώμα. Η ιδιαίτερη συμπεριφορά των σωμάτων στην αύξηση της πίεσεως εκφράζεται με την ιδιότητα της **συμπιεσιότητας** (compressibility).

Συμπιεσιότητα β ενός σώματος (στερεού ή ρευστού) καλείται ο λόγος της σχετικής μείωσης του όγκου του σώματος (dV/V) προς την αύξηση της πίεσεως (dp) που προκάλεσε τη μείωση του όγκου:

$$\beta = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \quad (1.5)$$

Επειδή $\rho = m/V$ ή $\rho \cdot V = m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho dV + V d\rho = 0 \Rightarrow dV/V = -d\rho/\rho \quad (1.5a)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση μεταξύ όγκου και πυκνότητας, εύκολα προκύπτει από τις σχέσεις (1.5) και (1.5a) πως η συμπιεσιότητα ισούται με:

$$\beta = \frac{d\rho/\rho}{dp} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} \quad (1.5a)$$

Η συμπιεσιότητα ισούται με το αντίστροφο της **σταθεράς ελαστικότητας** (bulk modulus) K :

$$\beta = 1/K \quad (1.5\beta)$$

1.2.6 Επιφανειακή τάση – Τάση ατμών.

Η **επιφανειακή τάση** (surface tension) και η τάση ατμών αποτελούν ιδιότητες των υγρών και σχετίζονται άμεσα με την αλληλεπίδραση μεταξύ

των μορίων και τις δυνάμεις, που αναπτύσσονται μεταξύ τους.

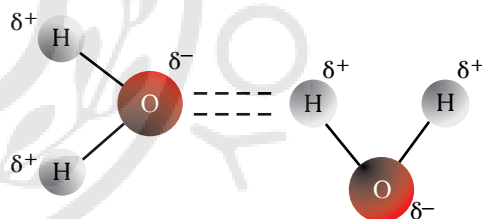
1) Μοριακές δυνάμεις.

Όπως γνωρίζουμε, μεταξύ των μορίων ενός σώματος αναπτύσσονται ελκτικές δυνάμεις, καλούμενες **διμοριακές**. Οι δυνάμεις αυτές είναι ηλεκτροστατικής φύσεως και οφείλονται στη δομή των μορίων.

Αν τα μόρια μιας ουσίας είναι πολωμένα (λόγω πολωμένου ομοιοπολικού δεσμού μεταξύ των ατόμων που τα συγκροτούν), τότε αναπτύσσονται οι λεγόμενοι **δεσμοί** (ή **γέφυρες**) **υδρογόνου** ή γενικότερα, **δυνάμεις διπόλου-διπόλου**. Δηλαδή ελκτικές ηλεκτροστατικές δυνάμεις μεταξύ των αντίθετα φορτισμένων πόλων των μορίων.

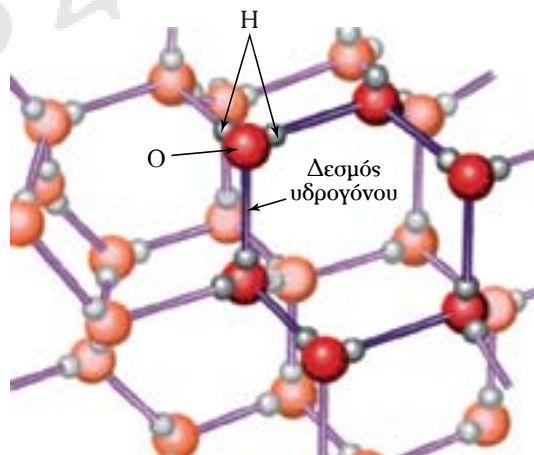
Χαρακτηριστική περίπτωση πολωμένου μορίου και συνακόλουθης εμφανίσεως δεσμών υδρογόνου συναντάμε στο νερό (σχ. 1.2ζ και 1.2η). Στο δεσμό υδρογόνου οφείλονται μια σειρά από τις ιδιότητες που παρουσιάζει (υψηλό σημείο πήξεως σε σχέση με ομόλογες χημικές ενώσεις, μεγάλη πυκνότητα, ισχυρός διαλύτης, διαστολή κατά τη στερεοποίηση κ.ά.).

Αν μεταξύ των πολωμένων μορίων του υγρού παρεμβάλλονται ιόντα (λόγω διαλύσεως ετεροπολικής ενώσεως), αναπτύσσονται μεταξύ του ιόντος και των



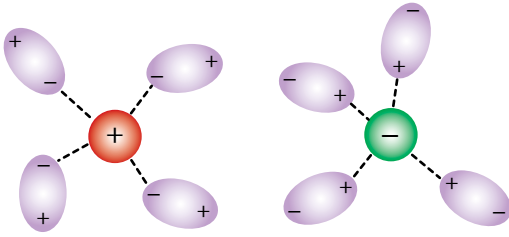
Σχ. 1.2ζ

Δεσμός υδρογόνου μεταξύ μορίων νερού.



Σχ. 1.2η

Δομή του στερεού νερού.

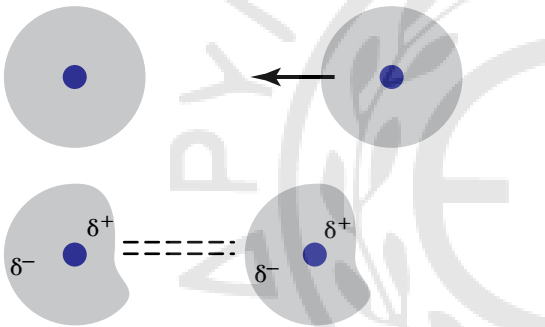


Σχ. 1.20

Δυνάμεις ιόντος-διπόλου.

πολωμένων μορίων **δυνάμεις ιόντος-διπόλου**, ισχυρότερες απ' αυτές του δεσμού υδρογόνου (σχ. 1.20). Στις δυνάμεις ιόντος-διπόλου οφείλεται η αύξηση της πυκνότητας όταν στο νερό διαλύεται αλάτι.

Όταν δύο μη πολωμένα μόρια κατά την άτακτη κίνησή τους βρεθούν σε μικρή μεταξύ τους απόσταση, τα ηλεκτρονικά νέφη μετατοπίζονται, δημιουργούνται προσωρινά ηλεκτρικά δίπολα και παρουσιάζονται ασθενείς ελκτικές δυνάμεις (**δυνάμεις διασποράς London**, σχ. 1.21).



Σχ. 1.21

Δυνάμεις διασποράς London.

Σε δύο περιπτώσεις υγρών συναντάμε δυνάμεις πολύ πιο ισχυρές από τις προηγούμενες: Σε τήγματα αλάτων, τις δυνάμεις μεταξύ θετικών και αρνητικών ιόντων του ετεροπολικού δεσμού και σε τήγματα μετάλλων (και στον υδράργυρο), τις δυνάμεις του μεταλλικού δεσμού.

Οι διαμοριακές δυνάμεις είναι πολύ μικρότερες από τις ενδομοριακές (δυνάμεις δεσμών). Σε τάξη μεγέθους υπάρχει η ακόλουθη σχέση:

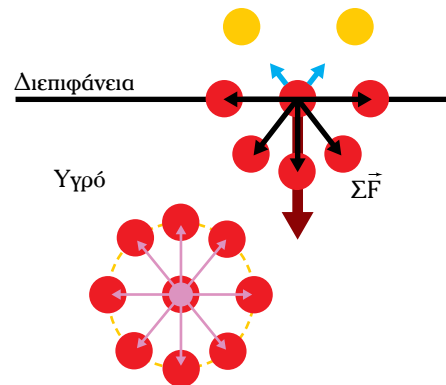
Δυνάμεις δεσμών	1000
Δυνάμεις ιόντος-διπόλου	100
Δυνάμεις διπόλου-διπόλου	10
Δυνάμεις διασποράς	1

Οι μοριακές δυνάμεις, οι οποίες αναπτύσσονται μεταξύ των μορίων του ίδιου σώματος (ή της ίδιας φάσεως) καλούνται **δυνάμεις συνοχής**, ενώ εκείνες μεταξύ μορίων διαφορετικών σωμάτων (ή φάσεων), **δυνάμεις συνάφειας**.

Οι δυνάμεις συνοχής εξαρτώνται απ' το σώμα και τις συνθήκες που αυτό βρίσκεται. Γενικά, είναι πολύ ισχυρές στα στερεά σώματα, με αποτέλεσμα τα μόρια να δεσμεύονται σε συγκεκριμένες θέσεις (η δυναμική ενέργεια των μορίων είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την κινητική τους ενέργεια). Στα υγρά η έντασή τους είναι σημαντική, αλλά όχι τόσο ώστε να κρατά τα μόρια σε συγκεκριμένες θέσεις. Είναι αρκετή όμως, ώστε να διαμορφώνεται επιφάνεια που περιορίζει τα μόρια σε συγκεκριμένο χώρο. Στα αέρια είναι πολύ μικρές (οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με τα υγρά και τα στερεά) και γίνονται ακόμα μικρότερες, καθώς τα αέρια απομακρύνονται από τις συνθήκες υγροποιήσεως. Στα ιδανικά αέρια θεωρούνται εξ ορισμού μηδενικές.

2) Επιφανειακή τάση.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα των μοριακών δυνάμεων είναι η επιφανειακή τάση που παρουσιάζεται στα υγρά. Ένα μόριο υγρού που βρίσκεται μέσα στη μάζα του, δέχεται δυνάμεις απ' όλες τις διευθύνσεις (δηλ. από όλα τα μόρια του υγρού που το περιβάλλουν), με αποτέλεσμα η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδέν. Αντίθετα, ένα μόριο που βρίσκεται στη διαχωριστική επιφάνεια (**διεπιφάνεια**) του υγρού με αέριο (ή με άλλο υγρό μη αναμειξιμο και μικρότερης πυκνότητας), δέχεται ισχυρότερες δυνάμεις από τα μόρια του υγρού που βρίσκονται στο κάτω ημισφαίριο σε σχέση με τις δυνάμεις που ασκούνται από τα μόρια που βρίσκονται από πάνω. Αποτέλεσμα είναι η ύπαρξη συνιστώσας δυνάμεως $\Sigma \vec{F} \neq 0$ με φορά προς το εσωτερικό του υγρού (σχ. 1.21α). Έτσι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται υπό τάση και λειτουργεί σαν μια μεμβράνη με δυναμική ενέργεια που περιορίζει τα μόρια του ρευστού.



Σχ. 1.21α

Επιφανειακή τάση.

Στην επιφανειακή τάση οφείλονται αρκετά φαινόμενα που παρατηρούμε στα υγρά (σχ. 1.21β). Μ' αυτήν εξηγούνται οι σταγόνες των υγρών, η επίπλευση στο νερό σωμάτων μεγαλύτερης πυκνότητας, η δημιουργία φυσαλίδων (αφρισμός) κ.ά..

Επιφανειακή τάση υγρού καλείται η δύναμη ανά μονάδα μήκους, που ασκεί η επιφανειακή μεμβράνη σε νοπή γραμμή τυχαίας διεύθυνσεως:

$$\sigma = F/L \quad (1.6)$$

Η εξωτερική «μεμβράνη» του υγρού ανθίσταται στην αύξηση της επιφάνειάς της. Για να αυξηθεί η επιφάνεια κατά dA απαιτείται κατανάλωση έργου:

$$dW = F \cdot ds = \sigma \cdot dA \Rightarrow \sigma = dW/dA \quad (1.6a)$$

Δηλαδή η επιφανειακή τάση ισούται με το έργο που απαιτείται, ώστε να αυξηθεί η ελεύθερη επιφάνεια κατά μία μονάδα. Άρα **επιφανειακή τάση είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα εμβαδού επιφάνειας**.

Όταν το υγρό βρίσκεται σε επαφή με τον αέρα (ή γενικότερα με αέριο), η επιφανειακή τάση εξαρτάται μόνο από τις δυνάμεις συνοχής του υγρού (οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων υγρού-αερίου είναι αμελητέες) και κατά συνέπεια αποτελεί έμμεσο μέτρο των δυνάμεων συνοχής του υγρού.



Σχ. 1.21β

Αποτελέσματα επιφανειακής τάσεως.

Αν όμως η διεπιφάνεια αποτελεί διαχωριστική επιφάνεια δύο μη αναμειγμένων υγρών, η επιφανειακή τάση μειώνεται επειδή υπάρχουν υπολογίσιμες δυνάμεις μεταξύ των μορίων των δύο υγρών. Έτσι, ενώ η επιφανειακή τάση του υδραργύρου σε επαφή με τον αέρα είναι $0,484 \text{ N/m}$, σε επαφή με το νερό είναι $0,373 \text{ N/m}$. Αντίστοιχα, η επιφανειακή τάση του νερού σε επαφή με τον αέρα είναι $0,0728 \text{ N/m}$, ενώ σε επαφή με το λάδι $0,020 \text{ N/m}$ (σε 20°C).

Η επιφανειακή τάση μεταβάλλεται σημαντικά αν στη διεπιφάνεια υπάρχουν –έστω και σε μικρές ποσότητες– μόρια άλλων ουσιών. Υπάρχει μάλιστα και ειδική κατηγορία **επιφανειακά ενεργών ουσιών** (αφριστικά, σάπωνες) που μειώνουν πάρα πολύ (ακόμα και δέκα φορές) την επιφανειακή τάση του νερού, με αποτέλεσμα τη δημιουργία φυσαλίδων (αφρισμού). Παρόμοιες ουσίες συμβάλλουν στη δημιουργία κολλοειδών διαλυμάτων. Το πετρέλαιο π.χ. δεν αναμειγνύεται με το νερό, αλλά η παρουσία ενός μειωτικού της επιφανειακής τάσεως, επιτρέπει το σχηματισμό μικρών σταγονιδίων πετρελαίου, διασκορπισμένων στο νερό (ή αντίστροφα).

Γενικά **η επιφανειακή τάση μειώνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία** και μηδενίζεται στο κρίσιμο σημείο του υγρού.

Μία σταγόνα υγρού τείνει να διαμορφώσει σφαιρικό σχήμα, αφού έτσι έχει τη μικρότερη δυνατή ελεύθερη επιφάνεια και κατά συνέπεια μικρότερο επιφανειακό δυναμικό.

3) Τριχοειδή φαινόμενα.

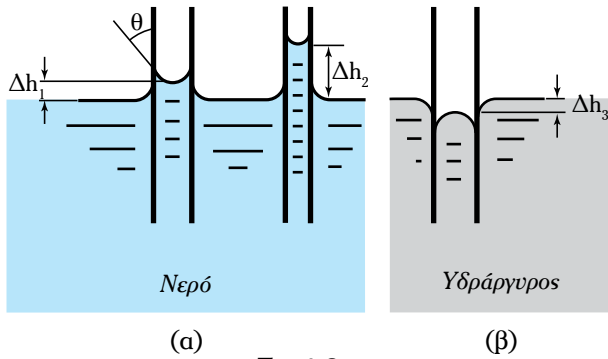
Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει στα σημεία επαφής της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού με τα τοιχώματα του δοχείου στο οποίο περιέχεται.

Αν οι δυνάμεις συνάφειας είναι μεγαλύτερες από τις δυνάμεις συνοχής ($\theta < 90^\circ$), παρουσιάζεται ανύψωση του υγρού [σχ. 1.21γ(α)], με αποτέλεσμα την καμπύλωση της ελεύθερης επιφάνειάς του κοντά στο τοίχωμα.

Το φαινόμενο είναι έντονο όταν το δοχείο έχει πολύ μικρό άνοιγμα, οπότε η καμπύλωση επεκτείνεται σε όλη την ελεύθερη επιφάνεια. Αν μάλιστα η διατομή είναι πολύ μικρή, η καμπυλωμένη επιφάνεια θα ανέλθει. Στη στήλη υπερυψωμένου υγρού υπάρχει ισορροπία δυνάμεων. Η δύναμη από την επιφανειακή τάση ισούται με το βάρος της στήλης του υγρού:

$$2\pi r \cdot \sigma \cdot \cos \theta = B = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \pi r^2 \cdot (\Delta h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos \theta}{\gamma \cdot r} \quad (1.7)$$



Σχ. 1.21γ
Τριχοειδή φαινόμενα.

όπου: σ η επιφανειακή τάση, $r = d/2$, η ακτίνα του σωλήνα και γ το ειδικό βάρος του υγρού.

Παρατηρούμε πως όσο πιο μικρή είναι η διάμετρος του σωλήνα, τόσο πιο έντονο είναι το φαινόμενο. Έτσι, για σωλήνες τριχοειδών διαστάσεων, το νερό μπορεί να ανέλθει αρκετά μέτρα. Σ' αυτό το φαινόμενο οφείλεται η αναρρόφηση των αναγκαίων υδατικών διαλυμάτων από τα φυτά και τα δένδρα, η διαβροχή ενός πορώδους χαρτιού (ο πολτός του χαρτιού περιέχει τριχοειδή φυτικά αγγεία), καθώς και η άνοδος των υγρών στο φυτίλι.

Στο σχήμα 1.21γ(α) παρατηρούμε τι συμβαίνει αν εμβαπίσομε γυάλινο σωλήνα πολύ μικρής διαμέτρου σε υγρό, οι δυνάμεις συνοχής του οποίου είναι μικρότερες από τις δυνάμεις συνάφειας ($\theta < 90^\circ$). Αν το υγρό είναι νερό ή οινόπνευμα, η γωνία επαφής θ είναι (κατά προσέγγιση) μηδέν ($\theta \approx 0^\circ$).

Αν οι δυνάμεις συνάφειας είναι μικρότερες από τις δυνάμεις συνοχής, το υγρό κατέρχεται και το φαινόμενο αντιστρέφεται ($\theta > 90^\circ$, αρνητικό Δh). Στο σχήμα 1.21γ(β) παρατηρούμε τι συμβαίνει αν εμβαπίσομε γυάλινο σωλήνα μικρής διαμέτρου σε υδράργυρο ($\theta \approx 130^\circ$).

Από τα παραπάνω προκύπτει πως χρειάζεται να είμαστε προσεκτικοί στην ανάγνωση ενδείξεων οργάνων που βασίζονται στη στάθμη υγρών εντός ή εκτός σωλήνων (θερμόμετρα, πυκνόμετρα κ.ά.).

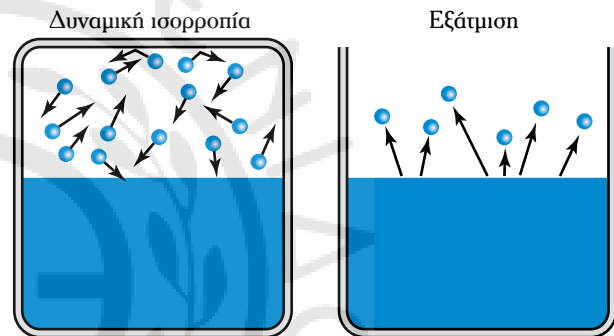
Λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν τα φαινόμενα αυτά σε αγωγούς τριχοειδών διαστάσεων, ονομάστηκαν **τριχοειδή φαινόμενα** (capillary).

Για αγωγούς μεγάλων διατομών (διαμέτρου μεγαλύτερης των 8 mm), τα τριχοειδή φαινόμενα δεν παίζουν κανέναν ιδιαίτερο ρόλο.

4) Τάση ατμών.

Όταν ένα υγρό βρίσκεται σε δοχείο, τα μόριά του

κινούνται στον χώρο που ορίζουν τα στερεά τοιχώματα και η ελεύθερη επιφάνειά του (δηλ. η διεπιφάνεια υγρού-αέρα). Τα μόρια του υγρού που προσπίπτουν σ' αυτήν, ανακλώνται λόγω του δυναμικού της. Παρόλα αυτά, ορισμένα μόρια κινούμενα με ταχύτητες μεγαλύτερες από τη μέση ταχύτητα (έχοντας επομένως κινητική ενέργεια μεγαλύτερη από τη μέση) και προσπίπτοντα στην ελεύθερη επιφάνεια με κατάλληλη γωνία, τη διαπερνούν και εξέρχονται πάνω από αυτή σαν ατμοί. Ατμοί του ρευστού βρίσκονται πάντοτε πάνω από το υγρό. Αν το δοχείο είναι κλειστό και η θερμοκρασία σταθερή, επέρχεται δυναμική ισορροπία μεταξύ των ατμών και του υγρού (σχ. 1.21δ). Δηλαδή, όσα μόρια υγρού διαπερνούν την ελεύθερη επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου, ακριβώς τόσα εισέρχονται στην υγρή μάζα.



Σχ. 1.21δ
Τάση ατμών.

Τάση ατμών του υγρού καλείται η μερική πίεση των ατμών του που (σε συνθήκες ισορροπίας) βρίσκονται πάνω από την ελεύθερη επιφάνειά του.

Τα υγρά, τα οποία για ορισμένη θερμοκρασία έχουν μεγάλη τάση ατμών καλούνται **πυπτικά**.

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία, αυξάνεται η μέση ταχύτητα των μορίων, άρα αυξάνεται και η ποσότητα των ατμών.

Η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε αύξηση της τάσεως των ατμών. Όταν η τάση ατμών γίνει ίση με την πίεση που επικρατεί πάνω από το υγρό, αρχίζει ο βρασμός.

Η τάση ατμών μειώνεται όταν στο υγρό διαλυθεί στερεά ουσία (ή υγρό λιγότερο πυπτικό).

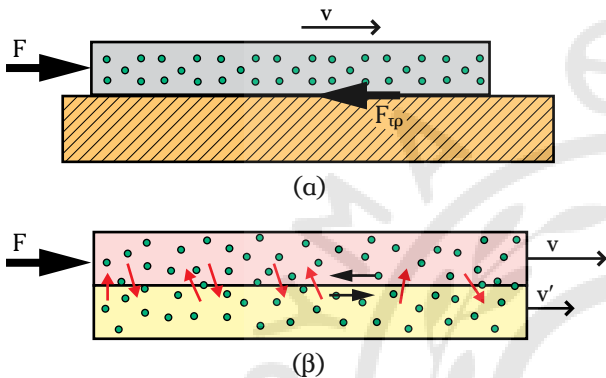
1.2.7 Ιξώδες ή συνεκτικότητα (viscosity).

Από τον ορισμό των ρευστών προκύπτει ότι το φαινόμενο που τα χαρακτηρίζει (και τα διαχωρίζει από τα στερεά) είναι η **ροή**.

Αίτιο της ροής είναι μία διατμητική δύναμη

ασκούμενη σε στοιχειώδες στρώμα του ρευστού. Υπό την επίδρασή της, το στοιχειώδες στρώμα θα κινηθεί, ολισθαίνοντας στο υποκείμενο στρώμα.

Στην επιταχυνόμενη κίνηση του υπερκείμενου στρώματος, αντιστέκεται το υποκείμενο με δύο τρόπους. **Πρώτον**, με τις ελκτικές διαμοριακές δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων των δύο στρωμάτων [σχ. 1.2ιε(α)]. **Δεύτερον**, λόγω της συνεχούς ανταλλαγής μορίων μεταξύ των δύο στρωμάτων και των συνακολούθων μοριακών κρούσεων, μειώνεται η μέση ταχύτητα των μορίων του πάνω στρώματος κατά τη διεύθυνση της ροής [σχ. 1.2ιε(β)].



Σχ. 1.2ιε

Μηχανισμοί διαμορφώσεως αντιστάσεων στη ροή.
(α) Αντίσταση οφειλόμενη στις δυνάμεις συνοχής.
(β) Αντίσταση οφειλόμενη στην ανταλλαγή μορίων.

Κάποια χρονική στιγμή, το στρώμα το υφιστάμενο τη διατμητική δύναμη, θα αποκτήσει οριακή ταχύτητα v . Αυτό σημαίνει ότι τα μόριά του θα κινούνται με μέση ταχύτητα v κατά τη διεύθυνση της ροής. Η διατμητική δύναμη F θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη αντιστάσεως F_{τ} που –μέσω των δύο μηχανισμών– ασκεί το υποκείμενο στρώμα. Έτσι, **αφού η διατμητική δύναμη τείνει να επιταχύνει το στρώμα, οι διαμοριακές δυνάμεις συνοχής και η ανταλλαγή μορίων με το υποκείμενο στρώμα, τείνουν να το επιβραδύνουν, δηλαδή διαμορφώνουν εσωτερική αντίσταση στην κίνηση.**

Αν τώρα εξετάσουμε το υποκείμενο στρώμα, θα διαπιστώσουμε πως η επίδραση των μοριακών δυνάμεων συνοχής και η ανταλλαγή μορίων με το υπερκείμενο, τείνουν να το επιταχύνουν. Πιο συγκεκριμένα, εφόσον ασκεί δύναμη F_{τ} στο υπερκείμενο, σύμφωνα με την Αρχή δράσεως-αντιδράσεως, θα δέχεται απ' αυτό δύναμη ίση και αντίθετη της F_{τ} , άρα ίση

με τη διατμητική δύναμη F . Δηλαδή **το υπερκείμενο στρώμα μεταδίδει τη διατμητική δύναμη στο υποκείμενο**. Αλλά στην επιτάχυνση θα αντιστέκεται το επόμενο στρώμα. Έτσι, θα συμπαρασύρεται, αλλά με μικρότερη ταχύτητα. (Όπως θα δούμε στο τρίτο κεφάλαιο, υπάρχει ένα στρώμα του ρευστού σε επαφή με το τοίχωμα του αγωγού που παραμένει ακίνητο).

Δυναμικό ιξώδες ή **συνεκτικότητα ρευστού** μ καλείται η εσωτερική αντίσταση που παρουσιάζει το ρευστό στη ροή.

Παίρνοντας υπόψη πως αίτιο της ροής είναι η διατμητική τάση ($\tau = F/A$) και αποτέλεσμα η διαφορά της ταχύτητας του άνω στρώματος σε σχέση με την ταχύτητα του υποκείμενου, εφαρμόζοντας το γενικό νόμο της κινητικής των διεργασιών, προκύπτει ο **Νόμος του ιξώδους του Newton**¹, με τον οποίο ορίζεται επακριβώς το (δυναμικό) ιξώδες:

$$\mu = -\frac{\tau}{dv/dy} \quad (1.8)$$

όπου: τ είναι η διατμητική τάση, dv η διαφορά ταχύτητας και dy η υψομετρική διαφορά των δύο στρωμάτων. Ο λόγος dv/dy καλείται **διαφορική κλίση ταχύτητας** (ή ρυθμός διατμήσεως). Το αρνητικό πρόσημο του τύπου δηλώνει ότι η διατμητική τάση είναι αντίθετη της κλίσεως ταχύτητας. Μονάδα του ιξώδους μ στο SI είναι: $N \cdot s/m^2 = kg/(m \cdot s)$.

Κινηματικό ιξώδες ν καλείται ο λόγος του δυναμικού ιξώδους προς την πυκνότητα του ρευστού:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.9)$$

Το κινηματικό ιξώδες ν , είναι σε πολλές περιπτώσεις πιο εύχρηστο από το δυναμικό ιξώδες μ , καθώς απλοποιεί αρκετές εξισώσεις της ρευστομηχανικής και διευκολύνει τους υπολογισμούς. Μονάδα του κινηματικού ιξώδους στο SI είναι το m^2/s .

1) Νευτώνεια ρευστά.

Τα ρευστά των οποίων το ιξώδες παραμένει σταθερό όταν δεν μεταβάλλεται η πίεση και η θερμοκρασία, ονομάζονται **νευτώνεια** (Newtonian fluids). Σύμφωνα με την εξίσωση (1.8), **στα νευτώνεια ρευστά ο λόγος της διατμητικής τάσεως προς τη διαφορική κλίση ταχύτητας, παραμένει σταθερός.**

Στην κατηγορία των νευτωνείων ρευστών ανήκουν όλα τα αέρια και τα περισσότερα υγρά (καθαρές ουσίες, διαλύματα και μη κολλοειδή υγρά).

Το ιξώδες των νευτωνείων ρευστών, εξαρτάται

¹ Sir Isaac Newton: 1642 – 1726.

από τη μοριακή φύση του ρευστού και μεταβάλλεται με την πίεση και τη θερμοκρασία.

Στα **υγρά**, οι δυνάμεις συνοχής είναι ιδιαίτερα σημαντικές και παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της εσωτερικής τριβής. Η ένταση των διαμοριακών δυνάμεων εξαρτάται από το υγρό. Μπορούμε να διαπιστώσουμε αυτήν την εξάρτηση με τον ακόλουθο απλό τρόπο: Στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, τοποθετούμε σταγόνες διαφόρων υγρών (που παρουσιάζουν κάποιες αξιόλογες δυνάμεις συνάφειας με το υλικό του επιπέδου). Αν και όλες οι σταγόνες υφίστανται την ίδια επιτάχυνση βαρύτητας (η συνιστώσα της κατά τη διεύθυνση του επιπέδου διαμορφώνει διατμητική τάση ολισθήσεως), θα κυλήσουν με διαφορετικές ταχύτητες και θα φτάσουν σε διαφορετικούς χρόνους στη βάση του επιπέδου. Αυτό δείχνει πως αναπτύσσονται διαφορετικές διατμητικές τάσεις αντιστάσεως. Γενικά, υπάρχουν υγρά **λεπόρρευτα** (με μικρό ιξώδες) και **παχύρρευτα** (με μεγάλο ιξώδες).

Στα **αέρια**, οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μικρές και ο ρόλος των μοριακών ανταλλαγών και συγκρούσεων είναι σημαντικότερος στην ανάπτυξη της εσωτερικής τριβής. Λόγω των ασθενών διαμοριακών δυνάμεων συνοχής, τα αέρια έχουν μικρότερο δυναμικό ιξώδες απ' τα υγρά. (Αλλά λόγω της μικρής τους πυκνότητας, το κινηματικό τους ιξώδες είναι συνήθως μεγαλύτερο).

Τιμές ιξώδους ορισμένων ρευστών σε κανονικές συνθήκες, βλέπουμε στον πίνακα 1.2.2. Παρατηρούμε ότι το νερό έχει περίπου 55 φορές μεγαλύτερο ιξώδες από τον ατμοσφαιρικό αέρα, αλλά πολύ μικρότερο από τα διάφορα λιπαντικά (για τα οποία οι αναφερόμενες τιμές είναι ενδεικτικές) και την παχύρρευστη γλυκερίνη.

2) Επίδραση της θερμοκρασίας στο ιξώδες.

Η **πίεση** επηρεάζει ελάχιστα το ιξώδες των υγρών και περισσότερο το ιξώδες των αερίων. Πιο συγκεκριμένα, για χαμηλές πιέσεις το ιξώδες όλων των ρευστών είναι πρακτικά ανεξάρτητο από την πίεση. Σε υψηλές πιέσεις, το ιξώδες των υγρών αυξάνεται ελάχιστα με την αύξηση της πίεσεως, ενώ των αερίων σημαντικά. Για παράδειγμα, αύξηση της πίεσεως από 1 bar σε 50 bar προκαλεί αύξηση του ιξώδους του αέρα περίπου κατά 10%, ενώ η αντίστοιχη αύξηση του ιξώδους του νερού είναι μικρότερη του 1%.

Η **θερμοκρασία**, σε αντίθεση με την πίεση, επηρεάζει σημαντικά το ιξώδες των ρευστών. Πιο συγκεκριμένα: **το ιξώδες των υγρών μειώνεται με την**

Πίνακας 1.2.2
Δυναμικό (μ) και κινηματικό (ν) ιξώδες διαφόρων ρευστών (20°C, 101,3 kPa).

Ρευστό	μ 10 ⁻³ kg/ms	ν 10 ⁻⁶ m ² /s
Αέρας	0,018	14,5
Αμμωνία	0,22	0,36
Βενζίνη	0,65	0,74
Τετραχλωράνθρακας	0,967	0,61
Νερό	1,00	1,00
Οινόπνευμα	1,20	1,52
Υδράργυρος	1,56	0,12
Κηροζίνη	1,92	2,4
Αιθυλενογλυκόλη	21,4	19,1
Λάδι SAE 10	104	120
Λάδι SAE 30	290	325
Γλυκερίνη	1490	1182

αύξηση της θερμοκρασίας. Αυτό συμβαίνει επειδή με την άνοδο της θερμοκρασίας, αυξάνεται η μέση απόσταση των μορίων, άρα μειώνονται οι δυνάμεις συνοχής. Αλλά όπως είδαμε, στα υγρά, οι δυνάμεις συνοχής αποτελούν το κύριο αίτιο της εσωτερικής τριβής, δηλαδή του ιξώδους. Είναι χαρακτηριστικό ότι το ιξώδες του νερού σε 0°C, είναι εξαπλάσιο από το ιξώδες του σε 100°C (1,788 · 10⁻³ kg/ms και 0,284 · 10⁻³ kg/ms αντίστοιχα – πίν. 1.2.3).

Αντίθετα από τα υγρά, **το ιξώδες των αερίων αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.** Αυτό συμβαίνει επειδή καθοριστικό ρόλο στο ιξώδες των αερίων, δεν παίζουν οι δυνάμεις συνοχής (που είναι πολύ μικρές), αλλά η ανταλλαγή μορίων και οι μοριακές συγκρούσεις μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων του αερίου. Με την αύξηση της θερμοκρασίας, αυτές αυξάνονται, με αποτέλεσμα την αύξηση της εσωτερικής τριβής, δηλαδή του ιξώδους.

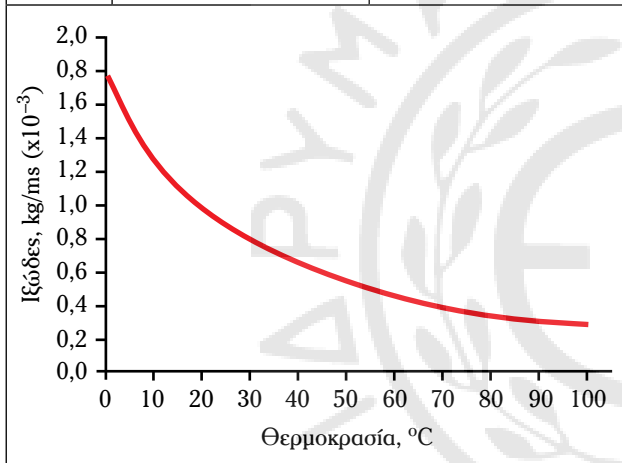
3) Μη νευτώνεια ρευστά.

Υπάρχουν ρευστά τα οποία δεν ακολουθούν τη σχέση ιξώδους του Newton (1.8), δηλαδή τα μεγέθη τ (διατμητική τάση) και dv/dy (διαφορική κλίση ταχύτητας) δεν είναι ανάλογα. Τα ρευστά αυτά καλούνται **μη νευτώνεια**. Ως παραδείγματα μπορούμε να αναφέρουμε τα διάφορα γαλακτώματα, τα ελαστομερή, αρκετά λιπαντικά κ.ά..

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τα νευτώνεια ρευστά.

Πίνακας 1.2.3
Ιξώδες νερού (σε 1 atm) από 0°C ως 100°C.

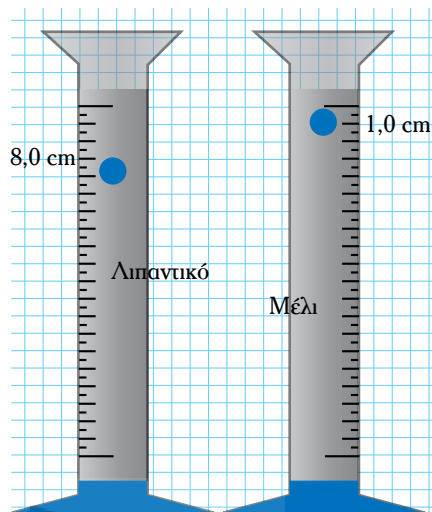
T °C	μ 10^{-3} kg/ms	ν $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
0	1,792	1,792
10	1,307	1,307
20	1,003	1,005
30	0,803	0,806
40	0,655	0,660
50	0,551	0,557
60	0,470	0,478
70	0,407	0,416
80	0,357	0,367
90	0,317	0,328
100	0,284	0,296



Το ιξώδες των ρευστών το μετράμε με ειδικά όργανα τα **ιξωδόμετρα**. Αυτά βασίζονται στο γεγονός πως ένα στερεό θα κινηθεί (υπό τις ίδιες συνθήκες) πιο αργά σε ρευστό με μεγαλύτερο ιξώδες (αλλά και το ρευστό μεγαλύτερου ιξώδους επί στερεάς επιφάνειας θα κινηθεί πιο αργά, όπως είδαμε στο παράδειγμα με τις σταγόνες). Η αρχή λειτουργίας τους παρουσιάζεται στο σχήμα 1.2ιστ.

1.2.8 Στοιχειώδης όγκος και πυκνότητα ρευστού.

Όπως αναφέρθηκε, τα μόρια των ρευστών βρίσκονται διασκορπισμένα στον χώρο που αυτά καταλαμβάνουν. Τα μόρια δεν τακτοποιούνται σε ένα σταθερό πλέγμα (όπως στα στερεά) αλλά κινούνται ελεύθερα, συγκρουόμενα μεταξύ τους και με τα τοιχώματα που προσδιορίζουν τον όγκο τους (άτακτη μοριακή κίνηση). Η μέση απόσταση μεταξύ των μο-



Σχ. 1.2ιστ
Αρχή λειτουργίας ιξωδομέτρων. Παρατήρηση τη θέση της μπίλιας για τον ίδιο χρόνο σε ρευστά διαφορετικής πυκνότητας.

ρίων των υγρών είναι πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη των αερίων (σ’ αυτήν τη διαφορά οφείλεται η μεγάλη πυκνότητα των υγρών σε σχέση με τα αέρια). Και στα υγρά όμως, η μέση μοριακή απόσταση είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη διάμετρο των μορίων.

Λαμβάνοντας υπόψη την κινητική συμπεριφορά των μορίων ενός ρευστού, η πυκνότητά του, δηλαδή η μάζα του ανά μονάδα όγκου, φαίνεται να μην έχει ακριβή έννοια, αφού τα μόρια που καταλαμβάνουν έναν όγκο (που τον επιλέξαμε ως μονάδα) αλλάζουν συνεχώς. Αυτή η επίδραση όμως γίνεται ασήμαντη εάν ο όγκος είναι επαρκώς μεγάλος σε σχέση με τη μέση απόσταση των μορίων. Τότε ο αριθμός των μορίων που κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται μέσα στον όγκο θα παραμένει σχεδόν σταθερός (άρα και η μάζα), παρά τη συνεχή ανταλλαγή μορίων μεταξύ επιλεγμένου όγκου και περιβάλλοντος. Εξετάζοντας τον **στοιχειώδη όγκο** ρευστού δV διαπιστώνουμε ότι η πυκνότητά του ισούται με:

$$\rho = \delta m / \delta V$$

όπου: δm η μάζα των μορίων που βρίσκονται στον όγκο δV (αν δN ο αριθμός των μορίων και m_μ η μάζα του μορίου, τότε: $\delta m = \delta N \cdot m_\mu$).

Στατιστικά, η κατανομή των μορίων είναι ομαλή, επομένως αν στον στοιχειώδη όγκο υπάρχει πολύ μεγάλος αριθμός μορίων, οι ανταλλαγές με το περιβάλλον δεν θα τον επηρεάσουν, άρα η πυκνότητα θα έχει συγκεκριμένη τιμή. Στο σχήμα 1.2ιζ(α) παρατηρούμε πως υπάρχει μια ελάχιστη τιμή του όγκου, για την οποία σταθεροποιείται ο λόγος $\delta m / \delta V$. Ο ελάχιστος

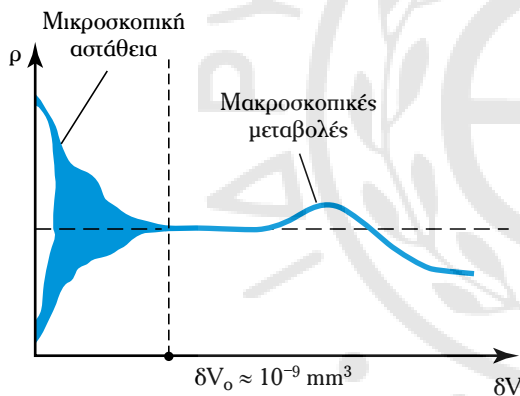
στοιχειώδης όγκος έχει τιμή $\delta V_o = 10^{-9} \text{ mm}^3$. Σε αυτόν τον όγκο περιέχονται περίπου $3,3 \cdot 10^{10}$ μόρια νερού ή $2,7 \cdot 10^7$ μόρια αέρα (σε κανονικές συνθήκες).

Εάν ο επιλεγμένος όγκος είναι υπερβολικά μεγάλος, θα μπορούσε να υπάρξει μια αξιοπρόσεκτη αλλαγή στην πυκνότητα των μορίων λόγω της επιδράσεως παραμέτρων, όπως η θερμοκρασία (αύξησή της οδηγεί σε αύξηση της μέσης αποστάσεως των μορίων – διαστολή) και η πίεση (για τα αέρια) [σχ. 1.2ιζ(β)].

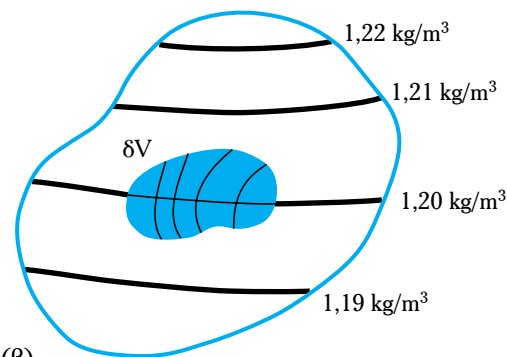
Από τα παραπάνω, προκύπτει ακριβέστερος ορισμός της πυκνότητας:

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V_o} \frac{\delta m}{\delta V}$$

Η έννοια του στοιχειώδους όγκου είναι εξίσου χρήσιμη για τον ακριβή προσδιορισμό της θερμοκρασίας T (η οποία είναι συνάρτηση της μέσης ταχύτητας των μορίων), της πίεσεως και των άλλων ιδιοτήτων των ρευστών. Μπορούμε να πούμε πως όπως τα μόρια είναι φορείς των χημικών ιδιοτήτων του σώματος,



(a)



(β)

Σχ. 1.2ιζ

(α) Στοιχειώδης όγκος και
(β) συνέχεια ρευστού.

έτσι και ο (στατιστικά προσδιορισμένος) στοιχειώδης όγκος είναι φορέας των θερμοδυναμικών ιδιοτήτων του ρευστού.

Αν και **τα ρευστά σε μοριακό επίπεδο είναι ασυνεχή** (αφού μεταξύ των μορίων τους υπάρχει κενό), **όταν τα εξετάζουμε αξιοποιώντας την έννοια του στοιχειώδους όγκου, θεωρούνται συνεχή μέσα**. Όπως βλέπομε στο σχήμα 1.2ιζ(β), η μεταβολή της πυκνότητας (αντίστοιχα και των υπολοίπων ιδιοτήτων των ρευστών) είναι συνεχής.

1.3 Ασκήσεις.

- 750 ml υγρού έχουν καθαρό βάρος 7 N. Να υπολογισθεί η πυκνότητά του.
[$\rho = 951,7 \text{ kg/m}^3$]
- Κυλινδρική δεξαμενή διαμέτρου 2 m, περιέχει νερό μέχρι ύψους 0,8 m και πάνω από αυτό στρώμα λαδιού πυκνότητας 910 kg/m^3 ύψους 0,5 m. Να υπολογισθεί το βάρος του περιεχόμενου της δεξαμενής.
[$W = 38666 \text{ N}$]
- Να υπολογισθεί ο όγκος 500 kg λαδιού σχετικής πυκνότητας 0,925.
[$V = 0,541 \text{ m}^3$]
- Να υπολογισθεί η μείωση του όγκου και η πυκνότητα 10 m^3 νερού θερμοκρασίας 30°C , αν η πίεσή του αυξηθεί από 1 σε 50 bar.
[$\Delta V = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$, $993,3 \text{ kg/m}^3$]
- Είκοσι τόνοι πετρελαίου πυκνότητας 850 kg/m^3 (μετρημένοι στους 20°C) βρίσκονται σε κυλινδρική δεξαμενή και ανέρχονται σε ύψος 3 m. α) Να υπολογισθεί η ακτίνα βάσεως της δεξαμενής. β) Αν η θερμοκρασία αυξηθεί από τους 20°C στους 40°C , πόσο θα ανέλθει η στάθμη του πετρελαίου; ($\beta = 9 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$)
[α) $y = 1,58 \text{ m}$, β) $\Delta y = 0,054 \text{ m}$]
- Δεξαμενή τετραγωνικής βάσεως, πλευράς 2 m και ύψους 3 m έχει πληρωθεί με νερό 20°C . Να υπολογισθεί η μάζα υπερχειλίσεως αν η θερμοκρασία αυξηθεί στους 50°C . (Θεωρήστε αμελητέα τη διαστολή της δεξαμενής και την εξάτμιση).
[$m_{\text{υπερχ}} = 74 \text{ kg}$]
- Αν στο προηγούμενο πρόβλημα λάβομε υπόψη και τη διαστολή της δεξαμενής ($\beta = 36 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$), πόση ποσότητα θα υπερχειλίσει;
[$m_{\text{υπερχ}} = 61,1 \text{ kg}$]
- Να υπολογισθεί η πυκνότητα νερού 100 MPa και 20°C .
[$\rho = 950,3 \text{ kg/m}^3$]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

2.1 Γενικά.

Λέγοντας πως ένα ρευστό βρίσκεται σε κατάσταση στασιμότητας, εννοούμε πως δεν υπάρχει προσανατολισμένη κίνηση των μορίων του, δηλαδή ροή. Από τη φύση των ρευστών γνωρίζουμε πως υπάρχει η άτακτη μοριακή κίνηση, αλλά ο στοιχειώδης όγκος (όπως προσδιορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο) παραμένει σε ακινησία. Σε κατάσταση στατικής ισορροπίας βρίσκεται και ένα ρευστό, το οποίο μετακινείται ως συμπαγές σώμα και δεν υπάρχει σχετική κίνηση ενός στοιχειώδους όγκου του ρευστού σε σχέση με τους γειτονικούς. Παραδείγματος χάριν, ένα υγρό αποθηκευμένο σε δεξαμενή πλοίου που κινείται ή ένα υγρό μέσα σε περιστρεφόμενη φυγοκεντρική συσκευή, βρίσκονται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Κατά συνέπεια, **κύριο χαρακτηριστικό της καταστάσεως υδροστατικής ισορροπίας είναι η απουσία οποιασδήποτε διαμητρικής τάσεως** (η ύπαρξη της οποίας, σύμφωνα με τον ορισμό των ρευστών, θα προκαλούσε ροή).

Σε κατάσταση στατικής ισορροπίας συναντάμε πολύ συχνά τα ρευστά τόσο στη φύση, όσο και στην παραγωγική διαδικασία. Ο αέρας σε συνθήκες νηνεμίας αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Αλλά και η ατμόσφαιρα συνολικά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας. Αρκεί να μην ξεχνάμε ότι στο εσωτερικό του συστήματος, υπάρχουν υποσυστήματα που βρίσκονται σε κίνηση. Το ίδιο μπορούμε να ισχυριστούμε για το μεγαλύτερο φυσικό ταμειυτήρα νερού, τον ωκεανό (χωρίς να ξεχνάμε τα κύματα και τα θαλάσσια ρεύματα), καθώς και για τις λίμνες. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον απ' την πλευρά της Μηχανικής των Ρευστών έχουν δεξαμενές μικροτέρων διαστάσεων, που κατασκευάζει ο άνθρωπος για να συγκεντρώσει νερό ή για να αποθηκεύσει υγρά και αέρια αναγκαία για την καθημερινή ζωή και για την παραγωγική διαδικασία. Σε κατάσταση στατικής ισορροπίας μελετώνται πιο άνετα και οι περισσότερες ιδιότητες των ρευστών.

Η συμπεριφορά ενός υγρού σε κατάσταση στατικής ισορροπίας, παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες

αλλά και πολλές διαφορές από την αντίστοιχη συμπεριφορά ενός αερίου. Τόσο οι ομοιότητες, όσο και οι διαφορές αποτελούν λογική συνέπεια των όσων ήδη αναφέρθηκαν (κεφ. 1, παράγρ. 1.2).

Η μελέτη των υγρών σε κατάσταση ισορροπίας εξετάζεται σε ειδικό κεφάλαιο της Μηχανικής των Ρευστών, την **Υδροστατική**, ενώ η μελέτη των αερίων από την **Αεροστατική**.

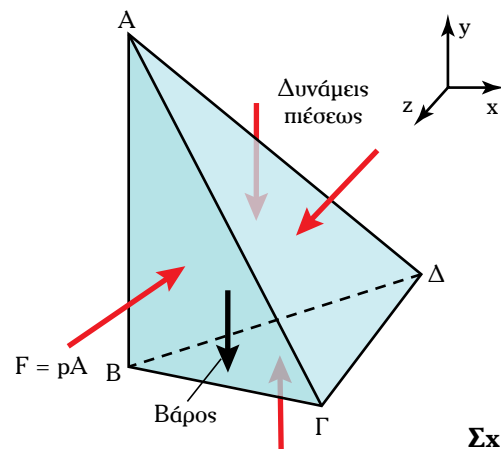
Στη συνέχεια, θα επιμείνουμε περισσότερο στα συμπεράσματα και στις εφαρμογές της υδροστατικής, περιοριζόμενοι σε παρατηρήσεις για την αντίστοιχη συμπεριφορά των αερίων. Ιδιαίτερα όμως θα μείνουμε και στα θέματα, που σχετίζονται με την πίεση της ατμόσφαιρας, λόγω της γενικότερης σημασίας που αυτή παρουσιάζει.

2.2 Υδροστατική πίεση.

2.2.1 Θεμελιώδης εξίσωση της υδροστατικής.

Ένα ρευστό βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας όταν δεν υπάρχει προσανατολισμένη κίνηση των στοιχειωδών όγκων του σε σχέση με τους γειτονικούς (παρά μόνο οι τυχαίες μοριακές κινήσεις). Κατά συνέπεια, για τον στοιχειώδη όγκο ΔV του ρευστού τον προσδιορισμένο από το τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 2.2α) ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0 \quad (2.1)$$

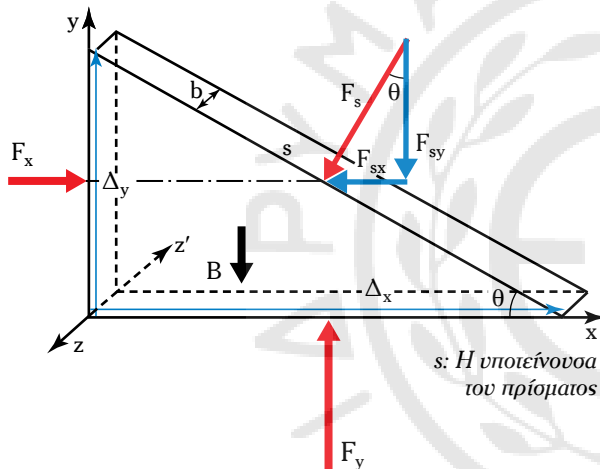


Σχ. 2.2α

Στον στοιχειώδη όγκο ασκείται η δύναμη της βαρύτητας $B = dm \cdot g$ (με σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους του) και οι δυνάμεις αλληλεπιδράσεως του στοιχειώδους όγκου με το υπόλοιπο ρευστό, οι οποίες ασκούνται στις πλευρές του τετραέδρου. Αυτές είναι κάθετες στις αντίστοιχες επιφάνειες, είναι δηλαδή δυνάμεις που οφείλονται στην πίεση. (Αν μια δύναμη δεν ήταν κάθετη στο αντίστοιχο επίπεδο, θα αναλυόταν σε μία κάθετη και μία κατά τη διεύθυνση του επιπέδου. Η δεύτερη θα ήταν διατμητική και το ρευστό θα έχανε την κατάσταση ισορροπίας).

Τα παραπάνω ισχύουν οποιοδήποτε σχήμα και αν έχει ο στοιχειώδης όγκος του ρευστού.

Ας υποθέσουμε τριγωνικό ορθογώνιο πρίσμα ρευστού πάχους b , ύψους Δy και βάσεως Δx . Στο πρίσμα ασκούνται οι δυνάμεις πίεσεως και το βάρος του ρευστού (σχ. 2.2β).



Σχ. 2.2β

Ισορροπία στοιχειώδους πρίσματος ρευστού πάχους b .

Τη δύναμη πίεσεως F_s την αναλύουμε σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα F_{sx} και F_{sy} αντίστοιχα:

$$F_{sx} = F_s \cdot \sin\theta$$

$$F_{sy} = F_s \cdot \cos\theta$$

Κατά τη διεύθυνση του άξονα z (κάθετη στην τομή του σχήματος), ασκούνται ίσες και αντίθετες δυνάμεις πίεσεως, για τα μέτρα των οποίων ισχύει:

$$F_z - F'_z = 0$$

Αντίστοιχα κατά τη διεύθυνση του άξονα x :

$$\begin{aligned} F_x - F_{sx} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_x \cdot \Delta y \cdot b &= F_s \cdot \sin\theta = p_s \cdot s \cdot b \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (1)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος:

$$\Delta y = s \cdot \sin\theta \Rightarrow p_x = p_s$$

Δηλαδή η πίεση δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση της επιφάνειας.

Κατά τη διεύθυνση του άξονα y :

$$\begin{aligned} F_y - (F_{sy} + B) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_y \cdot \Delta x \cdot b &= F_s \cdot \cos\theta + B = \\ &= p_s \cdot s \cdot b \cdot \cos\theta + B \end{aligned} \quad (2)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος:

$\Delta x = s \cdot \cos\theta$ και η εξίσωση (2) γίνεται:

$$(p_y - p_s) \cdot \Delta x \cdot b = B \quad (2a)$$

Το βάρος του ρευστού ισούται με:

$$B = \gamma \cdot V = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot (\Delta x \cdot \Delta y \cdot b) / 2$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2a), η διαφορά πίεσεως προκύπτει ίση με:

$$p_y - p_s = \rho \cdot g \cdot \Delta y / 2 \quad (3)$$

Αν η υψομετρική διαφορά Δy τείνει στο μηδέν (δηλ. αν οι πιέσεις αναφέρονται στο ίδιο ύψος), τότε $p_y = p_s$.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1) Η στατική πίεση του ρευστού σε ορισμένο ύψος είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της επιφάνειας στην οποία ασκείται:

$$p_x = p_y = p_z = p \quad (2.2)$$

2) Αν το ρευστό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας τότε $g = 0$ και η πίεση θα είναι σταθερή σε όλα τα σημεία του ρευστού (ίση με την πίεση, που ασκούν στο ρευστό τα τοιχώματά του). Μία τέτοια περίπτωση, ελάχιστα ενδιαφέρει την εφαρμοσμένη ρευστομηχανική.

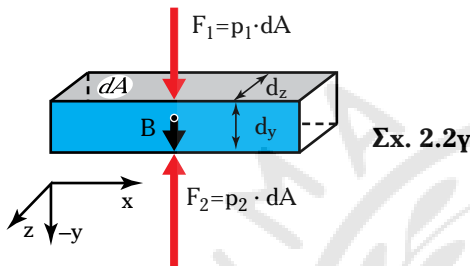
3) Ρευστό που βρισκόμενο στο πεδίο βαρύτητας, υφίσταται τη δύναμη του βάρους του. Επομένως, για να ισορροπεί ο στοιχειώδης όγκος του, πρέπει οι δυνάμεις πίεσεως να δίνουν κατά την κατακόρυφο διεύθυνση, συνισταμένη ίση και αντίθετη με το βάρος του στοιχειώδους όγκου. Αυτό σημαίνει ότι η πίεση που ασκείται στην κάτω πλευρά είναι μεγαλύτερη απ' την πίεση που ασκείται στην άνω.

Εξετάζοντας το ισοζύγιο δυνάμεων κατά τη διεύθυνση της κατακόρυφου στο πρίσμα του σχήματος

2.2γ (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με εμβαδόν βάσεως dA και ύψος dy) έχουμε:

$$\begin{aligned} F_1 + B &= F_2 \Rightarrow F_1 - F_2 = -B \Rightarrow \\ &\Rightarrow p_1 \cdot dA - p_2 \cdot dA = -m \cdot g \Rightarrow \\ &\Rightarrow (p_1 - p_2) \cdot dA = -\rho \cdot g \cdot dV \Rightarrow \\ &\text{ή } (p_1 - p_2) \cdot dA = -\rho g dy \cdot dA \\ &\text{ή } d\mathbf{p} = -\rho \cdot \mathbf{g} \cdot d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Το πρόσημο (-) της εξίσωσης (2.3) σημαίνει πως η πίεση αυξάνεται όταν το ύψος μειώνεται. Δηλαδή: **Η στατική πίεση ενός ρευστού αυξάνεται με το βάθος.**



Σχ. 2.2γ

Η εξίσωση (2.3) ολοκληρώνεται εύκολα αν η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή. Όπως είδαμε, σταθερή θεωρείται η πυκνότητα για τα ασυμπίεστα ρευστά, δηλαδή για τα υγρά, και αν εξαιρεθούν οι μεγάλες υψομετρικές διαφορές, και για τα αέρια.

Για τα υγρά, ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.3) μεταξύ ενός ύψους y_0 γνωστής πίεσης p_0 και ενός τυχαίου ύψους, προκύπτει:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= -g \cdot \rho \cdot (y - y_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p}{\gamma} + y = \frac{p_0}{\gamma} + y_0 = \text{σταθ.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου: $\gamma = \rho \cdot g$ το ειδικό βάρος του υγρού.

Η εξίσωση (2.4) εκφράζει τη **συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας**.

Ο λόγος ρ/γ εκφράζεται σε μονάδες μήκους [$\text{Pa}/(\text{N}/\text{m}^3) = (\text{N}/\text{m}^2)/(\text{N}/\text{m}^3) = \text{m}$] και καλείται **ύψος πίεσης**.

Αν ορίσουμε ως επίπεδο αναφοράς την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ($\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$), στην οποία η πίεση είναι $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{εξ}$, η εξίσωση (2.4) δίνει:

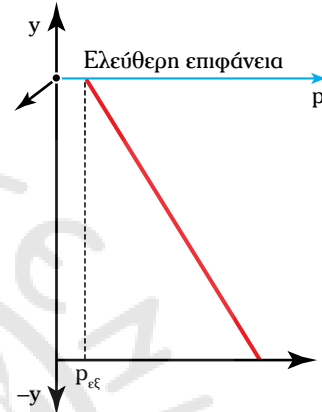
$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}_{εξ} - \mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{p}_{εξ} - \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{y} \\ &\text{ή } \mathbf{p} = \mathbf{p}_{εξ} + \rho \mathbf{g} \mathbf{h} \end{aligned} \quad (2.5)$$

όπου: h η υψομετρική διαφορά ($y - y_0$)

Επισημαίνουμε ότι σ' αυτήν τη σχέση, **το y λαμβάνει αρνητικές τιμές**, αφού τα σημεία του υγρού

στα οποία υπολογίζουμε την πίεση αξιοποιώντας την εξίσωση (2.5) βρίσκονται χαμηλότερα απ' την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (για την οποία θεωρήσαμε $y_0 = 0$).

Η εξίσωση (2.5) εκφράζει τον **θεμελιώδη Νόμο της υδροστατικής**. Σύμφωνα μ' αυτόν: **η στατική πίεση ενός υγρού αυξάνεται γραμμικά, καθώς αυξάνεται το βάθος (άρα μειώνεται το ύψος)** (σχ. 2.2δ).



Σχ. 2.2δ

Αύξηση της πίεσης υγρού με το βάθος.

Συνήθως στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση: $p_{εξ} = p_{ατμ}$.

Τα παραπάνω προέκυψαν με την υπόθεση πως στο ρευστό επενεργεί μόνο το πεδίο της βαρύτητας. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν το ρευστό δέχεται την επίδραση και άλλου πεδίου δυνάμεων, μένοντας σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, θα πρέπει να το λάβουμε υπόψη.

2.2.2 Πορίσματα και εφαρμογές.

1) Διαφορά πίεσης σημείων υγρού με υψομετρική διαφορά Δy .

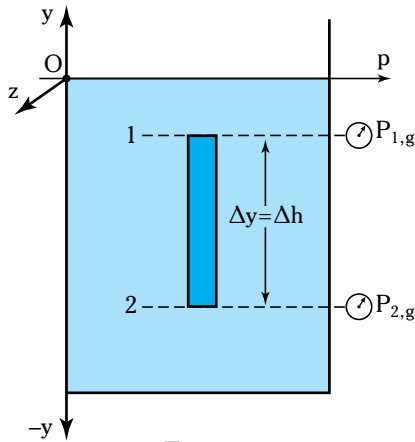
Αξιοποιώντας τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται μέσα σε ένα υγρό. Έστω τα σημεία 1 και 2 με ύψη y_1 και y_2 αντίστοιχα (σχ. 2.2ε). Οι πιέσεις των δύο σημείων θα είναι $p_1 = p_{εξ} - \gamma \cdot y_1$, $p_2 = p_{εξ} - \gamma \cdot y_2$ και η διαφορά πίεσης $p_2 - p_1 = \gamma (y_1 - y_2)$

Γενικότερα: $\Delta p = -\gamma \cdot \Delta y = -\rho \cdot g \cdot \Delta y$ ή

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad (2.5a)$$

2) Υδροστατικό παράδοξο.

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστα-



Σχ. 2.2ε

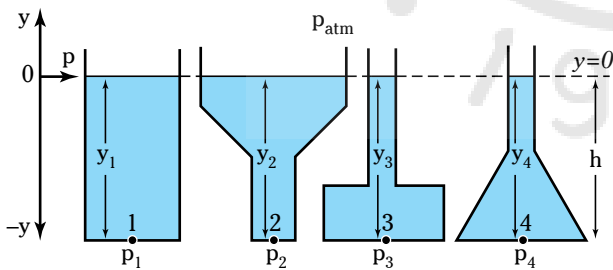
Διαφορά πίεσεως λόγω βάρους.

τικής, η πίεση εξαρτάται από την εξωτερική πίεση, την πυκνότητα του υγρού και το ύψος. Κατά συνέπεια, αν σε διαφορετικές δεξαμενές ανοιχτές στην ατμόσφαιρα ($p_{εξ} = p_{atm}$) έχουμε το ίδιο υγρό, οι πιέσεις που ασκούνται στον πυθμένα των δεξαμενών, εξαρτώνται μόνο από τα ύψη του υγρού. Αν τα ύψη είναι ίσα, τότε είναι ίσες και οι πιέσεις (σχ. 2.2στ):

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_{εξ} + \rho \cdot g \cdot h \quad (2.5\beta)$$

$$\text{ή } P_{abs,1} = P_{abs,2} = P_{abs,3} = P_{abs,4} = \rho \cdot g \cdot h + P_{atm}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας που δέχονται οι πυθμένες των δεξαμενών του σχήματος είναι ίσες. Οι διαστάσεις και το σχήμα των δεξαμενών (κατά συνέπεια και οι χωρητικότητές τους) δεν παίζουν απολύτως κανένα ρόλο.



Σχ. 2.2στ

Υδροστατικό παράδοξο:

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 \text{ ή } p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

3) Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.5α) μεταξύ δύο σημείων υγρού με μηδενική υψομετρική διαφορά, συμπεραίνουμε πως έχουν την ίδια πίεση. Αλλά και αντίστροφα:

$$\Delta y = 0 \Leftrightarrow \Delta p = 0 \quad (2.5\gamma)$$

Σε ένα υγρό που βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας, τα σημεία τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ύψος (στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο), έχουν ίση πίεση. Και αντίστροφα: Τα σημεία που έχουν ίση πίεση βρίσκονται στο ίδιο ύψος.

Όλα τα σημεία της ελεύθερης επιφάνειας ενός υγρού που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, έχουν ίδια πίεση ($p_{εξ}$). Κατά συνέπεια βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Επομένως:

Η ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού σε κατάσταση στατικής ισορροπίας, που βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας, είναι επίπεδο κάθετο στην κατακόρυφη (οριζόντιο επίπεδο).

Σημείωση: Στην πραγματικότητα, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι τμήμα σφαίρας με ακτίνα την ακτίνα της Γης, όμως αυτό έχει σημασία μόνο για πολύ μεγάλες επιφάνειες. Ακόμη και στους ωκεανούς, η καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας γίνεται ανιληπτή μόνο έμμεσα. Βλέποντας όμως τη Γη από έναν δορυφόρο, διαπιστώνουμε πως η επιφάνεια των ωκεανών κάθε άλλο παρά επίπεδη είναι.

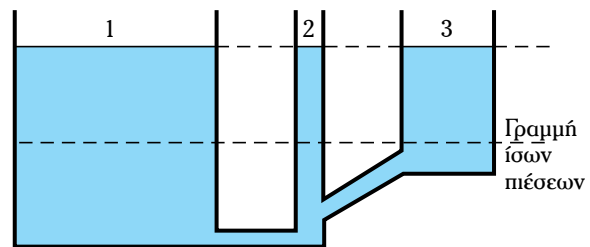
Αν έχουμε **συγκοινωνούντα δοχεία** που περιέχουν το ίδιο υγρό και πάνω απ' αυτό επικρατεί η ίδια πίεση (σχ. 2.2ζ), οι ελεύθερες επιφάνειές τους θα έχουν ίδια πίεση ($p_1 = p_2 = p_3 = p_{εξ}$) και κατά συνέπεια θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος (στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο).

Το πόρισμα αυτό της θεμελιώδους εξίσωσης της υδροστατικής είναι γνωστό ως **Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων:**

Συγκοινωνούντα δοχεία, που περιέχουν το ίδιο υγρό, εκτεθειμένα στην ίδια εξωτερική πίεση, έχουν τις ελεύθερες επιφάνειές τους στο ίδιο επίπεδο.

Δύο σημεία εντός συγκοινωνούντων δοχείων, τα οποία έχουν υψομετρική διαφορά $\Delta y \neq 0$, θα έχουν διαφορά πίεσεως που δίνεται από την εξίσωση (2.5α):

$$\Delta p = -\gamma \cdot \Delta y = -\rho \cdot g \cdot \Delta y$$



Σχ. 2.2ζ

Συγκοινωνούντα δοχεία.

4) Ισορροπία διαφορετικών υγρών σε συγκοινωνούντα δοχεία.

Η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων ισχύει με τρεις προϋποθέσεις:

- 1) Επί του υγρού επιδρά μόνο το πεδίο βαρύτητας.
- 2) Πάνω από τα δοχεία επικρατεί ίδια πίεση.
- 3) Στα δοχεία περιέχεται ίδιο υγρό (άρα η πυκνότητα είναι ίδια).

Αν μία απ' αυτές τις προϋποθέσεις δεν ισχύει, τότε δεν ισχύει και η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων. Έτσι, αν το σύστημα των συγκοινωνούντων δοχείων κινείται με επιτάχυνση a ή στις ελεύθερες επιφάνειες έχουμε διαφορετική πίεση, τότε αυτές δεν θα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση, που δεν ισχύει η τρίτη προϋπόθεση:

Δύο μη αναμείξιμα υγρά διαφορετικής πυκνότητας, που βρίσκονται σε συγκοινωνούντα δοχεία, δεν έχουν τις ελεύθερες επιφάνειές τους στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο (σχ. 2.2n).

Τα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας BB' ανήκουν και στα δύο υγρά. Επομένως τα σημεία A και B του σχήματος έχουν ίση πίεση (ανήκουν στο υγρό 1 και βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο):

$$p_A = p_B$$

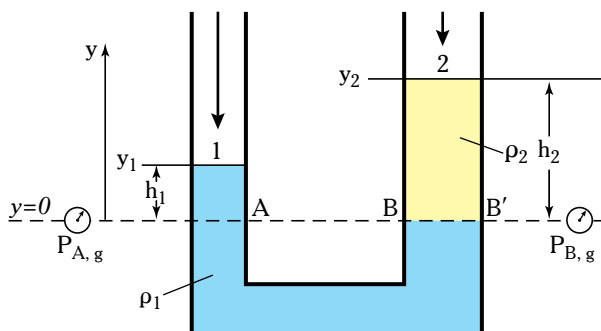
Αν η εξωτερική πίεση είναι ίδια, $p_1 = p_2 = p_{εξ}$. Σύμφωνα με την εξίσωση (2.5):

$$p_A = p_{εξ} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \quad \text{και} \quad p_B = p_{εξ} + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

οπότε προκύπτει:

$$p_{εξ} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_{εξ} + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.5\delta)$$

όπου: h_1 και h_2 οι υψομετρικές διαφορές των ελεύθερων επιφανειών από τη διαχωριστική επιφάνεια.



Σχ. 2.2n

Μη αναμείξιμα υγρά σε συγκοινωνούντα δοχεία.

Παράδειγμα 1

Στα συγκοινωνούντα δοχεία του σχήματος 2.2n το ρευστό (1) είναι θαλασσινό νερό ($\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$). Αν $h_1 = 32 \text{ cm}$ και $h_2 = 40 \text{ cm}$, να υπολογισθεί: α) η πυκνότητα του υγρού (2) και β) η πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών.

Λύση.

$$\text{α) Από (2.5\delta)} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \cdot h_1/h_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_2 = 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 32 \text{ cm}/40 \text{ cm} = 820 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{β) } p_A = p_B = p_{εξ} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow p_A = 101,3 \text{ kPa} +$$

$$+ [(1025 \cdot 9,807 \cdot 0,32)/1000] \text{ kPa} = 104,5 \text{ kPa}$$

5) Διαχωριστής βαρύτητας συνεχούς λειτουργίας.

Αν σε ένα δοχείο τοποθετήσουμε δυο υγρά μη αναμείξιμα διαφορετικής πυκνότητας (π.χ. νερό και λάδι), το υγρό μεγαλύτερης πυκνότητας (νερό) θα σχηματίσει τη σιβάδα του χαμηλά και πάνω απ' τη διαχωριστική επιφάνεια θα σχηματίσει τη δική του σιβάδα το υγρό μικρότερης πυκνότητας, άρα μικρότερου ειδικού βάρους (λάδι).

Η πίεση στο πρώτο υγρό θα μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση (2.5):

$$p = p_{εξ} - \rho_1 \cdot g \cdot y$$

Η σχέση αυτή θα ισχύει για $y = 0$ ως $y = y_1$ όπου: y_1 το ύψος της επίπεδης διαχωριστικής επιφάνειας των δύο υγρών. Σ' αυτήν η πίεση θα είναι:

$$p_1 = p_{εξ} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$

Η πίεση στο δεύτερο υγρό ($h_1 < h < h_2$) θα είναι:

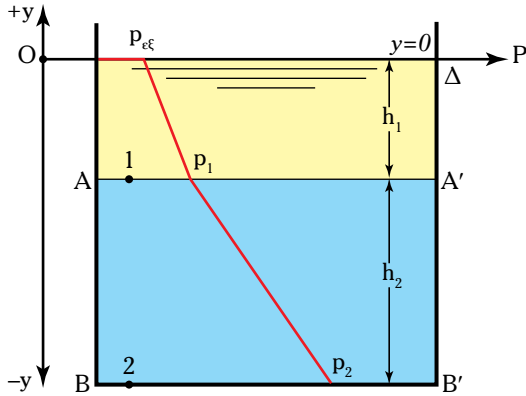
$$p = p_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = p_{εξ} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

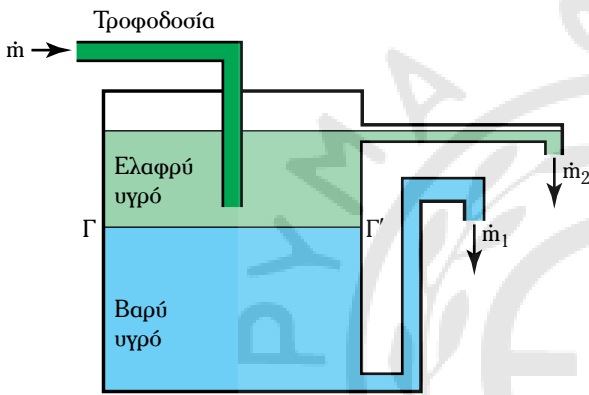
Στο σχήμα 2.2θ σημειώνεται η κατανομή πιέσεων σε συνάρτηση με το ύψος.

Στο φαινόμενο αυτό βασίζεται η λειτουργία του **διαχωριστή βαρύτητας** (σχ. 2.2ι): Το μείγμα των δύο υγρών που θέλουμε να διαχωρίσουμε, εισέρχεται (με μικρή παροχή και ταχύτητα) σε μεγάλων διαστάσεων (και επαρκούς ύψους) δεξαμενή. Από μία έξοδο πλησίον του πυθμένα εξέρχεται το υγρό μεγάλης πυκνότητας, ενώ από δεύτερη έξοδο που βρίσκεται σε κατάλληλο ύψος, το υγρό χαμηλής πυκνότητας.

Για να έχουμε ικανοποιητικό διαχωρισμό των δύο



Σχ. 2.20 Κατανομή πιέσεων.



Σχ. 2.21 Διαχωριστής βαρύτητας.

υγρών πρέπει οι πυκνότητές τους να έχουν σημαντική διαφορά, η δεξαμενή να έχει μεγάλες διαστάσεις και οι παροχές να είναι μικρές. Αυτά αποτελούν συνθήκες κρίσιμα μειονεκτήματα του διαχωριστή βαρύτητας, ο οποίος όμως διαθέτει το πλεονέκτημα του ελάχιστου κόστους λειτουργίας.

Η ίδια διάταξη χρησιμοποιείται για την κατακάθιση αιωρούμενων στερεών σε ένα υγρό (**δεξαμενές καθιζήσεως**).

6) Υδραυλικό πιεστήριο.

Όπως προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής, η εξωτερική πίεση μεταδίδεται σε κάθε σημείο εντός της μάζας του υγρού. Από τον ορισμό της πίεσης γνωρίζουμε πως αυτή η πίεση έχει δημιουργηθεί από την άσκηση κάθετης δύναμης (όχι κατ' ανάγκη δύναμης βαρύτητας) επί της επιφάνειας του υγρού. Αν το υγρό βρισκόταν εκτός πεδίου βαρύτητας, τότε $g = 0$ και $p = p_{εξ}$, δηλαδή όλα τα σημεία του ρευστού θα είχαν ίδια πίεση, ίση με την $p_{εξ}$.

As υποθέσουμε σύστημα δύο συνδυσασμένων κυλίν-

δρων διαφορετικών διατομών A_1 και A_2 με $A_1 < A_2$, στεγανοποιημένο με έμβολα αντιστοίχων διατομών (σχ. 2.21α). Ο χώρος που περικλείεται μεταξύ των δύο εμβόλων είναι πληρωμένος με υγρό.

Για την επιφάνεια A_1 του εμβόλου ισχύει:

$$P = F_1/A_1 \tag{1}$$

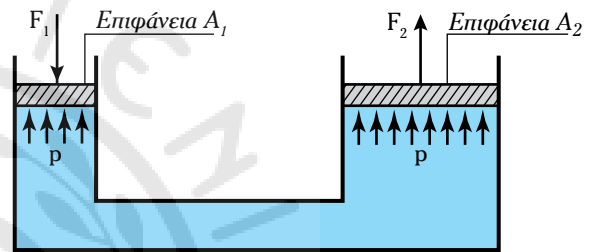
Για την επιφάνεια A_2 του εμβόλου ισχύει:

$$P = F_2/A_2 \tag{2}$$

$$\text{ή } F_1/A_1 = F_2/A_2 \text{ ή } F_1/F_2 = A_1/A_2 \tag{3}$$

$$\text{ή } F_2 = (A_2/A_1) \cdot F_1 \tag{4}$$

Η διάταξη αυτή χρησιμοποιείται στα **συστήματα υδραυλικής υποβοήθησης**.



Σχ. 2.21α

2.2.3 Υδροστατική ισορροπία σε πεδία δυνάμεων.

1) Υδροστατική ισορροπία σε οριζόντια επιταχυνόμενο σύστημα.

As εξετάσουμε ένα υγρό που βρίσκεται σε δεξαμενή ακίνητου πλοίου. Οι στοιχειώδεις όγκοι του υγρού υφίστανται μόνο τη δύναμη βαρύτητας και όπως είδαμε, το υγρό βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Κάποια στιγμή το πλοίο ξεκινά και για ορισμένο χρονικό διάστημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση a . Το υγρό της δεξαμενής κινείται μαζί με το πλοίο ως ενιαίο σώμα, συνεχίζοντας να βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Οι στοιχειώδεις όγκοι του υγρού, υφίστανται τώρα, εκτός από τη δύναμη βαρύτητας B και τη δύναμη επιταχύνσεως F . Τα δύο πεδία δυνάμεων καθορίζονται από τα ανύσματα των επιταχύνσεων g και a :

$$\vec{g} = \vec{B}/m \quad \vec{a} = \vec{F}/m$$

Παρατηρητής όρθιος επί του πλοίου, θα νοιώσει δύναμη ίση και αντίθετη της επιταχύνουσας δύναμης να τον ωθεί προς την αντίθετη με την επιτάχυνση φορά. Η δύναμη αυτή καλείται στη φυσική **δύναμη αδράνειας**. Για να μην ανατραπεί από τη ροπή που

δημιουργείται, ο παρατηρητής θα δώσει στο σώμα του κλίση, ώστε η συνισταμένη του βάρους και της δυνάμεως αδράνειας να διέρχεται από τη βάση στήριξής του [σχ. 2.21β(α)].

Η δύναμη αδράνειας ασκείται και στον στοιχειώδη όγκο του ρευστού (για τον παρατηρητή, η δεξαμενή παραμένει στη θέση της, άρα ακίνητη). Επομένως, επί του στοιχειώδους όγκου ασκείται συνισταμένη επιτάχυνση:

$$\vec{a}_\Sigma = \vec{g} - \vec{a}$$

Η υδροστατική ισορροπία του υγρού διαμορφώνεται υπό την επίδραση αυτής της επιτάχυνσης. Κατά συνέπεια η ελεύθερη επιφάνεια είναι κάθετη στην $\vec{g} - \vec{a}$ και όχι στην κατακόρυφο g . Το επίπεδο της σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο [σχ. 2.21β(β)]. Η μεταβολή της πίεσης δίνεται από εξισώσεις ανάλογες των εξισώσεων (2.3) και (2.5):

$$dp = -\rho \cdot a_\Sigma \cdot ds \quad (2.6)$$

ή
$$p = p_{εξ} + \rho \cdot a_\Sigma \cdot s \quad (2.7)$$

όπου: a_Σ το μέτρο της συνισταμένης επιτάχυνσης και s η κάθετη απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Είναι:

$$a_\Sigma = \sqrt{g^2 + a^2} \quad (2.7α)$$

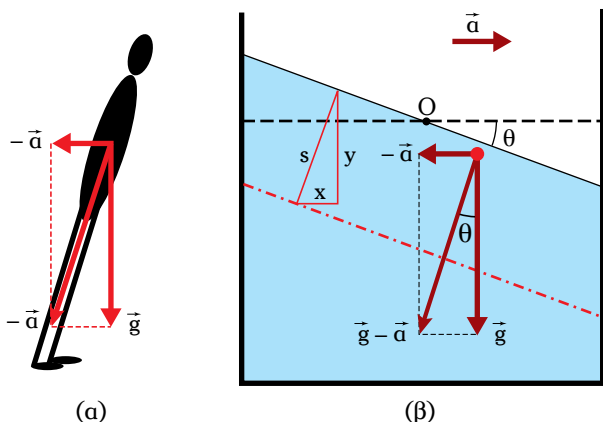
$$\tan \theta = \frac{a}{g} \quad (2.7β)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος 2.21β:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.7γ)$$

όπου: x και y η οριζόντια και κατακόρυφη προβολή της s .

Με βάση την εξίσωση (2.7), ένα επίπεδο σταθερής πίεσης p_i , είναι παράλληλο με την ελεύθερη επιφάνεια και σε απόσταση s_i απ' αυτήν.



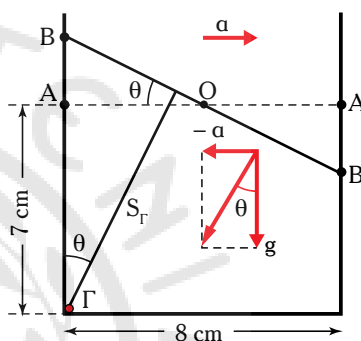
Σχ. 2.21β

Σημείωση: Στις εξισώσεις (2.6) και (2.7) θα καταλήξουμε αν ξεκινήσουμε απ' τη διαπίστωση ότι η πίεση μεταβάλλεται κατά τις διευθύνσεις x και y :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

Παράδειγμα 2

Το δοχείο του σχήματος 2.21γ περιέχει υγρό πυκνότητας $\rho = 1010 \text{ kg/m}^3$ και είναι τοποθετημένο σε ταχύπλοο σκάφος, το οποίο ξεκινά. Κινούμενο με σταθερή επιτάχυνση, σε 10 s αποκτά ταχύτητα 100 km/h. Να υπολογισθεί η ανύψωση, το μέγιστο ύψος του υγρού και η μέγιστη σχετική πίεση που αναπτύσσεται εντός του.



Σχ. 2.21γ

Λύση.

Δεδομένα: $AA' = 0,08 \text{ m}$, $A\Gamma = 0,07 \text{ m}$
 $\rho = 1010 \text{ kg/m}^3$ $t = 10 \text{ s}$,
 $\Delta v = 100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$,

Ζητούμενα: y_{\max} $p_{ox, \max}$

α) Υπολογισμός επιτάχυνσης:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27,8 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 2,78 \text{ m/s}^2$$

β) Η ελεύθερη επιφάνεια πριν την άσκηση της επιτάχυνσης a ήταν η AA' . Κατά τη διάρκεια της επιτάχυνσης είναι η BB' . Είναι:

$$\tan \theta = \frac{a}{g} = 0,2834 \Rightarrow \theta 15,82^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{OA} \Rightarrow AB = OA \cdot \tan \theta \Rightarrow AB = 1,13 \text{ cm}$$

γ) Η μέγιστη πίεση παρουσιάζεται στο σημείο μέγιστης απομακρύνσεως από την ελεύθερη επιφάνεια BB' , δηλαδή στο σημείο Γ . Είναι:

$$s_\Gamma = B\Gamma \cdot \cos \theta \Rightarrow s_\Gamma = 7,82 \text{ cm (μέγιστο ύψος)}$$

$$\text{από (2.7α)} \Rightarrow a_\Sigma = 10,2 \text{ m/s}^2$$

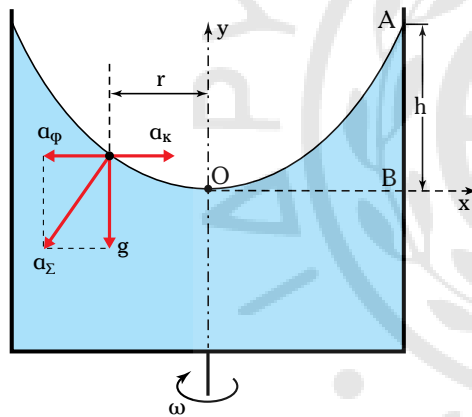
$$\text{από (2.7)} \Rightarrow p_{\Gamma, ox} = 0,806 \text{ kPa} = p_{\Gamma, g}$$

2) Υδροστατική ισορροπία σε φυγόκεντρο πεδίο.

Αντίστοιχα συμπεράσματα και τροποποιήσεις της θεμελιώδους εξίσωσης της υδροστατικής έχουμε και στην περίπτωση που το υγρό βρίσκεται σε φυγόκεντρο πεδίο.

Μέσα σε ένα δοχείο που περιστρέφεται περί άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (**φυγόκεντρική συσκευή**), υπάρχει υγρό. Το υγρό περιστρέφεται (μαζί με το δοχείο) ως ενιαίο σώμα, δηλαδή δεν ασκούνται διατμητικές δυνάμεις. Κατά συνέπεια, ένας στοιχειώδης όγκος του υγρού δεν κινείται σε σχέση με τους γειτονικούς. Αφού δεν υπάρχουν διατμητικές τάσεις, το υγρό βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας.

Λόγω της περιστροφής και της συνακόλουθης φυγόκεντρης επιτάχυνσής, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού δεν είναι επίπεδη. Για σχετικά μικρές γωνιακές ταχύτητες, λαμβάνει τη μορφή παραβολοειδούς από περιστροφή (τομή της οποίας φαίνεται στο σχ. 2.2ιδ).



Σχ. 2.2ιδ
Φυγόκεντρο πεδίο.

Για να γίνει κατανοητή η υδροστατική ισορροπία στο φυγόκεντρο πεδίο που διαμορφώνεται, ας εξετάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε στοιχειώδη όγκο μάζας dm , που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής.

Στη μάζα dm ασκούνται η δύναμη του βάρους ($B = dm \cdot g$) και η δύναμη αντιδράσεως του υποκείμενου στρώματος του υγρού F . Ο στοιχειώδης όγκος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, άρα η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων είναι η κεντρομόλος δύναμη $F_k = dm \cdot \alpha_k$, όπου α_k η κεντρομόλος επιτάχυνση.

Παρατηρητής στρεφόμενος με το σύστημα, θα διαπίστωνε πως στον στοιχειώδη όγκο ασκείται δύναμη

αδράνειας (ίση και αντίθετη με την F_k), γνωστή ως φυγόκεντρη δύναμη F_ϕ :

$$F_\phi = dm \cdot \alpha_\phi$$

όπου α_ϕ η **φυγόκεντρη επιτάχυνση**: $\alpha_\phi = \omega^2 \cdot r$.

Η συνισταμένη επιτάχυνση είναι: $\vec{\alpha}_\Sigma = \vec{g} + \vec{\alpha}_\phi$

και το μέτρο της: $\alpha_\Sigma = \sqrt{g^2 + \alpha_\phi^2}$

Η πίεση σε τυχόν σημείο του υγρού είναι:

$$p = p_{εξ} - \rho \cdot \alpha_\Sigma \cdot s = p_{εξ} - \rho \cdot g \cdot y + 1/2 \cdot \omega^2 \cdot r^2 \quad (2.8)$$

όπου: r η απόσταση από τον άξονα περιστροφής και y το ύψος με επίπεδο αναφοράς το χαμηλότερο σημείο της ελεύθερης επιφάνειας O : $y_o = 0$.

Το μέγιστο ύψος παρουσιάζεται στο σημείο A του σχήματος 2.2ιδ και είναι:

$$p = p_{εξ} - \rho g y_A + 1/2 \rho \omega^2 R^2 \quad \text{ή}$$

$$y_A = h = \omega^2 R^2 / 2g \quad (2.9)$$

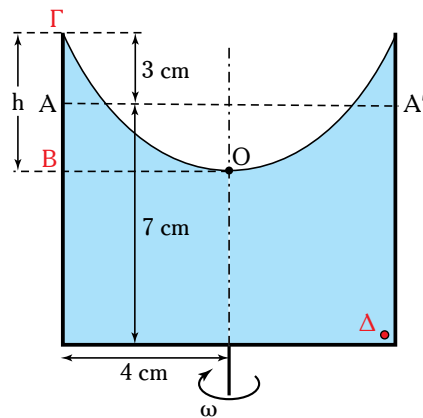
όπου: $r = R$ και $p = p_{εξ}$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον όγκο του παραβολοειδούς ($V = \pi r^2 h / 2$) αποδεικνύεται εύκολα ότι το σημείο O βρίσκεται σε ύψος $h/2$ χαμηλότερα απ' την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, όταν η συσκευή δεν περιστρέφεται.

Σημείωση: Φυγόκεντρο πεδίο έχουμε και λόγω περιστροφής της Γης. Αυτό όμως είναι εξαιρετικά ασθενές. Η φυγόκεντρη επιτάχυνση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στον ισημερινό (μέγιστη απόσταση από τον άξονα περιστροφής) και είναι μόλις το 0,34% του g .

Παράδειγμα 3

Όταν η φυγόκεντρη συσκευή του σχήματος 2.2ιε δεν περιστρέφεται, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ($\rho = 1024 \text{ kg/m}^3$) είναι η AA' .



Σχ. 2.2ιε

Να υπολογισθούν: α) Η μέγιστη ταχύτητα περιστροφής, ώστε να μην έχουμε απώλεια υγρού και β) η μέγιστη σχετική πίεση που αναπτύσσεται.

Λύση.

α) Το υγρό φτάνει στο χείλος Γ του δοχείου όταν το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Άρα:

$$AG = AB = h/2 = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m} \Rightarrow h = 0,06 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{από (2.9)} \Rightarrow h &= \omega^2 R^2 / 2g \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega^2 &= 2gh/R^2 \Rightarrow \omega = 27,12 \text{ rad/s} \\ (\omega = 2\pi n \Rightarrow n &= 4,316 \text{ rps} = 259 \text{ rpm}) \end{aligned}$$

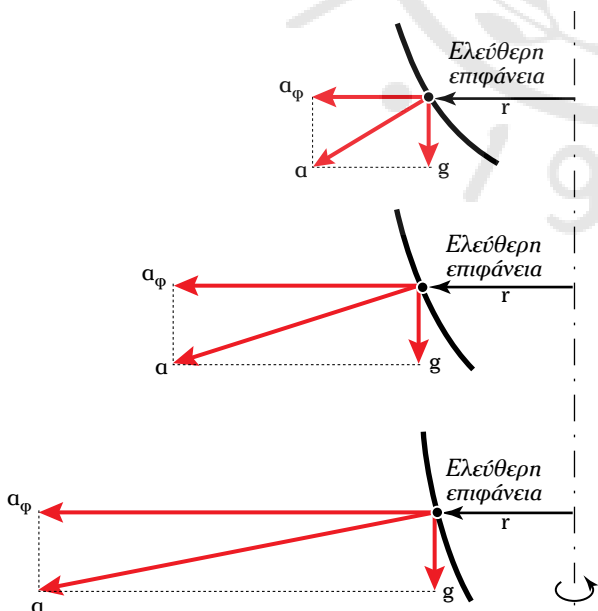
β) Η μέγιστη πίεση αναπτύσσεται στο σημείο Δ:

$$\begin{aligned} P_{\Delta,ox} = P_{g,\Delta} = p_{\Delta} - p_{εξ} &= -\rho \cdot g \cdot y_{\Delta} + 1/2 \rho \cdot \omega^2 \cdot r_{\Delta}^2 \\ \rho &= 1024 \text{ kg/m}^3, \quad \omega = 27,12 \text{ rad/s} \\ y_{\Delta} &= -(A\Delta - AB) = -4 \text{ cm} = -0,04 \text{ m}, \\ r_{\Delta} &= R = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m} \end{aligned}$$

οπότε: $p_{g,\Delta} = 1 \text{ kPa}$.

3) Φυγόκεντρικοί διαχωριστές.

Παρατηρούμε πως στα φυγόκεντρα πεδία η φυγόκεντρο επιτάχυνση a_{ϕ} είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας ω . Αυξάνοντας λοιπόν την ω , αυξάνεται η a_{ϕ} . Άρα αυξάνεται κατά μέτρο η συνισταμένη a και η κλίση της ως προς το οριζόντιο επίπεδο γίνεται μικρότερη (σχ. 2.2ιστ). Για πολύ με-



Σχ. 2.2ιστ
Συνισταμένη επιταχύνσεως σε φυγόκεντρικό διαχωριστή.

γάλες ταχύτητες που συναντάμε στις βιομηχανικές φυγόκεντρος συσκευές, η συνιστώσα της επιταχύνσεως της βαρύτητας είναι αμελητέα και το φαινόμενο καθορίζεται μόνο απ' τη φυγόκεντρο επιτάχυνση: $\bar{a} \approx \bar{a}_{\phi}$.

Υπό την επίδρασή της το υγρό ωθείται προς την περιφέρεια του δοχείου. Αυτό σημαίνει πως η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, για μεγάλες γωνιακές ταχύτητες, γίνεται κυλινδρική με ακτίνα r_o . Ολόκληρη η μάζα του περιστρέφεται σαν συμπαγές σώμα χωρίς ολίσθηση. Πρόκειται επομένως για κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, στην οποία αντί για το πεδίο βαρύτητας έχουμε το πολύ πιο ισχυρό φυγόκεντρο πεδίο. Η επιτάχυνση a είναι ανάλογη της ακτίνας και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στα τοιχώματα του κυλίνδρου. Η εξίσωση μεταβολής της πίεσεως (2.3) γίνεται:

$$dp = -\rho \cdot a \cdot dr = -\rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr$$

και η ολοκλήρωσή της για απόσταση r απ' τον άξονα περιστροφής δίνει:

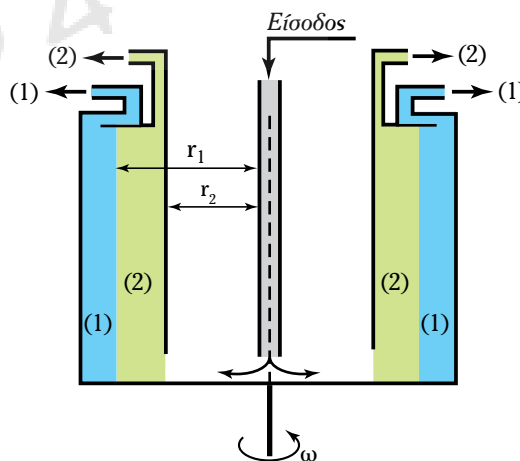
$$p = -\int_{r_o}^r \rho \omega^2 r dr$$

$$\text{ή } p = p_{εξ} + 1/2 \rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_o^2) \quad (2.10)$$

όπου: r_o η απόσταση της ελεύθερης (κυλινδρικής) επιφάνειας του υγρού απ' τον άξονα περιστροφής και r η αντίστοιχη απόσταση του σημείου πίεσεως p .

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής για ισχυρά φυγόκεντρικά πεδία.

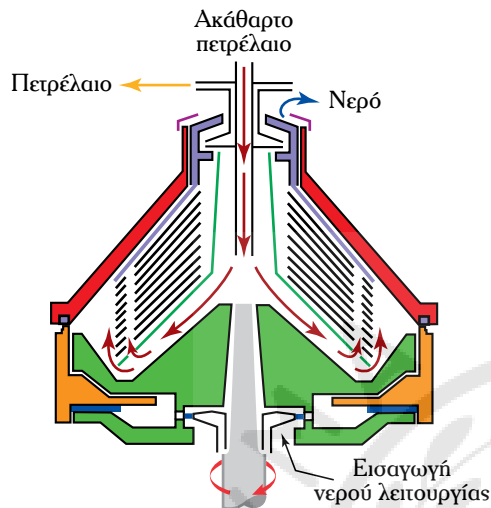
Η ιδιόμορφη αυτή υδροστατική ισορροπία, αξιοποιείται στους **φυγόκεντρικούς διαχωριστές** (centrifugal separators) η αρχή λειτουργίας των οποίων παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2ιζ. Λόγω της πολύ μεγάλης επιταχύνσεως a (σε σχέση με την επιτάχυνση της



Σχ. 2.2ιζ
Αρχή λειτουργίας φυγόκεντρικού διαχωριστή.

βαρύτητας g), επιτυγχάνεται πολύ ταχύτερος και καλύτερος διαχωρισμός υγρών (ακόμη και για μικρές διαφορές πυκνοτήτων), καθώς και αιωρουμένων στερεών, χωρίς σημαντικούς περιορισμούς στις παροχές.

Στο σχήμα 2.21η βλέπουμε την τομή ενός βιομηχανικού φυγοκεντρικού διαχωριστή (του εργοστασίου de Laval).



Σχ. 2.21η

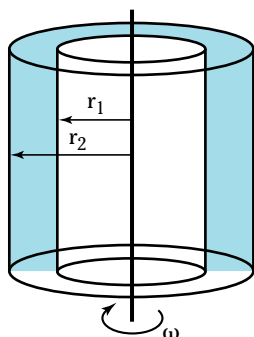
Βιομηχανικός φυγοκεντρικός διαχωριστής.

Παράδειγμα 4

Να υπολογισθεί: α) Η μέγιστη και η ελάχιστη επιτάχυνση του φυγοκεντρικού πεδίου που δημιουργεί κυλινδρική φυγοκεντρική συσκευή ακτίνας 0,2 m αν ο όγκος του υγρού ισούται με το 50% του όγκου του κυλίνδρου και η συσκευή περιστρέφεται στις 8000 rpm (σχ. 2.21θ) και β) πόση θα είναι η μέγιστη πίεση αν η πυκνότητα του υγρού είναι 850 kg/m³;

Λύση.

α) Το υγρό καταλαμβάνει τον δακτύλιο μεταξύ των ακτίνων r_1 και r_2 . Ο όγκος του κυλίνδρου ισούται με $V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h$ και ο όγκος του κυλινδρικού χώρου που δεν υπάρχει υγρό $V' = \pi \cdot r_1^2 \cdot h$



Σχ. 2.21θ

Σύμφωνα με την εκφώνηση:

$$V'_1 / V_2 = 1 - 0,5 = 0,5 \quad \text{ή} \quad \frac{V_1}{V_2} = 0,5 \Rightarrow \frac{r_1^2}{r_2^2} = 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = \sqrt{0,5} \cdot r_2 \Rightarrow r_1 = 0,1414 \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot (8000/60 \text{ s}^{-1}) = 837,7 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha_1 = \omega^2 \cdot r_1 = 99.226 \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = 10.115 \cdot g$$

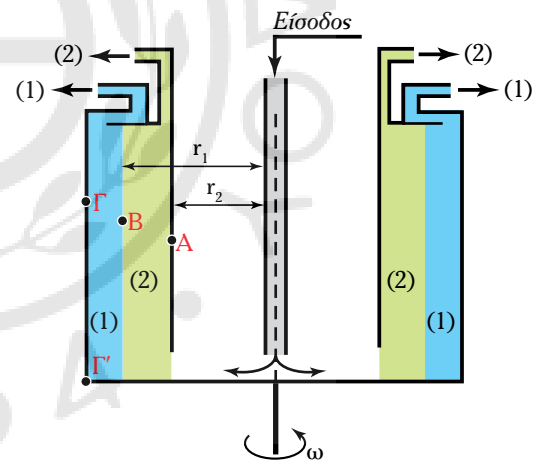
$$\alpha_2 = \omega^2 \cdot r_2 = 140.348 \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = 14.307 \cdot g$$

β) Η μέγιστη πίεση αναπτύσσεται στη μέγιστη απομάκρυνση απ' τον άξονα (r_2). Για $r_2 = 0,2 \text{ m}$, $r_0 = 0,1414 \text{ m}$.

$$\text{από (2.10)} \Rightarrow p_{\text{abs}} - p_{\text{atm}} = P g_{\text{max}} = 5964,8 \text{ kPa}$$

Παράδειγμα 5

Ο φυγοκεντρικός διαχωριστής του σχήματος 2.2κ περιέχει νερό (1) και λάδι πυκνότητας 850 kg/m³ (2). Αν η εσωτερική διάμετρος της συσκευής είναι 60 cm, το πάχος του στρώματος νερού 5 cm, του λαδιού 10 cm και $\omega = 5000 \text{ rpm}$, να υπολογισθεί η στατική πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών και η μέγιστη πίεση που αναπτύσσεται στη συσκευή.



Σχ. 2.2κ

Λύση.

Δεδομένα: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_\lambda = 850 \text{ kg/m}^3$,

$p_A = 101,3 \text{ kPa}$, $n = 5000 \text{ rpm}$,

$R_\Gamma = 0,30 \text{ m}$

$R_\Gamma - R_B = 0,05 \text{ m} \Rightarrow R_B = 0,25 \text{ m}$

$R_B - R_A = 0,10 \text{ m} \Rightarrow R_A = 0,15 \text{ m}$

Ζητούμενα: p_B, p_Γ

Για την υδροστατική πίεση σε φυγοκεντρικό πεδίο ισχύει η εξίσωση (2.10):

$$p = p_{εξ} + 1/2 \rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_0^2)$$

είναι: $\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot (5000/60 \text{ s}^{-1}) = 523,6 \text{ rad/s}$

λάδι: $p_B = p_A + 1/2 \rho_\lambda \cdot \omega^2 \cdot (r_B^2 - r_A^2) \Rightarrow p_B = 4762 \text{ kPa}$

νερό: $p_\Gamma = p_B + 1/2 \rho_\nu \cdot \omega^2 \cdot (r_\Gamma^2 - r_B^2) \Rightarrow p_B = 8532 \text{ kPa}$

Σημείωση: Αν λαμβάναμε υπόψη και την επίδραση της γήινης βαρύτητας, η μέγιστη πίεση θα παρουσιαζόταν στο σημείο Γ' της μέγιστης ακτίνας και του ελάχιστου ύψους. Αλλά όπως είδαμε, όταν η ταχύτητα περιστροφής είναι μεγάλη, η επίδραση της βαρύτητας είναι αμελητέα. Άρα $p_\Gamma = p_\Gamma$.

2.3 Η πίεση της ατμόσφαιρας.

Στα *αέρια*, όταν υπάρχουν μεγάλες υψομετρικές διαφορές (όπως συμβαίνει στην *ατμόσφαιρα*) η πυκνότητα δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την πίεση και τη θερμοκρασία. Από την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων προκύπτει:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.3) παίρνουμε:

$$dp = -\frac{p}{R \cdot T} \cdot g \cdot dy \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R \cdot T} \cdot dy \quad (2.11)$$

Αν θεωρήσουμε τη θερμοκρασία σταθερή, με ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.11) προκύπτει:

$$p = p_o \cdot \exp\left[-\frac{g \cdot y}{R \cdot T}\right] = p_o \cdot e^{-c \cdot y} \quad (2.12)$$

όπου: $c = g/R \cdot T$.

Στη γήινη ατμόσφαιρα σταθερή θερμοκρασία συναντάται από ύψος 11–20 km ($T = -56,5^\circ\text{C}$).

Αντίθετα, από την επιφάνεια της θάλασσας ($y = 0$) μέχρι $y \approx 11 \text{ km}$ (στρατόσφαιρα), η θερμοκρασία μειώνεται γραμμικά σύμφωνα με τη σχέση:

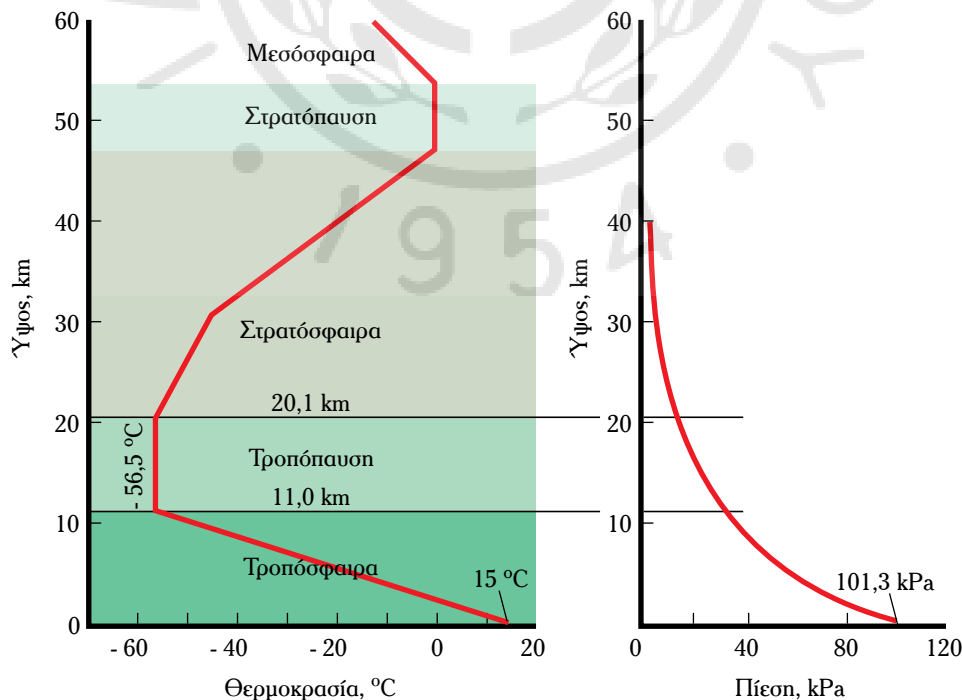
$$T \approx T_o - b \cdot y$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέση θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας είναι $T_o = 15^\circ\text{C}$ και για $y = 11000 \text{ m}$, $T \approx -56,5^\circ\text{C}$, προκύπτει: $b = 0,0065 \text{ k/m}$.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.11) με $T \approx T_o - 0,0065 \cdot y$, προκύπτει:

$$p = p_o \cdot \left(1 - \frac{by}{T_o}\right)^{g/(R \cdot b)} = p_o \cdot \left(1 - \frac{0,0065y}{T_o}\right)^{5,26} \quad (2.12a)$$

Οι εξισώσεις (2.12) και (2.12a) είναι γνωστές ως *βαρομετρικές εξισώσεις*. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της πίεσης της ατμόσφαιρας: Η εξίσωση (2.12a) για ύψη από 0–11 km και η εξίσωση (2.12) από 11–20 km. Οι μεταβολές της πίεσης και της θερμοκρασίας της ατμόσφαιρας δίνονται στο σχήμα 2.3.



Σχ. 2.3

Μεταβολές της θερμοκρασίας και της πίεσης της γήινης ατμόσφαιρας.

(Οι τιμές είναι μέσοι όροι. Διαφοροποιούνται από τον ισημερινό ως τους πόλους).

Σημειώνουμε ότι η σταθερά του ατμοσφαιρικού αέρα είναι $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

2.4 Μέτρηση της πίεσεως.

2.4.1 Μέτρηση ατμοσφαιρικής πίεσεως: Βαρόμετρα.

Σύμφωνα με όσα είπαμε (βλ. παράγρ. 2.3), η $\Gamma\eta$ περιβάλλεται από την ατμόσφαιρα, η οποία ασκεί πίεση σε όλα τα σώματα που είναι «βυθισμένα» σ' αυτήν. Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε τη μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσεως με το ύψος. Το προφίλ της φαίνεται στο σχήμα 2.3. Λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο ελάχιστο ύψος (το μέγιστο ατμοσφαιρικό βάθος), δηλαδή στην επιφάνεια της θάλασσας:

$$p_{\text{ατμ}} = 101,3 \text{ kPa} (= 1 \text{ Atm})$$

Για μικρές μεταβολές του υψομέτρου, η $p_{\text{ατμ}}$ παραμένει σταθερή.

Ανάλογα με τις μετεωρολογικές συνθήκες, η $p_{\text{ατμ}}$ μπορεί να είναι λίγο μεγαλύτερη (βαρομετρικό υψηλό) ή χαμηλότερη (βαρομετρικό χαμηλό).

Τα όργανα μετρήσεως της πίεσεως της γήινης ατμόσφαιρας τα ονομάζουμε **βαρόμετρα** (barometers).

Το 1643 ο **Torricelli** με το περίφημο πείραμά του όχι μόνο απέδειξε την ύπαρξη της ατμοσφαιρικής πίεσεως, αλλά και τη μετρήσε για πρώτη φορά. Ο Torricelli χρησιμοποίησε σωλήνα τον οποίο γέμισε με υδράργυρο, ώστε να μην περιέχει καθόλου αέρα και τον τοποθέτησε ανεστραμμένο σε δοχείο με το ίδιο υγρό, με το ανοικτό άκρο του βυθισμένο σε αυτό (σωλήνας Torricelli, σχ. 2.4α).

Στο επίπεδο της ελεύθερης επιφάνειας του υδραργύρου ($y = 0$) έχουμε: $p = p_{\text{ατμ}}$.

Αν ο σωλήνας έχει αρκετό ύψος, στο πάνω άκρο του θα δημιουργηθεί κενό και η ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου εντός του σωλήνα θα βρεθεί σε ύψος y . Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής:

$$p_1 = \rho g h = p_{\text{ατμ}} \quad (2.13)$$

Το μήκος L του σωλήνα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από $y = p_{\text{ατμ}}/\gamma$.

Ο χώρος στο πάνω κλειστό τμήμα του (μήκος $L-y$), αν ακριβολογούμε, δεν έχει μηδενική πίεση, αφού υπάρχουν οι ατμοί του υγρού. Η πίεση του χώρου αυτού ισούται με την τάση ατμών του υγρού (η οποία αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας).

Άρα η εξίσωση (2.13) πρέπει να διορθωθεί:

$$p_{\text{ατμ}} = p_v + \rho \cdot g \cdot h \quad (2.13a)$$

Ο υδράργυρος όμως έχει πολύ μικρή τάση ατμών (για θερμοκρασία 20°C , $p_{v\text{Hg}} = 0,16 \text{ Pa}$), τιμή πρακτικά μηδενική.

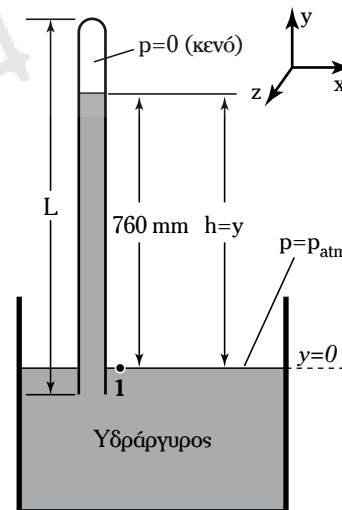
Ο υδράργυρος είναι κατάλληλος και λόγω του μεγάλου ειδικού βάρους του (άρα του μικρότερου μήκους σωλήνα που απαιτεί): $\gamma_{\text{Hg}} = 132,84 \text{ kN}/\text{m}^3$.

Η ατμοσφαιρική πίεση αντιστοιχεί σε ορισμένο ύψος της στήλης υδραργύρου. Σε κανονικές συνθήκες αυτή μετρήθηκε ίση με 760 mmHg :

$$p_{\text{ατμ}} = 101,3 \text{ kPa} = 760 \text{ mmHg}$$

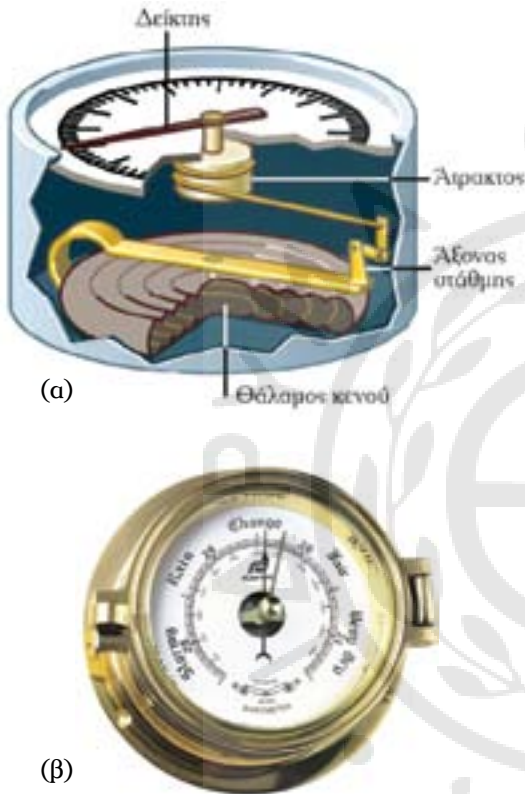
Στη θέση του υδραργύρου θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο υγρό. Αν χρησιμοποιηθεί νερό, το ύψος της στήλης νερού (για κανονική ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας) θα ανέλθει στα $10,3 \text{ m}$. Πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη ότι το νερό έχει μια αξιοσημείωτη τάση ατμών ($p_v = 2,34 \text{ kPa}$ στους 20°C , $3,2 \text{ kPa}$ στους 25°C κ.λπ.) και κατά συνέπεια το βαρόμετρο που θα προέκυπτε, εκτός από το τεράστιο μήκος του σωλήνα του, θα έδινε ύψη στήλης που θα μεταβάλλονταν με τη μεταβολή της θερμοκρασίας.

Σημαντικό μειονέκτημα του **βαρομέτρου υδραργύρου** (mercury barometer) αποτελεί το μεγάλο μήκος σωλήνα που απαιτεί (μεγαλύτερο από 76 cm). Αυτός είναι ο λόγος της ευρύτατης χρήσεως που βρίσκει το **μεταλλικό βαρόμετρο** (αν και οι μετρήσεις του είναι μικρότερης ακρίβειας). Αυτό αποτελείται από αεροστεγώς κλεισμένο μεταλλικό κουτί απ' το



Σχ. 2.4α
Βαρόμετρο Torricelli.

