

Περιεχόμενα

8.1 Εισαγωγή στη στατιστική.....	4
8.2 Βασικές έννοιες.....	7
8.3 Περιγραφική στατιστική.....	8
8.4 Γραμμογράφημα ή χρονόγραμμα.....	9
8.5 Σημειόγραμμα (Dot diagram).....	12
Εφαρμογή 1.....	12
Εφαρμογή 2.....	12
Εφαρμογή 3.....	13
Εφαρμογή 4.....	13
8.6 Εύρος ή κύμανση.....	13
8.6.1 Μέθοδος εργασίας.....	14
Εφαρμογή 5.....	14
Εφαρμογή 6.....	14
Εφαρμογή 7.....	14
Εφαρμογή 8.....	15
Εφαρμογή 9.....	19
Εφαρμογή 10.....	22
8.7 Κυκλικό διάγραμμα (pie chart).....	26
Εφαρμογή 11.....	26
Εφαρμογή 12.....	26
Εφαρμογή 13.....	27
Εφαρμογή 14.....	27
8.8 Μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς.....	28
8.8.1 Μέση τιμή.....	28
8.8.2 Ιδιότητες της μέσης τιμής.....	29
Εφαρμογή 15.....	30
Εφαρμογή 16.....	30
Εφαρμογή 17.....	31
Εφαρμογή 18.....	36
8.8.3 Ιδιότητες του συμβολισμού Σ	37
Εφαρμογή 19.....	37
8.8.4 Σταθμικός μέσος.....	37
Μέθοδος εργασίας 1.....	38
Μέθοδος εργασίας 2.....	38
Εφαρμογή 20.....	38
Εφαρμογή 21.....	39
Εφαρμογή 22.....	39
Εφαρμογή 23.....	39
8.8.5 Διάμεσος.....	40
Μέθοδος εργασίας.....	40
Εφαρμογή 24.....	40
Εφαρμογή 25.....	41
Εφαρμογή 26.....	41
Εφαρμογή 27.....	41
8.8.6 Ιδιότητες της διαμέσου.....	41
8.8.7 Εύρεση διαμέσου από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.....	42
Εφαρμογή 28.....	42
Εφαρμογή 29.....	43
Εφαρμογή 30.....	43
Εφαρμογή 31.....	43
Εφαρμογή 32.....	44
Εφαρμογή 33.....	44
Εφαρμογή 34.....	45
Εφαρμογή 35.....	45

Εφαρμογή 36	45
Εφαρμογή 37	45
Εφαρμογή 38	46
8.9 Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων	46
Εφαρμογή 39	47
8.9.1 Γραφική παράσταση των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων	48
Εφαρμογή 40	50
Εφαρμογή 41	51
Εφαρμογή 42	51
Εφαρμογή 43	52
Εφαρμογή 44	52
Εφαρμογή 45	53
Εφαρμογή 46	53
Εφαρμογή 47	54
Εφαρμογή 48	56
Εφαρμογή 49	56
Εφαρμογή 50	58
Εφαρμογή 51	60
Εφαρμογή 52	60
Εφαρμογή 53	61
Εφαρμογή 54	61
Εφαρμογή 55	62
8.10 Διασπορά	63
Εφαρμογή 56	64
Εφαρμογή 57	64
Εφαρμογή 58	65
8.10.1 Ιδιότητες της διασποράς	65
Εφαρμογή 59	66
Εφαρμογή 60	67
8.11 Τυπική απόκλιση (Standard deviation)	67
8.12 Συντελεστής μεταβολής	70
8.12.1 Ιδιότητες του CV	70
Εφαρμογή 61	71
Εφαρμογή 62	71
Εφαρμογή 63	71
Εφαρμογή 64	72
Εφαρμογή 65	72
Εφαρμογή 66	73
Εφαρμογή 67	74
Εφαρμογή 68	75
Εφαρμογή 69	77
Εφαρμογή 70	79
Εφαρμογή 71	81
Εφαρμογή 72	82
8.13 Stem and leaf plots (φυλλογράφημα, μίσχος και φυλλαράκια)	83
8.13.1 Παρατήρηση	83
8.14 Το IQ test	84
8.15 Θηκόγραμμα (boxplot)	85
Εφαρμογή 73	86
Εφαρμογή 74	86
Εφαρμογή 75	86
Εφαρμογή 76	87
Εφαρμογή 77	87
8.16 Ερωτήσεις σωστού– λάθους	88
8.17 Ερωτήσεις	89

8.18 Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.....	91
8.19 Ασκήσεις για επίλυση.....	91
Άσκηση 1.....	91
Άσκηση 2.....	92
Άσκηση 3.....	92
Άσκηση 4.....	92
Άσκηση 5.....	92
Άσκηση 6.....	92
Άσκηση 7.....	92
Άσκηση 8.....	92
Άσκηση 9.....	92
Άσκηση 10.....	92
Άσκηση 11.....	93
Άσκηση 12.....	93
Άσκηση 13.....	93
Άσκηση 14.....	93
Άσκηση 15.....	93
Άσκηση 16.....	93
Άσκηση 17.....	93
Άσκηση 18.....	93
Άσκηση 19.....	93
Άσκηση 20.....	94
Άσκηση 21.....	94
Άσκηση 22.....	94
Άσκηση 23.....	94
Άσκηση 24.....	94
Άσκηση 25.....	94
Άσκηση 26.....	95
Άσκηση 27.....	95
Άσκηση 28.....	95

8.1 Εισαγωγή στη στατιστική

Στατιστική, είναι η επιστήμη που σκοπό έχει να εξάγει συμπεράσματα για την εξυπηρέτηση διαφόρων σκοπών, με βάση παρατηρήσεις που έχουν γίνει σχετικά με το προς μελέτη θέμα. Κύριο αντικείμενο της είναι η:

- συλλογή
- παρουσίαση
- ανάλυση στοιχείων ενός μικρού υποσυνόλου δεδομένων
- διατύπωση, με χρήση επαγωγής, των συμπερασμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση.

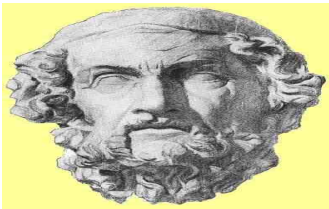
Βρίσκει εφαρμογές σε επιστήμες όπως, η:

- φυσική
- χημεία
- μετεωρολογία
- αστρονομία
- κοινωνιολογία¹
- οικονομία
- υγιεινή
- ιατρική
- βιολογία
- ανθρωπολογία
- πολιτική
- τεχνολογία.

