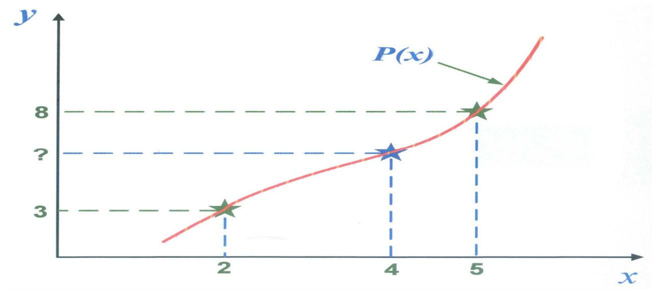
Παρεμβολή (Interpolation) ονομάζεται ένας τρόπος προσέγγισης μίας συνάρτησης f από άλλη, απλούστερη συνάρτηση p (συνήθως πολυωνυμική), προκειμένου αντιμετωπισθεί η ανάγκη να εκτιμηθεί η τιμή της f σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Πχ. Αν είναι γνωστό ότι $f(2)=3$ και $f(5)=8$, βρείτε $f(4)=;$.

Σχήμα 1.



Δηλαδή, η παρεμβολή μας παρέχει τη δυνατότητα να διαβάζουμε μεταξύ κάποιων δεδομένων σημείων. Αν οι τιμές της f είναι ευθέως ανάλογες της μεταβλητής x, τότε η λύση του προβλήματος είναι απλή. Πχ. Αν είναι γνωστό ότι $f(2)=20$ και $f(5)=50$, τότε $f(4)=40$.

Όμως, η αναλυτική μορφή της f δεν είναι γενικά γνωστή. Ενδεικτικά, η συνάρτηση f μπορεί να είναι εκθετική ή λογαριθμική ή τριγωνομετρική $\left(e^x,\ \log x,\ \sin x,\ \cos x\right)$. Προκειμένου διαπιστωθεί ότι οι εξαρτημένες τιμές $f(x)$ που λαμβάνει η f μεταβάλλονται αναλόγως της ανεξάρτητης μεταβλητής της x, πρέπει, αφού γραφούν σε στήλες οι διαφορές τιμών μεταξύ των δύο μεταβλητών, να προκύπτει ότι αυτές παραμένουν σταθερές (ίσες μεταξύ τους).

Πίνακας 1.

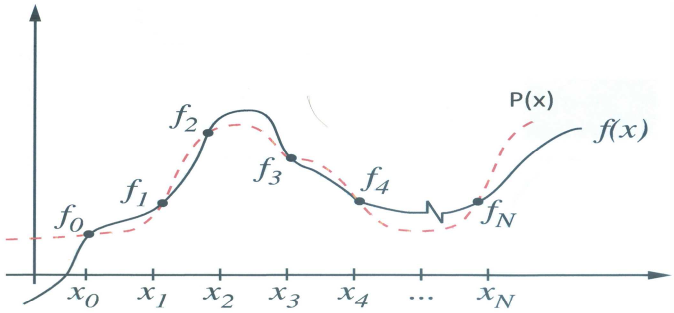
x	$f(x)$	$\Delta f(x)$
$x_1=0$	$f(x_1)=0$	-----
$x_2=2$	$f(x_2)=20$	$f(x_2)-f(x_1)=20$
$x_3=4$	$f(x_3)=40$	$f(x_3)-f(x_2)=20$
$x_4=6$	$f(x_3)=40$	$f(x_4)-f(x_3)=20$

Πολυωνυμική παρεμβολή ονομάζεται μία συνάρτηση p (σχήμα) η οποία προσδιορίζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων μίας άλλης συνάρτησης f και χρησιμοποιείται για να προσεγγισθούν ενδιάμεσες τιμές της f με σχετική ακρίβεια όπως επίσης και προκειμένου να εξομαλυνθεί (σχήμα) μία γραφική παράσταση που προέκυψε από πεπερασμένο πλήθος δεδομένων (πχ. εργαστηριακές μετρήσεις). Μεθόδους υπολογισμού του πολυωνύμου p της παρεμβολής, προσαρμόζοντας το σε όλα τα διαθέσιμα αριθμητικά δεδομένα, ανέπτυξαν ο Newton, ο Taylor (λύνει σύστημα) και ο Lagrange (δεν λύνει σύστημα).