οποίο έχει αφαιρεθεί ο αέρας [σχ. 2.4β(α)(β)]. Η πάνω επιφάνειά του αποτελείται από εύκαμπτο έλασμα. Στο έλασμα ασκείται η δύναμη της ατμοσφαιρικής πίεσης ($F = p_{atm} \cdot A$) και το παραμορφώνει τόσο, ώστε να αναπτυχθεί ίση και αντίθετη δύναμη (αντίσταση). Η παραμόρφωση μεταδίδεται μέσω συστήματος ευαίσθητων μοχλών σε δείκτη, ο οποίος βρίσκεται μπροστά σε κατάλληλα βαθμολογημένη κλίμακα. Το μεταλλικό βαρόμετρο απαιτεί έλεγχο και ρύθμιση (καλιμπράρισμα) κατά διαστήματα.



Σχ. 2.4β

(α) Τομή του μεταλλικού βαρομέτρου.
(β) Μεταλλικό βαρόμετρο.

2.4.2 Μανόμετρα.

Μία από τις σπουδαιότερες εφαρμογές της θεμελιώδους εξισώσεως της υδροστατικής έχομε στα **μανόμετρα** (manometers).

Τα μανόμετρα είναι **όργανα μετρήσεως της διαφοράς πίεσεως** μεταξύ δύο χώρων ή δύο σημείων ενός ρευστού και διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

1) **Μανόμετρο πιεζομετρικού σωλήνα** (piezometer tube). Πρόκειται για απλό διαφανή βαθμονομημένο σωλήνα συνδεδεμένο με τον αγωγό ή

το δοχείο που βρίσκεται υπό πίεση (σχ. 2.4γ).

Ισχύει:

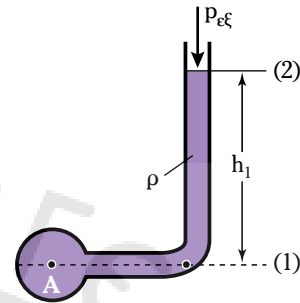
$$p_A = p_1 \tag{1}$$

$$p_1 = p_{εξ} + \rho \cdot g \cdot h_1 \tag{2}$$

$$\text{ή } p_A = p_{εξ} + \rho \cdot g \cdot h_1 \tag{3}$$

$$\text{ή αν } p_{εξ} = p_{atm} \text{ έχομε } p_A = \rho \cdot g \cdot h_1 + p_{atm}$$

$$\text{ή } p_{A, abs} = \rho \cdot g \cdot h_1 + p_{atm} \text{ και } \rho_1 \cdot g \cdot h = p_{A, g}$$



Σχ. 2.4γ

2) **Μανόμετρο τύπου U** (U-tube manometer) αποτελείται από κεκαμμένο σωλήνα τύπου U, έτσι ώστε τα δύο σκέλη του να αποτελούν συγκοινωνούντα δοχεία. Μέσα στον σωλήνα υπάρχει υγρό γνωστής πυκνότητας. Στο σχήμα 2.4δ βλέπομε μια απλή μορφή του. Τα δύο σκέλη του μανόμετρου συνδέονται με τους χώρους των οποίων θέλομε να συγκρίνομε τις πιέσεις. Αν οι πιέσεις στα δύο σκέλη του μανόμετρου πάνω από το ρευστό A είναι ίσες, τότε, σύμφωνα με την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων και οι ελεύθερες επιφάνειες θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Αν υπάρχει διαφορά πίεσεως, θα υπάρχει και υψομετρική διαφορά.

Στο σχήμα 2.4δ τα σημεία 1 και 1' ανήκουν στο ίδιο υγρό με $\Delta h = 0$ επομένως $p_1 = p_{1'}$.

$$\text{από (2.5)} \Rightarrow p_1 = p_{1'} = p_2 + \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1')$$

$$\text{ή } p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \tag{2.14}$$

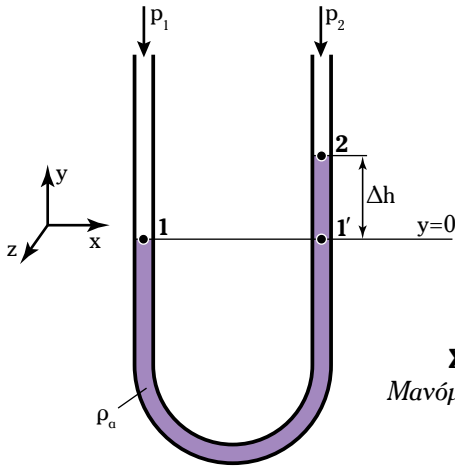
$$\text{και γενικότερα: } \Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h \tag{2.14a}$$

Από την εξίσωση (2.14) προκύπτει πως αν το ένα σκέλος του μανόμετρου είναι ανοικτό στην ατμόσφαιρα τότε υπολογίζεται άμεσα η σχετική πίεση του άλλου σκέλους:

$$p_{1'} = \rho \cdot g \cdot \Delta h + p_{atm} = p_g + p_{atm}, \quad p_g = \rho \cdot g \cdot h$$

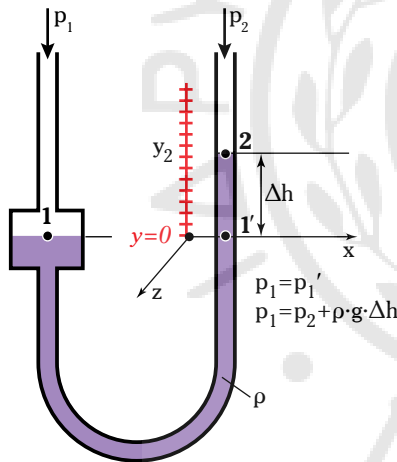
Στην περίπτωση αυτή η $p_{1'}$ ονομάζεται $p_{1'}$ απόλυτη ($p_{1'}$ absolute).

Μια πρακτική τροποποίηση του μανόμετρου τύπου U είναι η προσθήκη δοχείου διαστολής στο ένα σκέλος του (σχ. 2.4ε). Επειδή το εμβαδόν διατομής



Σχ. 2.46
Μανόμετρο τύπου U.

του δοχείου είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το εμβαδόν διατομής του σωλήνα, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού εντός του δοχείου μένει κατά προσέγγιση σταθερή και μεταβάλλεται μόνο το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του δεύτερου σκέλους. Έτσι, είναι εύκολη η τοποθέτηση κλίμακας υψών ή πιέσεων και η άμεση ανάγνωσή τους.



Σχ. 2.4ε
Μανόμετρο με δοχείο διαστολής.

3) **Διαφορικά μανόμετρα** (differential Utube manometers). Τα μανόμετρα αυτά χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν την διαφορά πίεσης ($p_A - p_B$) μεταξύ δύο σημείων και συστημάτων ρεόντων ρευστών (σχ. 2.4στ).

Ισχύει:

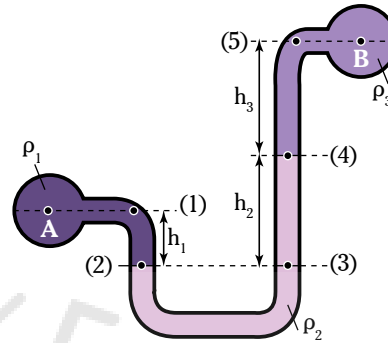
- $p_2 = p_3$ (1)
- $p_2 = \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + p_1$ (2)
- $p_3 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + p_4$ (3)
- $p_4 = \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + p_5$ (4)
- $(1, 2, 3, 4) \Rightarrow \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + p_1 =$

$$= \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + p_5$$

$$\hat{=} p_1 - p_5 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 - \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \quad (5)$$

$$p_1 = p_A \text{ και } p_5 = p_B \quad (6)$$

$$\text{και } p_A - p_B = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 - \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \quad (7)$$



Σχ. 2.4στ

4) **Μανόμετρο κεκλιμένου σωλήνα** (inclined Utube manometer). Το μανόμετρο αυτό χρησιμοποιείται για την μέτρηση μικρών διαφορών σε πιέσεις. Το ένα σκέλος του μανομέτρου είναι κεκλιμένο κατά γωνία θ (σχ. 2.4ζ).

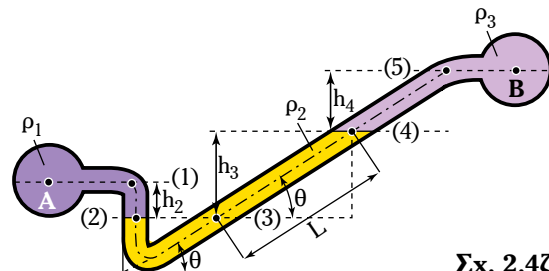
Με τον τρόπο αυτό μετράμε το μεγαλύτερο μήκος L και με γνωστή τη γωνία θ το μετατρέπουμε σε ύψος h_3 .

Ισχύει:

- $p_2 = p_3$ (1)
- $p_2 = p_1 + \rho_1 \cdot g \cdot h_2 = p_A + \rho_1 \cdot g \cdot h_2$ (2)
- $p_3 = \rho_2 \cdot g \cdot h_3 + p_4 = \rho_2 \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta + p_4$ (3)
- $p_4 = \rho_3 \cdot g \cdot h_4 + p_5 = \rho_3 \cdot g \cdot h_4 + p_B$ (4)
- $\hat{=} p_3 = \rho_2 \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta + \rho_3 \cdot g \cdot h_4 + p_B$ (5)
- $\hat{=} p_A + \rho_1 \cdot g \cdot h_2 =$
- $= \rho_2 \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta + \rho_3 \cdot g \cdot h_4 + p_B$ (6)
- $\hat{=} p_A - p_B = \rho_2 \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta + \rho_3 \cdot g \cdot h_4 -$
- $- \rho_1 \cdot g \cdot h_2$ (7)

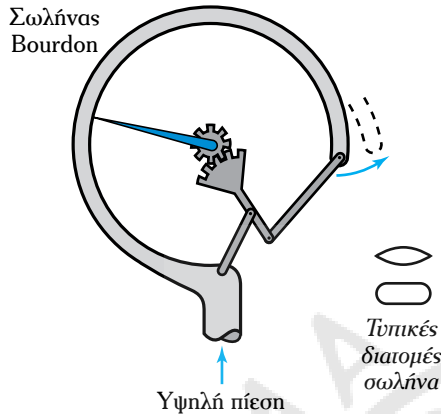
αν θεωρήσουμε το $h_2 = h_4$ και $\rho_3 = \rho_1$, τότε:

$$p_A - p_B = \rho_2 \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta \quad \hat{=} L = (p_A - p_B) / \rho_2 \cdot g \cdot \sin\theta \quad (8)$$



Σχ. 2.4ζ

5) **Μανόμετρο Bourdon¹**, η αρχή λειτουργίας του οποίου παρουσιάζεται στο σχήμα 2.4n. Ο καμπυλωμένος σωλήνας ελλειπτικής διατομής μεταβάλλει την καμπυλότητά του όταν μεταβληθεί η πίεση. Η μεταβολή μεταφέρεται στη βελόνα που βρίσκεται μπροστά σε κλίμακα μετρήσεως της πίεσης.



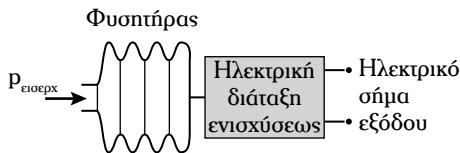
Σχ. 2.4n

Αρχή λειτουργίας μανόμετρου Bourdon.

Το μανόμετρο αυτό χρησιμοποιείται για μέτρηση μεγάλων πιέσεων και υπολείπεται σε ακρίβεια των μανομέτρων τύπου U. Εκτός από την αναλογική ένδειξη η μετατόπιση του σωλήνα Bourdon μέσω ειδικής ηλεκτρονικής διατάξεως μπορεί να δώσει ηλεκτρικό σήμα, αυτό μπορεί να μετατραπεί σε ένδειξη πίεσης σε οθόνη μετατρέποντας το μανόμετρο σε ψηφιακό.

6) **Μανόμετρα με αισθητήρα πίεσης τύπου φουσητήρα** (bellows) (σχ. 2.4θ). Χρησιμοποιούνται για την μέτρηση μικρών διαφορών πίεσης (από 0 έως 1000 Pa). Το σημείο εισόδου (πίεση) δημιουργεί μέσω του φουσητήρα μετατόπιση, η οποία ενισχύεται μέσω ηλεκτρονικών διατάξεων παράγοντας ηλεκτρικό σήμα. Αυτό το σήμα εξόδου αντιστοιχίζεται με το εισερχόμενο έτσι ώστε να γνωρίζουμε την διαφορά πίεσης η οποία το προκαλεί.

Μπορεί ακόμη να χρησιμοποιηθούν



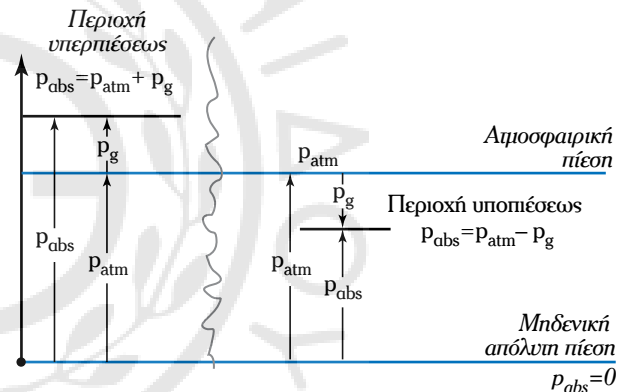
Σχ. 2.4θ

7) **Μανόμετρα με χωρητικούς αισθητήρες** (capacity pressure sensors) πίεσης, στους οποίους μετρείται η μεταβολή της ηλεκτρικής χωρητικότητας σε σχέση με την ασκούμενη πίεση.

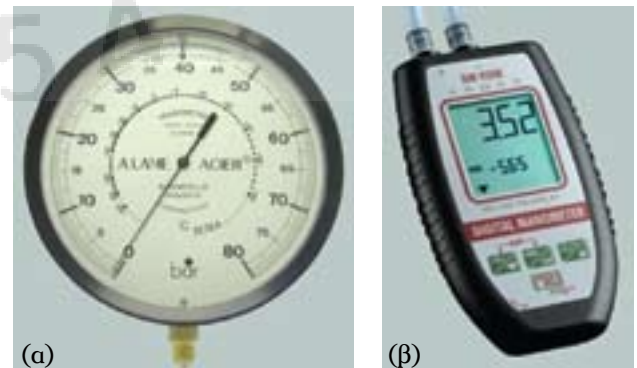
8) **Μανόμετρα με αισθητήρες πίεσης με πιεζαντίσταση** (piezoresistive pressure sensors), στους οποίους ανάλογα με την ασκούμενη μηχανική τάση (πίεση) μεταβάλλεται και η ηλεκτρική τους αντίσταση. Η μεταβολή της αντιστάσεως αντιστοιχίζεται με την εισερχόμενη πίεση (σήμα εισόδου) και την εξερχόμενη τάση (σήμα εξόδου).

9) **Μανόμετρα με πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες** (piezoelectric pressure sensors), η λειτουργία των οποίων στηρίζεται στο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.

Υπενθυμίζεται ότι με τα μανόμετρα μετρείται η διαφορά πίεσης (Δp). Η σχέση μεταξύ της απόλυτης πίεσης (P_g) και της ατμοσφαιρικής (p_{atm}) φαίνεται στο σχήμα 2.4i. Εικόνες συνηθέστερων μανομέτρων παρουσιάζονται στο σχήμα 2.4ia.



Σχ. 2.4i



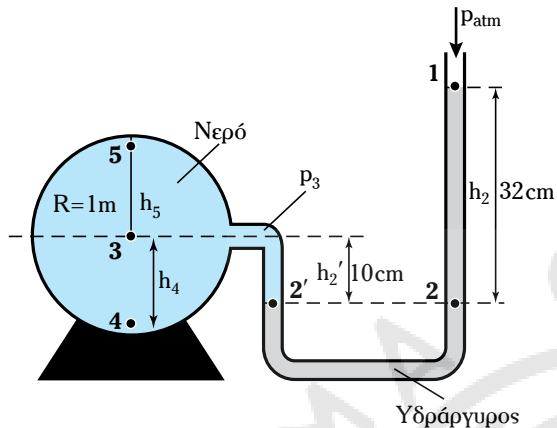
Σχ. 2.4ia

Μανόμετρα: (α) μεταλλικό και (β) ψηφιακό.

¹ Eugène Bourdon: Γάλλος μηχανικός, 1849.

Παράδειγμα 6

Να υπολογισθεί η πίεση στη βάση, το κέντρο και το ανώτερο σημείο της κυλινδρικής δεξαμενής του σχήματος 2.4ιβ, και να σχεδιασθεί το διάγραμμα μεταβολής πίεσως-ύψους. Το δεξί σκέλος του μανόμετρου είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα.



Σχ. 2.4ιβ

Λύση (σχ. 2.4ιβ).

Σημειώνουμε τα χαρακτηριστικά σημεία 1, 2, 2', 3, 4, 5 πάνω στο σχήμα.

$$p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad \hat{=} \quad p_2 = p_1 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_2 \quad (1)$$

$$p_2 - p_1 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_2 =$$

$$= 13,550 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,32 \text{ m} = 42,536 \text{ kPa}$$

$$\hat{=} p_2 = p_1 + 42,536 \text{ kPa} = (101,3 + 42,536) \text{ kPa} =$$

$$= 143,86 \text{ kPa}$$

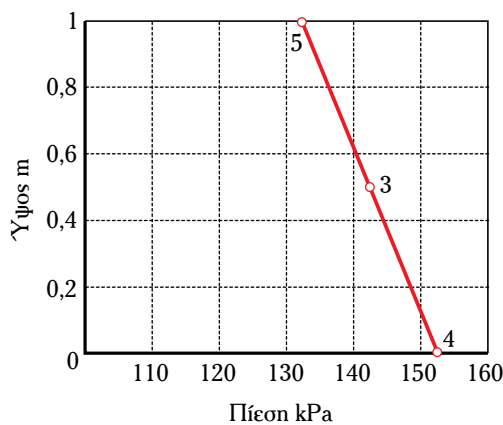
Από το ίδιο σχήμα έχουμε:

$$p_2 = p_2' = 143,86 \text{ kPa}, \text{ επίσης}$$

$$p_2' = p_3 + \rho_v \cdot g \cdot h_2' \quad \hat{=} \quad (2)$$

$$p_3 = p_2' - \rho_v \cdot g \cdot h_2' =$$

$$= 143,86 \text{ kPa} - (1000 \cdot 9,81 \cdot 0,1) \text{ Pa} = 142,9 \text{ kPa}$$



Σχ. 2.4ιγ

$$\text{από το ίδιο σχήμα: } p_4 = p_3 + \rho_v \cdot g \cdot h_s \quad (3)$$

$$\hat{=} p_4 = 142,9 \text{ kPa} + (1000 \cdot 9,81 \cdot 1) \text{ Pa} \quad (4)$$

$$\hat{=} p_4 = 152,7 \text{ kPa}$$

$$\text{από το ίδιο σχήμα: } p_3 = p_5 + \rho_v \cdot g \cdot h_5 \quad (5)$$

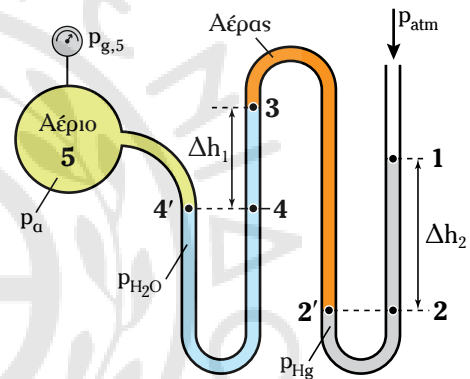
$$\hat{=} p_5 = p_3 - \rho_v \cdot g \cdot h_5 = 142,9 \text{ kPa} - (1000 \cdot 9,81 \cdot 1) \text{ Pa}$$

$$\hat{=} p_5 = 133,09 \text{ kPa}$$

Το διάγραμμα κατανομής των πιέσεων φαίνεται στο σχήμα 2.4ιγ.

Παράδειγμα 7

Αξιοποιώντας τις ενδείξεις του **διπλού μανόμετρου** του σχήματος 2.4ιδ, να υπολογισθεί η πίεση του αερίου. Το δεξί σκέλος του μανόμετρου είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα.



Σχ. 2.4ιδ

Δίνονται: $\Delta h_1 = 20 \text{ cm}$ και $\Delta h_2 = 40 \text{ cm}$

Λύση.

Τοποθετούμε τα σημεία 1, 2, 2', 3, 4, 5 στο σχήμα.

Δεδομένα: $p_1 = p_{atm} = 101,3 \text{ kPa}$, $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$,

$\rho_{Hg} = 13.500 \text{ kg/m}^3$, $\Delta h_1 = 0,2 \text{ m}$

και $\Delta h_2 = 0,4 \text{ m}$.

Ζητείται το p_5 .

Σύμφωνα με το σχήμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$p_2 = p_1 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h_2 \quad (1)$$

$$\hat{=} p_2 = p_{atm} + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h_2 =$$

$$= 101,3 \text{ kPa} + (13.500 \cdot 9,81 \cdot 0,4) \text{ Pa} = 154,47 \text{ kPa}$$

$$p_2 = p_2' \text{ και } p_3 = p_2 = 154,47 \text{ kPa} \text{ (αέρας)}$$

$$p_4 = p_3 + \rho_v \cdot g \cdot \Delta h_1 \quad (2)$$

$$\hat{=} p_4 = 154,47 \text{ kPa} + (1000 \cdot 9,81 \cdot 0,2) \cdot \text{Pa}$$

$$p_a = 156,43 \text{ kPa}$$

$p_4 = p_4' = p_5 = 156,43 \text{ kPa}$, αέριο, δεν υπολογίζεται πίεση λόγω ύψους ρευστού.

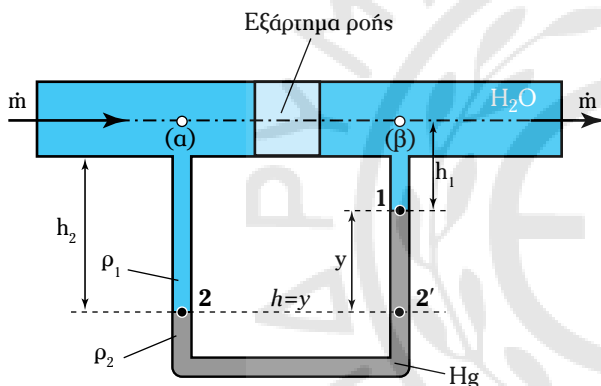
Σημείωση: Η άσκηση μπορεί να επιλυθεί χωρίς υπολογισμούς ενδιάμεσων πιέσεων:

$$\begin{aligned} p_5 - p_1 &= (p_5 - p_4') + (p_4' - p_4) + (p_4 - p_3) + (p_3 - p_2') + (p_2' - p_2) + \\ &+ (p_2 - p_1) = (p_4 - p_3) + (p_2 - p_1) \Rightarrow p_5 - p_1 = -\rho_v \cdot g \cdot (y_4 - y_3) - \\ &- \rho_{Hg} \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = \rho_v \cdot g \cdot (y_3 - y_4) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot (y_1 - y_2) = 55,1 \text{ kPa} \\ \Rightarrow p_5 &= 156,4 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Προτείνεται όμως ο διαδοχικός υπολογισμός των πιέσεων (όταν έχουμε επαρκή στοιχεία), επειδή έτσι είναι πιο εύκολος ο λογικός έλεγχος.

Παράδειγμα 8

Το μανόμετρο του σχήματος 2.4ie μετρά τη μεταβολή πίεσης (λόγω παρεμβολής εξαρτήματος ροής) μεταξύ των σημείων α και β ενός οριζώντιου αγωγού. Αν το ρευστό του αγωγού είναι νερό, το υγρό του μανομέτρου υδράργυρος και $y = 10 \text{ cm}$, να υπολογισθεί η μεταβολή της πίεσης από το α ως το β.



Σχ. 2.4ie

Λύση.

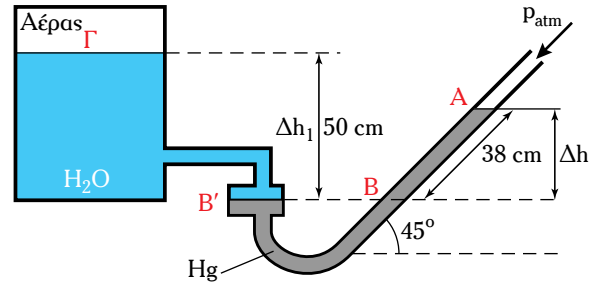
$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα: } \rho_v &= 1000 \text{ kg/m}^3, & \rho_{Hg} &= 13.550 \text{ kg/m}^3, \\ y_1 - y_2 &= 0,1 \text{ m}, & y_\alpha &= y_\beta, \end{aligned}$$

οι πιέσεις πάνω στην γραμμή 2-2' είναι ίσες, οπότε ισχύει:

$$\begin{aligned} p_\alpha + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_2 &= p_\beta + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{2Hg} + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_\alpha - p_\beta &= \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg} + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \Rightarrow p_\alpha - p_\beta = \\ &= \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg} - \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_{Hg} = g \cdot h_{Hg} \cdot (\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}) \\ \text{ή } p_\alpha - p_\beta &= g \cdot h_{Hg} \cdot (\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}) = \\ &= 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot (13.550 - 1000) \text{ kg/m}^3 = 12.312 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9

Να υπολογισθεί η πίεση του αέρα πάνω από το νερό της κλειστής δεξαμενής του σχήματος 2.4ιστ. Το υγρό του επικλινούς μανομέτρου είναι υδράργυρος.



Σχ. 2.4ιστ

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα: } \rho_v &= 1000 \text{ kg/m}^3, & \rho_{Hg} &= 13.550 \text{ kg/m}^3 \\ y_\Gamma - y_B &= 0,5 \text{ m}, & \theta &= 45^\circ, \\ AB &= 0,38 \text{ m}, & p_A &= 101,3 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Ζητούμενο: p_Γ

$$\Delta h = y_A - y_B = AB \cdot \sin \theta \Rightarrow \Delta h = 0,269 \text{ m}$$

οι πιέσεις πάνω στην γραμμή BB' είναι ίσες, ισχύει:

$$\begin{aligned} p_B &= \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h + p_A = \\ &= 13.550 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,269 \text{ m} + \\ &+ 101,3 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 137.057 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

$$p_B = p_{B'} = 137,057 \text{ kPa}$$

$$\begin{aligned} p_B' &= \rho_v \cdot g \cdot \Delta h_1 + p_\Gamma \Rightarrow p_\Gamma = p_B' - \rho_v \cdot g \cdot \Delta h_1 = \\ &= 137.057 \text{ Pa} - 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5 \text{ m} = \\ &= 132.152 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

2.5 Δυνάμεις, κέντρο πίεσης (centre of pressure).

Ο υπολογισμός των δυνάμεων που ασκούν τα ρευστά σε στερεές επιφάνειες που βρίσκονται σε επαφή με αυτά, αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της Στατικής των Ρευστών. Ο σωστός σχεδιασμός και κατασκευή των φραγμάτων, των δεξαμενών, των δοχείων πίεσης, των θυρίδων κ.λπ., έχουν ως προϋπόθεση τον υπολογισμό των δυνάμεων που τα ρευστά ασκούν στα στερεά τοιχώματα. Το πρόβλημα αυτό θα μας απασχολήσει στην τρέχουσα παράγραφο.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.1, σε ένα ρευστό που βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας δεν ασκούνται διατμητικές δυνάμεις. Άρα οι δυνάμεις μεταξύ ρευστού σε ηρεμία και στοιχειώδους επιφάνειας, που βρίσκεται σε επαφή μαζί του είναι κάθετες. Το ρευστό ασκεί στην επιφάνεια δύναμη, η οποία οφείλεται στην πίεση. Αν dA η στοιχειώδης

επιφάνεια και p η ασκούμενη πίεση το μέτρο της δύναμης είναι:

$$dF = p \cdot dA \quad (2.15)$$

Αν η επιφάνεια A είναι επίπεδη, οι στοιχειώδεις δυνάμεις είναι παράλληλες μεταξύ τους (επειδή είναι κάθετες στην επίπεδη επιφάνεια A) και η παραπάνω σχέση ολοκληρώνεται:

$$F = \int p \cdot dA \quad (2.15a)$$

2.5.1 Κεντροειδές και κέντρο πίεσεως.

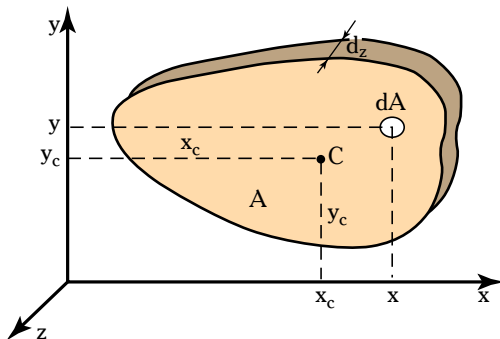
Κεντροειδές (centroid) (ή **κέντρο βάρους**) C επιφάνειας καλείται το σημείο εφαρμογής ίσων, παράλληλων και ομοιόμορφα κατανεμημένων δυνάμεων που ασκούνται στην επιφάνεια. Αν είχαμε στερεό ομογενές σώμα (πρίσμα) με βάση την επιφάνεια και πάχος Δz , που βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας, το κεντροειδές της επιφάνειας θα ταυτιζόταν με το κέντρο βάρους του στερεού όταν $\Delta z \rightarrow 0$. Η ροπή του ολικού βάρους (B) ως προς τον άξονα y θα ισούται με το άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών βαρών (σχ. 2.5α):

$$\begin{aligned} B \cdot x_c &= \int x \cdot dB \Rightarrow \\ \Rightarrow (A \cdot \Delta z \cdot \gamma) \cdot x_c &= \int x \cdot (dA \cdot \Delta z \cdot \gamma) \Rightarrow \\ \Rightarrow x_c \cdot A &= \int x \cdot dA \\ \Rightarrow x_c &= \frac{1}{A} \int x \cdot dA \end{aligned} \quad (2.16a)$$

Αντίστοιχα:

$$y_c = \frac{1}{A} \int y \cdot dA \quad (2.16\beta)$$

Παρατηρούμε πως το κεντροειδές αποτελεί γεωμετρικό χαρακτηριστικό της επιφάνειας. Έτσι, για



Σχ. 2.5α
Κέντρο βάρους επιφάνειας.

παράδειγμα, το κεντροειδές μιας επίπεδης επιφάνειας σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, ενώ το κεντροειδές μιας κυκλικής επίπεδης επιφάνειας είναι το κέντρο του κύκλου. **Το κεντροειδές προσδιορίζεται απ' τις συντεταγμένες του x_c και y_c .** Τύποι υπολογισμού δίνονται στον πίνακα 3 του Παραρτήματος.

Κέντρο πίεσεως (P) επιφάνειας καλείται το σημείο εφαρμογής της δύναμης πίεσεως στην επιφάνεια. Το κέντρο πίεσεως εξαρτάται από την κατανομή των πιέσεων που το ρευστό ασκεί στα διάφορα σημεία της επιφάνειας, επομένως από τον προσανατολισμό της επιφάνειας και το βάθος, στο οποίο αυτή βρίσκεται εντός του ρευστού. Γενικά, είναι διαφορετικό σημείο από το κεντροειδές. **Προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του x_p και y_p .**

2.5.2 Υπολογισμός δυνάμεων πίεσεως.

Ο υπολογισμός της δύναμης που ασκεί ένα ρευστό που βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας σε επιφάνεια που βρίσκεται σε επαφή με αυτό, έχει δύο σκέλη: Τον **υπολογισμό του μέτρου της δύναμης** και τον **υπολογισμό του σημείου εφαρμογής της, δηλαδή του κέντρου πίεσεως.**

1) Δύναμη πίεσεως αερίου σε επίπεδη επιφάνεια.

Αν το ρευστό είναι αέριο (και δεν υπάρχουν σημαντικές υψομετρικές διαφορές), η πίεση θεωρείται σταθερή σε όλα τα σημεία του. Κατά συνέπεια, όποιος και αν είναι ο προσανατολισμός της επίπεδης επιφάνειας, όλα τα σημεία της δέχονται σταθερή πίεση p . Η εξίσωση (2.15α) γίνεται:

$$F = p \cdot A \quad (2.17)$$

Επειδή οι στοιχειώδεις δυνάμεις πίεσεως είναι παράλληλες και ισοκατανεμημένες επί της επιφάνειας, **το σημείο εφαρμογής της F (κέντρο πίεσεως) ταυτίζεται με το κεντροειδές της επιφάνειας.**

2) Δύναμη πίεσεως υγρού σε οριζόντια επιφάνεια.

Πρόκειται για την απλούστερη περίπτωση υπολογισμού πίεσεως που ασκεί ένα υγρό σε επιφάνεια, με την οποία βρίσκεται σε επαφή. Στα υγρά η στατική πίεση μεταβάλλεται με το ύψος. Αφού όμως η επιφάνεια είναι οριζόντια, το ύψος παραμένει σταθερό, άρα η πίεση είναι σταθερή σε όλα τα σημεία

της επιφάνειας (σχ. 2.5β). Κατά συνέπεια, για το μέτρο της δύναμης ισχύει η ίδια σχέση που ισχύει και για τη δύναμη την ασκούμενη από αέρια:

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$$

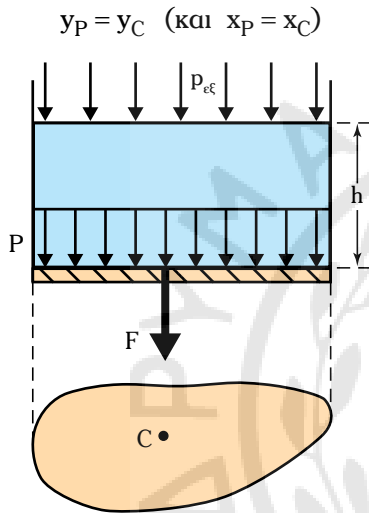
$$F = (p_{εξ} + \rho \cdot g \cdot h) \cdot A \text{ ή } F = p_{εξ} \cdot A + g \cdot h \cdot (h \cdot A)$$

$$\text{ή } F = p_{εξ} \cdot A + g \cdot h \cdot V_u$$

$$\text{ή } F = F_{εξ} + B_u \quad (2.17a)$$

όπου B_u το βάρος του υγρού.

Σε οριζόντια επιφάνεια, το κεντροειδές και το κέντρο πίεσεως συμπίπτουν:



Σχ. 2.5β

Δύναμη σε οριζόντια επιφάνεια.

3) Δύναμη πίεσεως σε κατακόρυφη επιφάνεια.

Μια επιφάνεια κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο, που βρίσκεται σε επαφή με υγρό (σχ. 2.5γ), δέχεται πιέσεις που μεταβάλλονται γραμμικά με το ύψος [παράγρ. 2.2.1, εξίσωση (2.5)]:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{εξ} - \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{y} \quad (2.5)$$

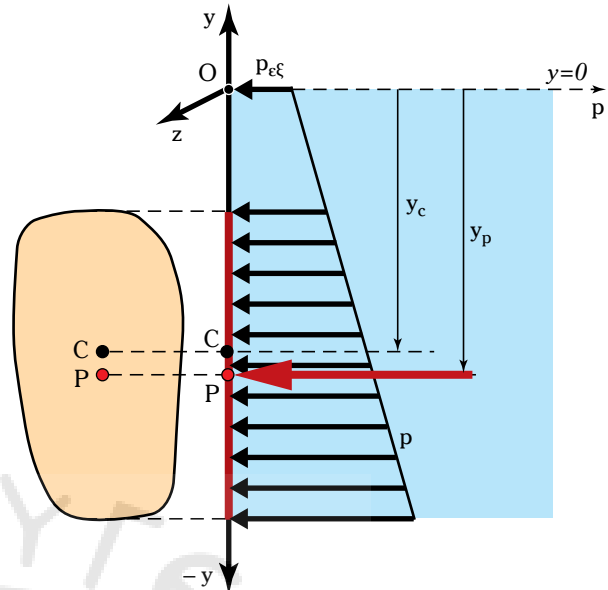
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.15a) προκύπτει:

$$F = \int (p_{εξ} - \rho \cdot g \cdot y) \cdot dA = p_{εξ} \cdot A - \rho \cdot g \int y \cdot dA$$

και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2.16β):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_{εξ} - \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{y}_c) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{p}_c \cdot \mathbf{A} \quad (2.18)$$

όπου: y_c , η υψομετρική διαφορά του κεντροειδούς της επιφάνειας απ' την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ($y_c < 0$) και p_c η πίεση που ασκεί το υγρό στο κεντροειδές της επιφάνειας.



Σχ. 2.5γ

Δύναμη πίεσεως σε κατακόρυφη επιφάνεια.

Δηλαδή, **η δύναμη που ασκείται σε κατακόρυφη επιφάνεια βυθισμένη σε υγρό, ισούται με τη δύναμη που αντιστοιχεί στην πίεση που επικρατεί στο κεντροειδές της επιφάνειας.**

Το σημείο εφαρμογής της δύναμης (κέντρο πίεσεως) βρίσκεται σε απόσταση y_p από την ελεύθερη επιφάνεια. Η ροπή της συνισταμένης δύναμης F ως προς τον οριζόντιο άξονα x που διέρχεται απ' το κεντροειδές C , ισούται με το άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών δυνάμεων:

$$F \cdot (y_p - y_c) = \int (y - y_c) \cdot dF = \int (y - y_c) \cdot p \cdot dA$$

και μετά από επεξεργασία προκύπτει:

$$y_p - y_c = -\rho \cdot g \cdot \frac{I_{xc}}{p_c \cdot A} \quad (2.19)$$

όπου: $I_{xc} = \int y^2 \cdot dA$, η ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον οριζόντιο άξονα xx τον διερχόμενο από το κεντροειδές της. Το πρόσημο (-) δηλώνει πως **το κέντρο πίεσεως βρίσκεται πάντοτε χαμηλότερα απ' το κεντροειδές της επιφάνειας.** Όσο πιο μεγάλη είναι η εξωτερική πίεση και όσο πιο βαθιά βρίσκεται η επιφάνεια A , τόσο μεγαλύτερη είναι η p_c , άρα το κέντρο πίεσεως πλησιάζει στο κεντροειδές.

Αν $p_{εξ} = 0$, τότε $p_c = \rho \cdot g \cdot y_c$ και η σχέση (2.19) γίνεται:

$$y_p - y_c = -\frac{I_{xc}}{p_c \cdot A} \quad (2.19a)$$

Κατ' αντίστοιχο τρόπο υπολογίζεται και η οριζό-

νια συντεταγμένη του κέντρου πίεσεως σε συνάρτηση με την οριζόντια συντεταγμένη του κεντροειδούς:

$$\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_C = -\rho \cdot \mathbf{g} \cdot \frac{I_{xyc}}{\rho_c \cdot A} \quad (2.20)$$

όπου: $I_{xyc} = \int x \cdot y \cdot dA$ το γινόμενο αδράνειας της επιφάνειας ως προς άξονες x, y διερχόμενους από το κεντροειδές της.

Σημειώνουμε πως όταν μία επιφάνεια έχει συμμετρία ως προς έναν απ' τους δύο άξονες, $I_{xy} = 0$ και επομένως: $x_P = x_C$.

Ροπές αδράνειας επιφανειών δίνονται στον πίνακα 3 του Παραρτήματος.

4) Δύναμη πίεσεως υγρού σε πλάγια επιφάνεια.

Έστω επίπεδη επιφάνεια που σχηματίζει γωνία θ ως προς την οριζόντια (σχ. 2.5δ). Στη στοιχειώδη επιφάνεια dA ασκείται δύναμη πίεσεως:

$$dF = p \cdot dA$$

η οποία αναλύεται σε συνιστώσες dF_o και dF_k (οριζόντια και κατακόρυφη αντίστοιχα). Είναι:

$$dF_o = dF \cdot \sin\theta = p \cdot dA \cdot \sin\theta$$

Αλλά

$$dA \cdot \sin\theta = dA_k$$

η κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας dA . Άρα:

$$dF_o = p \cdot dA_k$$

και εφαρμόζοντας για την οριζόντια προβολή την εξίσωση (2.17) και για την κατακόρυφη την εξίσωση (2.18) προκύπτει:

$$F_o = p_c \cdot A_k \quad (2.21\alpha)$$

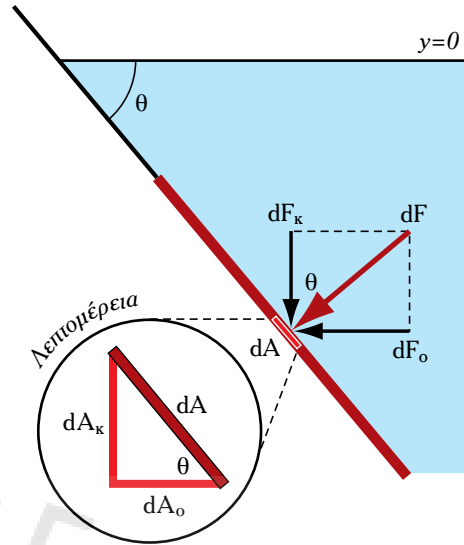
$$F_k = p_c \cdot A_o \quad (2.21\beta)$$

Άρα: **Σε πλάγια επιφάνεια βυθισμένη σε ρευστό, η δύναμη πίεσεως αναλύεται σε οριζόντια συνιστώσα, ίση με τη δύναμη που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας, και κατακόρυφη συνιστώσα ίση με τη δύναμη που αντιστοιχεί στην οριζόντια προβολή της επιφάνειας.**

Η F_k ισούται με το βάρος του ρευστού που βρίσκεται πάνω απ' την επιφάνεια A αυξημένο κατά την εξωτερική δύναμη πίεσεως που αντιστοιχεί στην A_o .

Η συνισταμένη δύναμη πίεσεως έχει μέτρο:

$$F = \sqrt{F_o^2 + F_k^2} = p_c \cdot \sqrt{A_o^2 + A_k^2} \Rightarrow \mathbf{F} = p_c \cdot \mathbf{A} \quad (2.21)$$

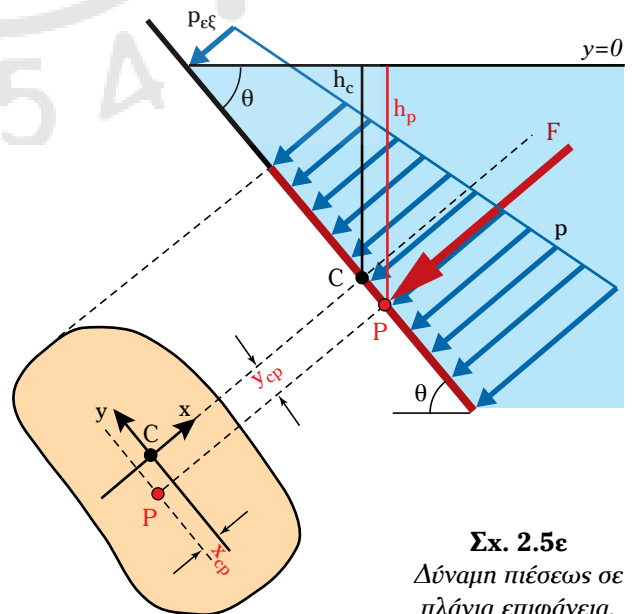


Σχ. 2.5δ

Δύναμη πίεσεως σε πλάγια επιφάνεια.

Δηλαδή το μέτρο της δυνάμεως πίεσεως και στην περίπτωση της πλάγιας επίπεδης επιφάνειας, ισούται με το γινόμενο της πίεσεως που επικρατεί στο κεντροειδές, επί το εμβαδόν της επιφάνειας. Το κεντροειδές της επιφάνειας C βρίσκεται σε βάθος h_c (το οποίο υπολογίζεται από τη γεωμετρία του σχήματος).

Για να προσδιορίσουμε το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως F (κέντρο πίεσεως P), τοποθετούμε σύστημα καθέτων αξόνων x και y , διερχομένων από το κεντροειδές C , με τον y να σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 2.5ε).



Σχ. 2.5ε

Δύναμη πίεσεως σε πλάγια επιφάνεια.

Η ροπή της συνισταμένης δύναμης F ως προς τον άξονα x , ισούται με το άθροισμα των ρομών των στοιχειωδών δυνάμεων dF :

$$F \cdot y_{cp} = \int y \cdot dF = \int y \cdot p \cdot dA$$

και μετά από επεξεργασία προκύπτει:

$$y_{cp} = -\rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot \frac{I_{xc}}{\rho_c \cdot A} \quad (2.22)$$

Το κέντρο πίεσης βρίσκεται χαμηλότερα απ' το κεντροειδές:

$$\begin{aligned} h_p - h_c &= y_{pc} \cdot \sin\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow h_p - h_c &= -\rho \cdot g \cdot \sin^2\theta \cdot \frac{I_{xc}}{\rho_c \cdot A} \quad (2.22a) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα προκύπτει η απόσταση του κέντρου πίεσης από το κεντροειδές κατά τον άξονα x :

$$y_{cp} = -\rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot \frac{I_{xc}}{\rho_c \cdot A} \quad (2.23)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε πως η κατακόρυφη επιφάνεια που εξετάσαμε παραπάνω, δύναται να θεωρηθεί ειδική περίπτωση της πλάγιας, με $\theta = 90^\circ$.

Σημείωση: Επειδή το ύψος το συμβολίσαμε με h , η πίεση στο κεντροειδές της πλάγιας επιφάνειας είναι: $p_c = p_{εξ} + \rho \cdot g \cdot h_c$ με το h_c να λαμβάνει θετικές τιμές.

5) Δυνάμεις πίεσης σε καμπύλες επιφάνειες.

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την άσκηση δυνάμεων πίεσης σε επίπεδες επιφάνειες. Οι σχέσεις που προέκυψαν δεν ισχύουν στην περίπτωση μη επιπέδων επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή με ρευστό.

Το πρόβλημα υπολογισμού των δυνάμεων που ασκούν τα ρευστά σε καμπύλες επιφάνειες, είναι πιο περίπλοκο. Αυτό οφείλεται στο ότι οι στοιχειώδεις δυνάμεις πίεσης dF , κάθετες στις αντίστοιχες στοιχειώδεις επιφάνειες dA , δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους, αλλά έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις.

Ο υπολογισμός διευκολύνεται αν αναλύσουμε κάθε στοιχειώδη δύναμη στην οριζόντια και κάθετη συνιστώσα της.

1) **Οριζόντια συνιστώσα:** Το άθροισμα των οριζοντίων στοιχειωδών δυνάμεων ισούται με την οριζόντια συνιστώσα F_x , η οποία ασκείται στην κατακόρυφη προβολή A_y της καμπύλης επιφάνειας:

$$F_x = \int dF_x = \int p \cdot dA_y \quad (2.24)$$

Στο σχήμα 2.5στ η καμπύλη επιφάνεια (αβ) έχει

κατακόρυφο προβολή στο επίπεδο (y, z) την (αε) με εμβαδόν A_{yz} . Σύμφωνα με την (2.5) ισχύει:

$$p = p_{εξ} - \rho \cdot g \cdot y$$

Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.24) θα μας δώσει λοιπόν σχέση παρόμοια μ' αυτήν που ισχύει για τις κατακόρυφες επίπεδες επιφάνειες:

$$F_x = p_c \cdot A_{yz} \quad (2.25)$$

όπου: $p_c = p_{εξ} - \rho \cdot g \cdot y_c$ η πίεση στο κεντροειδές της κατακόρυφης προβολής αε.

Δηλαδή, **η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης πίεσης που ασκείται σε καμπύλη επιφάνεια, ισούται με τη δύναμη που ασκείται στην κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας.**

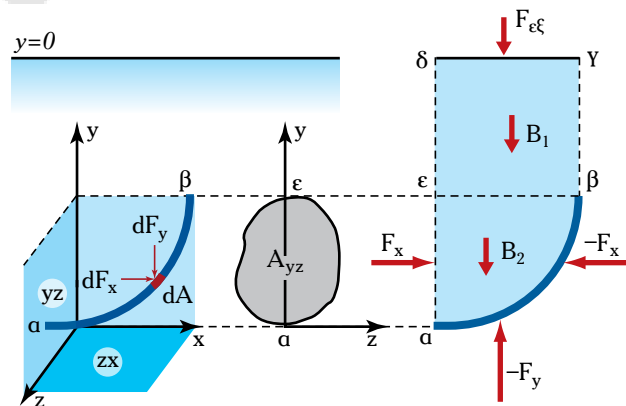
Αν η καμπύλη επιφάνεια δέχεται απ' το υγρό και άλλη οριζόντια δύναμη F_z (κάθετη στην F_x), τότε και αυτή θα υπολογισθεί με τον ίδιο τρόπο, λαμβάνοντας την προβολή της επιφάνειας στο κατακόρυφο επίπεδο (y, x) :

$$F_z = p_c \cdot A_{yx} \quad (2.25a)$$

2) **Κατακόρυφη συνιστώσα:** Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης πίεσης υπολογίζεται από την ισορροπία της υγρής στήλης του υγρού που βρίσκεται πάνω απ' την καμπύλη επιφάνεια (σχ. 2.5στ, η στήλη υγρού που περικλείεται μεταξύ των σημείων αβγδα). Με δεδομένη την ισορροπία της στήλης, ισχύει:

$$F_y = B + F_{εξ} = \rho \cdot g \cdot V + p_{εξ} \cdot A_{xz} \quad (2.26)$$

Δηλαδή **η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης πίεσης που ασκείται σε καμπύλη επιφάνεια, ισούται με το βάρος της στήλης υγρού που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια, αυξημένο**



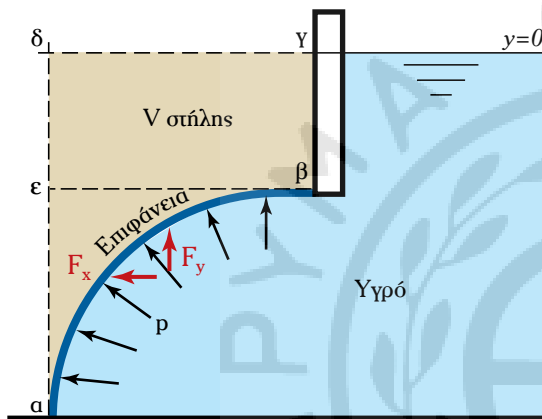
Σχ. 2.5στ

Δυνάμεις πίεσης σε καμπύλες επιφάνειες.

κατά τη δύναμη της εξωτερικής πίεσης. Αν η $F_{εξ}$ είναι αμελητέα, η F_y διέρχεται απ' το κέντρο βάρους της στήλης.

Αν η καμπύλη επιφάνεια δέχεται τη δύναμη πίεσης από κάτω (σχ. 2.5ζ), το μόνο που αλλάζει είναι η φορά της κατακόρυφης συνιστώσας F_y , η οποία έχει φορά προς τα επάνω. Για τον υπολογισμό της προσδιορίζουμε το βάρος που θα είχε η στήλη, η οποία βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια αν ήταν πλήρης υγρού και εφαρμόζουμε την εξίσωση (2.26).

Σύνθεση της οριζόντιας και κατακόρυφης δυνάμεως μπορεί να γίνει μόνο στην περίπτωση που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.



Σχ. 2.5ζ

Δύναμη πίεσης από κάτω.

6) Δυνάμεις πίεσης σε κυλινδρικά τοιχώματα.

Κυλινδρικά τοιχώματα συναντάμε συνεχώς στη Μηχανική των Ρευστών. Οι κυλινδρικές δεξαμενές, οι φυγόκεντρες συσκευές, οι κύλινδροι διαφόρων μηχανών και κυρίως οι κυλινδρικοί αγωγοί (σωλήνες), περιέχουν ρευστά υπό πίεση και υφίστανται αντίστοιχες δυνάμεις, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ισχυρών εφελκυστικών τάσεων.

Ο υπολογισμός των δυνάμεων πίεσης γίνεται με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Ευνοϊκή ιδιομορφία αποτελεί η συμμετρία που παρουσιάζουν τα κυλινδρικά τοιχώματα.

Έστω τμήμα οριζοντίου κυλινδρικού τοιχώματος, εσωτερικής ακτίνας r , μήκους L και πάχους b (σχ. 2.5η), πληρωμένο με ρευστό πυκνότητας ρ . Σχεδιάζοντας την τομή του τοιχώματος κατά το κατακόρυφο επίπεδο το διερχόμενο από τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, προκύπτει το ημικυλινδρικό τοίχωμα, του οποίου οι προβολές στα επίπεδα (z ,

y) και (x, y) φαίνονται στο σχήμα 2.5η. Η οριζόντια δύναμη πίεσης F ισούται με τη δύναμη που ασκείται στην προβολή του σωλήνος του σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου:

$$F = p_c \cdot A = 2 \cdot r \cdot L \cdot p_c \quad (2.26\alpha)$$

Το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται σε απόσταση από το κεντροειδές:

$$y_{pc} = y_p - y_c = -\rho \cdot g \cdot \frac{I_{xc}}{p_c \cdot A} \quad (2.26\beta)$$

όπου: $I_{xc} = L \cdot (2r)^3 / 12 = 2 \cdot L \cdot r^3 / 3$

Αν το ρευστό είναι αέριο, το κέντρο πίεσης συμπίπτει με το κεντροειδές. Για υψηλές πιέσεις υγρών, μπορούμε να θεωρήσουμε (προσεγγιστικά) ότι συμβαίνει το ίδιο.

Το ημικυλινδρικό τοίχωμα ισορροπεί υπό την επίδραση της δυνάμεως πίεσης F και των δυνάμεων F_1 και F_2 που ασκεί το συμμετρικό τμήμα του τοιχώματος:

$$F = F_1 + F_2 \quad (2.26\gamma)$$

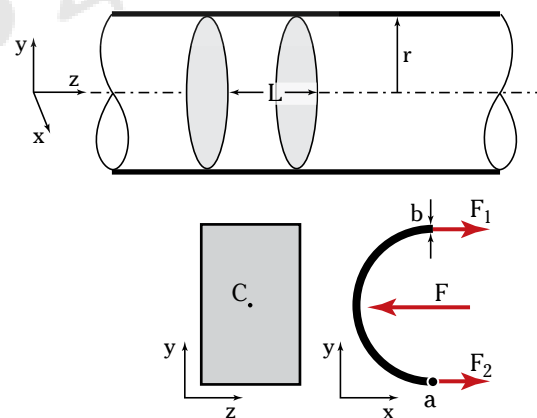
Αν το κέντρο πίεσης συμπίπτει με το κεντροειδές, έχουμε:

$$F_1 = F_2 = r \cdot L \cdot p_c \quad (2.26\delta)$$

Οι εφελκυστικές δυνάμεις F_1 και F_2 ασκούνται σε επιφάνεια πάχους b και μήκους L και διαμορφώνουν εφελκυστική τάση:

$$\tau_{εφ} = F_1 / (b \cdot L) \Rightarrow \tau_{εφ} = p_c \cdot \frac{r}{b} \quad (2.27)$$

Η επιλογή του υλικού και του κατάλληλου πάχους τοιχώματος γίνεται με βάση την εξίσωση (2.27).



Σχ. 2.5η

Δυνάμεις πίεσης σε κυκλικά τοιχώματα.

Αν το κέντρο πίεσεως διαφέρει από το κεντροειδές, οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι διαφορετικές. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε ελάχιστη και μέγιστη εφελκυστική τάση ($\tau_{εφ1}$ και $\tau_{εφ2}$ αντίστοιχα).

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το κάτω (α) και άνω (β) σημείο έχουμε αντίστοιχα (τα ύψη σε απόλυτες τιμές):

$$F \cdot (2r - y_p) = F_1 \cdot 2r \Rightarrow F_1 = F \cdot \frac{2r - y_p}{2r}$$

$$F \cdot y_p = F_2 \cdot 2r \Rightarrow F_2 = F \cdot \frac{y_p}{2r}$$

(Παρατηρούμε πως αν $y_p = y_c = r \Rightarrow F_1 = F_2 = F/2$).

2.5.3 Μεθοδολογία υπολογισμού και παραδείγματα.

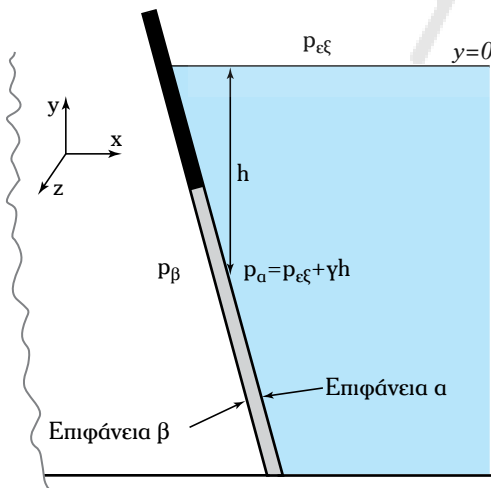
1) Διαχωριστικά τοιχώματα και θύρες.

Στην πράξη καλούμαστε να υπολογίσουμε τη δύναμη πίεσεως που ασκείται σε **διαχωριστικό τοίχωμα** ή **πόρτα** (π.χ. φράγμα, τοίχωμα δεξαμενής, στεγανή πόρτα, φινιστρίνι κ.ά.). Το τοίχωμα έχει δύο επιφάνειες (πλευρές) α και β (σχ. 2.5θ). Η δύναμη πίεσεως που ασκείται σε στοιχειώδες τμήμα του, ισούται με τη διαφορά δυνάμεων των δύο πλευρών:

$$dF = dF_\alpha - dF_\beta = (p_\alpha - p_\beta) \cdot dA = \Delta p \cdot dA$$

Άρα για τον υπολογισμό της δυνάμεως πίεσεως σε διαχωριστικό τοίχωμα, χρησιμοποιούμε τη διαφορά πιέσεων στις δυο πλευρές του.

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι εκείνη κατά την οποία στη μια πλευρά επικρατεί σταθερή ατμο-



Σχ. 2.5θ

Διαχωριστικό τοίχωμα.

σφαιρική πίεση και στην άλλη υπάρχει υγρό, οπότε (αν $h = y$) η υδροστατική πίεση είναι:

$$p_\beta = p_{ατμ}$$

$$p_\alpha = p_{εξ} + \rho \cdot g \cdot h$$

Η διαφορά των πιέσεων σε ύψος y (κοινό και για τις δύο πλευρές) είναι:

$$\Delta p = p_\alpha - p_\beta = \rho \cdot g \cdot h = p_g$$

Έτσι, **χρησιμοποιώντας τη σχετική πίεση p_g αντί της απόλυτης**, εφαρμόζουμε στα διαχωριστικά τοιχώματα, τα όσα αναφέρθηκαν προηγούμενα για τις επιφάνειες.

Αν η πίεση πάνω από το υγρό της δεξαμενής $p_{εξ}$ είναι διαφορετική από την πίεση $p'_{εξ}$ στην εξωτερική πλευρά της επιφάνειας της δεξαμενής (όπως συμβαίνει στις δεξαμενές πίεσεως), η διαφορά πίεσεως θα είναι:

$$\Delta p = (p_{εξ} - p'_{εξ}) + \rho \cdot g \cdot h$$

2) Μεθοδολογία υπολογισμού.

1) Για τον υπολογισμό της δυνάμεως πίεσεως σε **επίπεδο διαχωριστικό τοίχωμα, από τη μία πλευρά του οποίου υπάρχει υγρό και από την άλλη αέρας**, υπολογίζουμε πρώτα το μέτρο της δυνάμεως και στη συνέχεια το σημείο εφαρμογής της (κέντρο πίεσεως).

α) Υπολογισμός του μέτρου:

- Υπολογίζουμε την υψομετρική διαφορά του κεντροειδούς της επιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού y_c ($y_c < 0$).
- Υπολογίζουμε τη σχετική πίεση στο κεντροειδές $p_{c,g}$.
- Υπολογίζουμε τη δύναμη: $F = p_{c,g} \cdot A$.

β) Υπολογισμός του κέντρου πίεσεως:

- Αν η επιφάνεια είναι οριζόντια, το κέντρο πίεσεως ταυτίζεται με το κεντροειδές της επιφάνειας.
- Αν η επιφάνεια είναι κατακόρυφη, εφαρμόζουμε τις εξισώσεις (2.19) και (2.20) και υπολογίζουμε την κάθετη ($y_p - y_c$) και οριζόντια ($x_p - x_c$) απόσταση του κέντρου πίεσεως από το κεντροειδές. Το y_p είναι το βάθος, στο οποίο βρίσκεται το κέντρο πίεσεως.
- Αν η επιφάνεια είναι πλάγια, εφαρμόζουμε τις εξισώσεις (2.22) και (2.23) και υπολογίζουμε τις αποστάσεις y_{cp} και x_{cp} του κέντρου πίεσεως από το κεντροειδές. Με εφαρμογή της

εξισώσεως (2.22α) υπολογίζουμε το βάθος h_c στο οποίο βρίσκεται το κέντρο πίεσεως.

2) Αν και στις δύο πλευρές του τοιχώματος υπάρχουν υγρά διαφορετικής πυκνότητας, αντί για τη σχετική πίεση (p_g) χρησιμοποιούμε τη διαφορά πιέσεων. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε χωριστά τη δύναμη σε κάθε πλευρά και στη συνέχεια να συνθέσουμε τις δύο δυνάμεις.

3) Αν έχουμε δύο μη αναμείξιμα υγρά διαφορετικής πυκνότητας, υπολογίζουμε χωριστά τη δύναμη πίεσεως για κάθε υγρό και στη συνέχεια συνθέτουμε τις δύο δυνάμεις.

4) Για καμπύλο τοίχωμα υπολογίζουμε χωριστά την κάθετη και την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης, σύμφωνα με την ανάπτυξη της παραγράφου 2.5.2(5).

Σημείωση: Όλοι οι τύποι της παραγράφου 2.5 έχουν προκύψει λαμβάνοντας το ύψος (y) της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού ίσο με μηδέν. Επομένως όλα τα σημεία εντός του υγρού (κεντροειδές, κέντρο πίεσεως) έχουν αρνητικό ύψος (y): $0 > y_c > y_p \geq y_{\text{πυθμένα}}$

3) Πρίσμα πίεσεως (pressure prism).

Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού των δυνάμεων πίεσεως που ασκούνται σε τοίχωμα, βασίζεται στα πρίσματα πίεσεως.

Πρίσμα πίεσεως καλείται το στερεό, που προκύπτει από τη γραφική παράσταση των πιέσεων που ασκούνται σε μια επιφάνεια. Αν η πίεση είναι σταθερή (επιφάνεια σε επαφή με αέριο ή οριζόντια επιφάνεια εντός υγρού), το πρίσμα πίεσεως έχει προβολή στο κατακόρυφο επίπεδο (x, y), ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αν η πίεση μεταβάλλεται γραμμικά με το ύψος, η προβολή είναι ορθογώνιο τραπέζιο (το

οποίο αναλύεται σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κι ένα ορθογώνιο τρίγωνο).

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.15α):

$$F = \int p \cdot dA$$

Δηλαδή η δύναμη πίεσεως αντιστοιχεί (γραφικά) στον όγκο του πρίσματος πίεσεως. Το σημείο εφαρμογής της (κέντρο πίεσεως) είναι η προβολή στην επιφάνεια του κέντρου βάρους του πρίσματος.

Έστω ότι έχουμε προς μελέτη τη δεξαμενή του σχήματος 2.51(α) η οποία περιέχει υγρό πυκνότητας ρ , μέχρι ύψος h και πλάτος b .

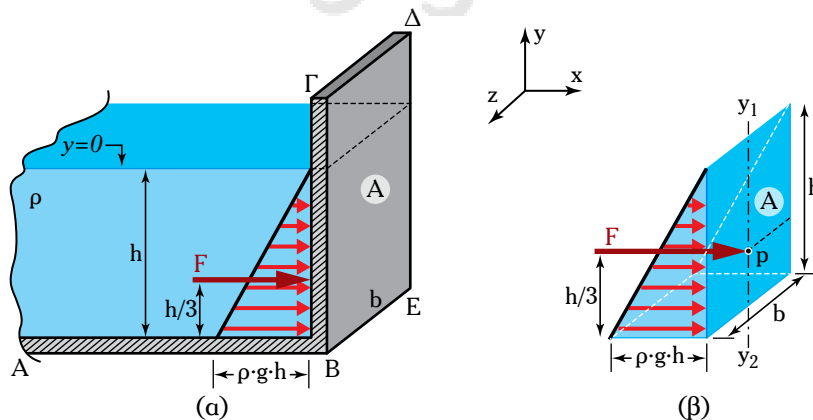
Η κατανομή των πιέσεων στην ορθογωνική πλευρά ΒΓΔΕ της δεξαμενής έχει την μορφή πρίσματος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.51(β). Στην επιφάνεια της δεξαμενής είναι $p_g = 0$ και η μεταβολή είναι γραμμική με τιμή $p_g = \rho \cdot g \cdot h$ στο πυθμένα. Επειδή ισχύει:

$$F = \int p \cdot dA, \text{ το } \int p \cdot dA$$

ισούται με τον όγκο του πρίσματος (β), οπότε για την περίπτωση μας:

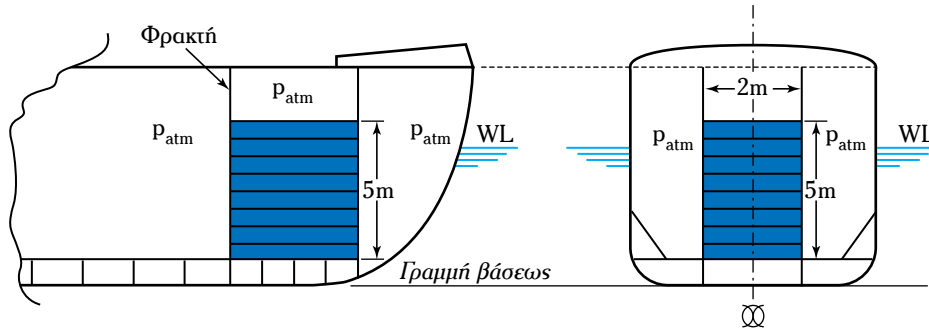
$$F = V = \frac{1}{2} (\rho \cdot g \cdot h) \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot h \cdot A$$

Το κέντρο πίεσεως θα βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας y_1, y_2 , και σε απόσταση $h/3$ από την βάση του ορθογώνιου τριγώνου, που είναι το κέντρο βάρους του πρίσματος. Για την περίπτωση που πρέπει να ληφθεί υπόψη και η πίεση υπεράνω της δεξαμενής, τότε η πίεση στην βάση του τριγώνου του πρίσματος είναι: $p \equiv p_{εξ} + \rho \cdot g \cdot h$, οπότε οι σχέσεις υπολογισμού τροποποιούνται ανάλογα.



Σχ. 2.51

Πρίσματα πίεσεως.



Σχ. 2.51α

Παράδειγμα 10

Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται σε κάθετο τοίχωμα δεξαμενής νερού πλοίου (σχ. 2.51α), αν η επιφάνεια του τοιχώματος είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλάτος 2 m και το νερό την καλύπτει μέχρι ύψος 5 m.

Λύσεις.

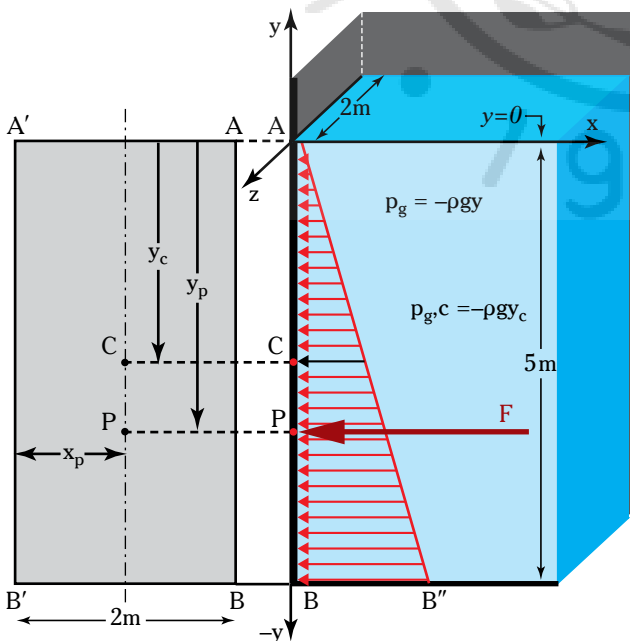
1ος τρόπος επίλυσης: Σχεδιάζουμε τομή της δεξαμενής και προβολή της επιφάνειας του τοιχώματος (σχ. 2.51β).

Δεδομένα: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $AB = 5 \text{ m}$,
 $AA' = 2 \text{ m}$

Ζητούμενα: F, y_p, x_p .

1. Υπολογισμός μέτρου:

$y_c = AC = -2,5 \text{ m}$
 $P_{ox,c} = -\rho g y_c = 24,525 \text{ kPa}$
 $A = AB \cdot AA' = 10 \text{ m}^2$
 $F = p_{c,ox} \cdot A \Rightarrow F = 245,25 \text{ kN}$



Σχ. 2.51β

2. Προσδιορισμός σημείου εφαρμογής: Το σημείο που ασκείται η συνισταμένη δύναμη είναι το κέντρο πίεσης P σε ύψος y_p :

$$y_p - y_c = -\rho g \cdot \frac{I_{Xc}}{P_{c,ox} \cdot A} \Rightarrow y_p = y_c - \rho g \cdot \frac{I_{Xc}}{P_{c,ox} \cdot A}$$

$$I_{Xc} = \frac{1}{12} b h^3 \Rightarrow I_{Xc} = \frac{1}{12} (AA') (AB)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{Xc} = 20,8 \text{ m}^4 \text{ και } y_p = 3,33 \text{ m}$$

Το σημείο P απέχει από το άκρο A'B' της επιφάνειας οριζόντια απόσταση x_p :

$$x_p = b/2 = (AA')/2 \Rightarrow x_p = 1 \text{ m}$$

2ος τρόπος επίλυσης: Το πρίσμα πίεσης έχει όγκο ίσο με τη δύναμη:

$$F = (BB') \cdot (AB) \cdot (BB'')/2 = b \cdot h \cdot \rho g h/2 =$$

$$= (2 \text{ m}) \cdot (5 \text{ m}) \cdot 1.000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ kg/s}^2 \cdot 5/2 \text{ m} =$$

$$= 245,25 \text{ kN}$$

Η προβολή του πρίσματος στο επίπεδο (x, y) είναι ορθογώνιο τρίγωνο, άρα το κέντρο βάρους του πρίσματος πίεσης βρίσκεται στα 2/3 του ύψους.

Άρα $y_p = 3,33 \text{ m}$.

Παράδειγμα 11

Αν πάνω από την επιφάνεια της δεξαμενής του παραδείγματος 10 υπάρχει σχετική πίεση $p_g = 50 \text{ kPa}$, πόση θα είναι η δύναμη και ποιο το σημείο εφαρμογής;

Λύση.

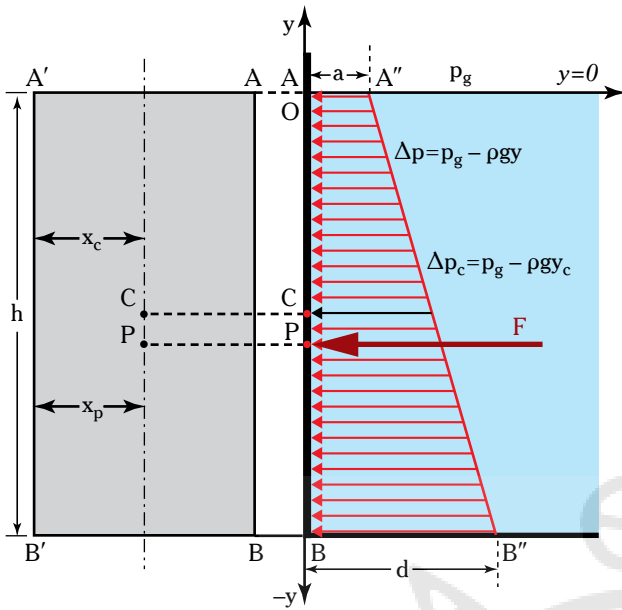
Το κεντροειδές, το εμβαδόν και η ροπή αδράνειας της επιφάνειας δεν μεταβάλλονται και έχουν υπολογισθεί στο προηγούμενο παράδειγμα.

Η διαφορά πιέσεων μεταξύ των δύο πλευρών του τοιχώματος σε τυχαίο ύψος y γίνεται (σχ. 2.51γ):

$$\Delta p = p_g - \rho g y \Rightarrow \Delta p_c = p_g - \rho g y_c =$$

$$= 50.000 \text{ Pa} - 1.000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (-2,5) \text{ m} =$$

$$= 74,525 \text{ kPa}$$



Σχ. 2.51γ

$$F = \Delta p_c \cdot A \Rightarrow F = 74,252 \text{ kPa} \cdot (5 \times 2 \text{ m}^2) = 745,25 \text{ kPa}$$

Το σημείο εφαρμογής βρίσκεται σε ύψος:

$$y_p = y_c - \rho g \cdot \frac{I_{Xc}}{\Delta p_c \cdot A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p = (-2,5 \text{ m}) - 1.000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{20,8 \text{ m}^4}{745,25 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 10 \text{ m}^2} = -2,527 \text{ m}$$

(Παρατηρούμε πως το κέντρο πίεσεως πλησίασε το κεντροειδές, μένοντας όμως χαμηλότερα απ' αυτό).

Το x_p δεν μεταβλήθηκε: $x_p = 1 \text{ m}$

Παράδειγμα 12

Η πόρτα AB του σχήματος 2.51δ(α) στεγανοποιεί χώρο από τη θάλασσα ($\rho = 1024 \text{ kg/m}^3$). Η πόρτα είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλάτος 2 m.

Να υπολογισθούν: α) η δύναμη πίεσεως και β) η απόσταση του σημείου εφαρμογής της από το κεντροειδές.

Λύση.

α) Υπολογισμός του μέτρου [σχ. 2.51δ(β)]:

Αφού η πόρτα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου:

$$h_C = h_A + (h_B - h_A/2) = h_C = -3 + (-5 + 3/2) = -4 \text{ m}$$

$$p_C = -\rho g h_C = -(1024 \cdot 9,81 \cdot (-4)) \text{ Pa} = 40,17 \text{ kPa}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 2,5^2} \text{ m} = 3,2 \text{ m}$$

$$A = (3,2 \cdot 2) \text{ m}^2 = 6,4 \text{ m}^2$$

$$F = p_C \cdot A \Rightarrow F = 278 \text{ kPa}$$

β) Υπολογισμός του σημείου εφαρμογής:

$$y_{PC} = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \frac{I_{Xc}}{p_C \cdot A} \quad (\alpha)$$

όπου $y_{CP} = y_P - y_C$

$$I_{Xc} = \frac{1}{12} b h^3 \Rightarrow I_c = \frac{1}{12} 2 \cdot 3,2^3 \text{ m}^4 = 5,64 \text{ m}^4$$

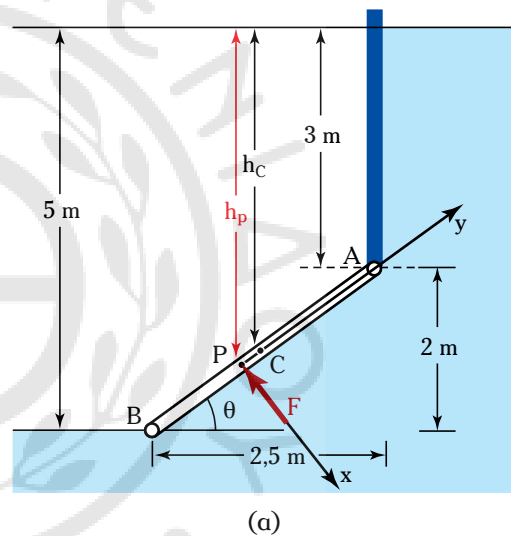
Από τη γεωμετρία του σχήματος 2.51δ(β):

$$\tan \theta = 2/2,5 = 0,8 \Rightarrow \theta = 38,66^\circ \text{ και από την } (\alpha)$$

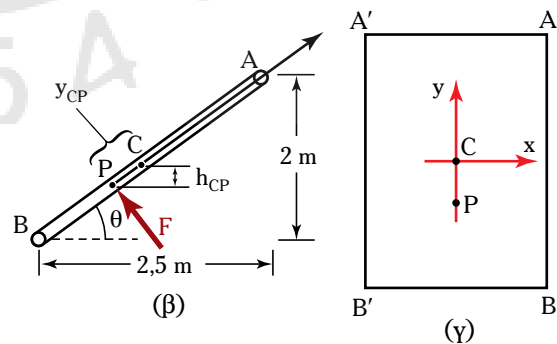
$$y_{CP} = 0,133 \text{ m, όπου } y_{CP} = y_C - y_P$$

$$h_p - h_C = y_{CP} \cdot \sin \theta \Rightarrow h_p = 4,083 \text{ m}$$

Σημείωση: $x_{pc} = 0$ λόγω συμμετρίας της επιφάνειας [σχ. 2.51δ(γ)].



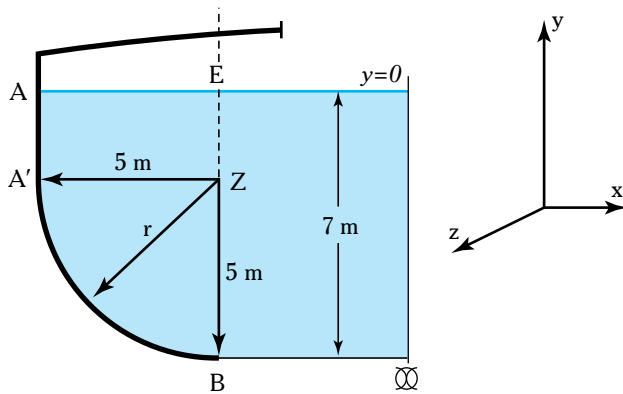
(α)



Σχ. 2.51δ

Παράδειγμα 13

Να υπολογισθούν: α) η οριζόντια και β) η κατακόρυφη δύναμη που ασκούνται από το νερό στο τοίχωμα AA'B δε-



Σχ. 2.5ie

ξαμενής πλοίου του σχήματος 2.5ie ανά μονάδα πλάτους.

Λύση.

α) Υπολογισμός οριζόντιας δύναμης F_x :

– **Υπολογισμός μέτρου:**

Η προβολή της μονάδας πλάτους του τοιχώματος στο επίπεδο $y-z$ είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος 2.5ιστ με:

$$AB = 7 \text{ m}, A\Delta = 1 \text{ m} \Rightarrow y_{C_x} = AB/2 = 3,5 \text{ m}$$

$$A_{yz} = (AB) \cdot (A\Delta) = 7 \text{ m}^2$$

$$p_{C_x,g} = -\rho g y_{C_x} = 34,265 \text{ kPa}$$

$$F_x = p_{C_x,g} \cdot A_{yz} \Rightarrow F_x = 239,85 \text{ KN}$$

– **Υπολογισμός σημείου εφαρμογής:**

Το σημείο εφαρμογής P_x , βρίσκεται σε ύψος y_{P_x} :

$$y_{P_x} = y_{C_x} - \rho \cdot g \cdot \frac{I_{X_c}}{p_{C_x,g} \cdot A_{yz}}$$

$$I_{X_c} = \frac{1}{12} b h^3 \hat{=} I_c = \frac{1}{12} 7 \cdot 7^3 \text{ m}^4 \Rightarrow I_{X_c} = 28,58 \text{ m}^4$$

$$y_{P_x} = -4,67 \text{ m}$$

$$x_{P_x} = x_{C_x}$$

β) Υπολογισμός κατακόρυφης δύναμης F_y :

– **Υπολογισμός μέτρου:** Η F_y ισούται με το βάρος του νερού που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια:

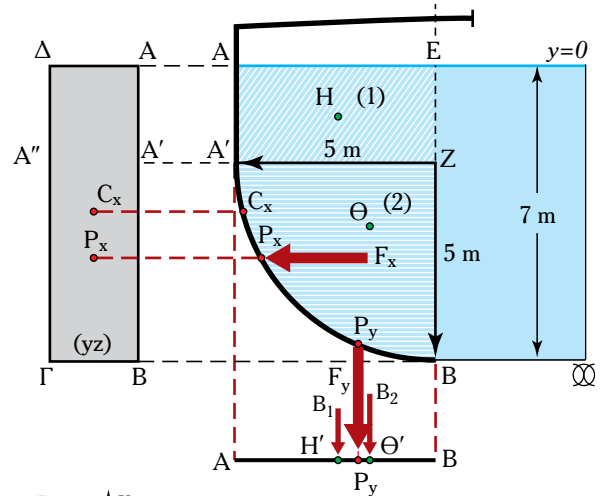
$$F_y = B_{AA'BZE} = B_1 + B_2$$

Το πρίσμα (1) είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο:

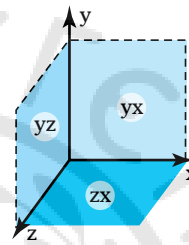
$$V_1 = (AE) \cdot (A\Delta) \cdot (AA') \Rightarrow V_1 = 5 \cdot 1 \cdot 2 \text{ m}^3 = 10 \text{ m}^3$$

$$B_1 = \rho \cdot g \cdot V_1 \Rightarrow B_1 = 97,9 \text{ kN}$$

Το πρίσμα (2) είναι τεταρτημόριο κυλίνδρου ακτίνας $ZB = ZA' = 5 \text{ m}$:



Σχ. 2.5ιστ



$$V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot L/4 \Rightarrow V_2 = \pi \cdot 5^2 \cdot 1/4 \text{ m}^3 = 19,625 \text{ m}^3$$

$$B_2 = \rho \cdot g \cdot V_2 \Rightarrow B_2 = 192,1 \text{ kN}$$

$$F_y = B_1 + B_2 \Rightarrow F_y = 290 \text{ kN}$$

– **Υπολογισμός σημείου εφαρμογής:** Το σημείο εφαρμογής διέρχεται από το κέντρο βάρους του υδάτινου όγκου. Το κέντρο βάρους του (1) είναι το σημείο H και η προβολή του στην επιφάνεια το H' με $x_{AH'} = 2,5 \text{ m}$.

Το κέντρο βάρους του (2) είναι το σημείο Θ και η προβολή του στην επιφάνεια το Θ' . Σύμφωνα με τον πίνακα 3 του Παραρτήματος:

$$x_{B\Theta'} = 4r/3\pi \Rightarrow x_{B\Theta'} = 2,12 \text{ m}$$

$$\text{Ισχύει: } x_{A\Theta'} = r - x_{B\Theta'} = 2,88 \text{ m}$$

Αν P_y το σημείο εφαρμογής της F_y , λαμβάνοντας τις ροπές των B_1 , B_2 και F_y ως προς το A έχομε:

$$B_1 \cdot x_{AH'} + B_2 \cdot x_{A\Theta'} = F_y \cdot x_{py} \Rightarrow x_{py} = 2,75 \text{ m}$$

2.6 Άνωση ή άντωση² (buoyancy).

Οι ίδιες αρχές που μας επέτρεψαν να υπολογίσουμε τις δυνάμεις πίεσης επί επιφανειών που βρί-

² Στην Ναυπηγική συναντάται και ο όρος άντωση.

σκονται σε επαφή με ρευστό, επιτρέπουν να υπολογίσουμε και τις δυνάμεις πίεσης που ασκούνται σε σώμα βυθισμένο σε ρευστό ή σε σώμα που ισορροπεί στην επιφάνεια ενός υγρού (που επιπλέει). Τα αποτελέσματα της στατικής μελέτης βυθισμένου σώματος, συνοψίζονται στην **Αρχή του Αρχιμήδη**³ (Archimedes' Principle), ο οποίος πρώτος τη διατύπωσε τον 3^ο αι. π.Χ.:

Σώμα βυθισμένο σε ρευστό, δέχεται κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω, το μέτρο της οποίας ισούται με το βάρος του ρευστού που το σώμα εκτοπίζει και το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται στο κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου όγκου του ρευστού.

Η δύναμη αυτή καλείται **άνωση**:

$$A = \gamma \cdot V = \rho \cdot g \cdot V,$$

γενικά
$$A = \iiint \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.28)$$

όπου: ρ η πυκνότητα, γ το ειδικό βάρος και V ο όγκος του ρευστού που εκτοπίζεται.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.2.1, σε ρευστό που βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας, ένας στοιχειώδης όγκος του ισορροπεί κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, υπό την επίδραση δύο αντίθετων δυνάμεων: του βάρους B και της συνιστασάς των κατακόρυφων δυνάμεων πίεσης ΣF_y :

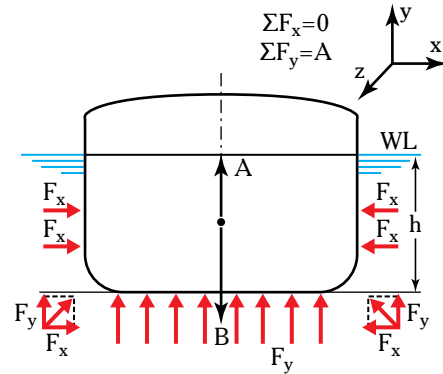
$$\Sigma F_y = B \Rightarrow \Sigma F_y = m \cdot g = \rho \cdot g \cdot V = \gamma \cdot V$$

Η δύναμη ΣF_y εξαρτάται μόνο απ' το σχήμα και τη θέση του πρίσματος και όχι από την περικλειόμενη σ' αυτό ύλη. Η ίδια δύναμη θα ασκείται λοιπόν και στην περίπτωση που στη θέση του στοιχειώδους όγκου του ρευστού βρίσκεται στοιχειώδης όγκος του ίδιου σχήματος, αλλά διαφορετικού σώματος. Άρα το ρευστό ασκεί επί βυθισμένου ξένου σώματος, δύναμη κατακόρυφη, με φορά προς τα άνω και μέτρο ίσο με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού (σχ. 2.6α).

Στο σχήμα 2.6β παρουσιάζεται μια αναλυτικότερη απόδειξη της Αρχής του Αρχιμήδη. Το σώμα ($\Gamma\Delta\epsilon Z$) βρίσκεται βυθισμένο σε ρευστό πυκνότητας ρ . Οι κατακόρυφες δυνάμεις πίεσης στις καμπύλες επιφάνειες $\Gamma\Delta\epsilon$ και $\Gamma Z\epsilon$ ισούνται με το βάρος στήλης υγρού που βρίσκεται πάνω από αυτές [παράγρ. 2.5.2(5)]:

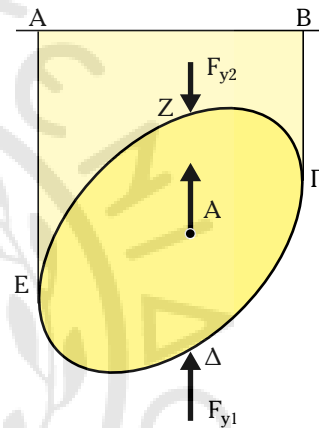
$$F_{y1} = \rho \cdot g \cdot V_{AB\Gamma\Delta\epsilon A}$$

$$F_{y2} = \rho \cdot g \cdot V_{AB\Gamma Z\epsilon A}$$



Σχ. 2.6α

Δυνάμεις ασκούμενες επί των πλευρών πλοίου.



Σχ. 2.6β

Απόδειξη της Αρχής του Αρχιμήδη.

όπου: $V_{AB\Gamma\Delta\epsilon A}$ ο όγκος πάνω απ' την καμπύλη επιφάνεια $\Gamma\Delta\epsilon$ και $V_{AB\Gamma Z\epsilon A}$ ο όγκος πάνω από την καμπύλη επιφάνεια $\Gamma Z\epsilon$.

$$A = \Sigma F_y = \rho \cdot g \cdot (V_{AB\Gamma\Delta\epsilon A} - V_{AB\Gamma Z\epsilon A}) = \rho \cdot g \cdot V_{\Gamma\Delta\epsilon Z\epsilon}$$

Δηλαδή η άνωση ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού.

Ενδιαφέροντα φυσικά φαινόμενα βασίζονται στην άνωση (φυσική κυκλοφορία στη μετάδοση θερμότητας, ανοδική πορεία καπνού, κατακόρυφη ανάμιξη νερού ωκεανών κ.ά.). Πολύ περισσότερες και ενδιαφέρουσες είναι οι τεχνικές εφαρμογές του φαινομένου (πλεύση, αερόστατα, υποβρύχια κ.λπ.).

Αξιοποιώντας την Αρχή του Αρχιμήδη, μπορούμε να υπολογίσουμε μεταξύ άλλων, τον όγκο ενός στερεού σώματος ακανόνιστου σχήματος, καθώς και την πυκνότητα ομογενών σωμάτων.

³ Αρχιμήδης: 287-212 π.Χ..

– Φαινόμενο βάρους βυθισμένου σώματος.

Σώμα που βρίσκεται μέσα σε ρευστό, δέχεται συνισταμένη δύναμη κατά την κατακόρυφο, η οποία οφείλεται στο βάρος του σώματος και στην άνωση:

$$\Sigma F_y = B - A$$

Η δύναμη αυτή καλείται και **φαινόμενο βάρος** του σώματος (B_ϕ). Αν το σώμα είναι ομογενές με πυκνότητα ρ_o και **βυθίζεται ολόκληρο** σε ρευστό πυκνότητας ρ , έχουμε:

$$V_{\text{σώματος}} = V_{\text{εκτοπιζόμενου ρευστού}} = V$$

$$B = \rho_o \cdot g \cdot V, \quad A = \rho \cdot g \cdot V$$

και η σχέση γίνεται:

$$B_\phi = B - A = (\rho_o - \rho) \cdot g \cdot V \quad (2.29)$$

Το σώμα μέσα στο ρευστό θα κινηθεί υπό την επίδραση του φαινόμενου βάρους του. Αν αυτό είναι θετικό ($\rho_o > \rho$) το σώμα θα κινηθεί προς τα κάτω. Αν $B_\phi = 0$ ($\rho_o = \rho$) το σώμα θα ισορροπεί (θα αιωρείται μέσα στο ρευστό). Αν $B_\phi < 0$, ($\rho_o < \rho$) το σώμα θα ανέρχεται.

Ακριβολογώντας, τα σώματα που βρίσκονται στην επιφάνεια της Γης, έλκονται προς αυτήν με δύναμη ίση με το φαινόμενο βάρος τους, αφού βρίσκονται βυθισμένα στην ατμόσφαιρα και δέχονται δύναμη ανώσεως απ' αυτήν. Αλλά η πυκνότητα του αέρα είναι πολύ μικρή σε σχέση με την πυκνότητα των υγρών και των περισσότερων στερεών και θεωρείται αμελητέα. Γι' αυτά τα σώματα το φαινόμενο βάρος είναι κατά προσέγγιση ίσο με το πραγματικό βάρος τους. Για παράδειγμα, η πυκνότητα του νερού είναι 1000 kg/m^3 και η πυκνότητα του αέρα σε 20°C , είναι $1,2 \text{ kg/m}^3$. Κατά συνέπεια $\rho_v - \rho_a \cong \rho_v$.

Αυτό δεν συμβαίνει όμως όταν εξετάζουμε ένα αέριο σώμα παραπλήσιας πυκνότητας μ' αυτήν του ατμοσφαιρικού αέρα. Έτσι, ο ζεστός καπνός ανέρχεται, επειδή έχει πυκνότητα μικρότερη απ' του αέρα. Αλλά κι ένα αερόστατο δύναται –λόγω του μεταβλητού φαινόμενου βάρους του– να ανέρχεται, να αιωρείται ή να κατέρχεται. (Το φαινόμενο βάρος του αερόστατου μεταβάλλεται αν μεταβληθεί η πυκνότητα του αέρα ή η μέση πυκνότητα του αερόστατου $\rho = m/V$).

Στο ίδιο φαινόμενο βασίζεται και η αιώρηση, βύθιση ή άνοδος των υποβρυχίων. Σ' αυτά, η μεταβολή του φαινόμενου βάρους επιτυγχάνεται με τη μεταβολή της μάζας τους (άρα και της μέσης πυκνότητάς τους), με εισροή ή εκροή νερού από κατάλληλα διαμορφωμένους στεγανούς χώρους.

Παράδειγμα 14

Ένας άνθρωπος (σχ. 2.6γ) έχει βάρος 800 N και όγκο 85 lt. Να υπολογισθούν:

α) Η μάζα (m) και η μέση πυκνότητα ($\rho_{\mu\alpha}$) του ανθρώπου.

β) Η άνωση που δέχεται όταν βρίσκεται στην ατμόσφαιρα.

γ) Η άνωση (A_θ) που δέχεται όταν βρίσκεται βυθισμένος στο θαλασσινό νερό.

δ) Δύναται ο άνθρωπος να μείνει πλήρως βυθισμένος στη θάλασσα; Ποιο ποσοστό του όγκου του μένει βυθισμένο σε κατάσταση ισορροπίας;

Λύση.

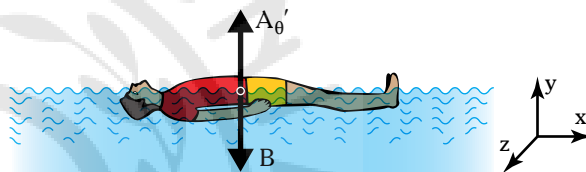
Δεδομένα: $B = 800 \text{ N}$, $V = 0,085 \text{ m}^3$,

πυκνότητα αέρος:

$\rho_{\text{αερ}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ (σε 20°C)

και $p_{\text{atm}} = 101,3 \text{ kPa}$,

$\rho_\theta = 1025 \text{ kg/m}^3$



Σχ. 2.6γ

Ζητούμενα: $\rho_{\mu\alpha}$, A_a , A_θ .

α) $B = m \cdot g \Rightarrow m = B/g \Rightarrow m = 81,6 \text{ kg}$

$$\rho_{\mu\alpha} = m/V \Rightarrow 81,6/0,085 \text{ kg/m}^3 = 960 \text{ kg/m}^3$$

β) $A_{\text{αερ}} = \rho_{\text{αερ}} \cdot g \cdot V = 1,2 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,085 \text{ m}^3 = 0,83 \text{ N}$

γ) $A_\theta = \rho_\theta \cdot g \cdot V =$

$$= 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,085 \text{ m}^3 = 854,7 \text{ N}$$

δ) Επειδή $A_\theta > B$ ο άνθρωπος δεν μπορεί να μείνει πλήρως βυθισμένος. Δύναμη $\Sigma F_y = A_\theta - B = 53,6 \text{ N}$ θα τον ωθήσει στην επιφάνεια και ένα τμήμα του όγκου του θα εξέλθει από το νερό, ώστε:

$$\Sigma F_y = 0, \text{ ή } B = A_\theta' \text{ ή } B = \rho_\theta \cdot g \cdot V' \text{ ή}$$

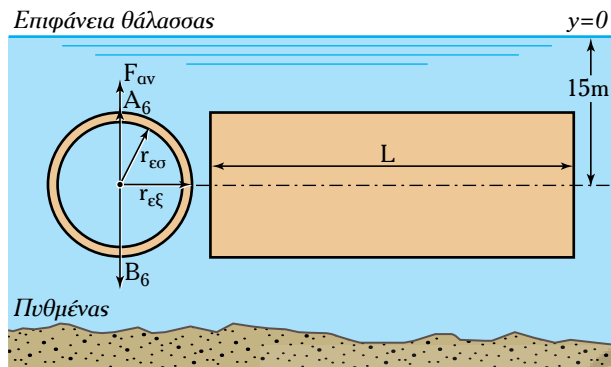
$$V' = \frac{B}{\rho_\theta \cdot g} = \frac{800 \text{ N}}{1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 0,0796 \text{ m}^3$$

$$\text{ή } (V'/V) = (0,0796)/(0,085) = 0,936 \text{ ή } 93,6\%$$

Παράδειγμα 15

Να υπολογισθεί το έργο που απαιτείται για την ανέλκυση κυλινδρικού σωλήνα μήκους 10 m εξωτερικής δια-

μέτρου 60 cm και πάχους τοιχώματος 1 cm (σχ. 2.6δ), ο οποίος βρίσκεται βυθισμένος στη θάλασσα σε βάθος 15 m. Το υλικό του σωλήνα έχει πυκνότητα 7200 kg/m^3 .



Σχ. 2.6δ

Λύση.

Δεδομένα: $L = 10 \text{ m}$, $d_{\varepsilon\xi} = 0,60 \text{ m}$,
 $r_{\varepsilon\xi} - r_{\varepsilon\sigma} = 0,01 \text{ m}$, $y = 15 \text{ m}$
 $\rho_{\sigma} = 7200 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\theta} = 1025 \text{ kg/m}^3$

Ζητούμενα: W .

Ο όγκος του υλικού του σωλήνα είναι:

$$V = V_{\varepsilon\xi} - V_{\varepsilon\sigma} = \pi r_{\varepsilon\xi}^2 \cdot L - \pi r_{\varepsilon\sigma}^2 \cdot L = \pi \cdot L \cdot (r_{\varepsilon\xi}^2 - r_{\varepsilon\sigma}^2) \Rightarrow V = 0,1854 \text{ m}^3$$

$F_{\alpha\nu}$: Δύναμη ανυψώσεως

F_{σ} : Άνωση σώματος

Το βάρος του σώματος (B_{σ}) είναι:

$$B_{\sigma} = \gamma_{\sigma} \cdot V = \rho_{\sigma} \cdot g \cdot V = 7200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,185 \text{ m}^3 = 13.095 \text{ N}$$

$$\text{Ισχύει } F_{\alpha\nu} + A_{\sigma} = B_{\sigma} \text{ ή } F_{\alpha\nu} = B_{\sigma} - A_{\sigma}$$

$$A_{\sigma} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot V_{\sigma} = 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,1864 \text{ m}^3 = 1864,2 \text{ N}$$

$$F_{\alpha\nu} = B_{\sigma} - A_{\sigma} = (13.095 - 1864,2) \text{ N} = 11.230 \text{ N}$$

Το έργο ανυψώσεως είναι:

$$W = F_{\alpha\nu} \cdot y = 11.230 \text{ N} \cdot 15 \text{ m} = 168.450 \text{ J}$$

2.7 Πλεύση (flotation).

Όπως είδαμε, ένα σώμα βυθισμένο σε ρευστό, δέχεται κατά την κατακόρυφο, δύο αντίθετες δυνάμεις: Τη **δύναμη βαρύτητας** (βάρος σώματος) και τη **δύναμη ανώσεως** του ρευστού.

Αν το βάρος του σώματος είναι μεγαλύτερο από την άνωση, το σώμα κατέρχεται (βυθίζεται).

Αν η πυκνότητα του ρευστού δεν μεταβάλλεται

(**υγρά**), οι δυο δυνάμεις μένουν αμετάβλητες και το σώμα θα συνεχίσει την κάθοδο μέχρι να συναντήσει τον βυθό και να δεχτεί την επί πλέον δύναμη αντιστάσεως που θα εξισορροπεί τη διαφορά $\Sigma F = B - A$.

Αν η πυκνότητα του ρευστού αυξάνεται με την κάθοδο (**ατμοσφαιρικός αέρας**), τότε η άνωση αυξάνεται επίσης και υπάρχει ενδεχόμενο να φτάσει την τιμή του βάρους, οπότε το σώμα θα αιωρείται.

Αν το βάρος του σώματος είναι μικρότερο από την άνωση, το σώμα ανέρχεται υπό την επίδραση της συνισταμένης δυνάμεως $\Sigma F = A - B$.

Αν η πυκνότητα του ρευστού δεν μεταβάλλεται (**υγρά**), οι δύο δυνάμεις μένουν αμετάβλητες και το σώμα θα συνεχίσει την άνοδο μέχρι να συναντήσει την ελεύθερη επιφάνεια και να εξέλθει κατά ένα τμήμα του από το υγρό, ώστε να μειωθεί επαρκώς ο όγκος του εκτοπιζόμενου υγρού, ώστε η άνωση να γίνει ίση με το βάρος. Το σώμα επιπλέει, δηλαδή βρίσκεται εν μέρει βυθισμένο στο υγρό, υπό την επίδραση του βάρους του και της ανώσεως που ασκεί το υγρό: $B = A$. Επομένως το σώμα εκτοπίζει όγκο υγρού που έχει βάρος ίσο με το βάρος του σώματος και κατά την κατακόρυφο υπάρχει ισορροπία.

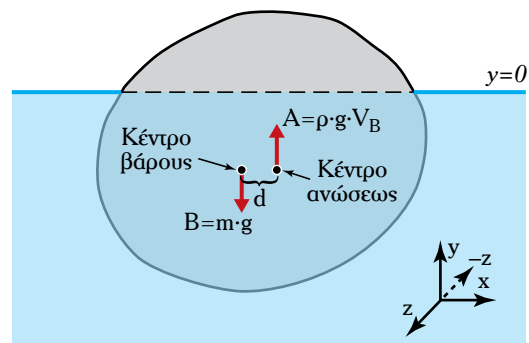
Αν η πυκνότητα του ρευστού μειώνεται με την άνοδο (**ατμοσφαιρικός αέρας**), τότε η άνωση μειώνεται επίσης και όταν φθάσει την τιμή του βάρους, το σώμα θα **αιωρείται**.

Πλεύση: Σώμα βυθισμένο κατά ένα τμήμα του σε υγρό επιπλέει όταν το βάρος του ισούται με την άνωση (σχ. 2.7α):

$$B = A, (\Sigma F_y = 0) \quad (2.30)$$

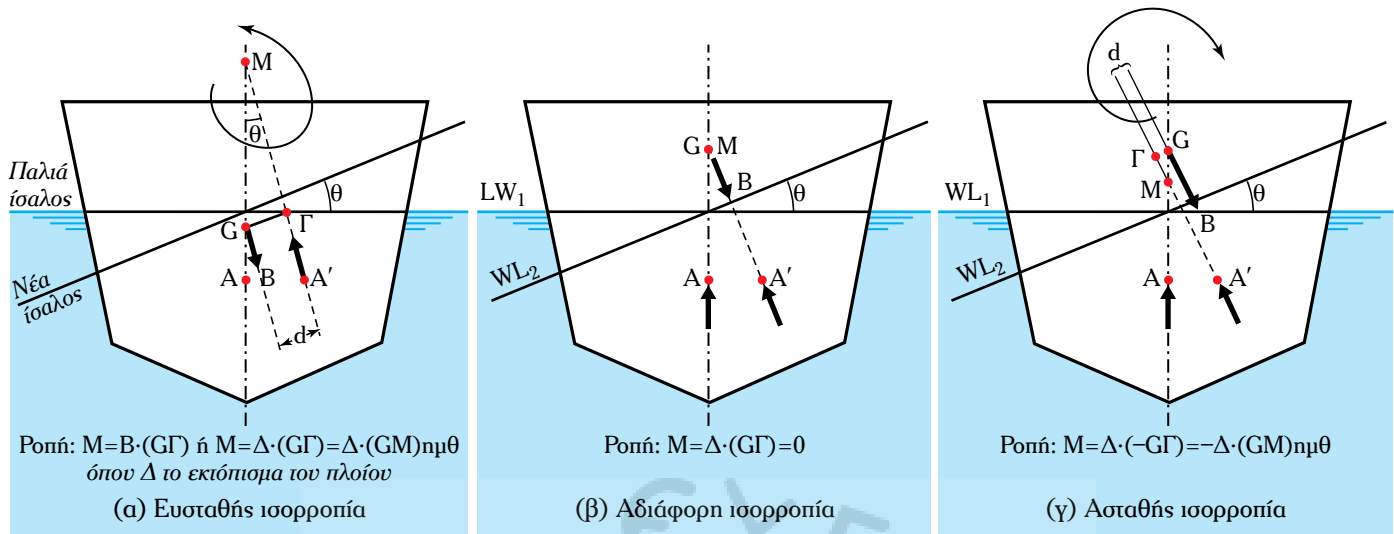
Για να ισορροπεί το σώμα πρέπει επί πλέον η συνισταμένη ροπή να είναι 0:

$$\Sigma M = 0 \quad (2.30\alpha)$$



Σχ. 2.7α

Πλεύση.



$\Delta = B$, το βάρος ή εκτόπισμα του πλοίου (σώματος).

Σχ. 2.7β

Επειδή τόσο το βάρος, όσο και η άνωση έχουν κατακόρυφη διεύθυνση, για να ισχύει η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma M = 0$) πρέπει να βρίσκονται (άνωση και βάρος) στον ίδιο κατακόρυφο άξονα.

Τι θα συμβεί όμως αν, λόγω κάποιας παροδικής οριζόντιας δύναμης, η ισορροπία διαταραχθεί;

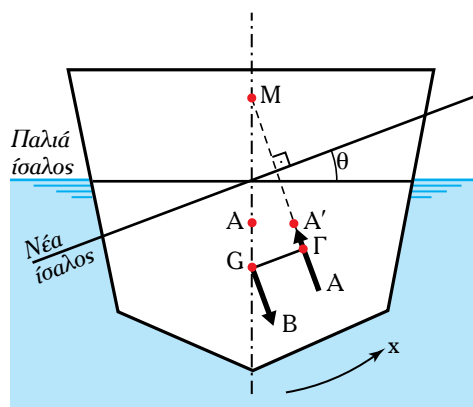
Παρατηρούμε [σχ. 2.7β(α) και 2.7γ] πως αν και το κέντρο βάρους δεν μετατοπίζεται, λόγω μετατοπίσεως του κέντρου ανώσεως το βάρος και η άνωση δεν βρίσκονται πλέον στον ίδιο κατακόρυφο άξονα, αλλά απέχουν απόσταση d . Κατά συνέπεια, δημιουργείται ζεύγος δυνάμεων (B, A) με αποτέλεσμα η ροπή $M = B \cdot d$ να τείνει να περιστρέψει το σώμα. Το ερώτημα είναι αν η ροπή θα επαναφέρει το σώμα στην προηγούμενη θέση του ή αν θα το στρέψει προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό κρίνεται από τη θέση του κέντρου βάρους του σώματος σε σχέση με το μετάκεντρο. Ως **μετάκεντρο M** (metacenter) ορίζεται το σημείο τομής της διεύθυνσεως της ανώσεως στην τυχαία θέση αποκλίσεως, με τον άξονα του σώματος που ορίζει η διεύθυνση της ανώσεως στην θέση ισορροπίας.

Αν το κέντρο βάρους του σώματος βρίσκεται πάνω από το μετάκεντρο M , το ζεύγος δυνάμεων απομακρύνει οριστικά το σώμα από την προηγούμενη θέση ισορροπίας. Η πλεύση του σώματος είναι **ασταθής** [σχ. 2.7β(γ)].

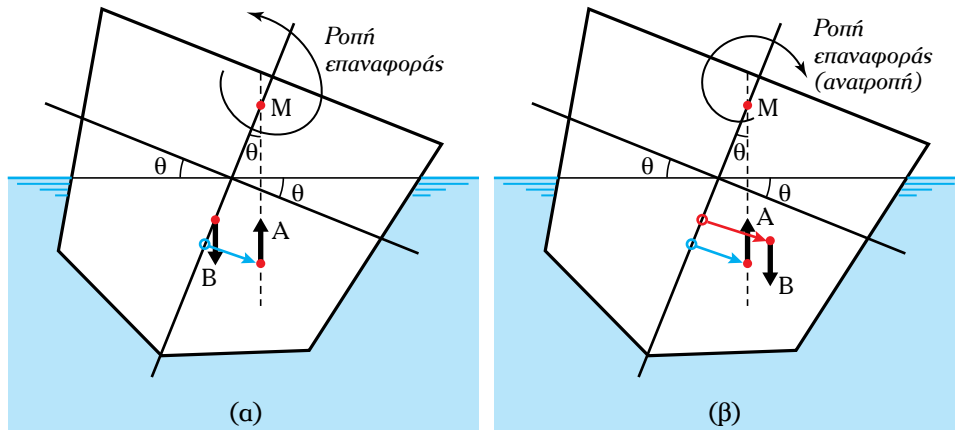
Αν το κέντρο βάρους του σώματος βρίσκεται κάτω από το μετάκεντρο M , το ζεύγος δυνάμεων δημιουργεί ροπή επαναφοράς και το σώμα επανέρχεται (ταλαντευόμενο) στην προηγούμενη θέση ισορροπίας. Η πλεύση του σώματος είναι **ευσταθής** (σχ. 2.7γ).

Παρατηρούμε πως όσο χαμηλότερα είναι το κέντρο βάρους του σώματος, τόσο ευνοείται η ευσταθής πλεύση. **Γενικά, όταν το κέντρο ανώσεως βρίσκεται υψηλότερα απ' το κέντρο βάρους, η πλεύση είναι ευσταθής.**

Η θέση του μετάκεντρου ως προς το κέντρο βάρους ορίζει και τις καταστάσεις ισορροπίας του πλοίου ή ενός πλέοντος σώματος, δηλαδή όταν το $GM > 0$, το κέντρο βάρους (G) βρίσκεται κάτω από το μετάκεντρο (M), η ισορροπία είναι ευσταθής [σχ. 2.7β(α)], όταν το $GM = 0$, το μετάκεντρο και το κέντρο βάρους ταυτίζονται. Η ισορροπία είναι αδιάφορη και το πλοίο παραμένει στην θέση με κλίση θ [σχ. 2.7β(β)], όταν το $GM < 0$, το μετάκεντρο είναι χαμηλότερα από το κέντρο βάρους, τότε η ισορροπία είναι ασταθής. Η γωνία κλίσεως τείνει να μεγαλώσει λόγω της δημιουργούμενης ροπής [σχ. 2.7β(γ)].



Σχ. 2.7γ



Σχ. 2.78

(α) Ευσταθής πλεύση. (β) Ασταθής πλεύση πλοίου λόγω μετατόπισης του κέντρου βάρους.

Τέλος αναφερόμενοι στο σχήμα 2.7γ όπου το κέντρο βάρους G βρίσκεται κάτω του κέντρου ανώσεως A τότε η ισορροπία του πλοίου είναι ευσταθής. Η ροπή επαναφοράς, του πλοίου στην αρχική του κατάσταση, $M = B \cdot (G\Gamma)$, μεγαλώνει όσο το κέντρο βάρους του κατεβαίνει χαμηλότερα στα ύφαλά του.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η διατήρηση της ευσταθούς πλεύσεως στα πλοία. Ο σχεδιασμός, αλλά και η τοποθέτηση των φορτίων γίνεται έτσι, ώστε να παραμένει το κέντρο βάρους όσο το δυνατό χαμηλότερα. Ένα επί πλέον πρόβλημα προκύπτει από την πιθανά σημαντική **μετατόπιση του κέντρου βάρους** του πλοίου, λόγω μετατοπίσεως των φορτίων. Έτσι, η ευσταθής πλεύση που βλέπομε στο σχήμα 2.7δ(α) γίνεται ασταθής στο σχήμα 2.7δ(β) λόγω μετατοπίσεως του κέντρου βάρους του. Για να μην μετακινείται το κέντρο βάρους ως προς το κέντρο ανώσεως κατά τις διαταραχές (οπότε, ακόμη και αν δεν καταστραφεί η ευσταθής πλεύση, μειώνεται η ροπή επαναφοράς), λαμβάνονται ειδικά μέτρα που εμποδίζουν τη μετακίνηση των φορτίων. **Για τα υγρά που μετακινούνται εύκολα προς την πλευρά που γέρνει το σκάφος, χρησιμοποιούνται δεξαμενές με διαμερίσματα ή χωρίσματα.**

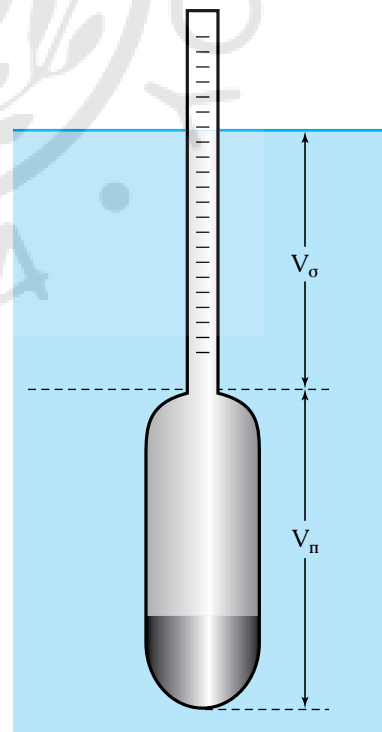
2.7.1 Μέτρηση της πυκνότητας υγρών και στερεών.