Η χρησιμοποίηση του όρου, πιθανολογείται ότι προέρχεται από τη λατινική λέξη status που σημαίνει κράτος, διότι αρχικά δήλωνε την καταγραφή και κατάταξη ορισμένων γεγονότων που είχαν σημασία για όλο το κοινωνικό σύνολο (γεννήσεις, θάνατοι, γάμοι, ύψος παραγωγής ανά προϊόν, εγκλήματα). Με την έννοια αυτή, η στατιστική συναντάται στις περισσότερες αρχαίες κοινωνίες. Αναφέρονται περιπτώσεις απογραφής του πληθυσμού και συλλογής στατιστικών στοιχείων για τη ζωή του, στην αρχαία Αθήνα, στη Σπάρτη, στη Ρώμη, στην Αίγυπτο και στην Κίνα. Τον όρο στατιστική, αναφέρουν οι:

- Αριστοτέλης στην *Πολιτεία*
- Σωκράτης (*Ξενοφώντος Απομνημονεύματα*).

Πρώτη ιστορική συλλογή καθαρά στατιστικών στοιχείων, θεωρείται η απογραφή του πληθυσμού από τον Αυτοκράτορα της Κίνας Γιάο (Yao) το 2238 π.Χ. Μια μορφή στατιστικής με αριθμητικά δεδομένα από τον Όμηρο, είναι ο κατάλογος των πλοίων των Αχαιών στον Τρωικό πόλεμο, από όπου αντλήθηκαν στοιχεία της οικονομικής ευρωστίας και του πληθυσμού των πόλεων-κρατών που συμμετείχαν και πληροφορίες για την τότε ναυπηγική, ναυτιλία και ναυτική τέχνη.



Όμηρος



Ηρόδοτος

¹ Η πλειονότητα των κατόχων βραβείου Nobel, είναι πρωτότοκα παιδιά. Το 65% των μεσαίων παιδιών, βάζουν χρήματα στην άκρη. Τα στερνοπούλια επισκέπτονται τα νοσοκομεία λόγω τραυματισμών κατά 50% συχνότερα από τα μεγαλύτερα αδέλφια τους, σύμφωνα με έρευνα στα νοσοκομεία της Ιερουσαλήμ το 2013

Ο πατέρας της Ιστορίας Ηρόδοτος (484–420 πΧ), θεωρείται πρωτοπόρος στη στατιστική.² Αναφέρει ότι σε συνέλευση του Ξέρξη με τους στρατηγούς του, ο θεός του **Αρτάβανος**, είπε:

«Βασιλιά, αν δε λεχθούν όλες οι γνώμες δε μπορεί κανείς να διαλέξει την καλύτερη, αλλά πρέπει να δεχθεί την πρώτη. Διότι βλέποντας το μόνο του, δεν ξεχωρίζουμε το καθαρό χρυσάφι. Αφότου όμως το τρίβουμε στην πέτρα και το συγκρίνουμε με άλλο χρυσάφι, τότε αντιλαμβανόμαστε το ποιόν του».

Η μέθοδος αυτή (της παραγοντικής ανάλυσης), εφαρμόζεται σήμερα κυρίως για την ταξινόμηση των απόψεων κατά τις συνεδριάσεις του ΟΗΕ. Από τις «Ιστορίες» του Ηρόδοτου, προκύπτει ότι οι Έλληνες ήταν εξοικειωμένοι με τις έννοιες της τύχης, του δυνατού συμβάντος και του αδύνατου. Χαρακτηριστικά αναφέρει ο Ηρόδοτος ότι, ο βασιλιάς της Αιγύπτου Άμασις απευθυνόμενος στον τύραννο της Σάμου Πολυκράτη, λέει:

«Είναι χαρά να ακούει κανείς ότι ένας φίλος είναι ευτυχής, αλλά οι μεγάλες επιτυχίες σου δεν μου αρέσουν, διότι ξέρω πολύ καλά πόσο φθονερός είναι ο Θεός. Για αυτό και εύχομαι και για εμένα (και για όσους νοιάζομαι), να έχω επιτυχίες αλλά και αποτυχίες και έτσι να ζήσω με τέτοιες εναλλαγές, παρά να έχω πάντα επιτυχίες, διότι για κανέναν από όσους είχαν μόνο επιτυχίες δεν άκουσα ότι δεν πέθανε δυστυχισμένος και κατεστραμμένος».

Η θέση αυτή εκφράζεται στη στατιστική με τις δοκιμές Bernoulli, δηλαδή επιτυχίες και αποτυχίες με κάποια πιθανότητα. Δεν αναφέρονται απογραφές κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα, εκτός από το *Liber consualis* (στατιστική περιγραφή των μεταλλείων, ιχθυοτροφείων, αγροτεμαχίων) στην Αγγλία του Γουλιέλμου του Κατακτητή (1086 μ.Χ). Από τα τέλη του 13^{ου} και ιδίως τον 14^ο αιώνα, οι απογραφές αποκτούν πιο συστηματική μορφή στη Βενετία. Στην Αγγλία τον 17^ο αιώνα, αναπτύσσετε η στατιστική χάρη στις εργασίες των Edmund Halley και Sir William Petty (26.05.1623–16.12.1687).



Edmund Halley
(1656-1742)



Sir William Petty

Η 1^η γνωστή δημοσκόπηση στη σύγχρονη ιστορία, πραγματοποιήθηκε στην Πενσυλβανία των ΗΠΑ το 1824, όταν 500 πολίτες κλήθηκαν να απαντήσουν αν στις επερχόμενες εκλογές θα ψήφιζαν τον Andrew Jackson³ ή τον John Quincy Adams.⁴ Ο Jackson κέρδισε στη δημοσκόπηση και στις εκλογές. Μετά από περίπου 90 έτη, έγινε η 1^η παναμερικανική δημοσκόπηση που ανέδειξε νικητή τον Thomas Woodrow Wilson.⁵ Η στατιστική γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη μετά τον 2^ο Παγκόσμιο πόλεμο,

² Σύμφωνα με τη μελέτη *Herodotus Statistics–Quantitative commentary* (Τα στατιστικά του Ηρόδοτου–ποσοτικά σχόλια), του Βασιλείου Χομπά, καθηγητή του Τμήματος Οικονομικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Παν/μίου Αθηνών, που δημοσιεύθηκε στο αμερικανικό περιοδικό *Journal of the history of economic thought*.