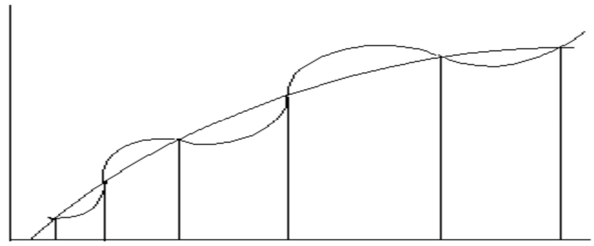
Ευκολία στον υπολογισμό παραγώγου και ολοκληρώματος.
Ευκολότερη η χρήση πολυωνύμου αντί της f.
Τα αποτελέσματα θα είναι πολυώνυμα.

Πίνακας 2. Πλεονεκτήματα προσέγγισης της f με ένα πολυώνυμο

Σχήμα 2. Παρεμβολή Ν σημείων.



Σχήμα 3. Εξομάλυνση γραφικής παράστασης.



Η **γραμμική παρεμβολή** που αποτελεί μερική περίπτωση της πολυωνυμικής παρεμβολής, χρησιμοποιείται προκειμένου να μπορούμε να βλέπουμε μεταξύ των γραμμών που έχει ένας πίνακας με τις τιμές που λαμβάνει μία συνάρτηση (τριγωνομετρική ή λογαριθμική). Έστω ότι η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ και $B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$. Ζητείται να υπολογισθεί η τιμή $f\left(x_3\right)$ όπου $x_1 < x_3 < x_2$. Ένας τρόπος προκειμένου να προσεγγισθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι μία ευθεία γραμμή που διέρχεται από τα σημεία A, B. Η κλίση του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι $\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$ και η εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι

$$f\left(x\right)-f\left(x_1\right)=\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+f\left(x_1\right)$$

Συχνά με χρήση πινάκων υπολογίζουμε την τιμή μίας συνάρτησης, δοθείσας μίας τιμής της μεταβλητής της (αν έχει μόνο μία μεταβλητή). Η παρεμβολή χρησιμοποιείται σε περιοχές της αριθμητικής ανάλυσης όπως η αριθμητική ολοκλήρωση, η αριθμητική διαφόριση και η αριθμητική λύση διαφορικών εξισώσεων. Η γραμμική παρεμβολή βρίσκει εφαρμογές στην αστρονομία και στη ναυτιλία κατά την αντιστοίχιση βυθίσματος πλοίου με υδροστατικά στοιχεία για μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτή που προσφέρουν οι υδροστατικοί πίνακες.

Π.χ. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

Πίνακας 3.

Εκτόπισμα σε τόνους	Βύθισμα σε μέτρα
24.191,1	5
24.300	$x =;$
24.447,5	5,05

Για τον υπολογισμό της ενδιάμεσης τιμής θα γίνει γραμμική παρεμβολή. Είναι

$$\frac{24.447,5-24.300}{24.447,5-24.191,1}=\frac{5,05-x}{5,05-5}\Rightarrow x=5,02\ m$$

Η παρεμβολή χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό του λογαρίθμου ενός γνωστού αριθμού όπως επίσης και για τον υπολογισμό του αριθμού στον οποίο αντιστοιχεί γνωστός λογάριθμος.

Εφαρμογή 1. Υπολογίστε τον $\log 25647 =;$

Επειδή ο αριθμός είναι πενταψήφιος, το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι 4. Θα πρέπει στη συνέχεια να υπολογισθεί και το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου.

Μετά από τα τέσσερα πρώτα ψηφία του αριθμού, τοποθετείται υποδιαστολή οπότε ο αριθμός γίνεται $2564,7$ και επειδή δεν υπάρχει στους λογαριθμικούς πίνακες, θα γίνει γραμμική παρεμβολή.

Πίνακας 4.

←-------- $d=1$ -------→	
← $d=0,7$ →	
2564 < 2564,7 < 2565	
log2564< log2564,7< log2565	
↓	↓
3,40892	3,40909
←------- $d=17$ ------→	

Όταν ο αριθμός 2364 μεγαλώνει κατά μία μονάδα και γίνεται 2565, τότε ο λογάριθμος του αυξάνει κατά 17 δεκαδικές μονάδες, οπότε ακολουθεί απλή μέθοδος των τριών.

Σε διάστημα πλάτους $d=1$ αντιστοιχεί αύξηση 17.