Μία σημαντική εφαρμογή της ανώσεως και της πλεύσεως είναι τα **πυκνόμετρα**. Αυτά χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της πυκνότητας των υγρών. Πρόκειται για πλωτήρες κατάλληλου σχήματος με έρμα στο κάτω άκρο (ώστε να έχουν όσο το δυνατόν πιο χαμηλά το κέντρο βάρους), που καταλήγουν σε λεπτό σωλήνα με βαθμολογημένη κλίμακα (σχ.

2.7ε). Όταν το πυκνόμετρο τοποθετείται σε υγρό, επιπλέει υπό την επίδραση των ίσων και ανιθέτων δυνάμεων του βάρους του πυκνόμετρου και της ανώσεως του υγρού. Άρα:

$$\begin{aligned} B &= A = \rho_v \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot (V_{\pi} + V_{\sigma}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_v \cdot (V_{\pi} + V_{\sigma}) = B/g = m \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_v = m / (V_{\pi} + V_{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

όπου: m η μάζα του πυκνόμετρου, ρ_v η πυκνότητα



Σχ. 2.7ε
Πυκνόμετρο.

του ρευστού, V_{π} ο όγκος του πλωτήρα, V_{σ} ο όγκος του βυθισμένου τμήματος του σωλήνα.

Η μάζα του πυκνόμετρου και ο όγκος του πλωτήρα είναι μεγέθη σταθερά. Επομένως, εκείνο που μεταβάλλεται με τη μεταβολή της πυκνότητας, είναι ο όγκος του βυθισμένου τμήματος του σωλήνα:

$$V_{\sigma} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Δηλαδή η μεταβολή της πυκνότητας οδηγεί σε μεταβολή του ύψους του βυθισμένου τμήματος του σωλήνα (όσο πιο μικρή είναι η πυκνότητα του υγρού τόσο περισσότερο βυθίζεται το πυκνόμετρο). Αυτό επιτρέπει την εκ των προτέρων βαθμολόγηση του σωλήνα σε μονάδες πυκνότητας με τιμές που αυξάνουν εκ των άνω προς τα κάτω.

Το εύρος πυκνότητας που μπορεί να μετρήσει ένα πυκνόμετρο είναι περιορισμένο. Για να λειτουργήσει πρέπει απ' τη μία να μην βυθίζεται πλήρως στο υγρό και απ' την άλλη να επιπλέει με την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού να βρίσκεται σε κάποιο σημείο του λεπτού σωλήνα μετρήσεως. Μπορούμε φυσικά να αυξήσουμε τη διάμετρο του σωλήνα μετρήσεως ώστε να εκτοπίζει μεγαλύτερο όγκο υγρού ανά μονάδα βυθίσεώς του. Αλλά τότε μειώνεται η ακρίβεια του πυκνομέτρου.

Το μεγάλο εύρος των πυκνοτήτων των υγρών καλύπτεται από ολόκληρη σειρά πυκνομέτρων. Αυτός είναι και ένας βασικός λόγος που για διάφορα υγρά διαλύματα χρησιμοποιούνται διαφορετικά πυκνόμετρα (αλκοολόμετρα, πυκνόμετρα υγρών μπαταρίας, καυσίμων κ.ά.).

Τα πυκνόμετρα που χρησιμοποιούνται για υγρά πυκνοτήτων μικροτέρων της πυκνότητας του νερού, ονομάζονται και **αραιόμετρα**.

Συχνά η βαθμολόγηση των πυκνομέτρων είναι αυθαίρετη. Έτσι, έχουν προκύψει διάφορες κλίμακες πυκνότητας. Η πιο γνωστή είναι η **κλίμακα Baumé** που τη συναντάμε στα ομώνυμα πυκνόμετρα (βαθμοί Baumé πυκνοί και αραιοί). Σε αρκετές περιπτώσεις ειδικών πυκνομέτρων διαλυμάτων, η κλίμακα δίνει απευθείας την περιεκτικότητα του διαλύματος (π.χ. αλκοολόμετρα).

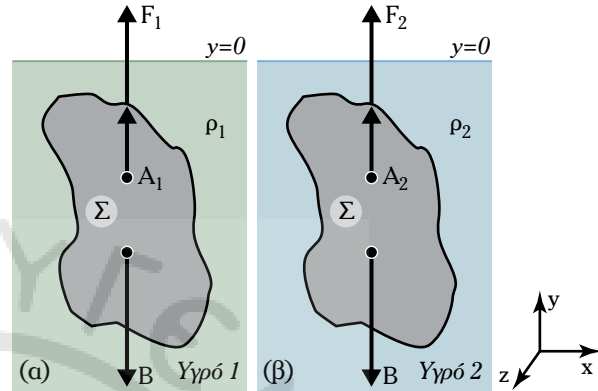
Για τη **μέτρηση της πυκνότητας στερεών ομογενών σωμάτων**, αξιοποιούμε επίσης την άνωση και το φαινόμενο βάρους τους όταν βυθιστούν σε υγρό γνωστής πυκνότητας ($B_{\phi} = B - A$). Είναι:

$$B_{\phi} = B - A = (\rho_{\sigma} - \rho_{\nu}) \cdot g \cdot V = (\rho_{\sigma} - \rho_{\nu}) \cdot B / \rho_{\sigma}$$

$$\text{ή } \rho_{\sigma} = \frac{B}{B - B_{\phi}} \cdot \rho_{\nu} \quad (2.32)$$

2.7.2 Υπολογισμός όγκου (V) σώματος τυχαίου σχήματος.

Θεωρούμε το σώμα Σ του σχήματος 2.7στ βυθισμένο σε δύο υγρά με πυκνότητες ρ_1, ρ_2 . Ζυγίζουμε τα δύο σώματα και το δυναμόμετρο μας δίδει δυνάμεις F_1 και F_2 (φαινόμενα βάρη).



Σχ. 2.7στ

Ισχύουν:

$$\Sigma F_y = 0, F_1 + A_1 = B \Rightarrow F_1 = B - A_1 \text{ ή}$$

$$F_1 = B - \rho_1 \cdot g \cdot V \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0, F_2 + A_2 = B \Rightarrow F_2 = B - A_2 \text{ ή}$$

$$F_2 = B - \rho_2 \cdot g \cdot V \quad (2)$$

$$\text{από τις (1) και (2) έχουμε: } B = F_1 + \rho_1 \cdot g \cdot V \quad (3)$$

$$\text{και } B = F_2 + \rho_2 \cdot g \cdot V \quad (4)$$

$$\text{ή } F_1 + \rho_1 \cdot g \cdot V = F_2 + \rho_2 \cdot g \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{F_1 - F_2}{g(\rho_2 - \rho_1)} \quad (5)$$

από την οποία υπολογίζουμε τον όγκο V του σώματος Σ .

Για το βάρος B μετά από πράξεις προκύπτει:

$$B = \frac{\rho_2 \cdot F_1 - \rho_1 \cdot F_2}{\rho_2 - \rho_1} \quad (6)$$

οπότε με γνωστές τις F_1, F_2 και τις πυκνότητες ρ_1, ρ_2 υπολογίζεται το βάρος B και ο όγκος V του σώματος Σ .

2.8 Ασκήσεις.

1. Σε ποιο βάθος της θάλασσας η πίεση είναι 140 kPa; ($\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$). Ποια η μεταβολή της πίεσεως για κάθε μέτρο αυξήσεως του βάθους;
[$y = 3,84 \text{ m}$, $\Delta p = 10,05 \text{ kPa}$]

2. Το βαρόμετρο δείχνει 1005 mbars και μετρητής προσαρτημένος σε κλειστή δεξαμενή δείχνει κενό 400 mm Hg. Να υπολογισθεί η απόλυτη πίεση μέσα στη δεξαμενή.

$$[p = 47,18 \text{ kPa}]$$

3. Μια ορεινή λίμνη έχει μέγιστο βάθος 60 m. Αν η ατμοσφαιρική πίεση είναι 98 kPa, να υπολογισθεί η μέγιστη απόλυτη p_{abs} και σχετική p_g πίεση στον βυθό της.

$$[587 \text{ kPa}, 685 \text{ kPa}]$$

4. Δεξαμενή περιέχει τα μη αναμειγμένα υγρά νερό και λάδι πυκνότητας 780 kg/m^3 . Το στρώμα του νερού έχει ύψος 3 m και το στρώμα του λαδιού 2 m. Αν η δεξαμενή είναι ανοιχτή στην ατμόσφαιρα, να υπολογισθούν οι πιέσεις στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών και στον πυθμένα της δεξαμενής. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα της πίεσης σε συνάρτηση με το ύψος.

$$[116,6 \text{ kPa}, 146 \text{ kPa}]$$

5. Φυγόκεντρο κυλινδρική συσκευή διαμέτρου 20 cm και ύψους 30 cm, περιέχει νερό μέχρι ύψους 12 cm. Να υπολογισθούν: α) Η γωνιακή ταχύτητα στην οποία το ελάχιστο ύψος του νερού θα μηδενιστεί. β) Αν η συσκευή περιστρέφεται με 3000 rpm, οι σχετικές πιέσεις στο άνω και κάτω άκρο του κυλινδρικού τοιχώματος.

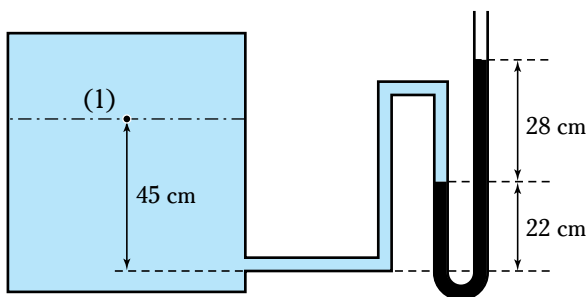
$$[\alpha) 15,34 \text{ rad/s}, \beta) 195,7 \text{ kPa}, 198,7 \text{ kPa}]$$

6. Στη συσκευή της ασκήσεως 7, υπάρχει μείγμα πετρελαίου ($\rho_{\text{ox}} = 0,85$) με 20% κ.ό. νερού μέχρι ύψους 20 cm. Αν η συσκευή περιστρέφεται με 6000 rpm, να υπολογισθούν οι πιέσεις στη διαχωριστική επιφάνεια και στο κυλινδρικό τοίχωμα.

$$[446,5 \text{ kPa}, 709,5 \text{ kPa}]$$

7. Να υπολογισθεί η πίεση στο σημείο 1 της κλειστής δεξαμενής νερού του σχήματος 2.8α αν το μανόμετρο περιέχει υδράργυρο.

$$[p_1 = 136,37 \text{ kPa}]$$

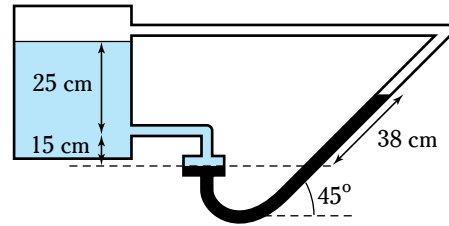


Σχ. 2.8α

8. Η μανομετρική διάταξη του σχήματος 2.8β, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πυκνότητας υγρών. Αν το επικλινές μανόμετρο περιέχει τετρακλωράνθρακα, να

υπολογισθεί η πυκνότητα του υγρού της δεξαμενής του σχήματος.

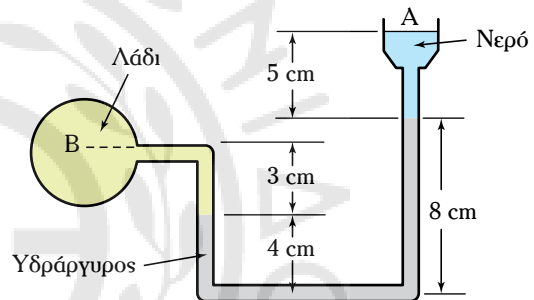
$$[\rho = 1068,1 \text{ kg/m}^3]$$



Σχ. 2.8β

9. Να υπολογισθεί η απόλυτη πίεση στο σημείο B του σχήματος 2.8γ αν η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού είναι ατμοσφαιρική. Η σχετική πυκνότητα του λαδιού είναι 0,8.

$$[p_B = 106,9 \text{ kPa}]$$



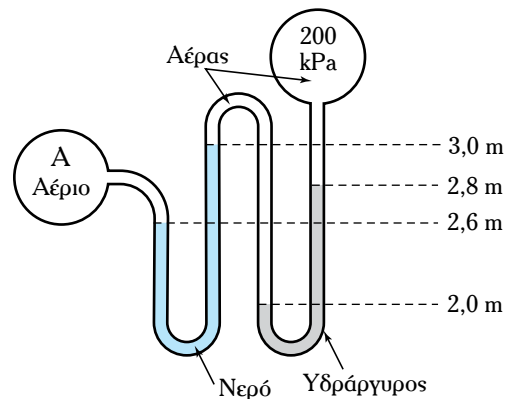
Σχ. 2.8γ

10. Στο χώρο A σταθερού όγκου του σχήματος 2.8δ, υπάρχει αέριο θερμοκρασίας 20°C .

α) Να υπολογισθεί η πίεση στο χώρο A.

β) Αν η θερμοκρασία του αερίου αυξηθεί κατά 30°C , πόση θα γίνει η πίεση του αερίου; Ποιες οι υψομετρικές μεταβολές του μανόμετρου; (η πίεση του αέρα διατηρείται σταθερή, ίση με 200 kPa).

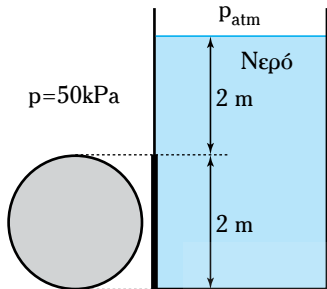
$$[P_A = 310,56 \text{ kPa}]$$



Σχ. 2.8δ

11. Η δεξαμενή του σχήματος 2.8ε περιέχει νερό ύψους 4 m. Στην κάθετη πλευρά της δεξαμενής υπάρχει κυκλική θυρίδα διαμέτρου 2 m. Να υπολογισθεί η δύναμη πίεσης η οποία ασκείται στη θυρίδα και το σημείο εφαρμογής της.

[$F = 253,5 \text{ kN}$, $y_p = -3,03 \text{ m}$]



Σχ. 2.8ε

12. Ένα ξύλο σχετικής πυκνότητας 0,6, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, με διαστάσεις 70, 50 και 10 cm, πάνω στο οποίο είναι τοποθετημένο κομμάτι χάλυβα, επιπλέει σε νερό. Αν το ξύλο προεξέχει 1 cm από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, να βρεθεί το βάρος του αντικειμένου.

[$B = 45,5 \text{ N}$]

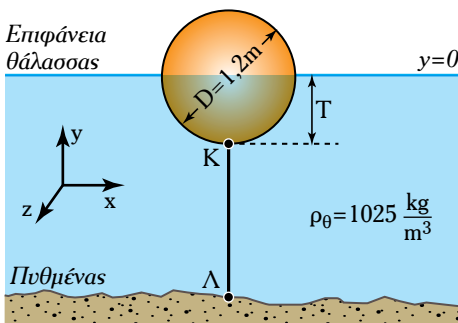
13. Ένα παγόβουνο πλέει με το 1/7 του όγκου του πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Να υπολογισθεί η πυκνότητά του. Τι τμήμα του όγκου του θα ήταν πάνω από την επιφάνεια αν έπλεε σε γλυκό νερό;

[$877,7 \text{ kg/m}^3$, 12,2%]

14. Να δημιουργήσετε φύλλο υπολογισμού σε Excel το οποίο για δεξαμενές διατομής ορθογωνίου παραλληλογράμμου, σε μία τους πλευρά, θα υπολογίζει:

- α) Το κέντρο πίεσης.
- β) Τη δύναμη πίεσης.

15. Δίδεται η σφαιρική σημαδούρα του σχήματος 2.8στ που είναι βυθισμένη κατά $D/2$ στη θάλασσα. Το βάρος της σημαδούρας είναι 6000 N. Να υπολογισθεί η δύναμη που καταπονεί την ράβδο συγκρατήσεως όταν $T = D/2$ και όταν $T = D$.

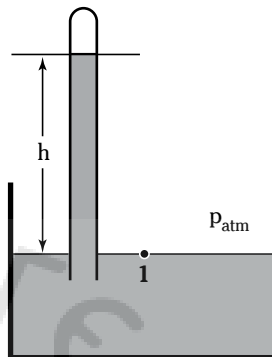


Σχ. 2.8στ

16. Θα προτιμούσατε για την μέτρηση διαφοράς πιέσεων ένα μανόμετρο στήλης H_2O ή ένα στήλης Hg; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Υπολογίστε το h στο σχήμα 2.8ζ αν:

- α) $p_1 = 760 \text{ Hg}$
- β) $p_1 = 1 \text{ Bar}$
- γ) $p_1 = 1 \text{ atm}$, (φυσική)



Σχ. 2.8ζ

17. Για το πλοίο του σχήματος 2.8η, το οποίο έχει κατασκευασθεί για παρακολούθηση θαλασσιών οργανισμών μέσω φινιστρινιών που βρίσκονται στα υφαλά του, ζητούνται:

- α) Το κέντρο πίεσεων στο φινιστρίνι Α.
- β) Η δύναμη που ασκείται στο φινιστρίνι.

Παραδοχή: Η επιφάνεια της θάλασσας είναι ήρεμη και το σκάφος είναι ακίνητο. Το ίδιο πρόβλημα θα αντιμετωπίσετε με τα παράθυρα παρατηρήσεως ενός ενυδρίου.

$\rho_\theta = 1025 \text{ kg/m}^3$.

18. Για το σχήμα 2.8γ να δημιουργήσετε φύλλο υπολογισμού σε Excel το οποίο θα υπολογίζει την πίεση P_B . Τα ρευστά υδράργυρος και νερό μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Η απάντηση να δίδεται σε P_a σε mmHg και σε mH_2O .

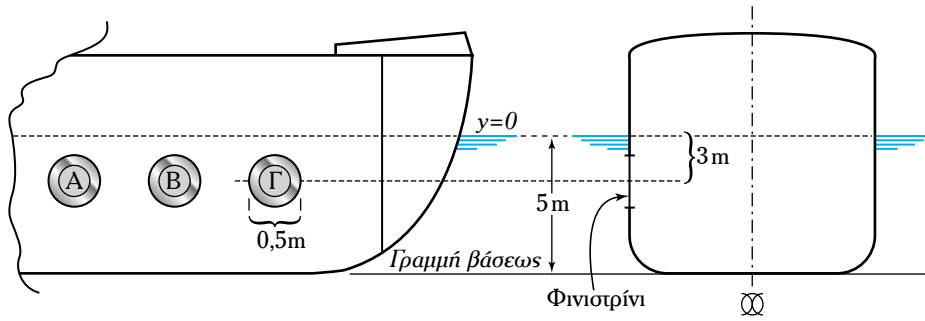
19. Μανόμετρο δείχνει σε ανθρώπινο χέρι πίεση 12 cmHg. Να μετατραπεί σε P_a και cmH_2O .

20. Για την υδροφόρο φορτηγίδα του σχήματος 2.8θ ζητούνται:

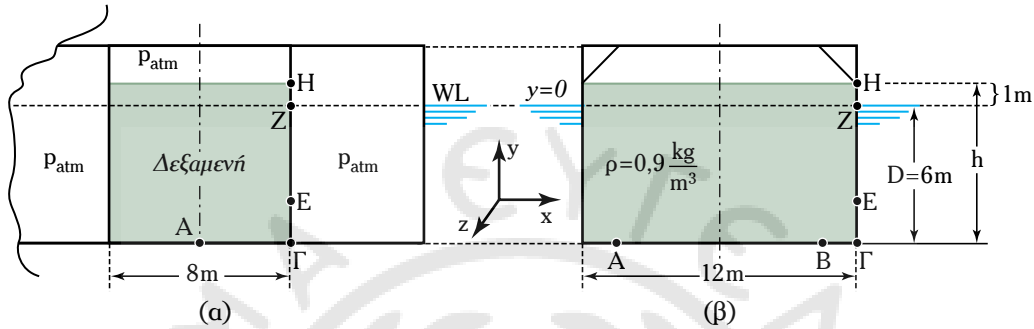
- α) Η ολική πίεση $P_{ολ}$ στο έλασμα ΑΒ.
- β) Να παρασταθεί σε διάγραμμα $P-h$ η μεταβολή της πίεσης $P_{ολ}$ συναρτήσει του ύψους h, $P_{ολ} = f(h)$.
- γ) Το κέντρο πίεσεων στην πλευρά της δεξαμενής.
- δ) Η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια ΓΕΖΗ.

21. Δίδεται φορτηγίδα ορθογωνικής διατομής καθ' όλο το μήκος της (σχ. 2.8ι), η οποία χρησιμοποιείται για την μεταφορά λάσπης κατά την εργασία εκβαθύνσεως λιμένα. Για κάποιο λόγο υφίσταται κλίση κατά γωνία θ . Ζητούνται:

- α) Το κέντρο πίεσεων στην γραμμή ΒΓ.



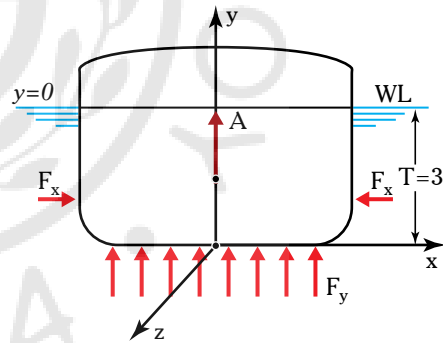
Σχ. 2.8n



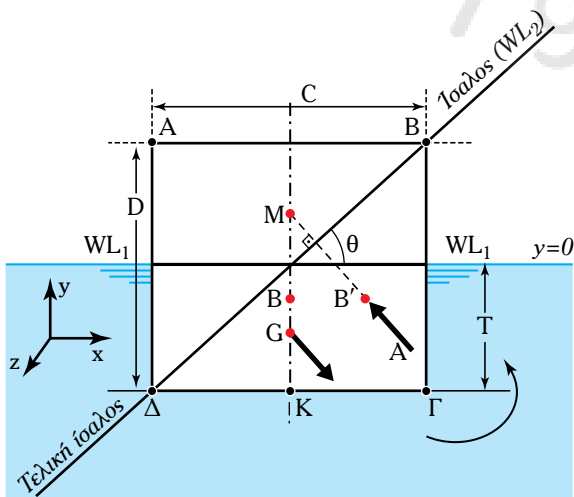
Σχ. 2.80

- β) Αν χρειασθεί να ενισχυθεί η πλευρά ΒΓ με μορφοσίδηρο για να μην παραμορφωθεί υπολογίστε το ύψος y , στο οποίο θα τοποθετηθεί.
 - γ) Οι συντεταγμένες x , y και z του νέου σημείου εφαρμογής της ανώσεως B' .
 - δ) Η απόλυτη πίεση στο σημείο Κ στην οριζόντια και στην κεκλιμένη θέση.
 - ε) Η άνωση A που ασκείται στην δεξαμενή.
 - στ) Η ροπή επαναφοράς της δεξαμενής στην θέση ισορροπίας.
 - ζ) Η δύναμη που ασκείται στη πλευρά ύψους ΒΓ και μήκους L .
- Δίδονται: $D = 4,0\text{ m}$, $C = 6,0\text{ m}$, $T = 3,0\text{ m}$, $L = 30,0\text{ m}$, $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1025\text{ kg/m}^3$ και $KG = 0,9\text{ m}$.

- 22. Υπολογίστε την άνωση A από τις υδροστατικές πιέσεις που ασκούνται στην γάστρα του πλοίου σε οριζόντια θέση (σχ. 2.8ια). Αγνοήστε την καμπυλότητα r . Δίδονται: μήκος γάστρας L και πλάτος B .



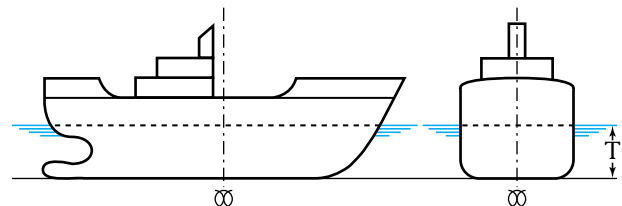
Σχ. 2.8ια



Σχ. 2.8ι

- 23. Σώμα επιπλέει σε θαλασσινό νερό ($\rho = 1025\text{ kg/m}^3$) και έχει βύθισμα $D = 4\text{ m}$. Αν αυτό βρεθεί σε ποτάμι ($\rho = 1000\text{ kg/m}^3$). Να υπολογίσετε το νέο βύθισμα.

- 24. Το πλοίο του σχήματος 2.8ιβ έχει μήκος 25 m. Το πλάτος του στην ίσαλο πλευσεως είναι 7 m.



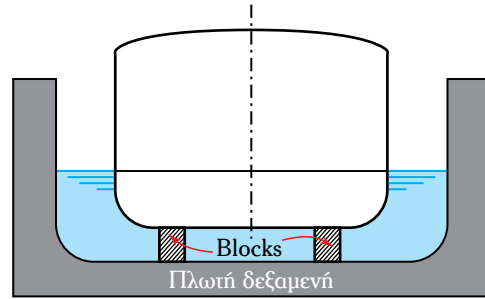
Σχ. 2.8ιβ

Θεωρήστε ότι το σχήμα της γάστρας του είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, το βάρος του (B) είναι $45.000 \text{ kg}_{\text{gf}}$, ($1 \text{ kg}_{\text{gf}} = 9,81 \text{ N}$). Ζητούνται:

- α) Το βύθισμα του (T) σε θαλασσινό νερό.
- β) Το βύθισμα του (T) σε νερό ποταμού.

Το πλοίο τοποθετείται σε πλωτή δεξαμενή για επι-σκευή και καθαρισμό των υφάλων του. Το βυθισμά του γίνεται $0,8 \text{ m}$. Υπολογίστε:

- γ) Την άνωση στην περίπτωση αυτή.
- δ) Την δύναμη με την οποία καταπονούνται τα blocks στηρίζεως (σχ. 2.8ιγ).



Σχ. 2.8ιγ



3.1 Βασικές έννοιες – Είδη ροής.

1) Βασικές έννοιες.

Οι βασικές έννοιες που θα συναντήσουμε και οι οποίες θα πρέπει να γνωρίζουμε την σημασία τους στην Μηχανική των Ρευστών είναι οι εξής:

1) Λέγοντας **ροή ρευστού**, εννοούμε τη διακίνηση του ρευστού στον χώρο, δηλαδή το φαινόμενο της μετατοπίσεώς του (ή της κυλίσεώς του) μέσα από περιβάλλουσα αυτό επιφάνεια, η οποία συνήθως είναι στερεό τοίχωμα (αγωγός ροής). Ο αγωγός μπορεί να είναι ανοιχτός (όπως η κοίτη ενός ποταμού) ή κλειστός (π.χ. κυλινδρικός σωλήνας). Σε αρκετές περιπτώσεις δεν υπάρχουν στερεά τοιχώματα (ροή ανέμου, θαλάσσια ρεύματα, πίδακας υγρού κ.ά.).

Όπως αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, θεωρούμε πως το ρευστό αποτελείται από στοιχειώδεις όγκους, οι οποίοι βρίσκονται σε αλληλεπίδραση λόγω των διαμοριακών δυνάμεων συνοχής.

Για τη μελέτη της ροής ρευστού αναπτύχθηκαν δύο μέθοδοι. Η **πρώτη**, καλούμενη **θεώρηση κατά Lagrange¹**, εξετάζει την πορεία ενός στοιχειώδους σωματιδίου του ρευστού (όπως στην κλασική μηχανική) και προσπαθεί να εκφράσει σε κάθε χρονική στιγμή τις μεταβολές της ταχύτητας και των άλλων ιδιοτήτων του. Η πολυπλοκότητα όμως της κινήσεως του στοιχειώδους σωματιδίου (και η συχνά хаοτική συμπεριφορά του) καθιστούν εξαιρετικά δύσκολη ως αδύνατη μια τέτοια ανάλυση. Έτσι, η χρήση της περιορίζεται μόνο σε συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις.

Η **δεύτερη** μέθοδος, καλούμενη **θεώρηση κατά Euler²**, βασίζεται στην έννοια του πεδίου ροής, το οποίο παρουσιάζει αναλογίες με τα άλλα πεδία της φυσικής (βαρυτικό, ηλεκτρομαγνητικό κ.λπ.). Σύμφωνα με αυτήν, αντί να επικεντρώνομε στη μελέτη ενός στοιχειώδους σωματιδίου του ρευστού, μελετάμε την ταχύτητα και τις άλλες ιδιότητές του σε συ-

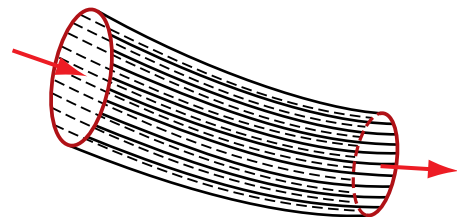
γκεκριμένα σημεία του (τρισιδιάστατου) χώρου, στον οποίο ρέει το ρευστό. Με τη μέθοδο αυτή, αναφερόμαστε σε σημεία του χώρου και αποφεύγουμε την αναφορά σε στοιχεία του ρευστού. Σήμερα αυτή η μέθοδος είναι η πιο διαδεδομένη και, στις περισσότερες περιπτώσεις, η πιο αποτελεσματική.

2) Ως **πεδίο ροής** (flow field) χαρακτηρίζεται ο χώρος στον οποίο κινείται (ρέει) το ρευστό. Σε κάθε σημείο του, σύμφωνα με τη θεώρηση κατά Euler, αντιστοιχεί και ένα διάνυσμα ταχύτητας που θα έχει μια στοιχειώδης μάζα του ρευστού, η οποία θα βρεθεί σ' αυτό το σημείο.

Η πλήρης γνώση ενός πεδίου ροής σημαίνει ότι για κάθε σημείο του, εκτός από την ταχύτητα γνωρίζουμε την πίεση, τη θερμοκρασία και την πυκνότητα του ρευστού, καθώς και το πώς αυτές μεταβάλλονται με τον χρόνο.

3) **Ροϊκή γραμμή** [ή **ρευματική γραμμή** ή **γραμμή ροής** (streamline)] ονομάζεται κάθε συνεχής γραμμή εντός του πεδίου ροής, η οποία έχει την ιδιότητα, σε κάθε σημείο της, το διάνυσμα της ταχύτητας του πεδίου ροής να αποτελεί εφαπτομένη της.

Ροϊκές γραμμές διερχόμενες από μία κλειστή καμπύλη, διαμορφώνουν ένα **ροϊκό σωλήνα** (stream tube) (σχ. 3.1α). Πρόκειται για ένα φανταστικό σωλήνα εντός του πεδίου ροής, ο οποίος περιβάλλεται από ροϊκές γραμμές. Η ροή γίνεται κατά μήκος του σωλήνα και δεν υπάρχει ροή ρευστού διά μέσου των «τοιχωμάτων» (**συνθήκη μη εισχωρήσεως**).



Σχ. 3.1α

Ροϊκές γραμμές και ροϊκό σωλήνα.

¹ Joseph Louis Lagrange: 1736–1813.

² Euler Leonard: 1707–1783.

Ο χώρος που περικλείεται σε ένα ροϊκό σωλήνα είναι πλήρης ρέοντος ρευστού και καλείται **φλέβα ροής**.

Η απεικόνιση του πεδίου ροής γίνεται και με δύο ακόμα έννοιες, που προκύπτουν από την πειραματική μελέτη με χρήση χρωστικών ουσιών (ή άλλων υλικών όπως για παράδειγμα σκόνη αλουμινίου) και λήψη φωτογραφιών.

4) **Ινώδης φλέβα** ροής (streakline) καλείται η συνεχής γραμμή που συνδέει τα στοιχεία του ρευστού που έχουν περάσει απ' την ίδια θέση του πεδίου ροής σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

5) **Τροχιά** (pathline) καλείται η συνεχής γραμμή που ενώνει τις διαδοχικές θέσεις από τις οποίες διέρχεται ένα στοιχείο του ρευστού κατά την κίνησή του στο πεδίο ροής.

Στο σχήμα 3.1β βλέπουμε την περιγραφή (δισδιάστατου) πεδίου ροής με ροϊκές γραμμές (α) ή την πειραματική απεικόνιση διαφορετικών πεδίων ροής με ινώδη φλέβα (β) και τροχιά (γ). Αν η περιγραφή αφορά στο ίδιο πεδίο, οι γραμμές παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιότητα (και ταυτίζονται στην περίπτωση της μόνιμης στρωτής ροής).

6) **Όγκος ελέγχου** (control volume) καλείται ένα τμήμα του πεδίου ροής, προσδιορισμένο αυθαίρετα (ή πιο σωστά ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος). Αποτελεί ανοικτό σύστημα, με μία ή περισσότερες εισόδους και εξόδους. Για τον όγκο ελέγχου γράφονται οι εξισώσεις μεταβολής της μάζας, της ορμής και της ενέργειας, καθώς το ρευστό περνάει μέσα απ' αυτόν. Το όριο του όγκου ελέγχου ονομάζεται **επιφάνεια ελέγχου**.

Όπως και κάθε άλλο φαινόμενο μεταφοράς, έτσι και η ροή ρευστού, έχει ως βασικό χαρακτηριστικό της τον ρυθμό με τον οποίο πραγματοποιείται.

7) **Ρυθμός ροής** (flow rate) ή **παροχή** καλείται η ποσότητα του ρευστού που διέρχεται από μια διατομή κάθετη στην κατεύθυνση ροής, στη μονάδα του χρόνου.

Αν η ποσότητα του διερχόμενου ρευστού εκφράζεται με τη μάζα του, έχουμε την **παροχή μάζας** (\dot{m}). Αν εκφράζεται με τον όγκο του, έχουμε την **παροχή όγκου** (\dot{V}).

Από τους ορισμούς προκύπτουν:

$$m = \rho \cdot V \quad (3.1\alpha)$$

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot dV/dt \quad (3.1\beta)$$

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \quad (3.1\gamma)$$

Δηλαδή, η παροχή μάζας συνδέεται με την παροχή όγκου διά μέσου της πυκνότητας.

Για **μόνιμη ροή**:

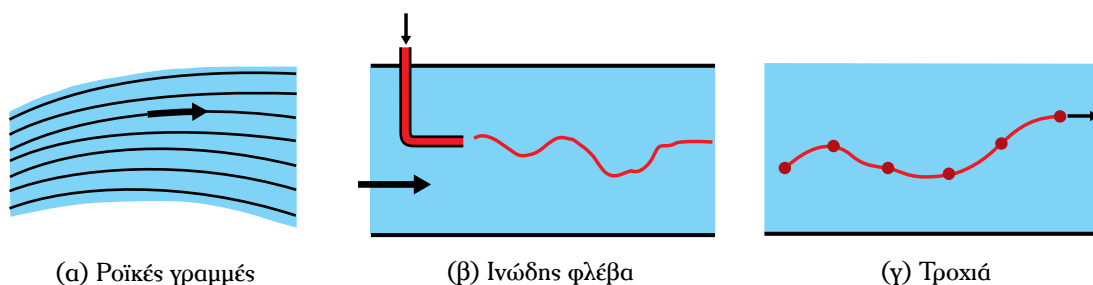
$$\dot{m} = m/t \quad (3.1\delta)$$

$$\dot{V} = V/t \quad (3.1\epsilon)$$

2) Είδη ροής.

Μπορούμε να μελετήσουμε και να ταξινομήσουμε τις ροές με διάφορα κριτήρια: Είτε σε σχέση με τη μεταβολή των χαρακτηριστικών τους στον χρόνο (μόνιμη και μεταβλητή ροή) ή στο χώρο (ομοιόμορφη και ανομοιόμορφη ροή, μονοδιάστατη, δισδιάστατη και τρισδιάστατη ροή), είτε συγκρίνοντας τις ταχύτητες των στοιχειωδών μαζών σε μία διατομή (δυναμική ροή και ροή οριακού στρώματος). Η σημαντικότερη όμως ταξινόμηση (στρωτή και τυρβώδης ροή) σχετίζεται με τον ίδιο τον μηχανισμό της ροής. Φυσικά, ανάλογα με το διακινούμενο ρευστό διακρίνουμε τη **ροή των ασυμπίεστων** και **συμπιεστών ρευστών**. Τέλος, ανάλογα με τους αγωγούς, διακρίνουμε τη ροή σε ανοικτούς κλειστούς αγωγούς. Ειδικότερα:

1) **Μόνιμη** (steady) (ή **σταθερή**) και **μεταβλητή** (unsteady) **ροή**: Μόνιμη καλείται η ροή όταν σε κάθε σημείο του πεδίου ροής οι συνθήκες ροής (ταχύτητα, θερμοκρασία, πίεση και πυκνότητα ρευστού)



(α) Ροϊκές γραμμές

(β) Ινώδης φλέβα

(γ) Τροχιά

Σχ. 3.1β

Είδη πεδίων ροής.

δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Αν κάποια από τα παραπάνω μεγέθη αλλάζουν στην πορεία του χρόνου, τότε έχουμε μεταβλητή ροή. Στο μόνιμο πεδίο ροής οι παράγωγοι όλων των φυσικών μεγεθών ως προς το χρόνο είναι μηδενικές.

Στις εφαρμογές που αφορούν στους μηχανικούς εξετάζονται κυρίως μόνιμα πεδία ροής. Ως τέτοια θεωρούμε την ύδρευση, άρδευση, αποχέτευση, μεταφορά καυσίμων, θέρμανση με ζεστό νερό, αερισμό, κλιματισμό κ.λπ.. Σε όλες αυτές τις εφαρμογές υπάρχουν περίοδοι, που η ροή δεν είναι μόνιμη (π.χ. κατά την έναρξη λειτουργίας ή το κλείσιμο ενός δικτύου), αλλά για τη σχεδίαση και κατασκευή των δικτύων εξετάζουμε τη ροή όταν έχει αποκατασταθεί στη μόνιμη μορφή της. Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει κυρίως η μόνιμη ροή.

2) **Ομοιόμορφη** καλείται η ροή όταν σε κάποια χρονική στιγμή, έχουμε την ίδια μέση ταχύτητα σε όλο το πεδίο ροής (σε επόμενη χρονική στιγμή η ταχύτητα πιθανόν να αλλάξει ομοιόμορφα σε όλο το πεδίο). Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε **ανομοιόμορφη** ροή. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η ροή είναι ανομοιόμορφη.

3) Η ροή εξεταζόμενη από τη σκοπιά της συμπεριφοράς μιας στοιχειώδους ποσότητας ρευστού στο χώρο, είναι γενικά τρισδιάστατη. Σε πολλές όμως περιπτώσεις, μπορεί να θεωρηθεί, με ικανοποιητική προσέγγιση, μονοδιάστατη.

Μονοδιάστατη (one dimensional) καλείται η ροή όταν οι παράμετροί της (ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία, πυκνότητα κ.λπ.) μεταβάλλονται μόνο κατά την κύρια διεύθυνση της ροής. Πρέπει να διευκρινιστεί πως ο χαρακτηρισμός μιας ροής ως μονοδιάστατης δεν έχει σχέση με το ευθύγραμμο ή καμπυλόγραμμο των γραμμών ροής ή του αγωγού. Έτσι, η ροή σε κυλινδρικό σωλήνα (και σε κάθε μορφής δίκτυο σωληνώσεων) μπορεί να θεωρηθεί μονοδιάστατη, ανεξάρτητα με το αν ο σωλήνας είναι ευθύγραμμος ή όχι.

Η προσέγγιση όμως της ροής ως μονοδιάστατης, δεν θα είναι ικανοποιητική αν για παράδειγμα πρέπει να λάβουμε υπόψη τη μεταβολή των τοπικών ταχυτήτων σε μια διατομή. Όπως θα δούμε αναλυτικά πιο κάτω, το μέτρο των τοπικών ταχυτήτων σε μία διατομή κάθετη στη διεύθυνση ροής, μεταβάλλεται κατά διεύθυνση κάθετη στην κύρια διεύθυνση της ροής (καθώς απομακρυνόμαστε από το τοίχωμα του αγωγού). Επομένως, η ταχύτητα μεταβάλλεται και κατά τον άξονα y .

Σ' αυτήν την περίπτωση η ροή θα θεωρηθεί **δισδιάστατη** (two dimensional). Ως δισδιάστατη αντιμετωπίζεται η ροή σε κανάλια, ποταμούς κ.λπ..

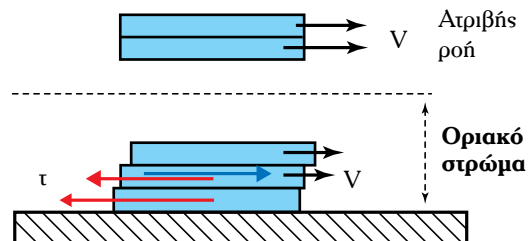
Και αυτή όμως η προσέγγιση θα καταστεί ανεπαρκής στην περίπτωση που θέλουμε λόγω χάριν να μελετήσουμε ένα στροβιλισμό (δίνη) του ρευστού που δημιουργήθηκε στη φλέβα ροής. Οι ταχύτητες των στοιχειωδών ποσοτήτων εντός της δίνης, θα μεταβάλλονται και προς τις τρεις διευθύνσεις του χώρου (όχι μόνο κατά μέτρο, αλλά και κατά διεύθυνση) και η ροή πρέπει να μελετηθεί ως **τριδιάστατη** (three dimensional). Για παράδειγμα, οι κινήσεις των αερίων μαζών στην ατμόσφαιρα εξετάζονται στον τρισδιάστατο χώρο.

Στα περισσότερα προβλήματα της Μηχανικής Ρευστών, που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια, είναι επαρκής η μονοδιάστατη ή δισδιάστατη προσέγγιση.

Η συμπεριφορά ενός ρεόντος πραγματικού ρευστού επηρεάζεται από τα τοιχώματα των αγωγών ροής (και, όταν δεν υπάρχουν στερεά τοιχώματα, από άλλα ρευστά με τα οποία βρίσκεται σε επαφή). Μία θεμελιώδης αρχή της Μηχανικής των Ρευστών, που διατυπώθηκε από το Prandtl³ είναι ότι το στερεό τοίχωμα επηρεάζει καθοριστικά τη ροή μιας στιβάδας του ρευστού που βρίσκεται σε άμεση γειτνίαση μ' αυτό και η οποία καλείται **οριακό στρώμα** (boundary layer).

Τα στερεά τοιχώματα οδηγούν σε ανάπτυξη διατμητικών τάσεων λόγω τριβών, που αντιτίθενται στην κίνηση του ρευστού. Αποτέλεσμα είναι να μειώνεται η ταχύτητα του ρευστού που κινείται κοντά στο τοίχωμα (και να μηδενίζεται για τις στοιχειώδεις ποσότητες που βρίσκονται σε επαφή μ' αυτό). Το φαινόμενο επεκτείνεται σε ένα στρώμα που συνορεύει με το τοίχωμα. Το πλάτος του εξαρτάται απ' τον ρυθμό ροής, την τραχύτητα του τοιχώματος, το ιξώδες του ρευστού κ.ά..

Στο σχήμα 3.1γ παρατηρούμε ότι μεταξύ του τοιχώματος και της ευρισκόμενης σε επαφή με αυτό



Σχ. 3.1γ
Οριακό στρώμα.

³ Prandtl Ludwig 1875 – 1953.

στοιχειώδους στιβάδας του ρευστού, αναπτύσσεται διατμητική τάση τ (η οποία οφείλεται στις δυνάμεις προσφύσεως μεταξύ των μορίων του ρευστού και του τοιχώματος, καθώς και στην τραχύτητα της στερεάς επιφάνειας) που αντιστέκεται στη ροή. Έτσι, μια στοιχειώδης στιβάδα ρευστού θα μένει ακίνητη, προσκολλημένη στο τοίχωμα. (Η πειραματική παρατήρηση που αφορά σε μία στοιχειώδη στιβάδα του ρευστού προσκολλημένη στο τοίχωμα, καλείται **συνθήκη μη ολισθήσεως**— no slip condition). Η επόμενη στιβάδα θα δέχεται **διατμητική τάση αντιστάσεως** από την υποκείμενη και (με την προϋπόθεση πως δέχεται από την υπερκείμενη στιβάδα **διατμητική τάση ολισθήσεως**) θα κινείται με μικρή ταχύτητα. Αλλά και στις επόμενες στιβάδες αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις, λόγω των δυνάμεων συνοχής μεταξύ των μορίων του ρευστού και της ολισθήσεως της κάθε στιβάδας ανάμεσα στην υποκείμενη (μικρότερης ταχύτητας) και την υπερκείμενη (μεγαλύτερης ταχύτητας). Η ροή εντός του οριακού στρώματος καλείται **ιξώδης** (viscid flow). Έξω από το οριακό στρώμα, όταν πλέον οι ταχύτητες των στοιχειωδών στιβάδων εξισώνονται, δεν παρουσιάζεται ολίσθηση και η ροή γίνεται **ατριβής** (inviscid flow). (Η παραπάνω περιγραφή προσεγγίζει την πραγματικότητα στην περίπτωση που η ροή είναι στρωτή).

Τα προβλήματα της ροής αντιμετωπίζονται γενικά, θεωρώντας πως έχουμε δύο τμήματα ρευστού: αυτό του οριακού στρώματος και το τμήμα που βρίσκεται έξω από το οριακό. Σε ορισμένες περιπτώσεις το οριακό στρώμα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο ενώ σε άλλες, πολύ πιο ενδιαφέρουσες στην πράξη (όπως η ροή σε σωλίνες), το οριακό στρώμα καλύπτει ολόκληρο τον αγωγό.

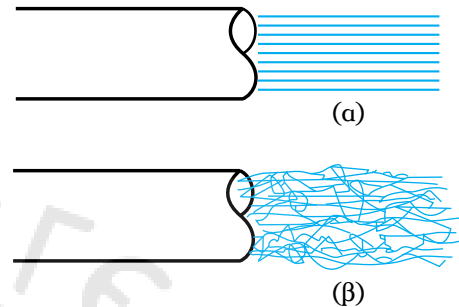
3.1.1 Στρωτή και τυρβώδης ροή.

Όπως είδαμε, η ταχύτητα ροής του ρευστού σε μια διατομή κάθετη στη ροή, δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται εντός του οριακού στρώματος. Όταν λοιπόν μιλάμε για ταχύτητα ροής σε έναν αγωγό, εννοούμε τη **μέση ταχύτητα**. Η μέση ταχύτητα ορίζεται σε συνάρτηση με την παροχή (όπως θα δούμε στην παράγρ. 3.3).

Αν η ταχύτητα ροής είναι επαρκώς μικρή, η ροή είναι ομαλή, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1δ. Μπορούμε να θεωρήσουμε με ικανοποιητική προσέγγιση, πως οι γειτονικές στιβάδες απλά ολισθαίνουν η μία στην άλλη, χωρίς εγκάρσια ρεύματα και δίνες. Έτσι, η τροχιά κάθε στοιχειώδους ποσότητας ρευστού είναι γραμμική. Η ροή αυτή ονομάζεται **στρωτή** (laminar

flow) ή **γραμμική** ροή [linear flow, σχ. 3.1δ(α)].

Σε μεγαλύτερες ταχύτητες εμφανίζονται διαταραχές της ευθύγραμμης πορείας των στοιχειωδών μαζών και δημιουργούνται στροβιλισμοί (δίνες) που οδηγούν σε πλευρική ανάμειξη. Η ροή αυτή καλείται **τυρβώδης** (turbulent) ή **στροβιλώδης** [σχ. 3.1δ(β)].



Σχ. 3.1δ

(α) Στρωτή και (β) τυρβώδης ροή.

Το πέρασμα απ' τη στρωτή στην τυρβώδη ροή δεν εξαρτάται μόνο απ' την ταχύτητα. Σ' αυτό το θέμα αλλά και στην εξαιρετική πολυπλοκότητα της τυρβώδους ροής θα επανέλθουμε πιο κάτω.

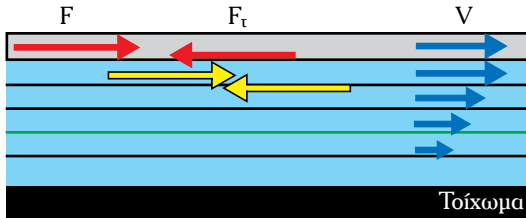
3.1.2 Νόμος ιξώδους ροής του Newton.

Στο Πρώτο Κεφάλαιο δώσαμε έναν ορισμό των ουσιών που χαρακτηρίζονται ως ρευστά. Μπορούμε τώρα να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι:

Ως **ρευστό** χαρακτηρίζεται ένα σώμα η στοιχειώδης ποσότητα του οποίου, υφιστάμενη διατμητική τάση, οσοδήποτε μικρή, δεν παραμένει σε στατική κατάσταση αλλά κινείται σε σχέση με τις στοιχειώδεις ποσότητες που την περιβάλλουν.

Δηλαδή η στοιχειώδης στιβάδα, υπό την επίδραση διατμητικής τάσεως, διαφοροποιεί την ταχύτητά της σε σχέση με τις γειτονικές και ολισθαίνει ανάμεσα σ' αυτές. Λόγω των δυνάμεων συνοχής όμως, αυτή η διαφοροποίηση ταχύτητας, έχει ως αποτέλεσμα την άσκηση διατμητικής τάσεως στις γειτονικές στιβάδες, τις οποίες συμπαρασύρει διαφοροποιώντας την κινητική τους κατάσταση.

Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο μηχανισμός της στρωτής ροής, ας υποθέσουμε πως έχουμε μικρή ποσότητα ασυμπίεστου ρευστού ανάμεσα σε δύο επίπεδες πλάκες (σχ. 3.1ε). Η κάτω πλάκα είναι πακτωμένη, αφού η επάνω επιπλέει στο υγρό. Το σύστημα βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση. Τη χρονική στιγμή t_0 ασκούμε στην επιπλέουσα πλάκα οριζόντια δύνα-



Σχ. 3.1ε

Ροή ανάμεσα σε επίπεδες πλάκες.

μη F . Η πλάκα θα ολισθήσει υπό την επίδραση της συνισταμένης:

$$\Sigma F = F - F_t$$

όπου: F_t είναι η αντίσταση του ρευστού στην κίνηση της πλάκας.

Μπορούμε, μειώνοντας την F όταν η πλάκα έχει αποκτήσει την επιθυμητή ταχύτητα, να έχουμε $F = F_t$ και $\Sigma F = 0$, οπότε η πλάκα θα κινείται με σταθερή ταχύτητα v . (Φροντίζουμε η ταχύτητα ολισθήσεως της πλάκας να είναι επαρκώς μικρή, ώστε η ροή να είναι στρωτή). Σύμφωνα με τον Νόμο Δράσεως-Αντιδράσεως, η πλάκα θα ασκεί οριζόντια δύναμη στη στοιχειώδη σιβάδα του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή μαζί της, ίση και αντίθετη με την F_t . Έτσι, η σιβάδα θα παρασύρεται και θα κινείται μαζί με την πλάκα (προσκολλημένη σ' αυτήν, σύμφωνα με τη συνθήκη μη ολισθήσεως), ολισθαίνοντας με σταθερή ταχύτητα v στην υποκείμενη σιβάδα. Αν το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής είναι A , θα αναπτύσσεται στη σιβάδα του ρευστού διατμητική τάση ολισθήσεως:

$$\tau = F_t / A$$

Η διατμητική τάση τ είναι το αίτιο ολισθήσεως της στοιχειώδους σιβάδας.

Λόγω των δυνάμεων συνοχής, η υποκείμενη σιβάδα αντιστέκεται στην ολίσθηση της πάνω σιβάδας. Αφού η πάνω σιβάδα έχει σταθερή ταχύτητα, η δύναμη αντιστάσεως θα είναι $-F_t$ και θα δημιουργείται διατμητική τάση αντιστάσεως $-\tau$. Ταυτόχρονα, σύμφωνα με τον Νόμο Δράσεως-Αντιδράσεως, η πάνω σιβάδα θα ασκεί στην υποκείμενη διατμητική τάση ολισθήσεως τ .

Το φαινόμενο θα επαναληφθεί στις υποκείμενες σιβάδες (τριβή λόγω των δυνάμεων συνοχής με την επόμενη σιβάδα και Νόμος Δράσεως-Αντιδράσεως). Έτσι, η διατμητική τάση θα μεταβιβάζεται από την κινούμενη πλάκα προς τις κάτω σιβάδες, αφού η ταχύτητα ολισθήσεως θα μειώνεται από σιβάδα σε σιβάδα. Ακριβώς το αντίθετο φαινόμενο θα συμβαί-

νει στην επαφή με την πακτωμένη πλάκα. Η σιβάδα που βρίσκεται σε επαφή με αυτήν, υπό την επίδραση της τριβής που αντιτίθεται στη ροή (οφειλόμενη στις δυνάμεις προσφύσεως και στην τραχύτητα της επιφάνειας), θα παραμένει ακίνητη (προσκολλημένη στην κάτω πλάκα σύμφωνα με τη συνθήκη μη ολισθήσεως) και θα ασκεί (λόγω ιξώδους) διατμητική τάση αντιστάσεως στην υπερκείμενη σιβάδα, η οποία θα ολισθαίνει με μικρή ταχύτητα πάνω της. Συνοπτικά: κάθε σιβάδα δέχεται τάση ολισθήσεως τ από την υπερκείμενη και τάση αντιστάσεως $-\tau$ από την υποκείμενη σιβάδα. Η σιβάδα που βρίσκεται σε επαφή με την κινούμενη πλάκα θα έχει ταχύτητα v , ενώ η σιβάδα που βρίσκεται σε επαφή με την ακίνητη πλάκα, θα έχει μηδενική ταχύτητα. Στις ενδιάμεσες σιβάδες θα έχουμε σταδιακή αύξηση της ταχύτητας από 0 σε v . Το σχήμα 3.1στ δείχνει την κατανομή των ταχυτήτων όταν η κατάσταση έχει πλέον σταθεροποιηθεί.

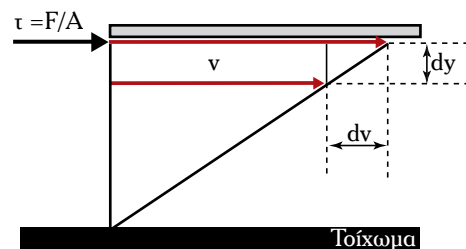
Το φαινόμενο περιγράφεται από τον **Νόμο Ιξώδους Ροής του Newton**:

$$\tau = -\mu \cdot \frac{dv}{dy} \quad (3.2)$$

όπου: μ το **ιξώδες** του ρευστού.

Ο Νόμος Ιξώδους Ροής του Newton έχει γενικότερη ισχύ σε οποιοδήποτε οριακό στρώμα (αρκεί η ροή να είναι στρωτή). Στην περίπτωση της ροής που εξετάσαμε, παρατηρούμε πως ο λόγος dv/dy (**διαφορική κλίση ταχύτητας**) παραμένει σταθερός. Εφόσον και το ιξώδες δεν μεταβάλλεται, η διατμητική τάση παραμένει σταθερή.

Αν εξετάσουμε από ενεργειακής πλευράς το φαινόμενο, παρατηρούμε πως για να αντιμετωπίσουμε τη διατμητική τάση αντιστάσεως στη ροή, ασκούμε στην πάνω πλάκα δύναμη F (που διαμορφώνει ίση και αντίθετη διατμητική τάση) και έτσι η ταχύτητα της πλάκας παραμένει σταθερή και το ρευστό ρέει. Δηλαδή καταναλώνεται ισχύς ($P = F \cdot v$) για να αντιμετωπιστούν οι τριβές (απώλεια ενέργειας λόγω τριβών).



Σχ. 3.1στ

Κατανομή ταχυτήτων.

Η **διατμητική τάση** (ή **τάση ολισθήσεως**) που αποτελεί το αίτιο της ροής, αποδεικνύεται πως είναι **ορμή** ανά μονάδα εμβαδού και ανά μονάδα χρόνου:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot a}{A} = \frac{m \cdot v}{A \cdot t} = \frac{J}{A \cdot t} \quad (3.3)$$

όπου: $J = m \cdot v$ η ορμή και A το εμβαδόν της πλάκας, στην οποία ασκούμε τη δύναμη F .

Στην περίπτωση που εξετάσαμε, η διατμητική τάση τ μεταβιβάζεται από την πάνω πλάκα στην κάτω. Πρόκειται λοιπόν για μεταφορά ορμής από την κινούμενη προς την πακτωμένη πλάκα. Στους αγωγούς ροής, η μεταφορά ορμής γίνεται από την περιοχή εκτός του οριακού στρώματος (ή από την περιοχή των υψηλών ταχυτήτων) προς το τοίχωμα του αγωγού (διά μέσου του οριακού στρώματος). Γενικεύοντας:

Κατά τη ροή ρευστού, μεταφέρεται ορμή από τις περιοχές υψηλής προς τις περιοχές χαμηλής ταχύτητας.

Η σύγχρονη ενοποιημένη προσέγγιση των φαινομένων μεταφοράς, αντιμετωπίζει τη ροή των ρευστών υπό αυτό το πρίσμα.

3.1.3 Ιξώδες ή συνεκτικότητα (μ).

Ιδανικό ρευστό θεωρείται το ρευστό, μεταξύ των μορίων του οποίου δεν υπάρχει καμιά δυναμική αλληλεπίδραση. Αυτό σημαίνει πως τα μόρια κινούνται εντελώς ελεύθερα, δεν ασκούν και δεν δέχονται δυνάμεις από τα άλλα μόρια και κατά συνέπεια δεν διαμορφώνονται διατμητικές τάσεις αντιστάσεως κατά την ολίσθηση μιας στοιχειώδους ποσότητας ανάμεσα σε άλλες.

Στα **πραγματικά ρευστά**, όπως είδαμε, μεταξύ των μορίων υπάρχουν οι **δυνάμεις συνοχής** (σημαντικές στα υγρά, πολύ πιο μικρές στα αέρια), που αντιστέκονται στη σχετική κίνηση των στοιχειωδών ποσοτήτων. Αντίστοιχα, μεταξύ μορίων διαφορετικών σωμάτων, αναπτύσσονται οι δυνάμεις συνάφειας. Οι διαμοριακές αυτές δυνάμεις έχουν ως αποτέλεσμα, την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων που αντιστέκονται στην ολίσθηση μίας στοιχειώδους στιβάδας του ρευστού ανάμεσα σε άλλες, άρα και στη διαφορετική ταχύτητα γειτονικών στιβάδων.

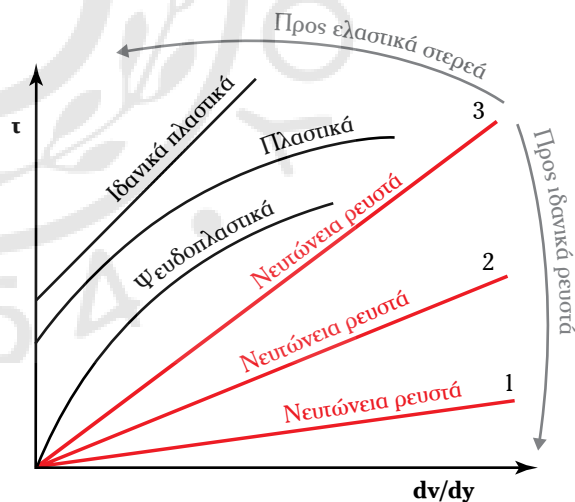
Στη ροή ρευστού ανάμεσα στις δύο πλάκες που εξετάσαμε, αίτιο της διαφορετικής κλίσεως ταχύτητας dv/dy είναι η εξωτερική διατμητική τάση $\tau = F/A$ (που ασκείται στην πάνω πλάκα και μεταφέρεται από στιβάδα σε στιβάδα) σε συνδυασμό με τη διατμητική τάση αντιστάσεως τ ($= -F/A$). Αν μεταξύ των δύο

πλάκων τοποθετούσαμε διαδοχικά διαφορετικά υγρά και ασκούσαμε την ίδια τάση τ , η ταχύτητα της πλάκας (άρα και οι ταχύτητες των στιβάδων του υγρού) θα ήταν διαφορετική: μεγαλύτερη για λεπτόρρευστα, μικρότερη για παχύρρευστα. Εκείνο που διαφοροποιείται είναι η εσωτερική αντίσταση των υγρών, την οποία ονομάσαμε (παράγρ. 1.2.7) **ιξώδες** (viscosity) (ή **συνεκτικότητα**):

$$\mu = -\frac{\tau}{dv/dy} \quad (3.4)$$

Τα **ιδανικά ρευστά** έχουν εξ ορισμού μηδενικό ιξώδες: $\mu = 0$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ρευστά που διατηρούν σταθερό ιξώδες όταν η θερμοκρασία και η πίεση δεν μεταβάλλονται, δηλαδή τα **νευτώνια ρευστά**. Στο σχήμα 3.1ζ το ιξώδες των νευτώνειων ρευστών (1, 2, 3) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία του ρευστού με τον οριζώντιο άξονα: $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$. Παρατηρούμε πως αν ασκήσουμε μια διατμητική τάση τ , όσο μικρότερο είναι το ιξώδες, τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορική κλίση ταχύτητας (άρα και η μέση ταχύτητα του ρευστού). Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με νευτώνια ρευστά.



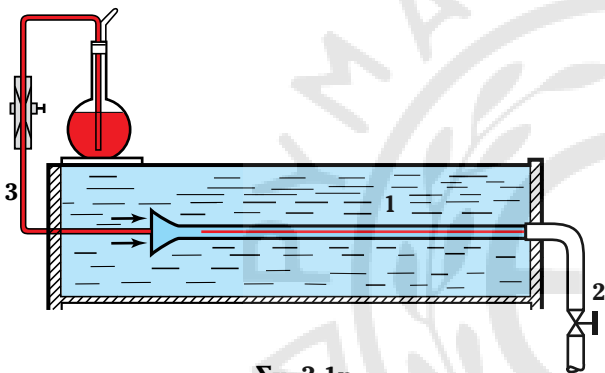
Σχ. 3.1ζ
Ιξώδες ρευστών.

3.1.4 Στρωτή και τυρβώδης ροή – Ο αριθμός Reynolds.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, όταν το φαινόμενο της ροής γίνεται με χαμηλούς ρυθμούς (επαρκώς μικρές ταχύτητες ρευστού), η ροή είναι στρωτή, ενώ όταν οι ρυθμοί γίνουν έντονοι, η ροή γίνεται τυρβώδης.

1) Το πείραμα του Reynolds.

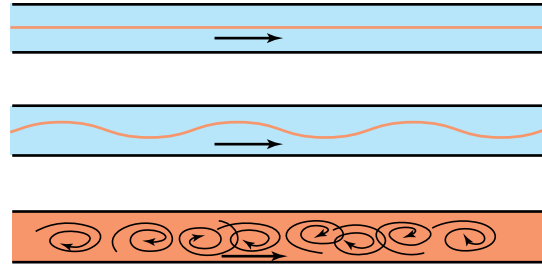
Το πέρασμα από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή το μελέτησε πειραματικά με επιτυχία πρώτος ο Osborne Reynolds⁴ το 1883. Για τα πειράματά του χρησιμοποίησε τη συσκευή του σχήματος 3.1n. Το νερό που αρχικά βρίσκεται σε στατική ισορροπία, αρχίζει να ρέει μέσα στο διάφανο γυάλινο σωλήνα (1) με μικρή παροχή (άρα και ταχύτητα) που ρυθμίζεται από τη στρόφιγγα (2). Με κατάλληλη διάταξη στην είσοδο του σωλήνα, αποφεύγονται τυχόν ανεπιθύμητες διαταράξεις της ροής. Μέσω του λεπτού αγωγού (3) με βελονοειδή απόληξη, εγχέουμε στο ρεύμα ροής και στον άξονα του σωλήνα, μικρή ποσότητα χρωστικής ουσίας που παρασύρεται με το ρευστό, δημιουργώντας μία λεπτή χρωματισμένη φλέβα ροής, την οποία μπορούμε να παρατηρούμε.



Σχ. 3.1n

Το πείραμα του Reynolds.

Όσο η ταχύτητα παραμένει χαμηλή, η χρωματισμένη στοιχειώδης μάζα του νερού κινείται γραμμικά κατά μήκος του σωλήνα και η φλέβα ροής παραμένει ευθύγραμμη. Με την αύξηση της ταχύτητας, η φλέβα λεπταίνει και η ευθύγραμμη πορεία της διαταράσσεται. Η ροή δεν είναι πλέον στρωτή. Η στιγμιαία ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας του ρευστού έχει και συνιστώσα κάθετη στη ροή. Βρισκόμαστε στην ενδιαμέση φάση πέρασματος απ' τη στρωτή στην τυρβώδη ροή. Αν αυξήσουμε και άλλο την ταχύτητα, οι κυματισμοί γίνονται εντονότεροι και παρουσιάζονται κάποιοι στροβιλισμοί. Τέλος, η χρωματισμένη φλέβα, διαχέεται στον σωλήνα χρωματίζοντας όλο το νερό, που ρέει σε αυτόν (σχ. 3.1θ). Η ταχύτητα, στην οποία η έγχρωμη φλέβα εξαφανίζεται ονομάζεται **κρίσιμη ταχύτητα**. Το φαινόμενο οφείλεται στο ότι οι στοιχειώδεις μάζες του ρευστού δεν ρέουν πλέον



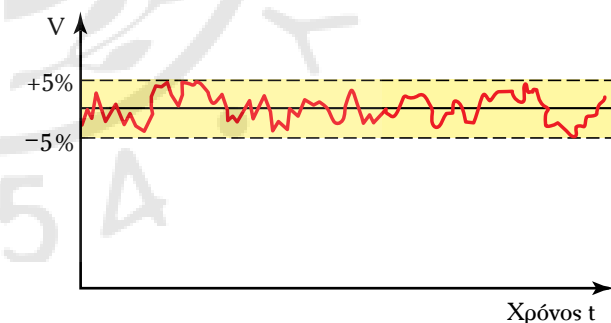
Σχ. 3.1θ

Με την αύξηση της ταχύτητας η ροή γίνεται από στρωτή, τυρβώδης.

γραμμικά (ή κυρίως γραμμικά), αλλά κινούνται άτακτα διαμορφώνοντας εγκάρσια ρεύματα και στροβίλους διαφόρων μεγεθών. Η ροή έχει γίνει τυρβώδης (στροβιλώδης).

Στην τυρβώδη ροή, κάθε στοιχειώδης ποσότητα του ρευστού κινείται και προς τις τρεις διευθύνσεις του χώρου, αλλά η μέση ταχύτητά της στον χρόνο, παραμένει κατά τη διεύθυνση της ροής x . Οι αποκλίσεις της στιγμιαίας ταχύτητας απ' τη μέση τιμή της κατά τη διεύθυνση x διαμορφώνουν στιγμιαίες μεταβολές της πίεσσης που ευαίσθητοι παλμογράφοι μπορούν να καταγράψουν. Έτσι, έχουμε μια (έμμεση) εικόνα αυτών των αποκλίσεων (σχ. 3.1ι).

Σημείωση: Η μέση (τοπική) ταχύτητα μιας στοιχειώδους ποσότητας, διαφέρει από τη μέση ταχύτητα στον αγωγό.



Σχ. 3.1ι

Αποκλίσεις της μέσης τοπικής ταχύτητας στην τυρβώδη ροή.

2) Αριθμός Reynolds.

Ο Reynolds στην πειραματική του μελέτη της μεταβάσεως από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή με τη συσκευή του σχήματος 3.1n, έδειξε πως δεν αρ-

⁴ Osborne Reynolds: 1842 – 1912.

κεί μόνο η ταχύτητα ως κριτήριο αυτής της μεταβάσεως. Παρατήρησε επίσης πως με τη μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού (άρα και του ιξώδους του ρευστού), η κρίσιμη ταχύτητα άλλαζε. Το ίδιο συνέβαινε και όταν αντικαθιστούσε το σωλήνα με άλλον διαφορετικής διαμέτρου. Το συμπέρασμά του ήταν πως το σημείο μεταβάσεως επηρεάζεται επίσης από το ιξώδες του ρευστού και απ' τον αγωγό ροής.

Ο Reynolds με τα πειράματά του κατέληξε σε έναν **αδιάστατο αριθμό** που συσχετίζει αυτές τις παραμέτρους και που προς τιμή του καλείται **αριθμός Reynolds** (Reynolds number). Οι πειραματικές μετρήσεις που ακολούθησαν και από άλλους ερευνητές επιβεβαίωσαν ότι: **Κριτήριο για το αν μια ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης, αποτελεί ο αριθμός Reynolds**. Αυτός δίνεται απ' τη σχέση:

$$Re = \frac{v \cdot \ell \cdot \rho}{\mu} = \frac{v \cdot \ell}{\nu} \quad (3.5)$$

όπου: v η μέση ταχύτητα ροής, ℓ το χαρακτηριστικό μήκος του αγωγού, ρ η πυκνότητα, μ το απόλυτο ιξώδες και ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Όταν ο αριθμός Reynolds είναι μικρός, η ροή είναι στρωτή. Υπάρχει μία τιμή του αριθμού Reynolds πέρα απ' την οποία παρατηρούνται εγκάρσιες μετακινήσεις και δημιουργία κάποιων στροβιλισμών, άρα η ροή σταματά να είναι στρωτή (**κρίσιμος αριθμός Reynolds**). Η κρίσιμη αυτή τιμή δεν είναι ίδια για όλους τους αγωγούς. Εξαρτάται από το γεωμετρικό σχήμα του αγωγού, αλλά και από την επιλογή του χαρακτηριστικού μήκους ℓ .

Στους κυλινδρικούς αγωγούς (σωλήνες), η κάθετη στη ροή διατομή είναι κυκλική και ως χαρακτηριστικό μήκος επιλέγεται η (εσωτερική) διάμετρος d . Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu} = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (3.6)$$

Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds είναι περίπου ίσος με 2100. Άρα:

Στους κυλινδρικούς αγωγούς η ροή είναι στρωτή για $Re < 2100$. Ακολουθεί μια **μεταβατική περιοχή** που η ροή μετατρέπεται σταδιακά σε τυρβώδη ($2100 < Re < 4000$ περίπου). Για μεγαλύτερες τιμές του Re ($Re > 4000$) η ροή είναι **τυρβώδης**. (Διαμορφώνοντας ειδικές συνθήκες, επιτυγχάνομε στρωτή ροή και για τιμές Re λίγο μεγαλύτερες από 2100).

Για σωλήνες μη κυκλικής διατομής, χρησιμοποιούμε την έννοια της ισοδύναμης διαμέτρου και

εφαρμόζομε ό,τι και στους σωλήνες κυκλικής διατομής που μόλις είδαμε. Η **ισοδύναμη (ή υδραυλική) διάμετρος** (equivalent diameter) ισούται με:

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{L} \quad (3.6a)$$

όπου: A το εμβαδόν διατομής του αγωγού κάθετης στη ροή και L η (εσωτερική) περίμετρος της διατομής (για ανοιχτούς αγωγούς, το τμήμα της που βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό). Χρησιμοποιώντας ως χαρακτηριστικό μήκος την ισοδύναμη διάμετρο, ο κρίσιμος αριθμός Reynolds παραμένει ίσος μ' αυτόν των κυλινδρικών αγωγών.

Σε **σωλήνες τετραγωνικής διατομής**, η ισοδύναμη διάμετρος προκύπτει ίση με την πλευρά a της διατομής ($d_h = 4a^2/4a = a$). Άρα το χαρακτηριστικό μήκος είναι η πλευρά a και ο κρίσιμος αριθμός Reynolds ισούται με 2100.

Για **ροή πάνω από επίπεδη πλάκα**, αν ως χαρακτηριστικό μήκος θεωρηθεί η απόσταση από την ακμή εισόδου του ρευστού στην πλάκα, ο κρίσιμος αριθμός Reynolds είναι περίπου: $Re = 5 \cdot 10^5$ (επηρεάζεται και από την τραχύτητα της επιφάνειας) και η ροή είναι πλήρως τυρβώδης για $Re > 5 \cdot 10^6$.

Αλλά και στην περιοχή της τυρβώδους ροής, τα φαινόμενα στροβιλισμού δεν είναι ομοιόμορφα. Αυτά, γίνονται εντονότερα όσο αυξάνεται ο αριθμός Reynolds (αυξάνεται η ένταση πεδίου και ο βαθμός στροβιλισμού).

Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται συνήθως για ολόκληρο το ρεύμα και όχι για κάποιο σημείο. Επομένως στην εξίσωση (3.5) το v είναι η μέση ταχύτητα ροής. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες μας ενδιαφέρει η τοπική τιμή του αριθμού Reynolds (όπως το είδος της ροής στο οριακό στρώμα που εξετάζεται στη συνέχεια). Για τον υπολογισμό της τοπικής τιμής του, χρησιμοποιείται η τοπική ταχύτητα.

Από την εξίσωση (3.5) βλέπομε πως η στρωτή ροή ευνοείται σε μικρές ταχύτητες ρευστού, σε αγωγούς μικρής διατομής και σε υγρά με μεγάλο ιξώδες (όταν η συνεκτικότητα είναι μεγάλη δημιουργούνται πιο δύσκολα στροβιλισμοί).

Στα περισσότερα φαινόμενα ροής ρευστών (στη φύση και στην παραγωγική διαδικασία), η ροή είναι τυρβώδης.

3.1.5 Ροή σε οριακό στρώμα.

Στην παράγραφο 3.1.2 είδαμε την κατανομή ταχυτήτων ρευστού που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο πλάκες με μικρή απόσταση μεταξύ τους, εκ των οποίων

η πάνω κινείται συμπαρασύροντας το ρευστό. Η ροή ήταν στρωτή, η κατανομή ταχυτήτων γραμμική και η διαφορική κλίση ταχύτητας (dv/dy) σταθερή.

Στην περίπτωση ροής σε αγωγό, η κατάσταση είναι πολύ πιο σύνθετη. Το ρευστό ρέει πάνω απ' το ακίνητο τοίχωμα και δεν υπάρχει κινούμενη πλάκα επί της οποίας ασκούμε τη διατμητική τάση. Η **διατμητική τάση**, η αναγκαία για τη ροή ρευστού σε αγωγούς σταθερής διατομής, **οφείλεται στη διαφορά πίεσης** (ή και στην **υψομετρική διαφορά**, προκειμένου για αγωγούς ευρισκόμενους υπό κλίση). Πιο συγκεκριμένα, **σε οριζόντιους αγωγούς σταθερής διατομής, η πίεση μειώνεται κατά μήκος του αγωγού** και κατά τη φορά της ροής, εξασφαλίζοντας έτσι την αναγκαία διατμητική τάση για την υπερνίκηση της αντιστάσεως λόγω τριβών. Η σιβάδα του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή με το τοίχωμα, κινείται με μηδενική ταχύτητα. Η ταχύτητα αυξάνει σταδιακά στις επόμενες σιβάδες και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποια απόσταση από το τοίχωμα. Την περιοχή αυτή την ονομάσαμε **οριακό στρώμα** (βλ. παράγρ. 3.1.1). Ο σχηματισμός και η συμπεριφορά του οριακού στρώματος, έχουν σημασία όχι μόνο στην αντιμετώπιση των προβλημάτων ροής, αλλά και σε άλλα φαινόμενα μεταφοράς (με σημαντικότερο, τη μεταφορά θερμότητας).

As δούμε τώρα τη διαμόρφωση του οριακού στρώματος, την κατανομή ταχυτήτων σε αυτό, καθώς και τις διαφορές που παρουσιάζονται, ανάλογα με το αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης.

1) Ροή πάνω σε επίπεδη πλάκα.

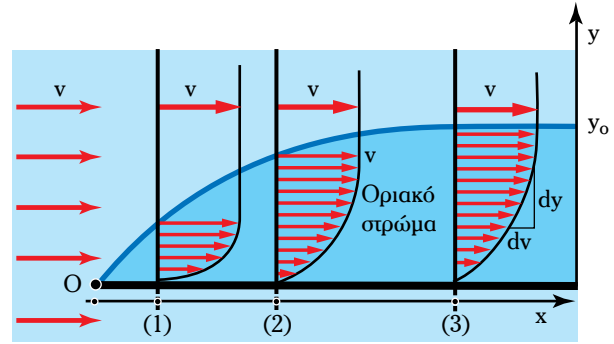
Όταν ρευστό ρέει πάνω σε επίπεδη πλάκα το είδος της ροής διαφοροποιείται ανάλογα με τις συνθήκες. Διακρίνουμε τα εξής δύο είδη ροών.

1) **Στρωτή ροή:** Σε πεδίο ροής βρίσκεται ακίνητη επίπεδη πλάκα, τοποθετημένη παράλληλα με τις γραμμές ροής (σχ. 3.1α). Η ροή είναι στρωτή και η ταχύτητα του ρευστού πριν την πλάκα είναι ομοιόμορφη και ίση με v .

Η ταχύτητα της στοιχειώδους σιβάδας του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή με την επιφάνεια της πλάκας, όπως είδαμε, είναι μηδενική (συνθήκη μη ολισθήσεως).

Η ταχύτητα αυξάνει στις επόμενες σιβάδες με την αύξηση της αποστάσεως y από την πλάκα (όπως φαίνεται στο σχ. 3.1α). Σε κάποια απόσταση y_0 αποκτά τη σταθερή τιμή v . Η περιοχή μεταβολής της ταχύτητας αποτελεί το οριακό στρώμα.

Πάχος του οριακού στρώματος y_0 καλείται η



Σχ. 3.1α

Οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα (στρωτή ροή).

απόσταση από το τοίχωμα, στην οποία αποκαθίσταται η μέγιστη ταχύτητα v .

Στο σχήμα 3.1α έχουμε σημειώσει την κατανομή ταχυτήτων σε τρεις εγκάρσιες διατομές που απέχουν αποστάσεις x_1 , x_2 και x_3 από την ακμή εισόδου του ρευστού στην πλάκα.

Παρατηρούμε πως το πλάτος του οριακού στρώματος (η απόσταση y_0) αυξάνει με την αύξηση της αποστάσεως x από την ακμή εισόδου. Για $x = 0$, $y_0 = 0$. Κοντά στην ακμή εισόδου του ρευστού στην πλάκα, το πλάτος αυξάνεται με σχετικά γρήγορους ρυθμούς. Οι ρυθμοί μειώνονται καθώς απομακρυνόμαστε από την ακμή εισόδου.

Με την προϋπόθεση πως ο αριθμός Reynolds παραμένει μικρότερος της κρίσιμης τιμής, η ροή είναι στρωτή. (Όταν εξετάζουμε τη διαμόρφωση του οριακού στρώματος, η απόσταση x από την ακμή εισόδου αποτελεί το χαρακτηριστικό γεωμετρικό μέγεθος που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του αριθμού Reynolds: $Re = v \cdot x / \nu$. Κατά συνέπεια, ο αριθμός Reynolds αυξάνεται με την απομάκρυνση από την ακμή εισόδου της πλάκας. Η κρίσιμη τιμή του είναι $5 \cdot 10^5$. Εδώ: $Re < 5 \cdot 10^5$).

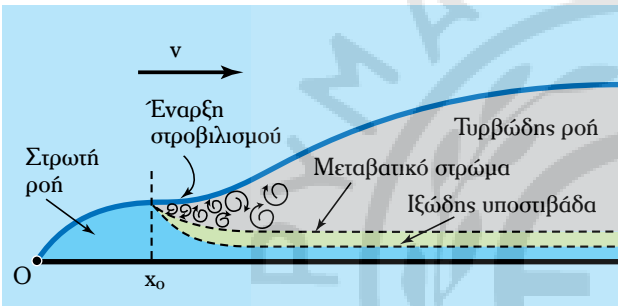
Στη στρωτή ροή, η κατανομή ταχυτήτων σε συνάρτηση με την απόσταση από το τοίχωμα, όταν πλέον το οριακό στρώμα έχει σταθεροποιηθεί, φαίνεται στο σχήμα 3.1α. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται πως καθώς απομακρυνόμαστε από το τοίχωμα η διαφορική κλίση ταχύτητας dv/dy , τείνει στο μηδέν. (Θεωρητικά, η ταχύτητα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της v , σε άπειρη απόσταση από την πλάκα. Ως πλάτος y_0 του οριακού στρώματος δεχόμαστε συνήθως την απόσταση στην οποία η ταχύτητα είναι το 99% της μέγιστης).

2) **Τυρβώδης ροή:** Αν η ομοιόμορφη ταχύτητα v είναι επαρκώς μεγάλη, καθώς το ρευστό ρέει πάνω από τη βυθισμένη πλάκα και υφίσταται την αντίσταση από την επιφάνειά της, η ροή μπορεί να γίνει τυρβώ-

δης. Αυτό θα συμβεί όταν ο αριθμός Reynolds του ρεύματος πάνω από την πλάκα θα υπερβεί την κρίσιμη τιμή ($Re > 5 \cdot 10^5$). Επειδή χαρακτηριστικό γεωμετρικό μέγεθος είναι η απόσταση από την ακμή εισόδου, ο αριθμός Reynolds ξεκινά από την τιμή 0 (για $x = 0$) και αυξάνεται με την αύξηση του x . Η έναρξη του στροβιλισμού θα γίνει σε κάποια απόσταση x_0 από την ακμή (σχ. 3.1ιβ) για την οποία θα ισχύει:

$$\frac{v \cdot x}{\nu} = 5 \cdot 10^5$$

Για το τμήμα της πλάκας που βρίσκεται πριν το x_0 , η ροή είναι στρωτή. Η περιοχή αμέσως μετά το x_0 καθίσταται η έδρα δημιουργίας στροβίλων, οι οποίοι παρασύρονται συνεχώς προς τα πίσω (κατά τη διεύθυνση της ροής).



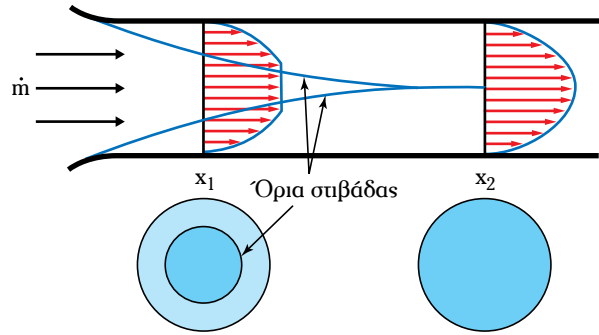
Σχ. 3.1ιβ

Οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα (τυρβώδης ροή).

Η έναρξη στροβιλισμού έχει ως αποτέλεσμα την απότομη και σημαντική αύξηση του πάχους του οριακού στρώματος. Υπολογισμοί και πειραματικές μετρήσεις έδειξαν ότι στο τμήμα πριν την έναρξη του στροβιλισμού, το πάχος της σιβάδας είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας της αποστάσεως από την ακμή εισόδου ($x^{1/2}$). Αμέσως μετά την έναρξη του στροβιλισμού και για μικρό διάστημα, καθίσταται ανάλογο του $(x^{1/2})^3 = x^{3/2}$. Αυτή η απότομη διεύρυνση του οριακού στρώματος οφείλεται στην εγκάρσια κίνηση που συνεπάγεται ο σχηματισμός στροβίλων.

2) Ροή σε σωλήνα.

Όταν το ρευστό εισέρχεται σε κυλινδρικό αγωγό (σωλήνα) διαμορφώνεται, κατά παρόμοιον τρόπο, οριακό στρώμα. Λόγω της γεωμετρίας του αγωγού, το οριακό στρώμα διαμορφώνεται περιμετρικά, όπως φαίνεται στις προβολές των διατομών του σχήματος 3.1ιγ. Το πάχος του είναι μικρό κοντά στην είσοδο (διατομή σε απόσταση x_1 από την είσοδο), αλλά σε κάποια απόσταση απ' αυτήν, όταν πλέον η ροή στο



Σχ. 3.1ιγ

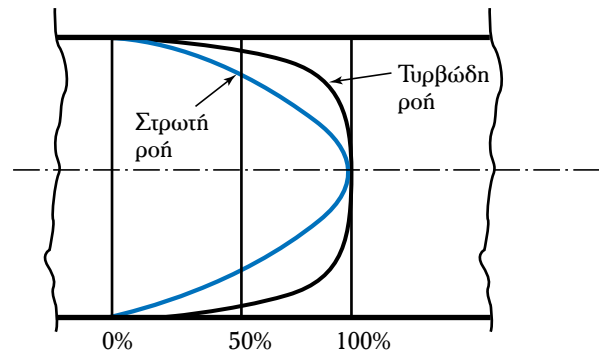
Οριακό στρώμα σε σωλήνα.

σωλήνα έχει αναπτυχθεί πλήρως, το οριακό στρώμα καλύπτει όλο τον αγωγό (διατομή στο x_2). Στη θέση αυτή το πάχος του οριακού στρώματος ισούται με την ακτίνα του σωλήνα ($y_0 = d/2$) και δεν γίνεται να επεκταθεί άλλο. Πειραματικές μετρήσεις έδειξαν ότι σε απόσταση μεγαλύτερη από το x_2 , η κατανομή ταχυτήτων παραμένει αμετάβλητη.

Η περιοχή του σωλήνα από την είσοδο ως το x_2 , στο οποίο ολοκληρώνεται και σταθεροποιείται το οριακό στρώμα, καλείται **μεταβατική περιοχή**.

Αν ο αριθμός Reynolds είναι μικρότερος της κρίσιμης τιμής ($Re < 2100$), η ροή στο σωλήνα είναι στρωτή. Για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds ($Re > 4000$), η ροή είναι τυρβώδης. Στην πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνα (δηλ. σε απόσταση από την είσοδο μεγαλύτερη του x_2), η κατανομή ταχυτήτων σε συνάρτηση με την απόσταση απ' το τοίχωμα, είναι διαφορετική στη στρωτή και στην τυρβώδη ροή.

Το σχήμα 3.1ιδ παριστάνει γραφικά την τιμή της τοπικής ταχύτητας σαν ποσοστό της μέγιστης για τη στρωτή και την τυρβώδη ροή. Παρατηρούμε πως στη στρωτή ροή, η κατανομή ταχυτήτων είναι πιο ομαλή από την αντίστοιχη κατανομή στην τυρβώδη. Στη στρωτή ροή, η ύπαρξη μόνο των διατμητικών δυνά-



Σχ. 3.1ιδ

Κατανομή ταχυτήτων.

μεων που οφείλονται στο ιξώδες, οδηγεί σε ομαλή και βαθμιαία μεταβολή της ταχύτητας. **Υπολογίστηκε πως η μέση ταχύτητα στην περίπτωση της στρωτής ροής ισούται με το 50% της μέγιστης ($v = v_{max}/2$).** Στην τυρβώδη ροή, οι τοπικές ταχύτητες αυξάνουν πολύ σε μικρή απόσταση απ' τα τοιχώματα του αγωγού, ενώ η κατανομή στην κεντρική περιοχή του αγωγού είναι σχεδόν ομοιόμορφη. Ως αποτέλεσμα μιας τέτοιας κατανομής, η μέση ταχύτητα είναι σημαντικά μεγαλύτερη από το μισό της μέγιστης και μπορεί να φθάσει (ανάλογα με την ένταση και το βαθμό στροβιλισμού), ακόμη και στο 80% της μέγιστης ταχύτητας.

3.1.6 Ροή γύρω από στερεά – Οπισθέλκουσα (drag) δύναμη.

Σε προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε πώς δημιουργείται οριακό στρώμα όταν ρευστό κινούμενο με ταχύτητα v συναντά επίπεδη πλάκα τοποθετημένη παράλληλα με τη διεύθυνση της ροής (σχ. 3.1.1α). Πρόκειται για μια διαταραχή της ροής που διαφοροποιεί τις τοπικές ταχύτητες και στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, οδηγεί σε δημιουργία στροβιλισμών. Όταν το ρευστό διαπλεύσει την πλάκα, η διαταραχή διατηρείται για ένα διάστημα, αλλά οι στροβιλισμοί σταδιακά εξασθενούν (λόγω της εσωτερικής τριβής) και σε κάποια απόσταση από την πλάκα, η ροή επανέρχεται στην αρχική της μορφή.

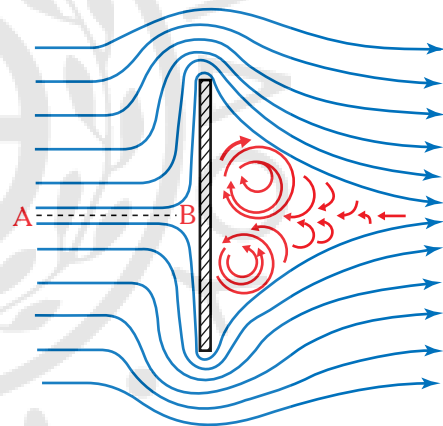
As εξετάσουμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία το ρευστό συναντά στην πορεία του ακίνητη πλάκα τοποθετημένη κάθετα στη διεύθυνση ροής. Αν και η ροή πριν την πλάκα είναι στρωτή, οι στοιχειώδεις μάζες του ρευστού πλησιάζοντας αλλάζουν διεύθυνση για να παρακάμψουν το εμπόδιο. (Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική – και θα αναπτύξουμε στο Έκτο Κεφάλαιο – για την αλλαγή της διευσθσεως, άρα τη μεταβολή της ορμής, πρέπει να ασκηθεί η κατάλληλη ώθηση). Όταν μια στοιχειώδης μάζα φθάσει στην ακμή της πλάκας, λόγω της ορμής που έχει, δεν δύναται να στραφεί και να κινηθεί πίσω από την πλάκα και σε επαφή μ' αυτή, αλλά συνεχίζει την πορεία της (σχ. 3.1.1ε). Πίσω λοιπόν από την πλάκα τείνει να δημιουργηθεί κενό και η πίεση γίνεται πολύ μικρή. Λόγω της υποπίεσεως, θα αναρροφηθεί κάποια ποσότητα οπισθοδρομούντος ρευστού και θα δημιουργηθούν μεγάλοι στρόβιλοι (αντίθετης περιστροφής). Αυτοί καταναλώνουν σημαντική ενέργεια.

Λόγω της διαφοράς πίεσεως μεταξύ των δύο πλευρών της, η πλάκα θα δέχεται δύναμη κατά τη διεύθυνση και τη φορά του ρεύματος (και κατά το σχή-

μα δράσεως-αντιδράσεως, θα ασκεί επί του ρευστού δύναμη ίση και αντίθετη).

Οπισθέλκουσα δύναμη καλείται η κατά τη διεύθυνση και φορά της ροής δύναμη που εξασκεί το ρευστό σε στερεό που συναντά στη ροή του. Στην περίπτωση της επίπεδης πλάκας τοποθετημένης παράλληλα στη διεύθυνση ροής, η μόνη οπισθέλκουσα δύναμη, είναι η δύναμη διατμήσεως του τοιχώματος (**οπισθέλκουσα δύναμη τοιχώματος**). Τώρα που η πλάκα είναι κάθετη ως προς τη ροή, η οπισθέλκουσα δύναμη (που είναι πολύ μεγαλύτερη) οφείλεται στη διαφορά πίεσεως, η οποία διαμορφώνεται μεταξύ εμπρόσθιας και οπίσθιας πλευράς της πλάκας (**οπισθέλκουσα δύναμη μορφής**).

Η γραμμή ροής AB του σχήματος 3.1.1ε χωρίζει το ρευστό σε δύο μέρη, ένα που περιρρέει την πάνω πλευρά του εμποδίου και ένα την κάτω. Στο σημείο B (που ονομάζεται **σημείο ανακοπής** ή **στασιμότητας**) (stagnation point) η ταχύτητα είναι μηδέν και η πίεση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή (βλ. παράγρ. 3.5.3).



Σχ. 3.1.1ε
Ροή γύρω από κάθετη.

Το φαινόμενο της **αποκολλήσεως του ρευστού** από τη στερεά επιφάνεια και της δημιουργίας στροβίλων, παρατηρείται όταν το ρευστό, έχοντας κάποια αξιόλογη ταχύτητα, περιρρέει σώματα με απότομη αλλαγή της κλίσεώς τους στην πίσω πλευρά (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, σφαίρα κ.ά.), αλλά και όταν αλλάζει απότομα η διεύθυνση του αγωγού ροής (απότομη στροφή, απότομη διαστολή ή συστολή κ.ά.).

Λόγω της απώλειας ενέργειας που συνεπάγεται και της οπισθέλκουσας δυνάμεως που δημιουργείται, το φαινόμενο είναι ανεπιθύμητο. Προσπαθούμε λοιπόν να μειώσουμε την έντασή του, αποφεύγοντας τις απότομες αλλαγές διευσθσεως στους αγωγούς

και δίνοντας το κατάλληλο σχήμα, κυρίως στο πίσω μέρος στερεών σωμάτων που περιρρέει το ρευστό (**ρευσοδυναμικό σχήμα**).

Η οπισθέλκουσα δύναμη είναι ίση και αντίθετη με την αντίσταση του σώματος στη ροή. Το μέτρο της είναι ανάλογο του εμβαδού προβολής του σώματος σε επιφάνεια κάθετη στη ροή, της πυκνότητας του ρευστού και του τετραγώνου της σχετικής ταχύτητας:

$$F_D = C_D \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \cdot A \quad (3.7)$$

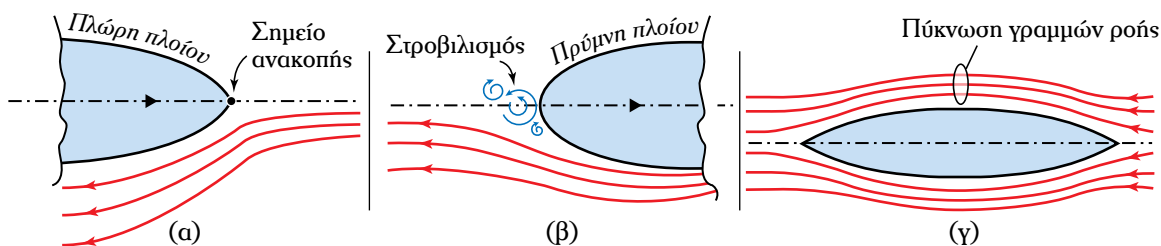
Ο C_D καλείται **συντελεστής οπισθέλκουσας** και

εξαρτάται απ' το σχήμα του σώματος [όσο πιο ρευσοδυναμικό είναι το σχήμα, τόσο μικρότερος είναι ο C_D (πίν. 3.1)], αλλά και απ' τον αριθμό Reynolds. Πιο συγκεκριμένα στην περιοχή της στρωτής ροής ο συντελεστής οπισθέλκουσας ενός σώματος μειώνεται με την αύξηση του Re , στην περιοχή της τυρβώδους παρουσιάζεται σχετικά σταθερός (κι αυτήν την τιμή καταγράφουν οι σχετικοί πίνακες). Αλλά για πολύ μεγάλες τιμές του Re , ο C_D παρουσιάζει απότομη πτώση.

Στο σχήμα 3.1ιστ φαίνονται οι γραμμές ροής του θαλασσινού νερού στην πλώρη, στην πρύμνη και γύρω από την ίσαλο επιφάνεια πλοίου. Με τις μορ-

Πίνακας 3.1
Συντελεστές οπισθέλκουσας για διάφορα σώματα.

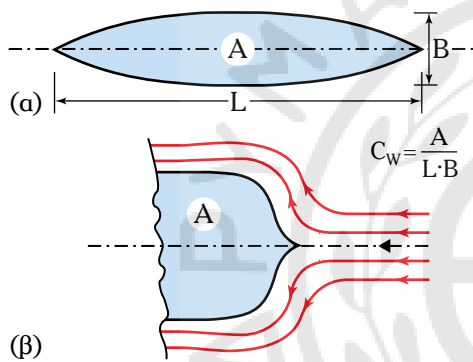
Σώμα	Εμβαδόν	Αναλογία διαστάσεων	C_D
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	L/d = 1 L/d = 2 L/d = 4	0,91 0,85 0,87
	d · L	L/d = 1 L/d = 2 L/d = 5 L/d = 10 L/d = 40	0,65 0,68 0,74 0,82 0,98
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$		0,34
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$		1,33
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	α = 60° α = 30°	0,51 0,34



Σχ. 3.1ιστ

φές αυτές επιδιώκουμε την μικρότερη δυνατή αντίσταση κατά την κίνηση του σώματος στο ρευστό.

Κατά τη σχεδίαση πλοίων η ροή του νερού γύρω από αυτά έχει ιδιαίτερη σημασία διότι από αυτήν οι παράμετροι που σχετίζονται με τις αντιστάσεις που αναπτύσσονται καθορίζουν την ισχύ της προωστικής εγκαταστάσεως και το μέγεθος του μηχανοστασίου και προφανώς την οικονομικότερη εκμετάλλευση του πλοίου. Ο συντελεστής μορφής της ισάλου επιφάνειας C_w καθορίζει το πόσο «λεπτή» θα είναι η ισάλος πλεύσεως [σχ. 3.1ζ(α)] και σχετίζεται άμεσα με την ταχύτητα και την ευστάθεια του πλοίου. Όσο ο C_w τείνει στην μονάδα (π.χ. δεξαμενόπλοια) μεγαλώνει και η παραμόρφωση των γραμμών ροής γύρω από την ισάλο επιφάνεια [σχ. 3.1ζ(β)] και η αντίσταση κατά την κίνηση γίνεται μεγαλύτερη.



Σχ. 3.1ζ

3.2 Οι βασικές εξισώσεις ροής.

Στην προηγούμενη παράγραφο προσεγγίσαμε το φαινόμενο της ροής από τη σκοπιά της συμπεριφοράς των στοιχειωδών ποσοτήτων του και της αλληλεπίδρασης τόσο μεταξύ τους, όσο και με τα τοιχώματα των αγωγών ροής ή άλλων σωμάτων που συναντούν καθώς ρέουν. Η (μικροσκοπική) προσέγγιση της ροής είναι εξαιρετικά χρήσιμη, ώστε να κατανοηθούν οι μηχανισμοί της και τα επιμέρους φαινόμενα που συνδέονται μ' αυτήν. Όπως είπαμε όμως, η πολυπλοκότητα του φαινομένου θέτει σημαντικούς φραγμούς στην πρακτική αντιμετώπιση των σημαντικότερων προβλημάτων ροής που συναντάμε στην παραγωγική διαδικασία. Για να ξεπεράσουμε τις δυσκολίες και τα αδιέξοδα που τείνουν να εμφανιστούν, απαιτείται και μία πιο μακροσκοπική προσέγγιση. Σ' αυτήν, δεν θα επικεντρώσουμε στη συμπεριφορά των στοιχειωδών ποσοτήτων, αλλά στην αλληλεπίδραση μίας σχετικά μεγάλης ποσότητας ρέοντος ρευστού

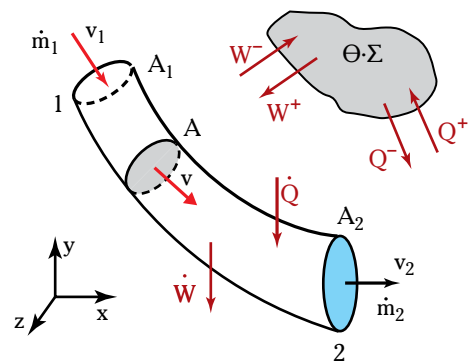
με το περιβάλλον του. Δηλαδή, από τη «διαφορική» προσέγγιση περνάμε στην «ολοκληρωτική» θεώρηση (αξιοποιώντας φυσικά τα συμπεράσματα της πρώτης). Έτσι, αξιοποιούνται οι νόμοι διατηρήσεως της φυσικής και προκύπτουν πολύτιμες και άμεσα αξιοποιήσιμες σχέσεις (ισοζύγια μάζας, ενέργειας, ορμής).

Όγκος ελέγχου ροής: Από την εξέταση του πεδίου ροής και της συμπεριφοράς μιας στοιχειώδους ποσότητας ρευστού που διέρχεται από κάποιο σημείο του, περνάμε στην εξέταση ενός τμήματος του πεδίου ροής, ενός **όγκου ελέγχου ροής** όπως ορίστηκε στην παράγραφο 3.1.1.

Ο όγκος ελέγχου είναι έννοια αντίστοιχη με το «ανοικτό σύστημα» της θερμοδυναμικής: Δεν εξετάζουμε τι ακριβώς συμβαίνει εντός του, αλλά την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με το περιβάλλον του. Τις συμβάσεις που κάνουμε για το θερμοδυναμικό σύστημα θα τις ακολουθήσουμε και στη μελέτη του όγκου ελέγχου. Έτσι, η θερμότητα που τυχόν μεταφέρεται από το περιβάλλον προς τον όγκο ελέγχου και το έργο που μεταφέρεται από τον όγκο ελέγχου προς το περιβάλλον, θα θεωρηθούν θετικά μεγέθη και οι αντίθετες ενεργειακές ροές, αρνητικά (σχ. 3.2). Τα όρια του όγκου ελέγχου ορίζονται «αυθαίρετα» από το μελετητή (ανάλογα με τις ανάγκες του προς αντιμετώπιση προβλήματος).

Έστω λοιπόν ο όγκος ελέγχου του σχήματος 3.2. Επειδή μας ενδιαφέρει κατά κύριο λόγο η μονοδιάστατη ανάλυση, τον επλέξαμε έτσι ώστε να αποτελεί τμήμα ροϊκού σωλήνα. Υπάρχει μία είσοδος (1) με εμβαδόν διατομής (κάθετης στη ροή) A_1 και μέση ταχύτητα ρευστού v_1 και μία έξοδος (2) με εμβαδόν διατομής A_2 και μέση ταχύτητα v_2 . Δεν υπάρχει ροή ρευστού διά μέσου της πλευρικής επιφάνειας ελέγχου.

Αξιοποιώντας τον όγκο ελέγχου που ορίσαμε, μπορούμε να καταστρώσουμε τα ισοζύγια μάζας και ενέργειας.



Σχ. 3.2

Όγκος ελέγχου.

3.3 Εξίσωση (αρχή) της συνέχειας (continuity equation).

1) Ισοζύγιο μάζας στη μονοδιάστατη ροή.

Σε πεδίο μονοδιάστατης ροής, θεωρούμε στοιχειώδη όγκο ελέγχου dV με μήκος ds , εμβαδόν διατομής εισόδου κάθετου στη ροή A_1 και αντίστοιχο εμβαδόν εξόδου A_2 , ο οποίος αποτελεί στοιχειώδες τμήμα ροϊκού σωλήνα (σχ. 3.3α). Έστω v_1 η ταχύτητα εισόδου ρευστού στον όγκο ελέγχου και v_2 η ταχύτητα εξόδου. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, καθαρή ροή θα υπάρχει μόνο κατά μία διεύθυνση. Επειδή η απόσταση εισόδου και εξόδου στον όγκο ελέγχου είναι απειροστή (ds), θα είναι:

$$A_1 = A_2 = A$$

Το ισοζύγιο μάζας θα είναι:

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow \dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$$

$$\dot{m}_{\text{εισ}} = \dot{m}_{\text{εξ}} + d\dot{m}$$

όπου: $\dot{m}_{\text{εισ}}$ η στοιχειώδης μάζα που εισέρχεται στον όγκο ελέγχου σε χρόνο dt (παροχή μάζας εισόδου: $\dot{m}_{\text{εισ}} = dm_{\text{εισ}}/dt$), $\dot{m}_{\text{εξ}}$ η αντίστοιχη ποσότητα για την έξοδο και $d\dot{m}$ η μάζα που αποθηκεύεται στον όγκο ελέγχου ανά μονάδα χρόνου [ρυθμός αποθηκείωσης: $d\dot{m} = (dm_{\text{εξ}} - dm_{\text{εισ}})/dt$].

Η εισερχόμενη παροχή μάζας είναι:

$$\dot{m}_{\text{εισ}} = \dot{V}_{\text{εισ}} \cdot \rho_1 = \frac{ds \cdot A}{dt} \cdot \rho_1 = \rho_1 \cdot v_1 \cdot A$$

ή $\dot{m}_{\text{εισ}} = \rho_1 \cdot v_1 \cdot A$

Αντίστοιχα, $\dot{m}_{\text{εξ}} = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A$ και η μεταβολή μάζας ανά μονάδα χρόνου: $d\dot{m} = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A - \rho_1 \cdot v_1 \cdot A$.

Η συσσώρευση μάζας στον όγκο ελέγχου dV , οδηγεί σε μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού:

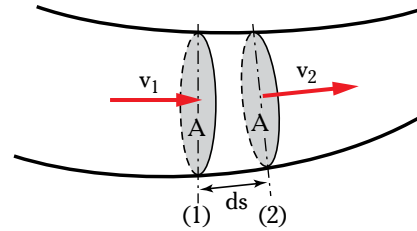
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\dot{m}_{\text{εισ}} - d\dot{m}_{\text{εξ}}}{dV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d\dot{m}}{dV} = \frac{\rho_1 \cdot v_1 \cdot A - \rho_2 \cdot v_2 \cdot A}{A \cdot ds} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1 \cdot v_1 - \rho_2 \cdot v_2}{ds} = \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow \frac{d(\rho \cdot v)}{ds} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (3.8)$$

Η εξίσωση (3.8) εκφράζει την Αρχή Διατηρήσεως της Μάζας στην περίπτωση της μονοδιάστατης (μόνιμης ή μεταβλητής) ροής.

Στη γενικότερη (και μεγαλύτερης ακρίβειας) θε-



Σχ. 3.3α

ώρηση της ροής ως τρισδιάστατης, η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (3.8a)$$

2) Μόνιμη ροή.

Στη **μόνιμη** (steady flow) ή **σταθερή ροή**, το ισοζύγιο μάζας απλοποιείται: Η παροχή της εισερχόμενης μάζας στον όγκο ελέγχου ισούται με την παροχή της εξερχόμενης μάζας του ρευστού. Αυτό προκύπτει άμεσα, αφού είναι αδύνατο να αυξάνει ή να μειώνεται συνεχώς η μάζα του ρευστού που βρίσκεται στον όγκο ελέγχου. Εξάλλου και από τον ορισμό της μόνιμης ροής, γνωρίζουμε πως η πυκνότητα σε κάποιο σημείο δεν μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο. Για τον στοιχειώδη όγκο ελέγχου θα ισχύουν κατά συνέπεια:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{d\dot{m}}{dV} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d\dot{m}}{dV} = 0 \quad \text{ή} \quad d\dot{m} = 0 \quad \text{ή} \quad \dot{m} = C$$

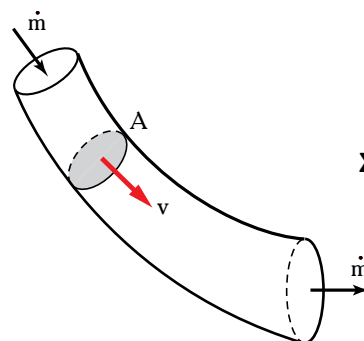
$$\text{ή} \quad \dot{m}_{\text{εισ}} = \dot{m}_{\text{εξ}} = \dot{m} = \rho \cdot v \cdot A.$$

Γενικεύοντας για ρευματικό σωλήνα και λαμβάνοντας επιφάνεια A_i κάθετη στη ροή, στην οποία η μέση ταχύτητα είναι v_i και η πυκνότητα ρ_i :

$$\dot{m} = \rho_i \cdot v_i \cdot A_i = \text{σταθ} \quad \text{ή} \quad \dot{m} = \dot{V}_i / u_i \quad (3.9)$$

όπου: u_i ο ειδικός όγκος $u_i = \frac{1}{\rho_i}$.

Δηλαδή στη μόνιμη ροή η παροχή μάζας παραμένει σταθερή (σχ. 3.3β).



Σχ. 3.3β

Η εξίσωση (3.9) (εξίσωση συνέχειας) εκφράζει την Αρχή Διατηρήσεως της Μάζας στην περίπτωση της μόνιμης ροής (συμπιεστών και ασυμπίεστον ρευστών).

Σημείωση: Για να ισχύει η εξίσωση (3.9), χρησιμοποιούμε τη μέση ταχύτητα που έχει το ρευστό στην (κάθετη στη ροή) επιφάνεια A και υποθέτουμε σταθερή την πυκνότητα σε όλα τα σημεία της επιφάνειας αυτής.

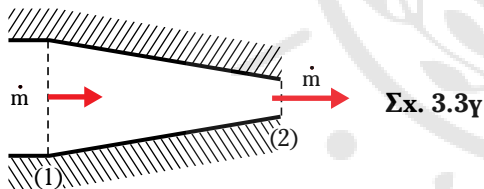
3) Μόνιμη ροή ασυμπίεστον ρευστού.

Το ασυμπίεστο ρευστό έχει πρακτικά σταθερή πυκνότητα. Από την εξίσωση (3.9) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \dot{m} &= \rho \cdot v_i \cdot A_i \\ \dot{m} &= \rho \cdot \dot{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot v_i \cdot A_i \quad \text{ή} \quad \dot{V} = v_i \cdot A_i = C \quad (3.10)$$

Παράδειγμα 1

Στο ακροφύσιο του σχήματος 3.3γ, στο οποίο καταλήγει σωλήνας διαμέτρου 18 cm, θέλουμε να έχουμε ταχύτητα εξόδου νερού 12 m/s. Αν η διάμετρος στην έξοδο είναι 6 cm, να υπολογισθούν: α) Η ταχύτητα που πρέπει να έχει το νερό μέσα στον σωλήνα. β) Πόσα kg νερού θα εκτοξεύονται σε 10 min και γ) το είδος ροής στον σωλήνα.



Σχ. 3.3γ

Λύση.

Δεδομένα: $v_2 = 12 \text{ m/s}$,
 $d_1 = 18 \text{ cm} = 0,18 \text{ m}$, και
 $d_2 = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$

Ζητούμενα: v_1 , $\dot{m} = \text{kg}/10 \text{ min}$,
 είδος ροής σωλήνα.

α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας στη διατομή 2:

$$V = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow V = 0,0339 \text{ m}^3/\text{s} \quad (=122 \text{ m}^3/\text{h})$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας στη διατομή 1:

$$v_1 = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 1,33 \text{ m/s}$$

$$[\text{Επίσης: } \dot{V} = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \Rightarrow v_1 = v_2 / 9 = 1,33 \text{ m/s}]$$

β) Για να υπολογίσουμε την ποσότητα (μάζα ή όγκο) που ρέει σε ορισμένο χρόνο, αξιοποιούμε τις σχέσεις ορισμού των παροχών:

$$V = \dot{V} \cdot t \Rightarrow V = 0,0339 \text{ m}^3/\text{s} \cdot 600 \text{ s} \Rightarrow V = 20,34 \text{ m}^3$$

$$\text{Η πυκνότητα του νερού είναι } \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = 20.340 \text{ kg}$$

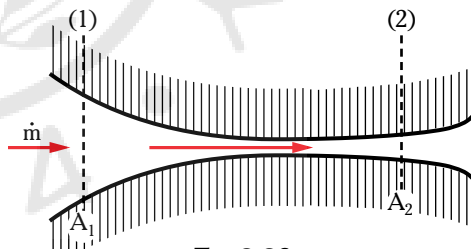
γ) Το είδος της ροής στο σωλήνα καθορίζεται από τον αριθμό Reynolds: $Re = v_1 \cdot d_1/\nu$.

Δεν αναφέρεται θερμοκρασία νερού και υποθέτουμε πως είναι η συνήθης του περιβάλλοντος, οπότε λαμβάνουμε (πίν. 1.2.3) $\mu = 10^{-3} \text{ kg/ms}$ και $\nu = \mu/\rho = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Αντικαθιστώντας: $Re = 2,4 \cdot 10^5$. Άρα η ροή είναι τυρβώδης.

Παράδειγμα 2

Αέρας εισέρχεται σε ακροφύσιο με ταχύτητα 60 m/s, πίεση 10 bar και θερμοκρασία 900 °C και εξέρχεται με πίεση 1 bar και θερμοκρασία 330 °C (σχ. 3.3δ). Αν το εμβαδόν διατομής της εισόδου είναι διπλάσιο από της εξόδου, να υπολογισθεί η ταχύτητα στην έξοδο του ακροφυσίου. (Για τον αέρα ισχύει η καταστατική εξίσωση: $p \cdot v = R \cdot T$ με $R = 0,287 \text{ kJ/kgK}$).