³ Ο Andrew Jackson (15.03.1767–08.06.1845) ήταν ο 7^{ος} Πρόεδρος (04.03.1829–04.03.1837)

⁴ Ο John Quincy Adams (11.07.1767–23.02.1848) ήταν ο 6^{ος} Πρόεδρος (04.03.1825–04.03.1829) και γιος του John Adams, 2^{ου} Προέδρου (04.03.1797–04.03.1801)

⁵ Ο Thomas Woodrow Wilson (28.12.1856–03.02.1924) εκλέχθηκε 28^{ος} Πρόεδρος (04.03.1913–04.03.1921)

λόγω της ανάπτυξης των ηλεκτρονικών υπολογιστών που μπορούσαν να χειρίζονται μεγάλο αριθμό δεδομένων, σε σύντομο χρονικό διάστημα.



Andrew Jackson



John Quincy Adams



Thomas Woodrow Wilson



George Horace Gallup

Στην Ευρώπη, οι δημοσκοπήσεις ήρθαν στο τέλος του 2^{ου} Παγκοσμίου πολέμου, πρώτα στην Αγγλία, από τον George Horace Gallup⁶ (18.11.1901–26.07.1984) ο οποίος προέβλεψε την ήττα του έως τότε πρωθυπουργού Sir Winston Leonard Spencer Churchill. Ακολούθως, οι δημοσκοπήσεις χρησιμοποιήθηκαν στην κατεχόμενη Γερμανία, από τις συμμαχικές δυνάμεις, για να παρακολουθήσουν τις διαθέσεις της κοινής γνώμης απέναντι στον ναζισμό. Στην Ελλάδα, η 1^η δημοσκόπηση πραγματοποιήθηκε το 1946 από τη «Συμμαχική επιτροπή για την παρακολούθηση των ελληνικών εκλογών».⁷

Το **1956** έγινε η 2^η δημοσκόπηση, με αντικείμενο έρευνας τον αντιαμερικανισμό. Στις εκλογές του **1977** παρατηρείτε ραγδαία αύξηση του αριθμού των δημοσκοπήσεων, που συνοδεύεται από επιφυλάξεις ως προς την αποτελεσματικότητά τους. Η στατιστική, χωρίζεται σε τρεις κλάδους:

- Τον σχεδιασμό των πειραμάτων, που ασχολείται με τη διαδικασία συλλογής των δεδομένων.
- Την περιγραφική στατιστική (descriptive statistics), που ασχολείται με τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση των δεδομένων.
- Τη στατιστική συμπερασματολογία ή επαγωγική στατιστική, που ασχολείται με την ανάλυση και εξαγωγή των αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Η στατιστική μελέτη, περιλαμβάνει τις ακόλουθες 5 φάσεις:

1 ^η φάση	Σχεδιασμός της μελέτης (experimental design)
2 ^η φάση	Σύλλογή των στατιστικών στοιχείων
3 ^η φάση	Παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων (descriptive statistics)
4 ^η φάση	Ανάλυση των στατιστικών στοιχείων, με ειδικές μεθόδους
5 ^η φάση	Εξαγωγή συμπερασμάτων (inferential statistics)

Οι πλέον χαρακτηριστικές έννοιες στην επιστήμη της στατιστικής, είναι ο πληθυσμός, το δείγμα και η μεταβλητή.

⁶ Ο Αμερικανός George Horace Gallup ήταν πρωτοπόρος των τεχνικών δειγματοληψίας και επινόησε τη δημοσκόπηση για τη μέτρηση της κοινής γνώμης.

⁷ Βλέπε «Η ανάπτυξη των πολιτικών δημοσκοπήσεων στην Ελλάδα» του Ηλία Νικολακόπουλου, Καθηγητή τμήματος Πολιτικής Επιστήμης και Δημόσιας Διοίκησης, ΕΚΠΑ.

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

8.2 Βασικές έννοιες

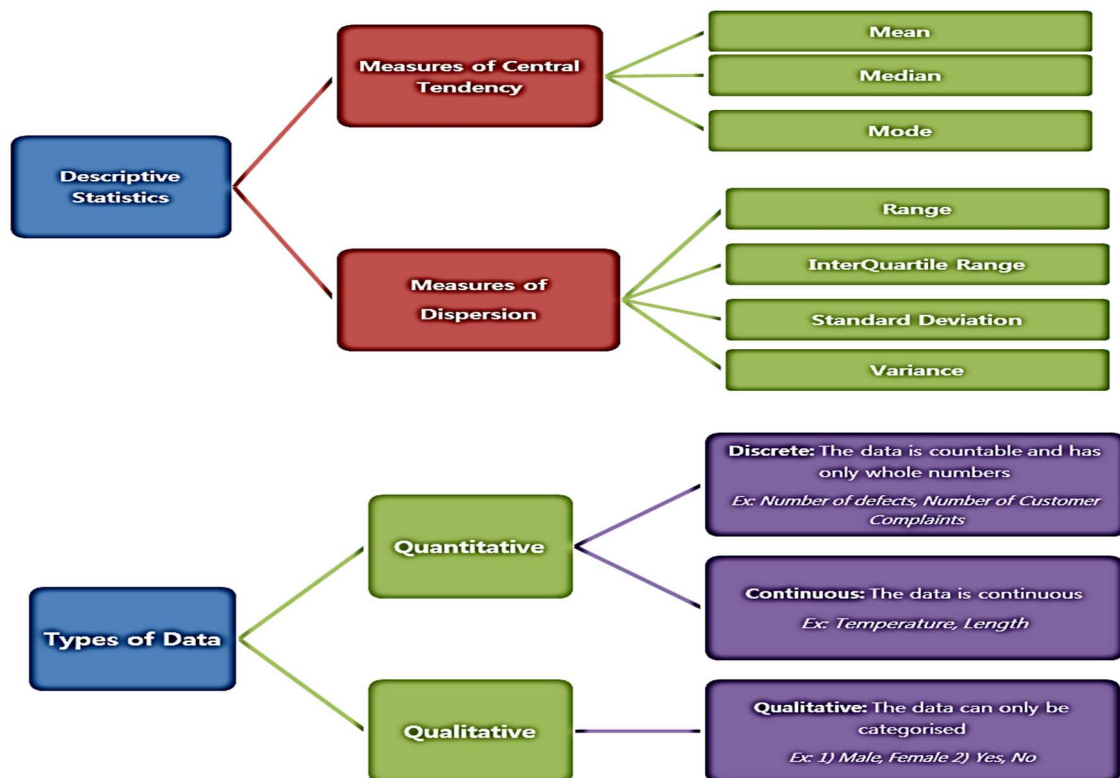
Πληθυσμός στη στατιστική, ονομάζεται το σύνολο των ανθρώπων ή αντικειμένων που εξετάζονται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. (Π.χ. οι οικογένειες μίας πόλης, οι σπουδαστές μίας σχολής, τα πλοία μίας ναυτιλιακής εταιρείας). Κάθε στοιχείο του πληθυσμού, ονομάζεται **άτομο**. Το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού, ονομάζεται **μέγεθος** του πληθυσμού και συμβολίζεται με **N** .