Σε διάστημα πλάτους $d=0,7$ αντιστοιχεί αύξηση $x=\dfrac{17\cdot 0,7}{1}=11,9\cong 12$.

Ακολούθως εκτελώ την πρόσθεση στο μικρότερο δεκαδικό μέρος, $\begin{array}{r}40892\\ +\ \ 12\\ \hline 40904\end{array}$ οπότε υπολογίσθηκε το δεκαδικό μέρος. Συνεπώς, $\log 25647=4,40904$.

Εφαρμογή 2. Υπολογίστε τον $\log 967845=;$

Επειδή ο αριθμός είναι εξαψήφιος, το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι 5. Θα πρέπει στη συνέχεια να υπολογισθεί και το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου. Μετά από τα τέσσερα πρώτα ψηφία του αριθμού, τοποθετείται υποδιαστολή οπότε ο αριθμός γίνεται $9678,45$ και επειδή δεν υπάρχει στους λογαριθμικούς πίνακες, θα γίνει γραμμική παρεμβολή.

Ομοίως κατά την προηγούμενη εφαρμογή, ακολουθεί απλή μέθοδος των τριών.

Πίνακας 5.

←--------- $d=1$ ---------→	
← $d=0,45$ →	
9678 < 9678,45 < 9679	
log9678 < lo9678,45 < log9679	
↓	↓
3,98579	3,98583
←--------- $d=4$ --------→	

Σε διάστημα πλάτους $d=1$ αντιστοιχεί αύξηση $d=4$.

Σε διάστημα πλάτους $d=0,45$ αντιστοιχεί αύξηση $x=\dfrac{4\cdot 0,45}{1}=1,8\cong 2$

Ακολούθως εκτελώ την πρόσθεση στο μικρότερο δεκαδικό μέρος, $\begin{array}{r}98579\\ +\ \ 2\\ \hline 98581\end{array}$ οπότε υπολογίσθηκε το δεκαδικό μέρος. Συνεπώς, $\log 967845=5,98581$.

Εφαρμογή 3. Υπολογίστε το λογάριθμο της συντέμνουσας των $86^0\ 04',9$.

Βήμα 1°. Από τους σχετικούς πίνακες βλέπουμε ότι $\log\sigma\tau\varepsilon 86^0\ 04',8=8,83584\ \left(Diff=37\right)$ και σημειώσαμε τη διαφορά $(Diff)$ για τα $0',2$ διότι μετά τις 86^0, στην πρώτη αριστερή στήλη με τα πρώτα λεπτά της μοίρας, δίνονται τα πρώτα λεπτά ανά $0',2$. Για το λόγο αυτό δεν υπάρχει στήλη παρεμβολών (parts) αλλά στη θέση της δίνονται οι διαφορές $Diff$. Αν δεν υπάρχουν διαφορές, η στήλη παραμένει κενή.

Βήμα 2ο. Γίνεται παρεμβολή για το $0',1$ που διαφέρουν τα ληφθέντα $(04',8)$ από τα δοθέντα πρώτα $(04',9)$ η οποία προφανώς ισούται με το μισό της $Diff$, δηλαδή 18. Η παρεμβολή αυτή προστίθεται ή αφαιρείται στο ληφθέντα λογάριθμο $(8,83584)$ ανάλογα αν το στοιχείο μεγαλώνει ή μικραίνει προς τα κάτω. Συνεπώς,

$$\log \sigma\tau\varepsilon 86^0\ 04',8 = 8,83584\,(Diff = 37)$$

$$\underline{\text{Παρεμβολή για το } +0',1 = \quad -18'}$$

$$\log \sigma\tau\varepsilon 86^0\ 04',9 = 8,83566$$

Εφαρμογή 4. Υπολογίστε τον θετικό αριθμό x ώστε $\log x = 6,86050$.
Από τους λογαριθμικούς πίνακες προκύπτει ότι δεν υπάρχει το δεκαδικό μέρος 86050 αλλά περιέχεται ανάμεσα στα 86046 και 86052. Οι τιμές έχουν ληφθεί από την επόμενη εικόνα που είναι η σελίδα 169 του βιβλίου των λογαρίθμων. Ακολούθως εκτελείται γραμμική παρεμβολή και στη συνέχεια απλή μέθοδος των τριών.

Πίνακας 6.

←--- $d = 6$ -------→	
← $d = 4$ →	
$86046 < 86050 < 86052$	
↓	↓
7252	7253
←------ $d = 1$ -----→	

Σε αύξηση κατά 6 (0,00006) αντιστοιχεί αύξηση κατά 1.