Σχ. 3.3δ

Λύση:

Στα συμπιεστά ρευστά ισχύει η εξίσωση (3.9):

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

$$m = \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad (1)$$

Από την καταστατική εξίσωση, υπολογίζουμε τις πυκνότητες του αέρα στην είσοδο και την έξοδο του προφυσίου:

$$p \cdot v = R \cdot T \Rightarrow p/\rho = R \cdot T \Rightarrow \rho = p/(R \cdot T)$$

$$(p_1 = 10 \text{ bar} = 1000 \text{ kPa},$$

$$T_1 = 900 \text{ °C} = 1173 \text{ K}) \Rightarrow \rho_1 = 2,97 \text{ kg/m}^3$$

$$(p_2 = 1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}, T_2 = 330 \text{ }^\circ\text{C} = 603 \text{ K}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_2 = 0,578 \text{ kg/m}^3$$

Αντικαθιστώντας στην (1): $v_2 = 716 \text{ m/s}$.

4) Μέση ταχύτητα.

Η ταχύτητα σε όλα τα σημεία μιας διατομής ροϊκού σωλήνα κάθετης στη ροή, είναι σταθερή μόνο όταν το ρευστό είναι ιδανικό. Σε διατομές αγωγών που ρέουν πραγματικά ρευστά, αυτό είναι αδύνατο να συμβεί. Όπως είδαμε (παράγρ. 3.1.5), η ταχύτητα σε μια κάθετη διατομή μεταβάλλεται σε όλο το πλάτος του οριακού στρώματος (αυξάνεται με την απόσταση y από το τοίχωμα). Για τους υπολογισμούς της παροχής του ρευστού σε αγωγό [εξισώσεις (3.9) και (3.10)] πρέπει να υπολογίσουμε και να χρησιμοποιήσουμε τη μέση ταχύτητα ροής.

Η παροχή μάζας στο στοιχειώδες εμβαδόν dA , είναι: $\dot{m} = \rho \cdot v_t \cdot dA$, όπου: v_t η τοπική ταχύτητα του ρευστού. Ολοκληρώνοντας για όλο το εμβαδόν της κάθετης επιφάνειας A , παίρνουμε τη συνολική ροή μάζας. Θεωρώντας την πυκνότητα σταθερή σε όλη την έκταση της επιφάνειας A , προκύπτει:

$$\dot{m} = \rho \cdot \int_A v_t \cdot dA \quad (3.11)$$

Παίρνοντας υπόψη την εξίσωση (3.9) και επιλύοντας ως προς τη μέση ταχύτητα v :

$$v = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A} = \frac{1}{A} \cdot \int_A v_t \cdot dA \quad (3.12)$$

Αυτή είναι η μέση ταχύτητα ροής στην επιφάνεια A . Με τη χρήση της αντιμετωπίζουμε ικανοποιητικά το ισοζύγιο μάζας (αλλά όπως θα δούμε, δημιουργούνται κάποια υπολογιστικά προβλήματα στα ισοζύγια ενέργειας και ορμής).

3.4 Ισοζύγιο ενέργειας.

Σύμφωνα με την **Αρχή Διατηρήσεως της Ενέργειας** (ή τον Πρώτο Νόμο της Θερμοδυναμικής), η ενέργεια δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται. Δύναται να αλλάζει μορφές που είναι ποσοτικά ισοδύναμες μεταξύ τους ή να ρέει από σύστημα σε σύστημα.

3.4.1 Μορφές ενέργειας.

Από τη θερμοδυναμική γνωρίζουμε ότι ένα σώμα

είναι φορέας ενέργειας που βρίσκεται αποθηκευμένη στην ύλη του, έχει κινητική ενέργεια (λόγω κινήσεως) και δυναμική ενέργεια (λόγω θέσεως και αλληλεπιδράσεως με άλλα σώματα). Γνωρίζουμε ακόμα πως η ενέργεια δύναται να μεταβιβάζεται από σύστημα σε σύστημα με τη διαμεσολάβηση των ειδικών μορφών μεταφοράς της: του έργου και της θερμότητας.

1) Κινητική ενέργεια ρέοντος ρευστού.

Ένα σώμα κινούμενο με ταχύτητα v έχει κινητική ενέργεια:

$$E_{\text{κιν}} = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

Σε όγκο ελέγχου ροής εισέρχεται στοιχειώδης μάζα ρευστού dm σε χρόνο dt , κινούμενη με τοπική ταχύτητα v . Η κινητική της ενέργεια είναι:

$$E_{\text{κιν}} = dm \cdot \frac{v^2}{2}$$

Παρατηρούμε πως η κινητική ενέργεια στοιχειώδους μάζας m ρευστού είναι **ανάλογη του τετραγώνου της τοπικής ταχύτητας v** .

Στον όγκο ελέγχου ροής, μαζί με τη μάζα εισέρχεται και κινητική ενέργεια με ρυθμό:

$$\frac{E_{\text{κιν}}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \frac{v^2}{2} \Rightarrow \dot{E}_{\text{κιν}} = \dot{m} \cdot \frac{v^2}{2}$$

Η ποσότητα $\dot{m} \cdot \frac{v^2}{2}$ εκφράζει την κινητική **ενέργεια ανά μονάδα χρόνου** (ισχύς) που εισέρχεται στον όγκο ελέγχου.

2) Δυναμική ενέργεια ρέοντος ρευστού.

Εξετάζουμε το φαινόμενο της ροής στο πεδίο βαρύτητας. Κατά συνέπεια η στοιχειώδης μάζα dm , που εισέρχεται στον όγκο ελέγχου ροής έχει δυναμική ενέργεια:

$$E_{\text{δυν,ειο}} = dm \cdot g \cdot y_1$$

όπου g : η επιτάχυνση της βαρύτητας και y_1 το ύψος της εισόδου στον όγκο ελέγχου. Από την έξοδο του όγκου ελέγχου εξέρχεται ποσότητα δυναμικής ενέργειας, που υπολογίζεται από τον ίδιο τύπο.

Η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$\dot{E}_{\text{δυν,ειο}} = \dot{m} \cdot g \cdot y_1$$

3) Εσωτερική ενέργεια ρέοντος ρευστού.

Η αποθηκευμένη στο σώμα ενέργεια ανά μονάδα μάζας, αποτελεί θερμοδυναμική ιδιότητα του σώμα-

τος και καλείται ειδική **εσωτερική ενέργεια** u . Επομένως με την είσοδο της στοιχειώδους μάζας ρευστού dm , στον όγκο ελέγχου εισέρχεται και η εσωτερική της ενέργεια:

$$U = dm \cdot u$$

Η εσωτερική ενέργεια μεταβάλλεται όταν μεταβληθεί η θερμοκρασία του σώματος ($\Delta u = c_v \Delta T$). Σε φαινόμενα μόνιμης ροής ρευστών, στα οποία η θερμοκρασία παραμένει σταθερή (ισοθερμοκρασική ροή), η εσωτερική ενέργεια δεν παίζει ρόλο, αφού όση εισέρχεται στη μονάδα του χρόνου στον όγκο ελέγχου, τόση ακριβώς εξέρχεται από αυτόν. Αλλά και όταν με τις τριβές, ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας, μεταβληθεί σε εσωτερική ενέργεια ασυμπίεστου ρευστού, η ενέργεια αυτή δεν είναι ανακτήσιμη ως μηχανική, λόγω της φύσεως του ρευστού. Άρα θεωρείται ενεργειακή απώλεια.

4) Έργο δυνάμεων πίεσεως.

Οι τρεις μορφές ενέργειας που εξετάσαμε, συνοδεύουν τη ρέουσα μάζα και μαζί μ' αυτήν εισέρχονται και εξέρχονται στον όγκο ελέγχου ροής.

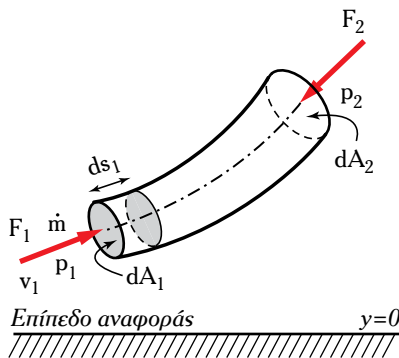
Στο φαινόμενο της ροής όμως, παρουσιάζονται και δυνάμεις που παράγουν ή καταναλώνουν έργο. Αυτές είναι οι δυνάμεις πίεσεως του ρευστού και οι δυνάμεις που αντιστέκονται στη ροή (δυνάμεις τριβής). Οι δυνάμεις αυτές ασκούνται κατά τη διεύθυνση της ροής.

Στην είσοδο του όγκου ελέγχου μονοδιάστατης ροής του σχήματος 3.4α, η δύναμη πίεσεως F_1 είναι ίδιας φοράς με την ταχύτητα ροής v_1 και έχει μέτρο: $F_1 = p_1 \cdot dA$.

Σε χρόνο dt το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται κατά απόσταση:

$$ds = v_1 \cdot dt$$

Άρα το έργο της δυνάμεως πίεσεως είναι:



Σχ. 3.4α

$$W_{p1} = F_1 \cdot ds = p_1 \cdot dA_1 \cdot ds_1 = p_1 \cdot dV_1$$

όπου: dV_1 ο όγκος του ρευστού που διέρχεται από την είσοδο του όγκου ελέγχου στο χρόνο dt . Είναι (από τον ορισμό της παροχής όγκου):

$$W_{p1} = p_1 \cdot dV_1 \quad \dot{W}_{p1} = p_1 \cdot \dot{V}_1 dt \quad \dot{W}_{p1} = p_1 \cdot \dot{V}_1$$

$$\dot{W}_{p1} = \dot{m} \cdot p_1 / \rho_1 \quad \dot{W}_{p1} = \dot{m} \cdot u \cdot p_1$$

Ο τύπος αυτός εκφράζει το **έργο της δυνάμεως πίεσεως** ανά μονάδα χρόνου.

Στη θερμοδυναμική, το άθροισμα της ειδικής εσωτερικής ενέργειας και της ενέργειας πίεσεως ορίζει την ειδική ενθαλπία:

$$h = u + p/\rho = u + p \cdot u$$

Για να υπολογίσουμε το συνολικό έργο των δυνάμεων πίεσεως στον όγκο ελέγχου, πρέπει να εξετάσουμε και το αντίστοιχο έργο της δυνάμεως πίεσεως στην έξοδο του. Εδώ, η (εξωτερική ως προς τον όγκο ελέγχου) δύναμη πίεσεως έχει φορά αντίθετη απ' αυτήν της ταχύτητας και κατά συνέπεια το έργο της είναι αρνητικό:

$$W_{p2} = -F_2 \cdot ds = -p_2 \cdot dA_2 \cdot ds_2 = -p_2 \cdot dV_2$$

Το συνολικό έργο των δυνάμεων πίεσεως είναι:

$$W_p = p_1 \cdot dA_1 \cdot ds_1 - p_2 \cdot dA_2 \cdot ds_2 \quad \dot{W}_p = p_1 \cdot dV_1 - p_2 \cdot dV_2$$

$$\dot{W}_p = p_1 \cdot \dot{V}_1 - p_2 \cdot \dot{V}_2$$

Το έργο αυτό καλείται **έργο μετατοπίσεως** ή **έργο ροής** (flow work).

α) Έργο τριβής.

Κατά τη ροή ιδανικού ρευστού, δεν υπάρχουν τριβές. Αλλά όπως είδαμε, κατά τη ροή πραγματικών ρευστών σε αγωγούς, ασκούνται διατμητικές τάσεις σε όλο το πλάτος του οριακού στρώματος που αντιστέκονται στη ροή. Αυτές οφείλονται στα τοιχώματα των αγωγών (τραχύτητα τοιχωμάτων και δυνάμεις προσφύσεως μεταξύ τοιχώματος και ρευστού), στο ιξώδες των ρευστών, αλλά και στο δινοϊξώδες που παρουσιάζεται στην τυρβώδη ροή. Αυτές οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας, καταναλώνουν έργο W_t που αφαιρείται απ' το σύστημα ροής (**ενεργειακές απώλειες λόγω τριβών**).

Ο υπολογισμός των απωλειών μπορεί να γίνει με την αξιοποίηση του ενεργειακού ισοζυγίου. Στην ειδική (αλλά τόσο σημαντική) περίπτωση μόνιμης

ροής ασυμπίεστου ρευστού σε σωλήνες, υπάρχουν εμπειρικοί τύποι για τον υπολογισμό των απωλειών ενέργειας, οι οποίοι θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο.

β) Έργο αντλίας ή στροβίλου.

Εκτός από το έργο που γίνεται από τον όγκο ελέγχου προς το περιβάλλον λόγω τριβών, είναι πιθανόν να υπάρχει και **έργο προσδιδόμενο** στο σύστημα (π.χ. στα υγρά από μία αντλία, W_p) ή **έργο αφαιρούμενο** από το σύστημα (π.χ. με την παρεμβολή ενός στροβίλου, W_t).

5) Ανταλλαγή θερμότητας.

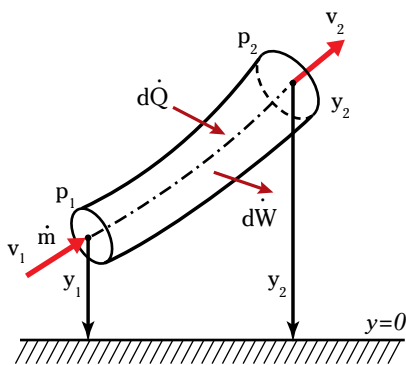
Εάν μεταξύ του ρευστού εντός του όγκου ελέγχου ροής και του περιβάλλοντος υπάρχει διαφορά θερμοκρασίας, τότε υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας. Αν η θερμοκρασία του ρευστού είναι μεγαλύτερη απ' αυτήν του περιβάλλοντος, θερμότητα ρέει από το σύστημα προς το περιβάλλον. Το αντίθετο συμβαίνει αν η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι μεγαλύτερη.

Αν και στο γενικό ισοζύγιο ενέργειας θα συνυπολογισθεί και η ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ ρέοντος ρευστού και περιβάλλοντος, στις εφαρμογές που θα μας απασχολήσουν, **θα θεωρήσουμε πως η ανταλλαγή θερμότητας είναι αμελητέα.**

3.4.2 Ισοζύγιο ενέργειας για μόνιμη ροή.

Θεωρούμε τον στοιχειώδη όγκο ελέγχου μόνιμης ροής του σχήματος 3.4β. Το ρευστό εισέρχεται από τη διατομή 1 που βρίσκεται σε ύψος y_1 , με ταχύτητα v_1 και πίεση p_1 . Εξέρχεται απ' τη διατομή 2 (y_2 , v_2 και p_2 τα αντίστοιχα μεγέθη).

Εφαρμόζοντας το γενικό ισοζύγιο για την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που ανταλλάσσει το σύστημα με το περιβάλλον (ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ = ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ):



Σχ. 3.4β

$$E_{κιν1} + \dot{E}_{δυν1} + U_1 + W_{p1} + d\dot{Q} = \\ = E_{κιν2} + \dot{E}_{δυν2} + U_2 + W_{p2} + d\dot{W} \quad \eta$$

$$(\dot{E}_{κιν1} - \dot{E}_{κιν2}) + (E_{δυν1} - \dot{E}_{δυν2}) + (U_1 - U_2) + \\ + (\dot{W}_{p1} - \dot{W}_{p2}) = d\dot{W} - d\dot{Q}$$

και επειδή εξετάζουμε στοιχειώδη όγκο ελέγχου:

$$d\dot{E}_{κιν} + d\dot{E}_{δυν} + d\dot{U} + d\dot{W}_p = d\dot{Q} - d\dot{W}$$

Αντικαθιστώντας με βάση τα προηγούμενα:

$$d \frac{\dot{m} \cdot v^2}{2} + d(\dot{m} \cdot g \cdot y) + d(\dot{m} \cdot u) + d \left(\dot{m} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \\ = d\dot{Q} - d\dot{W}$$

Και αναπτύσσοντας:

$$\dot{m} \cdot (v \cdot dv + g \cdot dy + du + p \cdot du + u \cdot dp) = \\ = d\dot{Q} - d\dot{W} \quad (3.13)$$

όπου: \dot{m} η παροχή μάζας, v η ταχύτητα, y το ύψος, u η ειδική εσωτερική ενέργεια, p η πίεση, u ο ειδικός όγκος ($u = 1/\rho$), $d\dot{Q}$ η ροή θερμότητας (από το περιβάλλον προς το σύστημα) και $d\dot{W}$ η ροή έργου (από το σύστημα προς το περιβάλλον).

Η εξίσωση (3.13) εκφράζει το ισοζύγιο ενέργειας για σταθερή μονοδιάστατη ροή ρευστού σε στοιχειώδη όγκο ελέγχου.

Ολοκληρώνοντας μεταξύ δύο διατομών αγωγού (με την απλοποίηση πως η ταχύτητα σε κάθε διατομή είναι σταθερή), προκύπτει:

$$\dot{m} \cdot \left[\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g \cdot (y_2 - y_1) + (u_2 - u_1) + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \right] = \\ = \dot{Q} - \dot{W} \quad (3.14)$$

Σημείωση: Οι εξισώσεις (3.13) και (3.14) καταλήγουν στην (3.14α) μέσω της οποίας εκφράζεται ο Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος (αξίωμα) σε ανοικτά συστήματα.

$$\dot{m} \cdot \left[\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g \cdot (y_2 - y_1) + u_2 - u_1 + p_2 \cdot u_2 - p_1 \cdot u_1 \right] = \dot{Q} - \dot{W}$$

$$\eta \quad \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g \cdot (y_2 - y_1) + u_2 - u_1 + p_2 \cdot u_2 - p_1 \cdot u_1 = q - w$$

$$\eta \quad \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g \cdot (y_2 - y_1) + (u_2 + p_2 u_2) - (u_1 + p_1 u_1) = q - w$$

ισχύει: $u + p \cdot u = h$, ειδική ευθαλπία

$$\text{και} \quad \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g \cdot (y_2 - y_1) + h_2 - h_1 = q - w \quad (3.14\alpha)$$

$$\text{όπου} \quad q = \frac{\dot{Q}}{\dot{t}} \quad \text{και} \quad W = \frac{\dot{W}}{\dot{t}}$$

3.4.3 Η εξίσωση Bernoulli⁵ (Bernoulli equation).

Ισοζύγιο ενέργειας για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού.

Στα ασυμπίεστα ρευστά η πυκνότητα παραμένει σταθερή: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ και η εξίσωση (3.14) γίνεται:

$$\dot{m} \cdot \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g \cdot (y_2 - y_1) + (u_2 - u_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \dot{Q} - \dot{W} \right) \quad (3.14\beta)$$

Αν η ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον είναι αμελητέα ($\dot{Q} \approx 0$), η θερμοκρασία του ασυμπίεστου ρευστού παραμένει πρακτικά σταθερή και –κατά συνέπεια– η εσωτερική ενέργεια δεν μεταβάλλεται ($u_2 - u_1 \approx 0$). (Κάποια αύξηση της εσωτερικής ενέργειας λόγω τριβών, θεωρείται ενεργειακή απώλεια για το σύστημα – έργο τριβών).

Τακτοποιώντας τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης (3.14α), προκύπτει το ισοζύγιο ενέργειας για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού:

$$\dot{m} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + g \cdot (y_1 - y_2) \right) = \dot{W} \quad (3.15)$$

Παρατηρούμε πως οι όροι του ισοζυγίου (ενέργεια πίεσεως, κινητική και δυναμική ενέργεια, έργο) είναι μορφές μηχανικής ενέργειας.

$$\dot{m} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + g \cdot (y_1 - y_2) = w \quad (3.15\alpha)$$

$$\dot{m} \cdot (p_1 - p_2) + \rho \cdot \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2) = p_w \quad (3.15\beta)$$

Το p_w έχει διαστάσεις πίεσεως ($p_w = w \cdot \rho$).

Τέλος (και σημαντικότερο), αν τους όρους της (3.15) τους διαιρέσουμε με $\dot{m} \cdot g$, παίρνουμε εξίσωση, στην οποία τα ενεργειακά μεγέθη εκφράζονται σε διαστάσεις μήκους (ύψους):

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (3.16)$$

Στην εξίσωση (3.16), ο όρος $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ εκφράζει τη μεταβολή της ενέργειας πίεσεως (ακριβολογίας, το έργο των δυνάμεων πίεσεως ή το

έργο ροής), ο $\frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g}$, τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας και ο $(y_2 - y_1)$, τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μεταξύ των σημείων 1 και 2. Ο όρος Σh εκφράζει το έργο που εξέρχεται προς το περιβάλλον λόγω των τριβών, είναι δηλαδή οι ενεργειακές απώλειες. Αν υπάρχει και ωφέλιμο εξερχόμενο έργο h_t (π.χ. από την περιστροφή ενός υδροτροβίλου), αυτό θα προστεθεί. Αν στο ρευστό παρέχουμε έργο h_p (με τη χρήση αντλίας), το έργο αυτό θα αφαιρεθεί από το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.16):

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h + h_t - h_p \quad (3.16\alpha)$$

Στη ροή ιδανικού ρευστού δεν υπάρχουν απώλειες τριβών: $\Sigma h = 0$. Το ίδιο ισχύει όταν εξετάζουμε ροϊκό σωλήνα που βρίσκεται στην περιοχή της ατριβούς ροής (έξω από το οριακό στρώμα). Αλλά και σε αρκετά προβλήματα ροής σε πραγματικούς αγωγούς (π.χ. όταν επικρατούν χαμηλές ταχύτητες και τα τοιχώματα των αγωγών είναι λεία ή όταν η απόσταση μεταξύ των διατομών 1 και 2 είναι πολύ μικρή), μπορούμε με ικανοποιητική προσέγγιση να θεωρήσουμε $\Sigma h \approx 0$. Τότε η εξίσωση (3.16) παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = 0$$

και τακτοποιώντας κατάλληλα τους όρους:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + y_2 = \text{σταθ} \quad (3.16\beta)$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει το **Θεώρημα του Bernoulli** (ο οποίος το διατύπωσε πρώτος το 1738): **Σε μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού χωρίς τριβές, το άθροισμα της ενέργειας πίεσεως, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, παραμένει σταθερό σε οποιαδήποτε διατομή κάθετη στη ροή.**

Συχνά το ισοζύγιο μηχανικής ενέργειας καλείται και **εξίσωση Bernoulli**.

3.4.4 Ενεργειακά ύψη – Πιεζομετρική γραμμή.

1) Ενεργειακά ύψη.

Όπως είδαμε, ο κάθε όρος των εξισώσεων (3.16), (3.16α) και (3.16β) εκφράζει ενέργεια ανά μονάδα

⁵ Bernoulli Daniel: 1700–1782.

βάρους και έχει διαστάσεις μήκους. Αυτό μας επιτρέπει να μιλάμε για **ενεργειακά ύψη**. Ειδικά:

1) Ο όρος p/γ (ενέργεια πίεσης) καλείται **ύψος πίεσης** (pressure head).

2) Ο όρος $v^2/2g$ (κινητική ενέργεια) καλείται **ύψος κινητικής ενέργειας** ή απλά, **ύψος ταχύτητας** (velocity head).

3) Ο όρος y (δυναμική ενέργεια) καλείται **γεωμετρικό ή υψομετρικό ύψος** (elevation head).

Το άθροισμα των τριών ενεργειακών υψών, καλείται **ολικό ύψος** (total head):

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + y \quad (3.17)$$

Για τη μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού γενικότερα, η εξίσωση (3.16α) μπορεί να λάβει την ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + y_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + y_2 + \Sigma h + h_t \quad (3.18)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (3.17):

$$H_1 + h_p = H_2 + \Sigma h + h_t \quad (3.18a)$$

Παρατηρούμε πως με τη χρήση του ολικού ύψους οι εξισώσεις που εκφράζουν το ισοζύγιο ενέργειας αποκτούν πιο σύντομη και κομψή μορφή.

1) Το **Θεώρημα Bernoulli** θα γίνει:

$$H_1 = H_2 = \text{σταθ.}$$

2) Αν υπάρχουν υπολογίσιμες απώλειες:

$$H_1 = H_2 + \Sigma h$$

3) Αν υπάρχει στρόβιλος και αντλία:

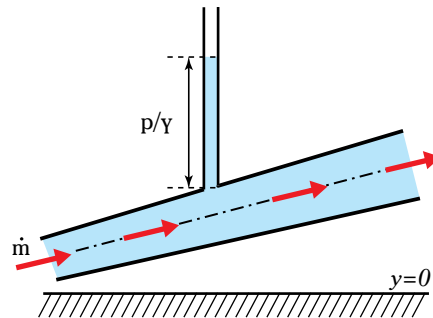
$$H_1 = H_2 + \Sigma h + h_t - h_p$$

Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα, το Σh καλείται **ύψος απωλειών**, το h_t **αποδιδόμενο σε στρόβιλο ύψος** και το h_p **αποδιδόμενο απ' την αντλία ύψος**.

2) Πιεζομετρική γραμμή και γραμμή ενέργειας.

Από τα τρία ύψη ενέργειας που χαρακτηρίζουν την ενεργειακή κατάσταση του ρέοντος ρευστού, το ύψος δυναμικής ενέργειας y είναι άμεσα μετρήσιμο, αφού συμπίπτει με το (γεωμετρικό) ύψος του σημείου (ή της διατομής) που εξετάζουμε.

Πειραματικά μπορούμε να μετρήσουμε και το ύψος πίεσης p/γ σε κάποιο σημείο του αγωγού. Προς τούτο, προσαρμόζουμε στο τοίχωμα κλειστού αγωγού ροής κατακόρυφο σωλήνα ανοικτό στην ατμόσφαιρα (σχ. 3.4γ). Το ρευστό θα ανέλθει στον κατακόρυφο σωλήνα σε ύψος ίσο με p/γ , δείχνοντας άμεσα το ύψος (σχετικής) πίεσης του ρευστού στο σημείο που τοποθετήθη-



Σχ. 3.4γ

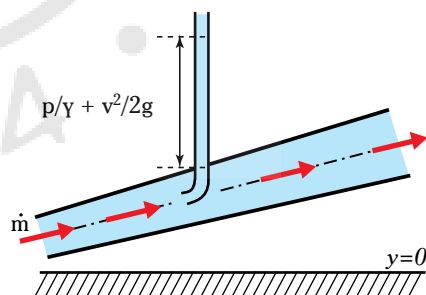
Πιεζομετρικός σωλήνας.

κε ο σωλήνας (**πιεζομετρικός σωλήνας**). Κατά την τοποθέτηση προσέχουμε να μην εισέρχεται ο σωλήνας στο ρεύμα ροής και να μη δημιουργεί τοπικά εμπόδια στη ροή. **Σημειώνουμε πως πρόκειται για το ύψος της σχετικής (p_g) και όχι της απόλυτης πίεσης.**

Αν χρειάζεται η απόλυτη πίεση τότε: $p_{abs} = p_g + p_{εξ}$.

Αν στη θέση του πιεζομετρικού σωλήνα, τοποθετήσουμε σωλήνα βυθιζόμενο στο ρεύμα με κεκλιμένο το κάτω άκρο, ώστε η διατομή εισόδου του να είναι κάθετη και αντίθετη στην ταχύτητα του ρευστού (**σωλήνας Pitot**, σχ. 3.4δ), τότε η στάθμη θα ανέβει υψηλότερα. Αυτό συμβαίνει γιατί στο ύψος πίεσης p/γ θα προστίθεται και το ύψος κινητικής ενέργειας $v^2/2g$ (βλ. και παράγρ. 3.5.3). Γνωρίζοντας ήδη το p/γ , υπολογίζεται το $v^2/2g$.

Άρα: **το y μειρείται άμεσα, το p/γ με πιεζομετρικό σωλήνα και τέλος, το $v^2/2g$ υπολογίζεται με αξιοποίηση του σωλήνα Pitot.**



Σχ. 3.4δ

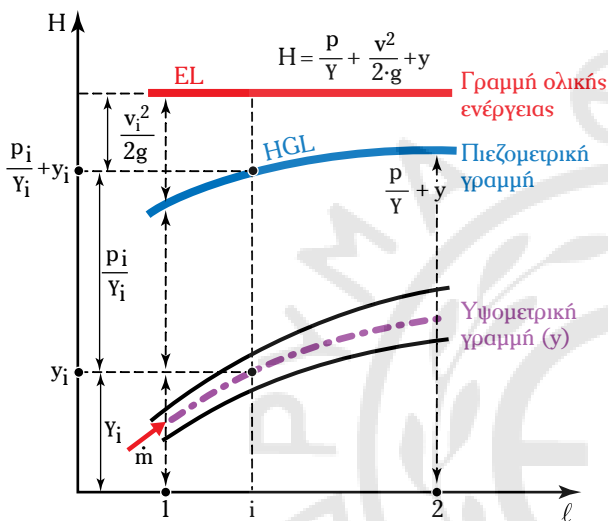
Σωλήνας Pitot.

Με τη χρήση των υψών ενέργειας μπορούμε να φτιάξουμε διαγράμματα μεταβολής της ενέργειας κατά μήκος του αγωγού. Στα διαγράμματα αυτά, στον άξονα των τετημένων αντιστοιχούμε το μήκος του αγωγού ροής και στον άξονα των τεταγμένων τα ύψη ενέργειας.

Ένα τέτοιο είναι το διάγραμμα μεταβολής του

αθροίσματος $(y + p/\gamma)$ –το οποίο ονομάζεται **πιεζομετρικό ύψος** (piezometric head). Αυτό μας δίνει τη λεγόμενη **πιεζομετρική γραμμή** (Hydraulic Grade Line – HGL) (σx. 3.4ε).

Πιο σημαντικό είναι το διάγραμμα μεταβολής του ολικού ύψους H , δηλαδή τη γραφική παράσταση του **ολικού ύψους ενέργειας** σε συνάρτηση με τη διαδρομή ροής. Αυτό μας δίνει τη **γραμμή ενέργειας** (Energy Line – EL) κατά μήκος του αγωγού ροής (σx. 3.4ε, 3.4στ). Για τον σχεδιασμό του διαγράμματος αξι-οποιούμε την εξίσωση (3.18) ή τις παράγωγές της.



Σx. 3.4ε
Γραμμή ενέργειας ατρισούς ροής.

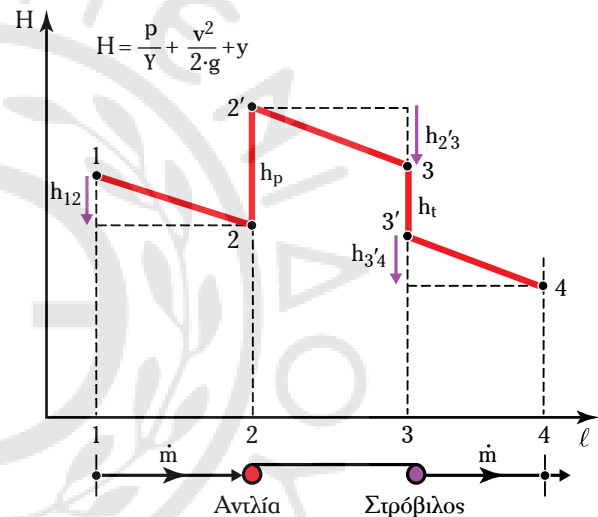
Στο σχήμα 3.4ε βλέπουμε το ενεργειακό διάγραμμα ροής ασυμπίεστου ρευστού που ρέει χωρίς τριβές σε ροϊκό σωλήνα και επομένως ισχύει το Θεώρημα του Bernoulli. Το ολικό ύψος ενέργειας παραμένει σταθερό, κατά συνέπεια η γραμμή ενέργειας είναι οριζόντια. Η απόσταση μεταξύ της γραμμής ενέργειας και της πιεζομετρικής γραμμής, παριστάνει γραφικά το ύψος κινητικής ενέργειας του ρευστού στο αντίστοιχο σημείο του αγωγού. Η απόσταση μεταξύ της υψομετρικής και της πιεζομετρικής γραμμής παριστάνει το ύψος πίεσεως (είναι το ύψος που θα δείξει πιεζομετρικός σωλήνας τοποθετημένος στο αντίστοιχο σημείο του αγωγού).

Στο σχήμα 3.4στ βλέπουμε τη γραμμή ενέργειας συστήματος ροής, στο οποίο υπάρχει αντλία (σημείο 2) και στρόβιλος (σημείο 3). Εκτός από τα ύψη των δύο συσκευών h_p και h_t , παρατηρούμε και τα ύψη απωλειών h_{12} , $h_{2'3}$ και $h_{3'4}$ στα τρία τμήματα του αγωγού.

Η γραμμή ενέργειας επιτρέπει την άμεση ενεργ-

γιακή περιγραφή του φαινομένου της ροής. Έτσι, στο σύστημα ροής, του σχήματος 3.4στ, παρατηρούμε πως στο σωλήνα 1-2 ένα μέρος της ολικής ενέργειας του ρευστού αντιμετωπίζει τις απώλειες λόγω τριβών ($H_1 - H_2 = h_{12}$). Πρόκειται για πώση του ύψους της ενέργειας πίεσεως, είτε της δυναμικής, είτε της κινητικής ενέργειας. Στο σημείο 2 το ολικό ύψος αυξάνεται κατά το αποδιδόμενο από την αντλία ύψος ($H_2' = H_2 + h_p$). Στον σωλήνα 2'-3 έχουμε πώση του ολικού ύψους ενέργειας λόγω τριβών ($H_2' - H_3 = h_{2'3}$). Στο σημείο 3, τμήμα της ολικής ενέργειας αποδίδεται στην εγκατάσταση στροβίλου ($H_3 - H_3' = h_t$). Τέλος, στο σωλήνα 3'-4: $H_3' - H_4 = h_{3'4}$. Και συνολικά από 1 ως 4:

$$H_1 - H_4 = \sum h_{14} - h_p + h_t$$



Σx. 3.4στ
Γραμμή ενέργειας συστήματος ροής.

3.4.5 Διορθωτικοί συντελεστές κινητικής ενέργειας.

Στις προηγούμενες παραγράφους διαμορφώσεως του ισοζυγίου ενέργειας, για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας χρησιμοποιήσαμε τη μέση ταχύτητα ροής όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο 3.3.4:

$$v = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A} = \frac{1}{A} \cdot \int_A v_t \cdot dA$$

Στην περίπτωση της ατρισούς ροής, η μέση ταχύτητα ταυτίζεται με τη στιγμιαία και ο υπολογισμός της από την εξίσωση συνέχειας είναι αρκετός. Στην περίπτωση όμως της ροής στα οριακά στρώματα (και στους αγωγούς έχουμε πάντα τέτοια), η ταχύτητα μεταβάλλεται με την απόσταση από το τοίχωμα του αγω-

γού και η χρήση της μέσης ταχύτητας είναι η μόνη λύση για να εφαρμοσθεί το ισοζύγιο μάζας. Αφού όμως η παροχή μάζας είναι ανάλογη της ταχύτητας [εξίσωση (3.9)], η κινητική ενέργεια είναι συνάρτηση του τετραγώνου της ταχύτητας. Σύμφωνα με τα μαθηματικά, το τετράγωνο της μέσης ταχύτητας (\bar{v}^2) είναι διαφορετικό απ' το μέσο των τετραγώνων της ταχύτητας ($\overline{v^2}$).

Ο διορθωτικός συντελεστής ταχύτητας δίδεται από την σχέση:

$$\alpha = \frac{\bar{v}^2}{\overline{v^2}} \quad (3.19)$$

Με τη χρήση των διορθωτικών συντελεστών, το ισοζύγιο ενέργειας για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού [εξίσωση (3.16α)] γίνεται:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h + h_t - h_p \quad (3.20)$$

Αντίστοιχη διόρθωση γίνεται σε όλες τις σχέσεις που εκφράζουν την κινητική ενέργεια χρησιμοποιώντας τη μέση ταχύτητα.

Στην τυρβώδη ροή ο α υπολογίζεται πειραματικά με τη βοήθεια εμπειρικών τύπων και είναι ελαφρά μεγαλύτερος της μονάδας: μεταβάλλεται από $\alpha = 1,13$ μέχρι $\alpha = 1,04$. Η ακριβής τιμή του εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds.

Για ροή σε σωλήνες με $Re = 10^4$ είναι $\alpha = 1,10$, $Re = 10^5$ είναι $\alpha = 1,05$, $Re = 10^6$ είναι $\alpha = 1,04$.

Λαμβάνοντας υπόψη πως στη στρωτή ροή οι ταχύτητες είναι μικρές, άρα η κινητική ενέργεια λίγο επηρεάζει τη συνολική ενέργεια του ρευστού, ενώ στην τυρβώδη η διόρθωση που προκύπτει είναι ελάχιστη, μπορούμε να εργαστούμε με ικανοποιητική προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη μέση ταχύτητα που υπολογίζεται από την εξίσωση της συνέχειας, θεωρώντας δηλαδή $\alpha = 1$.

3.4.6 Δυναμική θεωρήση σε ροή ρευστού: Ισχύς.

Παρά το ότι σ' αυτό το κεφάλαιο επικεντρώσαμε στην κινηματική των ρευστών, πολύ συχνά χρησιμοποιήσαμε έννοιες και νόμους της δυναμικής. Η μελέτη της κινήσεως των ρευστών είναι αδύνατη χωρίς την εξαρχής εισαγωγή και της δυναμικής θεωρήσεως. Μιας θεωρήσεως που είναι ήδη γνωστή από τη Φυσική. Έτσι, αναφερθήκαμε συχνά σε διατμητικές τάσεις και δυνάμεις και τα αποτελέσματά τους στην κίνηση του ρευστού, είτε για να κατανοήσουμε τους

μηχανισμούς της ροής του ρευστού, είτε για να διαμορφώσουμε κατάλληλες σχέσεις χρήσιμες στην επίλυση προβλημάτων ροής. Η ενασχόλησή μας με τα ισοζύγια ενέργειας στην παρούσα παράγραφο, δείχνει με τον καλύτερο τρόπο πως τα προβλήματα ροής απαιτούν την αξιοποίηση όλων των γνώσεων υποδομής της μηχανικής.

Διαμορφώνοντας το ισοζύγιο ενέργειας, συναντήσαμε το έργο δυνάμεων. Πιο συγκεκριμένα, το έργο που καταναλώνει το σύστημα για την αντιμετώπιση των δυνάμεων που αντιστέκονται στη ροή (απώλειες λόγω τριβών), το έργο που αποδίδει μια αντλία στο ρευστό, και το έργο που το ρευστό αποδίδει σε ένα στρόβιλο.

Από τη Φυσική γνωρίζουμε:

$$dW = F \cdot ds$$

και για το έργο εκ περιστροφής:

$$dW = M \cdot d\phi$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο, είναι ο ρυθμός παραγωγής ή καταναλώσεως του έργου, δηλαδή η **ισχύς**:

$$P = dW/dt \quad \text{ή} \quad P dt = F ds,$$

$$P \cdot dt = M \cdot d\phi \quad \text{ή} \quad P = F \cdot ds/dt = F \cdot v$$

$$P = M \cdot ds/dt = M \cdot \omega$$

αντίστοιχα (όπου: M η ροπή και ω η γωνιακή ταχύτητα).

Την έννοια της μηχανικής ισχύος (και γενικότερα της ροής ενέργειας στη μονάδα του χρόνου) τη χρησιμοποιήσαμε ήδη στη γενική έκφραση του ισοζυγίου ενέργειας [εξισώσεις (3.13) έως (3.15)] χρησιμοποιώντας για την ισχύ P το (ισοδύναμο) σύμβολο \dot{W} ($\dot{W} = dW/dt$) (για να τονίσουμε πως πρόκειται για ενεργειακή ροή, παροχή ενέργειας).

As δούμε τώρα τη σχέση της ισχύος με τα ύψη ενέργειας, και ειδικότερα με το ύψος απωλειών (Σh) και τα αποδιδόμενα ύψη αντλίας (h_p) και στρόβιλου (h_t). Ισχύει:

$$W = h \cdot m \cdot g \quad \text{ή} \quad W = h \cdot \rho \cdot V \cdot g$$

$$\text{ή} \quad W/t = h \cdot \rho \cdot V \cdot g \cdot 1/t$$

Αλλά: $V/t = \dot{V}$, οπότε:

$$\dot{W} = P = h \cdot \rho \cdot g \cdot \dot{V} \quad (3.21)$$

$$\text{ή} \quad P = \dot{m} \cdot g \cdot h$$

Η εξίσωση (3.21) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μόνη ροή ασυμπίεστων ρευστών (στην οποία η παροχή όγκου \dot{V} παραμένει σταθερή).

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.21) στην αντλία:

$$P_p = \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_p \quad (3.21\alpha)$$

Πρέπει να σημειώσουμε πως η P_p είναι η ισχύς που από την αντλία μεταβιβάζεται στο ρευστό (αποδιδόμενη ισχύς). Η αντλία καταναλώνει περισσότερη ισχύ P . Όπως θα δούμε στο βιβλίο *Αντλίες*⁶, ο λόγος των δύο μεγεθών είναι ο ολικός βαθμός αποδόσεως της αντλίας n_p :

$$n_p = P_p/P \Rightarrow P = \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_p/n_p \quad (3.21\beta)$$

Για υδροστρόβιλο έχουμε αντίστοιχα:

$$P_t = \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_t \quad (3.21\gamma)$$

Πρόκειται για την ισχύ που μεταβιβάζεται από το ρευστό στα περύγια του στρόβιλου. Αν ο βαθμός αποδόσεως του στρόβιλου είναι n_t ($n_t = P_{to}/P_t$), η ωφέλιμη ισχύς που παίρνουμε απ' τον στρόβιλο είναι λιγότερη:

$$P_{to} = n_t \cdot \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_t \quad (3.21\delta)$$

3.5 Εφαρμογές.

3.5.1 Θεώρημα του Torricelli⁷.

Το 1643 ο Torricelli διατύπωσε το Θεώρημα, που έκτοτε φέρει το όνομά του, και κατά το οποίο:

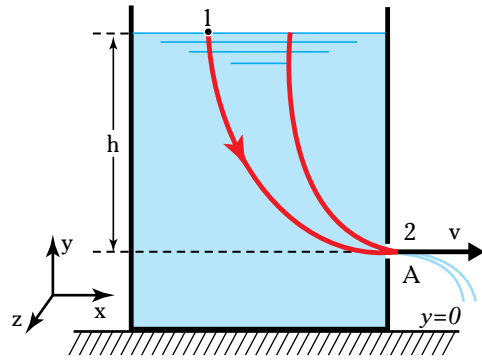
Η ταχύτητα εκροής υγρού από δεξαμενή φέρουσα οπή, ισούται με την ταχύτητα που θα αποκτούσε το ρευστό αν έπεφτε ελεύθερα υπό την επίδραση της βαρύτητας:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (3.22)$$

Αναφερόμενος στο σχήμα 3.5α, το σύστημα ροής ξεκινά απ' την ελεύθερη επιφάνεια εμβαδού $A_{\text{επιφ}}$. Επειδή όμως η ελεύθερη επιφάνεια δεξαμενής έχει πάρα πολύ μεγάλο εμβαδόν (σε σχέση με το άνοιγμα A), η ταχύτητα είναι πάρα πολύ μικρή, θεωρούμενη κατά προσέγγιση ίση με μηδέν:

$$\dot{V} = v_{\text{επιφ}} \cdot A_{\text{επιφ}}, \quad \dot{V} = v_2 \cdot A_2 \quad \hat{n}$$

$$v_{\text{επιφ}} \cdot A_{\text{επιφ}} = v_2 \cdot A_2 \quad \hat{n} \quad \text{ή} \quad v_{\text{επιφ}} = A_2/A_{\text{επιφ}} \cdot v_2$$



Σχ. 3.5α

για $A_{\text{επιφ}}$ πολύ μεγάλη ή ταχύτητα $v_{\text{επιφ}} \rightarrow 0$.

Θεωρούμε μία γραμμή ροής εκρέοντος υγρού που ξεκινά απ' το σημείο (1) της ελεύθερης επιφάνειας της δεξαμενής και καταλήγει στο μέσο της οπής εξόδου 2 (γραμμή 1-2 του σχ. 3.5α). Θεωρώντας αμελητέες τις απώλειες (τριβές), εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli (3.16β):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + y_2$$

$v_1 = 0$, $p_1 = p_2 = p_{\text{ατμ}}$, $y_1 - y_2 = h$, οπότε:

$$y_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + y_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Δηλαδή η ταχύτητα εκροής εξαρτάται μόνο από το βάθος h , στο οποίο βρίσκεται η οπή. Έχομε δηλαδή απλά μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική.

Όπως δείξαμε, το Θεώρημα του Torricelli ισχύει με δύο προϋποθέσεις: Πρώτον, οι **απώλειες** κατά τη ροή να είναι **αμελητέες** και δεύτερο, το εμβαδόν της οπής να είναι πολύ μικρό σε σχέση με το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας της δεξαμενής.

Επειδή όμως οι απώλειες είναι υπαρκτές και αναπόφευκτες, το Θεώρημα του Torricelli δίνει ικανοποιητικό αποτέλεσμα μόνον όσον αφορά στην μέγιστη ταχύτητα (η οποία παρουσιάζεται στο μέσο της εκρέουσας φλέβας). Για τη μέση ταχύτητα, συχνά χρησιμοποιούμε το διορθωτικό συντελεστή n (**συντελεστής παροχής στομίου**). Η εξίσωση (3.22) γίνεται:

$$v = n \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (3.22\alpha)$$

Με την ίδια μέθοδο (εφαρμογή του Θεωρήματος

⁶ Βλ. *Αντλίες* Ι. Δάγκινις, Α. Γλύκας, Ίδρυμα Ευγενίδου, Αθήνα 2016.

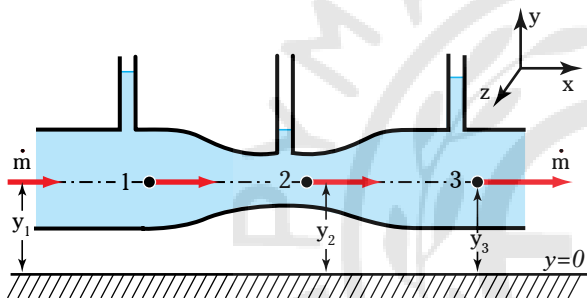
⁷ Evangelista Torricelli: 1608–1647.

Bernoulli) μπορούν να υπολογισθούν και άλλα προβλήματα ελεύθερης ροής, όπως για παράδειγμα το **πρόβλημα του πίδακα του υγρού**.

3.5.2 Σωλήνας Venturi⁸

Ο σωλήνας Venturi (σχ. 3.5β) είναι ένας σωλήνας με στένωμα (όσο το δυνατόν πιο ομαλής κλίσεως, ώστε να αποφεύγονται οι απώλειες) και με πιεζομετρικούς σωλήνες τοποθετημένους στα σημεία 1 και 2 για να μετράμε τη διαφορά πίεσεως (εναλλακτικά μπορούμε να τοποθετήσουμε διαφορικό μανόμετρο).

Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της παροχής. (Αξιοποιούμε και τρίτο πιεζομετρικό σωλήνα –σημείο 3– για τον υπολογισμό των απωλειών: Μετρώμε την πτώση πίεσεως μεταξύ του σημείου 1 και 3, μπορούμε να υπολογίσουμε τις απώλειες λόγω τριβών που συνεπάγεται η χρήση του οργάνου).



Σχ. 3.5β
Σωλήνας Venturi.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση ενέργειας (3.16) μεταξύ των σημείων 1 και 2:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (1)$$

Είναι: $y_1 - y_2 = 0$. Υποθέτοντας τις απώλειες αμελητέες ($\Sigma h = 0$), η σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g} &= \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \end{aligned} \quad (1a)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας για τα σημεία 1 και 2 και υπολογίζουμε τις ταχύτητες συναρτήσει της παροχής \dot{V} :

$$v_1 = \frac{4\dot{V}}{\pi d_1^2} \quad \text{και} \quad v_2 = \frac{4\dot{V}}{\pi d_2^2} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1a) τις ταχύτητες, μόνος άγνωστος είναι η παροχή \dot{V} . Επιλύουμε ως προς \dot{V} και παίρνουμε:

$$\left(\frac{4\dot{V}}{\pi d_2^2} \right)^2 - \left(\frac{4\dot{V}}{\pi d_1^2} \right)^2 = 2 \cdot g \cdot \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad \text{και τελικά}$$

$$\dot{V} = \left[\frac{2 \cdot g (p_1 - p_2)}{\gamma \left(\left(\frac{4}{\pi d_2^2} \right)^2 - \left(\frac{4}{\pi d_1^2} \right)^2 \right)} \right]^{1/2} \quad (3)$$

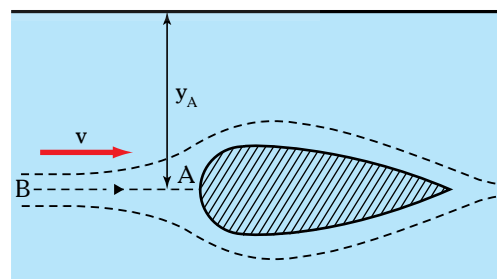
Στην επίλυση υποθέσαμε αμελητέες απώλειες. Αυτό δεν είναι ακριβές.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση ενέργειας μεταξύ των διατομών 1 και 3, για $v_1 = v_3$, έχουμε:

$$\frac{p_1 - p_3}{\gamma} = \Sigma h_{1-3}$$

3.5.3 Σημείο ανακοπής (ή στάσιμο σημείο, stagnation point).

Αναπτύσσοντας τη ροή ρευστού γύρω από βυθισμένο σώμα (παράγρ. 3.1.6) είδαμε πως υπάρχει ένα σημείο στο πρόσθιο μέρος του σώματος, στο οποίο η ταχύτητα του ρευστού μηδενίζεται και η πίεση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της (σημείο ανακοπής ή σημείο στασιμότητας) (σχ. 3.5γ). Τα μεγέθη των ρευστών στο σημείο ανακοπής ονομάζονται **στάσιμα** π.χ. στάσιμη πίεση, στάσιμη ενθαλπία, στάσιμη θερμοκρασία κ.λπ..



Σχ. 3.5γ
Σημείο ανακοπής.

⁸ Giovanni Battista Ventouri: 1746–1822.

Σημείωση: Μας ενδιαφέρει η σχετική ταχύτητα μεταξύ ρευστού και στερεού. Για παρατηρήτη που βρίσκεται επί του στερεού, το ρευστό κινείται με ταχύτητα v .

Η μέγιστη πίεση θα εμφανίζεται στο σημείο της ελάχιστης ταχύτητας (Bernoulli), άρα στο σημείο ανακοπής A.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli στη ρευματική γραμμή BA, θεωρώντας το B αρκετά μακριά από το σώμα (ώστε η σχετική ταχύτητά του να είναι v) και τις απώλειες μηδενικές:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2 \cdot g} + y_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2 \cdot g} + y_B$$

$$\text{ή } \frac{p_A}{\gamma} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2 \cdot g}$$

επειδή $v_A = 0$ και $y_A = y_B$.

Υπενθυμίζουμε πως πρόκειται για τη σχετική πίεση (αφού δεν λάβαμε υπόψη την ατμοσφαιρική), η απόλυτη πίεση θα είναι $P_A + P_{εξ}$.

$$P_A = \gamma \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} \right) \text{ ή } P_A = p_B + \frac{\rho v_B^2}{2}, \quad \gamma = \rho \cdot g$$

3.5.4 Σωλήνας Pitot⁹.

Ακριβώς στην ίδια λογική μελετάμε και τον σωλήνα Pitot (παράγρ. 3.4.4). Το σημείο A στην είσοδο του σωλήνα είναι σημείο στασιμότητας και το ύψος της στήλης δίνει το άθροισμα του ύψους πίεσεως και του ύψους κινητικής ενέργειας:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

Προσθέτοντας σ' αυτό το υψόμετρο y , παίρνουμε το ολικό ύψος ενέργειας στο σημείο A.

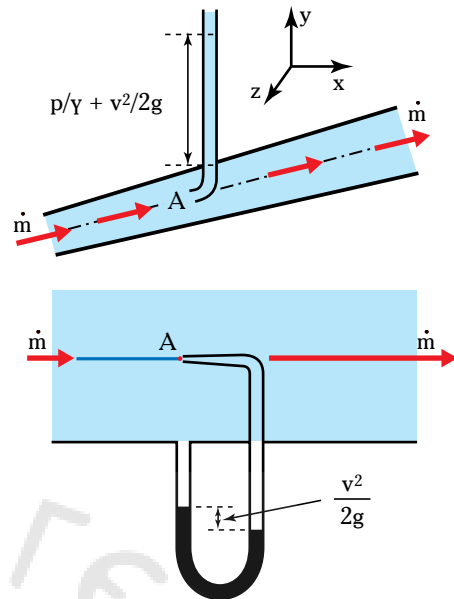
Ο σωλήνας Pitot μπορεί να είναι και μανομετρικού τύπου (συνδυασμός με πιεζομετρικό σωλήνα), δίνοντας άμεσα το ύψος κινητικής ενέργειας (σχ. 3.5δ).

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 (σχ. 3.5ε):

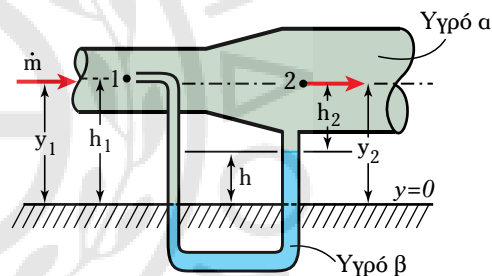
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + y_2$$

Είναι: $y_1 = y_2$ και $v_1 = 0$ (σημείο ανακοπής), οπότε η σχέση γίνεται:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \text{ ή } \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{v_2^2}{2}$$



Σχ. 3.5δ
Σωλήνες Pitot.



Σχ. 3.5ε

Η εξέταση του μανομέτρου δίνει:

$$p_1 + h_1 \cdot \gamma_a = p_2 + h_2 \cdot \gamma_a + h \cdot \gamma_b$$

$$\text{ή } p_1 - p_2 = h_2 \cdot \gamma_a + h \cdot \gamma_b - h_1 \cdot \gamma_a$$

3.5.5 Ύψος απωλειών (head loss).

Σε αρκετές από τις προηγούμενες εφαρμογές θεωρήσαμε τις απώλειες λόγω τριβών αμελητέες. Αυτό όμως στις περισσότερες περιπτώσεις δεν ισχύει. Οι απώλειες είναι υπολογίσιμος παράγοντας και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

Στη στρωτή ροή οι απώλειες είναι ανάλογες της ταχύτητας. Στην τυρβώδη, ανάλογες του τετραγώνου της ταχύτητας (άρα και του τετραγώνου της παροχής).

⁹ Henri Pitot: 1695–1771.

Εξαρτώνται όμως και από πολλές άλλες παραμέτρους που σχετίζονται με το ρευστό και τον αγωγό.

Αναλυτικά θα εξετάσουμε το ζήτημα των απωλειών σε επόμενο κεφάλαιο.

3.5.6 Έργο και ισχύς αντλίας¹⁰.

Υπάρχουν περιπτώσεις, στις οποίες η ροή των υγρών γίνεται δυνατή λόγω υψομετρικής διαφοράς (όπως στη φυσική ροή ποταμού κ.ά.). Πολύ σπανιότερα, λόγω προϋπάρχουσας διαφοράς πιέσεως. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις διακίνησης υγρών που αντιμετωπίζουμε στην παραγωγική διαδικασία, χρειάζεται να δώσουμε στο ρευστό ενέργεια για να επιτύχομε τη ροή που απαιτείται. Την αναγκαία ενέργεια για τη διακίνηση των υγρών, την προσφέρει η αντλία. Η ενέργεια ανά μονάδα βάρους ρευστού που παρέχει η αντλία, καλείται **αποδιδόμενο ύψος αντλίας h_p** . Επιλύοντας την εξίσωση (3.16α) ως προς h_p ($h_t = 0$) παίρνουμε:

$$h_p = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g} + (y_2 - y_1) + \Sigma h \quad (3.23)$$

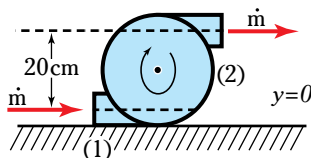
Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν (παράγρ. 3.4.6), η αποδιδόμενη ισχύς της αντλίας είναι:

$$P_p = \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_p \quad (3.21a)$$

Παρατηρούμε (3.23) πως το αποδιδόμενο ύψος της αντλίας, αντιμετωπίζει την αύξηση του ύψους πίεσεως (χαρακτηριστικό παράδειγμα, η αντλία τροφοδοσίας λέβητα), την αύξηση του ύψους κινητικής ενέργειας (π.χ. πυροσβεστική αντλία), δυναμικής ενέργειας (π.χ. αντλία σε γεωτρήσεις) και το ύψος απωλειών. (Στις απώλειες δεν περιλαμβάνονται οι απώλειες λόγω τριβών στο εσωτερικό της αντλίας).

Παράδειγμα 3

Νερό πίεσεως 1 bar εισέρχεται σε αντλία με παροχή $2 \text{ m}^3/\text{min}$ και εξέρχεται με πίεση 6 bar (σχ. 3.5στ). Η έξοδος της αντλίας βρίσκεται 20 cm ψηλότερα από την είσοδο.



Σχ. 3.5στ

Ο σωλήνας εισόδου έχει διάμετρο 8 cm και ο σωλήνας εξόδου, 7 cm. Αν οι απώλειες θεωρηθούν αμελητέες, να υπολογισθούν το αποδιδόμενο ύψος της αντλίας, η αποδιδόμενη ισχύς και οι ταχύτητες του νερού στην είσοδο και την έξοδο της αντλίας.

Ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα μεταβάλλονταν και πόσο, αν αντί για νερό κυκλοφορούσε υγρό πυκνότητας 800 kg/m^3 ;

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα: } p_1 &= 1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}, & y_2 - y_1 &= 0,2 \text{ m}, \\ p_2 &= 6 \text{ bar} = 600 \text{ kPa}, & \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3, \\ d_1 &= 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}, & g &= 10,0 \text{ m/s}^2, \\ d_2 &= 7 \text{ cm} = 0,07 \text{ m}, & \rho' &= 800 \text{ kg/m}^3, \\ \dot{V} &= 1 \text{ m}^3/\text{min} = 1/60 \text{ m}^3/\text{s}. \end{aligned}$$

Με εφαρμογή της εξίσωσης της συνέχειας για τα σημεία 1 και 2, υπολογίζουμε τις ταχύτητες εισόδου και εξόδου αντίστοιχα:

$$v_i = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_i^2} \Rightarrow v_1 = 3,32 \text{ m/s}, v_2 = 4,33 \text{ m/s}$$

Το αποδιδόμενο ύψος της αντλίας θα το υπολογίσουμε με χρήση της εξίσωσης (3.23):

$$\begin{aligned} h_p &= \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g} + (y_2 - y_1) + \Sigma h = \\ &= (59 + 0,3 + 0,20 + 0,0) \text{ m} \Rightarrow h_p = 51,56 \text{ m} \end{aligned}$$

$$P_p = \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_p \Rightarrow P_p = 8,43 \text{ kW}$$

Αν αλλάξει η πυκνότητα του αντλούμενου υγρού, οι ταχύτητες (με αμελητέες απώλειες) δεν θα μεταβληθούν (εξαρτώνται μόνο από την παροχή όγκου και τις διαμέτρους). Μεταβάλλεται όμως το αποδιδόμενο ύψος (μεταβολή του ύψους πίεσεως αντιστρόφως ανάλογη του γ) και η ισχύς (ανάλογη του γ):

$$\gamma' = \rho' g = 7,848 \text{ kN/m}^2 \text{ και } h_p' = 64,3 \text{ m και } P_p' = 8,41 \text{ kW}$$

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει τον τρόπο με τον οποίο εξετάζουμε στο σύνολό του ένα σύστημα αντλήσεως.

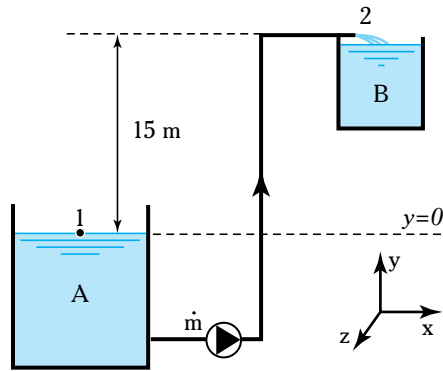
Παράδειγμα 4

Το σύστημα αντλήσεως του σχήματος 3.5ζ μεταφέρει νερό απ' τη δεξαμενή Α στη Β με παροχή $150 \text{ m}^3/\text{h}$. Η διάμετρος του σωλήνα που τροφοδοτεί τη δεξαμενή Β (σωλήνας καταθλίψεως) είναι 5 in. Αν οι απώλειες είναι 8 m, και ο βαθμός αποδόσεως της αντλίας 70%, να υπολογισθούν το αποδιδόμενο ύψος και η ισχύς της αντλίας.

Λύση.

Εξετάζουμε το σύστημα αντλήσεως συνολικά: Από το

¹⁰ Περισσότερα βλ. στο βιβλίο *Ανιλίες*, Δάγκινη Ι. και Γλύκα Α., εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, Αθήνα 2016.



Σχ. 3.5ζ

σημείο 1 (ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής A) ως το σημείο 2 (έξοδος του νερού από τον σωλήνα καταθλίψεως στην ατμόσφαιρα). Είναι:

$$y_2 - y_1 = 15 \text{ m}, \quad d_2 = 5 \text{ in} = 0,127 \text{ m},$$

$$p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}, \quad \dot{V} = 150 \text{ m}^3/\text{h} = 0,0417 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\Sigma h = 8 \text{ m}, \quad v_1 = 0,$$

$$\gamma = \rho \cdot g = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 9810 \text{ N/m}^2$$

Υπολογίζουμε την v_2 απ' την εξίσωση της συνέχειας:

$$v_2 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_2^2} \Rightarrow v_2 = 3,29 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση (3.23) για τον υπολογισμό του h_p :

$$h_p = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g} + (y_2 - y_1) + \Sigma h \Rightarrow$$

$$h_p = (0 + 0,55 + 15 + 8) \text{ m} = 23,55 \text{ m}$$

$$p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$$

Η αποδιδόμενη ισχύς υπολογίζεται απ' την εξίσωση (3.21α):

$$P_p = \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_p \Rightarrow P_p = 9,63 \text{ kW}$$

Η ισχύς που καταναλώνει η αντλία είναι μεγαλύτερη:

$$P_p/P = 0,70 \Rightarrow P = 13,76 \text{ kW}$$

Με την ίδια λογική αντιμετωπίζουμε και τα προβλήματα ισχύος υδροστροβίλου. Στο στροβίλο μετατρέπεται ποσότητα ενέργειας του ρευστού σε ωφέλιμο έργο. Το αποδιδόμενο ύψος προκύπτει από τη σχέση (3.16α) της παραγράφου 3.4.3:

$$h_t = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) - \Sigma h \quad (3.24)$$

και η ισχύς:

$$P = \gamma \cdot \dot{V} \cdot h_t \quad (3.21\beta)$$

3.6 Ασκήσεις.

1. Στην εμπρόσθια δεξαμενή ζυγοσταθμίσεως πλοίου (σχ. 3.6α) (fore-peak), το νερό περιέχει στερεά, αιωρούμενα σωματίδια και πρέπει να αντληθεί. Δεν χρησιμοποιείται βυθιζόμενη φυγοκεντρική αντλία, διότι θα καταστραφούν τα πτερύγια της περωτίδας της. Αποφασίσθηκε να χρησιμοποιηθεί φορητός εγχυτήρας (τζιφάρι), το οποίο θα λειτουργήσει με το δίκτυο πυρκαϊάς.

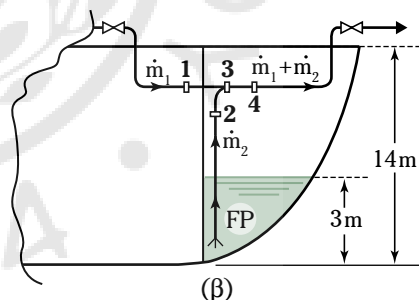
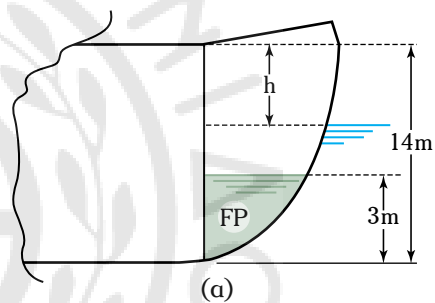
Ζητούνται:

α) Το ύψος h από το κατάστρωμα, στο οποίο πρέπει να κρεμαστεί το τζιφάρι [σχ. 3.6α(a)] ώστε να έχουμε άντληση των υδάτων.

β) Να γίνει γραφική παράσταση του $h = f(\dot{V})$, όπου \dot{V} η παροχή της αντλίας πυρκαϊάς και $h = f(D_3)$.

Δίδονται: $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1.025 \text{ kg/m}^3$, $D_1 = 50 \text{ mm}$ η διάμετρος του ακρόφυσου, $D_3 = 15 \text{ mm}$, $P_{1,g} = 6 \text{ barg}$, $\dot{V} = 8 \text{ m}^3/\text{h}$, $D_1 = D_4$ και $D_2 = 25 \text{ mm}$.

Να θεωρηθούν όλες οι απώλειες μηδενικές.



Σχ. 3.6α

2. Στο πλοίο του σχήματος 3.6β:

α) Δώστε την κατανομή των γραμμών ροής.

β) Να διευρευνηθούν ποιοτικά οι συνθήκες ροής (v , p) στην πλώρη, στο μέσον και στην πρύμνη.

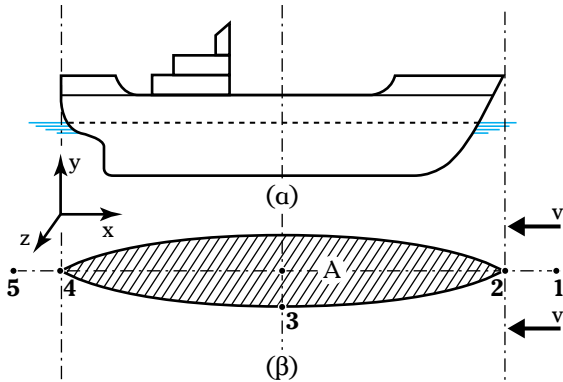
γ) Υπολογίστε την πίεση στο σημείο 2.

δ) Συγκρίνετε την ταχύτητα επιπλεόντων σωματιδίων στην θέση 3 σε σχέση με την ταχύτητα του πλοίου.

ε) Δώστε την κατανομή των πιέσεων στην πλευρά 2, 3, 4.

Θεωρήστε:

α) Το πλοίο ακίνητο.

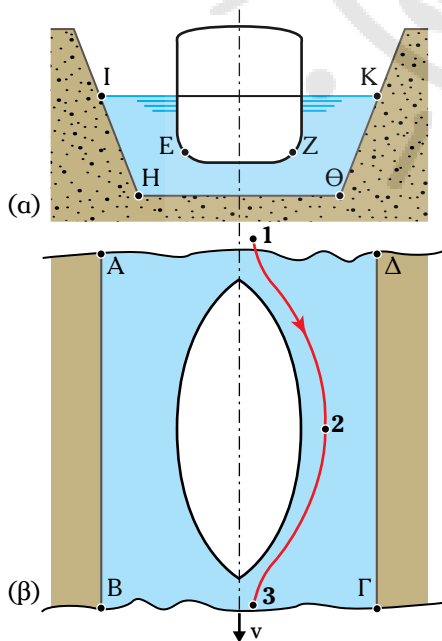


Σχ. 3.6β

- β) Το νερό μακριά του πλοίου κινούμενο με ταχύτητα v .
- γ) Την ταχύτητα του νερού στα πλευρά του πλοίου v_w .

3. Σε πλοίο που διαπλέει την διώρυγα (ή ποτάμι) του σχήματος 3.6γ:

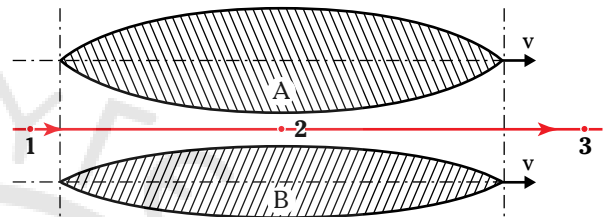
- α) Εφαρμόστε στην εξίσωση Bernoulli στην γραμμή ροής 1, 2, 3.
- β) Τι θα συμβεί αν το πλοίο πλησιάζει την μία από τις δύο πλευρές της διώρυγας;
- γ) Καθώς το πλοίο θα αρχίσει να κινείται τι θα συμβεί με το βύθισμά του;
- δ) Ο διάπλους πρέπει να γίνει με μικρή ή μεγάλη ταχύτητα;
- ε) Όλες οι απαντήσεις να δικαιολογηθούν.
- στ) Να περιγράψετε το οριακό στρώμα στις πλευρές του πλοίου και στα τοιχώματα της διώρυγας.



Σχ. 3.6γ

4. Δύο πλοία (σχ. 3.6δ) κινούνται σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους:

- α) Να εφαρμοσθεί η εξίσωση Bernoulli στην γραμμή ροής 1, 2, 3. Τα σημεία 1, 3 να θεωρηθούν μακριά από τις ισόλους επιφάνειες A, B.
- β) Ποιος είναι ο κίνδυνος για μια τέτοια παράλληλη πλεύση;
- γ) Να εκτιμηθεί η ταχύτητα v_2 του νερού στην επιφάνεια στο σημείο 2, αν αυτή θεωρηθεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους 2 m και βάθος 5 m, σε σχέση με την ταχύτητα v_3 στο σημείο 3.



Σχ. 3.6δ

5. Νερό θερμοκρασίας 10°C που ρέει με ταχύτητα 1 m/s, συναντά επίπεδη πλάκα τοποθετημένη παράλληλα με τη διεύθυνση της ροής. Αν το μήκος της πλάκας (κατά τη διεύθυνση της ροής) είναι 60 cm, η ροή επί του οριακού στρώματος θα είναι τυρβώδης;

[όχι : $x_a = 0,68 \text{ m} > 0,60 \text{ m}$]

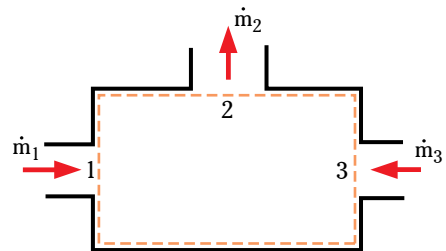
6. Σε σωλήνα διαμέτρου 8 cm ρέει λάδι ιξώδους $150 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$ και πυκνότητας 900 kg/m^3 . Μέχρι ποια τιμή παροχής παραμένει η ροή στρωτή; Ποια θα ήταν η αντίστοιχη οριακή παροχή αν αντί για λάδι έρεε νερό 20°C ;

[$79 \text{ m}^3/\text{h}$, $0,48 \text{ m}^3/\text{h}$]

7. Σωλήνας 6 in καταλήγει σε ακροφύσιο με τελική διάμετρο 1,5 in. Αν η παροχή νερού στο σωλήνα είναι $90 \text{ m}^3/\text{h}$, να υπολογισθούν οι ταχύτητες και ο αριθμός Reynolds στην είσοδο και στην έξοδο του ακροφυσίου. Είναι η ροή στρωτή ή τυρβώδης;

[$1,37 \text{ m/s} - 2,1 \cdot 10^5$, $21,9 \text{ m/s} - 8,3 \cdot 10^5$]

8. Στον όγκο ελέγχου του σχήματος 3.6ε ρέει υγρό πυκνότητας 800 kg/m^3 . Η ροή είναι σταθερή και δεν υπάρχει



Σχ. 3.6ε

ανταλλαγή θερμότητας ή έργου με το περιβάλλον. Αν $A_1 = 0,2 \text{ m}^2$, $A_2 = 0,3 \text{ m}^2$, $A_3 = 0,2 \text{ m}^2$, $v_1 = 2 \text{ m/s}$, $v_3 = 4 \text{ m/s}$, και στα σημεία 1 και 3 το ύψος ολικής ενέργειας του υγρού είναι 9 m και 12 m αντίστοιχα, να υπολογισθούν η ταχύτητα και το ύψος ολικής ενέργειας του υγρού στην έξοδο.

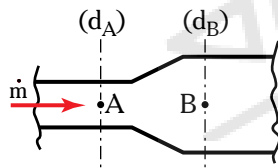
[4 m/s, 11 m]

9. Δύο δεξαμενές νερού με υψομετρική διαφορά των ελευθέρων επιφανειών τους 10 m, συνδέονται με σωλήνα διαμέτρου 8 cm. Αν το ύψος απωλειών δίνεται από τη σχέση $\Sigma h = 8 \cdot v^2/g$, να υπολογισθεί η παροχή σε m^3/h . Να σχεδιασθεί η πιεζομετρική γραμμή και η γραμμή ενέργειας.

[$Q = 63,4 \text{ m}^3/\text{h}$]

10. Νερό ρέει σε οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου 3 in, με παροχή $90 \text{ m}^3/\text{s}$ (σχ. 3.6στ). Το νερό συνεχίζει την πορεία του σε σωλήνα Β διπλάσιας διαμέτρου. Αν το ύψος απωλειών που προκαλεί η διαστολή είναι $0,4 \cdot v_A^2/g$, να υπολογισθεί η διαφορά πίεσης μεταξύ των Α και Β (όπου: Α και Β οι διατομές εισόδου και εξόδου της διαστολής). Να σχεδιασθεί η πιεζομετρική γραμμή και η γραμμή ενέργειας. Αν η ροή ήταν αντίστροφη και οι απώλειες ίδιες, πόση θα ήταν η διαφορά πίεσης;

[$\Delta p_{AB} = -2,1 \text{ kPa}$, $\Delta p_{BA} = 26,1 \text{ kPa}$]



Σχ. 3.6στ

11. Δεξαμενή ύψους 2 m φέρει στο χαμηλότερο σημείο της κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου 2 cm. Τροφοδοτούμε τη δεξαμενή με νερό παροχής $1,5 \text{ L/s}$. Θα γεμίσει η δεξαμενή; Αν όχι, σε ποιο ύψος θα ανέβει το νερό; (Οι τριβές να μην ληφθούν υπόψη).

[1,16 m]

12. Να υπολογισθεί με πόση ταχύτητα πρέπει να εκτοξευτεί νερό από κατακόρυφο σωλήνα, ώστε να φθάσει σε ύψος 11,5 m. (Οι απώλειες λόγω της αντιστάσεως του αέρα να μην ληφθούν υπόψη).

[15 m/s]

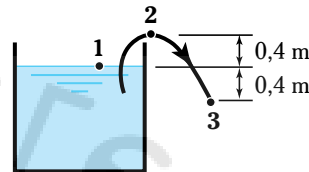
13. Υγρό πυκνότητας 1100 kg/m^3 βρίσκεται σε δεξαμενή, στην ελεύθερη επιφάνεια της οποίας η πίεση είναι 1,4 bar. Σε υψομετρική διαφορά 2 m από την ελεύθερη επιφάνεια υπάρχει στόμιο εξόδου διαμέτρου 4 cm με βαλβίδα. Αν ανοίξουμε τη βαλβίδα, το υγρό εξέρχεται στην ατμόσφαιρα. Να υπολογισθούν: α) η μέγιστη

ταχύτητα εξόδου και β) η παροχή εξόδου αν ανοίξουμε εντελώς τη βαλβίδα. Ο συντελεστής στομίου με ανοικτή βαλβίδα να ληφθεί ίσος με 0,80.

[α) 10,47 m/s, β) $37,9 \text{ m}^3/\text{h}$]

14. Με το σιφώνιο του σχήματος 3.6ζ, διαμέτρου 2 cm, μεταγγίζουμε υγρό πυκνότητας 900 kg/m^3 . Αν η πίεση πάνω από τη δεξαμενή είναι ατμοσφαιρική και οι απώλειες στο σιφώνιο αμελητέες, να υπολογισθούν: α) η πίεση του υγρού στο ψηλότερο σημείο του σιφωνίου και β) πόσα kg υγρού θα παραλάβουμε σε 1 min.

[α) 94,2 kPa, β) 47,5 kg]



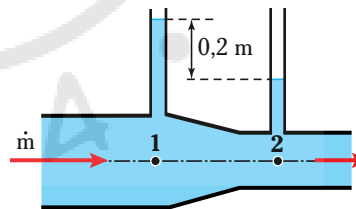
Σχ. 3.6ζ

15. Πετρέλαιο 20°C και σχετικής πυκνότητας 0,84 αντλείται με σωλήνα διαμέτρου 12 cm, μήκους 1 km με παροχή $75 \text{ m}^3/\text{h}$. Στην είσοδο του σωλήνα, η απόλυτη πίεση είναι 3,3 atm. Η έξοδος έχει ατμοσφαιρική πίεση και βρίσκεται 15 m υψηλότερα της εισόδου. Να υπολογισθεί το ύψος απωλειών h_f και το ύψος κινητικής ενέργειας.

[$h_f = 18,3 \text{ m}$, $v^2/2g = 0,173 \text{ m}$]

16. Νερό ρέει μέσω του σωλήνα του σχήματος 3.6η ($d_1 = 10 \text{ cm}$, $d_2 = 6 \text{ cm}$). Να υπολογισθούν οι ταχύτητες στα σημεία 1 και 2 και η παροχή του νερού.

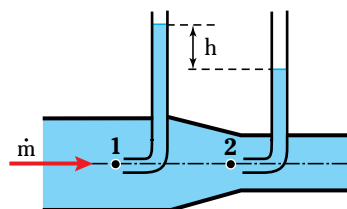
[$21,67 \text{ m}^3/\text{h}$]



Σχ. 3.6η

17. Νερό ρέει μέσω του σωλήνα του σχήματος 3.6θ ($d_1 = 10 \text{ cm}$, $d_2 = 6 \text{ cm}$) με παροχή $0,015 \text{ m}^3/\text{s}$. Να υπολογισθεί η υψομετρική διαφορά h και οι ταχύτητες εισόδου και εξόδου στο τμήμα του σωλήνα.

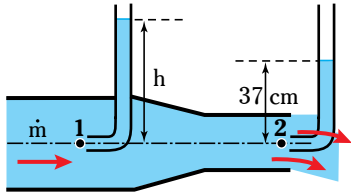
[$h = 0$, $v_{\text{εισ}} = 1,9 \text{ m/s}$, $v_{\text{εξ}} = 5,3 \text{ m/s}$]



Σχ. 3.6θ

18. Ο δεύτερος σωλήνας Pitot του σχήματος 3.6ι βρίσκεται τοποθετημένος στην έξοδο του νερού από το σωλήνα στην ατμόσφαιρα. Να υπολογισθεί η ένδειξη του πρώτου σωλήνα h .

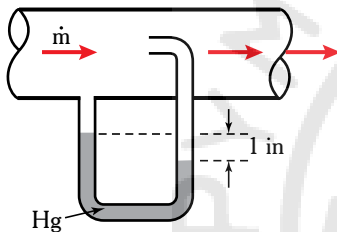
$$[h = 0,37 \text{ m}]$$



Σχ. 3.6ι

19. Να υπολογισθεί η ταχύτητα ροής και η παροχή στον σωλήνα του σχήματος 3.6ια διαμέτρου 3 in, αν το ρευστό είναι: α) νερό, β) πετρέλαιο σχετικής πυκνότητας 0,85. Το μανόμετρο περιέχει υδράργυρο.

$$[2,5 \text{ m/s} - 41,1 \text{ m}^3/\text{h}, 2,7 \text{ m/s} - 44,9 \text{ m}^3/\text{h}]$$

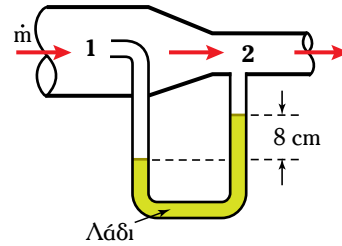


Σχ. 3.6ια

20. Στον σωλήνα του σχήματος 3.6ιβ ($d_1 = 10 \text{ cm}$, $d = 6 \text{ cm}$) ρέει αέρας 20°C . Το υγρό του μανομέτρου είναι λάδι σχετικής πυκνότητας 0,83. Αν $p_1 = 170 \text{ kPa}$, να υπολογισθούν η πίεση στο σημείο 2 και η παροχή όγκου του αέρα.

$$[169,35 \text{ kPa}, 0,658 \text{ m}^3/\text{s}]$$

21. Υδροστρόβιλος τροφοδοτείται από δεξαμενή νερού που βρίσκεται 150 m ψηλότερα απ' αυτόν. Ο αγωγός έχει διάμετρο 30 cm και οι απώλειες δίνονται από τη σχέση: $\Sigma h = 2 \cdot v^2/g$. Το νερό εξέρχεται απ' τον στρόβι-



Σχ. 3.6ιβ

λο (μέσω αγωγού ίδιας διαμέτρου) στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα 5 m/s. Αν ο βαθμός αποδόσεως του υδροστρόβιλου είναι 70%, να υπολογισθεί η ισχύς του.

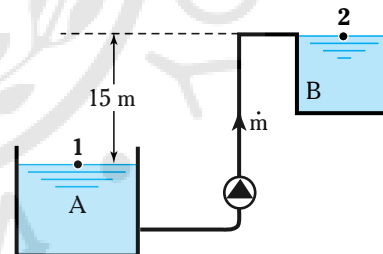
$$[348 \text{ kW}]$$

22. Αντλία με βαθμό αποδόσεως 70%, αναρροφά νερό από δεξαμενή πίεσεως 5 bar και το καταθλίβει σε δεξαμενή 10 bar, με παροχή $30 \text{ m}^3/\text{h}$. Η ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής καταθλίψεως βρίσκεται 2 m υψηλότερα απ' την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής αναρροφήσεως. Αν το ύψος απωλειών είναι 3 m, να υπολογισθεί το αποδιδόμενο ύψος και η ισχύς της αντλίας.

$$[56 \text{ m}, 6,53 \text{ kW}]$$

23. Η αντλία του σχήματος 3.6ιγ έχει μέγιστη αποδιδόμενη ισχύ 12 kW. Η διάμετρος του σωλήνα καταθλίψεως είναι 5 in. Ποια θα είναι η μέγιστη παροχή νερού απ' τη δεξαμενή A στη B, αν οι απώλειες δίνονται από τη σχέση: $\Sigma h = 6 \cdot v^2/g$ (v η ταχύτητα του σωλήνα καταθλίψεως);

$$[200,8 \text{ m}^3/\text{s}]$$



Σχ. 3.6ιγ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

4.1 Διαστατική ανάλυση (dimensional analysis).

4.1.1 Εισαγωγή.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τα ισοζύγια της μάζας και της ενέργειας (αξιοποιώντας τους όγκους ελέγχου σε πεδία ροής), τα οποία μας οδήγησαν σε εκτιμήσεις των γενικών παραμέτρων ροής: πίεσεως, παροχής, ταχύτητας κ.ά.. Σε αρκετές περιπτώσεις, ο όγκος ελέγχου που χρησιμοποιήσαμε ήταν στοιχειώδης, οδηγώντας σε βασικές επιμέρους διαφορικές εξισώσεις της ροής. Αυτή η αναλυτική μέθοδος (η οποία περιέχει ιδιαίτερα αναπτυγμένες μαθηματικές μεθόδους και τεχνικές πέραν των όσων αναφέρθηκαν), περιορίζεται πρακτικά στην αντιμετώπιση προβλημάτων ροής με αρκετά απλή γεωμετρία και σε σαφώς καθορισμένες επιφάνειες ελέγχου. Τα περισσότερα προβλήματα της ροής όμως είναι πάρα πολύ σύνθετα και δεν είναι δυνατό να λυθούν με την αναλυτική μέθοδο. Είναι αναγκαίο να εξετασθούν πειραματικά και να καταγραφούν τα στοιχεία που περιγράφουν τη συμπεριφορά τους. Ήδη αναφερθήκαμε αναλυτικά στην πειραματική διαδικασία του Reynolds που αφορούσε στο πέρασμα από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή (παράγρ. 3.1.4). Γενικά, οι φυσικές παράμετροι που επηρεάζουν τα προβλήματα ροής, είναι αρκετές και η πειραματική μελέτη της κάθε μιας χωριστά, εξαιρετικά επίπονη. Η κατάλληλη ομαδοποίηση των φυσικών παραμέτρων (όπως θα δείξουμε σε αδιάστατες ομάδες), οδηγεί σε απλοποίηση την πειραματική διαδικασία. Μ' αυτόν τον τρόπο τα προς μελέτη στοιχεία είναι λιγότερα και τα αποτελέσματα εκφράζονται με συμπαγή και πρακτικά αξιοποιήσιμη μορφή. Οι εμπειρικές εξισώσεις είναι η πλέον κατάλληλη μορφή. Αλλά και οι γραφικές παραστάσεις (διαγράμματα) είναι ιδιαίτερα χρήσιμες. Τέλος, τα ταξινομημένα σε πίνακες στοιχεία μπορούν να αξιοποιηθούν, αλλά δεν μπορούν να δείξουν άμεσα τις πιθανές νομοτέλειες που αποκαλύπτει η πειραματική διαδικασία.

Μία σημαντική δυσκολία της πειραματικής διαδικασίας, συνδέεται με το κόστος αλλά και τις δυνατότη-

τες πειραματισμού. Για παράδειγμα, είναι ασύμφορη έως πρακτικά αδύνατη η πειραματική διαδικασία της δυναμικής ανώσεως να γίνεται με αληθινά αεροπλάνα. Είναι πολύ πιο πρακτικό να πειραματιστούμε επί ομοιωμάτων (μοντέλων) υπό κατάλληλη κλίμακα. Πρέπει όμως να εξασφαλίσουμε ότι τα ομοιώματα αυτά έχουν παρόμοια συμπεριφορά με το πρωτότυπο. Φυσικά, οι τελικές δοκιμές θα αφορούν στο πρωτότυπο.

Σ' αυτό το κεφάλαιο συζητάμε την προετοιμασία και την ερμηνεία των πειραματικών στοιχείων με τη μέθοδο της διαστατικής ανάλυσης. Μια τεχνική παραδοσιακή στη Μηχανική των Ρευστών και ταυτόχρονα χρήσιμη σε όλους τους κλάδους εφαρμοσμένης μηχανικής, και τις φυσικές επιστήμες γενικότερα. Παρουσιάζουμε επίσης τις βασικές απαιτήσεις, ώστε τα ομοιώματα που θα χρησιμοποιηθούν στην πειραματική διαδικασία, να έχουν παρόμοια συμπεριφορά με το πρωτότυπο ρευστοδυναμικό σύστημα που μελετάμε.

4.1.2 Διαστάσεις και μονάδες.

Όπως γνωρίζουμε, κάθε φυσικό μέγεθος προσδιορίζεται ποσοτικά από μία αριθμητική τιμή και τη μονάδα, στην οποία η τιμή αυτή αναφέρεται. Αντίστοιχα, κάθε εξίσωση που φιλοδοχεί να περιγράψει μία φυσική νομοτέλεια, θα πρέπει όχι μόνο να είναι αριθμητικά σωστή (δηλ. να δίνει σωστά αριθμητικά αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται), αλλά να εκφράζει σωστά και τη σχέση μεταξύ των μονάδων και των φυσικών μεγεθών. Π.χ., η εξίσωση $B = 9,807 \cdot m$ (όπου: B το βάρος και m η μάζα), εφαρμοζόμενη στην επιφάνεια της θάλασσας και σε γεωμετρικό πλάτος 45° , με χρήση μονάδων του SI, δίνει σωστά αριθμητικά αποτελέσματα αντιστοιχίσεως του βάρους με τη μάζα ενός σώματος. Δίνει όμως λανθασμένα αποτελέσματα αν λόγου χάριν εκφράσουμε τη μάζα σε lb. Αλλά η εξίσωση αυτή είναι λανθασμένη και από πλευράς μονάδων και διαστάσεων, αφού εξισώνει τη διάσταση του βάρους (δηλ. της δυνάμεως) με την εντελώς διαφορετική διάσταση της μάζας.

Για να διευκολυνθεί η έκφραση των φυσικών νόμων με εξισώσεις γενικής ισχύος, διαμορφώθηκαν

τα συστήματα μονάδων. Βασικό χαρακτηριστικό τους είναι η επιλογή κάποιων φυσικών μεγεθών ως θεμελιωδών, οπότε όλα τα άλλα προκύπτουν ως παράγωγα. Έτσι, στο **SI** επιλέγονται ως **θεμελιώδη μεγέθη**, επτά, τα οποία καλύπτουν όλους τους τομείς της επιστημονικής και τεχνολογικής δραστηριότητας (πίν. 4 και 5 Παραρτήματος). Για τις ανάγκες της Μηχανικής των Ρευστών, μας ενδιαφέρουν τα εξής: Το **μήκος**, η **μάζα** και ο **χρόνος** και –σε ορισμένες περιπτώσεις– η **θερμοκρασία**. Για κάθε θεμελιώδες μέγεθος ορίστηκε αυθαίρετα (κατόπιν συμφωνίας) μια μονάδα, δηλαδή ένα μέτρο **συγκρίσεως**. Κάθε ένα από τα βασικά μεγέθη δύναται να παρασταθεί με ένα γράμμα, το οποίο συμβολίζει γενικά τη φύση του μεγέθους. Το γράμμα τούτο καλείται **διάσταση του μεγέθους**. Έτσι, αν το μήκος γενικά το συμβολίσουμε με **L**, αυτό αποτελεί γενικότερη έννοια από μία συγκεκριμένη απόσταση *s*, ένα συγκεκριμένο μήκος *l*, ένα ύψος *y*, ένα πλάτος *x* κ.λπ.. Η μονάδα μετρήσεως του SI για τη διάσταση αυτή είναι το μέτρο (m). Αντίστοιχα η διάσταση **M** της μάζας είναι έννοια γενικότερη από τη συγκεκριμένη μάζα *m* που συναντάμε σε ένα πρόβλημα, η διάσταση **T** του χρόνου έννοια γενικότερη απ' τον συγκεκριμένο χρόνο *t* και η διάσταση **Θ** της θερμοκρασίας, έννοια γενικότερη από κάποια θερμοκρασία ή θερμοκρασιακή διαφορά.

Από τη στιγμή που καθορίστηκαν οι διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών, οι διαστάσεις των παραγώγων προκύπτουν από τις θεμελιώδεις, με αξιοποίηση των ορισμών ή των φυσικών νόμων (ακριβώς όπως προκύπτουν για κάθε σύστημα οι παράγωγες μονάδες). Έτσι, η ταχύτητα η οποία ορίζεται ως λόγος μήκους προς χρόνο, θα έχει διάσταση $L/T = L \cdot T^{-1}$, η επιτάχυνση, $L/T^2 = L \cdot T^{-2}$, αφού η δύναμη, η οποία σύμφωνα με το Δεύτερο Νόμο του Newton ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση, θα έχει διάσταση: $M \cdot L/T^2 = M \cdot L \cdot T^{-2}$. Γενικότερα, η διάσταση ενός παράγωγου μεγέθους *G* ισούται με το γινόμενο των διαστάσεων των θεμελιωδών μεγεθών υψωμένων σε δυνάμεις:

$$[G] = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \cdot \Theta^{\delta} \quad (4.1)$$

όπου: $[G]$ η διάσταση του μεγέθους *G* και $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, μικροί ακέραιοι (θετικοί, αρνητικοί ή μηδέν). Οι εξισώσεις αυτής της μορφής που εκφράζουν σχέση μεταξύ διαστάσεων φυσικών μεγεθών, ονομάζονται **διαστατικές εξισώσεις**.

Η **διάσταση** ενός μεγέθους αναφέρεται στη φυσική του έννοια γενικά. Άρα την ίδια διάσταση είναι

δυνατόν να έχουν περισσότερα από ένα (συγγενή) φυσικά μεγέθη (π.χ. ο χρόνος και η περίοδος). Το **σύμβολο**, παριστάνει μία συγκεκριμένη ποσότητα (γνωστή ή άγνωστη) του φυσικού μεγέθους, η οποία υπεισέρχεται στους τύπους. Τέλος, η **μονάδα μετρήσεως** αποτελεί το μέτρο συγκρίσεως της ποσότητας του φυσικού μεγέθους και εξαρτάται από το σύστημα μονάδων, στο οποίο εργαζόμαστε. Σε ένα σύστημα μονάδων όλα τα μεγέθη ίδιας διαστάσεως εκφράζονται ποσοτικά στην ίδια μονάδα.

Στον πίνακα 4.1.1 βλέπομε τις διαστάσεις των φυσικών μεγεθών που συναντάμε στη Μηχανική των Ρευστών.

4.1.3 Ομογενείς εξισώσεις.

Μία εξίσωση, η οποία περιγράφει μια φυσική νομοτέλεια, πρέπει να είναι και διαστατικά ορθή (**διαστατικά ομογενής**, dimensionally homogeneous). Αυτό σημαίνει πως έχει και στα δύο σκέλη της τις ίδιες διαστάσεις. Για παράδειγμα η εξίσωση:

$$B = m \cdot g$$

αντιστοιχεί στη διαστατική εξίσωση:

$$M \cdot L \cdot T^{-2} = (M) \cdot (L \cdot T^{-2})$$

Εάν το ένα σκέλος της εξισώσεως αποτελείται από όρους (προσθετέους), κάθε όρος έχει επίσης τις ίδιες διαστάσεις. Παραδείγματος χάριν στην εξίσωση Bernoulli (3.15):

$$\dot{m} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \dot{m} \cdot \frac{v_1^2 - v_2^2}{\rho} + \dot{m} \cdot g \cdot (y_1 - y_2) = \dot{W} \quad (3.15)$$

το πρώτο σκέλος έχει τρεις προσθετέους, οι διαστάσεις των οποίων είναι αντίστοιχα:

$$(M \cdot T^{-1}) \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}) / (M \cdot L^{-3}) = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

$$(M \cdot T^{-1}) \cdot (L \cdot T^{-1})^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

$$(M \cdot T^{-1}) \cdot (L \cdot T^{-2}) \cdot (L) = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

δηλαδή διαστάσεις ισχύος, ίδιες μ' αυτές του δεύτερου σκέλους της εξισώσεως.

Αν όλους τους όρους μίας διαστατικά ομογενούς εξισώσεως τους διαιρέσουμε διά ενός φυσικού μεγέθους, τότε και οι διαστάσεις της εξισώσεως διαιρούνται διά των διαστάσεων του μεγέθους (και η διαστατική ομοιογένεια διατηρείται). Έτσι, στην παράγραφο 3.4.3, διαιρώντας τους όρους της εξισώσεως (3.15) διά της παροχής όγκου προέκυψε η μορφή:

Πίνακας 4.1.1
Διαστάσεις φυσικών μεγεθών.

Φυσικό μέγεθος	Διάσταση	Σύμβολο	Μονάδες στο SI
Μήκος	L	L, l, s, x, y	m (μέτρο)
Μάζα	M	m	kg (χιλιόγραμμα)
Χρόνος	T	t	s (δευτερόλεπτο)
Θερμοκρασία	Θ	T	K (βαθμός Kelvin)
Εμβαδόν	L ²	A, S	m ² (τετραγωνικό μέτρο)
Όγκος	L ³	V	m ³ (κυβικό μέτρο)
Πυκνότητα	M · L ⁻³	ρ	kg/m ³
Ταχύτητα	L · T ⁻¹	v	m/s
Επιτάχυνση	L · T ⁻²	a, g	m/s ²
Γωνία	-	θ	rad
Γωνιακή ταχύτητα	T ⁻¹	ω	rad/s
Δύναμη	M · L · T ⁻²	F, B	N (= kg · m · s ⁻²)
Ειδικό βάρος	M · L ⁻² · T ⁻²	γ	N/m ³ (= kg · m ⁻² · s ⁻²)
Πίεση, τάση	M · L ⁻¹ · T ⁻²	p, τ, σ	Pa (= kg · m ⁻¹ · s ⁻²)
Ορμή	M · L · T ⁻¹	J	kg · m/s
Ενέργεια	M · L ² · T ⁻²	E, Q, W	J (= kg · m ² · s ⁻²)
Ισχύς	M · L ² · T ⁻³	E, Q̇, W	W (= kg · m ² · s ⁻³)
Παροχή μάζας	M · T ⁻¹	ḡ	kg/s
Παροχή όγκου	L ³ · T ⁻¹	Ḡ	m ³ /s
Ιξώδες	M · L ⁻¹ · T ⁻¹	μ	N · s/m ² (= kg · m ⁻¹ · s ⁻¹)
Κινηματικό ιξώδες	L ² · T ⁻¹	ν	m ² /s
Επιφανειακή τάση	M · T ⁻²	σ	N/m (= kg · s ⁻²)
Ειδική θερμότητα	L ² · T ⁻² · Θ ⁻¹	c _p , c _v	J/(KgK) (= m ² · s ⁻² · K ⁻¹)

$$(p_1 - p_2) + \rho \cdot \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \gamma \cdot (y_1 - y_2) = p_w \quad (3.15\beta)$$

στην οποία όλοι οι όροι εκφράζονται σε διαστάσεις πίεσεως:

$$(M \cdot L^2 \cdot T^{-3}) / (L^3 \cdot T^{-1}) = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

Αντίστοιχα, διαιρώντας τους όρους της εξίσωσης (3.15) διά της παροχής βάρους (B/t), προέκυψε η εξίσωση (3.16):

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (3.16)$$

στην οποία όλοι οι όροι εκφράζονται σε διαστάσεις μήκους:

$$(M \cdot L^2 \cdot T^{-3}) / (M \cdot L \cdot T^{-2} / T) = L$$

Όλες οι εξισώσεις που προκύπτουν με θεωρητική συνέπεια από τους θεμελιώδεις νόμους της Φυσικής, είναι διαστατικά ομογενείς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με κάποιες σημαντικές εξισώσεις, που προέκυψαν πειραματικά και αξιοποιήθηκαν σε υπολογιστικές διαδικασίες. Με τέτοιες διαστατικά ανομοιογενείς εξισώσεις, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, ιδιαίτερα σε ό,τι αφορά στις μονάδες.

4.1.4 Αδιάστατοι αριθμοί.

Είναι προφανές από τα προηγούμενα, πως αν διαιρέσουμε όλους τους όρους μίας διαστατικά ομογενούς εξίσωσης διά ενός όρου της (ή γενικότερα διά ενός μεγέθους ιδίων διαστάσεων), η ισοδύναμη εξίσωση που θα προκύψει, θα αποτελείται από αδιάστα-

τους όρους. Αν για παράδειγμα διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.16) διά του Σh θα προκύψει:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma \cdot \Sigma h} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g \cdot \Sigma h} + \frac{(y_1 - y_2)}{\Sigma h} = 1$$

Κάθε όρος αυτής της εξίσωσης είναι αδιάστατος.

Ένας αδιάστατος όρος καλείται **αδιάστατη ομάδα** ή απλά **αδιάστατος αριθμός**. Ο αδιάστατος αριθμός είναι ανεξάρτητος απ' το σύστημα μονάδων. Δηλαδή, αν σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα, αντικαταστήσουμε τα φυσικά μεγέθη που περιλαμβάνει μια αδιάστατη ομάδα με τις τιμές τους (εκφρασμένες στο ίδιο σύστημα μονάδων), θα προκύψει ένας **καθαρός αριθμός**. Ο αριθμός αυτός είναι ίδιος σε όποιο σύστημα μονάδων κι αν εργαστήκαμε (αρκεί να εργαστήκαμε με συνέπεια).

Οι αδιάστατες ομάδες αποτελούν βασικά εργαλεία της διαστατικής αναλύσεως. Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι αδιάστατες ομάδες, που επαναλαμβάνονται συχνά στη διαδικασία της διαστατικής αναλύσεως προβλημάτων. Έτσι, στη Μηχανική των Ρευστών συναντάμε πολύ συχνά λόγους δυνάμεων και ιδιαίτερα, τον λόγο των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις ιξώδους τριβής, που είναι γνωστός ως **αριθμός Reynolds**:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{F_{\text{αδράνειας}}}{F_{\text{ιξώδους}}} = \frac{m \cdot a}{\mu (dv/dy) \cdot A} = \\ &= \frac{\rho \cdot v^2 \cdot L^3}{\rho \nu \cdot v \cdot L^2} \Rightarrow Re = \frac{L \cdot v}{\nu} \end{aligned}$$

όπου: L χαρακτηριστικό μήκος του αγωγού (για σω-

λίνες η διάμετρος), v η ταχύτητα ροής και ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Με τον ίδιο τρόπο έχουν προκύψει και συναντώνται συχνά, ο αδιάστατος αριθμός Froude (δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις βαρύτητας), ο αριθμός Weber (δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις επιφανειακής τάσεως), ο αριθμός Mach (ταχύτητα προς ταχύτητα ήχου) κ.ά..

Στον πίνακα 4.1.2 αναφέρονται ορισμένοι σημαντικοί αδιάστατοι αριθμοί που συναντάμε στη μηχανική των ρευστών και στη μετάδοση θερμότητας.

Οι αδιάστατοι αριθμοί παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των φαινομένων της Μηχανικής των Ρευστών, της Μεταδόσεως Θερμότητας και σε πολλών άλλων κλάδων των τεχνικών επιστημών. Ήδη έχουμε χρησιμοποιήσει τον αριθμό Reynolds στο Τρίτο Κεφάλαιο (και θα τον συναντάμε συνέχεια). Επίσης, συναντήσαμε το λόγο $c_p/c_v = k$, καθώς και το συντελεστή οπισθέλκουσας C_D .

Ανακεφαλαιώνοντας, μια διαστατικά ομογενής εξίσωση περιλαμβάνει:

1) **Διαστατικές μεταβλητές** (dimensional variables). Πρόκειται για τα φυσικά μεγέθη, όπως η ταχύτητα, η πίεση, η πυκνότητα κ.λπ. και χωρίς τα οποία δεν νοείται εξίσωση.

2) **Διαστατικές σταθερές** (dimensional constants). Αυτές έχουν σταθερή τιμή, που όμως εξαρτάται απ' το σύστημα μονάδων, στο οποίο εργαζόμαστε (π.χ. $g = 9,807 \text{ m/s}^2 = 980,7 \text{ cm/s}^2 = 32,18 \text{ ft/s}^2$).

3) **Αδιάστατες ομάδες** (dimensionless groups). Αυτές απαρτίζονται από κάποια φυσικά μεγέθη (δι-

Πίνακας 4.1.2
Αδιάστατοι αριθμοί.

Αριθμός	Σύμβολο	Τύπος	Περιγραφή	Σημασία
Reynolds	Re, N_{Re}	$L \cdot v / \nu$	Δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις ιξώδους τριβής.	Παντού.
Froude	Fr, N_{Fr}	$v^2 / L \cdot g$	Δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις βαρύτητας.	Επιφανειακή ροή.
Weber	We, N_{We}	$\rho \cdot L \cdot v^2 / T$	Δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις επιφανειακής τάσεως.	Επιφανειακή ροή.
Euler	Eu, N_{Eu}	$p / (\rho \cdot v^2)$	Δυνάμεις πύεσης προς δυνάμεις αδράνειας.	Σπηλαίωση.
Mach	M	$v / v_{\text{ήχου}}$	Ταχύτητα προς ταχύτητα ήχου.	Συμπεστή ροή.
Λόγος c_p/c_v	k	v_p / c_v	Ενθαλπία προς εσωτερική ενέργεια.	Συμπεστή ροή.

αστατικές μεταβλητές) και η τιμή τους μεταβάλλεται όταν μεταβληθεί ένα από αυτά.

4) **Αδιάστατες σταθερές** (pure constants), όπως το π και το e , με σταθερή τιμή.

4.1.5 Διαστατική ανάλυση.

Η διαστατική ανάλυση αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την προσέγγιση ενός προβλήματος, το οποίο δεν δύναται να αντιμετωπισθεί με την αναλυτική χρήση των φυσικών νόμων και της μαθηματικής αναλύσεως.

Τέτοια προβλήματα συναντάμε συχνά στη μηχανική. Και είναι ιδιαίτερα κοινά στη Μηχανική των Ρευστών. Στην προσπάθεια αντιμετωπίσεώς τους, καταφεύγουμε στο πείραμα, προσπαθώντας να δώσουμε ικανοποιητική απάντηση. Αλλά και η εμπειρική πειραματική προσέγγιση, παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες, λόγω των πολλών παραμέτρων που επηρεάζουν το πρόβλημα και πρέπει να μελετηθούν χωριστά. Για παράδειγμα, η πώση πίεσεως λόγω τριβής σε κυλινδρικό σωλήνα, σύμφωνα με τα δεδομένα της θεωρίας και της εμπειρίας, εξαρτάται απ' τις ακόλουθες μεταβλητές: το μήκος, τη διάμετρο και την τραχύτητα του αγωγού, την παροχή ροής (ή την ταχύτητα), την πυκνότητα και το ιξώδες του υγρού. Αν μεταβληθεί έστω και μία εκ των παραμέτρων, μεταβάλλεται και η πώση πίεσεως. Η πειραματική διαδικασία με στόχο να διαπιστωθούν οι συσχετίσεις και να προκύψει σχέση χρήσιμη στους υπολογισμούς, είναι επίπονη και δύσκολη. Κάθε παράμετρος πρέπει να μελετηθεί χωριστά και στη συνέχεια, η επίδρασή της στην πώση πίεσεως να συσχετιστεί με την επίδραση των άλλων παραμέτρων. Εδώ παρεμβαίνει η **διαστατική ανάλυση** και απλοποιεί κατά πολύ την πειραματική διαδικασία, οργανώνοντας –όπως θα δούμε– τις παραμέτρους του προβλήματος σε αδιάστατες ομάδες.

Η όλη διαδικασία μπορεί γενικά να περιγραφεί ως εξής:

1) Προσδιορίζουμε όλες τις παραμέτρους που επηρεάζουν ένα υπό μελέτη φαινόμενο, αξιοποιώντας τη θεωρία, την εμπειρία και το πείραμα. Το βήμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, αφού συνήθως δεν υπάρχει αποδεικτική διαδικασία για το αν πράγματι λήφθηκαν υπόψη όλες οι παράμετροι.

2) Υποθέτουμε μία άγνωστη γενική συνάρτηση η οποία περιγράφει το φαινόμενο:

$$V = f(V_1, V_2, \dots, V_k)^1 \quad (4.2)$$

όπου: $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dots, \dot{V}_k$, τα φυσικά μεγέθη (παράμετροι) που επηρεάζουν το \dot{V} και k ο αριθμός των παραμέτρων του προβλήματος.

3) Με τη **διαστατική ανάλυση** αντικαθιστούμε τα παραπάνω μεγέθη με αδιάστατες ομάδες, οι οποίες είναι σαφώς λιγότερες από τα μεμονωμένα μεγέθη. Έτσι λαμβάνουμε την (επίσης άγνωστη, αλλά με λιγότερες παραμέτρους) συνάρτηση:

$$G = \Phi(G_1, G_2, \dots, G_n) \quad (4.3)$$

όπου: n αριθμός των αδιαστάτων ομάδων ($n < k$) και G, G_1, G_2, \dots, G_n , αδιάστατες ομάδες.

4) Ακολουθεί η πειραματική μελέτη (συνήθως επί ομοιωμάτων) για τον τρόπο που κάθε αδιάστατη ομάδα επηρεάζει το πρόβλημα και του συσχετισμού των αδιαστάτων ομάδων.

Η διαστατική ανάλυση δεν θα δώσει τελική απάντηση στο πρόβλημα (όπως θα δούμε και στη συνέχεια με παραδείγματα), αλλά θα προωθήσει αποφασιστικά την (πειραματική) διαδικασία επιλύσεώς του.

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι διαστατικής ανάλυσεως (με αρκετές παραλλαγές). Η μία είναι η μέθοδος του Rayleigh και η δεύτερη, η μέθοδος του Buckingham.

4.1.6 Η μέθοδος Rayleigh.

Η μέθοδος του Rayleigh βασίζεται στην υπόθεση πως το υπό μελέτη φαινόμενο είναι δυνατόν να περιγραφεί από μία διαστατικά ομογενή εξίσωση της μορφής:

$$V = C \cdot V_1^a \cdot V_2^b \dots V_k^k \quad (4.4)$$

όπου: C αδιάστατη σταθερά, V, V_1, V_2, \dots, V_k τα φυσικά μεγέθη που αποτελούν παραμέτρους του προβλήματος και a, b, \dots, k , άγνωστοι αριθμητικοί εκθέτες.

Η εξίσωση (4.4) πιθανόν να μην ισχύει και το \dot{V} να ισούται με άθροισμα όρων διαστατικά ομογενών, οπότε η (4.4) αντικαθίσταται από τη γενικότερη:

$$V = V_1^a \cdot V_2^b \dots V_k^k \cdot \sum G_i \quad (4.4a)$$

όπου: G_i , αδιάστατες ομάδες των μεταβλητών του προβλήματος.

Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του C και τις τιμές των εκθετών a, b, \dots, k , το πρόβλημα θα έχει επιλυθεί. Αλλά όπως ήδη αναφέραμε, η διαστατική ανάλυση δεν δίνει την τελική λύση του προβλήματος, αλλά βοηθά προς την κατεύθυνση αυτή, μειώνοντας

¹ Εδώ τα V, V_1, V_2, \dots, V_k δεν συμβολίζουν όγκο ρευστού.

σημαντικά τους προς περαιτέρω διερεύνηση αγνώστων.

Στην εξίσωση (4.4) αντιστοιχεί η διαστατική εξίσωση:

$$[V] = [V_1]^a \cdot [V_2]^b \dots [V_k]^k \quad (4.5)$$

Αν οι θεμελιώδεις διαστάσεις είναι j (στη Μηχανική Ρευστών είναι συνήθως $j = 3: L, M, T$), προκειμένου να ισχύει η εξίσωση (4.5), για κάθε θεμελιώδη διάσταση θα πρέπει να ισχύει αριθμητική σχέση μεταξύ των εκθετών a, b, \dots, k :

Ο εκθέτης μιας θεμελιώδους διαστάσεως στο πρώτο μέλος, ισούται με τον εκθέτη της ίδιας διαστάσεως στο δεύτερο.

Εφαρμόζοντας αυτόν τον απλό κανόνα, προκύπτουν εξισώσεις μεταξύ των εκθετών a, b, \dots, k . Αξιοποιώντας τις εξισώσεις αυτές, μειώνουμε σημαντικά τον αριθμό των αγνώστων. Αν μάλιστα τους ομαδοποιήσουμε, αξιοποιώντας τους εκθέτες που συνεχίζουν να είναι αγνώστοι, θα προκύψουν αδιάστατες ομάδες, που διευκολύνουν την παραπέρα πειραματική επεξεργασία.

Η μέθοδος γίνεται κατανοητή με το ακόλουθο απλό παράδειγμα:

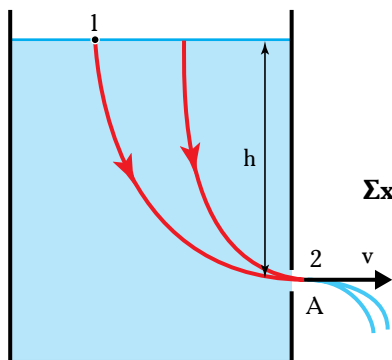
Παράδειγμα (Εξίσωση Torricelli)

Δεξαμενή περιέχει νερό. Σε υψομετρική διαφορά h από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, υπάρχει οπή εκροής (σχ. 4.1). Να υπολογισθεί η ταχύτητα εξόδου του νερού από την οπή (οι τριβές να αγνοηθούν).

Λύση.

α) **Προσδιορισμός φυσικών παραμέτρων:** Η ταχύτητα εξόδου v εξαρτάται από την επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας g , την υψομετρική διαφορά μεταξύ ανοίγματος και ελεύθερης επιφάνειας h και, πιθανόν, από την πυκνότητα του υγρού ρ .

β) **Καταγραφή διαστατικών δεδομένων:** Για να



Σχ. 4.1

διευκολυνθούμε στην ανάλυση, καταγράφουμε τα διαστατικά δεδομένα των φυσικών μεγεθών (αξιοποιώντας τον πίν. 4.1.1):

Ταχύτητα $v: L \cdot T^{-1}$.

Επιτάχυνση βαρύτητας $g: L \cdot T^{-2}$.

Ύψος $h: L$

Πυκνότητα $\rho: M \cdot L^{-3}$.