Δείγμα ενός πληθυσμού, ονομάζεται μία μικρή ομάδα ανθρώπων ή αντικειμένων που επιλέγονται από τον πληθυσμό. Συνεπώς, το δείγμα είναι υποσύνολο του πληθυσμού. Προκειμένου να εξαχθούν έγκυρα συμπεράσματα, πρέπει το δείγμα να είναι αντιπροσωπευτικό, δηλαδή να έχει επιλεγεί με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε μέλος του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Η εξέταση ενός δείγματος του πληθυσμού, ονομάζεται **δειγματοληψία**.

Μεταβλητή στη στατιστική, ονομάζεται εκείνο το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζεται ο πληθυσμός. Συμβολίζεται με X ή Y ή Z , κλπ. Τιμές της μεταβλητής, ονομάζονται εκείνες οι τιμές που μπορεί να λάβει μία μεταβλητή. Οι μεταβλητές, διακρίνονται σε ποιοτικές και ποσοτικές.

Ποιοτικές ονομάζονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί, δηλαδή δεν επιδέχονται μέτρηση (π.χ. οικογενειακή κατάσταση, τόπος γέννησης, θρησκεία, χρώμα ματιών ή μαλλιών ή αυτοκινήτου, είδος κατοικίας, μάρκα αυτοκινήτου, φύλλο ατόμου, τόπος διακοπών, επάγγελμα, τύπος πλοίων, επίπεδο μόρφωσης). Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά, πρέπει να είναι αντικειμενικά. Οι χαρακτηρισμοί «ψηλός», «αδύνατος», «καλός», «ωραίος», δεν αποτελούν ποιοτικά χαρακτηριστικά, διότι είναι εντελώς υποκειμενικά.

Ποσοτικές ονομάζονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί. Οι ποσοτικές μεταβλητές, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. Οι **διακριτές** μεταβλητές, λαμβάνουν μόνο μεμονωμένες (διακεκριμένες) τιμές (π.χ. πλήθος παιδιών, νούμερο πλοίων, αριθμός δωματίων, ενδείξεις ζαριού).



Οι **συνεχείς** μεταβλητές, λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή εντός ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών ή μίας ένωσης διαστημάτων. (π.χ. ύψος ή βάρος σπουδαστών, μισθός ναυτικών, χρονική διάρκεια τηλεφωνημάτων, ημέρες διακοπών, ώρες εργασίας).

Ένα δείγμα σπουδαστών, μπορεί να εξετασθεί ως προς τις μεταβλητές: βάρος, ύψος, επίδοση, φύλλο, τόπος καταγωγής, εθνικότητα, επάγγελμα γονέων, αριθμός απουσιών, πλήθος οφειλόμενων μαθημάτων.

Ένα δείγμα τηλεθεατών, μπορεί να εξετασθεί ως προς τις μεταβλητές: φύλλο, ηλικία, μορφωτικό επίπεδο, ποιες ή και πόσες ώρες της ημέρας παρακολουθούν, τηλεοπτικός δίαυλος (κανάλι) ή δίαυλοι που προτιμούν, είδος εκπομπών που επιλέγουν (αθλητικές, σήριαλ, ενημερωτικές, ψυχαγωγικές).

Ένα δείγμα προϊόντων, μπορεί να εξετασθεί ως προς τις μεταβλητές: τιμή, ποιότητα, εμφάνιση συσκευασίας (χάρτινη, πλαστική, δερμάτινη), βάρος συσκευασίας (κιλό, πεντάκιλο, δεκάκιλο).

8.3 Περιγραφική στατιστική

Τα στατιστικά δεδομένα, χωρίζονται σε ποιοτικά (qualitative) και ποσοτικά (quantitative). **Στατιστικός πίνακας** ονομάζεται ο πίνακας στον οποίο τοποθετούνται οι τιμές της μεταβλητής X , έτσι ώστε να είναι εύκολα κατανοητές και να διευκολύνεται η εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων. Οι στατιστικοί πίνακες, διακρίνονται σε γενικούς και ειδικούς.

Γενικοί ονομάζονται οι στατιστικοί πίνακες που περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από τη στατιστική έρευνα. Αποτελούν πηγή στατιστικών πληροφοριών.

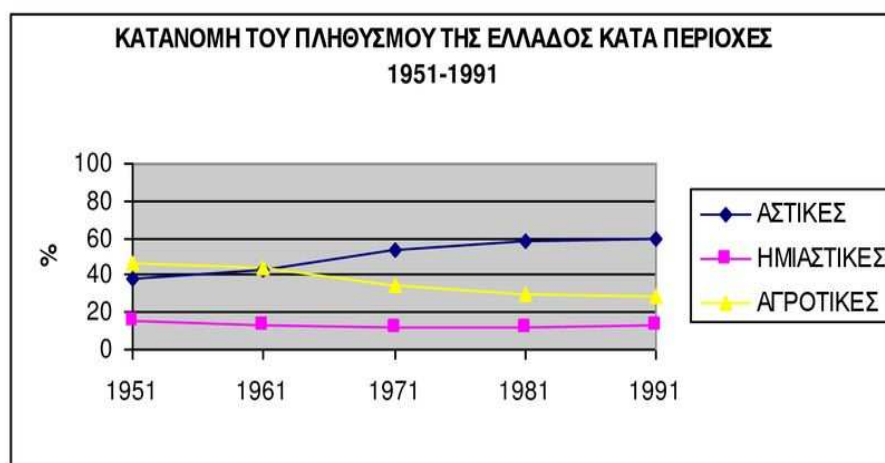
Ειδικοί ονομάζονται οι στατιστικοί πίνακες που είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία που περιέχουν, λαμβάνονται από τους γενικούς πίνακες. Κάθε στατιστικός πίνακας πρέπει να περιέχει:

- Τίτλο, που είναι γραμμένος στο πάνω μέρος του και δηλώνει συνοπτικά και με σαφήνεια το περιεχόμενο του.
- Επικεφαλίδες γραμμών και στηλών, που δηλώνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.
- Κύριο σώμα, που περιέχει τα στατιστικά δεδομένα διαχωρισμένα σε γραμμές και στήλες.
- Πηγή, που είναι γραμμένη στο κάτω μέρος του. Δείχνει την προέλευση των στατιστικών δεδομένων.