Σε αύξηση κατά 4 (0,00004) αντιστοιχεί αύξηση κατά $x = \frac{1 \cdot 4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666..$

Συνεπώς το μικρότερο (7252) αυξάνεται κατά 0,666… οπότε γίνεται 7252,666…
Αφού το χαρακτηριστικό είναι έξι, ο ζητούμενος αριθμός x είναι επταψήφιος. Άρα, ο ζητούμενος αριθμός είναι $x = 7252666,666$.

Εφαρμογή 5. Υπολογίστε τον θετικό αριθμό x ώστε $\log x = \bar{3},86180$.
Ομοίως προς την προηγούμενη εφαρμογή. Οι τιμές έχουν ληφθεί από την επόμενη εικόνα που είναι η σελίδα 169 του βιβλίου των λογαρίθμων.

Πίνακας 7.

←----- $d = 6$ -------→	
← $d = 3$ →	
$86177 < 86180 < 86183$	
↓	↓
7274	7275
←----- $d = 1$ ----→	

Σε αύξηση κατά 6 αντιστοιχεί αύξηση κατά 1.
Σε αύξηση κατά 3 αντιστοιχεί αύξηση κατά

$$x = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\begin{array}{r} 7274 \\ \underline{+\quad 0,5} \\ 7274,5 \end{array}$$

Συνεπώς, αφού το μικρότερο (7274) αυξάνεται κατά 0,5 είναι $x = 0,0072745$.