γ) **Υποθέτομε:** $v = C \cdot g^a \cdot h^b \cdot \rho^c$

δ) **Διαστατική ανάλυση:** Η διαστατική εξίσωση που αντιστοιχεί στην παραπάνω υπόθεση, είναι:

$$L \cdot T^{-1} = (L \cdot T^{-2})^a \cdot L^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c \Rightarrow \\ \Rightarrow L \cdot T^{-1} = L^{a+b-3c} \cdot M^c \cdot T^{-2a}$$

Για να ισχύει πρέπει οι εκθέτες κάθε μεγέθους να είναι ίσοι:

$$L: 1 = a + b - 3c$$

$$M: 0 = c$$

$$T: -1 = -2a$$

Επιλύοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων με τους τρεις αγνώστους προκύπτει:

$$a = 1/2, b = 1/2, c = 0$$

Δηλαδή η ταχύτητα εκροής δεν εξαρτάται απ' την πυκνότητα του υγρού, αλλά μόνο από το πεδίο βαρύτητας και την υψομετρική διαφορά:

$$v = C \cdot g^{1/2} \cdot h^{1/2} = C \cdot \sqrt{g \cdot h} \Rightarrow \frac{v^2}{gh} = C^2$$

Η διαστατική ανάλυση δεν μπορεί να προχωρήσει παραπέρα και να υπολογίσει την αδιάστατη σταθερά C . Τη συνέχεια την αναλαμβάνει το πείραμα (και σε ορισμένες περιπτώσεις, η θεωρία), το οποίο θα μας δώσει $C^2 = 2$.

4.1.7 Το θεώρημα Π και η μέθοδος Buckingham.

Από το προηγούμενο παράδειγμα φαίνεται ήδη η σημασία των αδιαστάτων αριθμών στη διαστατική ανάλυση. Ο Buckingham το 1914, επικεντρώνοντας στη σημασία τους, διατύπωσε το επονομαζόμενο θεώρημα Π, στο οποίο βασίζεται η μέθοδος διαστατικής ανάλυσεως που ανέπτυξε.

Σύμφωνα με το θεώρημα Π, το πλήθος των αδιαστάτων ομάδων που απαιτούνται για να περιγραφεί ένα πρόβλημα, ισούται με το πλήθος των παραμέτρων του προβλήματος, μείον το πλήθος των ανεξαρτήτων διαστάσεων που περιγράφουν αυτές τις παραμέτρους:

$$k = n - j \quad (4.6)$$

όπου: k το πλήθος των αναγκαίων αδιαστάτων ομά-

δων, n ο αριθμός των φυσικών μεγεθών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα (παράμετροι) και j ο αριθμός των θεμελιωδών διαστάσεων που απαιτούνται για τη διαστατική περιγραφή των φυσικών παραμέτρων. Υπενθυμίζουμε ότι στα περισσότερα προβλήματα της Μηχανικής των Ρευστών, $j = 3$.

Η απόδειξη του θεωρήματος Π βασίζεται στις προκύπτουσες εξισώσεις μεταξύ των εκθετών των φυσικών μεγεθών, n καθεμία των οποίων αντιστοιχεί σε μία θεμελιώδη διάσταση. Αν υποθέσουμε ότι το προς εξέταση πρόβλημα εκφράζεται από μία διαστατικά ομογενή σχέση της μορφής:

$$f(V_1, V_2, \dots, V_n) = C \quad (4.7)$$

όπου: V_1, V_2, \dots, V_n οι φυσικές παράμετροι του προβλήματος και C , αδιάστατη σταθερά. Η διαστατική ομοιογένεια επιβάλλει το πρώτο σκέλος της εξίσωσης να αποτελείται από αδιάστατους όρους της μορφής: $V_1^a \cdot V_2^b \dots V_k^n$. Αν όλες οι παράμετροι εκφράζονται διαστατικά από j θεμελιώδεις διαστάσεις, προκύπτουν j ανεξάρτητες εξισώσεις μεταξύ των n εκθετών. Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε j εκθέτες συναρτήσεων των άλλων, οπότε παραμένουν k άγνωστοι εκθέτες ($n - j = k$). Τακτοποιώντας τα φυσικά μεγέθη ανάλογα με τη δύναμη στην οποία υψώνονται, προκύπτει σχέση μεταξύ των k αδιαστάτων ομάδων, ισοδύναμη με την εξίσωση (4.7):

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = C \quad (4.8)$$

Κάθε αδιάστατη ομάδα Π_i έχει τη μορφή:

$$\Pi_i = V_1^a \cdot V_2^b \dots V_k^n \quad (4.9)$$

Στο παράδειγμα που εξετάσαμε, οι παράμετροι του προβλήματος είναι τρεις (v, g, h) και περιγράφονται διαστατικά από δύο θεμελιώδεις διαστάσεις (L, T). Σύμφωνα με το θεώρημα Π: $k = n - j = 3 - 2 = 1$, δηλαδή απαιτείται μία αδιάστατη ομάδα. Πράγματι, όπως είδαμε:

$$v = C \cdot \sqrt{g \cdot h} \Rightarrow \left(\frac{v^2}{g \cdot h} \right)^{1/2} = C$$

δηλαδή $\Pi = v^2 \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει και η μέθοδος διαστατικής αναλύσεως του Buckingham, η οποία επικεντρώνει στον προσδιορισμό των αδιαστάτων ομάδων που περιγράφουν το πρόβλημα. Όπως θα διαπιστώσουμε, υπάρχουν πολλές (και ισοδύναμες) δυνατές επιλογές των αδιαστάτων ομάδων Π . Γενικά είναι προτιμότερες οι πιο απλές αδιάστατες ομάδες και

ιδιαίτερα εκείνες που χρησιμοποιούνται πιο συχνά, έχοντας κάποια φυσική σημασία, δηλαδή οι αδιάστατοι αριθμοί του πίνακα 4.1.2.

4.2 Ομοιότητα.

4.2.1 Γενικά για την ομοιότητα.

Η έννοια της ομοιότητας είναι πολύ παλιά. Λέγεται πως ο εισηγητής της γεωμετρικής ομοιότητας Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.), την αξιοποίησε κατά το ταξίδι του στην Αίγυπτο και κατάφερε, με απλές μετρήσεις, να υπολογίσει με εξαιρετική για την εποχή του ακρίβεια, το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα.

Η ανάπτυξη όμως της θεωρίας της φυσικής ομοιότητας και η ευρεία πειραματική αξιοποίηση της σε πολύπλοκα φυσικά φαινόμενα όπως αυτά που συναντάμε στη Μηχανική των Ρευστών, είναι προϊόν της σύγχρονης εποχής.

Η σημασία της μεθόδου είναι τεράστια τόσο για τη Μηχανική των Ρευστών, όσο και για κλάδους που συνδέονται με αυτήν (ναυπηγία, αεροναυπηγική, αυτοκινητοβιομηχανία, μετεωρολογία κ.ά.), αλλά και για πολλούς άλλους επιστημονικούς και τεχνικούς κλάδους.

Γενικά μπορούμε να διακρίνουμε τέσσερα βασικά είδη ομοιότητας που ενδιαφέρουν το μηχανικό:

1) **Γεωμετρική ομοιότητα:** Ύπαρξη αναλογίας μηκών.

2) **Μηχανική ομοιότητα**, δηλαδή:

α) Στατική ομοιότητα: Ύπαρξη αναλογίας παραμορφώσεων.

β) Κινηματική ομοιότητα: Ύπαρξη αναλογίας χρόνου.

γ) Δυναμική ομοιότητα: Ύπαρξη αναλογίας δυνάμεων.

3) **Θερμική ομοιότητα:** Ύπαρξη αναλογίας θερμοκρασιών.

4) **Χημική ομοιότητα:** Ύπαρξη αναλογίας συγκεντρώσεων.

Η κεντρική ιδέα της θεωρίας της ομοιότητας, είναι να κατασκευάσουμε ένα «αντίγραφο» υπό κλίμακα του υπό μελέτη συστήματος, διαμορφώνοντας έτσι ελεγχόμενες συνθήκες αναλυτικής πειραματικής μελέτης. Το σύστημα καλείται **πρωτότυπο** και το αντίγραφο **ομοίωμα ή μοντέλο**. Εφόσον έχει επιτευχθεί **ομοιότητα** μεταξύ μοντέλου και πρωτοτύπου, είναι δυνατή η δημιουργία πειραματικών διατάξεων υπό κλίμακα (σμίκρυνση) για τη μελέτη των προβλημάτων που μας απασχολούν, π.χ. προβλημάτων ροής. Αν εξασφαλιστεί η διατήρηση των γενικότερων χαρακτηρι-

στικών της ροής στο μοντέλο, τα συμπεράσματα της μελέτης ισχύουν και για το πρωτότυπο, άρα δύνανται να εφαρμοσθούν σε μεγέθη που δεν μελετήθηκαν ή που δεν είναι δυνατό να μελετηθούν. Η γενίκευση αυτή έχει τεράστια πρακτική σημασία. Αποδεικνύει καταρχήν ότι δεν είναι αναγκαία η μελέτη κάθε μεμονωμένης περιπτώσεως, αλλά ότι δυναμικώς όμοιες περιπτώσεις δύνανται να καταταγούν σε κατηγορίες, κάθε μία απ' τις οποίες έχει κοινά χαρακτηριστικά και εμφανίζει εν δυνάμει κοινή λύση. Στην προσέγγιση αυτής της λύσεως, όπως είδαμε, συμβάλλει κατά πολύ η διαστατική ανάλυση.

Πότε όμως ένα μοντέλο θεωρείται όμοιο με το πρωτότυπο;

Προϋπόθεση για πλήρη συμβατότητα μεταξύ μοντέλου και πρωτοτύπου είναι η ισότητα όλων των σχετικών τιμών των αδιαστάτων παραμέτρων που έχει αναδείξει η διαστατική ανάλυση. Αν:

$$\Pi_m = f(\Pi_{m1}, \Pi_{m2}, \dots, \Pi_{mk}) \quad \text{και}$$

$$\Pi_p = f(\Pi_{p1}, \Pi_{p2}, \dots, \Pi_{pk}),$$

η πλήρης ομοιότητα απαιτεί:

$$\Pi_{m1} = \Pi_{p1}, \Pi_{m2} = \Pi_{p2}, \dots, \Pi_{mk} = \Pi_{pk}$$

Αλλά, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολο.

Στη Μηχανική των Ρευστών υπάρχουν τρεις διαδοχικές απαιτήσεις ομοιότητας: **Γεωμετρική ομοιότητα**, **κινηματική ομοιότητα** και **δυναμική ομοιότητα**.

4.2.2 Γεωμετρική ομοιότητα.

Η γεωμετρική ομοιότητα αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση της φυσικής ομοιότητας. **Ένα μοντέλο και ένα πρωτότυπο είναι γεωμετρικά όμοια αν και**

μόνο αν όλα τα μήκη των σωμάτων και στις τρεις συντεταγμένες του χώρου έχουν τον ίδιο λόγο (ο οποίος καλείται **κλίμακα μήκους** ή απλά, **κλίμακα**). Δηλαδή, υπάρχει αναλογία των γεωμετρικών διαστάσεων μοντέλου και πρωτοτύπου. Ο λόγος των γραμμικών διαστάσεων (μήκη πλευρών, ύψη κ.λ.π.) είναι σταθερός και ίσος με την κλίμακα του μοντέλου. Από αυτό συνάγεται ότι ο λόγος των εμβαδών θα ισούται με το τετράγωνο της κλίμακας και ο λόγος των όγκων με τον κύβο της κλίμακας:

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{y_m}{y_p} = \alpha \quad (4.10)$$

$$\frac{S_m}{S_p} = \alpha^2 \quad (4.10\alpha)$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \alpha^3 \quad (4.10\beta)$$

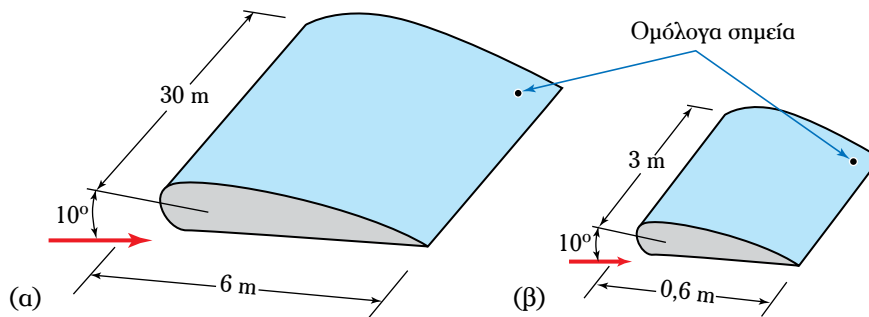
όπου α η κλίμακα (ο λόγος γεωμετρικής ομοιότητας).

Πρέπει να λάβουμε υπόψη πως δεν μιλάμε για απλά γεωμετρικά σχήματα αλλά για πολύπλοκα συστήματα. Για τούτο είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η **έννοια των ομολόγων σημείων**, δηλαδή χαρακτηριστικών σημείων του μοντέλου και του πρωτοτύπου, που έχουν την ίδια σχετική θέση.

Στο σχήμα 4.2α βλέπουμε την αναλογία που παρουσιάζεται μεταξύ των γραμμικών μεγεθών ομοιώματος με κλίμακα 1:10 ως προς το πρωτότυπο. Τα εμπρόσθια πλάτη των πτερυγίων, καθώς και τα μήκη τους, έχουν λόγο:

$$L_m : L_p = 3 : 30 = 6 : 0,6 = L_m : L_p = 1 : 10.$$

Αυτό όμως δεν συμβαίνει με τις αντίστοιχες γωνίες κλίσεως των πτερυγίων ως προς τη διεύθυνση ροής του αέρα, που και στις δύο περιπτώσεις είναι



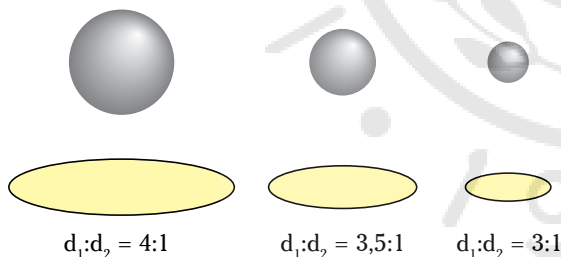
Σχ. 4.2α

Πρωτότυπο και μοντέλο 1:10.

10°. **Στη γεωμετρική ομοιότητα οι γωνίες μοντέλου και ομοιώματος είναι ίσες.**

Θα μπορούσαμε να παρομοιάσουμε την όλη διαδικασία δημιουργίας μοντέλου γεωμετρικά όμοιου με το πρωτότυπο, με την επιθυμητή σμίκρυνση φωτογραφίας του πρωτοτύπου. Πρέπει όμως να συμπληρώσουμε με κάποια επί πλέον σημαντικά για τη Μηχανική των Ρευστών γεωμετρικής φύσεως στοιχεία που δεν είναι δυνατόν να τα αντιληφθούμε από το σχήμα. **Η τραχύτητα της επιφάνειας του μοντέλου πρέπει να διατηρεί την κλίμακα, άρα να ισούται με το 1:10 της τραχύτητας του πρωτοτύπου. Επίσης, πρέπει να διατηρείται η κλίμακα στους συνδέσμους (πλώσεις) κ.λπ.. Κάθε απομάκρυνση από αυτές τις λεπτομέρειες, παραβιάζει τη γεωμετρική ομοιότητα και καθιστά την πειραματική διαδικασία επισφαλή.**

Σημειώνουμε πως μοντέλα που μακροσκοπικά φαίνονται όμοια, ίσως να παραβιάζουν τις παραπάνω αρχές της γεωμετρικής ομοιότητας με το πρωτότυπο και κατά συνέπεια να μην είναι συγκρίσιμα μ' αυτό. Στο σχήμα 4.2β, οι σφαίρες είναι γεωμετρικά όμοιες, με κλίμακα ίση με το λόγο των ακτίνων τους. Κατά συνέπεια μπορούμε να προχωρήσουμε εξετάζοντας και τις άλλες απαιτήσεις ομοιότητας. Όμως τα ελλειψοειδή, αν και φαίνονται γεωμετρικά όμοια, στην πραγματικότητα δεν είναι, αφού οι λόγοι της μεγάλης προς τη μικρή διάμετρό τους είναι διαφορετικοί.



Σχ. 4.2β

Γεωμετρικά όμοιες σφαίρες και ανόμοια ελλειψοειδή.

4.2.3 Κινηματική ομοιότητα.

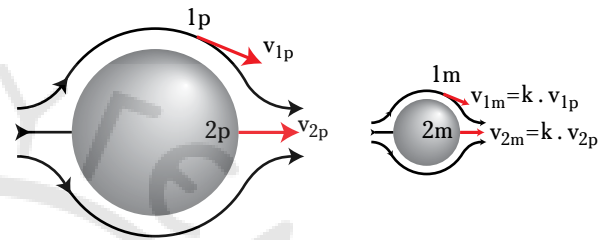
Για να υπάρχει κινηματική ομοιότητα μεταξύ μοντέλου και πρωτοτύπου, απαιτείται εκτός από τη σταθερή αναλογία μηκών (δηλ. τη γεωμετρική ομοιότητα) και σταθερή αναλογία χρόνων, άρα και ταχυτήτων. Κατά αντιστοιχία με τα ομόλογα χωρικά, έχομε και τα **ομόλογα χρονικά σημεία**.

Ένας περιεκτικός ορισμός της κινηματικής ομοιότητας, είναι ο ακόλουθος: **Δύο συστήματα είναι**

κινηματικά όμοια, αν ομόλογες στοιχειώδεις μάζες βρίσκονται σε ομόλογες θέσεις σε ομόλογους χρόνους.

Η γεωμετρική ομοιότητα προκύπτει σχετικά εύκολα από την κλίμακα των μηκών. Όμως η αναλογία χρόνου μεταξύ μοντέλου και πρωτοτύπου, συνήθως απαιτεί επί πλέον μέτρα και εκτιμήσεις.

Μία απλή αλλά ιδανική περίπτωση είναι η ατριβής ροή χωρίς την ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας (σχ. 4.2γ). Τέτοιες ροές είναι κινηματικά όμοιες με ανεξάρτητες κλίμακες μήκους και χρόνου.



Σχ. 4.2γ

Κινηματική ομοιότητα: Ατριβής ροή χωρίς την ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας.

Αν όμως στην ατριβή ροή υπάρχει και ελεύθερη επιφάνεια, απαιτείται εκτός από τη γεωμετρική ομοιότητα, το πρωτότυπο και το μοντέλο να έχουν τον ίδιο αριθμό Froude (ο οποίος περιλαμβάνει μόνο διαστάσεις μήκους και χρόνου, δηλ. είναι μια καθαρά κινηματική παράμετρος που καθορίζει τη σχέση μεταξύ μήκους και χρόνου):

$$Fr_p = \frac{v_p^2}{L_p \cdot g} = \frac{v_m^2}{L_m \cdot g} = Fr_m \quad (4.11)$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει σχέση μεταξύ της κλίμακας μήκους και της κλίμακας ταχύτητας. Πιο συγκεκριμένα, αν η κλίμακα μήκους είναι:

$$L_m/L_p = a \quad (4.11a)$$

η παραπάνω εξίσωση δίνει για την κλίμακα της ταχύτητας:

$$\frac{v_m}{v_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{1/2} = \sqrt{a} \quad (4.11b)$$

και την κλίμακα του χρόνου:

$$\frac{T_m}{T_p} = \frac{L_m/v_m}{L_p/v_p} = \sqrt{a} \quad (4.11γ)$$

Αν η ροή δεν είναι ατριβής, δηλαδή το ιξώδες, η επιφανειακή τάση και η συμπίεσιότητα είναι σημαντικά, η επίτευξη κινηματικής ομοιότητας εξαρτάται από την επίτευξη δυναμικής ομοιότητας.

4.2.4 Δυναμική ομοιότητα.

Δυναμική ομοιότητα υπάρχει όταν το μοντέλο και το πρωτότυπο έχουν αναλογία μηκών, χρόνων και δυνάμεων. Δηλαδή, όταν υπάρχει γεωμετρική και κινηματική ομοιότητα και επί πλέον οι λόγοι των ομολόγων δυνάμεων είναι ίσοι.

Και εδώ, η γεωμετρική ομοιότητα είναι η πρώτη προϋπόθεση. Χωρίς αυτή δεν έχει έννοια να μιλάμε για δυναμική ομοιότητα και η πειραματική διαδικασία δεν προχωρά. Η δυναμική και κινηματική ομοιότητα στα πραγματικά προβλήματα ροής, είναι συνήθως αλληλένδετες.

Από τη μέχρι τώρα ανάπτυξη, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις δυνάμεις που επιδρούν στο ρέον ρευστό ως εξής:

- 1) Δυνάμεις αδράνειας F_i .
- 2) Δυνάμεις βαρύτητας F_g .
- 3) Δυνάμεις πίεσης F_p .
- 4) Δυνάμεις ιξώδους τριβής F_f .
- 5) Δυνάμεις επιφανειακής τάσεως F_σ .

Ανάλογα με το πρόβλημα, κάποιες από αυτές είναι σημαντικές και κάποιες μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Για να επιτευχθεί σταθερή αναλογία των ομολόγων δυνάμεων πρέπει να λάβουμε υπόψη τους λόγους των σημαντικών δυνάμεων που επηρεάζουν τη ροή. Οι λόγοι αυτοί, όπως είδαμε, εκφράζονται με αδιάστατους αριθμούς (παράγρ. 4.1.4, πίν. 4.1.2). Η δυναμική ομοιότητα επομένως μεταξύ μοντέλου και πρωτοτύπου εξαρτάται από την ισότητα ορισμένων χαρακτηριστικών αδιαστάτων αριθμών. Πιο συγκεκριμένα:

1) **Συμπιεσμη ροή:** Προκειμένου να υπάρχει δυναμική ομοιότητα, πρέπει οι αριθμοί Reynolds (δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις ιξώδους τριβής) και Mach, καθώς και ο λόγος ειδικών θερμοτήτων του μοντέλου και του πρωτοτύπου να είναι ίσοι.

2) **Ασυμπιεστη ροή:** Όταν δεν υπάρχει ελεύθερη επιφάνεια (όπως στη ροή σε σωλήνα), για να υπάρχει δυναμική ομοιότητα, πρέπει το μοντέλο και το πρωτότυπο να έχουν τον ίδιο αριθμό Reynolds.

Όταν υπάρχει ελεύθερη επιφάνεια (π.χ. ροή σε κανάλι) πρέπει εκτός από τον ίδιο αριθμό Reynolds, το μοντέλο να έχει και ίδιο αριθμό Froude (δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις βαρύτητας) με το πρωτότυπο. Σε πιο σύνθετες περιπτώσεις υπάρχει απαίτηση ισότητας και για τον αριθμό Weber (δυνάμεις αδράνειας προς δυνάμεις επιφανειακής τάσεως), καθώς επίσης και του αριθμού Euler (δυνάμεις πίεσης προς δυνάμεις αδράνειας).

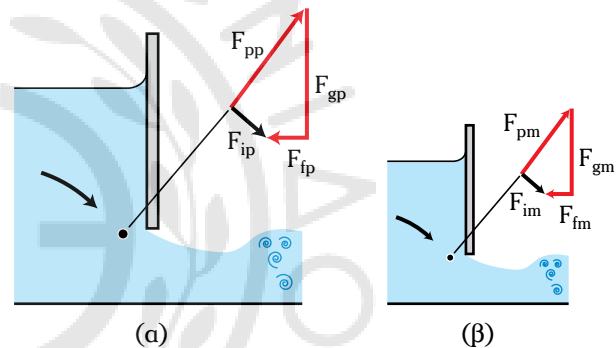
Από μαθηματική άποψη, ο νόμος του Newton για

οποιοδήποτε στοιχειώδη όγκο ρευστού απαιτεί το (διανυσματικό) άθροισμα της δυνάμεως πίεσης, της δυνάμεως βαρύτητας και της δυνάμεως τριβής να είναι ίσο με τη δύναμη επιταχύνσεως ή τη δύναμη αδράνειας:

$$\dot{F}_p + \dot{F}_g + \dot{F}_f = \dot{F}_i$$

Οι νόμοι της δυναμικής ομοιότητας που αναφέρονται παραπάνω, εξασφαλίζουν ότι κάθε μια από αυτές τις δυνάμεις θα είναι στην ίδια αναλογία, όσον αφορά στο μέτρο και θα έχει την ίδια διεύθυνση και φορά όταν εξετάζουμε ομολόγους στοιχειώδεις όγκους στο μοντέλο και το πρωτότυπο.

Το σχήμα 4.28 παρουσιάζει ένα παράδειγμα για τη ροή μέσω θυροφράγματος. Η επίδραση της επιφανειακής τάσεως είναι εμφανώς αμελητέα. Τα πολύγωνα δυνάμεως στα δύο ομολόγα σημεία του σχήματος, θα έχουν ακριβώς την ίδια μορφή, εάν οι αριθμοί



Σχ. 4.28
Δυναμική ομοιότητα.

Reynolds και Froude του πρωτοτύπου (α) και του μοντέλου (β) είναι ίσοι. Σ' αυτήν την περίπτωση εξασφαλίζεται και η κινηματική ομοιότητα.

Όμως πρακτικά είναι αδύνατο να μην παραβιαστούν εν μέρει οι νόμοι της δυναμικής ομοιότητας. Για να επιτευχθεί η ισότητα των αριθμών Reynolds και Froude πρωτοτύπου και μοντέλου, πρέπει το ρευστό που χρησιμοποιούμε στο μοντέλο να έχει ριζικά διαφορετικές ιδιότητες από τις ιδιότητες του ρευστού που ρέει στο πρωτότυπο. Έτσι, αν η κλίμακα μηκών είναι α (γεωμετρική ομοιότητα), η κλίμακα ταχυτήτων θα πρέπει να είναι $\alpha^{1/2}$ για να υπάρχει κινηματική ομοιότητα [εξίσωση (4.11β)]. Ισότητα αριθμών Reynolds θα σήμαινε:

$$\begin{aligned} \text{Re}_p &= \frac{v_p \cdot L_p}{\nu_p} = \frac{v_m \cdot L_m}{\nu_m} = \text{Re}_m \Rightarrow \frac{v_m}{v_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \cdot \frac{L_m}{L_p} = \\ &= \alpha^{1/2} \cdot \alpha \quad \text{ή} \quad v_m = \alpha^{3/2} \cdot v_p \end{aligned} \quad (4.12)$$

όπου: v_m και v_p τα κινηματικά ιξώδη μοντέλου και πρωτοτύπου αντίστοιχα.

Αυτό σημαίνει πως αν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο σε κλίμακα (μήκους) 1:10, θα έχουμε:

$$\alpha = 0,1 \Rightarrow \alpha^{3/2} = 0,0316 \Rightarrow v_m = 0,0316 \cdot v_p$$

Δηλαδή, αν το ρευστό του πρωτοτύπου είναι νερό, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στο μοντέλο, ένα υγρό με κινηματικό ιξώδες ίσο με το 3,16% του ιξώδους του νερού, δηλαδή $v_m = 3,16 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$. Αλλά τέτοιο υγρό δεν υπάρχει. Όπως βλέπουμε από τον πίνακα 1.2.2, ακόμα και ο υδράργυρος (ο οποίος δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί για πολλούς λόγους) έχει κινηματικό ιξώδες 4 φορές μεγαλύτερο από το απαιτούμενο. Έτσι, πρέπει να εγκαταλείψουμε την απαίτηση ισότητας των αριθμών Reynolds μοντέλου και πρωτοτύπου. Στην πράξη θα χρησιμοποιήσουμε ως ρευστό το νερό και στο μοντέλο. Θα εξασφαλίσουμε την ισότητα του αριθμού Froude, του οποίου ο ρόλος είναι πολύ σημαντικός στη ροή του παραδείγματος. Αναπόφευκτα, ο αριθμός Reynolds του μοντέλου θα είναι σημαντικά μικρότερος απ' τον αντίστοιχο του πρωτοτύπου και θα πρέπει να πάρουμε υπόψη αυτήν την απόκλιση διατυπώνοντας τα συμπεράσματα του πειράματος. Αντίστοιχες αποκλίσεις των αριθμών Reynolds (άρα και αποκλίσεις απ' την πλήρη δυναμική ομοιότητα) συναντάμε και στις αεροδυναμικές δοκιμές (αεροδυναμική σήραγγα).

Παρά την αβεβαιότητα, που συνεπάγεται η αδυναμία πλήρους δυναμικής ομοιότητας, ο ρόλος της πειραματικής διαδικασίας με τη δημιουργία ομοιωμάτων, είναι αναγκαίως και η σημασία της συνεχώς αυξάνεται. Τα τελευταία χρόνια ενισχύεται και με τις προσομοιώσεις των φυσικών φαινομένων σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

4.3 Ασκήσεις.

1. Η μέση θερμοκρασία της ατμόσφαιρας της γης σχετίζεται με το υψόμετρο με τη βοήθεια της σχέσεως: $T = \alpha - \beta \cdot y$ όπου: T η θερμοκρασία και y το υψόμετρο από την επιφάνεια της θάλασσας. Τι διαστάσεις έχουν οι συντελεστές α και β ;

$$[\Theta, L^{-1}\Theta]$$

2. Να εξετασθεί αν τα παρακάτω μεγέθη συνδυασμένα κατάλληλα (όλα μαζί ή κάποια από αυτά) μπορούν να σχηματίσουν αδιάστατη ομάδα:

α) ρ, ν, L, c_p και β) $d, \gamma, \dot{V}, h, \mu$

$$[\alpha] -, [\beta] h/d, \gamma/\dot{V} \cdot \mu, \dots]$$

3. Η απόσταση s που διανύει ένα αντικείμενο στο κενό εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας g και τον χρόνο t . Βρείτε με διαστατική ανάλυση τον τρόπο, με τον οποίο συνδέεται η απόσταση s με τα g, t .

$$[s = C \cdot g \cdot t^2]$$

4. Η αύξηση της πίεσης Δp , υγρού διερχόμενου από αντλία, εξαρτάται απ' τη διάμετρο της φτερωτής D , την πυκνότητα του ρευστού ρ , την ταχύτητα περιστροφής ω και την παροχή όγκου \dot{V} . Να υπολογισθεί η πτώση πίεσης ως συνάρτηση των παραπάνω.

$$\left[\frac{\Delta p}{D^2 \rho \omega^2} = f \left(\frac{\dot{V}}{D^3 \omega} \right) \right]$$

5. Η δύναμη F , που απαιτείται για την περιστροφή έλικα, εξαρτάται απ' τη διάμετρο του έλικα (D), την πυκνότητα του ρευστού (ρ), την ταχύτητα περιστροφής (ω) και την παροχή όγκου (\dot{V}) που δημιουργεί η κίνησή του. Να υπολογισθεί η δύναμη F ως συνάρτηση των παραπάνω μεγεθών.

$$\left[\frac{\Delta p}{D^4 \rho \omega^2} = f \left(\frac{\dot{V}}{D^3 \omega} \right) \right]$$

6. Σε μοντέλο ροής πειραματίζομαστε διαδοχικά με αέρα και με νερό σε θερμοκρασία 20°C. Να υπολογισθεί ο λόγος των ταχυτήτων των δύο ρευστών, ώστε οι δύο ροές να έχουν τον ίδιο αριθμό Reynolds.

$$[v_a/v_v = 15,1]$$

7. Λάδι με κινηματικό ιξώδες $5,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ θα διακινηθεί μέσω αγωγού 6 in με παροχή 250 m^3/h . Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα σε μοντέλο ροής με κλίμακα μήκους 1:3, στο οποίο αντί για λάδι ρέει νερό 20°C, ώστε να υπάρχει δυναμική ομοιότητα με το πρωτότυπο;

$$[2,04 \text{ m/s}]$$

8. Γλοίο μήκους 200 m κινείται με μέγιστη ταχύτητα 35 κόμβους (knots). Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα (σε κόμβους και m/s) γεωμετρικού ομοιώματός του μήκους 10 m, ώστε να υπάρχει κινηματική ομοιότητα;

$$[2,47 \text{ knots} = 0,35 \text{ m/s}]$$

9. Η μελέτη δυναμικής ομοιότητας μοντέλου και πρωτοτύπου υποβρυχίου, οδήγησε στη σχέση:

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \left(\frac{v_m}{v_p} \right)^2 \cdot \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^2$$

Αν μοντέλο με κλίμακα 1:30, κινούμενο σε θαλάσσιο νερό με ταχύτητα 3 m/s συναντά αντίσταση 16 Kgf, να υπολογισθεί η ισχύς προώσεως (σε kW) του πρωτοτύπου αν η ταχύτητά του είναι 15 m/s.

$$[52.974 \text{ kW}]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΡΟΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΕ ΣΩΛΗΝΕΣ

5.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε συγκεκριμένα με ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει κάθε μηχανικός: τη ροή των ρευστών **σε κυλινδρικούς αγωγούς** (κυλινδρικούς σωλήνες ή απλά **σωλήνες**). Οι αγωγοί αυτοί είναι οι πλέον διαδεδομένοι στη διακίνηση των ρευστών.

Μελετώντας τη ροή σε κυλινδρικούς αγωγούς, θα επικεντρωθούμε στη **σταθερή ροή των ασυμπίεστων ρευστών σε κλειστούς αγωγούς**.

1) Δεν θα μας απασχολήσουν τα φαινόμενα της μεταβλητής (ή μεταβατικής) ροής, κατά την οποία η παροχή αλλάζει με τον χρόνο, αλλά τα μόνιμα, δηλαδή φαινόμενα, στα οποία η παροχή σε οποιαδήποτε διατομή παραμένει σταθερή.

2) Δεν θα ασχοληθούμε επίσης με τη ροή αερίων και ατμών, των οποίων η πυκνότητα μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής ροής. Θα ασχοληθούμε με τα ασυμπίεστα ρευστά, χαρακτηριστικό γνώρισμα των οποίων αποτελεί η σταθερή πυκνότητα.

Σημείωση: Εκτός από τα υγρά, ασυμπίεστα κατά προσέγγιση θεωρούνται και τα αέρια, όταν κατά τη διάρκεια της ροής τους ο αριθμός Mach δεν υπερβαίνει την τιμή 0,4.

3) Τέλος, δεν θα ασχοληθούμε με ανοικτούς αγωγούς (κανάλια) αλλά μόνο με κλειστούς. Λέγοντας πως ένας αγωγός είναι κλειστός, δεν εννοούμε μόνο ότι η διατομή του είναι κλειστή, αλλά και ότι το διακινούμενο ρευστό καλύπτει πλήρως αυτήν τη διατομή. Αυτό σημαίνει ότι το ρευστό δεν έχει ελεύθερη επιφάνεια και ρέει υπό πίεση.

Ξεκινάμε λοιπόν το κεφάλαιο με τις ακόλουθες παραμέτρους:

1) Εξετάζουμε τη **ροή σε κλειστούς κυλινδρικούς αγωγούς**.

2) Η **ροή** είναι **μόνιμη**, άρα η παροχή σταθερή: $\dot{V} = \text{σταθ.}$

3) Το **ρευστό** είναι **ασυμπίεστο**, άρα η πυκνότητα σταθερή: $\rho = \text{σταθ.}$

Σημειώνουμε ακόμα ότι για τις ανάγκες αντιμε-

τώσεως των προβλημάτων ροής σε σωλήνες, στις περισσότερες περιπτώσεις είναι επαρκής η μονοδιάστατη θεώρηση (κατά μήκος του αγωγού).

Τα φυσικά μεγέθη, τα οποία επηρεάζουν τη ροή σε κυλινδρικούς αγωγούς, δύνανται να ταξινομηθούν σε τέσσερις ομάδες:

1) **Μεγέθη σωλήνα:** διάμετρος (d), μήκος (L), τραχύτητα (ϵ).

2) **Μεγέθη ρευστού:** πυκνότητα (ρ), ειδικό βάρος (γ), κινηματικό ιξώδες (ν).

3) **Μεγέθη ροής:** παροχή (\dot{V}), ταχύτητα (v).

4) **Ενεργειακά μεγέθη:** γεωμετρικό ύψος (y), πίεση (p), ταχύτητα (v), ύψη απωλειών ($\Sigma h_f, h_f, h_k$), ύψος αντλίας (h_p) ή στροβίλου (h_s).

5.2 Στρωτή και τυρβώδης ροή σε σωλήνες.

1) Διαχωρισμός της ροής σε στρωτή και τυρβώδη.

Το αν η ροή ενός υγρού σε κλειστό κυλινδρικό αγωγό είναι στρωτή ή τυρβώδης, καθορίζεται, όπως είδαμε, από τον αδιάστατο αριθμό Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (5.1)$$

όπου: v η ταχύτητα του υγρού, d η διάμετρος του σωλήνα και ν το κινηματικό ιξώδες. Για τιμές του αριθμού Reynolds μικρότερες του 2100 ($Re < 2100$), η ροή είναι **στρωτή**. Ακολουθεί μια **κρίσιμη περιοχή**, στην οποία η ροή μετατρέπεται σταδιακά σε τυρβώδη ($2100 < Re < 4000$ περίπου). Για μεγαλύτερες τιμές του Re ($Re > 4000$) η ροή είναι **τυρβώδης**.

Η σχέση (5.1) δείχνει πως **η στρωτή ροή εννοείται σε σωλήνες μικρής διαμέτρου, με χαμηλές ταχύτητες ροής και ρευστά μεγάλου ιξώδους (παχύρρευστα)**.

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθούν οι μέγιστες ταχύτητες νερού και λαδιού SAE 10, 20°C, που ρέουν σε σωλήνες διαμέτρου 8 cm, ώστε η ροή τους να παραμένει στρωτή.

Λύση:

Δεδομένα: $d_v = d_\lambda = 0,08 \text{ m}$.

Η μέγιστη τιμή του αριθμού Reynolds για να έχουμε στρωτή ροή είναι: $Re_v = Re_\lambda = 2100$.

Από τον πίνακα 1.2.2 έχουμε:

$$v_v = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, v_\lambda = 120 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \Rightarrow v = \frac{Re \cdot \nu}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_v = 0,026 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_\lambda = 3,15 \text{ m/s}.$$

Παράδειγμα 2

Λιπαντικό άγνωστου ιξώδους ρέει με στρωτή ροή και ταχύτητα 5 m/s σε σωλήνα διαμέτρου 4 cm. Για ταχύτητα 10 m/s, η ροή είναι τυρβώδης. Τι συμπέρασμα προκύπτει για το ιξώδες του λαδιού;

Λύση.

Στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός Reynolds είναι μικρότερος ή ίσος με 2100. Στη δεύτερη, μεγαλύτερος ή ίσος του 4000:

$$Re \leq 2100 \Rightarrow \frac{v_1 \cdot d}{\nu} \leq 2100 \Rightarrow \nu \geq 95,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Re \leq 4000 \Rightarrow \frac{v_2 \cdot d}{\nu} \leq 4000 \Rightarrow \nu \geq 10^{-4} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Άρα για το κινηματικό ιξώδες του λιπαντικού ισχύει: $95,3 \cdot 10^{-6} \leq \nu \leq 100 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

2) Περιοχή εισόδου.

Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε πως, όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1.5, για μικρή σχετικά απόσταση L_e από την είσοδο του σωλήνα, εκτείνεται μια «μεταβατική περιοχή», στην οποία αναπτύσσεται το οριακό στρώμα (σχ. 5.2α). Για αποστάσεις από την είσοδο μεγαλύτερες του L_e , το οριακό στρώμα καλύπτει όλη τη διατομή του σωλήνα.

Το μεταβατικό μήκος εισόδου (entrance length) L_e εξαρτάται από τη διάμετρο του σωλήνα, την ταχύτητα ροής, την πυκνότητα και το ιξώδες του ρευστού: $L_e = F(d, v, \rho, \nu)$.

Η διαστατική ανάλυση δείχνει πως ο λόγος L_e/d εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Reynolds:

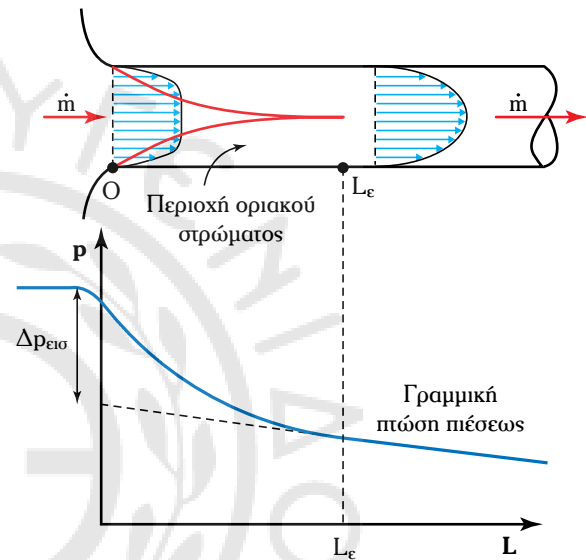
$$\frac{L_e}{d} = F\left(\frac{v \cdot d}{\nu}\right) = F(Re) \quad (5.2)$$

Η πειραματική διαδικασία έδωσε τις ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις:

$$\text{Για στρωτή ροή: } \frac{L_e}{d} = 0,06 \cdot Re \quad (5.2a)$$

$$\text{Για τυρβώδη ροή: } \frac{L_e}{d} = 4,4 \cdot Re^{1/6} \quad (5.2b)$$

Η σημαντικότερη συνέπεια της υπάρξεως αυτής της περιοχής εισόδου, είναι οι αυξημένες απώλειες λόγω τριβών. Στο σχήμα 5.2α, βλέπουμε πως αφού μακριά από την περιοχή εισόδου η πτώση πίεσης (έκφραση των ενεργειακών απωλειών λόγω τριβών) είναι γραμμική, στην περιοχή εισόδου υπάρχει επί πλέον πτώση πίεσης $\Delta p_{\text{εισ}}$.

**Σχ. 5.2α**

Είσοδος ρευστού σε σωλήνα.

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πολύ μεγάλο το μήκος του σωλήνα σε σχέση με τη διάμετρο, ώστε η ροή εντός αυτού να θεωρείται πλήρως διαμορφωμένη. Τις επιπλέον ενεργειακές απώλειες που υπάρχουν στην είσοδο του σωλήνα, θα τις αντιμετωπίσουμε ως τοπικές απώλειες.

3) Μέση ταχύτητα (velocity average) και κατανομή ταχυτήτων.

Σε απόσταση μεγαλύτερη από το μήκος εισόδου L_e , το οριακό στρώμα καλύπτει όλο το σωλήνα. Αυτό σημαίνει πως σε μια διατομή κάθετη στη ροή, η ταχύτητα μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Πιο συγκεκριμένα, όπως είδαμε (παράγγ. 3.1.5), η ταχύτητα αυξάνεται με την απόσταση από το τοίχωμα και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο κέντρο του αγωγού.

Αν συμβολίσουμε με u την τοπική ταχύτητα και με r την απόσταση από το κέντρο της κυκλικής διατομής, έχουμε:

- 1) Για $r = R$ (επαφή με τοίχωμα): $u = 0$
- 2) Για $r = 0$ (κέντρο σωλήνα): $u = u_{max}$

Η κατανομή ταχυτήτων σε μια διατομή κυλινδρικού αγωγού, υπολογίζεται με ακρίβεια μόνο στην περίπτωση της στρωτής ροής. Πιο συγκεκριμένα, στη **στρωτή ροή**, η τιμή της τοπικής ταχύτητας ισούται με:

$$u = u_{max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (5.3)$$

Στην **τηρβώδη ροή**, η τοπική ταχύτητα αυξάνει με πιο ταχείς ρυθμούς καθώς απομακρυνόμαστε απ' το τοίχωμα. Για την κατανομή ταχυτήτων, ισχύει η εμπειρική σχέση:

$$u \approx u_{max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \quad (5.3a)$$

όπου: ο εκθέτης n κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 1/9 και 1/5: $1/9 \leq n \leq 1/5$.

Όπως ήδη αναφέραμε, για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε τη μέση ταχύτητα ροής v , η οποία ορίζεται από την εξίσωση της συνέχειας:

$$v = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A}$$

Η σχέση της μέσης ταχύτητας με την τοπική είναι:

$$v = \frac{1}{A} \cdot \int_A u \cdot dA \quad (5.4)$$

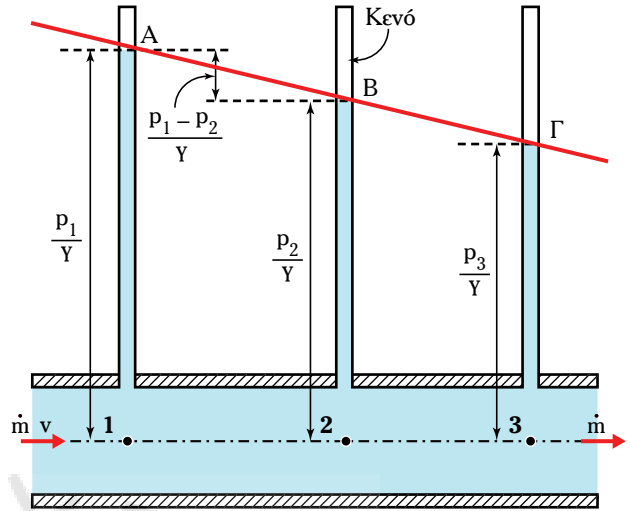
Στη στρωτή ροή έχουμε: $v = 0,5 \cdot u_{max}$
 Στην τηρβώδη ροή: $0,5 \cdot u_{max} < v \leq 0,8 \cdot u_{max}$

Στη συνέχεια, εφόσον δεν διευκρινίζεται διαφορετικά, θα χρησιμοποιούμε τη μέση ταχύτητα v .

4) Πτώση πίεσης κατά μήκος οριζόντιου αγωγού.

Έστω κυλινδρικός αγωγός σταθερής διαμέτρου d , στον οποίο ρέει ασυμπίεστο ρευστό ειδικού βάρους γ , με σταθερή ταχύτητα v (μόνιμη ροή). Αν τοποθετήσουμε πιεζομετρικούς σωλήνες μακριά από την είσοδο (εκτός της μεταβατικής περιοχής εισόδου), διαπιστώνουμε **γραμμική μείωση της πίεσης κατά μήκος του αγωγού** (σχ. 5.2β). Αυτή η πτώση πίεσης οφείλεται στις τριβές (μεταξύ των μορίων του ρευστού και μεταξύ ρευστού και τοιχώματος) και αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για τη διατήρηση της μόνιμης ροής.

Για να καταστεί κατανοητό το φαινόμενο, ας εξετάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε έναν κυλινδρικό όγκο ελέγχου μεταξύ των σημείων 1 και 2,



Σχ. 5.2β

Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού.

ομοαξονικό ως προς τον κύριο αγωγό, ακτίνας $r \leq R$ (σχ. 5.2γ):

1) Στην κυκλική διατομή εισόδου στον όγκο ελέγχου, ασκείται η δύναμη F_{p1} :

$$F_{p1} = p_1 \cdot A_k = \pi \cdot R^2 \cdot p_1$$

2) Αντίστοιχα, στη διατομή εξόδου, ασκείται η δύναμη F_{p2} αντίθετης φοράς:

$$F_{p2} = p_2 \cdot A_k = \pi \cdot R^2 \cdot p_2$$

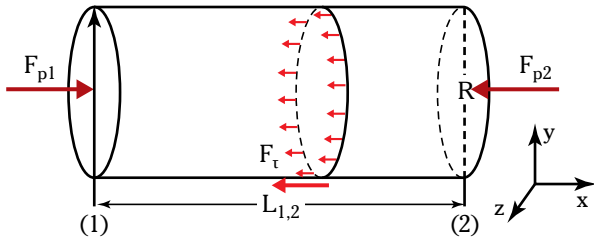
3) Τέλος, σε όλη την κυλινδρική επιφάνεια, ασκείται η διατμητική δύναμη αντιστάσεως στη ροή F_τ , η οποία οφείλεται στο ιξώδες του ρευστού:

$$F_\tau = \tau \cdot A = 2\pi \cdot R \cdot L_{12} \cdot \tau$$

Αφού η ροή είναι μόνιμη (επομένως η ταχύτητα παραμένει σταθερή), η συνισταμένη των τριών αυτών δυνάμεων ισούται με μηδέν:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0, \quad F_{p1} - F_{p2} - F_\tau = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \pi \cdot R^2 \cdot (p_1 - p_2) = 2\pi \cdot R \cdot L_{12} \cdot \tau &\Rightarrow \\ \Rightarrow p_1 - p_2 = 2 \cdot \tau \cdot \frac{L_{12}}{r} &\quad (5.5) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον υπάρχει διατμητική τάση αντιστάσεως στη ροή (ιξώδης διάτμηση), υπάρχει και πτώση πίεσης, ανάλογη του μήκους L_{12} . Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, όλα τα πραγματικά ρευστά παρουσιάζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα του ιξώδους. Έτσι, κατά τη ροή τους εντός του οριακού στρώματος, παρουσιάζουν διατμητική τάση αντιστάσεως τ . Όπως είδαμε στο Τρίτο Κεφάλαιο, στους κλειστούς κυλιν-



Σχ. 5.2γ
Ισορροπία δυνάμεων.

δρικούς αγωγούς, το οριακό στρώμα καλύπτει όλο το πεδίο ροής.

Η διατμητική τάση τ μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το τοίχωμα του σωλήνα και μηδενίζεται στο κέντρο του (για $r = 0$). Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, η διατμητική τάση τ είναι αυξημένη, επειδή εκτός από τις αντιστάσεις λόγω ιξώδους, έχουμε και τις αντιστάσεις λόγω στροβιλισμού (βλ. παράγρ. 3.1.4):

$$\tau = -(\mu + E) \cdot \frac{dv}{dy}$$

όπου: μ το ιξώδες του ρευστού και E το ιξώδες δί- νης.

5.3 Οι βασικές εξισώσεις ροής σε σωλήνες.

Η μελέτη της σταθερής ροής ασυμπίεστων ρευστών σε αγωγούς, βασίζεται στους δύο νόμους διατηρήσεως: Το νόμο διατηρήσεως της μάζας (που εκφράζεται με την **εξίσωση συνέχειας**) και το νόμο διατηρήσεως της ενέργειας της μάζας (που εκφράζεται με τη γενικευμένη **εξίσωση Bernoulli**). Τα παραπάνω ισοζύγια μελετήθηκαν αναλυτικά στο Τρίτο Κεφάλαιο (παράγρ. 3.3 και 3.4). Ανακεφαλαιώνουμε τα συμπεράσματα για την περίπτωση της μόνιμης ροής ασυμπίεστου ρευστού σε κυλινδρικούς αγωγούς.

5.3.1 Εξίσωση συνέχειας (continuity equation).

Σε μόνιμη ροή ρευστού σε αγωγό, η παροχή μάζας \dot{m} είναι σταθερή σε οποιαδήποτε διατομή του αγωγού:

$$m_1 = m_1 = \dots = m_v = C \tag{5.6}$$

$$\acute{\eta} \rho_1 \cdot \dot{V}_1 = \rho_2 \cdot \dot{V}_2 = \dots = \rho_v \cdot \dot{V}_v = C \tag{5.7}$$

$$\acute{\eta} \frac{V_1}{u_1} = \frac{V_2}{u_2} = \dots = \frac{V_v}{u_v} = C \tag{5.8}$$

όπου u : ο ειδικός όγκος.

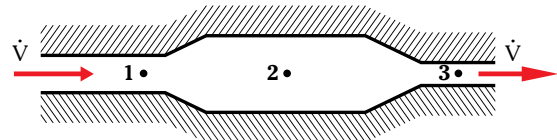
Για $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_v$, ασυμπίεστα ρευστά

$$\acute{\eta} \text{ (5.7) γίνεται: } \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dots = \dot{V}_v \tag{5.8\alpha}$$

$$\acute{\eta} A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \dots = A_v \cdot v_v \tag{5.8\beta}$$

Παράδειγμα 3

Στον σωλήνα του σχήματος 5.3α ρέει λάδι κινηματικού ιξώδους $6 \cdot 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$, σταθερής παροχής $180 \text{ m}^3/\text{h}$. Δίνονται: $d_1 = 4 \text{ in}$, $d_2 = 7 \text{ in}$, $d_3 = 2 \text{ in}$.



Σχ. 5.3α

Να υπολογισθούν οι ταχύτητες και το είδος της ροής στα σημεία 1, 2 και 3.

Λύση.

- Δεδομένα: $d_1 = 4 \text{ in} = 0,1016 \text{ m}$,
 $d_2 = 7 \text{ in} = 0,1778 \text{ m}$,
 $d_3 = 2 \text{ in} = 0,0508 \text{ m}$,
 $v = 7 \cdot 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$
 $\dot{V} = 180 \text{ m}^3/\text{h} = 180/3600 \text{ m}^3/\text{s} = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$,

Ζητούμενα: v_1, v_2, v_3 , είδη ροής

$$(5.5\alpha) \Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= 1,54 \text{ m/s} \\ v_2 &= 0,50 \text{ m/s} \\ v_3 &= 6,17 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Το είδος της ροής, καθορίζεται απ' τον αριθμό Reynolds:

$$\frac{Re \cdot v}{d} \Rightarrow \begin{aligned} Re_1 &= 2607: \text{ μεταβατική ροή} \\ Re_2 &= 1482 < 2100: \text{ στρωτή ροή} \\ Re_3 &= 5223 > 4000: \text{ τυρβώδης ροή.} \end{aligned}$$

5.3.2 Εξίσωση ενέργειας.

Το ισοζύγιο ενέργειας το εξετάσαμε αναλυτικά στην παράγραφο 3.4. Προσθέτομε εδώ κάποιες διευκρινήσεις που αφορούν στη ροή που εξετάζομε.

Σε μία διατομή 1 του σωλήνα, το ρευστό έχει ενεργειακό ύψος:

$$H_1 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} \dots \tag{5.8\gamma}$$

όπου y_1 : **Ύψος δυναμικής ενέργειας.**

$\frac{v_1^2}{2 \cdot \gamma}$: **Ύψος κινητικής ενέργειας.**

$$\frac{p_1}{\gamma} : \text{Ύψος ενέργειας πίεσεως.}$$

Μεταξύ των διατομών 1 και 2 του σωλήνα, υπάρχουν οι απώλειες ενεργειακού ύψους του ρευστού (λόγω τριβών) Σh , που καλούνται **Ύψος απωλειών**. Επομένως, αν το ρευστό ρέει από τη διατομή 1 προς τη 2, το ολικό Ύψος ενέργειας μειώνεται κατά Σh :

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + y_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + y_2 \right) = \Sigma h$$

$$\text{ή } \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (5.9)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση ενέργειας, γνωστή και ως **εξίσωση Bernoulli**, δεν έχει κάποια ιδιαίτερη μορφή για τους κυλινδρικούς αγωγούς. Εφαρμόζεται στη γενική της μορφή που τη συναντήσαμε στην παράγραφο 3.4. Γενικεύοντας, αν μεταξύ των σημείων 1 και 2, υπάρχει αντλία, που προσθέτει ενέργεια στο ρευστό, ή στρόβιλος που αφαιρεί ενέργεια, η εξίσωση ενέργειας γίνεται:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h + h_t - h_p \quad (5.9a)$$

όπου: h_p και h_t τα Ύψη ενέργειας αντλίας και στροβίλου αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4

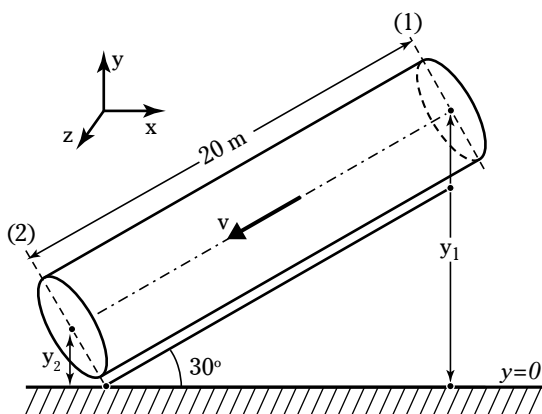
Στον σωλήνα του σχήματος 5.3β ρέει νερό.

α) Να υπολογισθεί η πίεση στη διατομή 2, αν η πίεση στη διατομή 1 είναι 240 kPa και το Ύψος απωλειών 3 m.

β) Πόση είναι η πτώση πίεσεως λόγω τριβών;

Λύση:

Δεδομένα: $L = 20 \text{ m}$, $\gamma = 9,81 \text{ kN/m}^3$, $\Sigma h = 3 \text{ m}$.



Σχ. 5.3β

$$\text{α) Είναι: } v_1 = v_2 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d}$$

Η εξίσωση ενέργειας λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + y_2 + \Sigma h$$

$$\text{ή } \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h, \quad v_1 = v_2$$

$$\text{ή } \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (y_1 - y_2) = \Sigma h$$

$$\text{ή } \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \Sigma h - (y_1 - y_2) = (3 - 10) \text{ m} = -7 \text{ m}$$

$$\text{και } p_2 = p_1 + 7 \rho \cdot g =$$

$$= 240 \text{ kPa} + 7 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 308,7 \text{ kPa}$$

$$y_1 - y_2 = L \cdot \sin \theta \Rightarrow y_1 - y_2 = 10 \text{ m}$$

β) Αν δεν υπήρχαν απώλειες τριβών ($\Sigma h = 0$):

$$\frac{p_1 - p_2'}{\gamma} + (y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow \frac{p_1 - p_2'}{\gamma} = -10 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2' = -98,8 \text{ kPa} \Rightarrow p_2' = 338,8 \text{ kPa.}$$

Άρα: $p_2' - p_2 = (338,8 - 308,7) \text{ kPa} = 30,1 \text{ kPa}$.

Τα 30,1 kPa αντιστοιχούν σε απώλεια Ύψους πίεσεως:

$$p = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{p}{\rho \cdot g} = \frac{30,1 \cdot 10^3 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 3,0 \text{ m στήλης νερού.}$$

Παράδειγμα 5

Στον σωλήνα του σχήματος 5.3γ ρέει νερό παροχής $150 \text{ m}^3/\text{h}$. Δίνονται: $AB = 20 \text{ m}$, $d_A = 10 \text{ cm}$, $d_B = 15 \text{ cm}$.

Να υπολογισθεί η μεταβολή πίεσεως από το Α στο Β:

α) Αν το Ύψος απωλειών είναι 6,5 m.

β) Αν η ροή είναι ιδανική.

γ) Αν δεν υπάρχει ροή.

Λύση.

Δεδομένα: $AB = 20 \text{ m}$, $d_A = 0,10 \text{ m}$,

$d_B = 0,15 \text{ m}$,

$\theta = 30^\circ$

α) $\dot{V} = 150/3600 \text{ m}^3/\text{s}$, $\Sigma h = 6,5 \text{ m}$

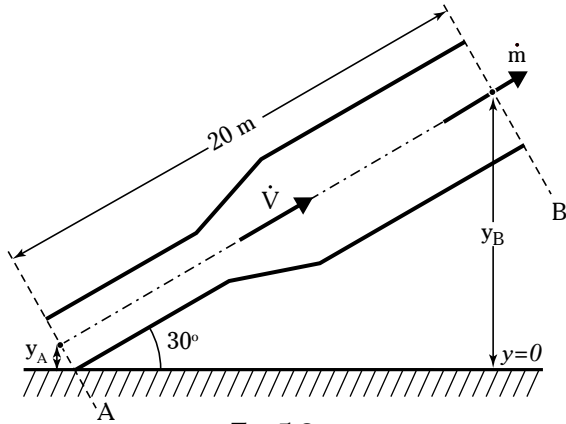
β) $\dot{V} = 150/3600 \text{ m}^3/\text{s}$, $\Sigma h = 0$

γ) $\dot{V} = 0$.

Ζητούμενο: $p_A - p_B$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Β:

$$\frac{p_A - p_B}{\gamma} + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2 \cdot g} + (y_A - y_B) = \Sigma h \quad (\alpha)$$



Σχ. 5.3γ

α) Στην περίπτωση αυτή μεταβάλλονται και οι τρεις όροι (ενέργεια πίεσης, κινητική και δυναμική ενέργεια). Είναι:

$$\frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_i^2} \Rightarrow v_A = 5,3 \text{ m/s}, \quad v_B = 2,36 \text{ m/s}$$

$$y_A - y_B = -AB \cdot \sin\theta \Rightarrow y_A - y_B = -10 \text{ m}$$

$$\frac{v_A^2 - v_B^2}{2 \cdot g} = 1,15 \text{ m}$$

από (α) $\Rightarrow \frac{P_A - P_B}{\gamma} = 6,5 - 1,15 - (-10) = 15,35 \text{ m} \Rightarrow$
 $\Rightarrow P_A - P_B = 150,6 \text{ kPa}$

β) Το μόνο που αλλάζει από τα παραπάνω, είναι οι απώλειες ($\Sigma h = 0$):

$$\frac{P_A - P_B}{\gamma} = 0 - 1,15 - (-10) = 8,85 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = 86,6 \text{ kPa}$$

γ) Αν δεν υπήρχε ροή ($v_A = v_B = 0 \Rightarrow \Sigma h = 0$):

$$\frac{P_A - P_B}{\gamma} + (y_A - y_B) = 0 \Rightarrow \frac{P_A - P_B}{\gamma} = 10 \text{ m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A - P_B = 98,1 \text{ kPa}$$

5.4 Απώλειες ενέργειας.

Το σημαντικότερο πρόβλημα, το οποίο εισάγει η ενεργειακή μελέτη της ροής (εξίσωση της ενέργειας), είναι ο υπολογισμός του ύψους απωλειών. Οι απώλειες ενέργειας σε έναν αγωγό ροής διακρίνονται σε **κύριες** ή **γραμμικές** h_f και **δευτερεύουσες** ή **τοπικές** h_k .

¹ $h_f = \frac{v^2}{g} \cdot G$, όπου το G είναι συνάρτηση των $\frac{L}{d}$, $\frac{\epsilon}{d}$, Re.

5.4.1 Γραμμικές απώλειες.

Οι γραμμικές απώλειες (major losses) οφείλονται στην εσωτερική τριβή του ρευστού και αναπτύσσονται σε όλο το μήκος του αγωγού. Οι τοπικές απώλειες οφείλονται σε εμπόδια (συνήθως εξαρτήματα της σωληνογραμμής), που συναντά το ρευστό στην πορεία του και διαταράσσουν τη ροή (είσοδος στο σωλήνα, συστολές, διαστολές, γωνίες, δικλείδες κ.λπ.).

1) Εξίσωση γραμμικών απωλειών.

Καθώς το ρευστό κινείται μέσα στον σωλήνα, συναντά αντίσταση λόγω της επαφής με τα τοιχώματα και της εσωτερικής τριβής, η οποία οφείλεται στο ιξώδες του ρευστού και, όταν η ροή είναι τυρβώδης, στη δημιουργία στροβίλων (δινοϊξώδες).

Γενικά, οι γραμμικές απώλειες εξαρτώνται από τους ακόλουθους παράγοντες: τη διάμετρο d, το μήκος L και την τραχύτητα ε του αγωγού, την ταχύτητα ροής v, την πυκνότητα ρ και το κινηματικό ιξώδες ν του ρευστού, καθώς και από την επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας g:

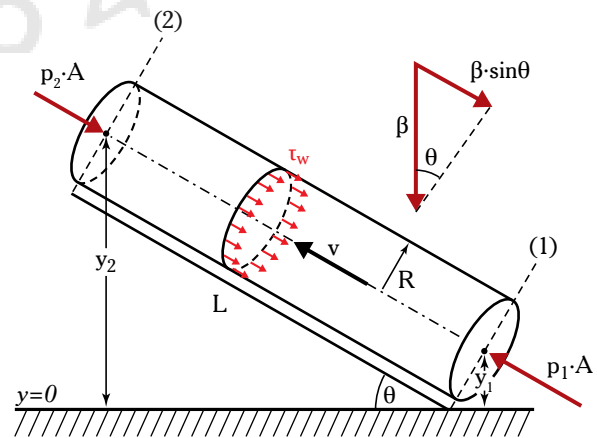
$$h_f = F(d, L, \epsilon, v, \rho, \nu, g) \quad (5.10)$$

Η διαστατική ανάλυση (κεφ. 4) οδηγεί στη συνάρτηση:

$$h_f = \frac{v^2}{g} \cdot G\left(\frac{L}{d}, \frac{\epsilon}{d}, Re\right)^1 \quad (5.10a)$$

Δηλαδή οι γραμμικές απώλειες είναι ανάλογες του τετραγώνου της ταχύτητας του ρευστού και εξαρτώνται από τους αδιάστατους όρους L/d, ε/d, Re.

Έστω ευθύγραμμος κυλινδρικός αγωγός σταθερής διαμέτρου d και μήκους L, στον οποίο ρέει υγρό πυκνότητας ρ με ταχύτητα v (σχ. 5.4α). Εφαρμοζο-



Σχ. 5.4α

Ροή ρευστού σε σωλήνα.

ντας το ισοζύγιο ενέργειας [εξίσωση (5.9)] μεταξύ των διατομών 1 και 2 του αγωγού ($v_1 = v_2$), λαμβάνομε:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (y_1 - y_2) = h_f \quad (5.11)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος 5.4α:

$$y_2 - y_1 = L \cdot \sin\theta$$

Η κινητική κατάσταση δεν μεταβάλλεται, επομένως το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στον κυλινδρικό όγκο του ρευστού ισούται με μηδέν. Κατά τη διεύθυνση της ροής υπάρχουν οι ακόλουθες δυνάμεις:

1) Οι δυνάμεις πιέσεως: $p_1 \cdot A = p_1 \cdot \pi R^2$ και $p_2 \cdot A = p_2 \cdot \pi R^2$

2) Η δύναμη τριβής: $F_t = \tau_w \cdot (2\pi R) \cdot L$ όπου: τ_w η διατμητική τάση του τοιχώματος.

3) Η συνισταμένη του βάρους: $m \cdot g \cdot \sin\theta = (\rho \cdot \pi R^2 L) \cdot g \cdot \sin\theta = \rho g \cdot \pi R^2 \cdot (y_2 - y_1)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τη φορά των δυνάμεων, έχουμε:

$$p_1 \cdot \pi R^2 - p_2 \cdot \pi R^2 - \rho g \cdot \pi R^2 \cdot (y_2 - y_1) - \tau_w \cdot (2\pi R) \cdot L = 0 \text{ μετά από πράξεις προκύπτει:}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (y_1 - y_2) = \frac{2 \cdot L \cdot \tau_w}{\rho \cdot g \cdot R} \quad (5.11\alpha)$$

Από τις (5.11) και (5.11α) προκύπτει:

$$h_f = \frac{2 \cdot L \cdot \tau_w}{\rho \cdot g \cdot R} = \frac{4 \cdot L \cdot \tau_w}{\rho \cdot g \cdot d} \quad (5.12)$$

Η σχέση (5.12) είναι αξιοποιήσιμη μόνο στην περίπτωση που μπορούμε να υπολογίσουμε τη διατμητική τάση αντιστάσεως του τοιχώματος (τ_w). Εδώ όμως είμαστε και πάλι αναγκασμένοι να καταφύγουμε στη διαστατική ανάλυση.

Η διατμητική τάση τ_w εξαρτάται απ' τη διάμετρο d του σωλήνα, την τραχύτητα ϵ των τοιχωμάτων του, την ταχύτητα ροής v , την πυκνότητα ρ και το κινηματικό ιξώδες ν του ρευστού:

$$\tau_w = F(d, \epsilon, v, \rho, \nu)$$

Η διαστατική ανάλυση δίνει:

$$\frac{\tau_w}{\rho \cdot v^2} = G\left(\text{Re}, \frac{\epsilon}{d}\right) \quad (5.13)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (5.12) λαμβάνομε:

$$h_f = \frac{4 \cdot L}{g \cdot d} \cdot v^2 \cdot G\left(\text{Re}, \frac{\epsilon}{d}\right)$$

και τακτοποιώντας τους όρους καλύτερα:

$$h_f = \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot 8 \cdot G\left(\text{Re}, \frac{\epsilon}{d}\right) \quad (5.14)$$

Θέτομε:

$$f = \frac{8 \cdot \tau_w}{\rho \cdot v^2} = 8 \cdot G\left(\text{Re}, \frac{\epsilon}{d}\right) = F\left(\text{Re}, \frac{\epsilon}{d}\right) \quad (5.15)$$

Ο αδιάστατος συντελεστής f καλείται **συντελεστής τριβής του Darcy**². Όπως φαίνεται από τη σχέση (5.15), ο f εξαρτάται απ' τον αριθμό Reynolds ($\text{Re} = vd/\nu$) και τον λόγο ϵ/d (σχετική τραχύτητα του αγωγού).

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.14) λαμβάνομε την τελική μορφή της εξίσωσης υπολογισμού των γραμμικών απωλειών:

$$h_f = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.16)$$

Η σχέση (5.16), γνωστή ως **εξίσωση των Darcy-Weisbach**³, ισχύει τόσο για τη στρωτή όσο και για την τυρβώδη ροή.

Παράδειγμα 6

Σε ευθύγραμμο κυλινδρικό αγωγό διαμέτρου 6 cm και μήκους 25 m ρέει νερό με παροχή 60 m³/h. Να υπολογισθούν οι απώλειες ύψους αν ο συντελεστής τριβής ισούται με 0,03.

Λύση.

Δεδομένα: $L = 25 \text{ m}$, $d = 0,06 \text{ m}$,

$\dot{V} = 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}$, $f = 0,03$

Ζητούμενο: h_f

Από την εξίσωση της συνέχειας υπολογίζομε την ταχύτητα:

$$v = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} \Rightarrow v = \frac{4 \cdot 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot (0,06)^2} \Rightarrow v = 5,7 \text{ m/s}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.16) υπολογίζομε τις γραμμικές απώλειες:

$$h_f = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \Rightarrow h_f = 0,03 \cdot \frac{25 \text{ m}}{0,06 \text{ m}} \cdot \frac{(5,7 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \Rightarrow h_f = 22,14 \text{ m}$$

² Darcy Henry: 1803 – 1858.

³ Weisbach Julius: 1806 – 1871

2) Συντελεστής τριβής f – Διάγραμμα Moody.

Η πρακτική αξιοποίηση της εξίσωσης Darcy–Weisbach [εξίσωση (5.16)] για τον υπολογισμό των γραμμικών απωλειών, προϋποθέτει τη γνώση του συντελεστή τριβής f . Ο υπολογισμός του, ιδιαίτερα στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο εγχείρημα και απασχόλησε έντονα τη θεωρητική και πειραματική Μηχανική Ρευστών ως τα μέσα του 20^{ού} αι.. Αξιοποιήθηκαν η διαστατική ανάλυση, η θεωρία της ομοιότητας, αλλά και η αναλυτική διαφορική προσέγγιση. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν και που εκτίθενται στη συνέχεια, απλοποιούν σημαντικά τα προβλήματα της ροής.

α) Στρωτή ροή.

Ο θεωρητικός υπολογισμός του συντελεστή τριβής, είναι δυνατός μόνο στην περίπτωση της στρωτής ροής. Προς τούτο αξιοποιούμε τις σχέσεις (5.12) και (5.16) σύμφωνα με τις οποίες:

$$h_f = \frac{4 \cdot L \cdot \tau_w}{\rho \cdot g \cdot d} \quad (5.12)$$

$$h_f = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.16)$$

Εξισώνοντας:

$$\frac{4 \cdot \tau_w}{\rho} = f \cdot \frac{v^2}{2} \quad (5.17)$$

Σύμφωνα με τη σχέση ιξώδους του Newton (παράγρ. 1.2.7):

$$\mu = - \frac{\tau}{dv/dy} \Rightarrow \tau = - \mu \cdot \frac{dv}{dy}$$

Επειδή $dy = -dr$ (y η απόσταση από το τοίχωμα, r η απόσταση από το κέντρο διατομής σωλήνος):

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dr} \Rightarrow \tau \cdot dr = \mu \cdot dv$$

Ολοκληρώνοντας και λαμβάνοντας υπόψη ότι στη στρωτή ροή, $v = v_{max}/2$ (παράγρ. 3.1.5), αποδεικνύεται τελικά ότι:

$$f_{στρ} = \frac{64}{Re} \quad (5.18)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.16), προκύπτει η εξίσωση υπολογισμού των γραμμικών απωλειών στη στρωτή ροή:

$$h_f = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{32 \cdot v \cdot L}{g \cdot d^2} \cdot v \quad (5.19)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά τον συντελεστή τριβής Darcy–Weisbach.

Παράδειγμα 7

Σε οριζόντιο σωλήνα μήκους 100 ft και διαμέτρου 2 in ρέει λάδι σχετικής πυκνότητας 0,87 και ιξώδους 0,1 kg/(m·s). Να υπολογισθεί το ύψος απωλειών αν η παροχή του λαδιού είναι 60 ft³/min.

Λύση.

Δεδομένα: $L = 100 \text{ ft} = 30,48 \text{ m}$,
 $d = 2 \text{ in} = 0,0508 \text{ m/s}$,
 $\rho_{ox} = 0,87 \Rightarrow \rho = 870 \text{ kg/m}^3$,
 $\mu = 0,1 \text{ kg/ms}$,
 $Q = 15 \text{ ft}^3/\text{min} = 0,25 \text{ ft}^3/\text{s} = 0,0071 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ζητούμενο: h_f

Υπολογίζουμε την ταχύτητα ροής:

$$v = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d} \Rightarrow v = 3,5 \text{ m/s}$$

Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds για να διαπιστώσουμε το είδος ροής:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu} \Rightarrow Re = 1543$$

Επομένως, η ροή είναι στρωτή ($Re = 1543 < 2300$) και για το ύψος γραμμικών απωλειών ισχύει η σχέση (5.19):

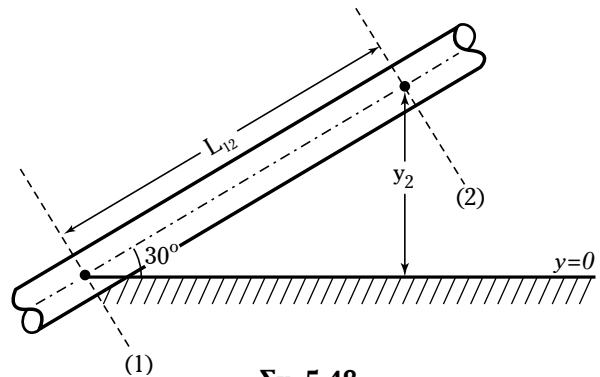
$$h_f = f \cdot \frac{32 \cdot v \cdot L}{g \cdot d} \cdot v = \frac{32 \cdot (0,1 / 870) \cdot 30,48}{9,81 \cdot (0,0508)^2} \cdot 3,5 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_f = 15,5 \text{ m}$$

(Υπενθύμιση: $\nu = \mu/\rho = (0,1 \text{ kg/ms})/(870 \text{ kg/m}^3)$).

Παράδειγμα 8

Στον σωλήνα του σχήματος 5.4β, διαμέτρου 6 cm, ρέει λάδι πυκνότητας 850 kg/m³ και κινηματικού ιξώδους $2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Οι πιέσεις στα σημεία 1 και 2 είναι 250 και 150 kPa αντίστοιχα. Αν $L_{12} = 10 \text{ m}$:



Σχ. 5.4β

α) Να υπολογισθεί το ύψος απωλειών και να προσδιορισθεί η φορά της ροής.

β) Να υπολογισθεί η ταχύτητα ροής και η παροχή του λαδιού.

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα: } d &= 0,06 \text{ m}, & L_{12} &= 10 \text{ m}, \\ \theta &= 30^\circ, & \rho &= 850 \text{ kg/m}^3, \\ v &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}, & p_1 &= 250 \text{ kPa}, \\ p_2 &= 150 \text{ kPa}. \end{aligned}$$

Ζητούμενα: (α) h_f , (β) v , \dot{V} .

α) Υποθέτουμε ροή από το (1) στο (2), οπότε η εξίσωση Bernoulli δίδει:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + y_2 + h_f \quad (1)$$

$$\text{ισχύουν } v_1 = v_2 \text{ και } y_1 = 0, y_2 = L_{1,2} \cdot \sin\theta \quad (2)$$

$y_2 = 10 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 5,0$ από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_f + y_2 \quad (3)$$

$$\text{ή } h_f = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - y_2 \quad (4)$$

$$\text{ή } h_f = \frac{250 \cdot 10^3 \text{ Pa} - 150 \cdot 10^3 \text{ Pa}}{850 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} - 5,0 \text{ m} = 7,91 \text{ m} \quad (5)$$

Άρα η υπόθεση είναι σωστή: Το λάδι ρέει από το 1 στο 2 και το ύψος απωλειών ισούται με τη μείωση του ύψους ενέργειας από το 1 ως το 2: $h_f = 7,91 \text{ m}$.

Σημείωση: Αν το λάδι έρρεε από το 2 στο 1, η σχέση (1) θα έδινε αρνητικό ύψος απωλειών (αφού στο 1 θα είχαμε μικρότερο ύψος ενέργειας). Αλλά το ύψος απωλειών είναι πάντα θετικό (πάντα το σύστημα χάνει ενέργεια λόγω τριβών), άρα η ροή θα είχε αντίθετη φορά.

β) Υποθέτουμε πως η ροή είναι στρωτή, οπότε ισχύει η σχέση (5.19):

$$\begin{aligned} h_f &= \frac{32 \cdot v \cdot L}{g \cdot d^2} \cdot v \Rightarrow v = h_f \cdot \frac{g \cdot d^2}{32 \cdot v \cdot L} \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= (7,45 \text{ m}) \cdot \frac{(9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (0,06 \text{ m})^2}{32 \cdot (2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}) \cdot (10 \text{ m})} \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= 4,109 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ελέγχουμε την υπόθεση της στρωτής ροής:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{4,109 \text{ m/s} \cdot 0,06 \text{ m}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}} = 1233$$

ισχύει $Re = 1233 < 2300$, άρα η ροή είναι στρωτή.

– Υπολογισμός παροχής:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v \Rightarrow \dot{V} = \frac{\pi \cdot (0,06)^2 \text{ m}^2}{4} \cdot 4,109 \text{ m/s} = \\ &= 0,0116 \text{ m}^3/\text{s} = 41,76 \text{ m}^3/\text{h} \end{aligned}$$

β) Τυρβώδης ροή.

Και στην τυρβώδη ροή ισχύει η εξίσωση απωλειών Darcy–Weisbach [εξίσωση (5.16)]. Αλλά ο ακριβής υπολογισμός του συντελεστή τριβής είναι πολύ πιο πολύπλοκος από ό,τι στη στρωτή. Πειραματικές έρευνες σημαντικών μελετητών, έδωσαν ημιεμπειρικές ή εμπειρικές σχέσεις, οι οποίες συνοψίστηκαν από τον Moody το 1944 στο ομώνυμο διάγραμμα.

Η μελέτη της τυρβώδους ροής σε **σωλήνες με λεία τοιχώματα**, οδήγησε στη διαπίστωση ότι ο συντελεστής τριβής εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Reynolds. Αλλά η εξάρτηση αυτή κάθε άλλο παρά απλή είναι. Την πιο ικανοποιητική απάντηση έδωσε ο **Prandtl** το 1935 με την ακόλουθη λογαριθμική σχέση:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2 \cdot \log \left(Re \cdot f^{1/2} \right) - 0,8 \quad (5.20)$$

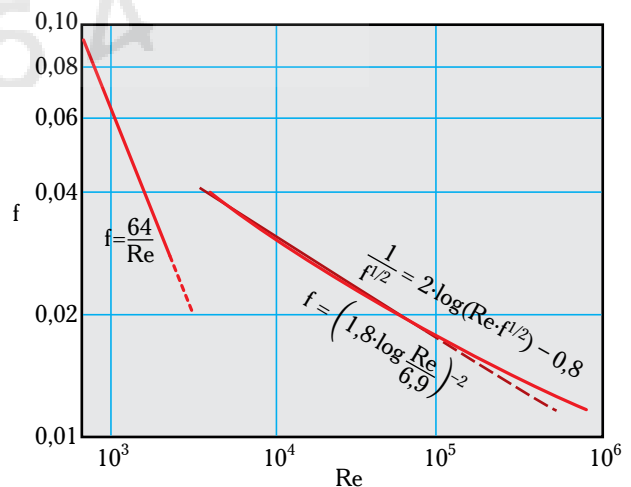
Η εξίσωση (5.20) είναι εξαιρετικά δύσχρηστη. Υπάρχουν όμως προσεγγιστικές σχέσεις, οι οποίες δίνουν ικανοποιητική ακρίβεια. Έτσι, ο H. Blasius (1913) πρότεινε για περιοχή τιμών του αριθμού Reynolds από 4000 ως 10^5 :

$$f = 0,316 \cdot Re^{-1/4} \quad (4000 < Re < 10^5) \quad (5.21)$$

Προτάθηκε επίσης η γενικότερη σχέση:

$$f = \left(1,8 \cdot \log \frac{Re}{6,9} \right)^{-2} \quad (5.22)$$

Στο σχήμα 5.4γ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (5.18) (στρωτή ροή), (5.20) και (5.22) (τυρβώδης ροή) για λείους σωλήνες.



Σχ. 5.4γ

Συντελεστής τριβής (λείοι σωλήνες).

Πίνακας 5.4.1
Συντελεστές τριβής σε λείους σωλήνες.

Σχέσεις υπολογισμού του συντελεστή τριβής (τηρβώδης ροή, λείοι σωλήνες)	Αριθμός Reynolds					
	4000	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\frac{1}{f^{1/2}} = 2 \cdot \log(\text{Re} \cdot f^{1/2}) - 0,8$ Prandtl	0,0399	0,0309	0,0180	0,0116	0,0081	0,0059
$f = 0,316 \cdot \text{Re}^{-1/4}$ Blasius	0,0397	0,0316	0,0178	0,0100		
$f = \left(1,8 \cdot \log \frac{\text{Re}}{6,9}\right)^{-2}$	0,0404	0,0309	0,0178	0,0116	0,0081	0,0060

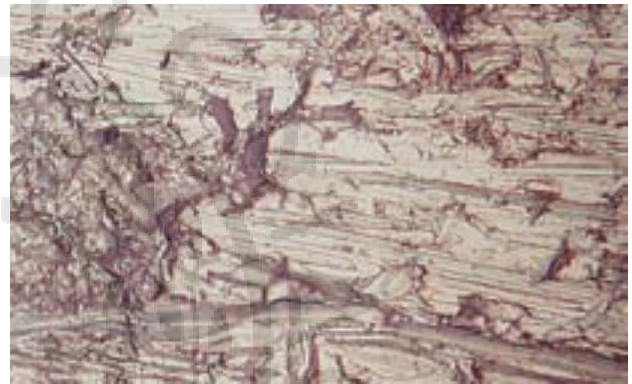
Παρατίθεται επίσης πίνακας αποτελεσμάτων (πίν. 5.4.1) που δίνουν οι τρεις σχέσεις για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds ($\text{Re} \geq 4000$).

γ) Τραχύτητα τοιχωμάτων (roughness).

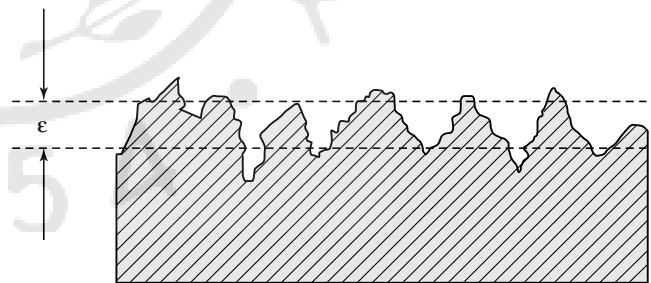
Οι προηγούμενες σχέσεις αφορούν σε σωλήνες με λεία τοιχώματα. Όμως οι αγωγοί που χρησιμοποιούμε στην πράξη, δεν πληρούν αυτόν τον περιορισμό (σχ. 5.4δ) (με προσεγγιστική εξαίρεση, τους γυάλινους σωλήνες και ορισμένους ειδικής κατασκευής μεταλλικούς). Τα τοιχώματά τους παρουσιάζουν ανωμαλίες, οι οποίες εκφράζονται με την ιδιότητα της τραχύτητας.

Τραχύτητα ϵ ενός τοιχώματος, καλείται το μέσο ύψος των ανωμαλιών, που παρουσιάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα του (σχ. 5.4ε). Έχει επομένως διαστάσεις μήκους. Η τραχύτητα εξαρτάται από το υλικό κατασκευής του αγωγού και την επεξεργασία που αυτό έχει υποστεί. Αποτελεί επομένως χαρακτηριστική ιδιότητα του αγωγού ροής. Ο προσδιορισμός της δεν είναι εύκολος, επειδή στην επιφάνεια των αγωγών εμπορίου συναντάμε περιοχές με μεγαλύτερες ή μικρότερες ανωμαλίες (σχ. 5.4δ). Όπως έχει δείξει το πείραμα, η κατανομή των ανωμαλιών, αλλά και το σχήμα τους, επηρεάζουν την τιμή της τραχύτητας. Στον πίνακα 5.4.2 βλέπομε τυπικές τιμές τραχύτητας διαφόρων υλικών κατασκευής σωλήνων. Σημειώνομε ότι οι τραχύττες παλιών σωλήνων, είναι σημαντικά μεγαλύτερες από τις αναγραφόμενες στον πίνακα (π.χ. ο σκουριασμένος χάλυβας παρουσιάζει $\epsilon = 0,2 \pm 50\%$).

Η τραχύτητα των τοιχωμάτων των αγωγών, είναι μία παράμετρος, η οποία αυξάνει την αντίσταση στη ροή. Και αν στη στρωτή ροή η επίδρασή της είναι αμελητέα, δεν συμβαίνει το ίδιο και στην τηρβώδη.



Σχ. 5.4δ
Τραχύτητα μεταλλικού τοιχώματος (μεγέθυνση 700x).



Σχ. 5.4ε
Τραχύτητα ϵ .

Αυτό εξηγείται απ' τη σημαντική διαφορά πάχους του ιξώδους στρώματος της στρωτής ροής απ' το ιξώδες υπόστρωμα της τηρβώδους (βλ. παράγρ. 3.1.5). Στη στρωτή ροή το ιξώδες στρώμα καλύπτει τις ανωμαλίες του τοιχώματος, ενώ αυτό δεν συμβαίνει με το πολύ λεπτό ιξώδες υπόστρωμα της τηρβώδους ροής.

Εκείνο που επηρεάζει τον συντελεστή τριβής, δεν είναι η απόλυτη τιμή της τραχύτητας, αλλά η σχέση της με τη διάμετρο και εκφράζεται απ' τον λόγο της

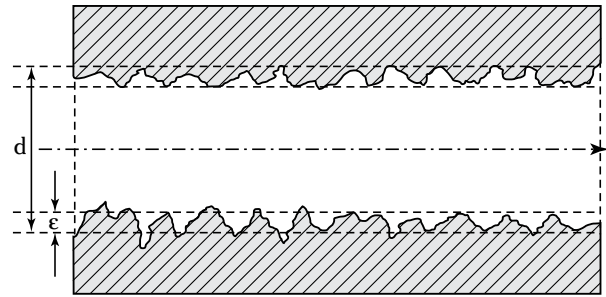
Πίνακας 5.4.2
Τυπικές τιμές τραχύτητας (ϵ) διαφόρων
υλικών κατασκευής σωλήνων.

Υλικό	Τραχύτητα cm	Απόκλιση $\pm\%$
Ανοξείδωτος χάλυβας	0,0002	50
Εμπορικός χάλυβας	0,0046	30
Χαλυβδοέλασμα	0,005	60
Χάλυβας με πλώσεις	0,3	70
Σφυρήλατος σίδηρος	0,0046	20
Γαλβανισμένος σίδηρος	0,015	40
Ασφαλιωμένος χυτοσίδηρος	0,012	50
Χυτοσίδηρος	0,026	50
Ορείχαλκος	0,0002	50
Χαλκός	0,00015	50
Πλαστικό	0,00015	60
Λάστιχο	0,001	60
Σκυρόδεμα	0,018–0,06	60

τραχύτητας προς τη διάμετρο (ϵ/d). Ο λόγος ϵ/d είναι αδιάστατος και καλείται **σχετική τραχύτητα** (σχ. 5.4στ).

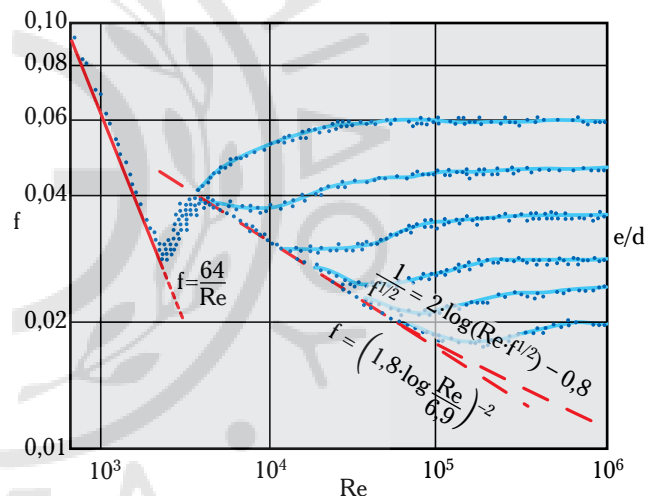
Ο Nikuradse⁴ τοποθέτησε, το 1933, κόκκους άμμου (ορισμένης μέσης διαμέτρου) στο εσωτερικό λείων σωλήνων και έτσι διαμόρφωσε αγωγούς συγκεκριμένης σχετικής τραχύτητας. Πειραματιζόμενος με διάφορες ταχύτητες (άρα διάφορους αριθμούς Reynolds), διαπίστωσε την απόκλιση που παρουσιάζει ο συντελεστής τριβής των σωλήνων με τραχύτητα από τον αντίστοιχο των λείων. Οι πειραματικές μετρήσεις του αποτυπώνονται στο σχήμα 5.4ζ.

Παρατηρούμε ότι η απόκλιση του συντελεστή τριβής f για την περιοχή της στρωτής ροής, είναι αμελητέα. Όμως, καθώς περνάμε στην τυρβώδη ροή και ο αριθμός Reynolds συνεχίζει να αυξάνει, οι τιμές που δίνουν οι σχέσεις (5.20) και (5.22) για ροή σε λείους σωλήνες δεν ισχύουν. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή του αριθμού Reynolds εξαρτώμε-



Σχ. 5.4στ
Σχετική τραχύτητα.

νη απ' τη σχετική τραχύτητα, στην οποία η καμπύλη «αποκολλάται» απ' αυτήν που ισχύει για τους λείους σωλήνες και ακολουθεί άλλη πορεία με σημαντικά μεγαλύτερο συντελεστή τριβής. Έτσι, ανάλογα με τη σχετική τραχύτητα, έχουμε και διαφορετική καμπύλη. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 5.4ζ, όσο μεγαλύτερη είναι η σχετική τραχύτητα, τόσο πιο γρήγορα (δηλ. σε μικρότερο αριθμό Reynolds) αποκολλάται η καμπύλη.



Σχ. 5.4ζ

Επίδραση της σχετικής τραχύτητας στον συντελεστή τριβής.

δ) Διάγραμμα Moody⁵.

Οι πειραματικές μετρήσεις του Nikuradse έγιναν σε σωλήνες με τεχνητά διαμορφωμένη τραχύτητα. Ο Moody, αξιοποιώντας τις εμπειρικές σχέσεις και τις πειραματικές μετρήσεις σε σωλήνες που χρησιμοποιούνται στην πράξη, κατέληξε το 1944 στη διαμόρφωση του ομώνυμου διαγράμματος (σχ. 5.4η).

Το διάγραμμα Moody (Moody chart) είναι πλή-

⁴ Nikuradse Johann: 1894 – 1979.

⁵ Moody Lewis Ferry: 1880 – 1953.

πως αποδεκτό και χρησιμοποιείται από τους μηχανικούς για τον γρήγορο υπολογισμό του συντελεστή τριβής f . Πρόκειται ουσιαστικά για μία σχέση με τη μορφή διαγράμματος που εκφράζει τον συντελεστή τριβής f (άξονας τεταγμένων) σε συνάρτηση με τον αριθμό Reynolds (άξονας τεταγμένων) και τη σχετική τραχύτητα ϵ/d (καμπύλες)⁶:

$$f = F\left(\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}, \frac{\epsilon}{d}\right) \quad (5.23)$$

Η τυπική χρήση του διαγράμματος φαίνεται στο σχήμα 5.4n:

1) Υπολογίζουμε τη σχετική τραχύτητα ϵ/d και εντοπίζουμε την αντίστοιχη καμπύλη στο διάγραμμα (π.χ. $\epsilon/d = 0,0020$).

2) Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds (π.χ. $\text{Re} = 8 \cdot 10^4$).

3) Βρίσκουμε το σημείο τομής της καμπύλης ϵ/d και της τεταγμένης Re .

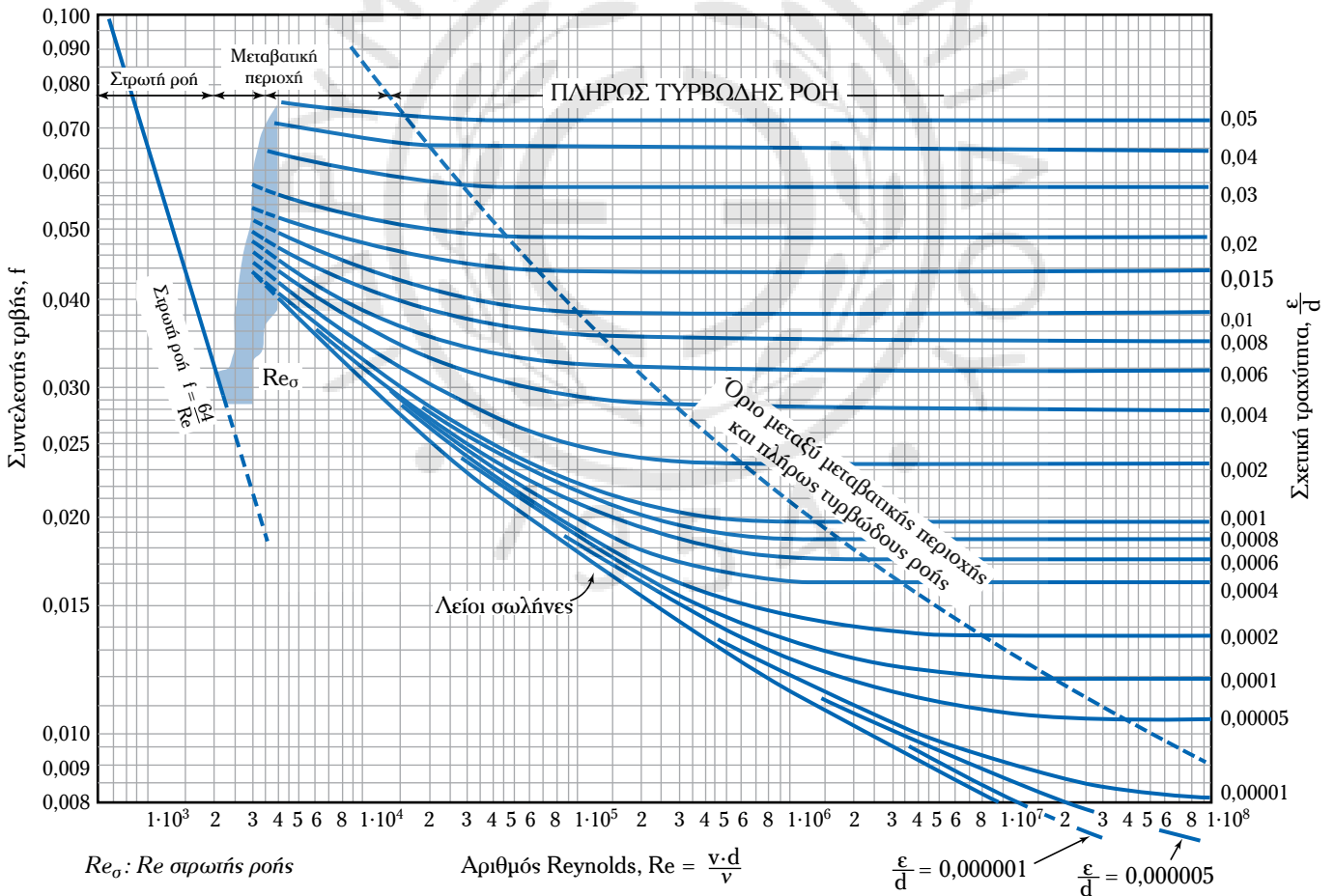
4) Διαβάζουμε στο διάγραμμα την τιμή του συντελεστή τριβής που αντιστοιχεί στο σημείο τομής ($f = 0,026$) (σχ. 5.4θ).

Ευδιάκριτες είναι τρεις περιοχές του διαγράμματος Moody:

1) **Περιοχή στρωτής ροής (α)** [περιοχή (α) (σχ. 5.4θ)]. Η τιμή του συντελεστή τριβής εξαρτάται μόνο απ' τον αριθμό Reynolds ($f = 64/\text{Re}$).

Μεταξύ της πρώτης και δεύτερης περιοχής, για τιμές του αριθμού Reynolds από 2100 ως περίπου 4000, υπάρχει όπως είδαμε, η **κρίσιμη περιοχή**, στην οποία η στρωτή ροή μετατρέπεται σταδιακά σε τυρβώδη.

2) **Μεταβατική περιοχή (β)** [περιοχή (β), (σχ. 5.4θ)]. Σ' αυτήν, η ροή είναι τυρβώδης, αλλά όχι



Σχ. 5.4n
Διάγραμμα Moody.

⁶ Το f είναι συνάρτηση των Re , $\frac{\epsilon}{d}$.

πλήρως αναπτυγμένη. Η τιμή του συντελεστή τριβής f εξαρτάται απ' τον αριθμό Reynolds και τη σχετική τραχύτητα του αγωγού.

3) **Περιοχή πλήρως αναπτυγμένης τυρβώδους ροής (γ)** [περιοχή (γ), (σχ. 5.4θ)]. Εδώ η τιμή του συντελεστή τριβής, εξαρτάται πρακτικά μόνο από τη σχετική τραχύτητα.

Μεταξύ των δύο τελευταίων περιοχών, δεν υπάρχουν σαφή όρια. Συνήθως ως τυπικό διαχωριστικό όριο, αποτελεί μια καμπύλη (διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα του σχ. 5.4η), η οποία σχεδιάστηκε από τον Pigott με βάση την εξίσωση:

$$Re = \frac{3500}{\epsilon/d} \quad (5.24)$$

Η επίδραση της τραχύτητας ϵ στον συντελεστή τριβής, εξαρτάται από τη σχέση της με το πάχος του ιξώδους υποστρώματος y_0 . Πειραματικά έχει διαπιστωθεί ότι:

1) Αν $y_0 > 5 \cdot \epsilon$, το ιξώδες υπόστρωμα εξουδετερώνει την επίδραση της τραχύτητας και ο σωλήνας θεωρείται λείος.

2) Αν $0,3 \cdot \epsilon < y_0 < 5 \cdot \epsilon$, το ιξώδες υπόστρωμα αντιμετωπίζει μερικώς την τραχύτητα και βρισκόμαστε στη μεταβατική περιοχή.

3) Αν $y_0 < 0,3 \cdot \epsilon$, ο σωλήνας συμπεριφέρεται σαν ολικά τραχύς.

Σημείωση: Το y_0 εξαρτάται από τη διάμετρο και για ορισμένο αριθμό Reynolds αυξάνεται με τη διάμετρο (βλ. παράγρ. 3.1.5, κατανομή τοπικών ταχυτήτων σε σωλήνα). Το y_0 μειώνεται όταν αυξάνεται ο αριθμός Reynolds.

Παράδειγμα 9

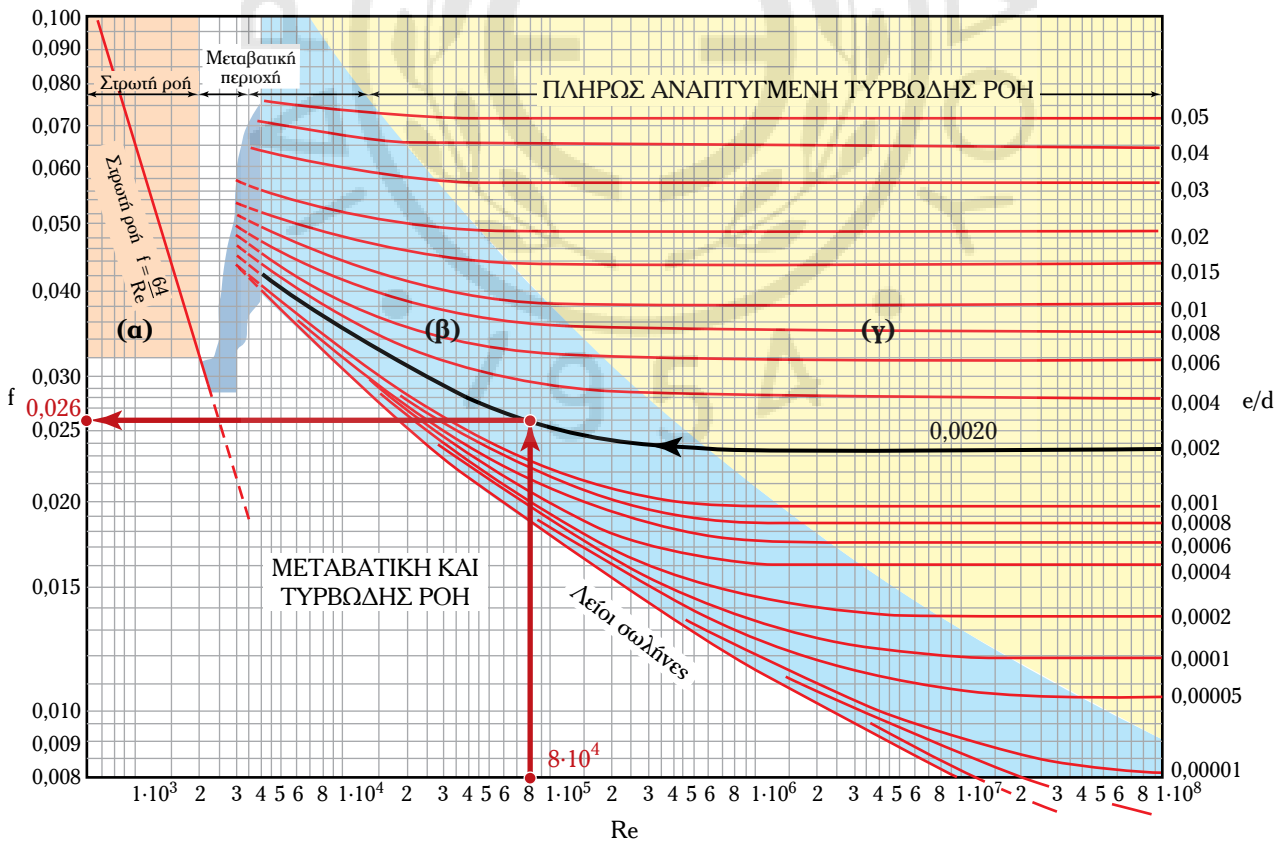
Σε σωλήνα από ασφαλτωμένο χυτοσίδηρο διαμέτρου 6 cm ρέει νερό 20°C. Να υπολογισθούν οι συντελεστές τριβής με παροχές 20, 40 και 80 m³/h.

Λύση.

Δεδομένα: $d = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$, $\dot{V}_1 = 20/3600 \text{ m}^3/\text{s}$,
 $\dot{V}_2 = 40/3600 \text{ m}^3/\text{s}$, $\dot{V}_3 = 80/3600 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ζητούμενα: f_1, f_2, f_3 .

Για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής f , απαιτείται



Σχ. 5.4θ

Χρήση του διαγράμματος Moody.

η γνώση της σχετικής τραχύτητας ϵ/d και ο υπολογισμός του αριθμού Reynolds: $f = F(\text{Re}, \epsilon/d)$.

α) Από τον πίνακα 5.4.2 παίρνομε την τραχύτητα του ασφαλισμένου κυτοσιδήρου:

$$\epsilon = 0,012 \text{ cm} = 0,012 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

β) Υπολογίζομε τη σχετική τραχύτητα:

$$\epsilon/d = 0,012 \cdot 10^2 / 0,06 = 0,002.$$

γ) Υπολογίζομε τις ταχύτητες από την εξίσωση της συνέχειας:

$$v_i = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_i^2} \Rightarrow v_1 = \frac{4 \cdot (20 / 3600 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi \cdot 0,062 \text{ m}^2}$$

$$\text{ή } v_1 = 1,965 \text{ m/s για } 20 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\text{ή } v_2 = 3,93 \text{ m/s για } 40 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\text{ή } v_3 = 7,86 \text{ m/s για } 80 \text{ m}^3/\text{h}$$

δ) Από τον πίνακα 1.2.2 παίρνομε το κινηματικό ιξώδες του νερού 20°C: $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

ε) Υπολογίζομε τους αριθμούς Reynolds:

$$\text{Re}_i = \frac{v_i \cdot d}{\nu} = \frac{1,95 \text{ m/s} \cdot 0,06 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\text{Re}_1 = 1,18 \cdot 10^5$$

$$\text{Re}_2 = 2,36 \cdot 10^5$$

$$\text{Re}_3 = 4,72 \cdot 10^5$$

Με τα προσδιορισμένα ζεύγη (Re , ϵ/d) πηγαίνομε στο διάγραμμα Moody και υπολογίζομε τα αντίστοιχα f :

$$(\text{Re}_1 = 1,18 \cdot 10^5, \epsilon/d = 0,002) \xrightarrow{\text{Moody}}$$

$$f = 0,025 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

$$(\text{Re}_2 = 2,36 \cdot 10^5, \epsilon/d = 0,002) \xrightarrow{\text{Moody}}$$

$$f = 0,024 \text{ (τυρβώδης ροή)}$$

$$(\text{Re}_3 = 4,72 \cdot 10^5, \epsilon/d = 0,002) \xrightarrow{\text{Moody}}$$

$$f = 0,0238 \text{ (πλήρως τυρβώδης ροή)}$$

Παράδειγμα 10

Σε σωλήνα από κυτοσίδηρο διαμέτρου 8 cm ρέει υγρό, κινηματικού ιξώδους $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, με ταχύτητα 3 m/s. Να υπολογισθεί ο συντελεστής τριβής f .

Λύση.

$$\text{Δεδομένα: } d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}, \quad \nu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \\ \nu = 3 \text{ m/s}$$

Ζητούμενο: f

α) Από τον πίνακα 5.4.2 παίρνομε την τραχύτητα του κυτοσιδήρου: $\epsilon = 0,026 \text{ cm}$.

β) Υπολογίζομε τη σχετική τραχύτητα και τον αριθμό Reynolds: $\epsilon/d = (0,026 \text{ cm}) / (10 \text{ cm}) = 0,0026$.

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{(3 \text{ m/s}) \cdot (0,16 \text{ m})}{2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,5 \cdot 10^4$$

Με τις τιμές αυτές πηγαίνομε στο διάγραμμα Moody:

$$(\text{Re} = 1,5 \cdot 10^4, \epsilon/d = 0,0026) \xrightarrow{\text{Moody}} \\ f = 0,0325 \text{ (τυρβώδης ροή)}.$$

Παράδειγμα 11

Να υπολογισθεί ο συντελεστής τριβής νερού σε σωλήνα από κυτοσίδηρο διαμέτρου 4 cm αν η ροή είναι πλήρως τυρβώδης.

Λύση.

$$\text{Δεδομένα: } d = 4 \text{ cm}$$

$$\epsilon = 0,026 \text{ cm (πίν. 5.4.2)}.$$

Ζητούμενο: f

Στην πλήρως τυρβώδη ροή, η τιμή του συντελεστή τριβής εξαρτάται μόνο απ' τη σχετική τραχύτητα του σωλήνα: $\epsilon/d = 0,0065 = (0,026)/(0,04)$.

$$(\text{Πλήρως τυρβώδης ροή, } \epsilon/d = 0,0065) \xrightarrow{\text{Moody}} \\ f = 0,034.$$

Σημείωση: Το διάγραμμα Moody, όπως όλα τα διαγράμματα, δεν δίδει ακριβείς τιμές, αλλά ικανοποιητικές προσεγγίσεις. Εφόσον εργαστούμε προσεκτικά, η προσέγγιση του f είναι της τάξεως του 1%.

5.4.2 Τοπικές απώλειες.

Όπως είπαμε, εκτός από τις γραμμικές (ή κύριες) ενεργειακές απώλειες, σε μία σωλήνωση συναντάμε και τις τοπικές (ή δευτερεύουσες) (minor losses). Αυτές οφείλονται σε διαταραχές της ροής που συνήθως προκαλούνται από τα αναγκαία εξαρτήματα της σωληνώσεως. Ήδη συναντήσαμε τη διαταραχή της ροής στην περιοχή εισόδου από δεξαμενή σε σωλήνα και τις επί πλέον απώλειες που συνεπάγεται (σχ. 5.2α). Αντίστοιχες διαταραχές της ροής και ενεργειακές απώλειες παρατηρούνται στην έξοδο από σωλήνα σε δεξαμενή, στις περιοχές μεταβολής διευσθύνσεως της ροής (γωνίες), στα εξαρτήματα μεταβολής της διαμέτρου (συστολές και διαστολές), συναρμογής των σωληνώσεων (σύνδεσμοι), στις βαλβίδες και άλλα παρεμβαλλόμενα εξαρτήματα.

Συνήθως οι τοπικές απώλειες είναι μικρότερες απ' τις γραμμικές (και γι' αυτό καλούνται και δευτερεύουσες). Σε ορισμένες όμως περιπτώσεις μπορεί να είναι πολύ σημαντικές. Για παράδειγμα, οι απώλειες ύψους που προκαλεί μια μερικώς ανοιχτή βαλβίδα, είναι συνήθως μεγαλύτερες απ' τις αντίστοιχες γραμμικές απώλειες.

Πειραματικά αποδεικνύεται ότι το ύψος μιας τοπικής απώλειας, είναι ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας ροής (επομένως ανάλογο με το ύψος κι-

ντικής ενέργειας $v^2/2 \cdot g$) και εξαρτάται απ' τη φύση του εμποδίου που τη δημιουργεί:

$$h_i = K_i \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.30)$$

Το K ονομάζεται **συντελεστής τοπικών απωλειών** και είναι αδιάστατο μέγεθος. Η τιμή του εξαρτάται από το είδος της αντιστάσεως (της διαταραχής της ροής) αλλά και από άλλες δευτερεύουσες παραμέτρους. Στις περισσότερες περιπτώσεις υπολογίζεται πειραματικά, με αξιοποίηση της εξίσωσης (5.30):

$$K_i = \frac{h_i}{v^2/2 \cdot g} \quad (5.30a)$$

Για τον προσδιορισμό (θεωρητικό ή πειραματικό) του συντελεστή τοπικών απωλειών, αξιοποιούμε την εξίσωση ενέργειας. Επειδή το μήκος του εμποδίου που αντιστέκεται στη ροή είναι μικρό, οι γραμμικές απώλειες από την είσοδο στην περιοχή διαταραχής (1) ως την έξοδο (2) είναι αμελητέες (σχ. 5.41). Το ίδιο και η υψομετρική διαφορά $y_1 - y_2$. Αν δεν αλλάζει και η ταχύτητα (επομένως αν δεν αλλάζει η διάμετρος), η εξίσωση ενέργειας (3.16) θα δώσει:

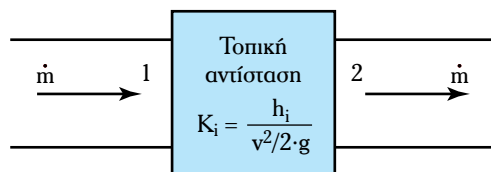
$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = h_i \text{ και η εξίσωση (5.30a) θα γίνει:}$$

$$K_i = \frac{h_i}{v^2/(2 \cdot g)} = \frac{\Delta p}{\rho v^2/(2 \cdot g)} \quad (5.30b)$$

Σημείωση: Στα εξαρτήματα αλλαγής διαμέτρου (διαστολές και συστολές), η ταχύτητα v αντιστοιχεί στον σωλήνα μικρής διαμέτρου.