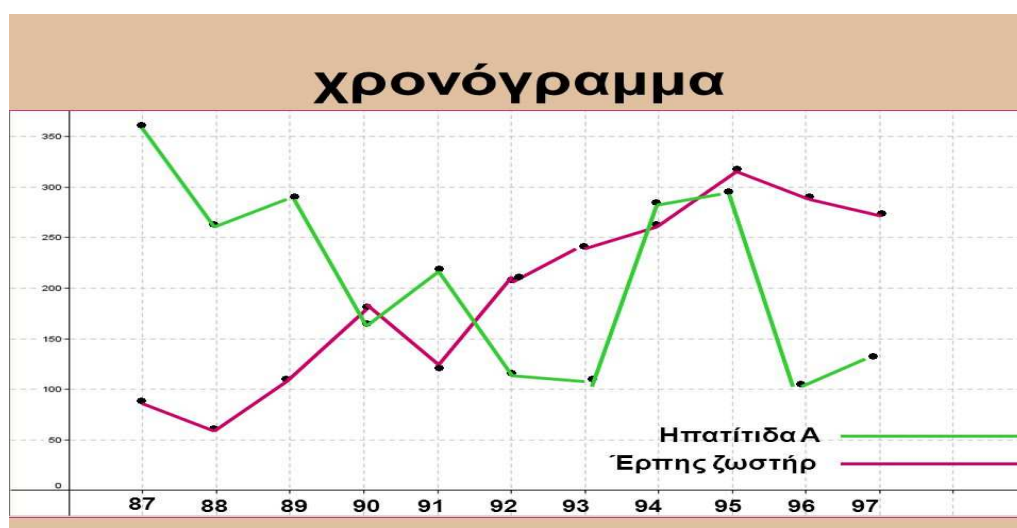
8.4 Γραμμογράφημα ή χρονόγραμμα

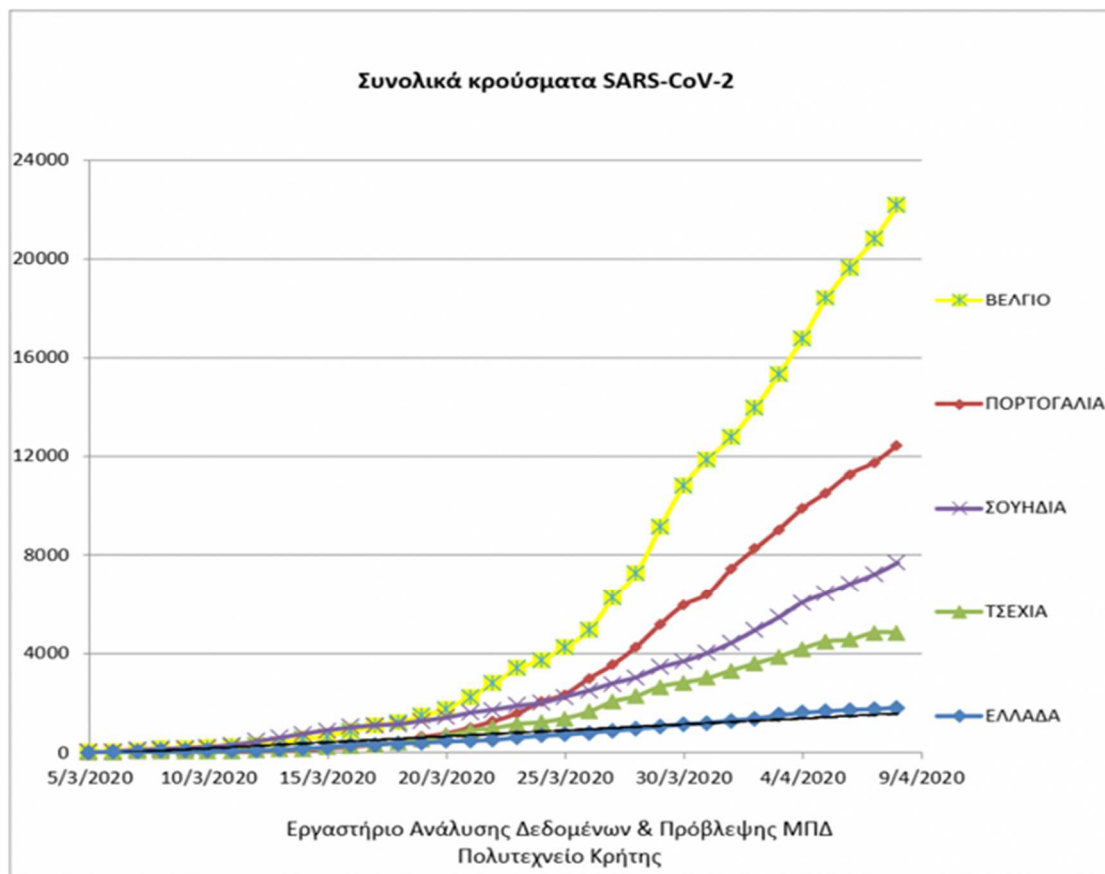
Χρησιμοποιείται για να παραστήσω γραφικά ένα φαινόμενο που εξελίσσεται με το πέρασμα του χρόνου (π.χ. πυρετός ενός ασθενούς, τιμή μιας μετοχής, γεννήσεις, θάνατοι, κέρδη ή ζημιές). Στον οριζόντιο άξονα, τοποθετούνται οι χρονικές στιγμές (ώρες, ημέρες, εβδομάδες, μήνες, έτη) και στον κάθετο άξονα, οι τιμές της μεταβλητής που επιθυμώ να μελετήσω.