LOGARITHMS

Angles 2· ° ′	Angles 3· ° ′	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
			No. 7000——7599					Log. 84510——88076					
11 40	116 40	700	84510	84516	84522	84528	84535	84541	84547	84553	84559	84566	6
11 41	116 50	701	84572	84578	84584	84590	84597	84603	84609	84615	84621	84628	6
11 42	117 00	702	84634	84640	84646	84652	84658	84665	84671	84677	84683	84689	6
11 43	117 10	703	84696	84702	84708	84714	84720	84726	84733	84739	84745	84751	6
11 44	117 20	704	84757	84763	84770	84776	84782	84788	84794	84800	84807	84813	6
11 45	117 30	705	84819	84825	84831	84837	84844	84850	84856	84862	84868	84874	6
11 46	117 40	706	84881	84887	84893	84899	84905	84911	84917	84924	84930	84936	6
11 47	117 50	707	84942	84948	84954	84960	84967	84973	84979	84985	84991	84997	6
11 48	118 00	708	85003	85010	85016	85022	85028	85034	85040	85046	85052	85059	6
11 49	118 10	709	85065	85071	85077	85083	85089	85095	85101	85108	85114	85120	6
11 50	118 20	710	85126	85132	85138	85144	85150	85156	85163	85169	85175	85181	6
11 51	118 30	711	85187	85193	85199	85205	85211	85218	85224	85230	85236	85242	6
11 52	118 40	712	85248	85254	85260	85266	85272	85279	85285	85291	85297	85303	6
11 53	118 50	713	85309	85315	85321	85327	85333	85339	85346	85352	85358	85364	6
11 54	119 00	714	85370	85376	85382	85388	85394	85400	85406	85412	85419	85425	6
11 55	119 10	715	85431	85437	85443	85449	85455	85461	85467	85473	85479	85485	6
11 56	119 20	716	85491	85497	85503	85510	85516	85522	85528	85534	85540	85546	6
11 57	119 30	717	85552	85558	85564	85570	85576	85582	85588	85594	85600	85606	6
11 58	119 40	718	85612	85619	85625	85631	85637	85643	85649	85655	85661	85667	6
11 59	119 50	719	85673	85679	85685	85691	85697	85703	85709	85715	85721	85727	6
12 00	120 00	720	85733	85739	85745	85751	85757	85763	85769	85775	85782	85788	6
12 01	120 10	721	85794	85800	85806	85812	85818	85824	85830	85836	85842	85848	6
12 02	120 20	722	85854	85860	85866	85872	85878	85884	85890	85896	85902	85908	6
12 03	120 30	723	85914	85920	85926	85932	85938	85944	85950	85956	85962	85968	6
12 04	120 40	724	85974	85980	85986	85992	85998	86004	86010	86016	86022	86028	6
12 05	120 50	725	86034	86040	86046	86052	86058	86064	86070	86076	86082	86088	6
12 06	121 00	726	86094	86100	86106	86112	86118	86124	86130	86136	86142	86148	6
12 07	121 10	727	86153	86159	86165	86171	86177	86183	86189	86195	86201	86207	6
12 08	121 20	728	86213	86219	86225	86231	86237	86243	86249	86255	86261	86267	6
12 09	121 30	729	86273	86279	86285	86291	86297	86303	86309	86314	86320	86326	6
12 10	121 40	730	86332	86338	86344	86350	86356	86362	86368	86374	86380	86386	6
12 11	121 50	731	86392	86398	86404	86410	86416	86421	86427	86433	86439	86445	6
12 12	122 00	732	86451	86457	86463	86469	86475	86481	86487	86493	86499	86505	6
12 13	122 10	733	86510	86516	86522	86528	86534	86540	86546	86552	86558	86564	6
12 14	122 20	734	86570	86576	86581	86587	86593	86599	86605	86611	86617	86623	6
12 15	122 30	735	86629	86635	86641	86647	86652	86658	86664	86670	86676	86682	6
12 16	122 40	736	86688	86694	86700	86706	86711	86717	86723	86729	86735	86741	6
12 17	122 50	737	86747	86753	86759	86764	86770	86776	86782	86788	86794	86800	6
12 18	123 00	738	86806	86812	86817	86823	86829	86835	86841	86847	86853	86859	6
12 19	123 10	739	86864	86870	86876	86882	86888	86894	86900	86906	86911	86917	6
12 20	123 20	740	86923	86929	86935	86941	86947	86953	86958	86964	86970	86976	6
12 21	123 30	741	86982	86988	86994	86999	87005	87011	87017	87023	87029	87035	6
12 22	123 40	742	87040	87046	87052	87058	87064	87070	87076	87081	87087	87093	6
12 23	123 50	743	87099	87105	87111	87116	87122	87128	87134	87140	87146	87152	6
12 24	124 00	744	87157	87163	87169	87175	87181	87187	87192	87198	87204	87210	6
12 25	124 10	745	87216	87222	87227	87233	87239	87245	87251	87256	87262	87268	6
12 26	124 20	746	87274	87280	87286	87291	87297	87303	87309	87315	87320	87326	6
12 27	124 30	747	87332	87338	87344	87350	87355	87361	87367	87373	87379	87384	6
12 28	124 40	748	87390	87396	87402	87408	87413	87419	87425	87431	87437	87442	6
12 29	124 50	749	87448	87454	87460	87466	87471	87477	87483	87489	87495	87500	6
12 30	125 00	750	87506	87512	87518	87524	87529	87535	87541	87547	87552	87558	6
12 31	125 10	751	87564	87570	87576	87581	87587	87593	87599	87605	87610	87616	6
12 32	125 20	752	87622	87628	87633	87639	87645	87651	87656	87662	87668	87674	6
12 33	125 30	753	87680	87685	87691	87697	87703	87708	87714	87720	87726	87731	6
12 34	125 40	754	87737	87743	87749	87754	87760	87766	87772	87777	87783	87789	6
12 35	125 50	755	87795	87800	87806	87812	87818	87823	87829	87835	87841	87846	6
12 36	126 00	756	87852	87858	87864	87869	87875	87881	87887	87692	87898	87904	6
12 37	126 10	757	87910	87915	87921	87927	87933	87938	87944	87950	87956	87961	6
12 38	126 20	758	87967	87973	87978	87984	87990	87996	88001	88007	88013	88019	6
12 39	126 30	759	88024	88030	88036	88041	88047	88053	88059	88064	88070	88076	6
Angles		No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

For fifth-figure differences see page 174.

Πίνακας 8.

Εφαρμογή 6. Υπολογίστε τον λογάριθμο του ημιτόνου των $14^0\ 1',2$.
Εκτελώ γραμμική παρεμβολή κατά τα γνωστά και ακολούθως απλή μέθοδο των τριών.

Πίνακας 9.

$\leftarrow$----- $d = 1'$ -------$\rightarrow$
$\leftarrow 0',2 \rightarrow$
$\log\sin\left(14^0\ 1'\right) < \log\sin\left(14^0\ 1',2\right) < \log\sin\left(14^0\ 2'\right)$
$\downarrow$ $\downarrow$
9,38418 9,38469
$\leftarrow$-------------- $d = 51$ ------------$\rightarrow$

Σε διάστημα πλάτους 1΄ αντιστοιχεί μήκος 51.