Ο συντελεστής τοπικών απωλειών ενός εξαρτήματος, γενικά δεν είναι σταθερός, αφού η τιμή του εξαρτάται και από άλλες παραμέτρους, όπως η διάμετρος και ο αριθμός Reynolds. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις, η εξάρτηση αυτή είναι μικρή και δύναται να θεωρηθεί αμελητέα (οπότε ο συντελεστής K εξαρτάται μόνο απ' τη φύση του εμποδίου).

Αντί του συντελεστή τοπικών απωλειών K και της εξίσωσης (5.30), μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έννοια του **ισοδύναμου μήκους** (equivalent length). Αυτό ορίζεται ως ο λόγος του μήκους του αγωγού



Σχ. 5.41

Υπολογισμός τοπικών απωλειών.

που προκαλεί γραμμικές απώλειες ίσες με τις τοπικές απώλειες του εξαρτήματος ροής (L_{eq}), προς τη διάμετρο του σωλήνα (d):

$$\text{Ισοδύναμο μήκος} = \frac{L_{eq}}{d} \quad (5.31)$$

Οι τοπικές απώλειες ισούνται με:

$$h_i = f \cdot \frac{L_{eq}}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.31a)$$

Για παράδειγμα, αν σε πίνακα ιδιοτήτων εξαρτημάτων ροής, συναντήσουμε ισοδύναμο μήκος εξαρτήματος ίσο με 30, αυτό σημαίνει ότι: $L_{eq}/d = 30$. Αν η (εσωτερική) διάμετρος του σωλήνα που τοποθετείται το εξάρτημα είναι 5 cm, έχομε: $L_{eq} = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$. Δηλαδή το εξάρτημα θα προκαλέσει απώλειες ίσες με τις γραμμικές απώλειες σωλήνα μήκους 1,5 m.

Η σχέση μεταξύ του συντελεστή τοπικών απωλειών και του ισοδύναμου μήκους προκύπτει απ' τους ορισμούς των δύο μεγεθών:

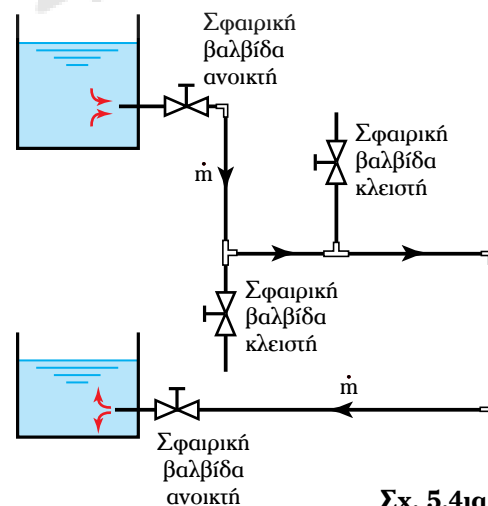
$$h_i = f \cdot \frac{L_{eq}}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = K_i \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \frac{L_{eq}}{d} = \frac{K_i}{f} \quad (5.31b)$$

Το ισοδύναμο μήκος είναι αδιάστατο μέγεθος (όπως και ο συντελεστής τοπικών απωλειών).

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά τον συντελεστή τοπικών απωλειών K , τον οποίο και εξετάζομε για τις σημαντικότερες περιπτώσεις τοπικών απωλειών.

Παράδειγμα 12

Να υπολογισθεί το άθροισμα των συντελεστών τοπικών απωλειών στη σωλήνωση του σχήματος 5.41α, αν ο σωλήνας έχει διάμετρο 2 in.



Σχ. 5.41α

Λύση.

Τοπικές διαταραχές της ροής έχουμε στην είσοδο από την πρώτη δεξαμενή στον σωλήνα, στην έξοδο απ' τον σωλήνα στη δεύτερη δεξαμενή, στις δύο ανοικτές σφαιρικές βαλβίδες, στα δύο ταυ (ένα κάθετης και ένα ευθύγραμμης ροής) και στις τρεις (απλές) γωνίες 90°. Η σύνταξη πίνακα διευκολύνει τον υπολογισμό.

Είδος τοπικής διαταραχής	Πηγή	K _i
Είσοδος σε σωλήνα με προεξέχοντα χείλη	πίν. 6 (Παράρτ.)	0,8
Έξοδος από σωλήνα σε δεξαμενή	πίν. 6 (Παράρτ.)	1,0
Βαλβίδες σφαιρικές ανοικτές, 2" (δύο)	πίν. 8 (Παράρτ.)	2 · 6,9
Ταυ ευθύγραμμης ροής	πίν. 7 και 9 (Παράρτ.)	0,9
Ταυ κάθετης ροής	πίν. 7 και 9 (Παράρτ.)	1,4
Γωνίες 90°, απλές (τρεις)	πίν. 6 (Παράρτ.)	3 · 1,2
ΣΥΝΟΛΟ		ΣK = 21,5

Άρα: **ΣK = 21,5**

5.5 Ολικές απώλειες.

Οι συνολικές απώλειες λόγω τριβών Σh που συναντήσαμε στην εξίσωση ενέργειας (παράγρ. 5.3.2) ισούνται, όπως είδαμε, με το άθροισμα των γραμμικών (ή κυρίων) και των τοπικών (ή δευτερευουσών) απωλειών:

$$\Sigma h = h_f + \Sigma h_i \quad (5.32)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση των Darcy – Weisbach:

$$h_f = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.16)$$

Κάθε τοπική διαταραχή, οδηγεί σε απώλεια n οποία δίνεται απ' την εξίσωση:

$$h_i = K_i \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.30)$$

Στην περίπτωση που η διάμετρος δεν μεταβάλλεται, η ταχύτητα παραμένει σταθερή η σχέση (5.32) δίνει:

$$\Sigma h = \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.35)$$

Το άθροισμα ΣK_i καλείται **ολικός συντελεστής τοπικών απωλειών**.

Στην περίπτωση αλλαγής διαμέτρου, θεωρούμε πως έχουμε σύνδεση διαφορετικών σωλήνων σε σειρά και ο υπολογισμός των απωλειών πρέπει να γίνεται χωριστά για κάθε σωλήνα σταθερής διαμέτρου.

Στη εξίσωση (5.35) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ταχύτητα σε συνάρτηση με την παροχή:

$$v = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} \quad (5.7a)$$

Οπότε η εξίσωση (5.35) λαμβάνει τη μορφή:

$$\Sigma h = \frac{8}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4} \cdot \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \cdot \dot{V}^2 \quad (5.35a)$$

Η εξίσωση (5.35a) δείχνει πως οι απώλειες ύψους είναι ανάλογες του τετραγώνου της παροχής. Υπενθυμίζουμε ότι για μεγάλους αριθμούς Reynolds (περιοχή πλήρως τυρβώδους ροής), ο συντελεστής τριβής f παραμένει πρακτικά σταθερός (εξαρτάται μόνο από τη σχετική τραχύτητα ε/d). Αν θέσουμε:

$$\alpha = \frac{8}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4} \cdot \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \quad (5.35\beta)$$

η εξίσωση (5.35a) γίνεται:

$$\Sigma h = \alpha \cdot \dot{V}^2 \quad (5.35\gamma)$$

Το ύψος απωλειών Σh επηρεάζεται πολύ από τη διάμετρο του σωλήνα, d. Πιο συγκεκριμένα, οι γραμμικές απώλειες είναι αντιστρόφως ανάλογες της πέμπτης δυνάμεως της διαμέτρου:

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \cdot f \cdot \frac{L}{d^5} \cdot \dot{V}^2 \quad (5.36)$$

και οι τοπικές, αντιστρόφως ανάλογες της τέταρτης δυνάμεως της διαμέτρου:

$$h_i = \frac{8}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4} \cdot K_i \cdot \dot{V}^2 \quad (5.37)$$

Παράδειγμα 13

Σωλήνας από χυτοσίδηρο, διαμέτρου 10 cm και μήκους 50 m δίνει παροχή νερού 90 m³/h. Υπάρχουν 4 καμπύλες γωνίες 90°, οι οποίες δεν φαίνονται στο σχήμα 5.5a.

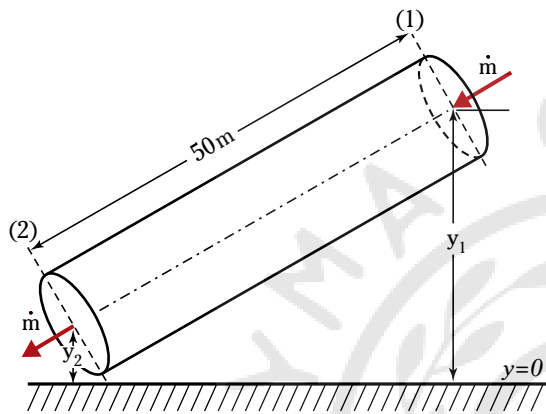
- Να υπολογισθούν οι απώλειες ύψους.
- Αν $y_1 - y_2 = 2$ m, να υπολογισθεί η πτώση πιέσεως.
- Να υπολογισθούν οι απώλειες ύψους για παροχή

$70 \text{ m}^3/\text{h}$, και $120 \text{ m}^3/\text{h}$ και να γίνει η γραφική παράσταση $\Sigma h = f(V)$.

Λύση.

Δεδομένα: $L = 50 \text{ m}$, $d = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$,
 $\epsilon = 0,00026 \text{ m}$ (πίν. 5.4.2),
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (πίν. 1.2.2),
 $V = 90 \text{ m}^3/\text{h} = 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$,
 $y_1 - y_2 = 2 \text{ m}$.

Ζητούμενα: (α) Σh , (β) $\Delta p = p_1 - p_2$

**Σχ. 5.5α****Διαθέσιμες σχέσεις:**

$$\Sigma h = \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} \quad (2)$$

$$f = F \left(\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}, \frac{\epsilon}{d} \right) \quad (\text{σχ. 5.4n}) \quad (3)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (4)$$

α) Το ύψος απωλειών υπολογίζεται από την εξίσωση Darcy-Weisbach (1). Στη σχέση αυτή υπάρχουν τέσσερις άγνωστοι: Σh , f , ΣK_i , v . Πρέπει επομένως πρώτα να υπολογισθούν η ταχύτητα v , ο συντελεστής τριβής f και ο ολικός συντελεστής τοπικών απωλειών ΣK_i .

- Υπολογισμός ταχύτητας v [από την εξίσωση της συνέχειας, εξίσωση (2)] \Rightarrow

$$v = \frac{4 \cdot 0,025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot (0,1 \text{ m})^2} \Rightarrow v = 3,18 \text{ m/s}$$

- Υπολογισμός f : $\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Re} = 0,318 \cdot 10^6 = 3,18 \cdot 10^5, \quad \epsilon/d = 0,0026$$

και από το διάγραμμα Moody (σχ. 5.4n): $f = 0,026$.

- Υπολογισμός ΣK_i : Υπάρχουν 4 καμπύλες γωνίες 90° , για τις οποίες δεν δίνεται η ακτίνα καμπυλότητας. Από το διάγραμμα του σχήματος Π.1β του Παραρτήματος, παρατηρούμε πως για καμπύλη γωνία 90° με $\epsilon/d = 0,0026$, ο συντελεστής τοπικών απωλειών κυμαίνεται μεταξύ 0,2 και 0,6. Επίσης, στον πίνακα 6 του Παραρτήματος ο συντελεστής K κυμαίνεται μεταξύ 0,2 και 0,7. Λαμβάνομε:

$$K_{90} \approx 0,5 \Rightarrow \Sigma K_i = 4 \cdot K_{90} = 2.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση απωλειών:

Από την (1) \Rightarrow

$$\Rightarrow \Sigma h = \left(0,026 \cdot \frac{50 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} + 2 \right) \cdot \frac{(3,18 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \Sigma h = 7,73 \text{ m}$$

β) Η πτώση πύεσης υπολογίζεται με εφαρμογή της εξίσωσης ενέργειας (4).

$$\text{Είναι: } v_1 = v_2 = v = (3,18 \text{ m/s}) \Rightarrow v_1^2 - v_2^2 = 0$$

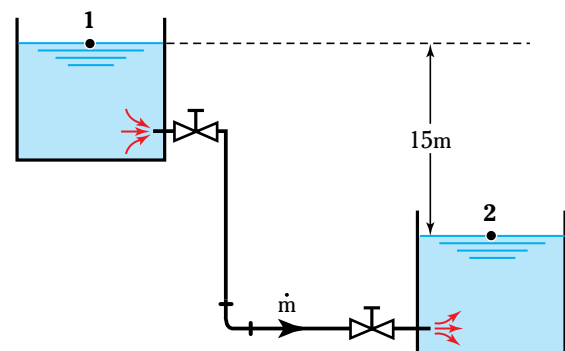
$$\text{Από την εξίσωση (4)} \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \Sigma h - (y_1 - y_2) = (7,73 - 2,0) \text{ m} = 5,73 \text{ m}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = 5,73 \text{ m} \Rightarrow p_1 - p_2 = 56,2 \text{ kPa}$$

γ) Υπολογίσθηκε η απώλεια $\Sigma h = 7,73 \text{ m}$ για παροχή νερού $90 \text{ m}^3/\text{h}$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για $\dot{V} = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ και $\dot{V} = 120 \text{ m}^3/\text{h}$ μπορούμε στο επίπεδο $\Sigma h - \dot{V}$ να αποτυπώσουμε τα σημεία και να χαράξουμε την καμπύλη $\Sigma h = f(\dot{V})$. Η καμπύλη αυτή σύμφωνα με την εξίσωση (5.35γ) είναι παραβολή διερχόμενη απ' την αρχή των αξόνων Σh και \dot{V} .

Παράδειγμα 14

Οι δεξαμενές του σχήματος 5.5β συνδέονται με σωλήνα από ασφαλωμένο χυτοσίδηρο διαμέτρου 2 in και μήκους 50 m. Υπάρχουν δύο ανοικτές σφαιρικές βαλβίδες (κοχλιωτές) και δύο (απλές) γωνίες 90° . Να υπολογισθεί η παροχή νερού.

**Σχ. 5.5β**

Λύση.

Δεδομένα: $L = 50 \text{ m}$, $d = 2 \text{ in} = 0,0508 \text{ m}$,
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 9,81 \text{ m/s}^2$,
 $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (πίν. 1.2.2)
 $y_1 - y_2 = 15 \text{ m}$,
 $\epsilon = 0,00012 \text{ m}$ (πίν. 5.4.2).

Ζητούμενο: \dot{V} .

Διαθέσιμες σχέσεις:

$$\Sigma h = \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

$$V = \frac{p \cdot d^2}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} \quad (2)$$

$$f = F \left(\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}, \frac{\epsilon}{d} \right) \quad (\text{διάγραμμα Moody}) \quad (3)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (4)$$

Διερεύνηση: Η παροχή υπολογίζεται απ' την εξίσωση συνέχειας (2), αν προηγουμένως έχει υπολογισθεί η ταχύτητα. Αυτή, μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση Darcy-Weisbach (1). Προς τούτο πρέπει να γνωρίζουμε, εκτός από τη διάμετρο d και το μήκος L του σωλήνα τα οποία δίνονται, τις ολικές απώλειες Σh , τον συντελεστή τριβής f και το άθροισμα συντελεστών τοπικών απωλειών ΣK_i . Η δυσκολία βρίσκεται –όπως θα διαπιστώσουμε– στην αδυναμία ακριβούς υπολογισμού του συντελεστή τριβής f .

α) Οι ολικές απώλειες Σh υπολογίζονται αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ενέργειας (4) μεταξύ των ελευθέρων επιφανειών των δύο δεξαμενών.

Γνωρίζουμε: $y_1 - y_2 = 15 \text{ m}$.

Είναι: $v_1 = v_2 = 0$, $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}} \Rightarrow p_1 - p_2 = 0$

από την (4) $\Rightarrow (y_1 - y_2) = \Sigma h \Rightarrow \Sigma h = 15 \text{ m}$, είναι το σύνολο των απωλειών.

β) Ο **ολικός συντελεστής τοπικών απωλειών ΣK_i** , υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη την εκφώνηση (και το σχήμα) της ασκήσεως.

Υπάρχουν οι ακόλουθες τοπικές διαταραχές από το σημείο 1 ως το 2:

- Είσοδος σε σωλήνα που προεξέχει: $K_1 = 0,8$ (πίν. 6, Παράρτημα)
- Έξοδος από σωλήνα σε δεξαμενή: $K_2 = 1,0$ (πίν. 6, Παράρτημα)
- Δύο (απλές) γωνίες 90° : $K_3 = 2 \cdot 1,2$ (πίν. 6, Παράρτημα)
- Δύο σφαιρικές κοχλιωτές βαλβίδες: $K_4 = 2 \cdot 6,9$ (πίν. 8, Παράρτημα)

Άθροίζοντας: $\Sigma K_i = 17,6$.

γ) **Για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής**, απαιτείται η γνώση της σχετικής τραχύτητας (ϵ/d) και του αριθμού Reynolds ($\text{Re} = vd/\nu$). Παρατηρούμε πως είναι αδύνατος ο υπολογισμός του αριθμού Reynolds, επειδή δεν γνωρίζουμε την ταχύτητα (η εξίσωση της συνέχειας έχει δύο αγνώστους: την ταχύτητα v και την παροχή \dot{V}).

Σημειώνουμε πως έχουμε στη διάθεσή μας **τρεις σχέσεις** (εξίσωση συνέχειας, εξίσωση απωλειών και διάγραμμα Moody) **και τρεις αγνώστους** (παροχή \dot{V} , ταχύτητα v , συντελεστής τριβής f). Επειδή όμως η τρίτη σχέση δεν είναι εξίσωση, **δεν μπορούμε να επιλύσουμε σύστημα εξισώσεων**. Έτσι, είμαστε υποχρεωμένοι να προχωρήσουμε σε **επαναληπτική διαδικασία υποθέσεως του ζητούμενου και διορθώσεως**.

Πιο συγκεκριμένα, **υποθέτουμε κάποια παροχή \dot{V}'** και υπολογίζουμε τις απώλειες $\Sigma h'$ που αντιστοιχούν σ' αυτήν. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τις απώλειες $\Sigma h'$ με τις γνωστές απώλειες Σh (**κριτήριο**: $\Sigma h = 15 \text{ m}$) και διαπιστώνουμε αν η ζητούμενη παροχή \dot{V} είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη απ' την παροχή \dot{V}' . Σύμφωνα με την εξίσωση απωλειών:

$$- \text{Αν } \Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow \dot{V}' > \dot{V}$$

$$- \text{Αν } \Sigma h' < \Sigma h \Rightarrow \dot{V}' < \dot{V}$$

Ανάλογα με την περίπτωση, προχωρούμε σε νέα δοκιμή.

Η υπολογιστική διαδικασία ολοκληρώνεται όταν:

$$\Sigma h' \cong \Sigma h \Rightarrow \dot{V}' \cong \dot{V}$$

As ακολουθήσουμε την παραπάνω μεθοδολογία στο παράδειγμά μας:

α) Πρώτος τρόπος (Αναλυτικός):

$$- \text{Έστω } \dot{V}' = 60 \text{ m}^3/\text{h} = 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{από την (2)} \Rightarrow v' = 8,22 \text{ m/s } (\epsilon/d' = 0,00236,$$

$$\text{Re}' = vd/\nu = 4,18 \cdot 10^5) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,025.$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow \Sigma h' = 145,7 \text{ m} > 15 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow \dot{V}' > \dot{V} \Rightarrow \dot{V} < 60 \text{ m}^3/\text{h}^7$$

Επαναλαμβάνουμε μειώνοντας την παροχή \dot{V}' :

$$- \text{Έστω } \dot{V}' = 20 \text{ m}^3/\text{h} = 20/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$(2) \Rightarrow v' = 2,74 \text{ m/s}$$

$$(\epsilon/d' = 0,00236, \text{Re}' = vd/\nu = 1,39 \cdot 10^5)$$

$$\xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0255$$

$$(1), (2) \Rightarrow \Sigma h' = 16,36 \text{ m} > 15 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow \dot{V}' > \dot{V} \Rightarrow \dot{V} < 20 \text{ m}^3/\text{h}.$$

$$- \text{Έστω } \dot{V}' = 18 \text{ m}^3/\text{h} = 18/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$(2) \Rightarrow v' = 2,47 \text{ m/s } (\epsilon/d' = 0,00236,$$

⁷ Με \dot{V} εδώ συμβολίζουμε την πραγματική παροχή και με \dot{V}' την υποθετική.

$$\text{Re} = vd/\nu = 1,25 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0256$$

$$(1), (2) \Rightarrow \Sigma h' = 13,29 \text{ m} < 15 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h' < \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' < \dot{V} \Rightarrow \dot{V} > 18 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Ήδη έχουμε αρχίσει να προσεγγίζουμε την παροχή:
 $18 \text{ m}^3/\text{h} < \dot{V} < 20 \text{ m}^3/\text{h}$. Συνεχίζουμε:

- Έστω $\dot{V}' = 19 \text{ m}^3/\text{h} = 19/3600 \text{ m}^3/\text{s}$

$$(2) \Rightarrow v' = 2,6 \text{ m/s} \quad (\epsilon/d' = 0,00236,$$

$$\text{Re}' = vd/\nu = 1,32 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0256$$

$$(1), (2) \Rightarrow \Sigma h' = 14,79 \text{ m} < 15 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h' < \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' < \dot{V} \Rightarrow \dot{V} > 19 \text{ m}^3/\text{h}.$$

- Έστω $\dot{V}' = 19,2 \text{ m}^3/\text{h} = 19,2/3600 \text{ m}^3/\text{s}$

$$(2) \Rightarrow v' = 2,63 \text{ m/s} \quad (\epsilon/d' = 0,00236,$$

$$\text{Re} = vd/\nu = 1,34 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0256$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 15,10 \text{ m} > 15 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' > \dot{V} \Rightarrow \dot{V} < 19,2 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Παρατηρούμε πως προσεγγίζουμε όλο και περισσότερο την τιμή του \dot{V} . Όταν η προσέγγιση είναι ικανοποιητική, όταν δηλαδή $\Sigma h' \cong \Sigma h$, αποδεχόμαστε την τιμή της παροχής: $\dot{V}' \cong \dot{V}$. Έτσι, αν μας ικανοποιεί η προσέγγιση: $\Sigma h' - \Sigma h \leq 0,01 \text{ m}$, ήδη η τελευταία δοκιμή μας καλύπτει και $\dot{V} \cong 19,2 \text{ m}^3/\text{h}$. Αν επιδιώκομε μεγαλύτερη ακρίβεια (π.χ. $\Sigma h' - \Sigma h \leq 0,01 \text{ m}$), συνεχίζουμε:

- Έστω $\dot{V}' = 19,15 \text{ m}^3/\text{h} = 19,15/3600 \text{ m}^3/\text{s}$

$$(2) \Rightarrow v' = 2,62 \text{ m/s},$$

$$(\epsilon/d' = 0,00236, \text{Re} = v'd/\nu = 1,33 \cdot 10^5)$$

$$\xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0256$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 15,02 \text{ m} > 15 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' > \dot{V} \Rightarrow \dot{V} < 19,15 \text{ m}^3/\text{h}$$

- Έστω $\dot{V}' = 19,14 \text{ m}^3/\text{h} = 19,14/3600 \text{ m}^3/\text{s}$

$$(2) \Rightarrow v' = 2,62 \text{ m/s},$$

$$(\epsilon/d' = 0,00236, \text{Re} = vd/\nu = 1,33 \cdot 10^5)$$

$$\xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0256$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 15,002 \text{ m} \cong 15 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h' \cong \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' \cong \dot{V} \Rightarrow \dot{V} \cong 19,14 \text{ m}^3/\text{h}.$$

$$\text{Άρα: } \dot{V} \cong 19,14 \text{ m}^3/\text{h} = 0,00532 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Σημειώνουμε ότι όσο πιο λογική είναι η πρώτη τυχαία υπόθεση, αλλά και οι επόμενες, τόσο λιγότερες δοκιμές θα χρειαστούν.

Η διαδικασία επιλύσεως ελέγχεται καλύτερα και παρουσιάζεται πιο κομψά, αν συντάξουμε σχετικό πίνακα με συγκρινωμένα τα αποτελέσματα των δοκιμών (πίν. 5.5.1).

Αν και η επαναληπτική διαδικασία που παρουσιάσαμε, επιβλήθηκε απ' την αδυναμία μας να υπολογίσουμε τον αριθμό Reynolds, άρα και τον συντελεστή τριβής f , παρατηρούμε ότι στις δοκιμές του παραδείγματος, ο συντελεστής f ελάχιστα μεταβλήθηκε (από 0,0249 ως 0,0256: μεταβολή 2%), αφού απ' την τρίτη δοκιμή και μετά παραμένει σταθερός ($f = 0,0256$). Αυτό οφείλεται στο ότι η ροή βρίσκεται κοντά στην περιοχή της πλήρως αναπτυγμένης τύρβης. Υπενθυμίζουμε ότι στην περιοχή αυτή, ο συντελεστής τριβής είναι ανεξάρτητος του αριθμού Reynolds και εξαρτάται μόνο απ' τη σχετική τραχύτητα ϵ/d (η οποία στο πρόβλημα υπολογισμού της παροχής, είναι δεδομένη).

Το γεγονός αυτό το αξιοποιούμε για μια δεύτερη, σημαντικά πιο σύντομη μέθοδο επιλύσεως: Αντί να κάνουμε μεμονωμένες υποθέσεις για την παροχή και στη συνέχεια να υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds, υποθέτουμε ότι η παροχή είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να έχουμε πλήρως αναπτυγμένη τυρβώδη ροή. Έτσι, γνωρίζοντας τη σχετική τραχύτητα, από το διάγραμμα Moody υπολογίζουμε τον (υποθετικό) συντελεστή τριβής. Στη συνέχεια, από την εξίσωση των απωλειών, υπολογίζουμε την (υποθετική) παροχή. Τέλος, ελέγχουμε την υπόθεση της πλήρως αναπτυγμένης τύρβης (επιβεβαιώνουμε ή διορθώνουμε τα f και \dot{V}).

Ακολουθεί η επίλυση του παραδείγματος μ' αυτήν τη μέθοδο.

β) Δεύτερος τρόπος (Υπόθεση Έντονης Τύρβης, YET):

- Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στην περιοχή της πλή-

Πίνακας 5.5.1

\dot{V}' (m ³ /h)	v' (m/s)	Re'	f'	$\Sigma h'$	$\Sigma h' - \Sigma h$	\dot{V}
60	8,223	$4,18 \cdot 10^5$	0,0249	145,07	130,07	$\dot{V} < 60$
20	2,741	$1,39 \cdot 10^5$	0,0255	16,36	1,36	$\dot{V} < 20$
18	2,467	$1,25 \cdot 10^5$	0,0256	13,29	-1,71	$\dot{V} > 18$
19	2,604	$1,32 \cdot 10^5$	0,0256	14,79	-0,21	$\dot{V} > 19$
19,2	2,631	$1,34 \cdot 10^5$	0,0256	15,10	0,10	$\dot{V} < 19,2$
19,15	2,625	$1,33 \cdot 10^5$	0,0256	15,02	0,02	$\dot{V} < 19,15$
19,14	2,623	$1,33 \cdot 10^5$	0,0256	15,002	0,00	$\dot{V} = 19,14$

πως αναπτυγμένης τυρβώδους ροής. Από το διάγραμμα Moody, γνωρίζοντας τη σχετική τραχύτητα, υπολογίζουμε τον συντελεστή τριβής f :

$$(\epsilon/d = 0,00236, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0245$$

– **Υπολογίζουμε** την (υποθετική) τιμή της παροχής:

από την (5.35α) \Rightarrow

$$\Rightarrow 15 = \frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81 \cdot 0,0508^4} \cdot$$

$$\cdot \left(0,0245 \cdot \frac{50}{0,0508} + 17,6 \right) \cdot (V')^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V' = 0,005384 \text{ m}^3/\text{s} = 19,38 \text{ m}^3/\text{h}$$

– **Ελέγχουμε** αν ισχύει η υπόθεση:

$$\text{απ' την (2)} \Rightarrow v = 2,656 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = vd/v = 1,3 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f = 0,0256$$

Αν $f' \cong f$, η υπόθεση επαληθεύεται και επομένως, $\dot{V} = \dot{V}'$.

Αν $f' < f$, επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό με τη νέα τιμή του f . Στο παράδειγμά μας έχουμε μια απόκλιση (4,5%), άρα συνεχίζουμε:

– **Διορθώνουμε** την τιμή της παροχής, με χρήση της νέας τιμής του f :

απ' την (5.35α) \Rightarrow

$$\Rightarrow 15 = \frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81 \cdot 0,0508^4} \cdot$$

$$\cdot \left(0,0256 \cdot \frac{50}{0,0508} + 17,6 \right) \cdot (V')^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V' = 0,005317 \text{ m}^3/\text{s} = 19,14 \text{ m}^3/\text{h}$$

Θεωρητικά, πρέπει και πάλι να ελέγξουμε την τιμή του f και –αν χρειαστεί– να διορθώσουμε. Στην πράξη όμως, μετά την πρώτη διόρθωση, η απόκλιση είναι αμελητέα. Ας προχωρήσουμε στον έλεγχο:

$$\text{από την (2)} \Rightarrow v = 2,623 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = vd/v = 1,33 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f = 0,0256$$

Κατά συνέπεια, η παραπάνω τιμή της παροχής \dot{V} είναι η ζητούμενη:

$$\dot{V} = 0,005317 \text{ m}^3/\text{s} = 19,14 \text{ m}^3/\text{h}$$

Παράδειγμα 15

Να υπολογισθεί η ελάχιστη διάμετρος σωλήνα από γαλβανισμένο σίδηρο, μήκους 20 m, αν επιδιώκουμε παροχή νερού (20°C) ίση με 60 m³/h, και οι ολικές απώλειες δεν επιτρέπεται να υπερβαίνουν τα 8 m. Δίνεται: $\Sigma K = 4$.

Λύση.

$$\text{Δεδομένα: } L = 12 \text{ m, } \epsilon = 0,00015 \text{ m (πίν. 5.4.2),} \\ \Sigma h \leq 8 \text{ m, } \Sigma K = 4,$$

$$v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s (πίν. 1.2.2),}$$

$$\dot{V} = 60 \text{ m}^3/\text{h} = 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Ζητούμενο: d

Διαθέσιμες σχέσεις:

$$\Sigma h = \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} \quad (2)$$

$$f = F \left(\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}, \frac{\epsilon}{d} \right) \quad (\text{οx. 5.4n}) \quad (3)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (4)$$

Διαερεύνηση: Και σ' αυτό το πρόβλημα, σχέση-κλειδί αποτελεί η εξίσωση Darcy–Weisbach (1). Στην εξίσωση αυτή, εκτός από τη διάμετρο d , άγνωστος είναι και ο συντελεστής τριβής f . Το διάγραμμα Moody δεν μας βοηθά να υπολογίσουμε τον f , αφού δεν γνωρίζουμε ούτε τον αριθμό Reynolds, ούτε τη σχετική τραχύτητα ϵ/d . Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να κάνουμε δοκιμές: Να υποθέσουμε μία τυχαία (λογική) τιμή της διαμέτρου d' και να υπολογίσουμε τις ολικές απώλειες $\Sigma h'$ που προκύπτουν (παράδ. 14). Σημειώνουμε ότι δίνεται η μέγιστη τιμή των απωλειών Σh κι αυτή θα αποτελέσει το κριτήριο για την πορεία της επιλύσεως. Λαμβάνοντας υπόψη ότι με τη μείωση της διαμέτρου αυξάνουν οι απώλειες, η όποια προσέγγιση θα γίνει προς τα πάνω:

– Αν $\Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow d > d'$ (η τιμή d' απορρίπτεται).

– Αν $\Sigma h' < \Sigma h \Rightarrow d \leq d'$ (η τιμή d' είναι αποδεκτή, αλλά πιθανόν να υπάρχει και μικρότερη αποδεκτή διάμετρος).

Παρατηρούμε και πάλι ότι έχουμε τρεις αγνώστους (v , f , d) και τρεις διαθέσιμες σχέσεις (εξίσωση συνέχειας, εξίσωση απωλειών, διάγραμμα Moody). (Η εξίσωση ενέργειας δεν είναι αξιοποιήσιμη, αφού δεν δίνεται, ούτε ζητείται, κάποιο άλλο ενεργειακό μέγεθος).

– Έστω $d' = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$

$$\text{Από την (2)} \Rightarrow v' = 2,122 \text{ m/s (Re}' = vd/v = 2,1 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d = 0,0015) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0227$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 1,96 \text{ m} < 8 \text{ m} \Rightarrow d \leq 10 \text{ cm}.$$

Δοκιμάζουμε μικρότερη διάμετρο:

– Έστω $d' = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

$$(2) \Rightarrow v' = 8,49 \text{ m/s (Re}' = 4,2 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d = 0,003) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0265$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 53,62 \text{ m} > 8 \text{ m} \Rightarrow d > 5 \text{ cm}.$$

– Έστω $d' = 7 \text{ cm} = 0,07 \text{ m}$

$$(2) \Rightarrow v' = 4,33 \text{ m/s (Re}' = 3,0 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d = 0,00214) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0244$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 10,49 \text{ m} > 8 \text{ m} \Rightarrow d > 7 \text{ cm.}$$

$$\text{-- Έστω: } d' = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$$

$$(2) \Rightarrow v' = 3,32 \text{ m/s} \quad (\text{Re}' = 2,7 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d = 0,00187) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0237$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 5,56 \text{ m} < 8 \text{ m} \Rightarrow d \leq 8 \text{ cm.}$$

Με τις ως τώρα δοκιμές έχομε καταλήξει ότι η ζητούμενη διάμετρος βρίσκεται μεταξύ των 7 και 8 cm: $7 \text{ cm} < d \leq 8 \text{ cm}$. Αν η εκφώνηση έλεγε ότι δεν υπάρχουν άλλες διαθέσιμες τιμές διαμέτρων μεταξύ των 7 και 8 cm, θα επιλέγαμε διάμετρο 8 cm (η τιμή $d = 7 \text{ cm}$ δεν καλύπτει τις απαιτήσεις του προβλήματος και έχει απορριφθεί). Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν αναφέρεται, συνεχίζομε για μία πιο ικανοποιητική προσέγγιση, π.χ. 1 mm:

$$\text{-- Έστω: } d' = 7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m}$$

$$(2) \Rightarrow v' = 3,77 \text{ m/s} \quad (\text{Re}' = 2,8 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d = 0,002) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,024$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 7,55 \text{ m} < 8 \text{ m} \Rightarrow d \leq 7,5 \text{ cm}$$

$$\text{-- Έστω: } d' = 7,4 \text{ cm} = 0,074 \text{ m}$$

$$(2) \Rightarrow v' = 3,875 \text{ m/s} \quad (\text{Re}' = 2,9 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d = 0,00203) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0241$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma h' = 8,05 \text{ m} > 8 \text{ m} \Rightarrow d > 7,4 \text{ cm}$$

$$\text{Άρα: } 7,4 \text{ cm} < d \leq 7,5 \text{ cm} \Rightarrow d = 7,5 \text{ cm}$$

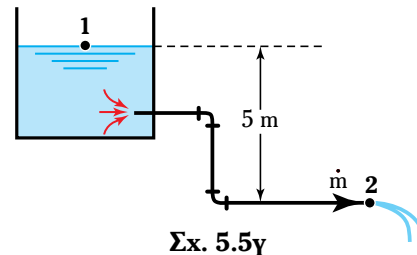
Με αυτήν τη διάμετρο, θα λαμβάνομε παροχή $60 \text{ m}^3/\text{h}$ και θα παρουσιάζονται ολικές απώλειες $\Sigma h = 7,55 \text{ m}$ ($< 8 \text{ m}$).

Όπως και στο πρόβλημα υπολογισμού της παροχής, ενδείκνυται η σύνταξη σχετικού πίνακα (πίν. 5.5.2).

Στο παράδειγμα που εξετάσαμε, δίνεται η μέγιστη τιμή του επιτρεπόμενου ύψους απωλειών ($\Sigma h \leq 8 \text{ m}$) και αυτό χρησιμοποιήσαμε ως κριτήριο. Σε άλλα προβλήματα υπολογισμού της διαμέτρου, το ύψος απωλειών είναι συγκεκριμένο και ζητείται η κατάλληλη διάμετρος, ώστε η παροχή να μην είναι μικρότερη από μια επιθυμητή τιμή. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει πώς τροποποιείται η μεθοδολογία υπολογισμού.

Παράδειγμα 16

Στην ελεύθερη επιφάνεια της κλειστής δεξαμενής του σχήματος 5.5γ, επικρατεί πίεση 2 bar. Ο σωλήνας από ασφαλτωμένο κυτοσίδηρο, έχει μήκος 25 m.



Σχ. 5.5γ

α) Να υπολογισθεί η διάμετρος (με προσέγγιση 0,5 cm), ώστε η παροχή νερού να είναι τουλάχιστον $40 \text{ m}^3/\text{h}$.

β) Να υπολογισθούν οι ολικές απώλειες και η παροχή.

Λύση.

Δεδομένα: $L = 25 \text{ m}$,

$\epsilon = 0,00012 \text{ m}$ (πίν. 5.4.2),

$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (πίν. 1.2.2),

$\dot{V} \geq 40 \text{ m}^3/\text{h} = 40/3600 \text{ m}^3/\text{s}$,

$p_1 = 2 \text{ bar} = 200 \text{ kPa}$,

$p_2 = 101,3 \text{ kPa}$, $y_1 - y_2 = 5 \text{ m}$.

Ζητούμενα: (α) d (β) Σh , \dot{V} .

Διαθέσιμες σχέσεις:

$$\Sigma h = \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} \quad (2)$$

$$f = F \left(\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}, \frac{\epsilon}{d} \right) \quad (\text{σχ. 5.4n}) \quad (3)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (4)$$

α) Για την αξιοποίηση της σχέσεως απωλειών (1), πρέπει να υπολογισθεί το ΣK_i και οι απώλειες Σh .

Πίνακας 5.5.2

d' (cm)	v' (m/s)	ϵ/d'	Re'	f'	$\Sigma h'$ (m)	$\Sigma h' - \Sigma h$	d (cm)
10	2,122	0,00150	$2,12 \cdot 10^5$	0,0227	1,96	-6,04	$d \leq 10$
5	8,488	0,00300	$4,24 \cdot 10^5$	0,0265	53,62	45,62	$d > 5$
7	4,331	0,00214	$3,03 \cdot 10^5$	0,0244	10,49	2,49	$d > 7$
8	3,316	0,00188	$2,65 \cdot 10^5$	0,0237	5,56	-2,44	$d \leq 8$
7,5	3,773	0,00200	$2,83 \cdot 10^5$	0,0240	7,55	-0,45	$d \leq 7,5$
7,4	3,875	0,00203	$2,87 \cdot 10^5$	0,0241	8,05	0,05	$d > 7,4$

– Υπολογισμός ΣK_i :

- Είσοδος σε σωλήνα που προεξέχει: $K_1 = 0,8$ (πίν. 6, Παράρτημα).
- Δύο (απλές) γωνίες 90° : $K_2 = 2 \cdot 1,2$ (πίν. 6, Παράρτημα).

Αθροίζοντας: $\Sigma K_i = 3,2$.

– Για τον υπολογισμό του Σh , εφαρμόζουμε την εξίσωση ενέργειας μεταξύ των σημείων 1 και 2 ($v_1 = 0$, $v_2 = v$):

$$(4) \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h$$

$$\Rightarrow \Sigma h = \frac{(200 - 101,3) \text{ kPa}}{9,81 \text{ kN/m}^3} - \frac{v^2}{2 \cdot g} + 5 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h = 15,06 - \frac{v^2}{2 \cdot g}, \quad (\text{SI})^8 \quad (5)$$

Αν και δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή του Σh , η σχέση (5) είναι αρκετή. Με αντικατάσταση στην (1), προκύπτει:

$$15,06 - \frac{v^2}{2 \cdot g} = \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15,06 \text{ m} = \left(f \cdot \frac{L}{d} + \Sigma K_i + 1 \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (1a)$$

Θέτοντας τυχαία (λογική) τιμή d' , προκύπτει το πρόβλημα υπολογισμού της παροχής. Θα το επιλύσουμε με το δεύτερο τρόπο (υπόθεση έντονης τύρβης):

– Έστω $d' = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$

$$(\epsilon/d' = 0,0012, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0205$$

$$(1a) \Rightarrow v' = 5,626 \text{ m/s}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{V}' = 159,1 \text{ m}^3/\text{h} > 40 \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow d \leq 10 \text{ cm}$$

Στο σημείο αυτό θα έπρεπε να ελέγξουμε την υπόθεση της πλήρως αναπτυγμένης τύρβης και ίσως να διορθώσουμε την τιμή της \dot{V}' . Επειδή όμως η τιμή της διαμέτρου (άρα και της παροχής) δεν είναι η τελική, παρακάμπτομε

αυτό το βήμα. Θα το εφαρμόσουμε μόνο όταν οι τιμές της παροχής πλησιάζουν το όριο των $40 \text{ m}^3/\text{h}$.

– Έστω $d' = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

$$(\epsilon/d' = 0,0024, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0246$$

$$(1a) \Rightarrow v' = 4,232 \text{ m/s}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{V}' = 29,9 \text{ m}^3/\text{h} < 40 \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow d > 5 \text{ cm}$$

– Έστω $d' = 7 \text{ cm} = 0,07 \text{ m}$

$$(\epsilon/d' = 0,0017, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0225$$

$$(1a) \Rightarrow v' = 4,915 \text{ m/s}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{V}' = 68,1 \text{ m}^3/\text{h} > 40 \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow d \leq 7 \text{ cm}$$

– Έστω $d' = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$

$$(\epsilon/d' = 0,002, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,0234$$

$$(1a) \Rightarrow v' = 4,60 \text{ m/s}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{V}' = 46,8 \text{ m}^3/\text{h}$$

Έλεγχος YET:

$$Re = vd/v = 2,8 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,024$$

$$\text{Από την (1a)} \Rightarrow v' = 4,56 \text{ m/s}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{V}' = 46,4 \text{ m}^3/\text{h} > 40 \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow d \leq 6 \text{ cm}$$

– Έστω $d' = 5,5 \text{ cm} = 0,055 \text{ m}$

$$(\epsilon/d' = 0,00218, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f' = 0,024$$

$$(1a) \Rightarrow v' = 4,424 \text{ m/s}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{V}' = 37,8 \text{ m}^3/\text{h}$$

Έλεγχος YET: $Re = vd/v = 2,4 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}}$
 $f' = 0,0246$

$$(1a) \Rightarrow v' = 4,38 \text{ m/s}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{V}' = 37,47 \text{ m}^3/\text{h} < 40 \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow d > 5,5 \text{ cm}$$

Επομένως: $5,5 \text{ cm} < d \leq 6 \text{ cm} \Rightarrow d = 6 \text{ cm}$

Και πάλι ενδείκνυται η σύνταξη πίνακα (πίν. 5.5.3).

β) Οι ολικές απώλειες δίνονται από την εξίσωση (5):

$$\Sigma h = 15,06 - \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (\text{SI}) \Rightarrow \Sigma h = 14 \text{ m}$$

Πίνακας 5.5.3

d' (cm)	ϵ/d'	f' (YET)	v' (m/s)	\dot{V}'	$\dot{V}' - \dot{V}$	d
10	0,00120	0,0205	5,626	159,08	119,08	$d \leq 10$
5	0,00240	0,0246	4,232	29,91	-10,09	$d > 5$
7	0,00171	0,0225	4,915	68,09	28,09	$d \leq 7$
6	0,00200	0,0234	4,601	46,83	6,83	$d \leq 6$
5,5	0,00218	0,0240	4,424	37,84	-2,16	$d > 5,5$

⁸ Σημαίνει ότι οι μονάδες των μεγεθών στην εξίσωση είναι βασικές μονάδες του συστήματος SI.

Η παροχή \dot{V} έχει ήδη υπολογισθεί για διάμετρο 6 cm:

$$\dot{V} = 46,8 \text{ m}^3/\text{h}$$

5.6 Ασκήσεις.

1. Ρευστό 20°C ρέει σε σωλήνα διαμέτρου 8 cm με παροχή 5 m³/h. Να υπολογισθεί ο αριθμός Reynolds και το είδος της ροής αν το ρευστό είναι: α) γλυκερίνη, β) λάδι SAE 10, γ) κηροζίνη, δ) νερό, ε) υδράργυρος, στ) αέρας.

[Re: 19, 184, 9210, 22105, 184207, 1524]

2. Δημιουργήστε φύλλο υπολογισμού στο Excel, το οποίο για μήκος αγωγού L, παροχή \dot{V} , σχετική τραχύτητα ϵ/d , διάμετρο d και συγκεκριμένο ρευστό, θα υπολογίζει:

- Το σύνολο των γραμμικών απωλειών ύψους.
- Το σύνολο των τοπικών απωλειών ύψους (επιλέξτε πλήθος και είδος τοπικών αντιστάσεων).
- Την ισχύ της αντλίας που θα χρησιμοποιηθεί για την περίπτωση αντιμετώπισης των απωλειών ύψους και
- θα δίδει την μεταβολή $\Sigma h = f(\dot{V})$, και την μεταβολή $\Sigma h = f(d)$.

3. Λάδι SAE 10 ρέει σε σωλήνα διαμέτρου 2 in. Να υπολογισθεί η μέγιστη ταχύτητα, για την οποία η ροή παραμένει στρωτή αν η θερμοκρασία του λαδιού είναι: α) 20°C, β) 60°C.

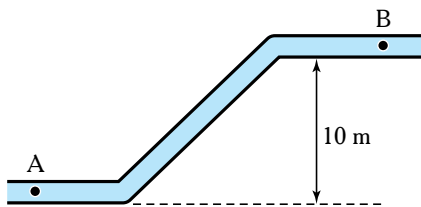
[α) 5 m/s, β) 1 m/s]

4. Σωλήνας μήκους 60 ft και διαμέτρου 1 in μεταφέρει νερό 20°C, με παροχή 30 l/min. Να προσδιορισθεί το είδος της ροής και να υπολογισθεί η περιοχή εισόδου ως ποσοστό του μήκους του σωλήνα.

[Re = 2,5 · 10⁴, 3,3%]

5. Στον σωλήνα του σχήματος 5.6α, διαμέτρου 6 cm ρέει γλυκερίνη 20°C με παροχή 100 l/min. Οι πιέσεις στα σημεία A και B μετρήθηκαν ίσες με 2,1 και 3,7 bar αντίστοιχα. Να εκτιμηθεί η φορά που ρέει το υγρό και να υπολογισθούν ο αριθμός Reynolds, το ύψος απωλειών και το μήκος AB (δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες).

[B→A, Re = 29,9, $h_f = 22,94 \text{ m}$, L = 36,34 m]

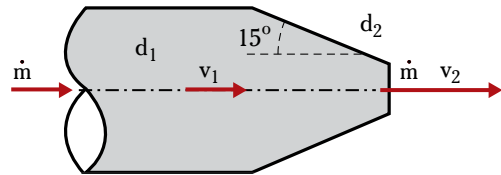


Σχ. 5.6α

6. Σωλήνας διαμέτρου 6 in μεταφέρει νερό με παροχή

150 m³/h. Στην άκρη του σωλήνα έχει προσαρμοσθεί ακροφύσιο (σχ. 5.6β) με τελική διάμετρο 1 in. Να υπολογισθούν η ταχύτητα και η πίεση του νερού στην είσοδο του προφυσίου και η ταχύτητα εξόδου του νερού: α) αν οι απώλειες θεωρηθούν αμελητέες, και β) αν λάβουμε υπόψη το ύψος τοπικών απωλειών του προφυσίου.

[$v_1 = 2,284 \text{ m/s}$, $v_2 = 82,23 \text{ m/s}$, α) $p_1 = 3480 \text{ kPa}$, β) $p_1 = 3547 \text{ kPa}$]



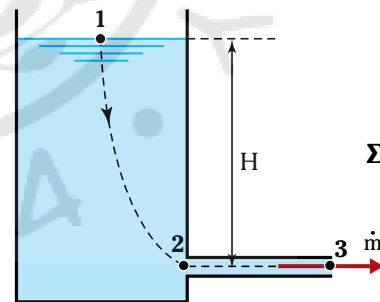
Σχ. 5.6β

7. Λάδι SAE 30, θερμοκρασίας 20°C, ρέει σε οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου 5 in. Μανόμετρο τοποθετημένο μεταξύ δύο σημείων του σωλήνα που απέχουν 1 m, δείχνει πτώση πίεσης ίση με 2,5 kPa. Να υπολογισθούν ο αριθμός Reynolds, η ταχύτητα και η παροχή μάζας.

[Re = 1698, $v = 4,35 \text{ m/s}$, $\dot{m} = 49,1 \text{ kg/s}$]

8. Υγρό σχετικής πυκνότητας 0,9 εκρέει από τη δεξαμενή του σχήματος 5.6γ μέσω του σωλήνα με παροχή 16,5 l/min. Ο σωλήνας έχει μήκος 2 m και διάμετρο 0,5 in. Αν $H = 3,5 \text{ m}$, να υπολογισθούν το ύψος απωλειών, ο αριθμός Reynolds και το κινηματικό ιξώδες του υγρού.

[$\Sigma h = 3,26 \text{ m}$, Re = 742, $\nu = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$]



Σχ. 5.6γ

9. Λάδι SAE 10, 20°C, πυκνότητας 870 kg/m³, ρέει σε ευθύγραμμο σωλήνα διαμέτρου 2 cm, ο οποίος έχει κλίση 30° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Αν η πίεση κατά μήκος του σωλήνα παραμένει σταθερή, να εκτιμηθεί η φορά και να υπολογισθούν το ύψος απωλειών ανά μέτρο σωλήνα, ο αριθμός Reynolds και η παροχή του λαδιού (σε m³/h).

[$h_f/L = 0,5$, Re = 85,2, $\dot{V} = 0,578 \text{ m}^3/\text{h}$]

10. Δύο σωλήνες ίδιου μήκους χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά νερού μεταξύ δύο δεξαμενών. Αν και οι δύο έχουν κατά προσέγγιση την ίδια τιμή συντελεστή

τριβής f , να υπολογισθεί ο λόγος των παροχών αν οι δευτερεύουσες απώλειες θεωρηθούν αμελητέες.

$$[\dot{V}_1/\dot{V}_2 = (d_1/d_2)^{5/2}]$$

11. Σε οριζόντιο κυλινδρικό αγωγό από σφυρήλατο σίδηρο, μήκους 800 m και διαμέτρου 3 in, ρέει νερό 20°C. Αν η παροχή είναι 60 m³/h, να υπολογισθούν το ύψος απωλειών και η πτώση πίεσεως.

$$[\Sigma h = 133,9 \text{ m}, \Delta p = 1313,5 \text{ kPa}]$$

12. Σε σωλήνα από ασφαλισμένο χυτοσίδηρο μήκους 150 m και διαμέτρου 6 in, ρέει λάδι σχετικής πυκνότητας 0,88 και κινηματικού ιξώδους 4 · 10⁻⁵ m²/s. Ο σωλήνας έχει ανοδική κλίση 8° σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο. Αν η παροχή είναι 150 m³/h, να υπολογισθούν το ύψος απωλειών και η πτώση πίεσεως.

$$[\Sigma h = 8,64 \text{ m}, \Delta p = 254,8 \text{ kPa}]$$

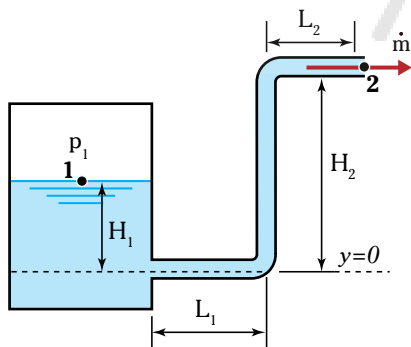
13. Σε οριζόντιο κυλινδρικό αγωγό από χυτοσίδηρο, μήκους 500 m και διαμέτρου 18 cm, ρέει κηροζίνη 20°C, πυκνότητας 800 kg/m³ με παροχή 400 m³/h. Να υπολογισθούν το ύψος απωλειών και η ισχύς που αποδίδουν οι χρησιμοποιούμενες αντλίες στο σύστημα ροής.

$$[\Sigma h = 59,85 \text{ m}, P = 52,2 \text{ kW}]$$

14. Στο σύστημα του σχήματος 5.6δ, η ροή εξασφαλίζεται από την υψηλή πίεση της δεξαμενής. Είναι: H₁ = 5 m, H₂ = 45 m, L₁ = 60 m, L₂ = 30 m, d = 2 in. Ο σωλήνας είναι από σφυρήλατο σίδηρο. Αν το υγρό είναι νερό 20°C, να υπολογισθεί η πίεση p₁, ώστε η παροχή να ισούται με 40 m³/h. Πόσο θα είναι το ύψος απωλειών;

$$[p_1 = 1337 \text{ kPa}, \Sigma h = 84,45 \text{ m}]$$

Δημιουργήστε φύλλο υπολογισμού στο Excel που θα δίδει την μεταβολή $p_1 = f(\dot{V})$.



Σχ. 5.6δ

15. Αργό πετρέλαιο με κινηματικό ιξώδες 7 · 10⁻⁴ m²/s και σχετική πυκνότητα 0,86, μεταφέρεται με κυλινδρικό αγωγό από χυτοσίδηρο διαμέτρου 15 in, σε απόσταση 5 km με παροχή είναι 0,1 m³/s. Να υπολογισθούν οι

ενεργειακές απώλειες σε kW: α) αν ΣK = 25, β) αν ΣK = 0.

$$[\alpha) 40,5 \text{ kW}, \beta) 39,7 \text{ kW}]$$

16. Σωλήνας από ασφαλισμένο χυτοσίδηρο έχει διάμετρο 8 cm και μήκος 60 m. Η παροχή νερού είναι 60 m³/h. Αν ο ολικός συντελεστής τοπικών απωλειών είναι 5, να υπολογισθούν οι απώλειες στο σωλήνα.

$$[\Sigma h = 12,26 \text{ m}]$$

17. Αγωγός μεταφοράς πετρελαίου, διαμέτρου 4 ft, κατασκευασμένος από γαλβανισμένο σίδηρο, μεταφέρει 2,7 · 10⁵ m³ την ημέρα πετρέλαιο, πυκνότητας 910 kg/m³ και κινηματικού ιξώδους 10⁻⁵ m²/s. Κατά μήκος του αγωγού υπάρχουν αντλίες. Κάθε αντλία αυξάνει την πίεση του υγρού από τα 200 kPa (αναγκαία για την είσοδο στην αντλία) στα 2 MPa. Θεωρώντας τον αγωγό οριζόντιο, να υπολογισθεί η απόσταση που καλύπτει κάθε αντλία και το ύψος απωλειών μεταξύ δύο αντλιών.

$$[\Sigma h = 201,6 \text{ m}, L = 44,1 \text{ km}]$$

18. Αν στο σύστημα της ασκήσεως 14, η πίεση στη δεξαμενή είναι p₁ = 700 kPa, να υπολογισθούν η παροχή και το ύψος απωλειών. (Τα λοιπά δεδομένα δεν αλλάζουν).

$$[\dot{V} = 19,4 \text{ m}^3/\text{s}, \Sigma h = 20,67 \text{ m}]$$

19. Ευθύγραμμος σωλήνας από εμπορικό κάλυβα μήκους 500 m και διαμέτρου 8 cm, είναι τοποθετημένος σε επικλινές έδαφος με σταθερή κλίση 6° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο σωλήνας είναι συνδεδεμένος με δεξαμενή νερού, η οποία βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο, με την επιφάνειά της 5 m πάνω από την είσοδο του σωλήνα. Να υπολογισθεί η παροχή του νερού.

$$[\dot{V} = 56,1 \text{ m}^3/\text{h}]$$

20. Δεξαμενή νερού, η ελεύθερη επιφάνεια της οποίας βρίσκεται 10 m πάνω από το έδαφος, τροφοδοτεί σωλήνα από γαλβανισμένο σίδηρο, διαμέτρου 2 in και μήκους 12 m. Ο σωλήνας έχει δύο απλές γωνίες 90°, μία σφαιρική βαλβίδα πλήρως ανοικτή και η είσοδός του προεξέχει στη δεξαμενή. Η έξοδός του βρίσκεται 1 m πάνω από το έδαφος. Να υπολογισθεί η παροχή (σε m³/h).

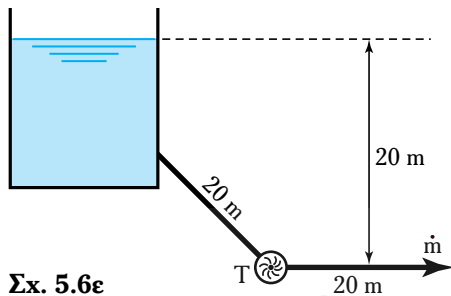
$$[\dot{V} = 23,9 \text{ m}^3/\text{h}]$$

21. Νερό 20°C αντλείται από μία δεξαμενή σε άλλη που βρίσκεται 40 m υψηλότερα. Ο σωλήνας είναι από χυτοσίδηρο διαμέτρου 6 in και μήκους 700 m. Αν ο ολικός συντελεστής τοπικών απωλειών είναι 15 και το προσδιδόμενο ύψος της αντλίας στο νερό είναι 80 m, να υπολογισθούν το ύψος απωλειών, η παροχή και η ισχύς που η αντλία προσδίδει στο νερό.

$$[\Sigma h = 40 \text{ m}, \dot{V} = 167,6 \text{ m}^3/\text{h}, P = 36,5 \text{ kW}]$$

22. Οι σωλήνες του σχήματος 5.6ε είναι από ασφατωμένο χυτοσίδηρο διαμέτρου 6 cm. Ο υδροστρόβιλος (T) που παρεμβάλλεται, απορροφά από το σύστημα ροής ισχύ 2 kW. Να υπολογισθεί η παροχή νερού αν ο συνολικός συντελεστής τοπικών απωλειών ισούται με 10.

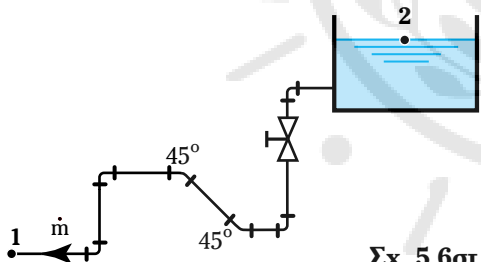
$$[\dot{V} = 316 \text{ m}^3/\text{s}]$$



Σχ. 5.6ε

23. Το σύστημα ροής του σχήματος 5.6στ αποτελείται από χυτοσίδηρο σωλήνα μήκους 1200 m και διαμέτρου 5 cm, που συνδέεται με δεξαμενή. Υπάρχουν 2 γωνίες 45° , 4 καμπύλες γωνίες 90° και μία πλήρως ανοικτή σφαιρική βαλβίδα με φλάντζα. Αν η ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής βρίσκεται 100 m ψηλότερα από το άκρο του σωλήνα (σημείο 1), να υπολογισθούν η παροχή νερού (σε m^3/h) και το ύψος γραμμικών απωλειών.

$$[\dot{V} = 11,23 \text{ m}^3/\text{h}, h_f = 98,35 \text{ m}]$$



Σχ. 5.6στ

24. Λάδι πυκνότητας 950 kg/m^3 και κινηματικού ιξώδους $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, ρέει σε σωλήνα από γαλβανισμένο σίδηρο, διαμέτρου 30 cm και μήκους 100 m. Αν το ύψος απωλειών είναι 8 m, να υπολογισθούν η ταχύτητα ροής και η παροχή.

$$[v = 2,54 \text{ m/s}, \dot{V} = 287,5 \text{ m}^3/\text{s}]$$

25. Σωλήνας διαμέτρου 15 cm, μήκους 120 m και τραχύτητας 0,001 cm, καταλήγει σε ακροφύσιο 45° τελικής διαμέτρου 5 cm. Αν ο σωλήνας τροφοδοτείται με νερό από δεξαμενή, που βρίσκεται 30 m ψηλότερα απ' το ακροφύσιο, να υπολογισθούν η παροχή και η ταχύτητα του νερού στην έξοδο του ακροφυσίου.

$$[\dot{V} = 320 \text{ m}^3/\text{h}, v_{\text{εξ}} = 45,3 \text{ m/s}]$$

26. Δεξαμενή νερού 12 m^3 τροφοδοτείται από οριζόντιο σωλήνα από εμπορικό χάλυβα, μήκους 20 m και διαμέτρου 1 in. Να υπολογισθεί ο χρόνος που απαιτείται να γεμίσει η δεξαμενή αν η πίεση του δικτύου είναι 30 m στήλης νερού και οι δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες.

$$[1 \text{ h } 30 \text{ min } 10 \text{ s}]$$

27. Σωλήνας από ασφατωμένο χυτοσίδηρο, μήκους 100 m θα τοποθετηθεί σε οριζόντιο επίπεδο για μεταφορά νερού 20°C . Αν η πτώση πίεσης δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 40 kPa και η επιδιωκόμενη παροχή είναι $60 \text{ m}^3/\text{h}$, να υπολογισθεί η διάμετρος που θα επιλέξουμε (σε mm).

$$[d \geq 44 \text{ mm}]$$

28. Σωλήνας από εμπορικό χάλυβα, μήκους 120 m, πρόκειται να μεταφέρει βενζίνη 20°C , από μία δεξαμενή σε άλλη, η ελεύθερη επιφάνεια της οποίας βρίσκεται 8 m χαμηλότερα. Τι διάμετρο σωλήνα θα επιλέξουμε αν επιδιώκουμε παροχή ίση τουλάχιστον με $30 \text{ m}^3/\text{h}$; ($\Sigma K = 10$). Το πρόβλημα να γενικευθεί και να κατασκευασθεί λογιστικό φύλλο Excel.

$$[d \geq 73 \text{ mm}]$$

6.1 Θεώρημα ωθήσεως-ορμής (thrust-momentum theorem).

Εκτός από τα ισοζύγια μάζας και ενέργειας, ιδιαίτερα σημαντικό για τη μελέτη της ροής των ρευστών είναι και το **ισοζύγιο της ορμής**. Αυτό βασίζεται στο **Δεύτερο Νόμο του Newton**, σύμφωνα με τον οποίο, αποτέλεσμα της αλληλεπιδράσεως και της ασκήσεως εξωτερικής δυνάμεως σε ένα σύστημα, είναι η μεταβολή της κινητικής του καταστάσεως, δηλαδή της ορμής.

Σύμφωνα με τον Δεύτερο Νόμο του Newton, σε ένα σώμα (ή σύστημα) η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων, εφόσον είναι διάφορη του μηδενός, έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της κινητικής καταστάσεως του σώματος:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d(\mathbf{m} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{J}}{dt} \quad (6.1)$$

Το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα είναι η ορμή:

$$\vec{J} = \mathbf{m} \cdot \vec{v} \quad (6.2)$$

Το πρώτο πόρισμα που προκύπτει από τη σχέση (6.1), είναι η **Αρχή διατηρήσεως της ορμής: Σε ένα σύστημα, στο οποίο η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με μηδέν, η ορμή παραμένει σταθερή.**

$$dt \cdot (\Sigma \dot{F}) = d\dot{J}, \text{ αν } \Sigma F = 0,$$

$$\text{τότε: } d\dot{J} = 0 \Rightarrow \int_1^2 dJ = c \text{ ή } J_1 = J_2$$

Από τη σχέση (6.1) άμεσα προκύπτει η ακόλουθη:

$$\vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \int_1^2 \Sigma \vec{F} \cdot dt \quad (6.3)$$

$$\text{Η ποσότητα: } \vec{\Omega} = \int_1^2 \Sigma \vec{F} \cdot dt \quad (6.4)$$

καλείται **ώθηση** (thrust) και η προηγούμενη σχέση εκφράζει το **Θεώρημα ωθήσεως-ορμής (ώσεως-ορμής): Η μεταβολή της ορμής ενός συστήματος**

ισούται με την ώθηση, η οποία ασκείται στο σύστημα:

$$\vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \vec{\Omega} \quad (6.5)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι διανυσματικές. Η αξιολογίση τους στους υπολογισμούς, γίνεται συνήθως με ανάλυση σε άξονες συντεταγμένων (είτε γεωμετρικά). Έτσι, στη γενική περίπτωση τρισδιάστατου φαινομένου, αναλύοντας τα διανύσματα που συμμετέχουν στη σχέση (6.3) σε άξονες x, y και z, προκύπτει το σύστημα των ισοδυνάμων σχέσεων:

$$J_{2x} - J_{1x} = \int_1^2 \Sigma F_x \cdot dt \quad (6.3\alpha)$$

$$J_{2y} - J_{1y} = \int_1^2 \Sigma F_y \cdot dt \quad (6.3\beta)$$

$$J_{2z} - J_{1z} = \int_1^2 \Sigma F_z \cdot dt \quad (6.3\gamma)$$

Αν το φαινόμενο είναι δισδιάστατο, αρκούν οι δύο πρώτες σχέσεις, ενώ αν τα διανύσματα δεν μεταβάλλονται κατά διεύθυνση, αρκεί μόνο η πρώτη.

Αν η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά), η εξίσωση (6.3) παίρνει την απλούστερη (διανυσματική) μορφή:

$$\vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \quad (6.3\delta)$$

6.2 Η εξίσωση της ορμής (linear momentum).

Σύμφωνα με την εξίσωση (6.1), ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ή συστήματος, ισούται με τη συνισταμένη επ' αυτού δύναμη. Η σχέση αυτή, εφαρμοζόμενη στη ροή των ρευστών, οδηγεί στην εξίσωση της ορμής. Στη γενική της μορφή παρουσιάζει εξαιρετική πολυπλοκότητα. Στην παρακάτω ανάπτυξη, θα θεωρήσουμε τη ροή μονοδιάστατη (σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην παράγρ. 3.1) και θα επικεντρώσουμε στη μόνιμη ροή ασυμπίεστων ρευστών.

Έστω πεδίο μόνιμης ροής ασυμπίεστου ρευστού και εντός αυτού ο στοιχειώδης ροϊκός σωλήνας 1-2

του σχήματος 6.2α. Σύμφωνα με τη συνθήκη μη εισωρήσεως (παράγρ. 3.1.1) δεν υπάρχει πλευρική ανταλλαγή μάζας μεταξύ του ροϊκού σωλήνα και του περιβάλλοντος. Υπάρχει λοιπόν μία είσοδος εμβαδού dA_1 , στην οποία η ταχύτητα είναι v_1 (κάθετη στην επιφάνεια dA_1) και μία έξοδος, εμβαδού dA_2 και ταχύτητας v_2 (κάθετη στην dA_2). Στο χρονικό διάστημα dt εισέρχεται από τη διατομή dA_1 του ροϊκού σωλήνα, ρευστό μάζας dm_1 και εξέρχεται από τη διατομή dA_2 , ρευστό μάζας dm_2 . Κατά συνέπεια, η εισερχόμενη στοιχειώδης μάζα κατά το χρόνο dt , έχει ορμή διαφορετική απ' την εξερχόμενη:

$$d\vec{J}_1 = (dm_1 \cdot \vec{v}_1) \text{ και } d\vec{J}_2 = (dm_2 \cdot \vec{v}_2)$$

Άρα η ορμή της φλέβας ροής 1-2 μεταβλήθηκε:

$$d\vec{J} = (dm_2 \cdot \vec{v}_2) - (dm_1 \cdot \vec{v}_1)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα ωθήσεως-ορμής:

$$d\vec{J}_2 - d\vec{J}_1 = d\vec{F} \cdot dt$$

και εξισώνοντας προκύπτει:

$$\begin{aligned} d\vec{F} \cdot dt &= dm_2 \cdot \vec{v}_2 - dm_1 \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow d\vec{F} &= \frac{dm_2 \cdot \vec{v}_2 - dm_1 \cdot \vec{v}_1}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{ή } \quad d\vec{F} = d\dot{m}_2 \cdot \vec{v}_2 - d\dot{m}_1 \cdot \vec{v}_1 \quad (6.6)$$

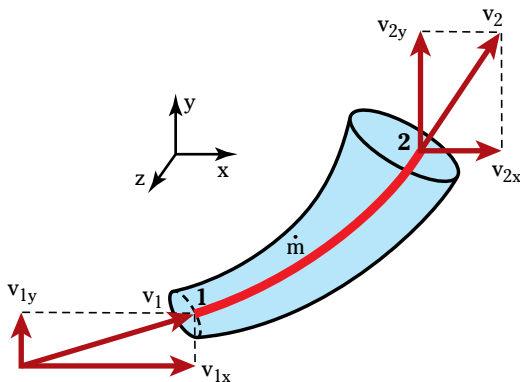
$$\text{Είναι: } \rho = \frac{m}{v} \Rightarrow m = \rho \cdot v \Rightarrow \dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$$

$$d\dot{m} = \rho \cdot d\dot{V}$$

$$\text{και } d\dot{V} = v \cdot dA$$

οπότε η εξίσωση (6.6) γίνεται:

$$d\vec{F} = (\rho \cdot v_2) \cdot \vec{v}_2 \cdot dA_2 - (\rho \cdot v_1) \cdot \vec{v}_1 \cdot dA_1 \quad (6.7)$$



Σχ. 6.2α

Μεταβολή της ορμής σε ροϊκό σωλήνα.

Και ολοκληρώνοντας για τον ευρύτερο ροϊκό σωλήνα του σχήματος 6.2α:

$$\Sigma \vec{F} = \int_{A_2} (\rho \cdot v_2) \cdot \vec{v}_2 \cdot dA_2 - \int_{A_1} (\rho \cdot v_1) \cdot \vec{v}_1 \cdot dA_1 \quad (6.8)$$

Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα \vec{v}_1 είναι κοινή για όλη τη διατομή A_1 και αντίστοιχα η \vec{v}_2 για τη διατομή A_2 , από την εξίσωση (6.8) προκύπτει:

$$\Sigma \vec{F} = (\rho \cdot v_2) \cdot \vec{v}_2 \cdot A_2 - (\rho \cdot v_1) \cdot \vec{v}_1 \cdot A_1 \quad (6.8a)$$

Επειδή η ροή είναι μόνιμη, ισχύει:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} \Rightarrow v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = \dot{V}$$

$$\text{Αντικαθιστώντας: } \Sigma \vec{F} = \rho \cdot \dot{V} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (6.9)$$

Η εξίσωση (6.9) είναι γνωστή ως **εξίσωση της ορμής για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού**.

Η εξίσωση της ορμής είναι διανυσματική. Μπορούμε να αναλύσουμε τα διανυσματικά μεγέθη που συναντάμε σ' αυτήν (δύναμη και ταχύτητα) σε συνιστώσες κατά τους (κάθετους) άξονες x, y και z και να πάρουμε μη διανυσματικές εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο και που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στους υπολογισμούς:

$$\Sigma F_x = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2x} - v_{1x}) \quad (6.9a)$$

$$\Sigma F_y = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2y} - v_{1y}) \quad (6.9b)$$

$$\Sigma F_z = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2z} - v_{1z}) \quad (6.9\gamma)$$

Σε πολλά προβλήματα (όπως π.χ. μία σωλήνωση αναπτυγμένη σε ένα επίπεδο), η ανάλυση σε δύο άξονες (x, y) είναι αρκετή, επομένως αξιοποιούνται οι δύο από τις παραπάνω σχέσεις. Όταν μάλιστα έχουμε μία διεύθυνση ροής (π.χ. ευθύγραμμος αγωγός), η εξίσωση κατά τον άξονα x είναι αρκετή για την αντιμετώπιση του προβλήματος.

Από την παραπάνω ανάλυση, προκύπτει και ο ρυθμός, με τον οποίο διέρχεται η ορμή ενός ρεύματος από μία διατομή κάθετη στη ροή. Αυτός, για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού είναι:

$$\frac{J}{dt} = \rho \cdot \dot{V} \cdot v \quad (6.10)$$

Η σχέση αυτή είναι χρήσιμη στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε **σύστημα με περισσότερες από μία εισόδους ή εξόδους** (π.χ. διακλάδωση ροής). Σ' αυτήν την περίπτωση η εξίσωση της ορμής δεν καλύπτεται από την εξίσωση (6.9). Πιο συγκεκριμένα, το Θεώρημα ωθήσεως-ορμής δίνει:

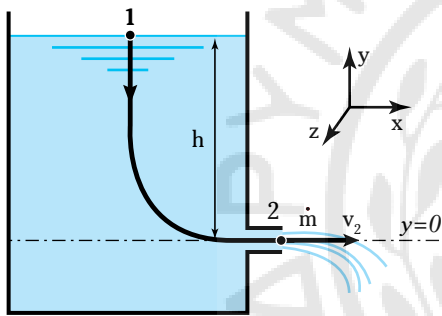
$$\Sigma \dot{\mathbf{F}} = \frac{\Sigma \dot{\mathbf{J}}_{\varepsilon\xi} - \Sigma \dot{\mathbf{J}}_{\varepsilon\sigma}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma \dot{\mathbf{F}} = \rho \cdot \sum_{\varepsilon\xi} \dot{\mathbf{V}}_i \dot{\mathbf{v}}_i - \rho \cdot \sum_{\varepsilon\sigma} \dot{\mathbf{V}}_j \dot{\mathbf{v}}_j \quad (6.11)$$

Η εξίσωση (6.11) αποτελεί τη γενικευμένη εξίσωση της ορμής για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Όπως και η ειδικότερη εξίσωση (6.9), η ανάπτυξή της σε άξονες συντεταγμένων είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την υπολογιστική διαδικασία.

Παράδειγμα 1

Δεξαμενή νερού, εκρέει στην ατμόσφαιρα μέσω μικρού σωλήνα διαμέτρου 3 cm, προσαρμοσμένου στο τσίχμα της και σε υψομετρική διαφορά 2 m από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού (σχ. 6.2β). Να υπολογισθούν η ταχύτητα εξόδου, η εξερχόμενη ορμή ανά μονάδα χρόνου και η δύναμη που ασκείται στο υγρό.



Σχ. 6.2β

Λύση.

Δεδομένα: $h = 2 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $g = 9,81 \text{ kN/m}^3$, $d = 0,03 \text{ m}$.

Ζητούμενα: v_2 , J_2/t , $\Sigma \mathbf{F}$.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα εξόδου, εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 (ελεύθερη επιφάνεια δεξαμενής) και του σημείου 2 (εκροή σωλήνα). Επειδή ο σωλήνας έχει μικρό μήκος, θεωρούμε τις γραμμικές απώλειες αμελητέες:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + y_2 + \Sigma h \quad (1)$$

$$\text{ή } \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + (y_1 - y_2) = \Sigma h \quad (2)$$

$$p_1 = p_2 = p_{\text{ατμ}} \Rightarrow p_1 - p_2 = 0 \quad (3)$$

$$y_1 - y_2 = h \quad (4)$$

$$(2), (3), (4) \Rightarrow -\frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h = \Sigma h \cong K \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \quad (5)$$

θεωρούμε μόνο απώλειες στο στόμιο στην έξοδο της δεξαμενής.

Από την παράγραφο 5.4.2 [εξίσωση (5.30)] παίρνουμε:

$$\Sigma h \cong K \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow -\frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h = K \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \quad (7)$$

$$\text{ή } h = v_2^2 \cdot \frac{(K+1)}{2 \cdot g} \quad (8)$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{K+1}} \quad (9)$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 2}{0,5+1}} \text{ m/s} = 5,11 \text{ m/s} \quad (10)$$

χωρίς απώλειες K,

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2} \text{ m/s} = 6,26 \text{ m/s} \quad (11)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής, η ταχύτητα είναι περίπου μηδενική, άρα και η ορμή. Επομένως, η μεταβολή της ορμής ισούται με την εξερχόμενη με το ρευστό ορμή. Η διεύθυνση της ταχύτητας v_2 , άρα και της ορμής J_2 , είναι οριζόντια, και για τούτο αναφερόμαστε στον άξονα x:

$$J_{2x} - J_{1x} = J_{2x} = J_2 \quad (12)$$

Σύμφωνα με τον Δεύτερο Νόμο του Newton [εξίσωση (6.1)]:

$$dJ/dt = \Sigma \mathbf{F} \Rightarrow J_2/t = \Sigma \mathbf{F} \quad (13)$$

από την (6.9α) έχουμε:

$$\Sigma \mathbf{F}_x = \rho \cdot \dot{\mathbf{V}} (v_{2x} - v_{1x}), v_{1x} = 0, v_{2x} = v_2 \quad (14)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας υπολογίζουμε την παροχή:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} v_2 = \frac{\pi \cdot (0,03)^2}{4} 5,11 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{ή } \dot{\mathbf{V}} = 0,0036 \text{ m}^3/\text{s} \quad (15)$$

$$\Sigma \mathbf{F}_x = \rho \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot (v_{2x} - v_{1x}) =$$

$$= (1000 \cdot 0,0036 \cdot 5,11) \text{ N} = 18,4 \text{ N}$$

από την εξίσωση (13) επειδή $\frac{J_2}{t} = \Sigma \mathbf{F} \Rightarrow \frac{J_2}{t} = 18,4 \text{ N}$

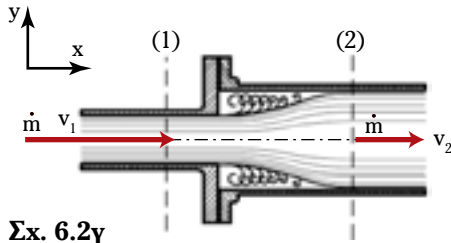
Άρα: $J_2/t = \Sigma \mathbf{F} = 18,4 \text{ N}$.

Σημειώνουμε ότι ίση και αντίθετη οριζόντια δύναμη θα ασκεί το εξερχόμενο υγρό στη δεξαμενή (Αρχή Δράσης-Αντιδράσεως).

Παράδειγμα 2

Νερό ρέει σε σωλήνα διαμέτρου 2 in, με σταθερή παροχή 420 l/min. Σε κάποιο σημείο, υπάρχει η απότομη

διαστολή του σωλήνα του σχήματος 6.2γ και το ρευστό συνεχίζει τη ροή σε σωλήνα διπλάσιας διαμέτρου. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στη διαστολή.



Σχ. 6.2γ

Λύση.

Δεδομένα: $d_1 = 2 \text{ in} = 0,0508 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $d_2 = 2 \cdot d_1 = 0,1016 \text{ m}$,
 $\dot{V} = 420 \text{ L/min} = 0,07 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ζητούμενο: ΣF

Η ροή γίνεται κατά τη διεύθυνση του (οριζώντιου) άξονα x. Δεν υπάρχει μεταβολή ταχύτητας, άρα και ορμής κατά άλλη διεύθυνση. Επομένως:

$$\Sigma F = \Sigma F_x, v_1 = v_{1x}, v_2 = v_{2x} \quad (1)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση της ορμής:

$$\Sigma F_x = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2x} - v_{1x}) \Rightarrow \Sigma F = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_2 - v_1) \quad (2)$$

Οι ταχύτητες υπολογίζονται από την εξίσωση της συνέχειας:

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 3,454 \text{ m/s}, v_2 = 0,863 \text{ m/s}. \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) λαμβάνουμε:

$$\Sigma F = -18,13 \text{ N}. \quad (4)$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της δύναμης είναι αντίθετη προς τη φορά των ταχυτήτων (τις οποίες θεωρήσαμε θετικές, προσμαίνοντας έτσι τον άξονα x).

Παράδειγμα 3

Σε σωλήνα διαμέτρου 3 in, ρέει κηροζίνη σχετικής πυκνότητας 0,8 με παροχή 60 m³/h. Αν η διεύθυνση ροής μεταβάλλεται κατά 90°, να υπολογισθεί η δύναμη που ασκεί ο αγωγός στο υγρό.

Λύση.

Δεδομένα: $d = 3 \text{ in} = 0,0762 \text{ m}$,
 $\dot{V} = 60 \text{ m}^3/\text{h} = 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}$,
 $\rho_{\text{ox}} = 0,8$, γωνία 90°.

Ζητούμενο: ΣF

Έχομε αλλαγή διεύθυνσης της ροής, επομένως η επίλυση πρέπει να γίνει είτε διανυσματικά, είτε αναλύοντας τα διανυσματικά μεγέθη σε κάθετους άξονες x και y. Προτείνομε τη δεύτερη μέθοδο.

Σχεδιάζουμε το σχετικό σκαρίφημα. (Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μας ενδιαφέρουν οι τοπικές απώλειες, επομένως και η καμπυλότητα της γωνίας. Αρκεί ο όγκος ελέγχου 1–2 να περιλαμβάνει την αλλαγή κατεύθυνσης).

Οι εξισώσεις της ορμής για τους δύο άξονες είναι:

$$\Sigma F_x = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2x} - v_{1x}) \quad (1)$$

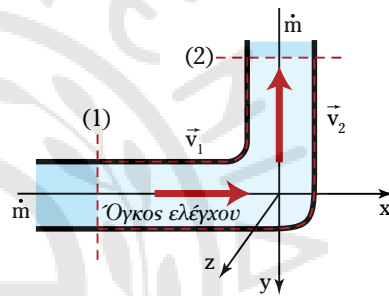
$$\Sigma F_y = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2y} - v_{1y}) \quad (2)$$

$$\rho_{\text{ox}} = \frac{\rho_{\text{κηρ}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \Rightarrow \rho_{\text{κηρ}} = \rho_{\text{ox}} \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \quad (3)$$

Οι ταχύτητες στις διατομές 1 και 2 έχουν ίδιο μέτρο v, αλλά διαφορετική διεύθυνση. Οι προβολές τους στους άξονες του σχήματος 6.2δ είναι:

$$v_{1x} = v \quad v_{1y} = 0$$

$$v_{2x} = 0 \quad v_{2y} = v$$



Σχ. 6.2δ

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται απ' την εξίσωση συνέχειας:

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,0167}{\pi \cdot (0,0762)^2} \text{ m/s} = 3,66 \text{ m/s}.$$

Από την (1) \Rightarrow

$$\Rightarrow \Sigma F_x = (0,8 \cdot 1000) \cdot (60/3600) \cdot (0 - 3,655) \text{ N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = -48,73 \text{ N}$$

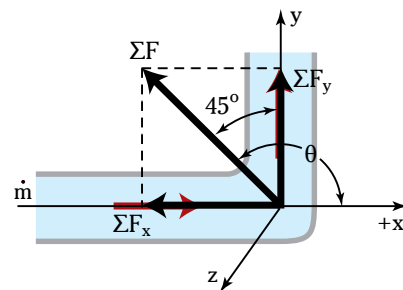
Από την (2) \Rightarrow

$$\Rightarrow \Sigma F_y = (0,8 \cdot 1000) \cdot (60/3600) \cdot (3,655 - 0) \text{ N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_y = +48,73 \text{ N}$$

Τοποθετούμε τις δυνάμεις στους άξονες και συνθέτουμε (σχ. 6.2ε):

$$\Sigma F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-48,73)^2 + (48,73)^2} \text{ N} = 68,9 \text{ N}$$



Σχ. 6.2ε

$$\tan \theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{+48,73}{-48,73} = -1 \text{ ή } \theta = 135^\circ$$

6.3 Διορθωτικοί συντελεστές ορμής.

Η εξίσωση της ορμής για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού [διανυσματική εξίσωση (6.9) είτε οι εξισώσεις (6.9α), (6.9β), (6.9γ)], παρουσιάζει το μεγαλύτερο πρακτικό ενδιαφέρον όταν ο ροϊκός σωλήνας είναι πραγματικός αγωγός. Σ' αυτήν την περίπτωση όμως, παρουσιάζεται ένα πρόβλημα, το οποίο σχετίζεται με τις ταχύτητες των ρευστών.

Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν με την υπόθεση ότι οι ταχύτητες είναι σταθερές σε όλα τα σημεία της αντίστοιχης διατομής. Αλλά, όπως είδαμε (παράγρ. 3.1.5), στο οριακό στρώμα η ταχύτητα μεταβάλλεται: Σε μία διατομή κάθετη στη διεύθυνση ροής, αυξάνεται, καθώς απομακρυνόμαστε από το τοίχωμα. Στους σωλήνες που το ρευστό ρέει υπό πίεση, το οριακό στρώμα καλύπτει όλη τη διατομή. Άρα σε μία κάθετη διατομή, η ταχύτητα μεταβάλλεται. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, στις εξισώσεις που περιγράφουν τα φαινόμενα της ροής, χρησιμοποιούμε τη **μέση ταχύτητα** στις αντίστοιχες διατομές των αγωγών. Αυτό όμως δεν είναι ακριβές στην περίπτωση της εξισώσεως της ορμής. Υπενθυμίζουμε ότι παρόμοιο πρόβλημα ακρίβειας συναντήσαμε και στην εξίσωση ενέργειας (παράγρ. 3.4.5). Το αντιμετωπίσαμε εισάγοντας τους διορθωτικούς συντελεστές κινητικής ενέργειας α .

Αποδεικνύεται πως η ορμή που μεταφέρεται κατά τη διεύθυνση της ροής, είναι μεγαλύτερη απ' αυτήν που υπολογίζεται με τη χρήση της μέσης ταχύτητας. Γι' αυτό, όταν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια υπολογισμών, χρησιμοποιούμε **συντελεστές διορθώσεως της ορμής β** (αντίστοιχους με τους συντελεστές διορθώσεως της κινητικής ενέργειας α).

Για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα, συμβολίζουμε με u την τοπική ταχύτητα και με v τη μέση. Σύμφωνα με την εξίσωση (6.8), ο ρυθμός με τον οποίο διέρχεται η ορμή μέσα από μια διατομή A κάθετη στη ροή, ισούται με:

$$\bar{J}/t = \rho \cdot \int_A \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.12)$$

(Το ρευστό είναι ασυμπίεστο, άρα η πυκνότητα ρ είναι σταθερή).

Αν συμβολίσουμε με $\bar{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στην (επίπεδη) διατομή A , έχουμε:

$$\bar{\mathbf{u}} = u \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

και η εξίσωση (6.12) γίνεται:

$$\bar{J}/t = \rho \cdot \bar{\mathbf{n}} \cdot \int_A \mathbf{u}^2 \cdot d\mathbf{A} \quad (6.12\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας το μέτρο της μέσης ταχύτητας v , λαμβάνουμε:

$$\bar{J}/t = \rho \cdot v^2 \cdot \bar{\mathbf{n}} \cdot A = \rho \cdot v \cdot \bar{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (6.12\beta)$$

$$\text{Εξισώνοντας: } \int_A \mathbf{u}^2 \cdot d\mathbf{A} = v \cdot V$$

Επειδή όμως ο μέσος όρος των τετραγώνων είναι διαφορετικός απ' το τετράγωνο του μέσου όρου, η παραπάνω εξίσωση δεν είναι ακριβής. Για να αποκατασταθεί η ακρίβεια, πρέπει η μέση ταχύτητα v να πολλαπλασιασθεί επί έναν συντελεστή β :

$$\int_A \mathbf{u}^2 \cdot d\mathbf{A} = \beta \cdot v \cdot V = \beta \cdot v^2 \cdot A$$

Έτσι προκύπτει ο διορθωτικός συντελεστής της ορμής β :

$$\beta = \frac{1}{v^2 \cdot A} \cdot \int_A \mathbf{u}^2 \cdot d\mathbf{A} \quad (6.13)$$

Η ακριβής επομένως έκφραση της εξισώσεως της ορμής (6.9) για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού, είναι:

$$\Sigma \dot{\mathbf{F}} = \rho \cdot \bar{V} \cdot (\beta_2 \cdot \dot{v}_2 - \beta_1 \cdot \dot{v}_1) \quad (6.14)$$

Αντίστοιχες διορθώσεις γίνονται και στις εξισώσεις (6.10) και (6.11).

Για τον υπολογισμό του διορθωτικού συντελεστή, απαιτείται η γνώση της κατανομής ταχυτήτων στην επιφάνεια A της κάθετης διατομής. Αυτή είναι γνωστή στην περίπτωση της στρωτής ροής (παράγρ. 5.2.3):

$$u = u_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (5.3)$$

Στην τυρβώδη ροή, δίνεται προσεγγιστικά απ' την εμπειρική εξίσωση:

$$u \approx u_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \quad \text{με } \frac{1}{9} \leq n \leq \frac{1}{5} \quad (5.3\alpha)$$

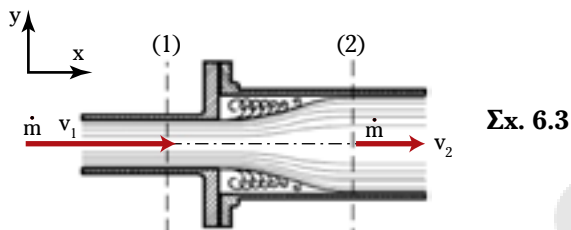
Για **στρωτή ροή** σε κυλινδρικό σωλήνα προκύπτει: $\beta = 4/3 = 1,33$.

Στην **τυρβώδη ροή** ο συντελεστής διορθώσεως είναι σημαντικά μικρότερος, προσεγγίζοντας τη μονάδα: $\beta = 1,04$ (για $n = 1/5$) και $\beta = 1,01$ (για $n = 1/9$).

Στη συνέχεια, στα προβλήματα τυρβώδους ροής, θα θεωρήσουμε $\beta = 1$ (εκτός αν δίνεται άλλη τιμή).

Παράδειγμα 4

Γλυκερίνη σχετικής πυκνότητας 1,26 και κινηματικού ιξώδους $1,18 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ρέει σε σωλήνα διαμέτρου 2 in, με σταθερή παροχή $420 \text{ l}/\text{min}$. Σε κάποιο σημείο υπάρχει η απότομη διαστολή του σωλήνα του σχήματος 6.3 και το ρευστό συνεχίζει τη ροή σε σωλήνα διπλάσιας διαμέτρου. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στη διαστολή.



Σχ. 6.3

Λύση.

Δεδομένα: $d_1 = 2 \text{ in} = 0,0508 \text{ m}$,
 $d_2 = 2 \cdot d_1 = 0,1016 \text{ m}$,
 $\dot{V} = 420 \text{ L}/\text{min} = \dot{V} = 0,007 \text{ m}^3/\text{s}$,
 $\rho_{\text{ox}} = 1,26 \Rightarrow \rho = 1260 \text{ kg}/\text{m}^3$,
 $\nu = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$.

Ζητούμενο: ΣF

Όπως και στο παράδειγμα 2, απ' την εξίσωση της συνέχειας υπολογίζουμε τις μέσες ταχύτητες:

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,007}{\pi \cdot (0,0508)^2} \text{ m/s} = 3,455 \text{ m/s},$$

αντίστοιχα, $v_2 = 0,864 \text{ m/s}$

Οι αριθμοί Reynolds που αντιστοιχούν είναι:

$$Re = \frac{v_i \cdot d_i}{\nu} \Rightarrow Re_1 = 148,7 \quad \text{και} \quad Re_2 = 74,3$$

Άρα η ροή και στους δύο σωλήνες είναι στρωτή. Εφαρμόζουμε την εξίσωση ορμής με τους διορθωτικούς συντελεστές $\beta_1 = \beta_2 = 4/3$ [εξίσωση (6.14)]:

$$\Sigma F_x = \rho \cdot \dot{V} \cdot (\beta_2 \cdot v_{2x} - \beta_1 \cdot v_{1x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1260 \cdot 0,007 \cdot (4/3 \cdot 0,864 - 4/3 \cdot 3,455) \text{ N}$$

ή $\Sigma F = -30,5 \text{ N}$

Σημείωση: Αν δεν χρησιμοποιούσαμε τους διορθωτικούς συντελεστές β , θα υπολογίζαμε: $\Sigma F = -22,85 \text{ N}$, δηλαδή θα είχαμε απόκλιση 25%. Γενικά συνίσταται, στην περίπτωση της στρωτής ροής, να χρησιμοποιούμε τους διορθωτικούς συντελεστές ορμής.

6.4 Δυνάμεις ασκούμενες σε αγωγούς.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της εξισώσεως της ορμής, βρίσκεται στο ότι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη (ΣF_x , ΣF_y , ΣF_z), που

ασκείται σε μία ρέουσα ποσότητα υγρού, γνωρίζοντας μόνο τις ταχύτητες εισόδου και εξόδου στο τμήμα του αγωγού που επιλέγουμε.

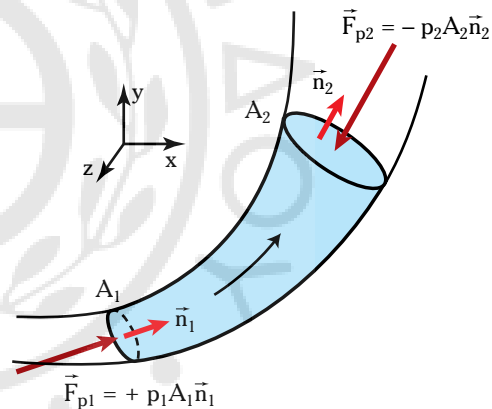
Τα υπολογιστικά προβλήματα όμως δεν τελειώνουν σ' αυτό το σημείο. **Συνήθως δεν μας απασχολεί η συνισταμένη δύναμη, αλλά κάποια εκ των συνιστωσών της.** Επομένως, κατά την εφαρμογή της εξισώσεως της ορμής, πρέπει να αναγνωρίζουμε και να λαμβάνουμε υπόψη όλες τις συνιστώσες δυνάμεις που δρουν επί του ρευστού. Τέτοιες δυνάμεις συνήθως είναι:

1) Οι **δυνάμεις πίεσης** κατά τη διεύθυνση της ροής στις διατομές A_1 και A_2 (σχ. 6.4a):

$$\vec{F}_{p1} = p_1 \cdot A_1 \cdot \vec{n}_1 \quad (6.15)$$

$$\vec{F}_{p2} = -p_2 \cdot A_2 \cdot \vec{n}_2 \quad (6.15a)$$

όπου: \vec{n}_1 και \vec{n}_2 τα μοναδιαία διανύσματα τα κάθετα στις επιφάνειες A_1 και A_2 αντίστοιχα (οι δυνάμεις πίεσης είναι πάντοτε κάθετες στις επιφάνειες) και p_1 , p_2 οι πιέσεις στις διατομές 1 και 2.



Σχ. 6.4a

Δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στο όγκο ελέγχου.

Τα μέτρα των δυνάμεων πίεσης δίνονται απ' τις εξισώσεις:

$$F_{p1} = p_1 \cdot A_1 \quad (6.15\beta)$$

$$F_{p2} = p_2 \cdot A_2 \quad (6.15\gamma)$$

Επισημαίνουμε ότι η φορά της F_{p2} στην έξοδο, είναι πάντοτε αντίθετη της ταχύτητας ροής v_2 .

Σημείωση: Επειδή αυτό που τελικά μας ενδιαφέρει, είναι ο υπολογισμός της δυνάμεως που δέχεται ο αγωγός, πρέπει να λάβουμε υπόψη και να χρησιμοποιήσουμε στις παραπάνω σχέσεις, τη σχετική πίεση (και όχι την απόλυτη), όπως ακριβώς κάναμε και κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων υδροστατικής πίεσεως επί διαχωριστικών τοιχωμάτων (παράγρ. 2.5.3).

2) **Οι δυνάμεις του πεδίου βαρύτητας, B** (σχ. 6.4β) (οι οποίες παίζουν ρόλο, όταν ο αγωγός έχει κλίση ως προς το οριζόντιο επίπεδο) είναι:

$$B = m \cdot g = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot \dot{V} \cdot t \quad (6.16)$$

Αν η διατομή του αγωγού δεν μεταβάλλεται, η ταχύτητα παραμένει σταθερή (κατά μέτρο) και έχουμε: $t = L/v$ (όπου: L το μήκος). Η εξίσωση (6.16) γίνεται:

$$B = \rho \cdot g \cdot \dot{V} \cdot L/v,$$

$$\text{επειδή } \dot{V} = A \cdot v \Rightarrow \frac{\dot{V}}{v} = A,$$

$$\text{και } A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

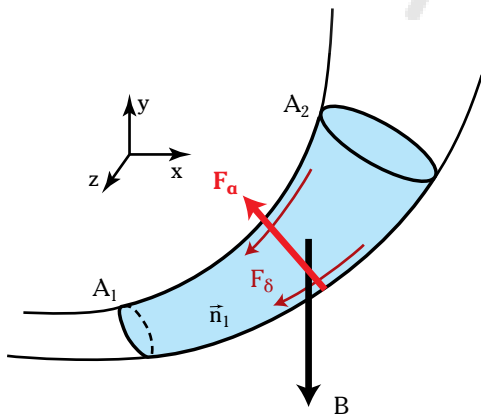
$$\text{τότε } B = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L \quad (6.16a)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το βάρος έχει πάντοτε κατακόρυφο διεύθυνση και φορά προς τα κάτω.

Σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις έχουμε να αντιμετωπίσουμε και δυνάμεις ασκούμενες από άλλα πεδία (π.χ. φυγοκεντρικό πεδίο).

3) **Οι δυνάμεις που ασκούν τα τοιχώματα του αγωγού, F_t** . Αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες:

α) **Δυνάμεις ιξώδους διατμήσεως, F_δ** (αντιστάσεως στη ροή), που ασκεί το τοίχωμα του αγωγού (ή το περιρρέον τη φλέβα ροής ρευστού). Στα ιδανικά ρευστά ισούνται με μηδέν, αλλά στα πραγματικά είναι πάντα παρούσες (αν και σχετικά μικρές). Η διεύθυνσή τους ταυτίζεται πάντοτε με τη διεύθυνση της ταχύτητας ροής, αλλά έχουν αντίθετη φορά. Οι δυνάμεις αυτές είναι υπεύθυνες για τις ενεργειακές απώλειες λόγω τριβών.



Σχ. 6.4β

Δυνάμεις βαρύτητας, διατμήσεως, αντιδράσεως στο όγκο ελέγχου.

β) **Δυνάμεις αντιδράσεως των τοιχωμάτων, F_a** . Τα στερεά τοιχώματα των αγωγών αντιδρούν στις δυνάμεις πίεσεως του ρευστού και στο βάρος του (όταν η ροή δεν είναι κατακόρυφη). Επίσης, τα τμήματα των τοιχωμάτων που εμποδίζουν την ευθύγραμμη κίνηση του ρευστού, όπως ένα εξάρτημα αλλαγής διευσθύνσεως ή μειώσεως διαμέτρου, ασκούν δυνάμεις στις στοιχειώδεις μάζες του ρευστού που κινούνται ευθύγραμμα και προσπίπτουν επί αυτών. Σε μία στοιχειώδη επιφάνεια του τοιχώματος, η (στοιχειώδης) δύναμη αντιδράσεως είναι κάθετη επ' αυτής. Πρόκειται δηλαδή για δυνάμεις πίεσεως. Η δυσκολία χωριστού υπολογισμού των δυνάμεων διατμήσεως και αντιδράσεως, μας αναγκάζει να τις αντιμετωπίζουμε ενιαία ως δυνάμεις τοιχώματος:

$$\vec{F}_t = \vec{F}_\delta + \vec{F}_{aW}$$

Η **συνισταμένη δύναμη** που ασκείται στο ρευστό, αποτελεί το διανυσματικό άθροισμα των παραπάνω δυνάμεων:

$$\Sigma \vec{F} = (\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2}) + \vec{B} + \vec{F}_t \quad (6.17)$$

Και στην περίπτωση συνθέσεως δυνάμεων, η ανάλυση σε άξονες συντεταγμένων είναι η ενδεικνυόμενη μέθοδος εργασίας. Από την εξίσωση (6.17) παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = (F_{p1x} + F_{p2x}) + B_x + F_{tx} \quad (6.17a)$$

$$\Sigma F_y = (F_{p1y} + F_{p2y}) + B_y + F_{ty} \quad (6.17\beta)$$

$$\Sigma F_z = (F_{p1z} + F_{p2z}) + B_z + F_{tz} \quad (6.17\gamma)$$

Όσον αφορά στον υπολογισμό των δυνάμεων, σημειώνουμε τα ακόλουθα:

1) Η συνισταμένη δύναμη ΣF υπολογίζεται, όπως αναφέραμε, από την εξίσωση της ορμής [εξίσωση (6.9)].

2) Οι δυνάμεις πίεσεως F_{p1} και F_{p2} δύνανται να υπολογισθούν από τις εξισώσεις (6.15), εφόσον γνωρίζουμε τα εμβαδά διατομής και τις πιέσεις στην είσοδο και την έξοδο του όγκου ελέγχου που μελετάμε.

3) Το βάρος υπολογίζεται από την εξίσωση (6.16).

4) Η δύναμη F_t που ασκεί ο αγωγός, δεν είναι δυνατόν να υπολογισθεί ανεξάρτητα απ' τις παραπάνω δυνάμεις. Θα υπολογισθεί με εφαρμογή των εξισώσεων (6.17).

Ένα πρόβλημα, το οποίο συναντάμε συχνά στην πράξη, είναι ο υπολογισμός της σπριζέως των σωληνώσεων (και γενικότερα των τοιχωμάτων, τα οποία

δέχονται δυνάμεις από τα ρευστά). Για την αντιμετώπισή του είναι αναγκαίος ο **υπολογισμός των δυνάμεων F , που ασκεί το ρευστό στον αγωγό**. Αυτές είναι ίσες και αντίθετες με τις δυνάμεις F_T , τις οποίες ασκεί ο αγωγός στο ρευστό (Αρχή Δράσεως-Αντιδράσεως ή Τρίτος Νόμος του Newton).

Η προτεινόμενη **μεθοδολογία** είναι σε γενικές γραμμές η ακόλουθη:

1) **Υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη** με εφαρμογή της εξίσωσης της ορμής. Είναι προτιμότερο να εργαστούμε με τις εξισώσεις (6.9α), (6.9β) και (6.9γ), δηλαδή με τις προβολές σε άξονες συντεταγμένων, επιλέγοντας τους κατάλληλους προς τούτο άξονες.

2) Σημειώνουμε όλες τις ασκούμενες δυνάμεις (συνιστώσες) και **υπολογίζουμε τις δυνάμεις πίεσεως και το βάρος** (αν υπεισέρχεται στο πρόβλημα).

3) **Υπολογίζουμε τη δύναμη F_T** , που ασκεί ο αγωγός στο ρευστό από τις εξισώσεις (6.17).

4) **Εφαρμόζουμε την Αρχή Δράσεως-Αντιδράσεως**, σύμφωνα με την οποία, η ασκούμενη δύναμη στον αγωγό είναι ίση και αντίθετη με την F_T :

$$\vec{F} = -\vec{F}_T$$

Φυσικά, η χρησιμότητα της εξίσωσης της ορμής, καθώς και ο υπολογισμός δυνάμεων που ασκούνται σε ρέοντα ρευστά, δεν εξαντλείται στους σχετικούς υπολογισμούς επί σωλήνων πίεσεως.

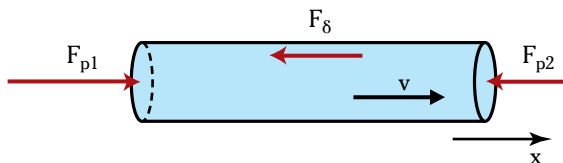
6.5 Εφαρμογές.

6.5.1 Ευθύγραμμος αγωγός σταθερής διατομής.

Έστω οριζόντιος ευθύγραμμος σωλήνας, μήκους L και διαμέτρου d , στον οποίο ρέει ασυμπίεστο ρευστό με σταθερή παροχή \dot{V} (σχ. 6.5α). Κατά τον κατακόρυφο άξονα y , ισορροπούν οι δυνάμεις βάρους του ρευστού και αντιδράσεως του τοιχώματος.

Γενικά, αν σε κάποιον άξονα οι προβολές των ταχυτήτων είναι μηδενικές, οι προβολές των δυνάμεων ισορροπούν και δεν υπάρχει λόγος να περιλάβουμε τον άξονα αυτό στη μελέτη μας.

Οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο ρευστό κατά τον άξονα ροής x , είναι οι δυνάμεις πίεσεως και οι



Σχ. 6.5α

Ευθύγραμμος αγωγός σταθερής διατομής.

δυνάμεις ιξώδους διατμήσεως. Οι δυνάμεις αυτές δίνουν τη συνισταμένη δύναμη που μεταβάλλει την ορμή του ρευστού. Στη συγκεκριμένη όμως περίπτωση που εξετάζουμε, η ταχύτητα ροής παραμένει σταθερή (κατά μέτρο και φορά). Επομένως, και η ορμή παραμένει σταθερή. Σύμφωνα με την εξίσωση της ορμής, η συνισταμένη δύναμη ισούται με μηδέν:

$$\Sigma F_x = \rho(\dot{V})(v_{2x} - v_{1x}), \quad v_{2x} = v_{1x}, \quad \text{άρα } \Sigma F_x = 0$$

$$\text{και} \quad F_p = A \cdot p, \quad A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{p1} - F_{p2} - F_g = 0$$

$$F_g = (p_1 - p_2) \cdot A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (p_1 - p_2) \quad (6.18)$$

Επειδή δεν αλλάζει το εμβαδόν διατομής και η ταχύτητα, η συνισταμένη δύναμη πίεσεως εξαρτάται απ' τη διαφορά πιέσεων μεταξύ δύο διατομών του σωλήνα. Αυτή, υπολογίζεται από την εξίσωση Bernoulli.

Είναι:

$$y_1 - y_2 = 0 \quad (\text{οριζόντιος σωλήνας})$$

$$v_1 = v_2 = v \quad (\text{μόνιμη ροή με σταθερή διατομή})$$

$$\Sigma h = h_f \quad (\text{δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες})$$

Οπότε η εξίσωση Bernoulli δίνει:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_f \Rightarrow p_1 - p_2 = \gamma \cdot h_f$$

Οι γραμμικές απώλειες υπολογίζονται από την εξίσωση Darcy-Weisbach:

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 g} \cdot f \cdot \frac{L}{d^5} \cdot \dot{V} \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot f \cdot \frac{L}{d^5} \cdot \dot{V}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (6.18), προκύπτει:

$$F_g = \rho \cdot f \cdot \frac{L}{d^3} \cdot \dot{V} \quad (6.19)$$

Κατ' ανάλογο τρόπο αντιμετωπίζονται τα προβλήματα υπολογισμού δυνάμεων σε ευθύγραμμους σωλήνες, με κλίση ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Σ' αυτήν την περίπτωση, όπως βλέπομε και στο παράδειγμα που ακολουθεί, στον υπολογισμό των δυνάμεων λαμβάνομε υπόψη και τη συνιστώσα του βάρους του ρευστού, κατά τη διεύθυνση της ροής.

Παράδειγμα 5

Σε ευθύγραμμο σωλήνα από ασφαλωμένο κυτοσίδηρο, διαμέτρου 2,5 in, μήκους 20 m και κλίσεως 30°, ρέει νερό (προς τα πάνω) με παροχή 60 m³/h. Να υπολογι-

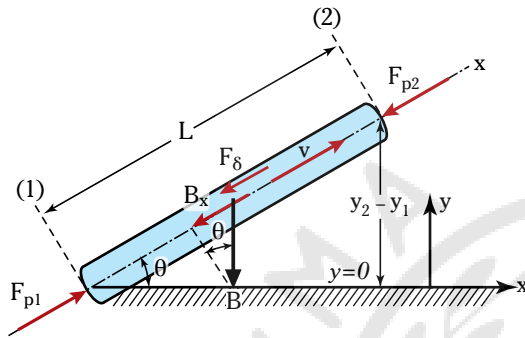
οθούν η δύναμη ιξώδους διατμήσεως και η δύναμη που ασκεί το υγρό στον αγωγό λόγω ροής.

Λύση.

Δεδομένα: $d = 2,5 \text{ in} = 0,0635 \text{ m}$, $L = 20 \text{ m}$,
 $\epsilon = 0,00012 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
 $\dot{V} = 60 \text{ m}^3/\text{h} = 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}$

Ζητούμενα: F_δ, F

Το πρόβλημα θα το μελετήσουμε κατά τον άξονα ροής x (με κλίση 30° ως προς το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχ. 6.5β).



Σχ. 6.5β

Βήμα 1°: Σύμφωνα με την εξίσωση της ορμής: $\Sigma F = 0$.

Βήμα 2°: Κατά τον άξονα x συναντάμε τις δυνάμεις της ιξώδους διατμήσεως, της πίεσης και την προβολή του βάρους B_x . Είναι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{p1} - F_{p2} - F_\delta - B_x = 0 \quad (1)$$

α) Υπολογίζουμε την προβολή του βάρους στον άξονα x :

$$B = \gamma \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L \quad [\text{εξίσωση (6.16α)}] \Rightarrow B = 621,4 \text{ N}$$

$$B_x = B \cdot \sin 30^\circ = B \cdot 0,5 \Rightarrow B_x = 310,7 \text{ N}$$

β) Η πτώση πίεσης υπολογίζεται από την εξίσωση Bernoulli, αφού πρώτα υπολογίσουμε τις γραμμικές απώλειες:

$$v = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0,0167}{\pi \cdot (0,0635)^2} \text{ m/s} = 5,27 \text{ m/s}$$

$$(\epsilon/d = 0,0019, \text{Re} = 4,18 \cdot 10^5) \xrightarrow{\text{Moody}} f = 0,0236$$

$$\Sigma h = h_f = \frac{8}{\pi^2 g} \cdot f \cdot \frac{L}{d^5} \cdot \dot{V}^2 \Rightarrow h_f = 10,5 \text{ m} \quad (5.36)$$

$$(y_1 - y_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2\gamma} = \Sigma h, \quad v_1 - v_2 = 0 \quad (2)$$

$$y_1 - y_2 = -L \cdot \sin \theta \Rightarrow y_1 - y_2 = -10 \text{ m}$$

$$\text{Από την (2)} \Rightarrow -10 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = 10,5 \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = 201.105 \text{ Pa}$$

$$F_{p1} - F_{p2} = (p_1 - p_2) \cdot A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (p_1 - p_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{p1} - F_{p2} = 636,9 \text{ N}$$

Βήμα 3°: Υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκεί ο αγωγός στο ρευστό:

Από την (1) \Rightarrow

$$\Rightarrow F_\delta = F_{p1} - F_{p2} - B_x = (636,9 - 310,7) \text{ N} = 326,2 \text{ N}$$

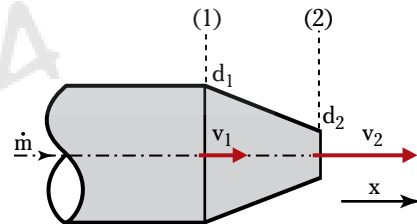
Βήμα 4°: Σύμφωνα με την Αρχή Δράσεως - Αντιδράσεως, ο αγωγός θα δέχεται κατά τον άξονα x δύναμη ίση και αντίθετη: $F = -F_\delta = -326,2 \text{ N}$.

Σημείωση: Η δύναμη F του παραδείγματος, είναι αρκετά μικρή, και για τούτο δεν απαιτούνται ιδιαίτερα μέτρα αντιμετώπισής της. Πολύ πιο αξιόλογη είναι η δύναμη του βάρους του υγρού του σωλήνα (η οποία υφίσταται ανεξαρτήτως της ροής) κι αυτή στην προκείμενη περίπτωση είναι που πρέπει να αντιμετωπισθεί.

6.5.2 Ακροφύσιο (nozzle).

Έστω οριζόντιος σωλήνας διαμέτρου d_1 , ο οποίος καταλήγει σε ακροφύσιο με τελική διάμετρο d_2 (σχ. 6.5γ). Το ρευστό που ρέει στο σωλήνα, καθώς διέρχεται από το ακροφύσιο, παρουσιάζει έντονη πτώση πίεσης και αύξηση ταχύτητας. Αν παραβλέψουμε τις απώλειες λόγω τριβών, πρόκειται για μετατροπή ενός μέρους της ενέργειας πίεσης σε κινητική ενέργεια.

Λόγω της μεταβολής της ταχύτητας (κατά μέτρο), κατά τη διέλευση από το ακροφύσιο μεταβάλλεται (αυξάνεται) και η ορμή. Εφαρμόζοντας την εξίσωση της ορμής στον άξονα ροής x (στους άλλους άξονες δεν παρουσιάζεται μεταβολή της ορμής), έχουμε: $\Sigma F = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2x} - v_{1x})$.



Σχ. 6.5γ

Σωλήνας με ακροφύσιο.