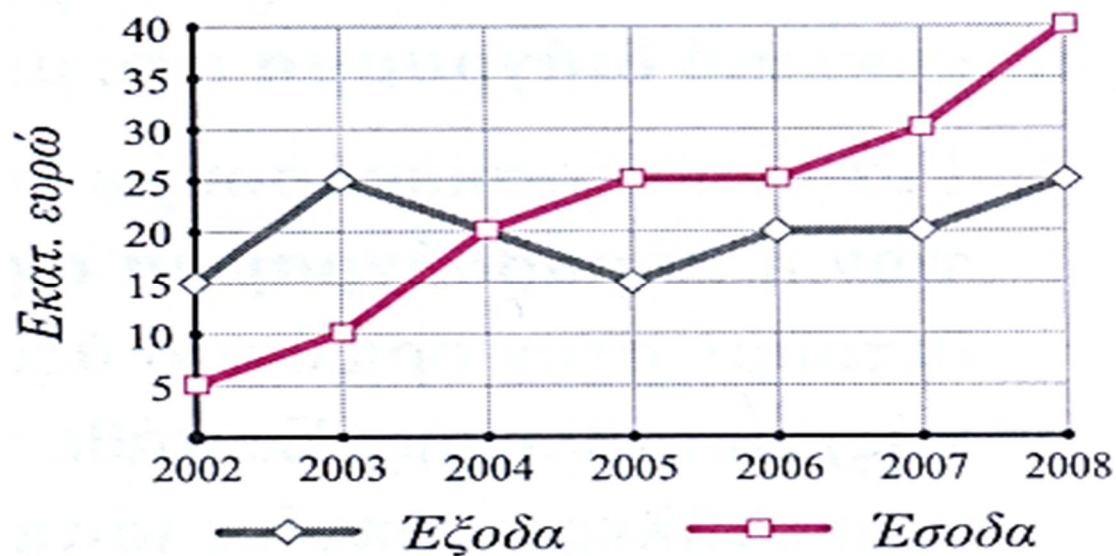
ΓΡΑΜΜΟΓΡΑΦΗΜΑ Η ΧΡΟΝΟΓΡΑΜΜΑ



55

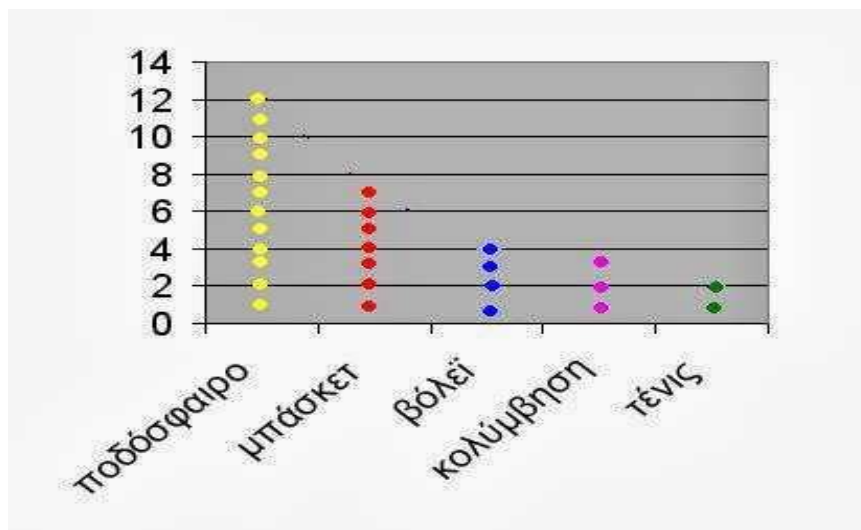






8.5 Σημειόγραμμα (Dot diagram)

Χρησιμοποιείται όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό (λίγες παρατηρήσεις). Στον οριζόντιο άξονα τοποθετώ τις τιμές της μεταβλητής και πάνω από κάθε τιμή βάζω κατακόρυφα, τόσες τελείες όση και η αντίστοιχη συχνότητα.

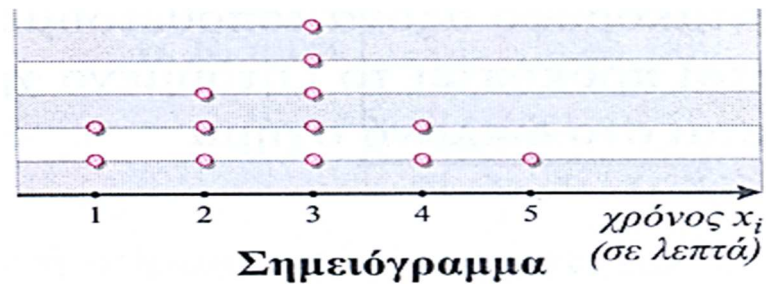


Εφαρμογή 1

Κατασκευάστε το σημειόγραμμα του παρακάτω πίνακα.

Διάρκεια σε λεπτά	Πλήθος τηλεφωνικών κλήσεων
1	2
2	3
3	5
4	2
5	1
Σύνολο	13

Λύση

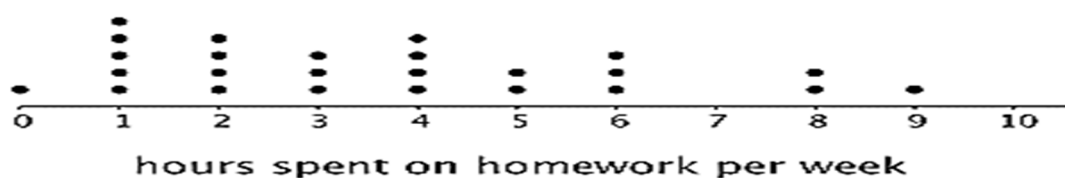


Εφαρμογή 2

Κατασκευάστε το σημειόγραμμα του παρακάτω πίνακα.

Ώρες μελέτης ανά εβδομάδα	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Πλήθος σπουδαστών	1	5	4	3	4	2	3	-	2	1

Λύση



Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

Εφαρμογή 3

Κατασκευάστε το σημειόγραμμα του παρακάτω πίνακα.

Διάρκεια πρωϊνού (σε λεπτά)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πλήθος πελατών	6	2	3	5	2	5	-	-	2	3	7	4	1

Λύση

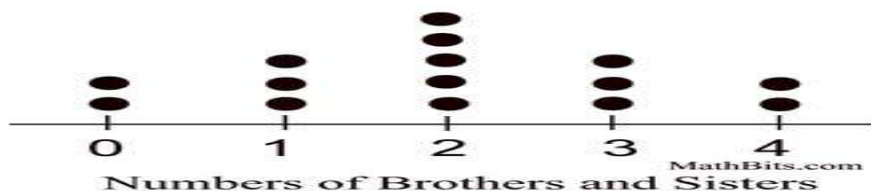


Εφαρμογή 4

Κατασκευάστε το σημειόγραμμα του παρακάτω πίνακα.

Πλήθος αδελφιών	Πλήθος σπουδαστών
0	2
1	3
2	5
3	3
4	2
Σύνολο	15

Λύση



8.6 Εύρος ή κύμανση

Εύρος ή κύμανση (Range) R , ονομάζεται η διαφορά της ελάχιστης από τη μέγιστη παρατήρηση. Δηλαδή $R = \beta - \alpha$, όπου α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη παρατήρηση. Για τα ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του κατωτέρου ορίου της 1^{ης} κλάσης, από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης.

Δεν είναι ικανοποιητικό μέτρο διασποράς, διότι εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές των παρατηρήσεων. Έτσι, αν οι δύο ακραίες τιμές είναι αρκετά απομακρυσμένες από τις άλλες, δίνουν ψεύτικη εικόνα.