Σε διάστημα πλάτους 0΄,2 αντιστοιχεί μήκος $x = \dfrac{51 \cdot 0,2}{1} = 10,2 \cong 10$

Το αποτέλεσμα της γραμμικής παρεμβολής προστίθεται όταν η τριγωνομετρική συνάρτηση είναι αύξουσα στο 1^o τεταρτημόριο (πχ. ημίτονο, εφαπτομένη, τέμνουσα) οπότε μεγαλώνουν οι λογάριθμοι.

Αν όμως η τριγωνομετρική συνάρτηση είναι φθίνουσα στο 1^o τεταρτημόριο (πχ. συνημίτονο, συνεφαπτομένη, συντέμνουσα) οπότε μειώνονται οι λογάριθμοι, τότε το αποτέλεσμα της γραμμικής παρεμβολής αφαιρείται.

Για το 2^o τεταρτημόριο ισχύον τα αντίστροφα.

Συνεπώς, $\begin{array}{r} 9,38418 \\ +\quad 10 \\ \hline 9,38428 \end{array}$ οπότε $\log\sin\left(14^0\ 1',2\right) = 9,38428$.

Εφαρμογή 7. Υπολογίστε τον λογάριθμο του συνημιτόνου των $24^0\ 22',6$.
Εκτελώ γραμμική παρεμβολή κατά τα γνωστά και ακολούθως απλή μέθοδο των τριών.

Πίνακας 10.

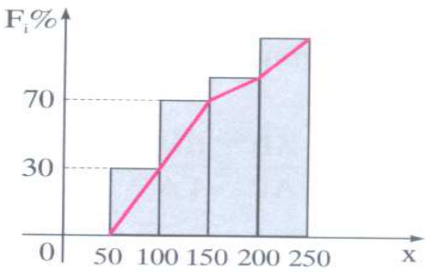
$\leftarrow$---------------- $d = 1'$ ------------------$\rightarrow$
$\leftarrow$--------- $0',6$ --------$\rightarrow$
$\log\cos\left(24^0\ 22'\right) < \log\cos\left(24^0\ 22',6\right) < \log\cos\left(24^0\ 23'\right)$
$\downarrow$ $\downarrow$
9,95948 9,95942
$\leftarrow$---------------- $d = 6$ ---------------$\rightarrow$

Σε διάστημα πλάτους 1΄ αντιστοιχεί μήκος 6.

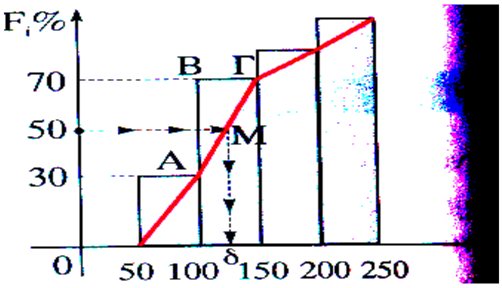
Σε διάστημα πλάτους 0΄,6 αντιστοιχεί μήκος $x = \dfrac{6 \cdot 0,6}{1} = 3,6 \cong 4$

Συνεπώς $\begin{array}{r} 9,95948 \\ -\quad 4 \\ \hline 9,95944 \end{array}$. Άρα, $\log\cos\left(24^0\ 22',6\right) = 9,95944$.

Εφαρμογή 8. Υπολογίσετε τη διάμεσο για τα παρακάτω ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.



Σχήμα 4.

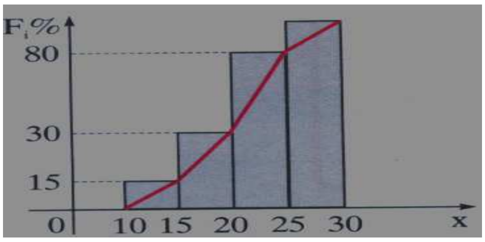


Σχήμα 5.