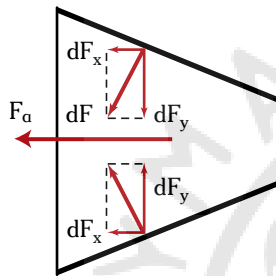
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό που διέρχεται απ' το ακροφύσιο, είναι οι δυνάμεις πίεσης F_{p1x} , F_{p2x} και η δύναμη του τοιχώματος F_T . Η τελευταία οφείλεται κατά κύριο λόγο στην αντίδραση του τοιχώματος F_G . Αυτή, αν και για κάθε στοιχειώδες τμήμα του τοιχώματος του ακροφυσίου είναι κάθετη (ίση και αντίθετη με τη δύναμη πίεσης, που ασκεί

το υγρό στη στοιχειώδη επιφάνεια), έχει συνισταμένη οριζόντια και φορά αντίθετη της ροής. Στο σχήμα 6.58 φαίνεται πως οι στοιχειώδεις δυνάμεις dF_y αλληλοεξουδετερώνονται και προκύπτει:

$$F_a = \int dF_x$$

Υπενθυμίζουμε ότι επειδή στο ακροφύσιο έχουμε μεταβολή της διαμέτρου, άρα και του εμβαδού διατομής, **για τον υπολογισμό των δυνάμεων πίεσης χρησιμοποιούμε τις σχετικές πιέσεις (P_g)**.

Το παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζει τον τρόπο υπολογισμού των δυνάμεων που ασκούνται στο ακροφύσιο, καθώς και τη σπουδαιότητα κάθε μίας.



Σχ. 6.58

Δυνάμεις ασκούμενες από ακροφύσιο.

Σημείωση: Το ακροφύσιο είναι μία εφαρμογή των εξαρτημάτων βαθμιαίας στενώσεως. Επειδή στα εξαρτήματα αυτά παρουσιάζεται αύξηση ταχύτητας και σημαντική πτώση πίεσης, καλούνται και μειωτήρες πίεσης. Στα εξαρτήματα αυτά, εργαζόμαστε όπως και στο ακροφύσιο.

Παράδειγμα 6

Ευθύγραμμος οριζόντιος σωλήνας, διαμέτρου 2,5 in, καταλήγει σε ακροφύσιο με διάμετρο εξόδου 3/4 in. Στο σωλήνα ρέει νερό το οποίο εξέρχεται στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα 30 m/s.

α) Αν ο συντελεστής τοπικών απωλειών είναι $K = 0,05$ και οι γραμμικές απώλειες στο ακροφύσιο αμελητέες, να υπολογισθεί η δύναμη που ασκεί το ρεύμα νερού στο ακροφύσιο.

β) Πόση θα είναι η αντίστοιχη δύναμη αν το ρευστό θεωρηθεί ιδανικό;

Λύση.

- Δεδομένα: $d_1 = 2,5 \text{ in} = 0,0635 \text{ m}$
 $d_2 = 3/4 \text{ in} = 0,019 \text{ m}$
 $v_2 = 30 \text{ m/s}$ $p_2 = 101,3 \text{ kPa}$
 $K = 0,05$ $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Ζητούμενο: F

α) Η ροή θεωρείται ευθύγραμμη. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε το σύστημα κατά τον οριζόντιο άξονα x.

Βήμα 1°: Σύμφωνα με την εξίσωση της ορμής:

$$\Sigma F = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2x} - v_{1x}) \text{ θεωρούμε:}$$

$$v_{2x} = v_2 \text{ και } v_{1x} = v_1 \tag{1}$$

Η παροχή \dot{V} και η ταχύτητα v_1 υπολογίζονται με εφαρμογή της εξίσωσης της συνέχειας:

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow \dot{V} = 0,00855 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 2,7 \text{ m/s}$$

Από την (1) $\Rightarrow \Sigma F = \Sigma F_x = 233,4 \text{ N}$

Βήμα 2°: Οι δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται στο ρευστό που ρέει στον όγκο ελέγχου κατά τον άξονα x, είναι οι δύο δυνάμεις πίεσης F_{p1} και F_{p2} , καθώς και η δύναμη τοιχώματος F_t . Η φορά τους φαίνεται στο σχήμα 6.5ε και είναι:

$$\Sigma F = F_{p1} - F_{p2} - F_t \tag{2}$$

$$F_{p1x} = F_{p1}, F_{p2x} = F_{p2}$$

$$F_{p2} = p_{2g} \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \Rightarrow F_{p2} = 0, p_{2g} = 0$$

$$F_{p1} = p_{1g} \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \tag{3}$$

Η πίεση p_1 υπολογίζεται με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli, και είναι:

$$(y_1 - y_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \Sigma h \Rightarrow$$

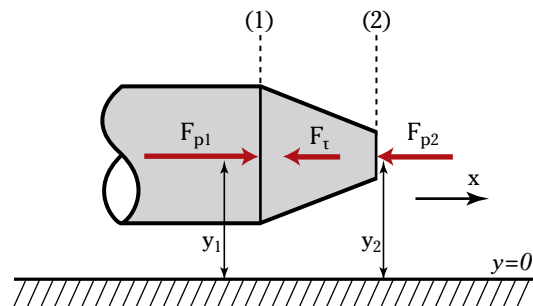
$$\Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = K \cdot \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = p_2 + \rho \cdot \frac{(K+1) \cdot v_2^2 - v_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = \left[101,3 \cdot 10^3 + 1000 \cdot \frac{(0,05+1) \cdot 30^2 - 2,7^2}{2} \right] \text{ Pa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = 570.155 \text{ Pa} \Rightarrow p_{1g} = 468.855 \text{ Pa}$$

$$(3) F_{p1} = 1485 \text{ N}$$



Σχ. 6.5ε

Βήμα 3^ο: Υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκεί ο αγωγός στο ρευστό:

Από την (2) ⇒
 $\Rightarrow F_t = F_{p1} - F_{p2} - \Sigma F = (1485 - 0 - 233,4) \text{ N} = 1251,6 \text{ N}$

Βήμα 4^ο: Η δύναμη F_t ασκείται από το ακροφύσιο στο νερό. Σύμφωνα με την Αρχή Δράσεως-Αντιδράσεως, το νερό ασκεί στο ακροφύσιο δύναμη ίση και αντίθετη, επομένως κατά τη διεύθυνση της ροής:

$$F_a = 1251,6 \text{ N}$$

β) Αν το ρευστό θεωρηθεί ιδανικό, είναι: $\Sigma h = 0$. Το μόνο που αλλάζει στην παραπάνω επίλυση, είναι η εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \Rightarrow p_1 = 547.655 \text{ Pa} \Rightarrow p_{1g} = 446.355 \text{ Pa}$$

$$(3) \Rightarrow F'_{p1} = 1414 \text{ N}$$

$$(2) \Rightarrow F_t = F'_{p1} - F'_{p2} - \Sigma F = (1414 - 0 - 233,4) \text{ N} = 1180,6 \text{ N}$$

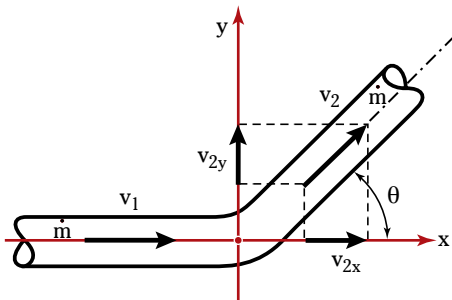
Δηλαδή στο (α) ερώτημα, η δύναμη διατιμήσεως είναι:

$$F_t = F_\delta + F_a \Rightarrow F_\delta = F_t - F'_t = (1251,8 - 1180,6) \text{ N} = 71,2 \text{ N}, \text{ με } F'_t = F_a$$

6.5.3 Αλλαγή διεύθυνσεως (γωνίες).

Όταν το ρευστό που ρέει σε σωλήνα διέρχεται από γωνία και αλλάζει διεύθυνση, η ορμή του μεταβάλλεται και ασκούνται σημαντικές δυνάμεις από το ρευστό στο εξάρτημα αλλαγής διεύθυνσεως. Συνήθως η διάμετρος δεν μεταβάλλεται και κατά συνέπεια, δεν μεταβάλλεται και το μέτρο της ταχύτητας. Μεταβάλλεται όμως η διεύθυνση (σχ. 6.5στ).

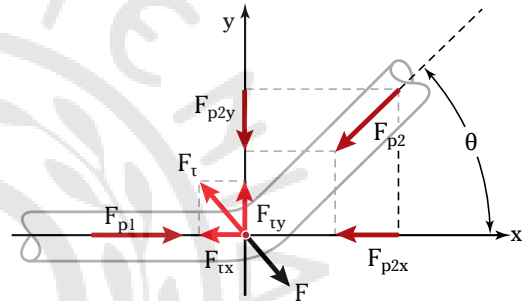
Όπως είδαμε στο παράδειγμα 4, για την εφαρμογή της εξίσωσης της ορμής χρησιμοποιούμε δύο άξονες (x και y), στους οποίους προβάλλουμε τα διανύσματα των ταχυτήτων. Με εφαρμογή των εξισώσεων (6.9α) και (6.9β), υπολογίζουμε τις προβολές της συνισταμέ-



Σχ. 6.5στ

νης δυνάμεως ΣF_x και ΣF_y . (Στην περίπτωση που η διεύθυνση της ροής μεταβάλλεται και κατά την τρίτη διάσταση, η ανάλυση πρέπει να περιλάβει και τον άξονα z).

Την ίδια μεθοδολογία ακολουθούμε και για τον υπολογισμό των συνιστωσών δυνάμεων. Στο σχήμα 6.5ζ σημειώνονται και αναλύονται στους άξονες x και y, οι δυνάμεις που ασκούνται σε οριζόντιο αγωγό, ο οποίος αλλάζει διεύθυνση κατά γωνία θ . Πρόκειται για τις δύο δυνάμεις πίεσεως F_{p1} και F_{p2} (στην είσοδο και στην έξοδο του όγκου ελέγχου αντίστοιχα) και τη δύναμη του τοιχώματος του αγωγού F_t . Αν ο αγωγός δεν βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο (υπάρχει δηλ. υψομετρική διαφορά), στον υπολογισμό υπεισέρχεται και το βάρος B.



Σχ. 6.5ζ

Παράδειγμα 7

Οριζόντιος σωλήνας διαμέτρου 12 cm, μεταφέρει νερό με παροχή $180 \text{ m}^3/\text{h}$. Σε κάποιο σημείο της διαδρομής, αλλάζει διεύθυνση με γωνία 45° , παραμένοντας στο οριζόντιο επίπεδο. Η πίεση στην έξοδο της γωνίας είναι 210 kPa. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στο ρευστό και η δύναμη που ασκείται στο εξάρτημα αλλαγής διεύθυνσεως.

Λύση.

Δεδομένα: $d = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$,
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $\dot{V} = 180 \text{ m}^3/\text{h} = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$,
 $\theta = 45^\circ, p_2 = 210 \text{ kPa}$.

Ζητούμενα: $\Sigma F, F$

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός των δυνάμεων από την μεταβολή της ορμής.

α) Τα μέτρα των ταχυτήτων v_1 και v_2 είναι ίσα. Τα υπολογίζουμε απ' την εξίσωση της συνέχειας:

$$v_1 = v_2 = v = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} \Rightarrow v = 4,42 \text{ m/s}$$

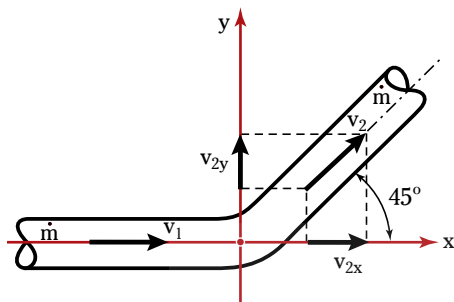
β) Επιλέγουμε το σύστημα αξόνων x-y και προβάλλουμε

τις ταχύτητες σε αυτούς (σχ. 6.5n) (γενικά, φροντίζουμε ο ένας άξονας να συμπίπτει με τη μία διεύθυνση ροής):

$$v_{1x} = v_1 = 4,42 \text{ m/s} \quad v_{1y} = 0,$$

$$v_{2x} = v_2 \cdot \cos\theta = 3,126 \text{ m/s}$$

$$v_{2y} = v_2 \cdot \sin\theta = 3,126 \text{ m/s}$$



Σχ. 6.5n

γ) Εφαρμόζουμε την εξίσωση της ορμής για τους άξονες x και y [εξισώσεις (6.9α), (6.9β)] και υπολογίζουμε τις ΣF_x και ΣF_y αντίστοιχα (σχ. 6.5θ):

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2x} - v_{1x}) = \\ &= 1000 \cdot 0,05 \cdot (3,126 - 4,42) \text{ N} = -64,7 \text{ N} \end{aligned}$$

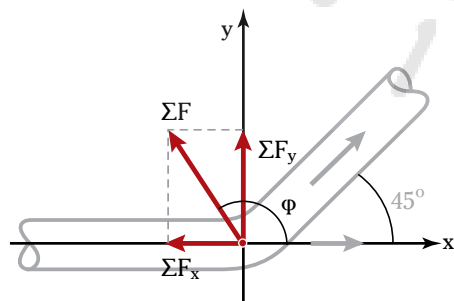
$$\Sigma F_y = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2y} - v_{1y}) = +156,3 \text{ N}$$

Η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο:

$$\Sigma F = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} \Rightarrow \Sigma F = 169,2 \text{ N}$$

Η διεύθυνσή της καθορίζεται απ' τη γωνία φ:

$$\tan \varphi = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{156,3}{-69,7} = -2,414 \Rightarrow \varphi = 112,5^\circ$$



Σχ. 6.5θ

Βήμα 2^ο: Υπολογισμός δυνάμεων πίεσης.

α) Υπολογίζουμε την πτώση πίεσης στη γωνία, με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli. (Υπενθυμίζουμε πως

η ενέργεια είναι μονόμετρο¹ μέγεθος, επομένως η εξίσωση ενέργειας εφαρμόζεται σε τμήμα του σωλήνα, ανεξάρτητα απ' τη διεύθυνση των ταχυτήτων). Είναι: $K = 0,4$ (πίν. 6, Παράρτημα):

$$(y_1 - y_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = K \cdot \frac{v^2}{2g},$$

$$v_1 = v_2 \text{ και } y_1 = y_2 \text{ (οριζόντιο επίπεδο)}$$

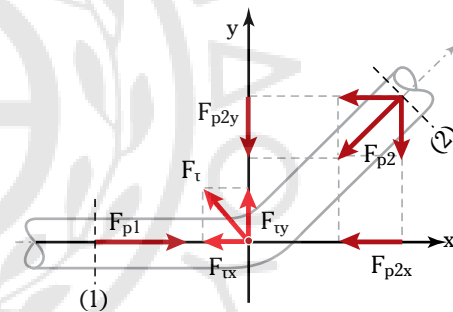
$$\Rightarrow p_1 - p_2 = K \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

$$\text{ή } p_1 - p_2 = \frac{0,4 \cdot (4,42)^2 \cdot 1000}{2} \text{ Pa} = 3907 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow p_1 = (3907 + 210.000) \text{ Pa} =$$

$$= 213.907 \text{ Pa} \text{ ή } p_{1g} = p_1 - p_{atm} = 112.600 \text{ Pa}$$

β) Οι συνιστώσες δυνάμεις είναι οι δυνάμεις πίεσης F_{p1} και F_{p2} (τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε) και η (άγνωστη) δύναμη F_t που ασκεί ο αγωγός στο ρευστό. Τις αναλύουμε στους άξονες x και y (σχ. 6.5ι).



Σχ. 6.5ι

γ) Υπολογίζουμε τις δυνάμεις πίεσης και τις προβολές τους:

$$F_{p1} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot p_{1g} = \left(\frac{\pi \cdot (0,12)^2}{4} \cdot 112.600 \right) \text{ N} = 1273 \text{ N}$$

$$F_{p1x} = F_{p1} \Rightarrow F_{p1x} = 1.273 \text{ N}$$

$$F_{p1y} = 0$$

$$F_{p2} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot p_{2g} = \frac{\pi d^2}{4} (p_2 - p_{atm}) =$$

$$= \frac{\pi \cdot (0,12)^2 \cdot 108.700}{4} \text{ N} = 1229 \text{ N}$$

$$F_{p2x} = -F_{p2} \cdot \cos\theta = -1229 \cdot \cos 45^\circ \text{ N} = -869 \text{ N}$$

$$F_{p2y} = -F_{p2} \cdot \sin\theta = -1229 \cdot \sin 45^\circ \text{ N} = -869 \text{ N}$$

¹ Μονόμετρο μέγεθος είναι εκείνο που περιγράφεται πλήρως απ' το μέτρο, την αριθμητική τιμή και την μονάδα μετρήσεως π.χ. ενέργεια, μάζα.

Προσοχή πρέπει να δώσουμε στη σωστή προσήμανση των προβολών στους άξονες. Το πρόσημο (-) στις προβολές στον άξονα x δείχνει φορά προς τα αριστερά και στον άξονα y, φορά προς τα κάτω. (Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τις προβολές κατά απόλυτη τιμή και να διαμορφώσουμε τα ισοζύγια δυνάμεων, συμβουλευόμενοι το σχ. 6.5ι).

Βήμα 3^ο: Υπολογισμός δυνάμεως τοιχώματος.

- Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις (6.17α) και (6.17β) (ισοζύγια δυνάμεων):

$$\Sigma F_x = (F_{p1x} + F_{p2x}) + F_{tx} \Rightarrow -64,7 = 1295,7 + (-869,3) + F_{tx} \text{ (SI)} \Rightarrow F_{tx} = -491,1 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = (F_{p1y} + F_{p2y}) + F_{ty} \Rightarrow 156,3 = 0 + (-869,3) + F_{ty}, \text{ (SI)} \Rightarrow F_{ty} = 1025,6 \text{ N}$$

Οπότε η δύναμη που ασκεί το τοίχωμα στο ρευστό είναι:

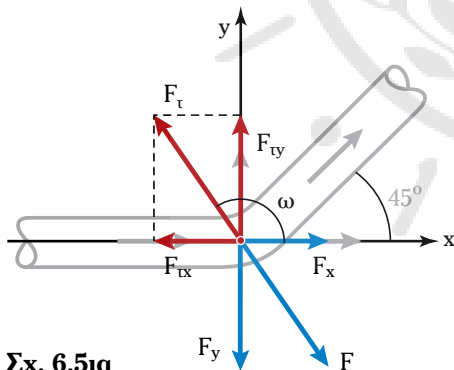
$$F_t = \sqrt{F_{tx}^2 + F_{ty}^2} \Rightarrow F_t = 1137 \text{ N}$$

Και η κλίση της: $\tan \omega = \frac{F_{ty}}{F_{tx}} = \frac{1025,6}{-491,1}$ ή $\omega = 115,6^\circ$

Βήμα 4^ο: Υπολογισμός δυνάμεως επί του τοιχώματος.

- Η δύναμη που ασκεί το ρευστό επί του αγωγού είναι ίση και αντίθετη με την F_t όπως φαίνεται στα σχήματα 6.5ια και 6.5ι:

$$\vec{F} = -\vec{F}_t \text{ με μέτρο: } F = 1137 \text{ N}$$



Σχ. 6.5ια

6.5.4 Διακλάδωση ροής.

Στη διαμόρφωση ενός συστήματος ροής ή ενός δικτύου σωληνώσεων, οι διακλαδώσεις είναι αναπόφευκτες. Ο χωρισμός του ενιαίου ρεύματος σε δύο ή περισσότερα διαφορετικών διευθύνσεων (και αντίστροφα, η σύγκλιση ρευμάτων σε ένα), οδηγούν γενικά σε μεταβολή της ορμής.

Σ' αυτήν την περίπτωση, όπως είδαμε, η εξίσωση της ορμής δεν καλύπτεται από την εξίσωση (6.9) (η οποία αναφέρεται σε ενιαίο ρεύμα ροής), αλλά από την εξίσωση (6.11). Για τη διακλάδωση του σχήματος 6.5ιβ ισχύει:

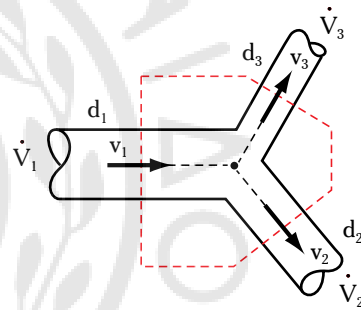
$$\left(\frac{J_{\text{εισ}}}{dt} \right) = \rho \cdot V_1 \cdot v_1$$

$$\left(\frac{J_{\text{εξ}}}{dt} \right) = \rho \cdot (V_2 \cdot v_2 + V_3 \cdot v_3)$$

και η εξίσωση (6.11) γίνεται:

$$\Sigma \dot{F} = \rho \cdot (\dot{V}_2 \cdot \dot{v}_2 + \dot{V}_3 \cdot \dot{v}_3 - \dot{V}_1 \cdot \dot{v}_1) \quad (6.20)$$

Από την εξίσωση της ορμής (6.20), εφόσον γνωρίζουμε τις παροχές και τις ταχύτητες, υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη ΣF. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις συνιστώσες, ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε.



Σχ. 6.5ιβ
Διακλάδωση σωλήνων.

Μια σημαντική σχέση που αξιοποιούμε στη διαδικασία επιλύσεως, είναι το ισοζύγιο μάζας, το οποίο για ασυμπίεστα ρευστά σε μόνιμη ροή, οδηγεί στο ισοζύγιο παροχών όγκου:

$$\Sigma \dot{V}_{\text{εισ}} = \Sigma \dot{V}_{\text{εξ}}$$

Για τη διακλάδωση του σχήματος 6.5ιβ:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

Η διαδικασία επιλύσεως διευκολύνεται εξαιρετικά αν εφαρμόσουμε τις σχέσεις σε κατάλληλους άξονες συντεταγμένων, στους οποίους προβάλλουμε τα διανυσματικά μεγέθη (ταχύτητες και δυνάμεις).

6.5.5 Ροή σε ανακλαστήρα (deflector).

Μια ενδιαφέρουσα ομάδα προβλημάτων που αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια της εξίσωσης της ορμής, είναι εκείνα στα οποία, το ρεύμα του ρευ-

στού, εξερχόμενο από αγωγό με ταχύτητα v , προσπίπτει πάνω σε ένα στερεό εμπόδιο. Η διεύθυνση της ροής μεταβάλλεται.

Για απλοποίηση, θα εξετάσουμε την περίπτωση που το εμπόδιο είναι μία επίπεδη πλάκα. Αν η επιφάνεια προσπτώσεως είναι κάθετη στη διεύθυνση του ρεύματος και η πλάκα ακίνητη, η ροή προς αυτήν την κατεύθυνση μηδενίζεται και οι στοιχειώδεις όγκοι του ρευστού κινούνται ακτινικά προς διάφορες διευθύνσεις, παράλληλες με το επίπεδο της πλάκας και με συμμετρική κατανομή των επιμέρους παροχών. Αν η γωνία της επιφάνειας με τη διεύθυνση του προσπίπτοντος ρεύματος δεν είναι ορθή, η συμμετρία δεν υφίσταται. Σε κάθε περίπτωση όμως, εφόσον το ρευστό είναι ασυμπίεστο, η ολική παροχή όγκου διατηρείται. Το προσπίπτον ρευστό ασκεί επί της πλάκας δύναμη ΣF , την οποία υπολογίζουμε με εφαρμογή της εξίσωσης της ορμής. Για τη στήριξη της πλάκας, πρέπει να εφαρμόσουμε δύναμη F ίση και αντίθετη με τη ΣF .

Κατά τον υπολογισμό, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η πίεση του ασυμπίεστου ρευστού, απ' τη στιγμή που εξέρχεται απ' τον αγωγό, είναι ατμοσφαιρική (και να μην υπάρξει σύγχυση μεταξύ της πίεσεως του ρευστού και της ασκούμενης επί της πλάκας πίεσεως, λόγω της δυνάμεως ΣF).

Παράδειγμα 8

Οριζόντιος σωλήνας πυροσβέσεως διαμέτρου 10 cm, καταλήγει σε ακροφύσιο τελικής διαμέτρου 4 cm. Το νερό που εξέρχεται με παροχή 100 m³/h, προσκρούει πάνω σε επίπεδη επιφάνεια, κάθετη στη ροή (σχ. 6.51γ).

α) Να υπολογισθεί η δύναμη που χρειάζεται να ασκηθεί στην επιφάνεια, προκειμένου να μην μετακινηθεί.

β) Να συγκριθεί η παραπάνω δύναμη, με τη δύναμη συγκρατήσεως του ακροφυσίου επί του σωλήνα. (Οι τριβές και η επίδραση του βάρους του ρευστού να μην ληφθούν υπόψη).

Λύση.

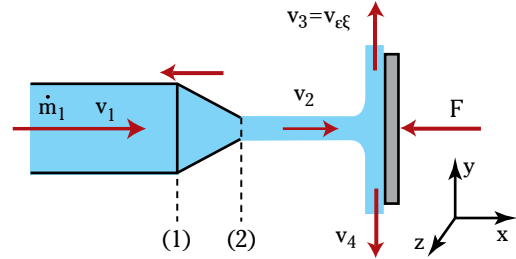
Δεδομένα: $d_1 = 0,10 \text{ m}$, $d_2 = 0,04 \text{ m}$,
 $\dot{V} = 100/3600 \text{ m}^3/\text{s}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $p_2 = p_{\text{ατμ}}$

Ζητούμενα: (α) F (β) F/F_a

α) Το μέτρο της ταχύτητας v_1 υπολογίζεται από την εξίσωση της συνέχειας:

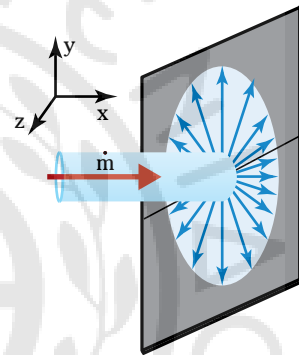
$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} \Rightarrow v_1 = 3,58 \text{ m/s και } v_2 = 22,1 \text{ m/s}$$

Άρα το ρευστό προσπίπτει με ταχύτητα $v_2 = 22,1 \text{ m/s}$ επί της επιφάνειας.



Σχ. 6.51γ

Οι ταχύτητες εξόδου μετά την πρόσκρουση, έχουν συμμετρική κατανομή επί του επιπέδου yz της επιφάνειας, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.51δ. Για να εργαστούμε στο επίπεδο xy, το κάθετο στην επιφάνεια πρόσκρουσεως, μπορούμε να θεωρήσουμε πως έχουμε δύο ίσες και αντίθετες ταχύτητες εξόδου, κάθετες στην v_2 και μέτρου $v_3 = v_4 = v_{εξ}$. Αντίστοιχα, δύο παροχές εξόδου $\dot{V}/2$.



Σχ. 6.51δ

Εφαρμόζουμε την εξίσωση της ορμής για τους άξονες x και y από το σημείο 2 ως την έξοδο:

$$\Sigma F_x = \rho \cdot (\dot{V}_3 \cdot v_{3x} + \dot{V}_4 \cdot v_{4x} - \dot{V}_2 \cdot v_{2x})$$

$$\Sigma F_y = \rho \cdot (\dot{V}_3 \cdot v_{3y} + \dot{V}_4 \cdot v_{4y} - \dot{V}_2 \cdot v_{2y})$$

Είναι: $\dot{V}_2 = \dot{V}$, $\dot{V}_3 = \dot{V}_4 = \dot{V}/2$

$$v_{2x} = v_2 \quad v_{3x} = v_{4x} = 0$$

$$v_{2y} = 0 \quad v_{3y} = v_3 \quad v_{4y} = v_4$$

και οι εξισώσεις γίνονται:

$$\Sigma F_x = \rho \cdot \dot{V} \cdot v_2 \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = \rho \cdot \frac{\dot{V}}{2} (v_3 + v_4) \tag{2}$$

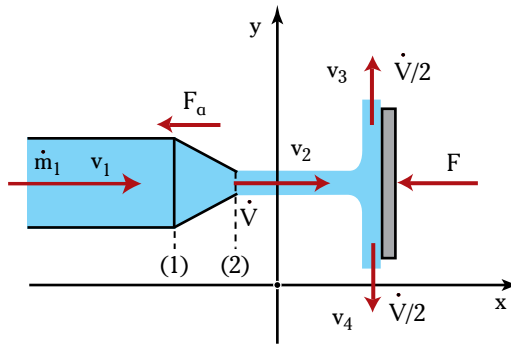
Με αντικατάσταση στην (1) λαμβάνομε:

$$\Sigma F_x = 614 \text{ N}$$

Από τη (2), επειδή $v_3 = -v_4$, προκύπτει:

$$\Sigma F_y = \rho \cdot \frac{\dot{V}}{2} (-v_4 + v_4) = 0$$

Άρα: $\vec{\Sigma F} = \Sigma F_x = 614 \text{ N}$



Σχ. 6.5ιε

Οι πιέσεις στα σημεία 2, 3 και 4 είναι ίσες με την ατμοσφαιρική πίεση $p_2 = p_3 = p_4 = p_{\text{ατμ}}$.

Δηλαδή οι δυνάμεις πίεσεως δεν επηρεάζουν την ισορροπία της πλάκας. Επειδή δεν υπάρχει και υψομετρική διαφορά, η μόνη δύναμη που μένει είναι η δύναμη F , με την οποία στηρίζουμε την πλάκα (σχ. 6.5ιε). Επομένως:

$$\vec{F} = -\Sigma \vec{F} \text{ με μέτρο } F = 614 \text{ N}$$

β) Για τον υπολογισμό της δυνάμεως που ασκεί το ακροφύσιο επί του σωλήνα, εργαζόμαστε στο τμήμα 1–2, όπως στο παράδειγμα 7 της παραγράφου 6.5.2.

– Εφαρμόζουμε την εξίσωση της ορμής από την έναρξη του ακροφυσίου 1 ως την έξοδο 2 κατά τον άξονα της ροής x :

$$\Sigma F = \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_2 - v_1) \Rightarrow \Sigma F = \Sigma F_x = 233,4 \text{ N}$$

– Οι δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται στο ρευστό που ρέει στον όγκο ελέγχου κατά τον άξονα x , είναι οι δύο δυνάμεις πίεσεως F_{p1} και F_{p2} , καθώς και η δύναμη τοιχώματος F_t . Είναι:

$$\Sigma F = F_{p1} - F_{p2} - F_t \quad (3)$$

$$F_{p2} = p_{2g} \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \Rightarrow F_{p2} = 0, \quad p_{2g} = 0$$

$$F_{p1} = p_{1g} \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \quad (4)$$

Η πίεση p_1 υπολογίζεται με εφαρμογή της εξισώσεως Bernoulli. Είναι:

$$(y_1 - y_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

$$\hat{n} \quad p_1 = \left[101.300 + 1000 \frac{(22,1)^2 - (3,58)^2}{2} \right] \text{ Pa}$$

$$\hat{n} \quad p_1 = 339.095 \text{ Pa και } p_{1g} = 237.795 \text{ Pa}$$

$$\text{Από την (4)} \Rightarrow F_{p1} = 237.795 \cdot \frac{\pi \cdot 0,10^2}{4} \text{ N} = 1867 \text{ N}$$

– Υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκεί ο αγωγός στο ρευστό:

$$\text{Από την (3)} \Rightarrow F_t = F_{p1} - F_{p2} - \Sigma F = \\ = [1867 - 0 - 614] \text{ N} = 1253 \text{ N}$$

– Άρα η δύναμη F_a , με την οποία συγκρατείται το ακροφύσιο στο σωλήνα (κατά φορά αντίθετη της ροής) είναι:

$$F_t = F_\delta + F_a, \quad F_\delta = 0 \text{ και } F_t = F_a = 1253 \text{ N}$$

$$\text{και } F/F_a = (614/1253) = 0,49$$

6.5.6 Ροή σε πτερύγιο (blade).

Η εξίσωση της ορμής είναι το σημαντικότερο εργαλείο για την αντιμετώπιση προβλημάτων στα οποία το ρεύμα του ρευστού, εξερχόμενο από αγωγό, προσπίπτει επί πτερυγίου κάποιας μηχανής.

Συνήθως, σκοπός είναι η περιστροφή της συνδεμένης με το πτερύγιο ατράκτου (στρόβιλοι) ή, αντίστροφα, η μεταβίβαση ορμής και ενέργειας απ' την άτρακτο στο προσπίπτον ρευστό (αντλίες, ανεμιστήρες, έλικες κ.ά.). Τα πτερύγια κινούνται (περιστρέφονται) μαζί με την άτρακτο. Η αντιμετώπιση αυτής της κατηγορίας προβλημάτων, απαιτεί τη χρήση των σχετικών ταχυτήτων, αλλά και των νόμων της περιστροφικής κινήσεως.

Προς το παρόν θα περιοριστούμε στην περίπτωση κατά την οποία τα πτερύγια είναι ακίνητα ή κινούνται με σταθερή ταχύτητα (αδρανειακό σύστημα).

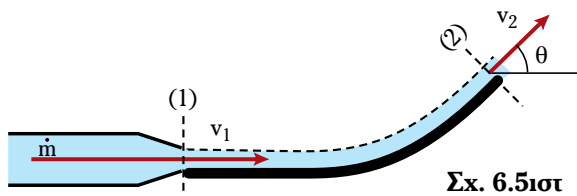
Το προσπίπτον επί του σταθερού πτερυγίου ρεύμα, αλλάζει διεύθυνση (γι' αυτό και τα σταθερά πτερύγια ονομάζονται και **πτερύγια διευθύνσεως**), επομένως μεταβάλλεται η ορμή του και αναπτύσσονται δυνάμεις. Ο υπολογισμός τους, ακολουθεί τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε. Μια σημαντική απλοποίηση (την οποία συναντήσαμε και στην προηγούμενη εφαρμογή) βρίσκεται στον υπολογισμό των πιέσεων: **Από τη στιγμή που το ρευστό εξέλθει από τον αγωγό, έχει ατμοσφαιρική πίεση (τόσο πριν όσο και μετά την πρόσκρουσή του επί του πτερυγίου):**

$$p_1 = p_2 = p_{\text{ατμ}} \Rightarrow p_{1g} = p_{2g} = 0$$

Παράδειγμα 9

Ρεύμα νερού εξερχόμενο από ακροφύσιο, διαμέτρου

4 cm, με παροχή 40 m³/h προσπίπτει στο περύγιο κατευθύνσεως του σχήματος 6.5ιστ, γωνίας αποκλίσεως 40°. Η ροή γίνεται στο οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα εξόδου ισούται με το 90% της ταχύτητας εισόδου.



Σχ. 6.5ιστ

α) Να υπολογισθεί το ύψος απωλειών και η δύναμη που απαιτείται για να μείνει το περύγιο σταθερό.

Το περύγιο αναπτύσσεται στο οριζόντιο επίπεδο x, y.

β) Πόση είναι η αντίστοιχη δύναμη αν το περύγιο κινείται με σταθερή ταχύτητα 3 m/s κατά τη διεύθυνση και φορά του εξερχόμενου από το ακροφύσιο ρεύματος;

Λύση.

Δεδομένα: $d = 0,04 \text{ m}$, $\dot{V} = 40/3600 \text{ m}^3/\text{s}$,
 $\theta = 40^\circ$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$v_2 = 0,9 \cdot v_1$ (α) $v_{\pi} = 0$ (β) $v_{\pi} = 3 \text{ m/s}$

Ζητούμενα: α) F , Σh β) F

α) Επιλέγουμε ως όγκο ελέγχου το τμήμα ροής επί του περυγίου (στο σχ. 6.5ιζ περικλείεται από τη διακεκομμένη γραμμή).

Βήμα 1^ο: Εφαρμογή εξίσωσης της ορμής.

– Το μέτρο της ταχύτητας v_1 υπολογίζεται απ’ την εξίσωση της συνέχειας:

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 40}{3.600 \cdot \pi \cdot (0,04)^2} \text{ m/s} = 8,84 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 0,9 \cdot v_1 \Rightarrow v_2 = 7,96 \text{ m/s.}$$

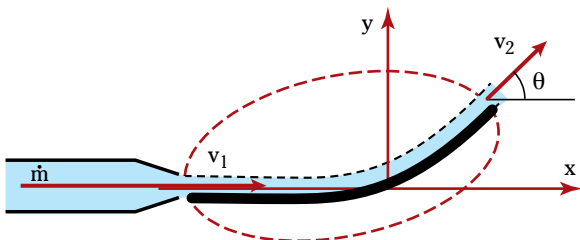
– Επιλέγουμε το σύστημα αξόνων x–y και προβάλλουμε τις ταχύτητες σε αυτούς (οριζόντιο επίπεδο):

$$v_{1x} = v_1 = 8,84 \text{ m/s}, \quad v_{1y} = 0,$$

$$v_{2x} = v_2 \cdot \cos\theta = 6,1 \text{ m/s}$$

$$v_{2y} = v_2 \cdot \sin\theta = 5,12 \text{ m/s.}$$

– Εφαρμόζουμε την εξίσωση της ορμής για τους άξονες x και y [εξισώσεις (6.9α), (6.9β)] και υπολογίζουμε τις ΣF_x και ΣF_y αντίστοιχα:



Σχ. 6.5ιζ

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2x} - v_{1x}) = \\ &= 1000 \cdot \frac{40}{3.600} (6,1 - 8,84) \text{ N} = -30,5 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= \rho \cdot \dot{V} \cdot (v_{2y} - v_{1y}) = \\ &= 1000 \cdot \frac{40}{3.600} (5,12 - 0) \text{ N} = 56,8 \text{ N} \end{aligned}$$

Βήμα 2^ο: Προσδιορισμός δυνάμεων.

Οι πιέσεις στα σημεία εισόδου και εξόδου είναι ίσες $p_1 = p_2 = p_{\text{ατμ}}$. Δηλαδή οι δυνάμεις πιέσεως δεν επηρεάζουν την ορμή του όγκου ελέγχου. Επειδή δεν υπάρχει και υψομετρική διαφορά, η μόνη δύναμη που μένει είναι η δύναμη του τοιχώματος F_r .

Βήματα 3^ο-4^ο: Υπολογισμός δυνάμεως τοιχώματος (σχ. 6.5ιθ).

– Από το τοίχωμα στο υγρό:

$$\Sigma F_x = F_{rx} \Rightarrow F_{rx} = -30,5 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = F_{ry} \Rightarrow F_{ry} = 56,8 \text{ N}$$

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} \quad \acute{\eta} \quad F_r = 64,5 \text{ N}$$

$$\tan \omega = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} \Rightarrow \tan \omega = -1,86 \Rightarrow \omega = 118,2^\circ$$

– Από το υγρό στο τοίχωμα:

$$F_x = -F_{rx} \Rightarrow F_x = 30,5 \text{ N}$$

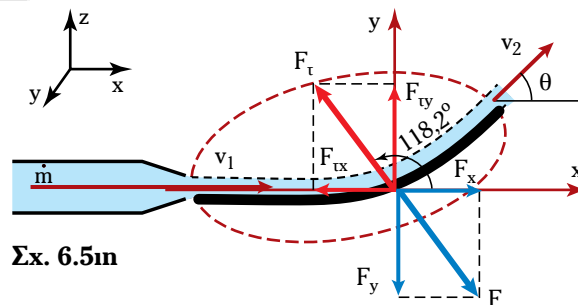
$$F_y = -F_{ry} \Rightarrow F_y = -56,8 \text{ N}$$

$$\text{και } \vec{F} = -\vec{F}_r \text{ με μέτρο } F = 64,5 \text{ N}$$

Οι απώλειες Σh υπολογίζονται απ’ την εξίσωση Bernoulli. Είναι:

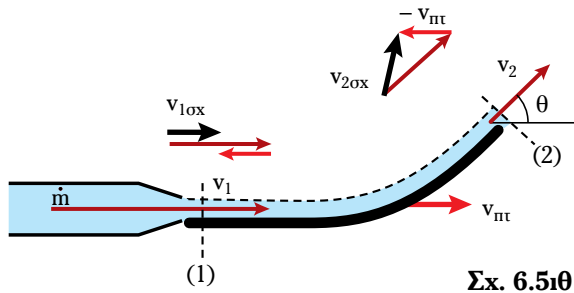
$$y_1 - y_2 = 0 \text{ και } p_1 - p_2 = 0, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} = \Sigma h \Rightarrow \Sigma h = 0,76 \text{ m}$$



Σχ. 6.5ιθ

β) Αν το περύγιο κινείται (σχ. 6.5ιθ) κατά τη φορά της ροής, δηλαδή προς τα δεξιά του άξονα x με $v_{\pi} = 3 \text{ m/s}$, τότε χρησιμοποιούμε τις σχετικές ταχύτητες του ρευστού ως προς το περύγιο:



Σχ. 6.51θ

$$v_{\pi x} = 3 \text{ m/s}, v_{\pi y} = 0$$

$$v_{1x,ox} = v_1 - v_{\pi x} = 5,84 \text{ m/s}, v_{1y,ox} = 0,$$

$$v_{2x,ox} = v_2 \cdot \cos\theta - v_{\pi x} = 3,1 \text{ m/s}$$

$$v_{2y,ox} = v_2 \cdot \sin\theta = 5,12 \text{ m/s}$$

Η παροχή προς το περύγιο είναι μειωμένη. Υπολογίζεται με χρήση της ταχύτητας $v_{1ox} = v_{1x,ox} = 5,84 \text{ m/s}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}' &= \frac{\pi \cdot d}{4} \cdot v_{1x,ox} = \frac{3,14 \cdot (0,04)^2}{4} \cdot 5,84 \text{ m}^3/\text{s} = \\ &= 0,00734 \text{ m}^3/\text{s} = 26,43 \text{ m}^3/\text{h} \end{aligned}$$

Εργαζόμαστε όπως παραπάνω και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \rho \cdot \dot{V}' \cdot (v_{2x,ox} - v_{1x,ox}) = \\ &= 1000 \cdot 0,00734 \cdot (3,1 - 5,84) \text{ N} = -20,16 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\Sigma F_y = \rho \cdot \dot{V}' \cdot (v_{2y,ox} - v_{1y,ox}) \Rightarrow \Sigma F_y = 37,55 \text{ N}$$

$$F_{tx} = -20,16 \text{ N}$$

$$F_{ty} = 37,55 \text{ N}$$

$$F_t = \sqrt{F_{tx}^2 + F_{ty}^2} \Rightarrow F_t = 42,6 \text{ N}$$

$$\tan \omega = -1,86 \Rightarrow \omega = 118,2^\circ$$

$$\text{και } \vec{F} = -\vec{F}_t$$

Υπάρχουν και πολλές άλλες εφαρμογές της εξίσωσης της ορμής στη Μηχανική των Ρευστών και τους σχετιζόμενους μ' αυτήν κλάδους. Μερικές απ' αυτές θα συναντήσουμε στις ασκήσεις του παρόντος κεφαλαίου.

6.6 Η εξίσωση της στροφορμής.

Συς περιπτώσεις που ένα ρευστό βρίσκεται σε περιστροφική κίνηση, τα προβλήματα που προκύπτουν αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια και της εξίσωσης της στροφορμής [ή στροφικής ορμής (*angular momentum*)].

Η σημασία της στροφορμής για την περιστροφική κίνηση, είναι αντίστοιχη με τη σημασία της ορμής (linear momentum) για τη μεταφορική.

Η **στροφορμή** ορίζεται ως το γινόμενο της ροπής αδράνειας του περιστρεφόμενου σώματος ή συστήματος, επί τη γωνιακή του ταχύτητα:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (6.21)$$

Είναι δηλαδή διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση και φορά ίδια με αυτήν της γωνιακής ταχύτητας και μέτρο ίσο με το γινόμενο της ροπής αδράνειας του σώματος επί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.

Για στοιχειώδη μάζα m περιστρεφόμενου σώματος, ισχύουν:

$$L = I \cdot \omega$$

$$I = m \cdot r^2$$

$$\omega = v / r$$

Απ' τις οποίες προκύπτει:

$$L = r \cdot (m \cdot v)$$

όπου: r , η απόσταση της στοιχειώδους μάζας από τον άξονα περιστροφής.

Γενικεύοντας, εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) \quad (6.21a)$$

Σημείωση: Τα διανυσματικά μεγέθη που περιγράφουν την περιστροφική κίνηση και τις μεταβολές της (γωνιακή ταχύτητα, γωνιακή επιτάχυνση, ροπή δυνάμεως, στροφορμή) είναι διανύσματα κάθετα στο επίπεδο περιστροφής. Γι' αυτό πολύ συχνά συναντάμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών, όπως λόγου χάρη στις εξισώσεις (6.21a), (6.23) και (6.24).

Υπενθυμίζουμε την έννοια του εξωτερικού γινομένου και τον τρόπο που το υπολογίζουμε, παίρνοντας ως παράδειγμα τον ορισμό της ροπής μιας δυνάμεως ως προς σημείο O :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Το r είναι το διάνυσμα της αποστάσεως του σημείου O από τη δύναμη F (ή γενικότερα, διάνυσμα με έναρξη το O και πέρασ κάποιο σημείο του διανύσματος F , με γωνία των δύο διανυσμάτων θ). Μετακινούμε παράλληλα το διάνυσμα r , έτσι ώστε να έχει κοινή αρχή με το F [σχ. 6.6a(α)]. Το εξωτερικό γινόμενο M είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα δύο διανύσματα [σχ. 6.6a(β)]. Η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (ή του δεξιόστροφου κοχλία). Το μέτρο του νέου διανύσματος είναι:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \theta$$

όπου: θ η γωνία των δύο διανυσμάτων.

Θέτοντας στη θέση της δυνάμεως, την ορμή, στη

θέση της ροπής προκύπτει το διάνυσμα της στροφορμής [σχ. 6.6α(γ)] με μέτρο:

$$L = r \cdot (m \cdot v) \cdot \sin \theta \quad (6.21\beta)$$

Αρχή διατήρησης της στροφορμής: Σε αντιστοιχία με την αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής.

Κατά την περιστροφική κίνηση ενός σώματος (ή συστήματος), αν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών που ασκούνται σ' αυτό ισούται με μηδέν, η στροφορμή του παραμένει σταθερή.

Εξίσωση της στροφορμής: Ο Δεύτερος Νόμος του Newton, εφαρμοζόμενος στην περιστροφική κίνηση ενός συστήματος, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι **αίτιο της μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, αποτελεί η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών** που ασκούνται σ' αυτό:

$$\Sigma \vec{M} = \frac{d[\vec{r} \times (m \cdot \vec{v})]}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_1^2 \Sigma \vec{M} \cdot dt \quad (6.22)$$

Εφαρμόζοντας αυτήν τη σχέση σε όγκο ελέγχου ρευστού που εκτελεί περιστροφική κίνηση και εργαζόμενοι κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν της παραγράφου 6.2, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\Sigma \vec{M} = \sum_{\epsilon\kappa} \dot{m}_i \cdot \vec{r} \times \vec{v}_i - \sum_{\epsilon\iota\sigma} \dot{m}_j \cdot \vec{r} \times \vec{v}_j \quad (6.23)$$

Για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού:

$$m_i = \rho \cdot \dot{V}_i, \quad m_j = \rho \cdot \dot{V}_j \quad \text{και} \quad \sum_{\epsilon\kappa} \dot{V}_i = \sum_{\epsilon\iota\sigma} \dot{V}_j$$

Αν ο όγκος ελέγχου έχει μία είσοδο και μία έξοδο:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \quad \text{και η σχέση γίνεται:}$$

$$\Sigma \vec{M} = \rho \cdot \dot{V} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{v}_1) \quad (6.24)$$

Τα μεγέθη που εισάγει η εξίσωση της στροφορμής, αντιμετωπίζονται στον τρισδιάστατο χώρο. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας τις προβολές των διανυσμάτων της αποστάσεως και της ταχύτητας στο επίπεδο xy, προκύπτει η προβολή της ροπής στον άξονα z. Κατ' αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν οι προβολές της ροπής κατά τους άξονες x και y:

$$\Sigma M_z = \rho \cdot \dot{V} \cdot (\dot{r}_{2xy} \times \dot{v}_{2xy} - \dot{r}_{1xy} \times \dot{v}_{1xy}) \quad (6.24\alpha)$$

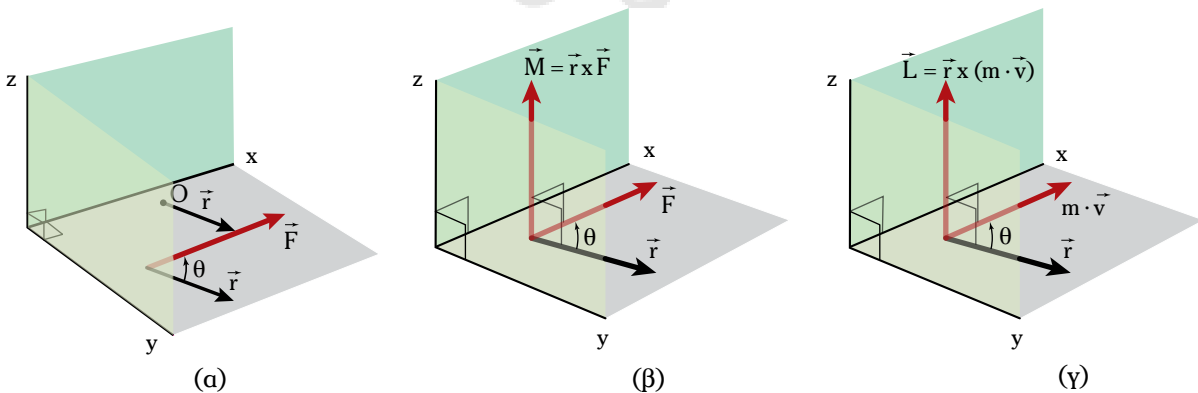
$$\Sigma M_y = \rho \cdot \dot{V} \cdot (\dot{r}_{2xz} \times \dot{v}_{2xz} - \dot{r}_{1xz} \times \dot{v}_{1xz}) \quad (6.24\beta)$$

$$\Sigma M_x = \rho \cdot \dot{V} \cdot (\dot{r}_{2yz} \times \dot{v}_{2yz} - \dot{r}_{1yz} \times \dot{v}_{1yz}) \quad (6.24\gamma)$$

Είναι προφανές ότι μας συμφέρει (όταν είναι δυνατόν) να επιλέγουμε έτσι τους άξονες συντεταγμένων, ώστε η διεύθυνση του διανύσματος της συνισταμένης ροπής να συμπίπτει με τον έναν από αυτούς, συνήθως τον z. Σ' αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση (6.24α) είναι επαρκής για τον υπολογισμό της συνισταμένης ροπής.

Στα προβλήματα στροφορμής πρέπει να υπολογίζουμε προσεκτικά τη ροπή όλων των εξωτερικών δυνάμεων. Επίσης, τις εισερχόμενες και εξερχόμενες ροές ορμής, φροντίζοντας να προσημαίνουμε σωστά τα μεγέθη.

Με τη βοήθεια της εξίσωσης της στροφορμής, επιλύονται και προβλήματα αντιμετώπισης ροπών, οι οποίες οφείλονται στις δυνάμεις πίεσης που αναπτύσσονται κατά τη ροή. Όπως θα διαπιστώσουμε με το ακόλουθο παράδειγμα, η μεθοδολογία που ακολουθούμε για τον υπολογισμό των ροπών, είναι ανάλογη με τη μεθοδολογία υπολογισμού δυνάμεων.



Σχ. 6.6α

Η ροπή και η στροφορμή ως εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων.

Παράδειγμα 10

Η διπλή γωνία του σχήματος 6.6β, συνδέεται με εύκαμπτες συνδέσεις στα σημεία 1 και 2 με το σύστημα ροής και στηρίζεται στο σημείο Α. Στη διατομή 1 έχουμε σχετική πίεση 290 kPa και στη 2, 220 kPa. Η παροχή νερού είναι 90 m³/h και η διάμετρος, 3 in. Να υπολογισθεί η ροπή που ασκείται στο σημείο Α αν h₁ = 10 cm, h₂ = 30 cm.

Λύση.

Δεδομένα: d = 3 in = 0,0762 m,
 p_{1,ox} = 290 kPa, p_{2,ox} = 220 kPa,
 h₁ = 0,1 m, h₂ = 0,3 m,
 Ḃ = 90 m³/h = 0,025 m³/s,

Ζητούμενα: M_A

– Από την εξίσωση της συνέχειας, υπολογίζουμε την ταχύτητα:

$$v = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} = \frac{40 \cdot 0,025}{3,14 \cdot (0,0762)^2} \text{ m/s} = 5,48 \text{ m/s}$$

$$v_1 = v_2 = v = 5,48 \text{ m/s}$$

– Εφαρμόζουμε την εξίσωση της στροφορμής (6.24) μεταξύ των 1 και 2 ως προς το σημείο στηρίζεως Α:

$$\dot{\Sigma M} = \rho \cdot \dot{V} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{v}_1) \quad (1)$$

Επειδή οι ταχύτητες και το σημείο Α βρίσκονται στο επίπεδο xy, η συνισταμένη ροπή θα είναι κάθετη σ' αυτό: ΣM = ΣM_z και υπολογίζεται απ' την εξίσωση της στροφορμής [(6.24) και (6.24α)].

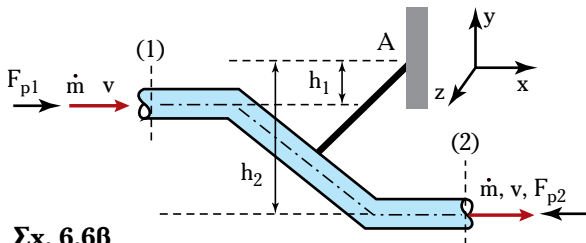
Το μέτρο του διανύσματος $\vec{r} \times \vec{v}$ ισούται με h · v, όπου h η απόσταση του διανύσματος της ταχύτητας από το σημείο Α. Από την εξίσωση (1) προκύπτει για το μέτρο της συνισταμένης ροπής:

$$\Sigma M = \rho \cdot \dot{V} (h_2 \cdot v_2 - h_1 \cdot v_1) = \rho \cdot \dot{V} \cdot v \cdot (h_2 - h_1)$$

Και αντικαθιστώντας προκύπτει ΣM = 27,4 Nm.

– Η συνισταμένη ροπή στο σημείο Α, ισούται με το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων πίεσεως στις διατομές 1 και 2 του αγωγού και της ροπής που ασκείται στο Α. (**Προσοχή:** η δύναμη πίεσεως στη διατομή εξόδου έχει αντίθετη φορά απ' τη δύναμη στη διατομή εισόδου):

$$\Sigma M = F_{p1} \cdot h_1 - F_{p2} \cdot h_2 + M_A, \quad (2)$$



Σχ. 6.6β

η ΣM έχει υπολογισθεί

$$F_{p1} = \frac{\pi d^2}{4} p_1 = \frac{3,14 \cdot (0,0762)^2}{4} 290 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 1322 \text{ N}$$

$$F_{p2} = \frac{\pi d^2}{4} p_2 \Rightarrow F_{p2} = 1003,3 \text{ N}$$

$$(2) \Rightarrow M_A = F_{p2} \cdot h_2 - F_{p1} \cdot h_1 + \Sigma M \Rightarrow$$

$$M_A = (1003,3 \cdot 0,3 - 1322 \cdot 0,1 + 27,4) \text{ Nm},$$

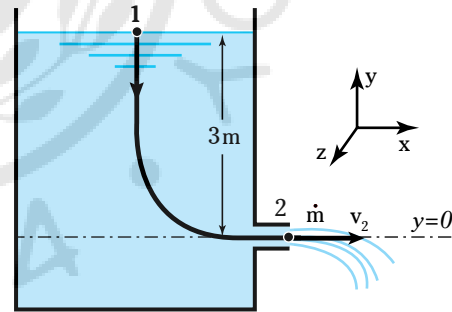
$$\text{ή } M_A = 196,2 \text{ Nm}$$

6.7 Ασκήσεις.

1. Δημιουργήστε φύλλο υπολογισμού στο Excel το οποίο σε σωλήνα θα υπολογίζει τις ασκούμενες δυνάμεις από τη ροή ρευστού. Παράμετροι του προβλήματος: α) η οριζόντια γωνία θ στον σωλήνα β) η παροχή Ḃ γ) η πυκνότητα ρ του ρευστού δ) η εσωτερική διάμετρος d του σωλήνα.

2. Οριζόντιος κρουσός διαμέτρου 1 in, είναι προσαρμοσμένος στο τοίχωμα δεξαμενής και σε υψομετρική διαφορά 3 m από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού (σχ. 6.7α). Να υπολογισθούν η ταχύτητα εξόδου του νερού και η δύναμη που ασκείται στη δεξαμενή: α) αν η ροή θεωρηθεί ιδανική και β) αν K = 0,5.

$$[\alpha] 7,67 \text{ m/s}, 29,8 \text{ N}, \beta) 6,26 \text{ m/s}, 19,9 \text{ N}]$$



Σχ. 6.7α

3. Υγρό σχετικής πυκνότητας 0,8 και κινηματικού ιξώδους 10⁻⁵ m²/s, ρέει σε ευθύγραμμο αγωγό από γαλβανισμένο σίδερο, διαμέτρου 3 in και μήκους 20 m με κλίση 30° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Αν η παροχή προς τα πάνω είναι 60 m³/h, να υπολογισθούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό, κατά τον άξονά του και κάθετα σ' αυτόν.

$$[F_x = 174 \text{ N}, F_y = 620 \text{ N}]$$

4. Σωλήνας διαμέτρου 12 cm καταλήγει σε ακροφύσιο εκτοξεύσεως με διάμετρο εξόδου 5 cm. Η παροχή νερού είναι 80 m³/h και ο συντελεστής τοπικών απωλειών στο

ακροφύσιο 0,05. Να υπολογισθεί η δύναμη, την οποία ασκεί το ρευστό στο ακροφύσιο.

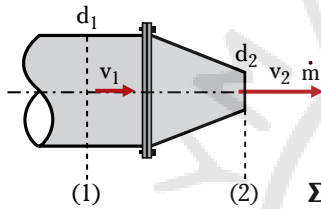
[F = 2123 N]

5. Σωλήνας νερού, διαμέτρου 3 in, καταλήγει σε ακροφύσιο τελικής διαμέτρου 1,5 in το οποίο εκρέει στην ατμόσφαιρα. Η σχετική πίεση στην αρχή του ακροφυσίου είναι 2 bar. Αν $K = 0,05$, να υπολογισθούν: α) η παροχή νερού (σε m^3/h) και η ταχύτητα εκροής, και β) η δύναμη με την οποία τείνει να αποκολληθεί το ακροφύσιο από τον σωλήνα.

[α) $\dot{V} = 82,6 m^3/h$ $v_{εξ} = 20,1 m/s$, β) $F = 565,7 N$]

6. Το οριζόντιο ακροφύσιο του σχήματος 6.7β έχει $d_1 = 12 in$ και $d_2 = 6 in$, με πίεση εισόδου 2,6 bar και ταχύτητα εξόδου 16 m/s. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στη φλάντζα αν το ρευστό είναι νερό.

[F = 11767 N]



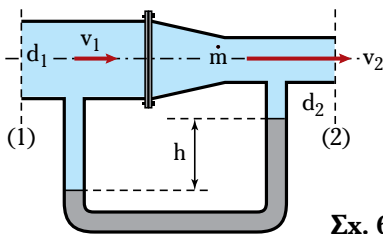
Σχ. 6.7β

7. Σε μια απότομη συστολή με $d_1 = 6 cm$ και $d_2 = 4 cm$, ρέει νερό με ταχύτητα $v_2 = 8 m/s$. Η σχετική πίεση αμέσως μετά τη συστολή είναι 500 kPa. Να υπολογισθεί η ταχύτητα εισόδου στη συστολή, η παροχή μάζας, και η δύναμη που ασκείται στον αγωγό.

[$v_1 = 3,56 m/s$, $\dot{m} = 10 kg/s$, $F = 836 N$]

8. Για το σύστημα του σχήματος 6.7γ είναι: $d_1 = 8 cm$, $d_2 = 5 cm$, $p_2 = 1,3 bar$. Στον σωλήνα κυκλοφορεί νερό και το υγρό του μανόμετρου είναι υδράργυρος. Αν το μανόμετρο δείχνει $h = 58 cm$, να υπολογισθεί η δύναμη αντιστάσεως στη φλάντζα.

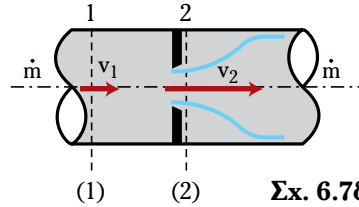
[F = 191,2 N]



Σχ. 6.7γ

9. Το εξάρτημα ροής του σχήματος 6.7δ οδηγεί σε μεγάλη πτώση πίεσεως. Για διάμετρο σωλήνα 10 cm και οπή 6 cm και παροχή νερού 1900 L/min, η πτώση πίεσεως είναι 145 kPa. Να υπολογισθεί η δύναμη στο orifice και ο συντελεστής τοπικών απωλειών.

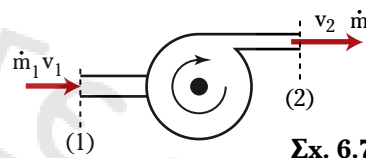
[F = 912 N, K = 1,4]



Σχ. 6.7δ

10. Αντλία αναρροφά νερό πίεσεως 90 kPa από σωλήνα διαμέτρου 8 cm, και το καταθλίβει με πίεση 500 kPa σε σωλήνα διαμέτρου 5 cm (σχ. 6.7ε). Αν η παροχή είναι $80 m^3/h$, να υπολογισθεί η αναγκαία δύναμη για τη στήριξή της και το ύψος που προσδίδει στο νερό.

[F = 1108 N, $h_p = 46 m$]



Σχ. 6.7ε

11. Σε σωλήνα διαμέτρου 5 cm ρέει νερό με ταχύτητα 6 m/s. Σε κάποιο σημείο, παρεμβάλλεται απότομη διαστολή που οδηγεί το νερό σε σωλήνα διαμέτρου 8 cm. Η σχετική πίεση αμέσως μετά τη διαστολή είναι 300 kPa. Να υπολογισθεί η παροχή μάζας και η δύναμη που ασκείται στον αγωγό.

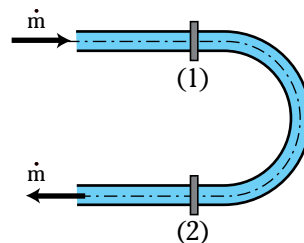
[$\dot{m} = 11,78 kg/s$, $F = -904 N$]

12. Αγωγός διαμέτρου 15 cm, αλλάζει διεύθυνση κατά 30°. Ο αγωγός μεταφέρει νερό παροχής $0,1 m^3/s$ και πριν την αλλαγή διεύθυνσεως η πίεση είναι 130 kPa. Να υπολογισθεί η δύναμη, που ασκείται στον αγωγό αν αυτός βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και οι απώλειες θεωρηθούν αμελητέες.

[F = 1482 N, $\theta = 105^\circ$]

13. Νερό ρέει σε σωλήνα διαμέτρου 5 cm. Μία γωνία 180° με ακτίνα καμπυλότητας 24 cm, αντιστρέφει την πορεία του (σχ. 6.7στ). Όταν η παροχή είναι $45 m^3/h$, η πίεση στο σημείο 1 είναι 165 kPa. Θεωρώντας αμελητέα την επίδραση του βάρους του νερού και λαμβάνοντας $K = 2$, να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στον αγωγό και η κατανομή της στις φλάντζες 1 και 2.

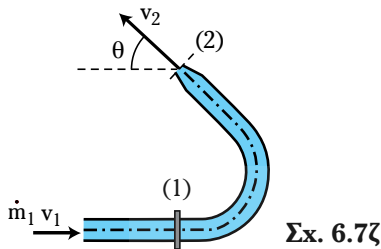
[F = 329,7 N, $\theta = 180^\circ$, $F_1 = 241,7 N$, $F_2 = 88 N$]



Σχ. 6.7στ

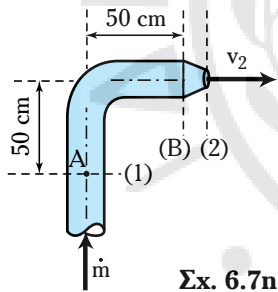
14. Νερό ρέει μέσα από τη γωνία του σχήματος 6.7ζ και εξέρχεται στην ατμόσφαιρα με $\theta = 40^\circ$. Η διάμετρος του σωλήνα είναι 10 cm και της εξόδου του ακροφυσίου 3 cm. Για παροχή $50 \text{ m}^3/\text{h}$ η σχετική πίεση στο σημείο 1 είναι 2,3 bar. Να υπολογισθεί η πίεση στη φλάντζα 1 (η επίδραση του βάρους να θεωρηθεί αμελητέα).

$[F = 2060 \text{ N}, \varphi = 175,6^\circ]$



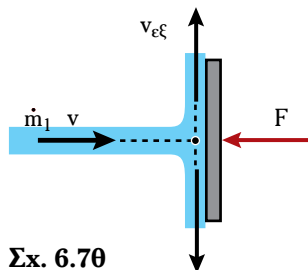
15. Ο σωλήνας του σχήματος 6.7η έχει $d_1 = 30 \text{ cm}$, $d_2 = 15 \text{ cm}$. Όταν στο σωλήνα ρέει νερό με παροχή $15 \text{ m}^3/\text{min}$, η σχετική πίεση στο σημείο 1 είναι 190 kPa. Να υπολογισθεί η δύναμη που δέχεται ο αγωγός και η ροπή που πρέπει να ασκηθεί στο σημείο Α για τη στήριξή του.

$[F = 14.745 \text{ N}, \varphi = -76^\circ, M = 1768 \text{ Nm}]$



16. Ρεύμα νερού, διαμέτρου 3 cm, προσπίπτει σε πλάκα όπως φαίνεται στο σχήμα 6.7θ. Αν η δύναμη που απαιτείται για να κρατήσει την πλάκα σταθερή είναι 23 N, πόση είναι η ταχύτητα του ρεύματος;

$[v = 5,7 \text{ m/s}]$

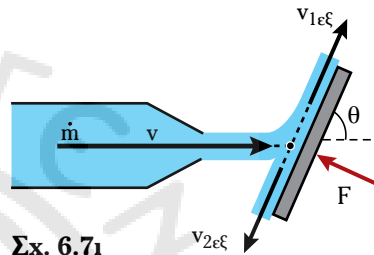


17. Το ρεύμα νερού του σχήματος της προηγούμενης ασκήσεως, διαμέτρου 10 cm και παροχής $230 \text{ m}^3/\text{h}$, προσκρούει στη σταθερή επιφάνεια. Να υπολογισθεί η δύναμη στήριξης της επιφάνειας.

$[F = 520 \text{ N}]$

18. Όταν ρεύμα νερού προσκρούει επί της κεκλιμένης πλάκας του σχήματος 6.7ι, χωρίζεται σε δύο ρεύματα των οποίων οι ταχύτητες έχουν ίδιο μέτρο, αλλά οι παροχές είναι διαφορετικές. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογισθεί ο λόγος των παροχών εξόδου σε συνάρτηση με τη γωνία θ .

$[\dot{V}_1/\dot{V}_2 = (1 + \cos \theta)/(1 - \cos \theta)]$

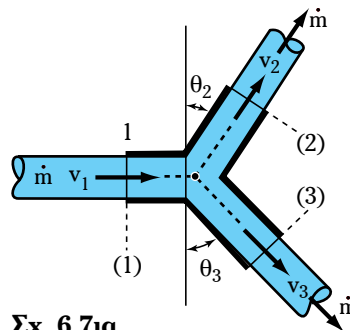


19. Νερό εξέρχεται από ακροφύσιο διαμέτρου 5 cm με παροχή $1,5 \text{ m}^3/\text{min}$ και προσπίπτει σε επίπεδη πλάκα κλίσεως 45° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στην πλάκα.

$[F = 225 \text{ N}]$

20. Στην οριζόντια διακλάδωση του σχήματος 6.7ια, το νερό διαχωρίζεται σε ίσες παροχές. Οι διαμέτροι των σωλήνων είναι: $d_1 = 6 \text{ in}$, $d_2 = 3 \text{ in}$, $d_3 = 4 \text{ in}$ και οι γωνίες των σωλήνων 2 και 3 με την κάθετη στο σωλήνα 1: $\theta_2 = 30^\circ$, $\theta_3 = 40^\circ$. Αν η ολική παροχή ισούται με $110 \text{ m}^3/\text{h}$ και η πίεση στο σημείο 1 είναι 170 kPa, να υπολογισθούν: α) οι πιέσεις στις διατομές 2 και 3, και β) η δύναμη που απαιτείται για τη στήριξη της διακλάδωσης.

$[α) p_2 = 165,8 \text{ kPa}, p_3 = 169,6 \text{ kPa}, β) F = 2083 \text{ N}]$





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΩΛΗΝΕΣ, ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΑ, ΣΥΝΔΕΣΗ, ΔΙΚΤΥΑ ΣΩΛΗΝΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΡΟΗΣ

7.1 Σύνδεση σωλήνων σε σειρά.

Η διαμόρφωση μιας σωληνώσεως απαιτεί τη σύνδεση πολλών σωλήνων και εξαρτημάτων. Ο τρόπος της συνδεσμολογίας, προκύπτει από τους σκοπούς που εξυπηρετεί η σωλήνωση και αποτυπώνεται στον σχεδιασμό της. Ουσιαστική παράμετρος αυτού του σχεδιασμού, είναι η ενεργειακή μελέτη, η οποία γίνεται με αξιοποίηση των σχέσεων του Πέμπτου Κεφαλαίου. Γενικά, συναντάμε τη σύνδεση σωλήνων σε σειρά, την παράλληλη σύνδεση, τη διακλάδωση σωλήνων και τη διαμόρφωση δικτύου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την υπολογιστική διαδικασία σωλήνων συνδεδεμένων σε σειρά ή παράλληλα, σωλήνων, η ροή των οποίων διακλαδίζεται σε επιμέρους ροές καθώς επίσης και τον τρόπο υπολογισμού των δικτύων.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι σωλήνες παραγωγής έχουν περιορισμένο μήκος. Στις περισσότερες περιπτώσεις, για τη διαμόρφωση της σωληνώσεως είμαστε υποχρεωμένοι να συνδέσουμε σε σειρά τμήματα ιδίων σωλήνων [δηλ. σωλήνων του ίδιου υλικού, άρα και της ίδιας τραχύτητας, και ίσως (εσωτερικής) διαμέτρου]. Έτσι όμως προκύπτει απλά ένας σωλήνας μεγαλύτερου μήκους. Ανάλογα με τη μέθοδο συνδέσεως, αυτός ο ενιαίος σωλήνας, πιθανόν εκτός από τις γραμμικές απώλειες, να παρουσιάζει και τοπικές. Πάντως ενεργειακά αντιμετωπίζεται ως ενιαίος σωλήνας και υπολογίζεται σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στο Πέμπτο Κεφάλαιο.

Το πρόβλημα διαφοροποιείται όταν συνδέσουμε σε σειρά δύο (ή περισσότερους) διαφορετικούς σωλήνες. Διαφορετικοί θεωρούνται οι σωλήνες που έχουν διαφορετική τραχύτητα (δηλ. αν είναι κατασκευασμένοι από διαφορετικά υλικά), ή, κυρίως, αν έχουν διαφορετική διατομή (δηλ. διαφορετική εσωτερική διάμετρο). Σ' αυτήν την περίπτωση μιλάμε για **σύνδεση σωλήνων σε σειρά**.

As υποθέσουμε λοιπόν πως οι σωλήνες (1) συνδέεται σε σειρά με το σωλήνα (2) (σχ. 7.1α). Εφόσον

το διακινούμενο ρευστό είναι ασυμπίεστο και η ροή μόνιμη, ισχύει η εξίσωση της συνέχειας:

$$\dot{V} = \text{σταθ.} \Rightarrow \dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \text{ή } \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 &= \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow d_1^2 \cdot v_1 &= d_2^2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.1\alpha)$$

Οι απώλειες ενέργειας θα προστεθούν, αφού κάθε στοιχειώδης ποσότητα ρευστού είναι υποχρεωμένη να διαρρεύσει διαδοχικά (άρα να υποστεί την τριβή) τόσο τον σωλήνα (1), όσο και τον σωλήνα (2). Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με εφαρμογή της εξισώσεως Bernoulli μεταξύ των σημείων Α-Β (σωλήνας 1), Β-Γ (σωλήνας 2) και Α-Γ (σύστημα των δύο σωλήνων):

$$A-B: y_A - y_B + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2 \cdot g} + \frac{p_A - p_B}{\gamma} = \Sigma h_1 \quad (7.2\alpha)$$

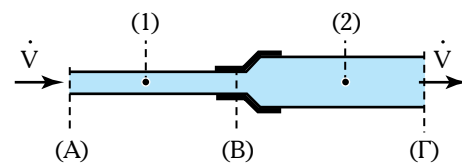
$$B-\Gamma: y_B - y_\Gamma + \frac{v_B^2 - v_\Gamma^2}{2 \cdot g} + \frac{p_B - p_\Gamma}{\gamma} = \Sigma h_2 \quad (7.2\beta)$$

$$A-\Gamma: y_A - y_\Gamma + \frac{v_A^2 - v_\Gamma^2}{2 \cdot g} + \frac{p_A - p_\Gamma}{\gamma} = \Sigma h \quad (7.2\gamma)$$

Η εξίσωση (7.2γ) όμως αποτελεί άθροισμα των δύο προηγούμενων. Άρα:

$$\Sigma h = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 \quad (7.2)$$

Σημείωση: Στην εφαρμογή της εξισώσεως Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Γ, δεν λήφθηκαν υπόψη οι τοπικές απώλειες που δημιουργεί το εξάρτημα αλλαγής διατομής (συστολή ή διαστολή). Για τον ακριβή υπολογισμό, πρέπει να ληφθούν υπόψη και να προ-



Σχ. 7.1α

Σύνδεση σωλήνων σε σειρά.

στεθούν. Ο υπολογισμός γίνεται χρησιμοποιώντας τον συντελεστή τοπικών απωλειών, που όπως είδαμε στο Πέμπτο Κεφάλαιο, αναφέρεται στην ταχύτητα του σωλήνα μικρότερης διαμέτρου. Για το σχήμα 7.1α:

$$h_k = K \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \quad (7.2\delta)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση των απωλειών (Darcy–Weisbach):

$$\begin{aligned} \Sigma h_1 &= \left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{v_1^2}{2g} = \\ &= \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{\dot{V}^2}{d_1^4} \\ \Sigma h_2 &= \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{v_2^2}{2g} = \\ &= \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{\dot{V}^2}{d_1^4} \end{aligned}$$

Και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7.2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma h &= \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left[\left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{1}{d_1^4} + \right. \\ &\left. + \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{1}{d_2^4} \right] \cdot \dot{V}^2 \quad (7.3) \end{aligned}$$

Αν αντί για δύο, συνδέσουμε σε σειρά τρεις ή περισσότερους σωλήνες, οι εξισώσεις (7.1) και (7.2) γενικεύονται. Άρα:

Κατά τη σύνδεση σωλήνων σε σειρά:

1) **Η παροχή είναι σταθερή σε όλη τη διαδρομή της ροής.**

2) **Οι ενεργειακές απώλειες προστίθενται (τυχόν τοπικές απώλειες στις συνδέσεις προσίθονται επίσης):**

$$\dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dots = \dot{V}_v \quad (7.1)$$

$$\Sigma h = h_1 + h_2 + \dots + h_v \quad (7.2)$$

Στην υπολογιστική διαδικασία σωλήνων συνδεδεμένων σε σειρά, εκτός από τις δύο αυτές σχέσεις, αξιοποιούμε την εξίσωση Bernoulli (αν δίνονται ή ζητούνται ενεργειακά μεγέθη), καθώς επίσης, για κάθε σωλήνα, την εξίσωση της συνέχειας, το διάγραμμα Moody και την εξίσωση των απωλειών. Τα σχετικά προβλήματα κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με το ζητούμενο:

1) Προβλήματα **υπολογισμού του ύψους απωλειών.**

2) Προβλήματα **υπολογισμού της παροχής.**

3) Προβλήματα **υπολογισμού μιας διαμέτρου.**

Για τη μεθοδολογική αντιμετώπισή τους, παραθέτουμε τρία παραδείγματα.

7.1.1 Υπολογισμός του ύψους απωλειών.

Στα προβλήματα αυτής της κατηγορίας, γνωρίζουμε τα μεγέθη των σωλήνων που συνδέονται σε σειρά (L_i, d_i, ε_i) και την παροχή \dot{V} (ίδια για όλους τους σωλήνες). Ζητούμενο είναι το ύψος απωλειών Σh . Πιθανό ζητούμενο είναι κάποιο ενεργειακό μέγεθος (υψομετρική διαφορά ή πτώση πίεσεως). Αυτό υπολογίζεται από την εξίσωση Bernoulli, αφού πρώτα υπολογισθεί το Σh .

Παράδειγμα 1

Οι σωλήνες AB και ΒΓ του σχήματος 7.1β που είναι από κυτοσίδηρο, έχουν μήκη 100 m και 120 m και διαμέτρους 12 cm και 10 cm αντίστοιχα. Ο συνολικός συντελεστής τοπικών απωλειών για κάθε σωλήνα ισούται με 3. Αν η παροχή του νερού είναι 60 m³/h να υπολογισθούν οι ολικές απώλειες Σh και η υψομετρική διαφορά H .

Λύση.

Δεδομένα: $L_1 = L_{AB} = 100$ m, $L_2 = L_{B\Gamma} = 120$ m,
 $d_1 = 0,12$ m, $d_2 = 0,10$ m,
 $\Sigma K_1 = \Sigma K_2 = 3$,
 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,00026$ m (πίν. 5.4.2),
 $\nu = 10^{-6}$ m²/s (νερό),
 $\dot{V} = 60$ m³/h = 60/3600 m³/s

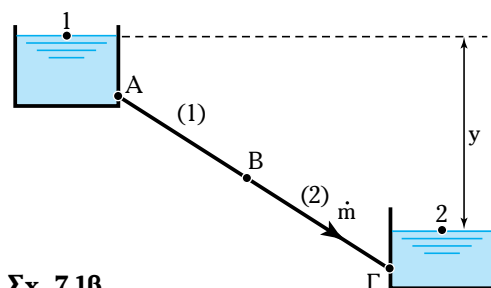
Ζητούμενα: $\Sigma h, H$

Η σύνδεση είναι σε σειρά, άρα ισχύουν οι σχέσεις (7.1) και (7.2):

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} \quad (1)$$

$$\Sigma h = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 \quad (2)$$

Εξετάζουμε αν τα δεδομένα μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε κάποιον από τους δύο σωλήνες. Παρατηρούμε πως και για τους δύο γνωρίζουμε την παροχή [εξίσωση (7.1)] και τα (L_i, d_i, ε_i). Μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε τις απώλειες του κάθε σωλήνα (παράγρ. 5.5, παράδ. 13).



Σχ. 7.1β

Υπολογισμός σωλήνα (1):

$$v_1 = \frac{4 \cdot V_1}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 1,47 \text{ m/s}$$

$$(\text{Re}_1 = \frac{v_1 \cdot d_1}{\nu} \Rightarrow \text{Re}_1 = 1,8 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d_1 = 0,00217) \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,025$$

$$\Sigma h_1 = \left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow \Sigma h_1 = 2,62 \text{ m}$$

Υπολογισμός σωλήνα (2):

$$v_2 = \frac{4 \cdot V_2}{\pi \cdot d_2^2} \Rightarrow v_2 = 2,12 \text{ m/s}$$

$$(\text{Re}_2 = \frac{v_2 \cdot d_2}{\nu} \Rightarrow \text{Re}_2 = 2,1 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d_2 = 0,00216) \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,0258$$

$$\Sigma h_2 = \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \Sigma h_2 = 7,80 \text{ m}$$

Οι ολικές απώλειες ισούνται με το άθροισμα των απωλειών:

$$\begin{aligned} \text{Από την (7.2)} \Rightarrow \Sigma h &= \Sigma h_1 + \Sigma h_2 = \\ &= (2,62 + 7,80) \text{ m} = 10,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της υψομετρικής διαφοράς των ελευθέρων επιφανειών των δύο δεξαμενών (ενεργειακό μέγεθος) εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} &= \Sigma h \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= y_1 - y_2 = \Sigma h \Rightarrow y = 10,42 \text{ m} \end{aligned}$$

με $v_1 = v_2$ και $p_1 = p_2$.

Συμπερασματικά: Το πρόβλημα υπολογισμού των ολικών απωλειών σωλήνων συνδεδεμένων σε σειρά, είναι πρόβλημα άμεσας επιλύσεως: Υπολογίζουμε χωριστά τις απώλειες σε κάθε σωλήνα και στη συνέχεια τις προσθέτουμε.

7.1.2 Υπολογισμός της παροχής.

Και στα προβλήματα αυτής της κατηγορίας, γνωρίζουμε τα μεγέθη των σωλήνων (L_i , d_i , ϵ_i), αλλά είναι άγνωστη η παροχή. Αντ' αυτής δίνεται το ολικό ύψος απωλειών Σh . Εναλλακτικά, πιθανόν να μην δίνεται άμεσα το Σh , αλλά επαρκή ενεργειακά στοιχεία για τον υπολογισμό του απ' την εξίσωση Bernoulli. Σ' αυτήν την περίπτωση, πρώτα υπολογίζουμε το Σh .

Παράδειγμα 2

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα, η υψομετρική διαφορά των δύο δεξαμενών ισούται με 15 m, να υπολογισθεί

η άγνωστη παροχή (τα άλλα δεδομένα μένουν ίδια).

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα: } L_1 &= 100 \text{ m}, & L_2 &= 120 \text{ m}, \\ d_1 &= 0,12 \text{ m}, & d_2 &= 0,10 \text{ m}, \\ \Sigma K_1 &= \Sigma K_2 = 3, & \epsilon_1 = \epsilon_2 &= 0,00026 \text{ m}, \\ \nu &= 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, & H &= 15 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ζητούμενα: \dot{V}

Έχομε σύνδεση δύο σωλήνων σε σειρά. Άρα ισχύουν:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} \quad (1)$$

$$\Sigma h = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 \quad (2)$$

Επειδή δίνεται ένα ενεργειακό μέγεθος (η υψομετρική διαφορά $y = y_1 - y_2$), εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli και υπολογίζουμε τις ολικές απώλειες:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} &= \Sigma h \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= y_1 - y_2 = \Sigma h \Rightarrow \Sigma h = 15 \text{ m} \end{aligned}$$

επειδή ισχύει: $v_1 = v_2$ και $p_1 = p_2$.

Παρατηρούμε ότι γνωρίζουμε το άθροισμα των απωλειών των δύο σωλήνων, αλλά δεν γνωρίζουμε τις απώλειες του καθενός χωριστά. Αφού δεν γνωρίζουμε και την παροχή, είναι αδύνατος ο άμεσος υπολογισμός των απωλειών του κάθε σωλήνα. Υπάρχουν δύο μέθοδοι για την αντιμετώπιση του προβλήματος:

1^η μέθοδος (Αναλυτική):

– Υποθέτουμε κάποια (τυχαία αλλά λογική) παροχή \dot{V}' και υπολογίζουμε τις απώλειες του κάθε σωλήνα, $\Sigma h'_1$ και $\Sigma h'_2$ (όπως στο παράδειγμα 1).

– Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (7.2) για να ελέγξουμε την υπόθεση.

α) Αν το άθροισμα των απωλειών που προέκυψαν από την υπόθεση, προκύπτει μεγαλύτερο από τις γνωστές απώλειες ($\Sigma h'_1 + \Sigma h'_2 > \Sigma h$), σημαίνει πως η ζητούμενη παροχή είναι μικρότερη απ' αυτήν που υποθέσαμε ($\dot{V} < \dot{V}'$).

Επαναλαμβάνουμε, υποθέτοντας μικρότερη τιμή παροχής.

β) Αν το άθροισμα των απωλειών είναι μικρότερο ($\Sigma h'_1 + \Sigma h'_2 < \Sigma h$), η παροχή είναι μεγαλύτερη απ' αυτήν που υποθέσαμε ($\dot{V} > \dot{V}'$).

Επαναλαμβάνουμε, υποθέτοντας μεγαλύτερη τιμή παροχής.

γ) Όταν $\Sigma h'_1 + \Sigma h'_2 \cong \Sigma h$, η άσκηση τελειώνει.

Σημειώνουμε ότι, όπως και στα άλλα προβλήματα υπολογισμού με τη μέθοδο της δοκιμής – ελέγχου – επαναλήψεως, η όλη διαδικασία διευκολύνεται αν συντάξουμε σχετικό πίνακα.

As εφαρμόσουμε την παραπάνω μεθοδολογία στο παράδειγμά μας:

– 1^η δοκιμή:

$$\text{Έστω } \dot{V}' = 100 \text{ m}^3/\text{h} = 100/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

Υπολογισμός σωλήνα (1):

$$v_1 = \frac{4 \cdot V_1}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow 2,46 \text{ m/s}$$

$$(\text{Re}_2 = \frac{v_1 \cdot d_1}{\nu} \Rightarrow \text{Re}_2 = 3 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d_1 = 0,00217) \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,0245$$

$$\Sigma h_1 = \left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow \Sigma h_1 = 7,2 \text{ m}$$

Υπολογισμός σωλήνα (2):

$$v_2 = \frac{4 \cdot V_2}{\pi \cdot d_2^2} \Rightarrow v_2 = 3,54 \text{ m/s}$$

$$(\text{Re}_2 = \frac{v_2 \cdot d_2}{\nu} \Rightarrow \text{Re}_2 = 3,5 \cdot 10^5,$$

$$\epsilon/d_2 = 0,0026) \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,0256$$

$$\Sigma h_2 = \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \Sigma h_2 = 21,48 \text{ m}$$

Άρα: Αν $\dot{V}' = 100 \text{ m}^3/\text{h}$, οι απώλειες θα είναι:

$$\Sigma h' = 7,2 + 21,48 = 28,67 \text{ m}$$

$$\Sigma h = 15 \text{ m (δεδομένο)} \Rightarrow \Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' > \dot{V} \Rightarrow \dot{V} < 100 \text{ m}^3/\text{h}$$

- 2^η δοκιμή:

$$\text{Έστω } \dot{V}' = 50 \text{ m}^3/\text{h} = 50/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

Επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό και βρίσκουμε:

$$\Sigma h' = 1,83 + 5,44 = 7,27 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h' < \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' < \dot{V} \Rightarrow \dot{V} > 50 \text{ m}^3/\text{h}$$

- 3^η δοκιμή:

$$\text{Έστω } \dot{V}' = 75 \text{ m}^3/\text{h} = 75/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

Υπολογίζουμε:

$$\Sigma h' = 4,07 + 12,13 = 16,21 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h' > \Sigma h \Rightarrow \dot{V}' > \dot{V} \Rightarrow \dot{V} < 75 \text{ m}^3/\text{h}$$

- 4^η δοκιμή:

$$\text{Έστω } \dot{V}' = 70 \text{ m}^3/\text{h} = 70/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Sigma h = 3,55 + 10,58 = 14,14 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h' < \Sigma h \Rightarrow \dot{V}' < \dot{V} \Rightarrow \dot{V} > 70 \text{ m}^3/\text{h}$$

- 5^η δοκιμή:

$$\text{Έστω } \dot{V}' = 72 \text{ m}^3/\text{h} = 72/3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Sigma h' = 3,76 + 11,19 = 14,95 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h' \cong \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}' \approx \dot{V} \Rightarrow \dot{V} = 72 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\text{Άρα: } \dot{V} = 72 \text{ m}^3/\text{h}$$

Σημείωση: Αν δεν μας ικανοποιεί η προσέγγιση συνεχίζουμε...

Συντάσσεται και παρατίθεται ο σχετικός συγκεντρωτικός πίνακας με τα αποτελέσματα των διαδοχικών δοκιμών (πίν. 7.1.1).

2^η μέθοδος (Υπόθεση πλήρως τυρβώδους ροής):

Εκείνο που εμποδίζει την άμεση επίλυση του προβλήματος, είναι η αδυναμία υπολογισμού των συντελεστών τριβής f_1 και f_2 : Για τον κάθε σωλήνα γνωρίζουμε τη σχετική τραχύτητα, αλλά δεν γνωρίζουμε τον αριθμό Reynolds. Όπως λοιπόν και στο αντίστοιχο πρόβλημα του απλού σωλήνα (παράγρ. 5.5, παράδ. 14), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ροή στους δύο σωλήνες είναι πλήρως τυρβώδης (υπόθεση έντονης τύρβης - ΥΕΤ) και να πάρουμε απ' το διάγραμμα Moody τιμές για τα f_1 και f_2 .

Σύμφωνα με την εξίσωση (7.3):

$$\Sigma h = \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left[\left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{1}{d_1^4} + \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{1}{d_2^4} \right] \cdot \dot{V}^2$$

Εδώ, μόνος άγνωστος είναι η παροχή \dot{V} , την οποία και υπολογίζουμε.

Στη συνέχεια ελέγχουμε την υπόθεση της πλήρως αναπτυγμένης τυρβώδους ροής (υπολογίζοντας διαδοχικά τις

Πίνακας 7.1.1

\dot{V}' m ³ /h	v_1 m/s	f_1	Σh_1 m	v_2 m/s	f_2	Σh_2 m	$\Sigma h'$ m	\dot{V} m ³ /h
100	2,46	0,0245	7,20	3,54	0,0256	21,48	28,67 > 15	Q < 100
50	1,23	0,0250	1,83	1,77	0,0259	5,44	7,27 < 15	Q > 50
75	1,84	0,0247	4,07	2,65	0,0257	12,13	16,21 > 15	Q < 75
70	1,72	0,0247	3,55	2,48	0,0257	10,58	14,14 < 15	Q > 70
72	1,77	0,0247	3,76	2,55	0,0257	11,19	14,95 ≅ 15	Q ≅ 72

ταχύτητες, τους αριθμούς Reynolds και τις ακριβείς τιμές των f_1 και f_2 από το διάγραμμα Moody). Αν τουλάχιστον ένα από τα f_1 και f_2 διαφέρει απ' αυτό που χρησιμοποιήσαμε, επαναλαμβάνουμε την επίλυση της εξίσωσης (7.3) με τις νέες τιμές.

Σημείωση: Η μέθοδος που βασίζεται στην υπόθεση της πλήρους τυρβώδους ροής είναι πολύ πιο σύντομη από την αναλυτική και θα εφαρμοσθεί σε αρκετές περιπτώσεις στη συνέχεια. Για να μην προκύπτουν πολύπλοκες σχέσεις, συστήνεται να απλοποιείται η εξίσωση απωλειών του σωλήνα, με αντικατάσταση των γνωστών μεγεθών σε μονάδες SI:

Απ' την εξίσωση (7.3) προκύπτει:

$$\Sigma h_i = \alpha_i \dot{V}^2 \quad (7.3\alpha)$$

όπου: ο συντελεστής α_i είναι αριθμός υπολογιζόμενος απ' τη σχέση:

$$\alpha_i = \frac{8}{\pi^2 g} \left(f_i \frac{L_i}{d_i} + \Sigma K_i \right) \cdot \frac{1}{d_i^4} \quad (7.3\beta)$$

(οι μονάδες του α_i είναι $m^{-5} \cdot s^2$).

Έτσι, η εξίσωση (7.3) παίρνει την απλή μορφή:

$$\Sigma h_i = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \dot{V}^2 \quad (7.3\gamma)$$

απ' την οποία προκύπτει:

$$\dot{V} = \left(\frac{\Sigma h}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{1/2} \quad (7.3\delta)$$

As επανέλθουμε στο παράδειγμά μας:

– Υποθέτουμε πλήρως τυρβώδη ροή για τους δύο σωλήνες, οπότε:

Σωλήνας (1):

$$(\epsilon/d_1 = 0,0021, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,024$$

$$(7.3\beta) \Rightarrow \alpha_1 = 9141, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h_1 = 9141 \cdot \dot{V}^2 (\text{SI})$$

Σωλήνας (2):

$$(\epsilon/d_2 = 0,0026, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,025$$

$$(7.3\beta) \Rightarrow \alpha_2 = 27410 (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h_2 = 27410 \cdot \dot{V}^2, (\text{SI})$$

$$(7.3\gamma) \Rightarrow 15 = 36551 \cdot \dot{V}^2, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V} = 0,02026 \text{ m}^3/\text{s} = 72,9 \text{ m}^3/\text{h}$$

– Έλεγχος υποθέσεων:

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 1,8 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re}_1 = 2,15 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,0247$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_2^2} \Rightarrow v_2 = 1,8 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re}_2 = 2,15 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,0257$$

Οι αποκλίσεις των f είναι της τάξεως του 3%. Η προσέγγιση δύναται να θεωρηθεί ικανοποιητική. Αν επιθυμούμε μεγαλύτερη ακρίβεια, επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό με τις νέες τιμές των f , οπότε προκύπτει:

– (Διόρθωση): $\alpha_1 = 9387 (\text{SI})$, $\alpha_2 = 27970 (\text{SI})$

$$(7.3\gamma) \Rightarrow \dot{V} = 0,02004 \text{ m}^3/\text{s} = 72,1 \text{ m}^3/\text{h}$$

Άρα, το πρόβλημα υπολογισμού της παροχής σωλήνων συνδεδεμένων σε σειρά, δεν επιλύεται άμεσα. Υπάρχουν δύο μέθοδοι επίλυσης:

– Η επαναληπτική μέθοδος: Υπόθεση παροχής (Υπόθεση – επίλυση – έλεγχος – νέα υπόθεση).

– Η μέθοδος της υποθέσεως πλήρως αναπτυγμένης τύρβης (YET – επίλυση – έλεγχος YET – πιθανή διόρθωση).

7.1.3 Υπολογισμός διαμέτρου.

Συχνά χρειάζεται να επιλέξουμε σωλήνα κατάλληλης διαμέτρου, ο οποίος θα συνδεθεί σε σειρά. Επιλέγουμε τη μικρότερη (άρα πιο οικονομική) διάμετρο που καλύπτει τις ανάγκες της σωληνώσεως. Σ' αυτήν την περίπτωση, γνωρίζουμε τα υπόλοιπα μεγέθη των σωλήνων, καθώς επίσης τις απαιτήσεις παροχής και απωλειών.

Παράδειγμα 3

Επιθυμούμε να συνδέσουμε δύο δεξαμενές νερού, υψομετρικής διαφοράς 5 m και απόστασεως 40 m, αλλά ο διαθέσιμος σωλήνας από ασφατωμένο χυτοσίδηρο, διαμέτρου 12 cm, έχει μήκος 25 m. Να υπολογισθεί (σε mm) η ελάχιστη διάμετρος σωλήνα από το ίδιο υλικό που θα συμπληρώσει τη σύνδεση, ώστε η παροχή να είναι τουλάχιστον 50 m³/h. Οι δευτερεύουσες απώλειες να θεωρηθούν αμελητέες (σx. 7.1γ).

Λύση.

$$\text{Δεδομένα: } L_1 = 25 \text{ m}, \quad d_1 = 0,12 \text{ cm},$$

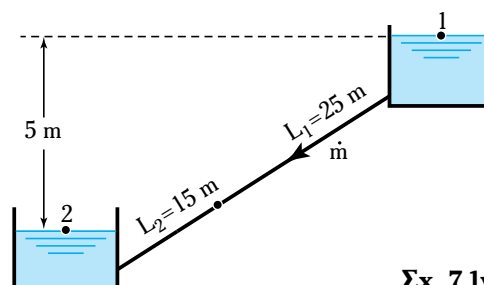
$$L_2 = 15 \text{ m}, \quad \Sigma K = 0,$$

$$\dot{V} \geq 50 \text{ m}^3/\text{h}, \quad y_1 - y_2 = 5 \text{ m}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,00012 \text{ m (πίν. 5.4.2),}$$

Ζητούμενο: d_2

Καταρχήν, επειδή έχουμε ένα ενεργειακό δεδομένο (την υψομετρική διαφορά $y_1 - y_2$), εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli:



Σx. 7.1γ

$$y_1 - y_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_1 - y_2 = \Sigma h \Rightarrow 5 \text{ m}$$

επειδή $v_1 = v_2$ και $p_1 = p_2$.

Οι απώλειες συνδέονται με την παροχή, με την εξίσωση (7.3):

$$\Sigma h = \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left[\left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{1}{d_1^4} + \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{1}{d_2^4} \right] \cdot V^2$$

Στην εξίσωση αυτή, άγνωστοι είναι η διάμετρος d_2 (που είναι το ζητούμενο) και οι συντελεστές τριβής f_1 και f_2 . Όσον αφορά στην παροχή, γνωρίζουμε την ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή της.

Παρατηρούμε πως δεν έχουμε επαρκή δεδομένα για να υπολογίσουμε από το διάγραμμα Moody τα f_1 και f_2 . Για το f_2 δεν μας βοηθά ούτε η υπόθεση της πλήρως αναπτυγμένης τύρβης, αφού δεν γνωρίζουμε τη σχετική τραχύτητα ϵ_2/d_2 . Επομένως, ο μόνος δρόμος, είναι να υποθέσουμε κάποια τιμή d_2 για τη διάμετρο, να υπολογίσουμε την παροχή \dot{V}' που προκύπτει (όπως στο παράδειγμα 2) και να τη συγκρίνουμε με τη δοσμένη ελάχιστη παροχή \dot{V}'_{\min} :

- Αν $\dot{V}' < \dot{V}'_{\min} \Rightarrow d_2 > d'_2$ (η d_2 απορρίπτεται).
- Αν $\dot{V}' > \dot{V}'_{\min} \Rightarrow d_2 \leq d'_2$ (η d_2 δεν απορρίπτεται, αλλά μπορεί να υπάρχει και μικρότερη διάμετρος που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του συστήματος).

Η ελάχιστη διάμετρος είναι εκείνη για την οποία $\dot{V}' \cong \dot{V}'_{\min}$.

Σε κάθε υπόθεση, εφαρμόζουμε το πρόβλημα υπολογισμού της παροχής. Προτείνεται να ακολουθήσουμε το δεύτερο τρόπο που βασίζεται στην υπόθεση της έντονης τύρβης (YET). Επειδή οι περισσότερες δοκιμές δεν θα δώσουν το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα, δεν απαιτούν ακρίβεια, επομένως είναι περιττός ο έλεγχος της YET. Αυτός

είναι αναγκαίος μόνο για τη δοκιμή που θα μας δώσει το ορθό αποτέλεσμα.

Επανερχόμενοι στο παράδειγμα:

- **1^η δοκιμή:**

Έστω $d'_2 = 100 \text{ mm} = 0,100 \text{ m}$

Υποθέτοντας έντονα τυρβώδη ροή, υπολογίζουμε τους συντελεστές τριβής και την παροχή:

Σωλήνας (1):

($\epsilon/d_1 = 0,001$, YET) $\xrightarrow{\text{Moody}}$ $f_1 = 0,0196$

(7.3β) $\Rightarrow a_1 = 1630$, (SI) $\Rightarrow \Sigma h_1 = 1630 \cdot \dot{V}'^2$ (SI)

Σημειώνουμε ότι οι διαδοχικές δοκιμές που θα ακολουθήσουν, δεν επηρεάζουν το σωλήνα (1), επομένως δε χρειάζεται επανάληψη του παραπάνω υπολογισμού.

Σωλήνας (2):

($\epsilon/d_2 = 0,0012$, YET) $\xrightarrow{\text{Moody}}$ $f_2 = 0,0205$

(7.3β) $\Rightarrow a_2 = 2545$, (SI) $\Rightarrow \Sigma h_2 = 2545 \cdot (\dot{V}')^2$ (SI)

Υπολογισμός παροχής:

$$\dot{V}' = \left(\frac{\Sigma h}{a_1 + a_2} \right)^{1/2} \quad (7.3\delta)$$

(7.3δ) $\Rightarrow \dot{V}' = 0,0346 \text{ m}^3/\text{s} = 124,5 \text{ m}^3/\text{h}$

$\dot{V}' > \dot{V}'_{\min} \Rightarrow d_2 \leq d'_2 = 100 \text{ mm}$, $\dot{V}'_{\min} = 50 \text{ m}^3/\text{h}$

- **2^η δοκιμή:**

Έστω $d'_2 = 50 \text{ mm} = 0,050 \text{ m}$

Σωλήνας (2):

($\epsilon/d_2 = 0,0024$, YET) $\xrightarrow{\text{Moody}}$ $f_2 = 0,0245$

(7.3β) $\Rightarrow a_2 = 97560$, (SI) $\Rightarrow \Sigma h_2 = 97560 \cdot (\dot{V}')^2$ (SI)

Υπολογισμός παροχής:

(7.3δ) $\Rightarrow \dot{V}' = 0,0071 \text{ m}^3/\text{s} = 25,5 \text{ m}^3/\text{h}$

$\dot{V}' < \dot{V}'_{\min} \Rightarrow d_2 > d'_2 = 50 \text{ mm}$

Συντάσσουμε πίνακα δοκιμών (πίν. 7.1.2) και συνεχίζουμε:

Από τις δύο τελευταίες δοκιμές, συμπεραίνουμε ότι η

Πίνακας 7.1.2

d'_2 mm	ϵ/d_2	f_2	a_2	a_1+a_2	\dot{V}' m^3/s	\dot{V}' m^3/h	Σύγκριση	d_2
100	0,0012	0,0205	2545	4175	0,0346	124,6	$\dot{V}' > \dot{V}'_{\min}$	$d_2 \leq 100$
50	0,0024	0,0246	97559	99189	0,0071	25,6	$\dot{V}' > \dot{V}'_{\min}$	$d_2 > 50$
70	0,0017	0,0225	16584	18214	0,0166	59,6	$\dot{V}' > \dot{V}'_{\min}$	$d_2 \leq 70$
60	0,0020	0,0234	37330	38960	0,0113	40,8	$\dot{V}' > \dot{V}'_{\min}$	$d_2 > 60$
65	0,0018	0,0229	24493	26123	0,0138	49,8	$\dot{V}' > \dot{V}'_{\min}$	$d_2 > 65$
66	0,0018	0,0228	22602	24232	0,0144	51,7	$\dot{V}' > \dot{V}'_{\min}$	$d_2 \leq 66$

Ζητούμενη ελάχιστη διάμετρος, βρίσκεται ανάμεσα στα 65 και 66 mm:

$$65 \text{ mm} < d_2 \leq 66 \text{ mm}$$

Πριν καταλήξουμε όμως στην τελική επιλογή των 66 mm, ελέγχουμε την υπόθεση της αναπτυγμένης τύρβης (μόνο για την ελάχιστη αποδεκτή διάμετρο του πίνακα) και διορθώνουμε (εφόσον χρειαστεί):

Έλεγχος YET:

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 1,25 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re}_1 = 1,5 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,0213 \neq 0,0196$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_2^2} \Rightarrow v_2 = 4,12 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re}_2 = 2,7 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,0235 \neq 0,0228$$

Διόρθωση: με $d_2 = 66 \text{ mm}$

$$\alpha_1 = 1767 \text{ (SI)}, \alpha_2 = 23263 \text{ (SI)}$$

$$(7.36) \Rightarrow \dot{V}' = 0,0141 \text{ m}^3/\text{s} = 50,9 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$(> \dot{V}_{\min} = 50 \text{ m}^3/\text{h})$$

$$\text{Άρα: } d_2 = 66 \text{ mm (και } \dot{V} = 50,9 \text{ m}^3/\text{h})$$

Ανακεφαλαιώνοντας, το πρόβλημα υπολογισμού διαμέτρου επιλύεται με την **επαναληπτική μέθοδο** των δοκιμών.

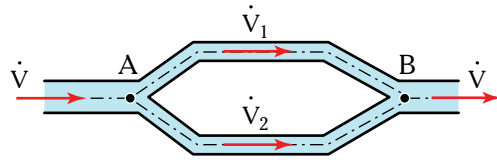
Συνήθως, το ύψος απωλειών είναι συγκεκριμένο και υπάρχει απαίτηση ελάχιστης παροχής. Υποθέτοντας μία τιμή για την άγνωστη διάμετρο, υπολογίζουμε την (υποθετική) παροχή των σωλήνων (πρόβλημα υπολογισμού παροχής). Με **κριτήριο** την **ελάχιστη παροχή** του προβλήματος, διορθώνουμε την υπόθεση για την τιμή της διαμέτρου και επαναλαμβάνουμε.

Αν σε πρόβλημα υπολογισμού διαμέτρου, δίνεται ορισμένη παροχή και μέγιστο ύψος απωλειών, τότε υποθέτουμε κάποια τιμή για την άγνωστη διάμετρο, υπολογίζουμε τις απώλειες (πρόβλημα υπολογισμού απωλειών) και τις συγκρίνουμε με το δοσμένο μέγιστο ύψος απωλειών (**κριτήριο** το **μέγιστο ύψος απωλειών**).

7.2 Παράλληλη σύνδεση σωλήνων.

Αρκετά συχνά σε κάποιο σημείο ενός σωλήνα, η ροή διακλαδίζεται σε δύο επιμέρους ροές (κλάδους) και σε ένα επόμενο σημείο, οι κλάδοι συγκλίνουν σε ενιαία ροή (by pass). Σ' αυτήν την περίπτωση μιλάμε για παράλληλη σύνδεση δύο (ομοίων ή διαφορετικών) σωλήνων.

Οι σωλήνες (1) και (2) του σχήματος 7.2α, είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Η ενιαία ροή, παροχής \dot{V} , διακλαδίζεται στο σημείο Α σε δύο επιμέρους ροές



Σχ. 7.2α

Παράλληλη σύνδεση.

με παροχές \dot{V}_1 και \dot{V}_2 . Το σημείο Α ονομάζεται σημείο **διακλαδώσεως** ή **κόμβος**.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση συνέχειας στον κόμβο Α προκύπτει:

$$\dot{V} = \text{σταθ.} \Rightarrow \sum \dot{V}_{\text{εισ}} = \sum \dot{V}_{\text{εξ}}$$

$$\text{ή } \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (7.4)$$

Στο σημείο Β, οι δύο επιμέρους ροές ενώνονται. Το σημείο Β είναι επίσης κόμβος και η εξίσωση της συνέχειας θα δώσει:

$$\dot{V} = \text{σταθ.} \Rightarrow \sum \dot{V}_{\text{εισ}} = \sum \dot{V}_{\text{εξ}} \quad \text{ή} \quad \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}$$

σχέση δηλαδή ταυτόσημη με την (7.4).

Αντικαθιστώντας τις παροχές σε συνάρτηση με τις ταχύτητες και τις διαμέτρους (εξίσωση συνέχειας), η εξίσωση (7.4) γίνεται:

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 + \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 \cdot v = d_1^2 \cdot v_1 + d_2^2 \cdot v_2 \quad (7.4a)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli στο σωλήνα (1), μεταξύ των σημείων Α και Β, λαμβάνουμε:

$$y_A - y_B + \frac{p_A - p_B}{\gamma} + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2} = \Sigma h_1 \quad (7.5a)$$

Αντίστοιχα για τον σωλήνα (2):

$$y_A - y_B + \frac{p_A - p_B}{\gamma} + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2} = \Sigma h_2 \quad (7.5b)$$

Οι σχέσεις αυτές έχουν ίσα τα πρώτα μέλη, οπότε προκύπτει:

$$\Sigma h = \Sigma h_1 = \Sigma h_2 \quad (7.5)$$

Δηλαδή οι ενεργειακές απώλειες ανά μονάδα βάρους διακινούμενου ρευστού είναι ίδιες στους δύο παράλληλα συνδεδεμένους σωλήνες.

Αντικαθιστώντας απ' την εξίσωση των απωλειών προκύπτει:

$$\left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{\dot{V}_1^2}{d_1^4} = \left(f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2 \right) \cdot \frac{\dot{V}_2^2}{d_2^4} \quad (7.5\gamma)$$

Αν οι τοπικές απώλειες είναι αμελητέες:

$$f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1^5} \cdot \dot{V}_1^2 = f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2^5} \cdot \dot{V}_2^2 \quad (7.5\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τους συντελεστές α_i :

$$\alpha_1 \cdot \dot{V}_1^2 = \alpha_2 \cdot \dot{V}_2^2 \quad (7.5\epsilon)$$

Οι εξισώσεις (7.4) και (7.5) γενικεύονται στην περίπτωση που μεταξύ των δύο σημείων (κόμβων) Α και Β έχουμε περισσότερους από δύο σωλήνες σε παράλληλη σύνδεση:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dots + \dot{V}_v \quad (7.4)$$

$$\Sigma h = h_1 = h_2 = \dots = h_v \quad (7.5)$$

Κατά την παράλληλη σύνδεση δύο ή περισσότερων σωλήνων:

1) Η ολική παροχή ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παροχών.

2) Οι απώλειες ενέργειας ανά μονάδα βάρους είναι ίδιες για όλους τους σωλήνες.

Και στην παράλληλη σύνδεση συναντάμε τα τρία προβλήματα: Υπολογισμός απωλειών, παροχών, διαμέτρου. Όπως θα δούμε με τα παραδείγματα που ακολουθούν, άμεση επίλυση είναι δυνατή μόνο όταν είναι δεδομένο το ύψος απωλειών (που είναι κοινό για τους παράλληλα συνδεδεμένους σωλήνες) και ζητείται να υπολογισθεί η παροχή.

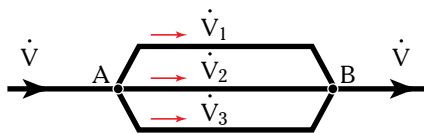
7.2.1 Υπολογισμός του ύψους απωλειών.

Στην περίπτωση αυτή, είναι γνωστά τα μεγέθη των παράλληλα συνδεδεμένων σωλήνων και η ολική παροχή. Επειδή όμως δεν γνωρίζουμε την παροχή κάθε σωλήνα χωριστά, το πρόβλημα περιπλέκεται.

Παράδειγμα 4

Οι τρεις σωλήνες του σχήματος 7.2β είναι από χυτοσίδηρο, με διαμέτρους 3 cm, 4 cm και 5 cm και μήκη 60 m, 40 m, 60 m αντίστοιχα.

Αν η ολική ροή νερού είναι 15 L/s, να υπολογισθεί το ύψος απωλειών από το Α στο Β και η παροχή σε κάθε σωλήνα. Δίνονται: $\Sigma K_1 = 3$, $\Sigma K_2 = 1$, $\Sigma K_3 = 3$.



Σχ. 7.2β

Λύση.

Δεδομένα: $d_1 = 0,03 \text{ m}$, $d_2 = 0,04 \text{ m}$,
 $d_3 = 0,05 \text{ m}$, $L_1 = 60 \text{ m}$,
 $L_2 = 40 \text{ m}$, $L_3 = 60 \text{ m}$,
 $\Sigma K_1 = 3$, $\Sigma K_2 = 1$,
 $\Sigma K_3 = 3$, $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$,
 $\epsilon = 0,00026 \text{ m}$ (πίν. 5.4.2),
 $\dot{V} = 20 \text{ l/s} = 0,015 \text{ m}^3/\text{s}$

Ζητούμενα: Σh , \dot{V}_1 , \dot{V}_2 , \dot{V}_3

Η σύνδεση είναι παράλληλη, επομένως ισχύουν οι εξισώσεις (7.4) και (7.5):

$$(7.4) \Rightarrow \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (1)$$

$$(7.5) \Rightarrow \Sigma h = \Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3 \quad (2)$$

Παρατηρούμε πως δεν έχουμε επαρκή δεδομένα για να υπολογίσουμε κάποιον από τους τρεις σωλήνες, αφού για καθένα είναι άγνωστη η παροχή και οι απώλειες ύψους. Δεν υπάρχει επομένως άμεση επίλυση. Υπάρχουν δύο μέθοδοι επίλυσης:

1^η μέθοδος (Αναλυτική):

Υποθέτουμε κάποιο ύψος απωλειών $\Sigma h'$. Αυτό, σύμφωνα με την εξίσωση (2), είναι κοινό και για τους τρεις σωλήνες. Για κάθε σωλήνα υπολογίζουμε την (υποθετική) παροχή \dot{V}_i (εφαρμογή του δεύτερου προβλήματος του σωλήνα).

Χρησιμοποιούμε για έλεγχο τη σχέση (1):

Αν $\dot{V}' > \dot{V} \Rightarrow \Sigma h' > \Sigma h$. Επαναλαμβάνουμε με μικρότερο $\Sigma h'$.

Αν $\dot{V}' < \dot{V} \Rightarrow \Sigma h' < \Sigma h$. Επαναλαμβάνουμε με μεγαλύτερο $\Sigma h'$.

Αν $\dot{V}' \approx \dot{V} \Rightarrow \Sigma h' \approx \Sigma h$ και το πρόβλημα τελειώνει.