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Χρησιμοποιείται αρκετά, στον έλεγχο ποιότητας.	Δε θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.
Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό.	Δε χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης.	Δεν υπολογίζεται, για ποιοτικά δεδομένα.

8.6.1 Μέθοδος εργασίας

How to Calculate the Range:

Example Values

12, 7, 17, 9, 16, 29, 8, 4, 15, 7, 29, 6, 17, 2, 5, 12, 8, 17, 6, 6, 17, 17

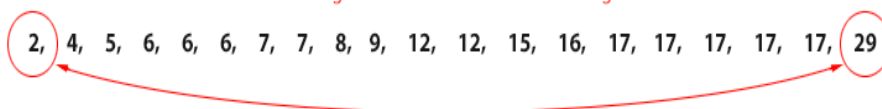
Step 1:

Sort all the values from low to high.

2, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 12, 12, 15, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 29

Step 2:

Subtract the lowest value from the highest value to determine the range.

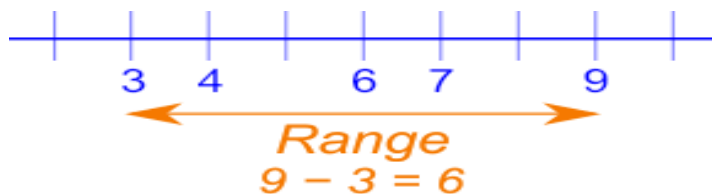


$$\text{Range} = 29 - 2 = \mathbf{27}$$

Εφαρμογή 5

Υπολογίστε το εύρος των παρατηρήσεων 3, 4, 6, 7, 9

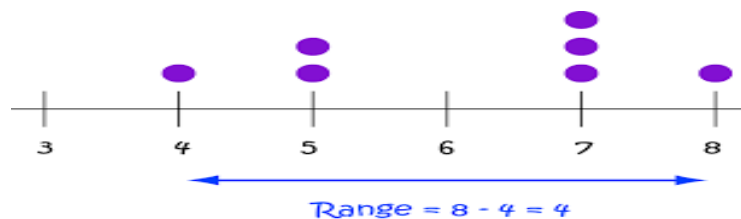
Λύση



Εφαρμογή 6

Υπολογίστε το εύρος των παρατηρήσεων 4, 5, 5, 7, 7, 7, 8

Λύση



Εφαρμογή 7

Υπολογίστε το εύρος των παρατηρήσεων 1, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 11, 11, 15

Λύση



Εφαρμογή 8

Συμπληρώστε τον πίνακα που αφορά τις πωλήσεις αυτοκινήτων που έκαναν 20 πωλητές.

Πλήθος πωλημένων αυτοκινήτων	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i	Σχετική επί τοις % συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική επί τοις % σχετική συχνότητα $F_i\%$
$x_1 = 0$	$\nu_1 = 10$	$N_1 =$	$f_1 =$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$
$x_2 = 1$	$\nu_2 = 5$	$N_2 =$	$f_2 =$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$
$x_3 = 2$	$\nu_3 = 2$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$
$x_4 = 3$	$\nu_4 = 2$	$N_4 =$	$f_4 =$	$F_4 =$	$f_4\% =$	$F_4\%$
$x_5 = 4$	$\nu_5 = 1$	$N_5 =$	$f_5 =$	$F_5 =$	$f_5\% =$	$F_5\% =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 20$		$\sum_{i=1}^5 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^5 f_i\% = 100\%$	

Λύση

Πλήθος πωλημένων αυτοκινήτων	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i	Σχετική επί τοις % συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική επί τοις % σχετική συχνότητα $F_i\%$
$x_1 = 0$	$\nu_1 = 10$	$N_1 = 10$	$f_1 = 0,5$	$F_1 = 0,50$	$f_1\% = 50\%$	$F_1\% = 50\%$
$x_2 = 1$	$\nu_2 = 5$	$N_2 = 15$	$f_2 = 0,25$	$F_2 = 0,75$	$f_2\% = 25\%$	$F_2\% = 75\%$
$x_3 = 2$	$\nu_3 = 2$	$N_3 = 17$	$f_3 = 0,10$	$F_3 = 0,85$	$f_3\% = 10\%$	$F_3\% = 85\%$
$x_4 = 3$	$\nu_4 = 2$	$N_4 = 19$	$f_4 = 0,10$	$F_4 = 0,95$	$f_4\% = 10\%$	$F_4\% = 95\%$
$x_5 = 4$	$\nu_5 = 1$	$N_5 = 20$	$f_5 = 0,05$	$F_5 = 1$	$f_5\% = 5\%$	$F_5\% = 100\%$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 20$		$\sum_{i=1}^5 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^5 f_i\% = 100\%$	

$$N_1 = v_1 = 10$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = N_1 + v_2 = 10 + 5 = 15$$

$$N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = N_2 + v_3 = 15 + 2 = 17$$

$$N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = N_3 + v_4 = 17 + 2 = 19$$

$$N_5 = N_4 + v_5 = 19 + 1 = 20 = v$$

$$f_1 \% = \frac{v_1}{v} 100 = \frac{10}{20} 100 = 50$$

$$f_2 \% = \frac{v_2}{v} 100 = \frac{5}{20} 100 = \frac{1}{4} 100 = 25$$

$$f_3 \% = \frac{v_3}{v} 100 = \frac{2}{20} 100 = \frac{1}{10} 100 = 10$$

$$f_4 \% = \frac{v_4}{v} 100 = \frac{2}{20} 100 = \frac{1}{10} 100 = 10$$

$$f_5 \% = \frac{v_5}{v} 100 = \frac{1}{20} 100 = \frac{0,5}{10} 100 = 5$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{20} = 0,5$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{1}{20} = \frac{0,5}{10} = 0,05$$

$$F_1 = f_1 = 0,50$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = F_1 + f_2 = 0,50 + 0,25 = 0,75$$