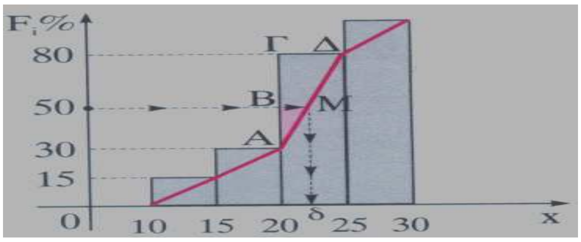
Λύση. Γεωμετρικά προκύπτει ότι η διάμεσος είναι μεταξύ του 100 και του 150.
Εκτελώ γραμμική παρεμβολή, οπότε προκύπτει

$$\frac{150-\delta}{\delta-100}=\frac{70-50}{50-30}\Leftrightarrow\frac{150-\delta}{\delta-100}=\frac{20}{20}\Leftrightarrow 150-\delta=\delta-100\Leftrightarrow\delta=125.$$

Εφαρμογή 9. Υπολογίστε τη διάμεσο για το παρακάτω ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.



Σχήμα 6.



Σχήμα 7.

Λύση. Γεωμετρικά προκύπτει ότι η διάμεσος είναι μεταξύ του 20 και του 25. Εκτελώ γραμμική παρεμβολή, οπότε προκύπτει $\frac{25-\delta}{\delta-20}=\frac{80-50}{50-30}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$.

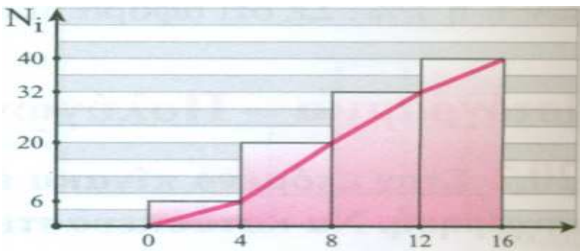
Άρα, $50-2\delta=3\delta-60\Leftrightarrow 110=5\delta\Leftrightarrow\delta=22$.

Εφαρμογή 10. Ο πίνακας παρουσιάζει την ηλικία 40 πλοίων. Κατασκευάστε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Πόσα πλοία έχουν ηλικία μικρότερη των 13 ετών;

Πίνακας 11.

Ηλικία πλοίων [...–...)	ν_i	N_i
0 – 4	6	6
4 – 8	14	20
8 – 12	12	32
12 – 16	8	40
Σύνολο	40	

Λύση. Από το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων προκύπτει το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Μικρότερη ηλικία των δεκατριών ετών έχουν τα 6 πλοία της $1^{ης}$ κλάσης, συν τα 14 πλοία της δεύτερης κλάσης, συν τα 12 πλοία της $3^{ης}$ κλάσης, συν τα x πλοία της $4^{ης}$ κλάσης.



Σχήμα 8.

<u>Υπολογισμός του x</u>

Σε διάστημα πλάτους 16 – 12 αντιστοιχούν 8 πλοία.
<u>Σε διάστημα πλάτους 13 – 12 αντιστοιχούν x πλοία.</u>

Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν 8 πλοία.
<u>Σε διάστημα πλάτους 1 αντιστοιχούν x πλοία.</u> Άρα $x = 2$.
Συνεπώς κάτω των 13 ετών είναι 6 + 14 + 12 + 2 = 34 πλοία.

2ος τρόπος υπολογισμού. Από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων, εκτελώντας κατευθείαν γραμμική παρεμβολή προκύπτει ότι

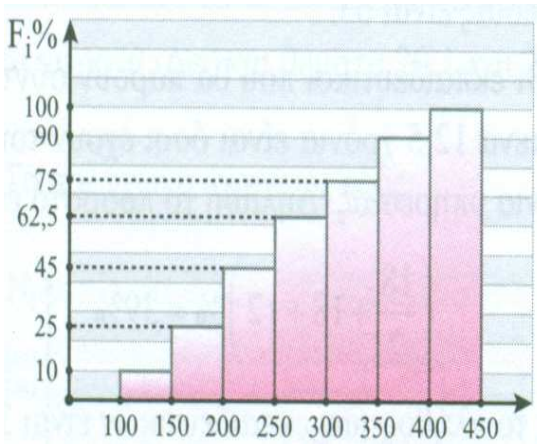
$$\frac{40-y}{y-32}=\frac{16-13}{13-12} \Leftrightarrow \frac{40-y}{y-32}=3 \Leftrightarrow 40-y=3(y-32) \Leftrightarrow y=34.$$

Εφαρμογή 11. Από το ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων του παρακάτω πίνακα που περιγράφει τη διάρκεια ζωής ηλεκτρικών λαμπτήρων (σε ώρες), βρείτε ποσοστό λαμπτήρων με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών;

Πίνακας 12.