Επειδή, μετά τα παραδείγματα που προηγήθηκαν, η μέθοδος είναι σαφής (αλλά και χρονοβόρα), συστήνουμε να εξασκηθούν οι σπουδαστές, επιλύοντας το παράδειγμα μ' αυτήν τη διαδικασία. Εδώ, θα προχωρήσουμε στην επίλυση με τη δεύτερη μέθοδο (υπόθεση αναπτυγμένης τυρβής).

2^η μέθοδος (YET):

Γνωρίζουμε τη σχετική ταχύτητα των παράλληλα συνδεδεμένων σωλήνων, επομένως, υποθέτοντας πλήρως αναπτυγμένη τυρβώδη ροή, υπολογίζουμε τους συντελεστές τριβής [απ' το διάγραμμα Moody (σχ. 5.4n)]. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τα α_i :

Σωλήνας (1):

$$(\epsilon/d_1 = 0,0087, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,036$$

$$\alpha_1 = 7677922 \text{ (SI)} \quad (7.3\beta)$$

$$\text{και } \Sigma h_1 = \Sigma h = 7677922 \cdot \dot{V}_1^2 \text{ (SI)} \quad (7.3\gamma)$$

Σωλήνας (2):

$$(\epsilon/d_2 = 0,0065, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,033$$

$$\alpha_2 = 1097388 \text{ (SI)} \quad (7.3\beta)$$

$$\text{και } \Sigma h_2 = \Sigma h = 1097388 \cdot \dot{V}_2^2, \text{ (SI)} \quad (7.3\gamma)$$

Σωλήνας (3):

$$(\epsilon/d_3 = 0,0052, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_3 = 0,0307$$

$$a_3 = 527193, \text{ (SI)} \quad (7.3\beta)$$

$$\text{και } \Sigma h_3 = \Sigma h = 527193 \cdot \dot{V}_3^2, \text{ (SI)} \quad (7.3\gamma)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τα \dot{V}_1 , \dot{V}_2 και \dot{V}_3 συναρτήσει του (ζητούμενου) Σh :

$$\dot{V}_1 = \sqrt{\Sigma h} \cdot \sqrt{1/a_1} \Rightarrow \dot{V}_1 = 0,000361 \cdot \sqrt{\Sigma h}, \text{ (SI)} \quad (3)$$

$$\dot{V}_2 = \sqrt{\Sigma h} \cdot \sqrt{1/a_2} \Rightarrow \dot{V}_2 = 0,000955 \cdot \sqrt{\Sigma h}, \text{ (SI)} \quad (4)$$

$$\dot{V}_3 = \sqrt{\Sigma h} \cdot \sqrt{1/a_3} \Rightarrow \dot{V}_3 = 0,001377 \cdot \sqrt{\Sigma h}, \text{ (SI)} \quad (5)$$

όπου αντικαταστήσαμε τα a_1 , a_2 , a_3 με τις τιμές τους. Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \Rightarrow \dot{V} = 0,000361 \cdot \sqrt{\Sigma h} + 0,000955 \cdot \sqrt{\Sigma h} + 0,001377 \cdot \sqrt{\Sigma h}, \text{ (SI)}$$

$$\text{ή } \dot{V} = 0,002693 \cdot \sqrt{\Sigma h} \Rightarrow \Sigma h = 31 \text{ m}$$

Από τις σχέσεις (3), (4), (5), υπολογίζουμε τις παροχές σε κάθε σωλήνα:

$$(3) \Rightarrow \dot{V}_1 = 0,00201 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$(4) \Rightarrow \dot{V}_2 = 0,00532 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$(5) \Rightarrow \dot{V}_3 = 0,00767 \text{ m}^3/\text{s}$$

Έλεγχος της YET: Πριν αποδεχθούμε τα αποτελέσματά, πρέπει να ελέγξουμε τις υποθέσεις της έντονης (αναπτυγμένης) τύρβης. Αν ένα τουλάχιστον απ' τα f έχει τιμή διαφορετική απ' αυτήν που χρησιμοποιήσαμε, επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό με τις νέες τιμές.

$$\text{Σωλήνας 1: } v_1 = 2,84 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re}_1 = 8,5 \cdot 10^4 \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,0369$$

$$\text{Σωλήνας 2: } v_2 = 4,23 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re}_2 = 1,7 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,0335$$

$$\text{Σωλήνας 3: } v_3 = 2,84 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re}_3 = 8,5 \cdot 10^4 \xrightarrow{\text{Moody}} f_3 = 0,0312$$

Παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις των f_i είναι μικρότερες από 2%, άρα θεωρούνται ικανοποιητικές και δεν χρειάζεται διόρθωση. Άρα:

$$\Sigma h = 31 \text{ m}$$

$$\dot{V}_1 = 0,00201 \text{ m}^3/\text{s} = 2,01 \text{ l/s}$$

$$\dot{V}_2 = 0,00532 \text{ m}^3/\text{s} = 5,32 \text{ l/s}$$

$$\dot{V}_3 = 0,00767 \text{ m}^3/\text{s} = 7,67 \text{ l/s}$$

Σημείωση: Η διόρθωση θα έδινε: $\Sigma h = 31,5 \text{ m}$, $\dot{V}_1 = 1,99 \text{ l/s}$, $\dot{V}_2 = 5,28 \text{ l/s}$, $\dot{V}_3 = 7,61 \text{ l/s}$

7.2.2 Υπολογισμός των παροχών.

Γνωρίζουμε τα μεγέθη των σωλήνων και τις απώλειες ύψους μεταξύ των δύο κόμβων της παράλληλης συνδέσεως. Αυτές όμως είναι και οι απώλειες κάθε σωλήνα, επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε την παροχή κάθε σωλήνα χωριστά. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις επιμέρους παροχές.

Παράδειγμα 5

Οι σωλήνες (1), (2) και (3) του σχήματος 7.2γ έχουν διαμέτρους 8, 6 και 4 cm, μήκη 100, 150 και 80 m και τραχύτητα 0,24, 0,12 και 0,20 mm. Αν η πίεση στο σημείο Α είναι 150 kPa μεγαλύτερη από την πίεση του σημείου Β και το Α βρίσκεται 5 m υψηλότερα από το Β, να υπολογισθούν οι παροχές νερού στους σωλήνες (σε m^3/h). Οι δευτερεύουσες απώλειες να θεωρηθούν αμελητέες.

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα: } & d_1 = 0,08 \text{ m}, & d_2 = 0,06 \text{ m}, \\ & d_3 = 0,04 \text{ m}, & L_1 = 100 \text{ m}, \\ & L_2 = 150 \text{ m}, & L_3 = 80 \text{ m}, \\ & \epsilon_1 = 0,00024 \text{ m}, & \epsilon_2 = 0,00012 \text{ m}, \\ & \epsilon_3 = 0,00020 \text{ m}, & \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \\ & \gamma = 9,81 \text{ kN/m}^3, & p_A - p_B = 150 \text{ kPa}, \\ & y_A - y_B = 5 \text{ m} \end{aligned}$$

Ζητούμενα: $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$

Η σύνδεση είναι παράλληλη, επομένως ισχύουν οι εξισώσεις (7.4) και (7.5):

$$(7.4) \Rightarrow \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (1)$$

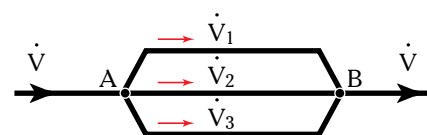
$$(7.5) \Rightarrow \Sigma h = \Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3 \quad (2)$$

Αξιοποιούμε τα ενεργειακά δεδομένα και, εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli, υπολογίζουμε το ύψος απωλειών απ' το Α ως το Β:

$$A - B: y_A - y_B + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2} + \frac{p_A - p_B}{\gamma} = \Sigma h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A - y_B + \frac{p_A - p_B}{\gamma} = \Sigma h \Rightarrow \Sigma h = 20,3 \text{ m}$$

θεωρούμε ότι: $v_A = v_B$



Σχ. 7.2γ

Αφού το ύψος απωλειών είναι κοινό (σχέση 2), έχουμε επαρκή δεδομένα για να υπολογίσουμε την παροχή κάθε σωλήνα (δεύτερο πρόβλημα του σωλήνα).

Σωλήνας (1):

$$(\epsilon/d_1 = 0,003, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,0265)$$

$$\alpha_1 = 65977, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h_1 = \Sigma h = 65977 \cdot \dot{V}_1^2, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}_1 = 0,0174 \text{ m}^3/\text{s} = 62,8 \text{ m}^3/\text{h}$$

Έλεγχος YET: $v_1 = 3,5 \text{ m/s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Re}_1 = 2,8 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}}$$

$$f_1 = 0,0267 \approx 0,0265$$

Σωλήνας (2):

$$(\epsilon/d_2 = 0,002, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,0237)$$

$$\alpha_2 = 378077, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h_2 = \Sigma h = 378077 \cdot \dot{V}_2^2, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}_2 = 0,00733 \text{ m}^3/\text{s} = 26,4 \text{ m}^3/\text{h}$$

Έλεγχος YET: $v_2 = 2,59 \text{ m/s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Re}_2 = 1,6 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,0245$$

$$\text{Διόρθωση: } \dot{V}_2 = 0,00721 \text{ m}^3/\text{s} = 26,0 \text{ m}^3/\text{h}$$

Σωλήνας (3):

$$(\epsilon/d_3 = 0,005, \text{ YET}) \xrightarrow{\text{Moody}} f_3 = 0,0307)$$

$$\alpha_3 = 1966744, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h_3 = \Sigma h = 1966744 \cdot \dot{V}_3^2, (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}_3 = 0,00321 \text{ m}^3/\text{s} = 11,6 \text{ m}^3/\text{h}$$

Έλεγχος YET: $v_3 = 2,56 \text{ m/s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Re}_2 = 1 \cdot 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0,0313$$

$$\text{Διόρθωση: } \dot{V}_3 = 0,00317 \text{ m}^3/\text{s} = 1,4 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\text{Άρα: } \dot{V}_1 = 62,8 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\dot{V}_2 = 26,0 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\dot{V}_3 = 11,4 \text{ m}^3/\text{h}$$

7.2.3 Υπολογισμός διαμέτρου.

Το πρόβλημα επιλογής διαμέτρου ενός σωλήνα, ο οποίος θα συνδεθεί παράλληλα, όπως και όλα τα προβλήματα υπολογισμού διαμέτρου που συναντήσαμε, απαιτεί την επαναληπτική διαδικασία των δοκιμών εδώ γνωρίζουμε τα υπόλοιπα μεγέθη των σωλήνων της παράλληλης συνδέσεως, καθώς επίσης τις απαιτήσεις παροχής και απωλειών.

Παράδειγμα 6

Σε ευθύ σωλήνα από εμπορικό χάλυβα διαμέτρου 10 cm ρέει νερό. Μεταξύ των σημείων A και B τα οποία απέχουν μεταξύ τους 8 m, επιθυμούμε να συνδέσουμε παράλληλα σωλήνα μήκους 10 m από το ίδιο υλικό, στον οποίο η παροχή να είναι 15 m³/h (σχ. 7.28). Να υπολογισθεί η διάμετρος του σωλήνα (σε mm), αν η παροχή στον κύριο σωλήνα δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 60 m³/h. Δίνονται: $\Sigma K_1 = 0, \Sigma K_2 = 5$

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένα: } d_1 &= 0,10 \text{ m}, & L_1 &= 8 \text{ m}, \\ L_2 &= 10 \text{ m}, & \Sigma K_1 &= 0, \\ \Sigma K_2 &= 5, & v &= 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \\ \dot{V}_1 &\leq 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}, \\ \dot{V}_2 &= 15/3600 \text{ m}^3/\text{s} \\ \epsilon_1 = \epsilon_2 &= 0,000046 \text{ m (πίν. 5.4.2)}, \end{aligned}$$

Ζητούμενο: d_2

Όταν δίνεται μέγιστη παροχή σε ένα σωλήνα, έμμεσα δίνεται το μέγιστο ύψος των επιτρεπομένων απωλειών (αφού οι απώλειες σε ένα σωλήνα είναι ανάλογες του τετραγώνου της παροχής):

$$\Sigma h_{1,\max} = \alpha_1 \cdot \dot{V}_{1,\max}^2 \quad (1)$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέγιστες επιτρεπόμενες απώλειες στο σωλήνα (1) από το A ως το B:

– Υπολογισμός απωλειών σωλήνα (1) για

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_{1,\max} = 60/3600 \text{ m}^3/\text{s}:$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}_1}{\pi \cdot d_1^2} \Rightarrow v_1 = 2,12 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{v_1 \cdot d_1}{\nu} \Rightarrow \text{Re}_1 = 2,1 \cdot 10^5$$

$$(\text{Re}_1 = 2,1 \cdot 10^5,$$

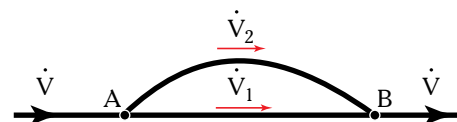
$$\epsilon/d_1 = 0,00046) \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0,018)$$

$$\Sigma h_1 = \left(f_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1 \right) \cdot \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h = 0,337 \text{ m}$$

Άρα οι μέγιστες επιτρεπόμενες απώλειες είναι: $\Sigma h_{\max} = 0,337 \text{ m}$.

Το πρόβλημα έτσι, ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού διαμέτρου ενός σωλήνα, όταν γνωρίζουμε το μέγιστο ύψος επιτρεπομένων απωλειών. Όπως είδαμε στην παράγραφο



Σχ. 7.28

Πίνακας 7.2

d'_2 mm	e/d'_2	v'_2 m/s	Re'_2	f'_2	$\Sigma h'_2$ m	Σύγκριση με Σh_{\max}	d_2 mm
100	0,00046	0,53	$5,3 \cdot 10^4$	0,0219	0,103	$< 0,337$	$d_2 \leq 100$
50	0,00092	2,12	$1,1 \cdot 10^5$	0,0216	2,138	$> 0,337$	$d_2 > 50$
70	0,000657	1,08	$7,6 \cdot 10^5$	0,0214	0,481	$> 0,337$	$d_2 > 70$
80	0,000575	0,83	$6,6 \cdot 10^5$	0,0215	0,269	$< 0,337$	$d_2 \leq 80$
75	0,000613	0,94	$7,1 \cdot 10^5$	0,0215	0,356	$> 0,337$	$d_2 > 75$
77	0,000597	0,89	$6,9 \cdot 10^5$	0,0215	0,318	$< 0,337$	$d_2 \leq 77$
76	0,000605	0,92	$7,0 \cdot 10^5$	0,0215	0,336	$< 0,337$	$d_2 \leq 76$

5.5 (παράδ. 15), επιλύεται με δοκιμές:

– **1^η δοκιμή:** Έστω $d'_2 = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$.

$$v'_2 = \frac{4 \cdot V_2}{\pi \cdot d'^2_2} \Rightarrow v'_2 = 0,53 \text{ m/s}$$

$$Re_1 = \frac{v'_2 \cdot d'_2}{\nu} \Rightarrow Re'_2 = 5,3 \cdot 10^4$$

$$(Re'_2 = 5,3 \cdot 10^4, \varepsilon/d'_2 = 0,00046) \xrightarrow{\text{Moody}}$$

$$f'_2 = 0,022$$

$$\Sigma h'_2 = \left(f'_2 \cdot \frac{L_2}{d'_2} + \Sigma K'_2 \right) \cdot \frac{v'^2_2}{2g} \Rightarrow \Sigma h'_2 = 0,130 \text{ m}$$

$$\Sigma K'_2 = \Sigma K_2 = 5$$

$$\Sigma h'_2 < \Sigma h_{\max} \Rightarrow d'_2 \geq d_2 \Rightarrow d_2 \leq 100 \text{ mm}$$

– **2^η δοκιμή:** Επιλέγουμε διάμετρο μικρότερη των 100 mm και επαναλαμβάνουμε με διαδοχικές δοκιμές συντάσσοντας τον σχετικό πίνακα που ακολουθεί (πίν. 7.2).

Έστω $d'_2 = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m} \Rightarrow \Sigma h'_2 = 2,138 \text{ m} > \Sigma h_{\max} \Rightarrow d_2 > 50 \text{ mm}$

Άρα, η ελάχιστη διάμετρος που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος, είναι: $d_2 = 76 \text{ mm}$.

Οι σχέσεις προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη τα όσα ισχύουν για τη σύνδεση σε σειρά και την παράλληλη σύνδεση. Έτσι, όσον αφορά την παροχή της συνδεομολογίας του σχήματος 7.3 και λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad \text{και} \quad \dot{V}_3 = \dot{V}_4 + \dot{V}_5$$

προκύπτει:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = \\ &= \dot{V}_2 + (\dot{V}_4 + \dot{V}_5) = \dot{V}_6 = \dot{V}_7 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Αντίστοιχα για τις απώλειες, λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\Sigma h_4 = \Sigma h_5 \quad \text{και} \quad \Sigma h_2 = \Sigma h_3 + \Sigma h_4$$

προκύπτει: $\Sigma h = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_6 + \Sigma h_7$ (7.7)

Πολύ χρήσιμες είναι οι σχέσεις που συνδέουν τις απώλειες με τις παροχές. Ενδεικνύται, στη μεικτή σύνδεση, να χρησιμοποιούμε την εξίσωση των απωλειών (Darcy–Weisbach) στις ισοδύναμες μορφές:

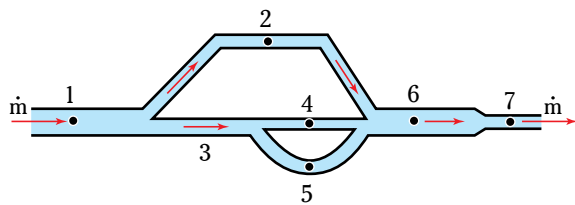
$$h_i = \alpha_i \cdot \dot{V}_i^2 \Leftrightarrow \dot{V}_i = \alpha_i^{-0,5} \cdot h^{0,5} \quad (7.8)$$

Έτσι, για παράδειγμα για τους σωλήνες 3, 4 και 5 του σχήματος, θα ισχύει:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_4 + \dot{V}_5 \Rightarrow \dot{V}_3 = (\alpha_4^{-0,5} + \alpha_5^{-0,5}) \cdot h_4^{0,5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα α_i μπορούμε να τα υπολογίσουμε (κατά προσέγγιση), αν κάνουμε υπόθεση αναπτυγμένης τύρβης, παρατηρούμε πως οι τρεις άγνωστοι της πρώτης σχέσεως ($\dot{V}_3, \dot{V}_4, \dot{V}_5$), μειώθηκαν σε δύο (\dot{V}_3, h_4) στη δεύτερη.

Η **μεθοδολογία** υπολογισμού βασίζεται στη μεθοδολογία, που είδαμε στα παραδείγματα των συνδέσεων σε σειρά και παράλληλα. Γενικά, ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος, ξεκινάμε είτε απ'



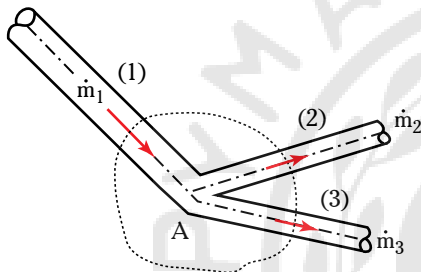
Σχ. 7.3
Μεικτή σύνδεση.

τις ενσωματωμένες συνδέσεις και προχωράμε σταδιακά σε όλη τη σωλήνωση, είτε απ' τη συνολική σωλήνωση και προχωράμε προς τα εσώτερα.

7.4 Διακλάδωση σωλήνων.

Μελετώντας την παράλληλη σύνδεση, συναντήσαμε τη διακλάδωση της ροής σε δύο ή περισσότερες επιμέρους ροές. Η διακλάδωση (ή κόμβος) είναι πολύ συνηθισμένη στις σωληνώσεις. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπάρχουν ειδικά εξαρτήματα προς τούτο (ταυ, σταυρός), αλλά η διακλάδωση μπορεί να διαμορφωθεί και με άλλους τρόπους (π.χ. κολλήσεις).

Στην παράγραφο αυτή θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη διακλάδωση τριών σωλήνων (σχ. 7.4).



Σχ. 7.4
Διακλάδωση σωλήνων.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας στον όγκο ελέγχου που περικλείει τον κόμβο A λαμβάνουμε:

$$\sum \dot{V}_{\text{εισ}} = \sum \dot{V}_{\text{εξ}} \quad (7.9\alpha)$$

Αν γνωρίζουμε την κατεύθυνση ροής στους τρεις σωλήνες, η εξίσωση (7.9α) λαμβάνει συγκεκριμένη μορφή. Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα, η \dot{V}_1 εισέρχεται στον όγκο ελέγχου (κόμβο A), αφού οι \dot{V}_2 και \dot{V}_3 εξέρχονται. Η εξίσωση (7.9α) γίνεται:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (7.9\beta)$$

Αν όμως η κατεύθυνση ροής του σωλήνα (2) είναι αντίθετη από αυτή του σχήματος, τότε η εξίσωση (7.9α) θα γίνει:

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}_3 \quad (7.9\gamma)$$

Σε πολλές περιπτώσεις, δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση ροής σε κάποιο σωλήνα της διακλαδω-

σεως. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπισθεί με την ακόλουθη **σύμβαση προσημάνσεως των παροχών**:

1) Όταν το ρευστό εισέρχεται στον κόμβο, η παροχή θεωρείται θετική.

2) Όταν το ρευστό εξέρχεται απ' τον κόμβο, η παροχή θεωρείται αρνητική.

Χρησιμοποιώντας τη σύμβαση αυτή, επιτυγχάνουμε και τη γενίκευση της σχέσεως των παροχών¹:

$$\sum \dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = 0 \quad (7.9)$$

Η εξίσωση (7.9), στην οποία οι παροχές είναι προσημασμένες, ισχύει πάντοτε στον κόμβο τριών σωλήνων.

Σημείωση: Η σύμβαση θα μπορούσε να είναι ακριβώς αντίθετη, χωρίς να θιγεί στο ελάχιστο η ισχύς της (7.9). Αρκεί να χρησιμοποιούνται αντίθετα πρόσημα για την εισροή και την εκροή.

Αν και η σχέση των παροχών της διακλαδώσεως προκύπτει εύκολα, η σχέση των απωλειών ύψους των τριών σωλήνων παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες και απαιτεί ενεργειακή μελέτη όλου του συστήματος και όχι απλά του κόμβου. Για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων ανατρέξτε στη Βιβλιογραφία.

7.5 Γενικά για τα δίκτυα.

Κάθε σωλήνωση μελετάται και διαμορφώνεται, ώστε να εξυπηρετήσει ένα συγκεκριμένο σκοπό διακινήσεως ρευστού. Μέσα απ' αυτήν θα γίνει η μεταφορά ή η διανομή κάποιου ρευστού απ' τους χώρους αποθηκείσεως ή παραγωγής σε άλλους χώρους χρήσεως ή νέας αποθηκείσεως. Οι πολύπλοκες σωληνώσεις διανομής, έχουν, όπως θα δούμε, δικτυωτή δομή και για τούτο καλούνται δίκτυα. Γενικότερα όμως, ο όρος χρησιμοποιείται και για ένα ολοκληρωμένο σύστημα σωληνώσεων, που εξυπηρετεί συγκεκριμένο σκοπό. Μ' αυτήν τη γενικότερη έννοια, μπορούμε να αναφέρουμε τα σημαντικότερα δίκτυα ρευστών που συναντάμε στην καθημερινή ζωή και στην παραγωγική διαδικασία είναι τα: **σωληνώσεων νερού, πυροπροστασίας, εξυπηρετήσεως κτηριακών εγκαταστάσεων, υγρών και αερίων καυσίμων, φυσικού αερίου, ατμού, υγρών αποβλήτων, συμπιεσμένου αέρα, ψυκτικών υγρών, κρυογονικά δίκτυα** κ.ά..

Μερικά από τα παραπάνω είναι σχετικά απλά συ-

¹ Αντίστοιχη σχέση ισχύει στην Ηλεκτροτεχνία για τα ηλεκτρικά ρεύματα σ' έναν κόμβο.

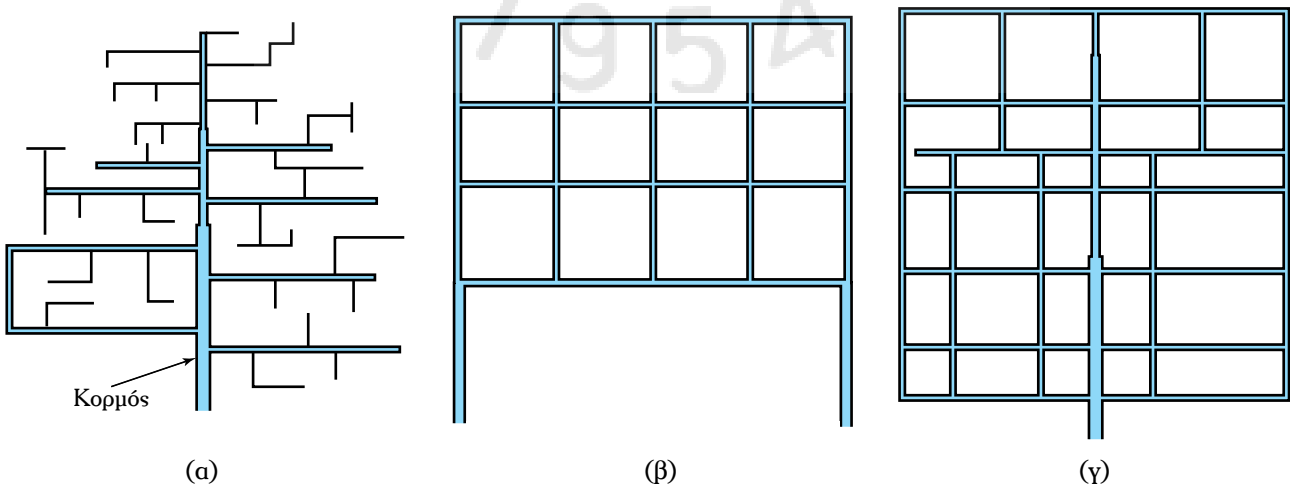
στήματα σωληνώσεων, εφοδιασμένα με εξαρτήματα ρυθμίσεως της ροής και συσκευές. Άλλα, ιδιαίτερα τα δίκτυα διανομής, είναι εξαιρετικά σύνθετα.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν τα δίκτυα πυροσβέσεως, τόσο για τον σκοπό που εξυπηρετούν, όσο και λόγω των ποικίλων συστημάτων πυροσβέσεως που έχουν αναπτυχθεί. Κοινό χαρακτηριστικό τους είναι το ότι όλα χρησιμοποιούν δίκτυο σωληνώσεων για να διοχετεύσουν το ρευστό πυροσβέσεως στις προς προστασία περιοχές. Διαφέρουν ως προς το πυροσβεστικό ρευστό, τον τρόπο ενεργοποίησής τους, τους αυτοματισμούς κ.λπ.. Συναντάμε συστήματα παροχής νερού σε συγκεκριμένα σημεία (πυροσβεστικές φωλιές), αυτόματα συστήματα ψεκαστήρων νερού σε διάφορες παραλλαγές, συστήματα υδρονεφέσεως, συστήματα πυροσβέσεως με αφρό, συστήματα πυροσβέσεως με αέρια (παλαιότερα με αλογονομένες αδρανείς ενώσεις – Halon, σήμερα με διοξείδιο του άνθρακα), άλλα με χημικά αδρανείς ουσίες κ.ά.. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τη Μηχανική των Ρευστών παρουσιάζουν τα συστήματα που ως πυροσβεστικό μέσο χρησιμοποιούν το νερό.

Τα σημαντικότερα από τα δίκτυα διανομής και τα πλέον πολύπλοκα, είναι τα **δίκτυα νερού**. Ιδιαίτερα τα δίκτυα διανομής πόσιμου νερού των οικισμών, αλλά και τα δίκτυα διανομής πόσιμου νερού και νερού θερμάνσεως εντός των κάθε είδους εγκαταστάσεων (κατοικιών, βιομηχανιών, συγκροτημάτων, πλοίων κ.λπ.). Ανάλογα με την πολυπλοκότητά τους, μπορούμε να τα κατατάξουμε στις εξής τρεις κατηγορίες: **δίκτυα δενδροειδούς τύπου** (tree system), **δίκτυα πλέγματος** (grid system) και **δίκτυα βρόχων**

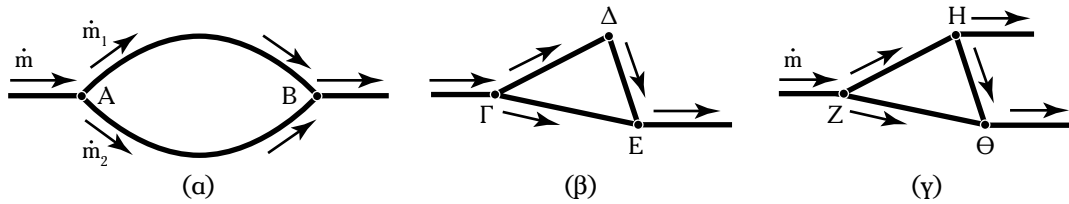
(loop system). Το σχήμα 7.5 απεικονίζει τη βασική δομή των τριών αυτών τύπων δικτύων: Το δενδροειδές σύστημα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη κεντρικού αγωγού, από τον οποίο διακλαδίζονται σωληνώσεις διανομής και η διατομή του οποίου μειώνεται σταδιακά [σχ. 7.5(α)]. Στα δίκτυα τύπου πλέγματος η διαμόρφωση της σωληνώσεως μοιάζει με σκακιέρα που καλύπτει την περιοχή διανομής, με τις διατομές των σωλήνων να μειώνονται με την απόσταση [σχ. 7.5(β)]. Στα συστήματα βρόχου, ο κεντρικός αγωγός τροφοδοτεί μικρότερους, οι οποίοι συνεχίζουν να διακλαδίζονται διαμορφώνοντας βρόχους [σχ. 7.5(γ)]. Σημειώνουμε ότι μεγαλύτερη αξιοπιστία παρουσιάζουν τα συστήματα πλέγματος και βρόχου, λόγω της ευελιξίας, της επεκτασιμότητας και των πολλαπλών διαδρομών του ρευστού.

Σε ένα σύστημα διανομής νερού διακρίνουμε τρεις ομάδες σωληνώσεων: Τις **γραμμές μεταφοράς**, που μεταφέρουν το ρευστό από τον χώρο αποθηκεύσεως στον χώρο διανομής, τους **κεντρικούς αγωγούς**, οι οποίοι μεταφέρουν το νερό στην εξυπηρετούμενη περιοχή, και τις **γραμμές παροχής**, που αποτελούνται από σωλήνες μικρών διαμέτρων που μεταφέρουν το νερό από τους κεντρικούς αγωγούς στον χρήστη. Τα συστήματα διανομής αποτελούνται από τους σωλήνες, τις βαλβίδες και τις αντλίες, μέσω των οποίων το νερό κινείται από την πηγή στους χώρους χρήσεως. Ο πρωταρχικός στόχος ενός τέτοιου δικτύου, είναι να παρασχεθεί μία επαρκής ποσότητα νερού σε όλα τα μέρη του συστήματος, σε πιέσεις και παροχές που ικανοποιούν τις απαιτήσεις των χρηστών. Επομένως, η επιλογή του υλικού, των διαμέτρων και της διαμορ-



Σχ. 7.5

Δίκτυα διανομής: (α) Δενδροειδές, (β) πλέγματος και (γ) βρόχων.



Σχ. 7.6α

Βρόχοι: (α) Παράλληλη σύνδεση, (β) μεικτή σύνδεση και γ) δίκτυο.

φώσεως των σωληνώσεων στα δίκτυα διανομής επηρεάζεται κυρίως απ' την ανάγκη της επαρκούς πίεσης και παροχής και δευτερευόντως από τις δαπάνες εγκαταστάσεως και λειτουργίας.

7.6 Υπολογισμός δικτύων σωληνώσεων.

Τα απλά δίκτυα μεταφοράς, υπολογίζονται συνήθως με τα όσα είπαμε μέχρι τώρα για τους υπολογισμούς στους σωλήνες, τις συνδέσεις σωληνών (σε σειρά και παράλληλα), [σχ. 7.6α(α) και 7.6α(β)] και σε διακλάδωση. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τα δίκτυα διανομής και ιδιαίτερα τα συστήματα πλέγματος και βρόχου. Ακόμα και ένας βρόχος με μία είσοδο και δύο εξόδους [σχ. 7.6α(γ)], είναι αδύνατο να υπολογισθεί με τις μεθόδους που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Καθώς οι βρόχοι αυξάνονται, αυξάνονται κατακόρυφα και οι δυσκολίες υπολογισμού, καθώς και ο απαιτούμενος χρόνος. Μεγάλα δίκτυα με δεκάδες ή και εκατοντάδες βρόχους, παρουσιάζουν εξαιρετικές δυσκολίες. Με την επέκταση της χρήσεως ηλεκτρονικών υπολογιστών, αναπτύχθηκαν προγράμματα υπολογισμού αυτών των δικτύων. Αλλά και με χρήση των προγραμμάτων υπολογιστικών φύλλων που ήδη αναφέραμε, ο υπολογισμός είναι ευχερής, με την προϋπόθεση φυσικά να γνωρίζουμε και να κατανοούμε τις βασικές αρχές και σχέσεις που καθορίζουν τον υπολογισμό.

Πριν περάσουμε στην ανάπτυξη της μεθοδολογίας υπολογισμού των δικτύων, ας δούμε αυτές τις βασικές σχέσεις. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα δίκτυο αποτελείται από σωλήνες (κλάδους), που διακλαδίζονται σε κόμβους και σχηματίζουν κλειστά κυκλώματα ή βρόχους, θα εξετάσουμε χωριστά τις σχέσεις των κόμβων και των βρόχων.

Καταρχήν, βλέποντας το δίκτυο μακροσκοπικά και εφαρμόζοντας το ισοζύγιο μάζας (εξίσωση συνέχειας) όλου του δικτύου, έχουμε:

$$\Sigma \dot{m}_{\epsilon\iota\sigma} = \Sigma \dot{m}_{\epsilon\chi} \quad (7.10\alpha)$$

Για ασυμπίεστα ρευστά ισχύει και το ισοζύγιο παροχών:

$$\Sigma \dot{V}_{\epsilon\iota\sigma} = \Sigma \dot{V}_{\epsilon\chi} \quad (7.10\beta)$$

Αντίστοιχη σχέση, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ισχύει και για κάθε κόμβο του δικτύου. Αν προσημάσουμε συμβατικά τις παροχές (+ για είσοδο στον κόμβο, - για έξοδο), έχουμε:

$$\Sigma \dot{V}_{\text{κόμβου}} = 0 \quad (7.10)$$

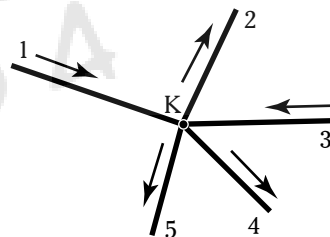
Για τον κόμβο του σχήματος 7.6β:

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 + \dot{V}_3 - \dot{V}_4 - \dot{V}_5 = 0$$

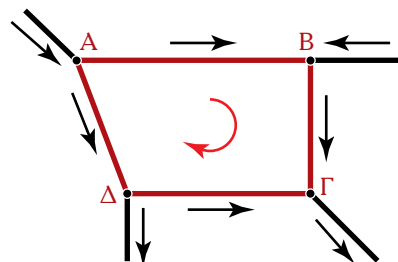
ή

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_3 = \dot{V}_2 + \dot{V}_4 + \dot{V}_5 \quad (7.10\gamma)$$

Εκτός από τα σημεία διακλαδώσεως ή κόμβους, ένα δίκτυο χαρακτηρίζεται και από τα κλειστά κυκλώματα ή βρόχους. Βρόχος καλείται ένα κλειστό σύνολο διαδοχικών σωληνών, δηλαδή σωληνών που αν τους ακολουθήσουμε, εκκινώντας από κάποιο σημείο και ακολουθώντας μια πορεία, επανερχόμαστε στο σημείο εκκινήσεως. Έτσι, στο τμήμα σωληνώσεως του σχήματος 7.6γ, εκκινώντας από



Σχ. 7.6β Κόμβος.



Σχ. 7.6γ Βρόχος.

το Α και ακολουθώντας δεξιόστροφη πορεία, θα επανέλθουμε σ' αυτό: Α-Β-Γ-Δ-Α. Οι σωλήνες που συγκροτούν το βρόχο ονομάζονται **κλάδοι**. Για τη διαμόρφωση ενός βρόχου απαιτούνται τουλάχιστον δύο κλάδοι. Σ' αυτήν όμως την περίπτωση, πρόκειται απλά για δύο παράλληλα συνδεδεμένους σωλήνες [σχ. 7.6α(α)].

Επανερχόμενοι στο βρόχο του σχήματος 7.6γ, παρατηρούμε ότι αποτελείται από τέσσερις κλάδους (ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ) και τέσσερις κόμβους (Α, Β, Γ, Δ). Αν η κατεύθυνση ροής στους σωλήνες είναι αυτή που σημειώνεται στο σχήμα, εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Γ στη διαδρομή του ρευστού ΑΒΓ και στη διαδρομή ΑΔΓ, εύκολα προκύπτει ότι:

$$h_{ΑΒΓ} = h_{ΑΔΓ} \Rightarrow h_{ΑΒ} + h_{ΒΓ} = h_{ΑΔ} + h_{ΔΓ} \Rightarrow$$

$$\acute{\eta} h_{ΑΒ} + h_{ΒΓ} - h_{ΑΔ} - h_{ΔΓ} = 0 \quad (7.11α)$$

Αν προσημάνομε συμβατικά τις απώλειες, θέτοντας το πρόσημο + όταν η ροή του ρευστού είναι σύμφωνη με τη δεξιόστροφη πορεία στο βρόχο και το πρόσημο - όταν είναι αντίθετη, η εξίσωση (7.6α) γίνεται:

$$h_{ΑΒ} + h_{ΒΓ} - h_{ΑΔ} - h_{ΔΓ} = 0 \Rightarrow$$

$$\acute{\eta} \Sigma h_{\beta\rho\acute{o}\chi\omicron\upsilon} = 0 \quad (7.11)$$

Η εξίσωση (7.11) είναι γενική και ισχύει για οποιοδήποτε κλειστό σύστημα σωλήνων (βρόχο). Σε συνδυασμό με την εξίσωση (7.10) των σημείων διακλαδώσεως (κόμβων), αποτελεί το κλειδί για την επίλυση των προβλημάτων δικτύων. Τονίζουμε ότι και οι δύο αυτές σχέσεις έχουν προκύψει με συμβατική προσήμανση των παροχών και των απωλειών. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή τους πρέπει να λαμβάνομε υπόψη τις συμβάσεις προσημάνσεως και να συγκεκριμενοποιούμε τις αντίστοιχες σχέσεις. Για παράδειγμα για τον κόμβο του σχήματος 7.6β η εξίσωση των κόμβων θα λάβει τη μορφή (7.10γ), ενώ για τον βρόχο του σχήματος 7.6γ, η εξίσωση των βρόχων θα λάβει τη μορφή (7.11α).

Υπενθυμίζομε τέλος ότι για κάθε κλάδο (σωλήνα) έχουμε στη διάθεσή μας την εξίσωση απωλειών (Darcy-Weisbach):

$$h_i = \frac{8}{\pi^2 \cdot g \cdot d_i^4} \cdot \left(f_i \cdot \frac{L_i}{d_i} + \Sigma K_i \right) \cdot \dot{V}_i^2 \quad (7.12)$$

η οποία δύναται να λάβει τη μορφή:

$$h_i = a_i \cdot \dot{V}_i^2$$

$$\acute{o}\pi\upsilon: \quad a_i = \frac{8}{\pi^2 \cdot g \cdot d_i^4} \cdot \left(f_i \cdot \frac{L_i}{d_i} + \Sigma K_i \right) \quad (7.12α)$$

Η ανάλυση και υπολογισμός των δικτύων διανομής είναι μια πολύπλοκη και χρονοβόρα διαδικασία, η οποία βασίζεται στις εξισώσεις (7.10), (7.11) και (7.3) (σχέσεις των κόμβων, των βρόχων και των κλάδων αντίστοιχα).

Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσεως που αναπτύχθηκαν (Hardy Cross, Newton-Raphson, μέθοδος εξισορροπήσεως παροχών), ακολουθούν τη διαδικασία της δοκιμής και της διορθώσεως. Πιο ολοκληρωμένη και γενική είναι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων, που αναπτύχθηκε από τον Hardy Cross (1936). Για περισσότερες πληροφορίες για τις εν λόγω μεθόδους ανατρέξτε στη Βιβλιογραφία.

7.7 Όργανα μετρήσεως.

7.7.1 Γενικά.

Κατά τη λειτουργία των εγκαταστάσεων διακινήσεως ρευστών η μέτρηση των σημαντικών παραμέτρων είναι πρωταρχικής σημασίας. Στην εφαρμοσμένη Μηχανική των Ρευστών είναι αναγκαία τα όργανα μετρήσεως αυτών των παραμέτρων. Από τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του διακινούμενου ρευστού μας ενδιαφέρει κυρίως η θερμοκρασία και η πίεση, τις οποίες και παρακολουθούμε συνεχώς με τα αντίστοιχα όργανα, τοποθετημένα στα κατάλληλα σημεία των σωληνώσεων και των συσκευών. Εξαιρετικής σημασίας είναι επίσης η μέτρηση της παροχής, αλλά και των τοπικών ταχυτήτων. Λαμβάνοντας υπόψη ό,τι αναφέραμε σε προηγούμενα κεφάλαια για τη μέτρηση της θερμοκρασίας και της πίεσεως, θα ασχοληθούμε εδώ κυρίως με τα όργανα μετρήσεως της παροχής και της ταχύτητας.

Η **μέτρηση της θερμοκρασίας** γίνεται με τα **θερμόμετρα**. Υπενθυμίζομε ότι υπάρχουν διάφοροι τύποι (υδραργυρικά θερμόμετρα, μεταλλικά, πυρόμετρα κ.λπ.), οι οποίοι καλύπτουν όλο το εύρος των συνθηκών λειτουργίας. Ανάλογα με τις συνθήκες, επιλέγομε τα κατάλληλα.

Η **μέτρηση της πίεσεως** γίνεται με τα **μανόμετρα**. Υπενθυμίζομε ότι τα μανόμετρα, δεν μετρούν απευθείας την πίεση, αλλά τη διαφορά πίεσεως μεταξύ δύο σημείων. Αν το ένα σημείο έχει ατμοσφαιρική πίεση, η διαφορά αυτή είναι η **σχετική πίεση** (gauge). Όπως θα έχουμε διαπιστώσει μέχρι τώρα, στις περισσότερες εφαρμογές της Μηχανικής

των Ρευστών, μας ενδιαφέρει η σχετική και όχι η απόλυτη πίεση.

Όπως είδαμε, υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες μανόμετρων, τα **μανόμετρα με υγρό** (κυρίως τα υδραργυρικά) και τα **μεταλλικά μανόμετρα**. Τα πρώτα πλεονεκτούν σε ακρίβεια και σταθερότητα.

Μία απλή αλλά σημαντική παραλλαγή των μανόμετρων είναι ο πιεζομετρικός σωλήνας.

7.7.2 Όργανα μετήσεως της παροχής.

Τα όργανα μετήσεως της παροχής μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με την αρχή λειτουργίας τους:

1) Σε εκείνα που βασίζονται στην πώση πίεσεως (στα οποία και θα επικεντρώσουμε) και

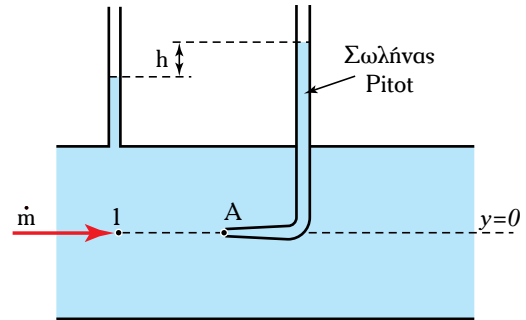
2) σ' εκείνα που βασίζουν τη λειτουργία τους στη μεταβολή κάποιας άλλης ιδιότητας, η οποία μεταβάλλεται με τη μεταβολή της παροχής.

Οι **μετρητές πτώσεως πίεσεως** (pressure differential devices) είναι γνωστοί από τον 18^ο αιώνα. Ο σωλήνας Pitot (1732) και ο σωλήνας Venturi (1797) είναι οι παλαιότεροι. Το **ακροφύσιο ροής** (flow nozzle) χρησιμοποιήθηκε προς το τέλος του 1800 και ο μετρητής με **στόμιο** (orifice) εμφανίστηκε στις αρχές του 20^{ου} αι.. Εξελιγμένα και τυποποιημένα τα όργανα αυτά μετήσεως της παροχής, κυριαρχούν και σήμερα, λόγω των σημαντικών πλεονεκτημάτων τους. Είναι απλά, χωρίς κινητά μέρη, φθηνά, με σχετικά εύκολη συντήρηση, δεν απαιτούν ισχύ, διατίθενται σε πολλά μεγέθη, προκαλούν σχετικά μικρές απώλειες ύψους κ.ά..

Βασίζονται σε ενιαία αρχή λειτουργίας: Ένα εμπόδιο παρεμβάλλεται εσκεμμένα στο ρέον ρευστό, με σκοπό να προκαλέσει μεταβολή της πίεσεως (με εξαίρεση το σωλήνα Pitot), πώση πίεσεως λόγω μείωσης διατομής και συνακόλουθης αύξησης της ταχύτητας. Μετρώντας τη μεταβολή της πίεσεως με μανόμετρο (ή πιεζομετρικούς σωλήνες), εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli και έτσι προκύπτει τύπος υπολογισμού της μέσης ταχύτητας και της παροχής.

1) Σωλήνας Pitot.

Ο σωλήνας Pitot (σχ. 7.7a) είναι ένας σωλήνας που προσαρμόζεται στον αγωγό, όπως και ο πιεζομετρικός σωλήνας. Διαφέρει όμως απ' αυτόν στην απόληξη εντός του σωλήνα: Προσαρμόζεται έτσι, ώστε το κάτω του άκρο, το οποίο σχηματίζει γωνία, να βρίσκεται βυθισμένο στο ρευστό και η διατομή του να είναι κάθετη στη διεύθυνση της ροής. Στο



Σχ. 7.7a
Σωλήνας Pitot.

σχήμα 7.7a βλέπουμε έναν πιεζομετρικό σωλήνα και ένα σωλήνα Pitot, ο οποίος καταλήγει στο άκρο A. Το A αποτελεί σημείο ανακοπής, επομένως η ταχύτητα σ' αυτό είναι μηδενική και το ύψος πίεσεως ίσο με το ύψος της στήλης υγρού του σωλήνα Pitot. Σε μικρή απόσταση πριν από το A, στο σημείο 1, η ταχύτητα είναι v και το ύψος πίεσεως ίσο με το ύψος της στήλης υγρού στον πιεζομετρικό σωλήνα που έχουμε τοποθετήσει στη διατομή που διέρχεται απ' το σημείο 1. Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και A και θεωρώντας αμελητέες τις απώλειες από το 1 ως το A, προκύπτει:

$$y_1 - y_A + \frac{v_1^2 - v_A^2}{2g} + \frac{p_1 - p_A}{\gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_A - p_1}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow v = \left(2 \cdot \frac{p_A - p_1}{\rho} \right)^{1/2} \quad (7.13)$$

όπου $v_1 = v$, και αντικαθιστώντας την ταχύτητα στην εξίσωση της συνέχειας, λαμβάνουμε:

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{p_A - p_1}{\rho}} \quad (7.14)$$

Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν με δύο υποθέσεις: Οι τοπικές απώλειες θεωρήθηκαν αμελητέες και η ταχύτητα στο σημείο 1 θεωρήθηκε ίση με τη μέση ταχύτητα ροής. Αν και η πρώτη υπόθεση προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματικότητα, η δεύτερη δημιουργεί κάποια αξιόλογη απόκλιση (αφού η ταχύτητα στο κέντρο του αγωγού είναι μεγαλύτερη απ' τη μέση ταχύτητα). Στις τυποποιημένες συσκευές, η απόκλιση διορθώνεται με χρήση του συντελεστή ταχύτητας C_v , ο οποίος είναι λίγο μικρότερος της μονάδας. Η εξίσωση (7.14) λαμβάνει τη μορφή:

$$\dot{V} = C_v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{p_A - p_1}{\rho}} \quad (7.14a)$$

$$\text{Είναι: } \frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} = h \Rightarrow \frac{P_A - P_1}{\rho} = g \cdot h$$

οπότε η σχέση (7.7α) γίνεται:

$$\dot{V} = C_v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (7.14\beta)$$

Παρατηρούμε ότι αν γνωρίζουμε την υψομετρική διαφορά h , υπολογίζουμε και την παροχή.

Ο σωλήνας Pitot, παρά το ότι είναι φθηνός και δεν δημιουργεί αξιολογές απώλειες ύψους, δεν βρίσκει ευρεία χρήση λόγω της μικρής ακρίβειας που παρέχει για συνηθισμένες ταχύτητες ροής.

2) Σωλήνας Venturi.

Τον σωλήνα Venturi τον συναντήσαμε στην παράγραφο 3.5.2. Πρόκειται για έναν σωλήνα μικρού μήκους με στένωμα, ο οποίος συνδυάζεται με δύο πιεζομετρικούς σωλήνες ή μανόμετρα (ώστε να μετράμε τη διαφορά πίεσης) και παρεμβάλλεται στον αγωγό ροής (σχ. 7.7β). Η υψομετρική διαφορά h των πιεζομετρικών σωλήνων ισούται με την πτώση του ύψους πίεσης απ' το σημείο 1 ως το σημείο 2 (λόγω αυξήσεως της ταχύτητας στο σημείο 2). Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli (θεωρώντας τις απώλειες αμελητέες) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{\gamma} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} &= \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \end{aligned} \quad (7.15\alpha)$$

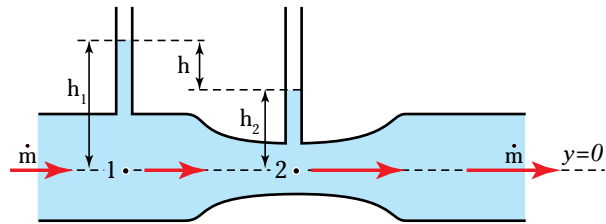
Η εξίσωση της συνέχειας δίνει:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} &= \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = \beta^2 \end{aligned} \quad (7.15\beta)$$

Ο λόγος $\beta^2 = A_2/A_1 = (d_2/d_1)^2$, αποτελεί χαρακτηριστικό μέγεθος όχι μόνο των μετρητών Venturi, αλλά όλων των μετρητών πτώσεως πίεσης.

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα v_1 στη σχέση (7.8α) και εισάγοντας τον **συντελεστή διορθώσεως ταχύτητας** C_v προκύπτουν:

$$v_2 = C_v \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{P_1 - P_2}{\rho \cdot (1 - \beta^4)}} \quad (7.15\gamma)$$



Σχ. 7.7β
Σωλήνας Venturi.

$$\dot{V} = C_v \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{P_1 - P_2}{\rho \cdot (1 - \beta^4)}} \quad (7.16)$$

όπου: $\beta = d_2/d_1$ και C_v ο συντελεστής διορθώσεως ταχύτητας (ο οποίος κυμαίνεται πολύ κοντά στη μονάδα, φτάνοντας ως και 0,97).

$$\text{Είναι: } \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} = h \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho} = g \cdot h$$

οπότε η σχέση (7.16) λαμβάνει τη μορφή:

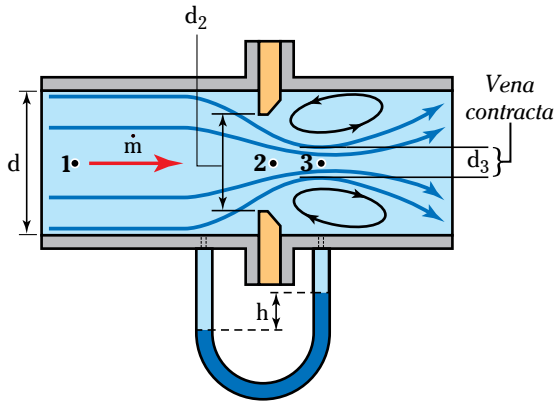
$$\dot{V} = C_v \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\rho \cdot (1 - \beta^4)}} \quad (7.16\alpha)$$

Ως πλεονέκτημα του σωλήνα Venturi θεωρούνται οι μικρές απώλειες ύψους που δημιουργεί (προς τούτο, το αποκλίνον τμήμα του σχεδιάζεται αρκετά μεγαλύτερο, ώστε η αύξηση της διατομής να γίνεται όσο το δυνατόν ομαλότερα) καθώς επίσης, η δυνατότητα μετρήσεως παροχών ακαθάρτων και παχυρρευστών υγρών. Αλλά είναι σχετικά ογκώδης και ακριβός, απαιτεί συχνή ρύθμιση, προκειμένου να διατηρεί υψηλή αξιοπιστία, και έχει περιορισμένη ακτίνα δράσεως όσον αφορά στις ταχύτητες ροής. Παρά τα μειονεκτήματα αυτά, είναι ιδιαίτερα διαδεδομένος ως μετρητής ρευστών χαμηλής και μέσης πίεσης με φυσιολογικές ταχύτητες ροής.

3) Μετρητής με διάφραγμα.

Οι **μετρητές με διάφραγμα** (orifice) ή τύπου orifice μοιάζουν στη λειτουργία τους με τους μετρητές Venturi. Η σημαντική διαφορά βρίσκεται στην αντικατάσταση της ομαλής συστολής και (ακόμα ομαλότερης) διαστολής που συναντήσαμε στον σωλήνα Venturi, από ένα απότομο στένωμα που δημιουργεί ένας δίσκος με κυκλική οπή στο κέντρο του (σχ. 7.7γ). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, σημαντικά μεγαλύτερες απώλειες, αλλά και την εμφάνιση του **φαινομένου vena contracta**² που παρουσιάζεται κατά την από-

² Πρόκειται για την συστολή της διατομής της φλέβας ροής ρευστού σε σωλήνα μετά την έξοδό της από οπή διαφράγματος ή την είσοδό της σε μικρότερη διατομή.



Σχ. 7.7γ
Μετρητής orifice.

τομη συστολή. Έτσι, η ελάχιστη διατομή της ροής δεν είναι αυτή του orifice (A_2), αλλά παρουσιάζεται λίγο πίσω από αυτό (A_3). Κατά συνέπεια, στο σημείο 3 του σχήματος 7.7γ έχουμε τη μέγιστη ταχύτητα και την ελάχιστη πίεση. Το μανόμετρο δείχνει την πτώση του ύψους πίεσης από το σημείο 1 ως το 3:

$$(p_1 - p_3)/\gamma = h \quad (7.17)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 3 και εργαζόμενοι όπως παραπάνω, καταλήγουμε σε σχέση ανάλογη με την σχέση (7.16):

$$\dot{V} = C_v \frac{\pi \cdot d_3^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{p_1 - p_3}{\rho \cdot (1 - (d_3/d_1)^4)}} \quad (7.17a)$$

Αλλά η διάμετρος της vena contracta d_3 δεν αποτελεί γεωμετρικό χαρακτηριστικό του οργάνου. Για να αντιμετωπισθεί η δυσκολία, εισάγεται ο **συντελεστής συστολής του στομίου**: $C_c = A_3/A_2$. Είναι:

$$C_c = \frac{A_3}{A_2} = \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2 \Rightarrow d_3 = \sqrt{C_c} \cdot d_2$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7.17a) και θέτοντας $\beta = d_2/d_1$, προκύπτει:

$$\dot{V} = C_v \cdot C_c \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{p_1 - p_3}{\rho \cdot (1 - C_c^2 \cdot \beta^4)}} \quad (7.18)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (7.17a), η (7.18) γίνεται:

$$\dot{V} = C_v \cdot C_c \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\rho \cdot (1 - C_c^2 \cdot \beta^4)}} \quad (7.18a)$$

Ο συντελεστής στομίου κυμαίνεται από 0,6 ως 0,7 (εξαρτώμενος από το λόγο β , την κατασκευή του orifice και τον αριθμό Reynolds).

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω τύποι ισχύουν και για το σωλήνα Venturi αν θέσουμε $C_c=1$. Πράγματι, στο σωλήνα Venturi δεν παρουσιάζεται το φαινόμενο vena contracta. Ισχύουν επίσης και για το σωλήνα Pitot αν θέσουμε $C_c=1$ και $\beta=0$. Οι σχέσεις (7.11) και (7.11a) είναι γενικές και καλύπτουν όλους τους μετρητές πτώσεως πίεσης.

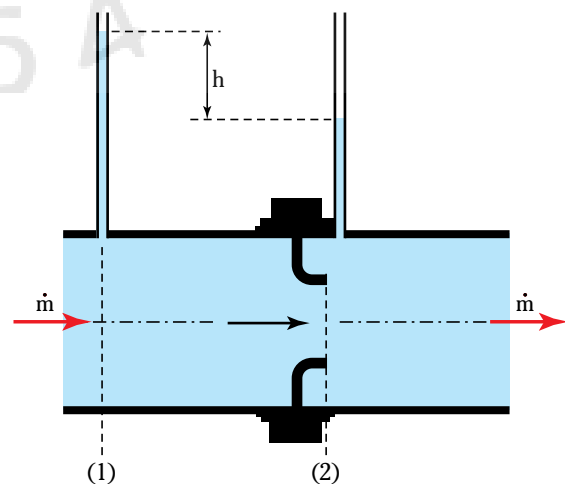
Οι μετρητές orifice παρουσιάζουν πολλά **πλεονεκτήματα**, όπως ότι:

- 1) Έχουν σχετικά χαμηλό κόστος.
- 2) Είναι ευέλικτοι, αφού ο λόγος β αλλάζει απλά με την αλλαγή του δίσκου.
- 3) Είναι οι καλύτερα τεκμηριωμένοι στα πρότυπα τυποποιήσεως.
- 4) Απολαμβάνουν ευρεία αποδοχή και υπάρχει προσωπικό πεπειραμένο για τις απαιτήσεις χρήσεως και τη συντήρηση.
- 5) Αν ακολουθούνται οι απαιτήσεις των προτύπων, δεν απαιτούν ρύθμιση.

Τα **μειονεκτήματά** τους είναι το σχετικά μεγάλο ύψος απωλειών (ιδιαίτερα για μικρούς λόγους β), η ευαισθησία τους στις διαταραχές της ροής και την μικρή περιοχή ταχυτήτων, στην οποία παρουσιάζουν αξιόπιστη απόκριση (χωρίς αλλαγή του δίσκου).

4) Μετρητής τύπου ακροφυσίου.

Οι μετρητές τύπου ακροφυσίου (nozzle) μπορούν να ταξινομηθούν (σχεδιαστικά και λειτουργικά) ανάμεσα στους μετρητές Venturi και orifice. Ένα ακροφύσιο με λόγο διατομών $A_2/A_1 = \beta$ τοποθετείται στον αγωγό (σχ. 7.7δ). Διαφορικό μανόμετρο ή δύο πιεζομετρικοί σωλήνες μετρούν την πτώση πίεσης λόγω αυξήσεως της ταχύτητας. Επειδή η μείωση της διατομής είναι βαθμιαία (και όχι απότομη όπως στο orifice), το φαινόμενο vena contracta είναι αμελητέο ($C_c \approx 1$).



Σχ. 7.7δ
Μετρητής ακροφυσίου.

Οι εξισώσεις (7.18) και (7.18) ισχύουν και σ' αυτήν την περίπτωση. Ο λόγος β του μετρητή κυμαίνεται μεταξύ 0,2 και 0,8.

Οι απώλειες ύψους που προκαλεί το ακροφύσιο είναι μεγαλύτερες απ' αυτές του σωλήνα Venturi αλλά μικρότερες του orifice.

Ως πλεονέκτημα του μετρητή με ακροφύσιο αναφέρουμε τη δυνατότητα χρήσεώς του σε μεγάλες ταχύτητες. Αντίθετα, δεν είναι κατάλληλος για μικρές. Όπως όμως και ο σωλήνας Venturi, έχει σχετικά δύσκολη εγκατάσταση και συντήρηση.

Όσον αφορά στον υπολογισμό της παροχής, η σχέση (7.18) καλύπτει όπως είπαμε και τους τρεις μετρητές. Μία άλλη, πιο απλή μορφή που μπορεί να πάρει η σχέση (7.18) είναι:

$$\dot{V} = C_d \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\rho \cdot (1 - \beta^4)}} \quad (7.18\beta)$$

Η σχέση αυτή ισχύει για το σωλήνα Venturi και για το ακροφύσιο ($C_d = C_v$, $C_c \approx 1$). Για κατάλληλες τιμές του συντελεστή C_d , ισχύει και για το orifice.

Και στις τρεις περιπτώσεις, η διαστατική ανάλυση δείχνει πως ο συντελεστής C_d είναι συνάρτηση του λόγου β και του αριθμού Reynolds της ροής:

$$C_d = f(\beta, Re) \quad (7.19)$$

Για τον υπολογισμό του, υπάρχουν εμπειρικοί τύποι και διαγράμματα για κάθε κατηγορία μετρητών πτώσεως πίεσεως. Παραδείγματος χάριν για το orifice μεγάλης διαμέτρου χρησιμοποιείται η εμπειρική σχέση:

$$C_d \approx 0,9965 - 0,00653 \cdot \left(\beta \cdot \frac{10^6}{Re_D} \right)^{0,5} \quad (7.19\alpha)$$

Για τον σωλήνα Venturi του σχήματος και για $1,5 \cdot 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6$:

$$C_d \approx 0,9858 - 0,196 \cdot \beta^{4,5} \quad (7.19\beta)$$

Ένα βασικό μειονέκτημα των μετρητών πίεσεως αποτελεί η αδυναμία τους να μετρήσουν μικρές παροχές. Ο μετρητής ακροφυσίου δεν συνίσταται σε ροές με αριθμό Reynolds μικρότερο των 10.000, στον σωλήνα Venturi το όριο κατεβαίνει σε 7500 και στον μετρητή orifice σε 4000.

5) Μετρητές άλλων τύπων.

Εκτός από τους μετρητές πίεσεως, υπάρχουν και μετρητές άλλων τύπων.

Έχουν κατασκευασθεί αξιόλογοι μετρητές παροχής, οι οποίοι αξιοποιούν άλλες φυσικές ιδιότητες του ρευστού, που μεταβάλλονται, όταν μεταβάλλεται η παροχή. Αναλυτικότερα έχομε:

1) Τον **μετρητή τουρμπίνας** (turbine meter), που αποτελείται από μία τουρμπίνα (ή έλικα) τοποθετημένη στο ρεύμα ροής, η οποία περιστρεφόμενη, παράγει ηλεκτρομαγνητικό σήμα ανάλογο της ταχύτητας περιστροφής, άρα και της παροχής. Συναντάμε επίσης τους μετρητές δινών (vortex flowmeters), τους υπερηχητικούς μετρητές (ultrasonic flowmeters), τα ροόμετρα κ.ά..

2) Τους **μετρητές απωλειών**, που βασίζονται στην πρόκληση μιας σημαντικής απώλειας ύψους, λόγω των σκόπια προκαλούμενων τριβών. Γνωρίζοντας τον συντελεστή τοπικών απωλειών της συσκευής, μετρώντας την προκαλούμενη πώση πίεσεως και υπολογίζοντας τις απώλειες απ' την εξίσωση Bernoulli, υπολογίζουμε την παροχή. Οι μετρητές αυτοί μειονεκτούν στο ότι προκαλούν σημαντικές ενεργειακές απώλειες.

3) Τους **μηχανικούς μετρητές** που βασίζονται στη συλλογή μιας ποσότητας ρευστού σε ορισμένο χρόνο. Εδώ, εντάσσεται και η πιο απλή και στοιχειώδης μέθοδος υπολογισμού της παροχής ενός υγρού: Εκτρέπομε την προς μέτρηση ροή σε δεξαμενή γνωστού όγκου και μετράμε τον χρόνο που απαιτείται για να γεμίσει. Η παροχή, από τον ορισμό της, ισούται με το πηλίκον του όγκου της δεξαμενής προς το χρόνο πληρώσεώς της.

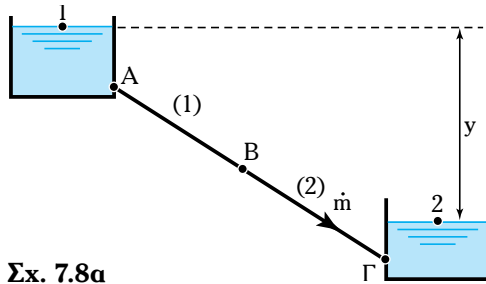
4) Τέλος, ως ειδική κατηγορία πρέπει να αναφέρουμε τους **μετρητές τοπικής ταχύτητας**. Αυτοί μπορεί να είναι πολύ απλοί (όπως η οπτική παρακολούθηση ελαφρού σώματος που παρασύρεται στη ροή), πιο σύνθετοι (όπως οι περιστρεφόμενοι αισθητήρες ροής), αλλά και ιδιαίτερα πολύπλοκοι και ακριβείς (όπως οι μαγνητικοί μετρητές και οι μετρητές Laser-Doppler).

7.8 Ασκήσεις.

1. Οι σωλήνες του σχήματος 7.8α είναι κυτσοειδηροί μήκους 200 m και 220 m και διαμέτρων 7 in και 5 in αντίστοιχα. Αν η παροχή νερού προς τη δεξαμενή Β είναι $180 \text{ m}^3/\text{h}$, να υπολογισθούν οι απώλειες ύψους και η υψομετρική διαφορά. (Δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες).

$$[\Sigma h = H = 38,07 \text{ m}]$$

2. Για το ίδιο σχήμα 7.8α και σωληνώσεις, να υπολογισθεί η παροχή αν οι ελεύθερες επιφάνειες των δεξαμενών



Σχ. 7.8α

έχουν υψομετρική διαφορά 25 m και οι συντελεστές τοπικών απωλειών στους δύο σωλήνες είναι 2 και 4 αντίστοιχα.

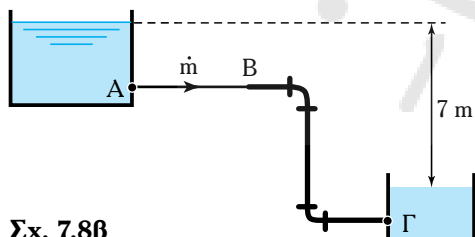
$$[\dot{V} = 139,2 \text{ m}^3/\text{h}]$$

3. Δύο δεξαμενές με υψομετρική διαφορά 12 m, συνδέονται με δύο σωλήνες από γαλβανισμένο σίδηρο, συνδεδεμένους σε σειρά, με μήκη 100 m και 120 m και διαμέτρους 15 cm και 10 cm αντίστοιχα. Αν οι τοπικές απώλειες θεωρηθούν αμελητέες, να υπολογισθεί η παροχή νερού προς τη δεξαμενή που βρίσκεται χαμηλότερα. Ποιες ενεργειακές μεταβολές παρατηρούμε;

$$[\dot{V} = 79,6 \text{ m}^3/\text{h}]$$

4. Οι δύο δεξαμενές νερού του σχήματος 7.8β πρόκειται να συνδεθούν με τους σωλήνες AB και ΒΓ. Ο σωλήνας ΒΓ, έχει μήκος 40 m και διάμετρο 10 cm. Να υπολογισθεί (σε mm) η ελάχιστη διάμετρος του σωλήνα AB, μήκους 20 m, ώστε η παροχή να είναι τουλάχιστον $60 \text{ m}^3/\text{h}$. Και οι δύο σωλήνες είναι από ασφαλισμένο χυτοσίδηρο, με συντελεστές τοπικών απωλειών $K_{AB} = 0,9$ και $K_{BG} = 4,5$.

$$[d_{AB,\min} = 91 \text{ mm}]$$



Σχ. 7.8β

5. Τρεις σωλήνες από ασφαλισμένο χυτοσίδηρο με μήκη 50 m, 70 m και 40 m και διαμέτρους 5 cm, 7 cm και 4 cm αντίστοιχα, είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Αν η πώση πίεσης από την είσοδο ως την έξοδο του συστήματος των τριών σωλήνων είναι 180 kPa και η έξοδος βρίσκεται 5 m χαμηλότερα από την είσοδο, να υπολογισθούν η παροχή, η ταχύτητα και οι απώλειες σε κάθε σωλήνα. ($\nu = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες).

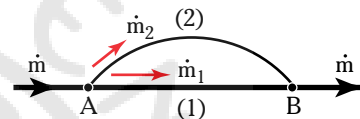
$$[\dot{V} = 15,2 \text{ m}^3/\text{h}, h_1 = 6,09 \text{ m}, h_2 = 1,45 \text{ m}, h_3 = 15,8 \text{ m}]$$

6. Αν οι σωλήνες του προηγούμενου προβλήματος είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, πόση είναι η ολική παροχή και το ποσοστό παροχής σε κάθε σωλήνα, για την ίδια πώση πίεσης και υψομετρική διαφορά μεταξύ εισόδου και εξόδου του συστήματος των σωλήνων;

$$[\dot{V} = 110,3 \text{ m}^3/\text{h}, 27,2\% - 55,9\% - 16,9\%]$$

7. Στην παράλληλη σύνδεση του σχήματος 7.8γ ο σωλήνας (1) έχει διάμετρο 10 cm και μήκος 4 m, ενώ ο (2), διάμετρο 2 cm και μήκος 6 m. Οι σωλήνες είναι από χυτοσίδηρο. Αν η παροχή νερού στον σωλήνα μικρής διαμέτρου είναι $0,2 \text{ L/s}$, να υπολογισθεί η συνολική παροχή Q και η πώση πίεσης από το A ως το B. (Τα A και B βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Οι δευτερεύουσες απώλειες να θεωρηθούν αμελητέες).

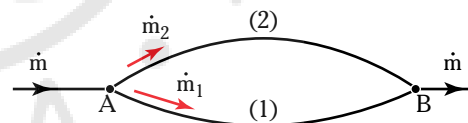
$$[\dot{V} = 18,3 \text{ L/s}, p_A - p_B = 2,75 \text{ kPa}]$$



Σχ. 7.8γ

8. Οι παράλληλα συνδεδεμένοι σωλήνες του σχήματος 7.8δ είναι από χυτοσίδηρο με $L_1 = 80 \text{ m}$, $L_2 = 60 \text{ m}$ και $d_1 = 3 \text{ in}$, $d_2 = 2 \text{ in}$. Αν στους σωλήνες ρέει κηροζίνη 20°C , σχετικής πυκνότητας 0,82 και η πώση πίεσης από το A ως το B είναι 30 kPa, να υπολογισθούν οι παροχές στους δύο σωλήνες (Τα A και B βρίσκονται στο ίδιο ύψος, δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες).

$$[\dot{V}_1 = 64,7 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_2 = 25,5 \text{ m}^3/\text{h}]$$



Σχ. 7.8δ

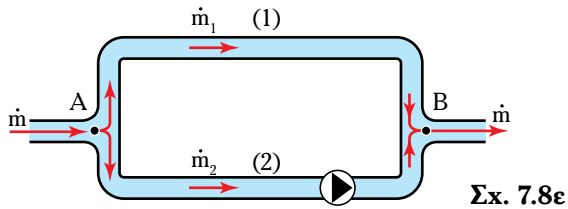
9. Τρεις μπρούτζινοι σωλήνες ($\epsilon = 0,0002 \text{ m}$) συνδεδεμένοι παράλληλα, έχουν μήκη 400 ft, 300 ft και 500 ft και διαμέτρους 2 in, 3 in και 4 in αντίστοιχα. Αν η ολική παροχή αργού πετρελαίου είναι $0,6 \text{ ft}^3/\text{s}$, να υπολογισθούν οι απώλειες και η παροχή σε κάθε σωλήνα (σε m^3/h). (Σχετική πυκνότητα αργού 0,86, $\nu = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες).

$$[h = 5,1 \text{ m}, \dot{V}_1 = 4,34 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_2 = 20,57 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_3 = 36,25 \text{ m}^3/\text{h}]$$

10. Οι παράλληλα συνδεδεμένοι σωλήνες του σχήματος 7.8ε, είναι από γαλβανισμένο σίδηρο με $L_1 = 60 \text{ m}$, $L_2 = 55 \text{ m}$, $d_1 = 5 \text{ cm}$, $d_2 = 4 \text{ cm}$ και μεταφέρουν υγρό σχετικής πυκνότητας 0,9 και κινηματικού ιξώδους

$4,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Στον σωλήνα (2) υπάρχει αντλία, η οποία έχει συντελεστή τοπικών απωλειών $K_p = 2,5$. Αν η αντλία είναι εκτός λειτουργίας και η ολική παροχή ίση με $14 \text{ m}^3/\text{h}$, να υπολογισθούν οι παροχές των σωλήνων και η πτώση πίεσης απ' το A ως το B.

$$[\dot{V}_1 = 9 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_2 = 5 \text{ m}^3/\text{h}, p_A - p_B = 28,6 \text{ kPa}]$$



11. Αν στο σύστημα του προηγούμενου προβλήματος λειτουργεί η αντλία αποδίδοντας ύψος $h_p = 50 \text{ m}$ και η πτώση πίεσης απ' το A στο B είναι 15 kPa , να υπολογισθεί η ολική παροχή.

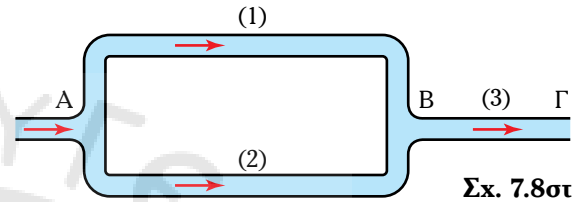
$$[\dot{V}_1 = 6,4 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_2 = 21,8 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V} = 21,8 \text{ m}^3/\text{h}]$$

12. Τρεις σωλήνες από εμπορικό χάλυβα με μήκη 80 m , 60 m , 90 m και διαμέτρους 6 cm , 4 cm , 5 cm αντίστοιχα, είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Αν η ολική παροχή είναι $60 \text{ m}^3/\text{h}$, να υπολογισθούν οι παροχές των τριών σωλήνων και το ύψος απωλειών.

$$[\dot{V}_1 = 30,3 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_2 = 12,1 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_3 = 17,6 \text{ m}^3/\text{h}, h = 12,2 \text{ m}]$$

13. Στη μεικτή σύνδεση του σχήματος 7.8στ, οι τρεις σωλήνες είναι από ασφατωμένο χυτοσίδηρο, ίδιας διαμέτρου, ίσης με 8 cm και μήκη $L_1 = 250 \text{ m}$, $L_2 = 200 \text{ m}$, $L_3 = 150 \text{ m}$. Αν η πτώση πίεσης από το A ως το Γ είναι 750 kPa , να υπολογισθούν οι παροχές νερού στους τρεις σωλήνες. (Δευτερεύουσες απώλειες αμελητέες).

$$[\dot{V}_1 = 43,6 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_2 = 48,8 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_3 = 92,4 \text{ m}^3/\text{h}]$$



14. Αν στη σωλήνωση του προηγούμενου προβλήματος, η ολική παροχή είναι $75 \text{ m}^3/\text{h}$, να υπολογισθούν οι παροχές των σωλήνων και η πτώση πίεσης από το A ως το Γ.

$$[\dot{V}_1 = 35,4 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_2 = 39,6 \text{ m}^3/\text{h}, \dot{V}_3 = 75 \text{ m}^3/\text{h}, p_A - p_B = 497 \text{ kPa}]$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 1

Ιδιότητες νερού σε διάφορες θερμοκρασίες.

(Πυκνότητα ρ , Κινηματικό ιξώδες ν , Επιφανειακή τάση σ , Συμπίεσιότητα β)

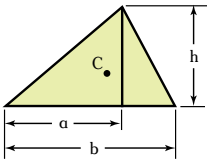
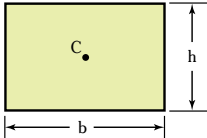
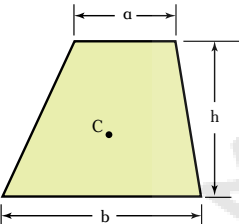
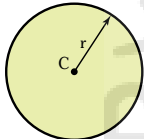
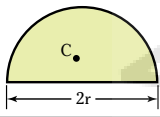
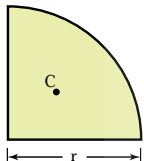
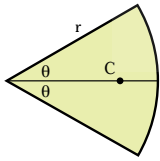
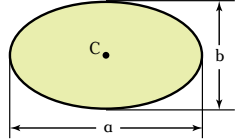
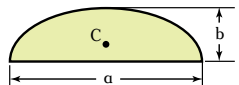
Υγρό	T °C	ρ kg/m ³	ν m ² /s	σ N/m	β kpa ⁻¹
Νερό	0	1000	$1,79 \cdot 10^{-06}$	$7,56 \cdot 10^{-02}$	$5,03 \cdot 10^{-07}$
	3,98	1000	$1,57 \cdot 10^{-06}$		
	10	1000	$1,31 \cdot 10^{-06}$	$7,42 \cdot 10^{-02}$	$4,72 \cdot 10^{-07}$
	20	998	$1 \cdot 10^{-06}$	$7,28 \cdot 10^{-02}$	$4,52 \cdot 10^{-07}$
	30	996	$8,06 \cdot 10^{-07}$	$2,26 \cdot 10^{-02}$	$3,40 \cdot 10^{-07}$
	40	992	$6,58 \cdot 10^{-07}$	$6,96 \cdot 10^{-02}$	$4,37 \cdot 10^{-07}$
	50	988	$5,57 \cdot 10^{-07}$	$6,79 \cdot 10^{-02}$	$4,37 \cdot 10^{-07}$
	60	983	$4,78 \cdot 10^{-07}$	$6,62 \cdot 10^{-02}$	$4,38 \cdot 10^{-07}$
	70	978	$4,16 \cdot 10^{-07}$	$6,64 \cdot 10^{-02}$	$4,46 \cdot 10^{-07}$
	80	972	$3,67 \cdot 10^{-07}$	$6,26 \cdot 10^{-02}$	$4,55 \cdot 10^{-07}$
	90	965	$3,28 \cdot 10^{-07}$		$4,67 \cdot 10^{-07}$
	100	958	$2,96 \cdot 10^{-07}$	$5,89 \cdot 10^{-02}$	$4,83 \cdot 10^{-07}$

Πίνακας 2

Πυκνότητα καθαρού νερού.

T (°C)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	ρ (kg/m ³)
0	999,839	7	999,901	30	995,647	65	980,502
1	999,898	8	999,848	35	994,032	70	977,771
2	999,940	9	999,781	40	992,215	75	974,850
3	999,964	10	999,699	45	990,213	80	971,799
4	999,972	15	999,099	50	988,037	85	968,621
5	999,964	20	998,204	55	985,696	90	965,321
6	999,940	25	997,045	60	983,200	100	958,365

Πίνακας 3
Ιδιότητες επιπέδων επιφανειών¹.

Επιφάνεια	x_{oc}	y_{oc}	A	I_{xc}	I_{yc}
	$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{1}{36}bh^3$	$\frac{bh^2(2a-b)}{72}$
	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	bh	$\frac{1}{12}bh^3$	0
	$\frac{(2a+b)h}{3(a+b)}$	$\frac{(a+b)h}{2}$	$\frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$		
	r	r	πr^2	$\frac{\pi r^4}{4}$	0
	r	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$	$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4$	0
	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$	$\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$
	$\frac{2a \cdot \sin\theta}{3\theta}$	0	θr^2	$\frac{r^4(\theta - \sin\theta\cos\theta)}{4}$	0
	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{4}bh$	$\frac{\pi}{64}bh^3$	0
	$\frac{b}{2}$	$\frac{4h}{3\pi}$	$\frac{\pi}{4}bh$	$\frac{\pi}{16}bh^3$	0

¹ Οι άξονες x, y διέρχονται από το κεντροειδές κάθε σχήματος.








Πίνακας 4
Θερμολίδεις μονάδες του SI.

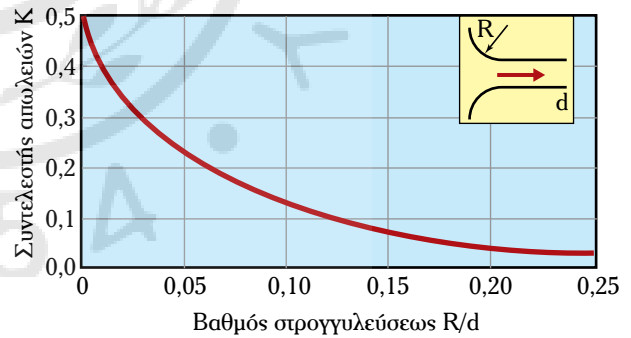
Μέγεθος	Μονάδα μετρήσεως	
	Όνομα	Σύμβολο
Μήκος	Μέτρο (meter)	m
Μάζα	Χιλιόγραμμα (Kilogram)	kg
Χρόνος	Δευτερόλεπτο (second)	s
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	Αμπέρ (Ampere)	A
Θερμοκρασία	Κέλβιν (Kelvin)	K
Ποσότητα ουσίας	Μολ (mole)	mol
Ένταση φωτεινής ακτινοβολίας	Καντέλα (candela)	cd

Πίνακας 5
Προθέματα μονάδων του SI.

Πολλαπλάσια			Υποπολλαπλάσια		
deca	da	10^1	deci	d	10^{-1}
hecto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^3	milli	m	10^{-3}
mega	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}
zetta	Z	10^{21}	zepto	z	10^{-21}
yotta	Y	10^{24}	yocto	y	10^{-24}

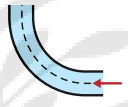

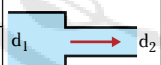
Πίνακας 6
Συντελεστές τοπικών απωλειών K για εισόδους, εξόδους, γωνίες, συστολές, διαστολές.

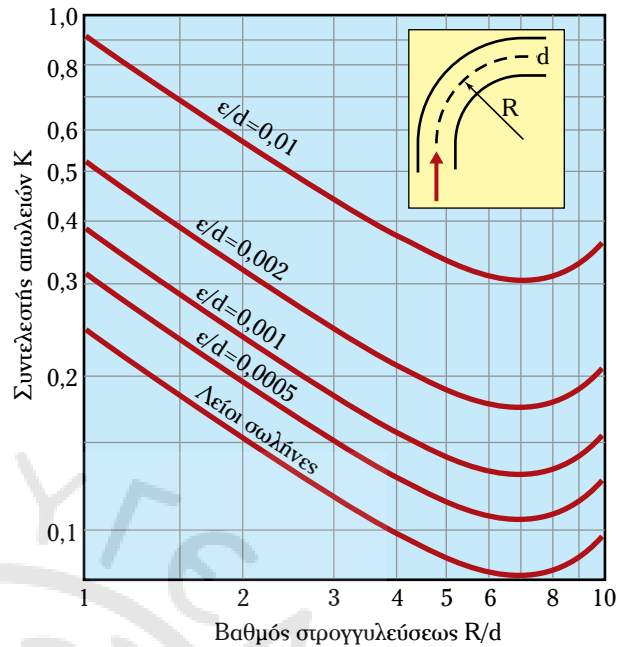
Περιγραφή αιτίου τοπικής απώλειας	K_i	
1. Είσοδος σε σωλήνα που προεξέχει	0,8	
Είσοδος σε σωλήνα με αιχμηρά χείλη	0,5	
Είσοδος σε σωλήνα με στρογγυλεμένα χείλη (βλ. και σχ. Π.1α)	0,02–0,5	
2. Έξοδος από σωλήνα σε δεξαμενή	1,0	
3. Αλλαγή διεύθυνσεως		
Γωνίες 90°	1,2	
Γωνίες 60°	0,6	
Γωνίες 45°	0,4	



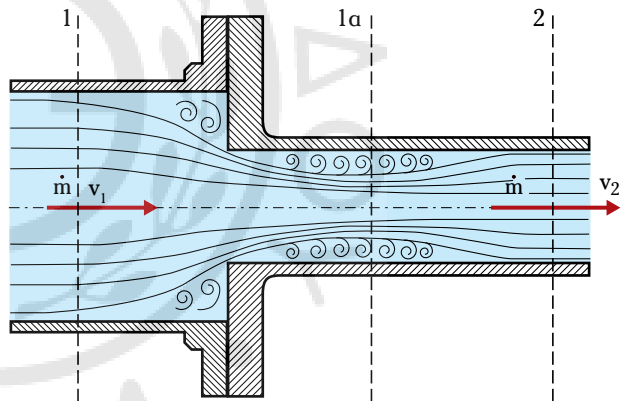
Σχ. Π.1α
Είσοδος σε σωλήνα με στρογγυλεμένα χείλη.

(συνεχίζεται)

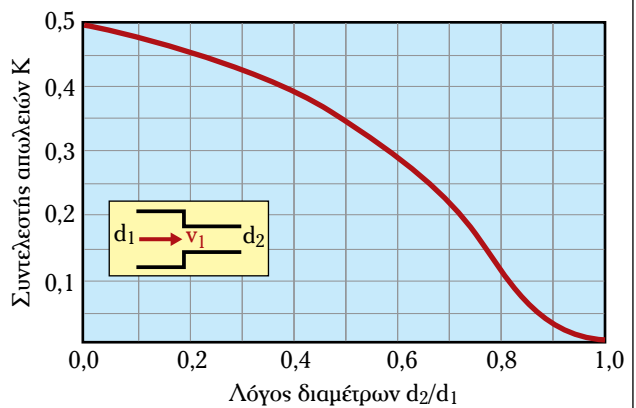
Περιγραφή αιτίου τοπικής απώλειας	K_i	
Αλλαγή διεύθυνσεως		
Καμπύλες γωνίες 90° (βλ. και σχ. Π.1β)	0,2 - 0,7	
Καμπύλες γωνίες 180°	2,0	
4. Μεταβολή διαμέτρου		
Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0,2$	0,45	
Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0,4$ (βλ. σχ. Π.1γ και Π.1δ)	0,4	
Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0,6$ (βλ. σχ. Π.1γ και Π.1δ)	0,3	
Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0,8$ (βλ. σχ. Π.1γ και Π.1δ)	0,13	



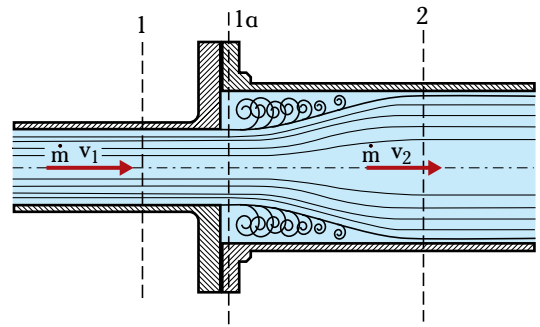
Σχ. Π.1β
Στρωγγυλεμένη γωνία 90° .



Σχ. Π.1γ
Απότομη στένωση διατομής.

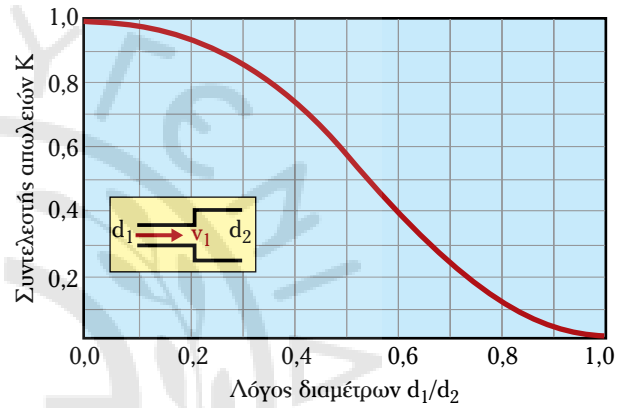


Σχ. Π.1δ
Διάγραμμα απότομης στενώσεως διατομής.

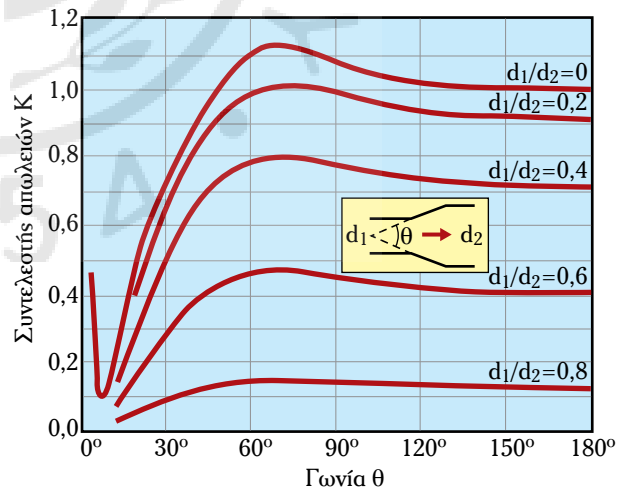


Σχ. Π.1ε
Απότομη διερεύνηση.

Περιγραφή αιτίου τοπικής απώλειας	K_i	
Μεταβολή διαμέτρου		
Βαθμιαία στένωση	0,05 – 0,25	
Απότομη διεύρυνση με $d_1/d_2=0,2$ (βλ. σχ. Π.1ε και Π.1στ)	0,95	
Απότομη διεύρυνση με $d_1/d_2=0,4$ (βλ. σχ. Π.1ε και Π.1στ)	0,75	
Απότομη διεύρυνση με $d_1/d_2=0,6$ (βλ. σχ. Π.1ε και Π.1στ)	0,4	
Απότομη διεύρυνση με $d_1/d_2=0,8$ (βλ. σχ. Π.1ε και Π.1στ)	0,15	
Βαθμιαία διεύρυνση ($\theta < 30^\circ$) (βλ. σχ. Π.1ζ)	0,10 – 0,60	



Σχ. Π.1στ
Απότομη διερεύνηση.



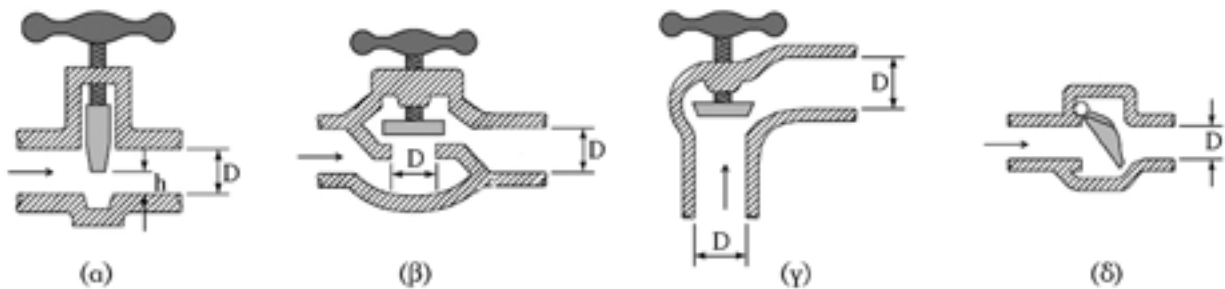
Σχ. Π.1ζ
Βαθμιαία διεύρυνση.

Πίνακας 7
Συντελεστές τοπικών απωλειών K για βαλβίδες και εξαρτήματα.

Περιγραφή αιτίου τοπικής απώλειας	K_i
Βαλβίδες σφαιροειδείς, ανοικτές	0,17
Βαλβίδες σφαιρικές, ανοικτές (1–20 in)	4,0 – 14
Βαλβίδες σφαιρικές, μερικώς ανοικτές	4 – 60
Βαλβίδες συρταρωτές, ανοικτές (1–20 in)	0,03 – 0,8
Βαλβίδες συρταρωτές, μερικώς ανοικτές	0,3 – 60
Βαλβίδες γωνιακές, ανοικτές (1–20 in)	1,0 – 9,0
Βαλβίδες μονόδρομες (αντεπιστροφής) (1–20 in)	2,0 – 2,9
Βαλβίδες διαφράγματος, ανοικτές	2,3 – 4,3
Βαλβίδες πεταλούδας, ανοικτές	0,2 – 0,3
Βαλβίδες πεταλούδας, μερικώς ανοικτές	0,3 – 60
Βαλβίδες τύπου Υ	1-6,5
Βαλβίδες με πέλμα	15
Συνδέσεις, ται ευθείας ροής	0,07 – 0,9
Συνδέσεις, ται κάθετης ροής	0,4 – 2,4
Συζευκτήρας, ένωση	0,04

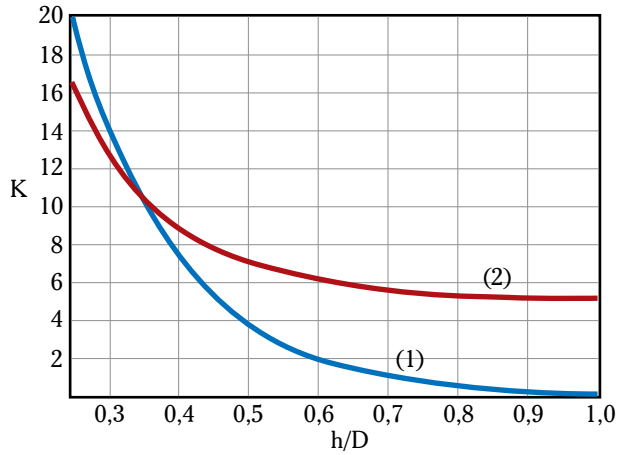
Πίνακας 8
Συντελεστής τοπικών απωλειών σε βαλβίδες.

Βαλβίδες, πλήρως ανοικτές	Κοχλιωτές				Φλανιζωτές				
	0,5"	1"	2"	4"	1"	2"	4"	8"	20"
Σφαιρικές	14	8,2	6,9	5,7	13	8,5	6	5,8	5,5
Συρταρωτές	0,3	0,24	0,16	0,11	0,80	0,35	0,16	0,07	0,03
Αντεπιστροφής	5,1	2,9	2,1	2	2	2	2	2	2
Γωνιακές	9	4,7	2	1	4,5	2,4	2	2	2



Σχ. Π.1n

Βαλβίδα (α) συρταρωτή, (β) σφαιρική, (γ) γωνιακή και (δ) αντεπιστροφής.



Σχ. Π.10
Βαλβίδες μερικώς ανοικτές.

Πίνακας 9
Συντελεστές τοπικών απωλειών σε συνδέσεις ταυ.

Συνδέσεις ταυ	Κοχλιωτές				Φλαντζωτές				
	0,5"	1"	2"	4"	1"	2"	4"	8"	20"
Ευθύγραμμη ροή	0,9	0,9	0,9	0,9	0,24	0,19	0,14	0,10	0,07
Κάθετη ροή	2,4	1,8	1,4	1,1	1,0	0,8	0,64	0,58	0,41

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

A

αδιάστατες ομάδες 86
αδιάστατες σταθερές 87
αδιάστατος αριθμός 86
αέρια 1, 13
αέρια κατάσταση 3
αεροστατική 16
ακροφύσιο 127
ακροφύσιο ροής 155
άνωση ή άντωση 42
αραιόμετρα 48
Αριθμός Reynolds 58, 86
Αρχή του Αρχιμήδη 43
Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων 19
ασυμπίεστα 6
ατμοσφαιρικός αέρας 45

B

βαρόμετρα 27
βαρομετρικές εξισώσεις 26
βαρομέτρου υδραργύρου 27

Γ

γεωμετρικό ή υψομετρικό ύψος 72
γραμμή ενέργειας 73
γραμμική διαστολή 4

Δ

δεξαμενές καθιζήσεως 21
δεσμοί (ή γέφυρες) υδρογόνου 8
Δεύτερο Νόμο του Newton 119
διαμοριακές 8
διάγραμμα Moody 104
διακλάδωση ροής 131
διάσταση του μεγέθους 84
διαστατικά ομογενής 84
διαστατικές μεταβλητές 86
διαστατικές εξισώσεις 84
διαστατικές σταθερές 86
διαστατική ανάλυση 83, 87
διαστολή 3
διατμητική τάση (ή τάση ολισθήσεως) 58
διατμητική τάση 61
διατμητική τάση αντιστάσεως 56

διατμητική τάση ολισθήσεως 56
διαφορικά μανόμετρα 28
διαφορική κλίση ταχύτητας 12, 57
διαχωριστή βαρύτητας 20
διαχωριστικό τοίχωμα ή πόρτα 38
διεπιφάνεια 9
δυνάμεις διασποράς London 9
 ιόντος-διπόλου 9
 συνάφειας 9
 συνοχής 9, 58
δύναμη αδράνειας 21
 ανώσεως 45
 βαρύτητας 45
δυναμική 5
δυναμική των ρευστών 1
δυναμικό ιξώδες 12

E

ειδική θερμότητα 2
ειδικό βάρος 5
ειδικός όγκος 5
ελεύθερη επιφάνεια 3
ενεργειακά ύψη 71
ενεργειακές απώλειες λόγω τριβών 69
ενθαλπία 2
εντροπία 2
εξίσωση Bernoulli 71
εξίσωση των Darcy – Weisbach 100
επιφάνεια ελέγχου 54
επιφανειακή τάση 2, 8, 10
έργο μετατοπίσεως ή έργο ροής 69
έργο αφαιρούμενο 70
 προσδιδόμενο 70
 δυνάμεως πίεσεως 69
εσωτερική ενέργεια 2
εσωτερική ενέργεια u 69

Θ

θερμοκρασία 2, 84
Θεώρημα του Bernoulli 71
Θεώρημα ωθήσεως – ορμής 119
θεώρηση κατά Euler 53
θεώρηση κατά Lagrange 53

I

ινώδης φλέβα 54
 ιξώδες (ή συνεκτικότητα) 2
 ιξώδες 57
 ιξωδόμετρα 14
 ισοδύναμη (ή υδραυλική) διάμετρος 60
 ισοδύναμου μήκους 108
 ισοζύγιο της ορμής 119

K

καμπύλο τοίχωμα 39
 καθαρός αριθμός 86
 κατακόρυφη συνιστώσα 36
 κέντρο πίεσεως 33
 κεντροειδές (ή κέντρο βάρους) 33
 κινηματικό ιξώδες 12
 κλάδοι 154
 κλειστά κυκλώματα ή βρόχους 153
 κλίμακα μήκους ή κλίμακα 90
 κλίμακα Baume 48
 κρίσιμη ταχύτητα 59
 κρίσιμος αριθμός Reynolds 60

Λ

λεπτόρρευσα 13

M

μάζα 84
 μανόμετρα με αισθητήρα πίεσεως τύπου φυσική 30
 μανόμετρα με αισθητήρες πίεσεως με πιεζοαντίσταση 30
 μανόμετρα με πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες 30
 μανόμετρα με χωρητικούς αισθητήρες 30
 μανόμετρο Bourdon 30
 μανόμετρο κεκλιμένου σωλήνα 29
 μανόμετρο πιεζομετρικού σωλήνα 26
 μανόμετρο τύπου U 28
 μανόμετρα 28, 154
 μανομέτρο διπλό 31
 μεγέθη ενεργειακά 95
 μεγέθη ρευστού 95
 μεγέθη ροής 95
 μεγέθη σωλήνα 95
 μέση ταχύτητα 95
 μέθοδος Rayleigh 87
 μεταβατική περιοχή 22
 μετάκεντρο M 46
 μεταλλικό βαρόμετρο 27
 μετατόπιση του κέντρου βάρους 47
 μεταφορά μάζας 1
 μετρητές με διάφραγμα 158

μετρητές απωλειών 158
 μετρητές μηχανικούς 158
 μετρητές τοπικής ταχύτητας 158
 μετρητή τουρμπίνας 158
 μήκος 84
 μη νευτώνεια ρευστά 13
 μοντέλο 87

N

Νευτώνεια ρευστά (Newtonian fluids) 12
 Νόμο της υδροστατικής 18
 Νόμος ιξώδους ροής του
 Newton 56
 Νόμος του ιξώδους του Newton 12

O

ομοιότητα γεωμετρική 87
 θερμική 87
 μηχανική 87
 χημική 87
 ομοίωμα 87
 όγκος ελέγχου 54
 όγκος ελέγχου ροής 65
 ολικό ύψος ενέργειας 73
 οπισθέλκουσα δύναμη 63
 οριακό στρώμα 55
 οριζόντια συνιστώσα 36

Π

παροχή μάζας 54
 παροχή 54
 παροχή όγκου 54
 πάχος του οριακού στρώματος 61
 παχύρρευσα 13
 πεδίο βαρύτητας 4
 πεδίο ροής 53
 πείραμα του Reynolds 59
 πιεζομετρική γραμμή 73
 πιεζομετρικό ύψος 73
 πίεση 2, 13
 πλεύση 45
 πρίσμα πίεσεως 39
 πρωτότυπο 87
 πτερύγια διευθύνσεως 133
 πηκτικά 11
 πυκνόμετρα 47
 πυκνότητα 2, 5

P

ρευστά 2, 56
 ρευστά ιδανικά 58

ρευστά πραγματικά 58
 ρευστό σύστημα δύο φάσεων 2
 ροή μεταβλητή 54
 ροή 11
 ροή ανομοιόμορφη 54
 ασυμπίεστη 92
 ασυμπίεστων 54
 γραμμική 56
 δισδιάστατη 55
 ιδανικού ρευστού 71
 μόνημη 54
 μονοδιάστατη 54
 ομοιόμορφη 54
 ρευστού 53
 σε ανακλαστήρα 131
 σε περύγιο 133
 σταθερή 54
 στροβιλώδης 56
 σρωτή 56
 συμπιεσμένη 92
 συμπιεστών ρευστών 54
 τριδιάστατη 55
 τυρβώδης 56
 ροϊκή γραμμή ή ρευματική γραμμή ή γραμμή ροής 53
 ροϊκό σωλήνα 53
 ρυθμός ροής 54

Σ

σημείο ανακοπής ή στασιμότητας 63
 ζέσεως ή βρασμού 3
 υγροποιήσεως 3
 σταθεράς ελαστικότητας 8
 στατική των ρευστών 1
 στερεά κατάσταση 3
 στοιχειώδη όγκο 14
 στροφορμή 135
 συμπιεστά 6
 συμπιεστότητας 8
 συγκοινωνούντα δοχεία 19
 συνεκτικότητα ρευστού μ 12
 συνθήκη μη ολισθήσεως 56
 συνθήκη υδροστατικής
 ισορροπίας 18
 συντελεστής κυβικής διαστολής 3

μεταφοράς θερμότητας α 2
 γραμμικής διαστολής 4
 οπισθέλκουσας 64
 παροχής στομίου 75
 τοπικών απωλειών 108
 συστήματα υδραυλικής υποβοηθήσεως 21
 συστολή 3
 σχετική πίεση 5, 154
 σχετική πυκνότητα 7
 σωλήνας Pitot 72, 77
 σωλήνας Venturi 76
 σωλήνες τετραγωνικής διατομής 60

T

τάση ατμών 2, 11
 τραχύτητα τοιχωμάτων 103
 τριχοειδή φαινόμενα 11
 τροχιά 54

Υ

υγρά 1
 υγρή κατάσταση (σημείο τήξεως) 3
 υδροστατική πίεση 16
 υπολογισμός διαμέτρου 141
 υπολογισμός παροχής 141
 υπολογισμός ύψους απωλειών 141
 ύψος απωλειών 77
 ύψος δυναμικής ενέργειας 97
 ύψος ενέργειας πίεσεως 97
 ύψος κινητικής ενέργειας 72, 97
 ύψος πίεσεως 18, 72
 ύψος ταχύτητας 72

Φ

φαινόμενο βάρους βυθισμένου σώματος 44
 φαινόμενο της αποκολλήσεως του ρευστού 63
 φλέβα ροής 54
 φυγόκεντρη επιτάχυνση 23
 φυγόκεντρικούς διαχωριστές 34

X

χρόνος 84

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

A. Βιβλία στην Ελληνική γλώσσα.

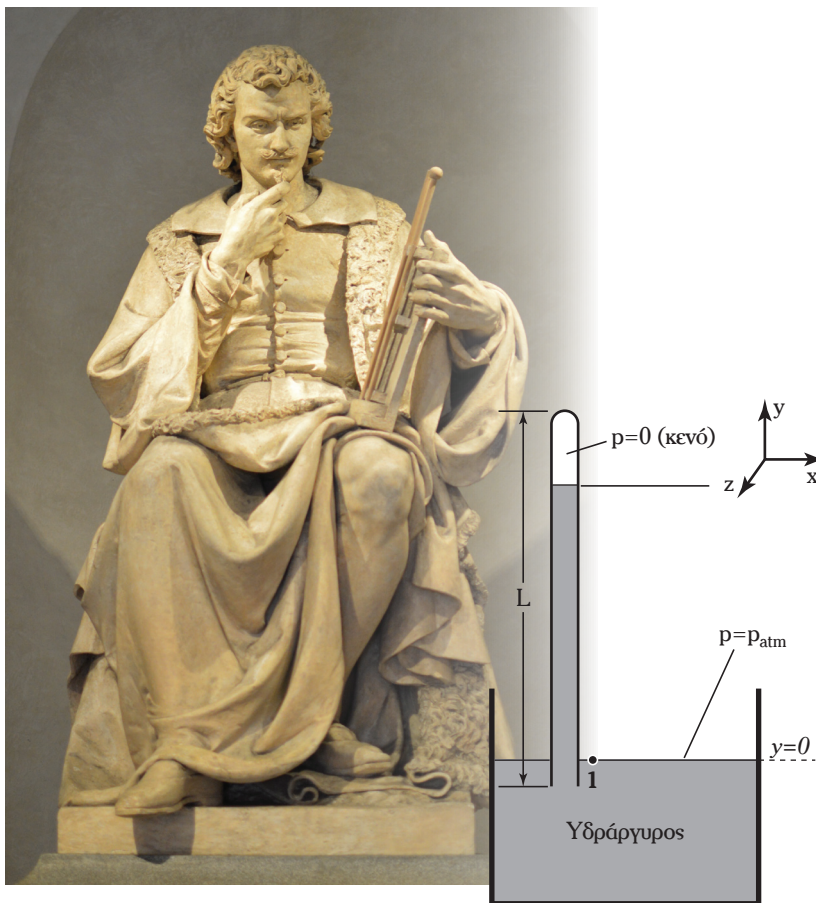
- Αθανασιάδης Ν.: *Σημειώσεις Μηχανικής των Ρευστών*, έκδοση 2^η, ΕΜΠ 1970.
- Αλεξόπουλος Κ.: *Γενική Φυσική*, 4^η έκδοση, Ολυμπία, Αθήνα 1986.
- Ασοσέλ Μ., Trusler Μ., Τσολάκης Θ.: *Θερμοφυσικές Ιδιότητες Ρευστών*, Τζόλας Θεσσαλονίκη 1997.
- Βαγενάς Δ.: *Σωληνώσεις βιομηχανικών εγκαταστάσεων, πλοίων οικισμών και οικοδομών*, Αθήνα 1979.
- Γκανούλης Ι.: *Εισαγωγή στη Μηχανική των Ρευστών*, Θεσσαλονίκη 1982.
- Δανιήλ Γ. – Μιμνκόπουλος Κ.: *Βοηθητικά μηχανήματα πλοίων*, Ίδρυμα Ευγενίδου, Αθήνα 2003.
- Καστρινάκης Ε.: *Μηχανικές Φυσικές Διεργασίες*, Τζόλας, Θεσσαλονίκη 2000.
- Κορωνάκης Π.: *Μηχανική Ρευστών*, Ίων 2001.
- Κουμούτσος Ν.: *Φαινόμενα μεταφοράς*, Αθήνα 1975.
- Κουτσογιάννης Δ. – Ξανθόπουλος Θ.: *Τεχνική Υδρολογία*, 3^η έκδοση, ΕΜΠ, Αθήνα 1999.
- Λάζος Χ.: *Μηχανική και τεχνολογία στην αρχαία Ελλάδα*, Αίολος, Αθήνα 1993.
- Πάντζαλης Ν.: *Σημειώσεις Μηχανικής των Ρευστών*, Θεσσαλονίκη 1995.
- Παπαευαγγέλου Τ.: *Καύσιμα-Λιπανικά*, Γ' έκδοση, Ίδρυμα Ευγενίδου, Αθήνα 2003.
- Τερζίδης Γ.: *Μαθήματα Υδραυλικής*, Θεσσαλονίκη 1977.
- Brodkey R., Hershey H.: *Φαινόμενα Μεταφοράς*, Τόμοι Α-Β, Τζόλας Θεσσαλονίκη 1989.
- Daugherty R. – Franzini J.: *Μηχανική ρευστών*, Πλαίσιο, Αθήνα.
- Hughes W. – Brighton J.: *Δυναμική των Ρευστών*, 3^η Έκδοση, Τζόλας Θεσσαλονίκη 2005.
- Mc Kabe W. – Smith C.: *Βασικά φυσικά διεργασίες Χημικής Μηχανικής*, 2^η έκδοση, Mc Graw-Hill, Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας, Αθήνα 1971).
- KSB: *Ανιίες*, Έκδοση Συλλόγου Μηχανολόγων-Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Β.Ε, Θεσσαλονίκη 1982.
- Steeter V. – Benjamin W.: *Μηχανική Ρευστών*, Φούντας, Αθήνα 2000.

B. Βιβλία στην Αγγλική γλώσσα.

- Bloomer J.: *Practical Fluid Mechanics for Engineering Applications*, Dekker 2000.
- Bruce H.: *Fluid Mechanics for Civil Engineers*, New Zealand 1995.
- Darby R.: *Chemical Engineering Fluid Mechanics*, 2th ed, Dekker 2001.
- Dorf R. (Ed.): *The Engineering Handbook*, CRC Press LLC, 2000.
- Fenton J.: *Numerical methods*, Universität Karlsruhe, 2006.
- Fenton J.: *A First Course in Hydraulics*, Universität Karlsruhe, 2007.
- Fenton J.: *Hydromechanics*, Universität Karlsruhe, 2007.
- Frankel M.: *Facility Piping Systems Handbook*, 2th ed, McGraw-Hill 2002.
- Herbert O.: *Prandtl's Essentials of Fluid Mechanics*, 2th ed, Springer-Verlag New York 2004.
- Karassik I. – Messina J. – Cooper P. – Heald C.: *Pump Handbook*, 3th ed, McGraw-Hill 2001.
- Kreith F. – Raton B.: *Mechanical Engineering Handbook*, CRC Press LLC, 1999.
- Kundu R. – Cohen I.: *Fluid Mechanics*, 2th ed, Academic Press 2002.
- Marghitu Dan B.: *Mechanical Engineer's Handbook*, Academic Press 2001.
- Mohinder L. – Nayyar: *Piping Handbook*, 7th ed, McGraw-Hill 2000.
- Nakayama Y.: *Introduction to Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann 1999.
- Parisher R. – Rhea R.: *Pipe Drafting and Design*, 2th ed, Butterworth-Heinemann 2002.

- Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 7th ed, McGraw-Hill 1997.
- Poling B. – Prausnitz J., – O'Connell P.: *The Properties of Gases and Liquids*, 4th ed, McGraw-Hill, 2004.
- Schweitzer P.: *Corrosion Resistance Tables*, 4th Ed, Dekker, New York 1995.
- Upp E., La Nasa P.: *Fluid Flow Measurement*, 2th ed., Butterworth Heinemann, 2002.
- White F: *Fluid Mechanics*, 2th ed, McGraw-Hill, 1999.
- Zappe, W: *Valve Selection Handbook* 4th ed, Elsevier Science 1999.
- Dictionary of Engineering*, 2th Edition, McGraw-Hill, 2003.
- DOE Fundamentals Handbook: Thermodynamics, Heat Transfer, and Fluid Flow*, DOE-HDBK 1992.
- DOE Fundamentals Handbook: Mechanical Science*, DOE-HDBK 1993.
- DOE Fundamentals Handbook: Engineering Symbology, Prints, and Drawings*, DOE-HDBK 1993.
- Bureau International des Poids et Mesures (BIPM): *The International System of Units (SI)*, 8th ed., 2006.
- NCEES: *Fundamentals of Engineering Supplied-Reference Handbook*, 8th ed, National Council of Examiners for Engineering and Surveying, USA 2007.





*Εβαντζελίστα Τορικέλι (1608 - 1647),
Ιταλός φυσικός και μαθηματικός, γνωστός για
την εφεύρεση του υδραργυρικού βαρόμετρου.
Μουσείο Φυσικής Ιστορίας της Φλωρεντίας.*