Ώρες [...−...)	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$
100 – 150	4		
150 – 200	6		
200 – 250	8		
250 – 300	7		
300 – 350	5		
350 – 400	6		
400 – 450	4		
Σύνολο	40	100	

Λύση. Πάνω από 320 ώρες ζωής έχουν οι 4 λαμπτήρες της κλάσεως $[400-450)$, συν τους 6 λαμπτήρες της κλάσεως $[350-400)$ συν τους x λαμπτήρες της κλάσεως $[300-350)$.



Σχήμα 9. Ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων.

Υπολογισμός x με χρήση γραμμικής παρεμβολής.

Σε διάστημα πλάτους 350 – 300 αντιστοιχούν 5 λαμπτήρες.
Σε διάστημα πλάτους 320 – 300 αντιστοιχούν y λαμπτήρες.

Σε διάστημα πλάτους 50 αντιστοιχούν 5 λαμπτήρες.
Σε διάστημα πλάτους 20 αντιστοιχούν y λαμπτήρες.

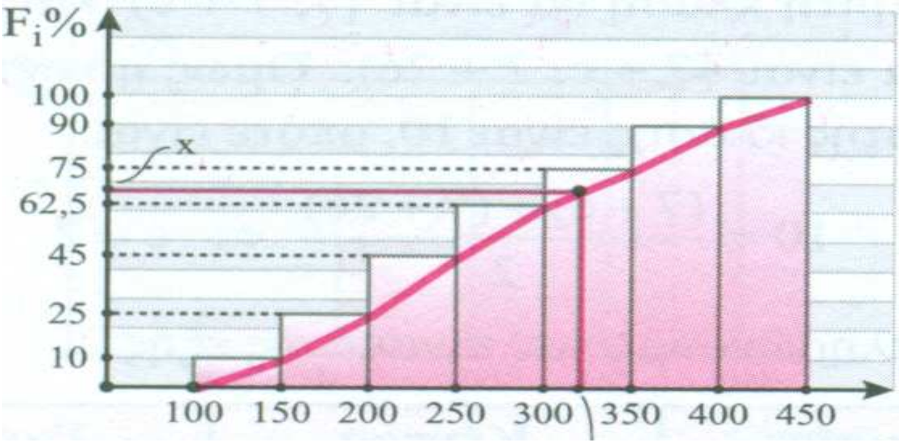
Άρα, $y = 2$ συνεπώς, $x = 3$

Οπότε 13 λαμπτήρες έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών. Αυτοί αντιστοιχούν σε ποσοστό $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100 = \frac{13}{40}100 = \frac{13}{4}10 = \frac{13}{4} = \frac{65}{2} = 32,5$.

2ος τρόπος υπολογισμού του ποσοστού. Γεωμετρικά προκύπτει ότι το x λαμβάνει τιμές μεταξύ 62,5% και 75%. Με χρήση γραμμικής παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\frac{350-320}{320-300}=\frac{75-x}{x-62,5} \Leftrightarrow \frac{30}{20}=\frac{75-x}{x-62,5} \Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{75-x}{x-62,5} \Leftrightarrow x=67,5$$

Σχήμα 10.



320

Συνεπώς, το 100–67,5= 32,5% των λαμπτήρων έχει διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών.

Εφαρμογή 12. Τα 100 πλοία ναυτιλιακής εταιρείας, έχουν ομαδοποιηθεί σε κλάσεις ίσου πλάτους. Έστω ότι στην κλάση $[12,\ 18)$ ανήκει το 30% των πλοίων.

Α. Πόσα πλοία της κλάσεως έχουν ηλικία μικρότερη των 16 ετών;

Β. Ποιο το ποσοστό των πλοίων της κλάσεως με ηλικίες μεταξύ 13 και 17 ετών;

Γ. Βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε στο διάστημα $[13,\ x)$ να ανήκουν 25 πλοία.

Λύση.

Α. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $16-12$ αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν x πλοία

Άρα $x=30\frac{4}{6}=20$ πλοία.

Β. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $17-13$ αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν x πλοία

Άρα $x=30\frac{4}{6}=20$ πλοία. Τα $\frac{2}{3}$ των πλοίων της κλάσεως βρίσκονται μεταξύ $13-17$.

Γ. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $x-13$ αντιστοιχούν 25 πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $x-13$ αντιστοιχούν 25 πλοία

Άρα, $6\cdot 25=30(x-13) \Leftrightarrow 25=5(x-13) \Leftrightarrow 5=x-13 \Leftrightarrow x=18$.