$$F_3 = \sum_{i=1}^3 f_i = F_2 + f_3 = 0,75 + 0,10 = 0,85$$

$$F_4 = \sum_{i=1}^4 f_i = F_3 + f_4 = 0,85 + 0,10 = 0,95$$

$$F_5 = \sum_{i=1}^5 f_i = F_4 + f_5 = 0,95 + 0,05 = 1$$

$$F_1 \% = f_1 \% = 50\%$$

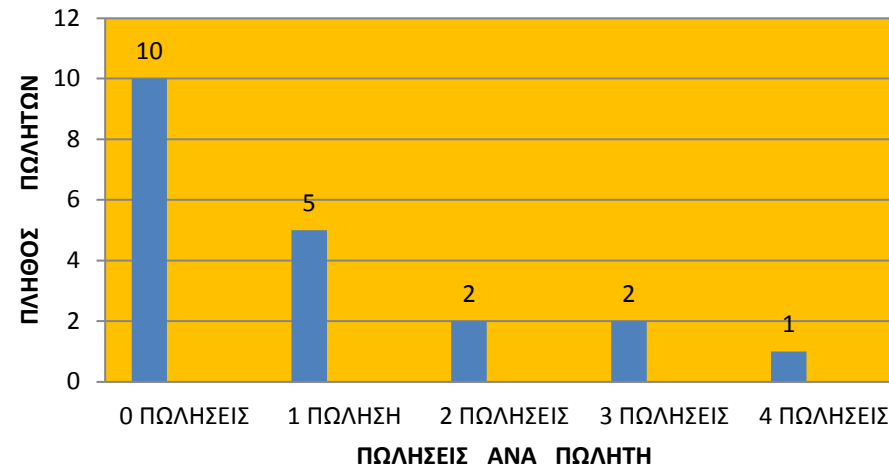
$$F_2 \% = f_1 \% + f_2 \% = F_1 \% + f_2 \% = 50\% + 25\% = 75\%$$

$$F_3 \% = \sum_{i=1}^3 f_i \% = F_2 \% + f_3 \% = 75\% + 10\% = 85\%$$

$$F_4 \% = \sum_{i=1}^4 f_i \% = F_3 \% + f_4 \% = 85\% + 10\% = 95\%$$

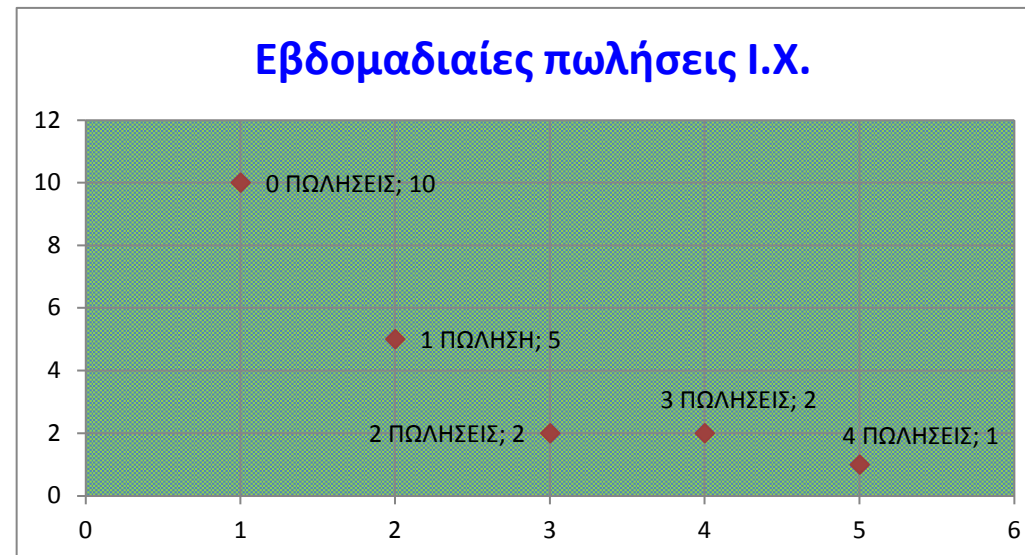
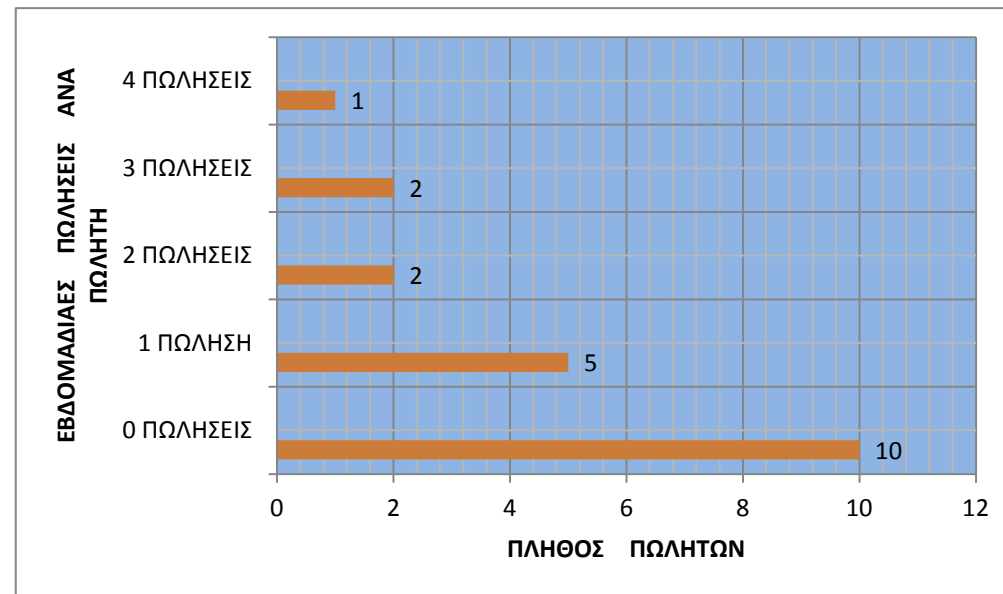
$$F_5 \% = \sum_{i=1}^5 f_i \% = F_4 \% + f_5 \% = 95\% + 5\% = 100\%$$

Πωλήσεις Ι.Χ. ανά εβδομάδα



Πωλήσεις Ι.Χ. ανά εβδομάδα





Εφαρμογή 9

Συμπληρώστε τον πίνακα, με το είδος του πλοίου στο οποίο θα ναυτολογηθούν ν σπουδαστές.

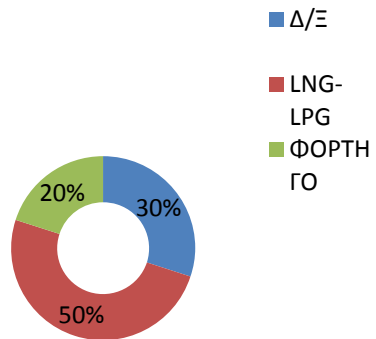
x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i
$x_1 = \text{Tanker}$	$\nu_1 =$	$N_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$f_1 =$	$F_1 =$
$x_2 = \text{LNG-LPG}$	$\nu_2 = 75$	$N_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% = 80\%$	$f_2 =$	$F_2 =$
$x_3 = \text{Φορτηγό}$	$\nu_3 = 30$	$N_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$f_3 =$	$F_3 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i =$		$\sum_{i=1}^3 f_i\% = 100\%$		$\sum_{i=1}^3 f_i = 1$	

Λύση

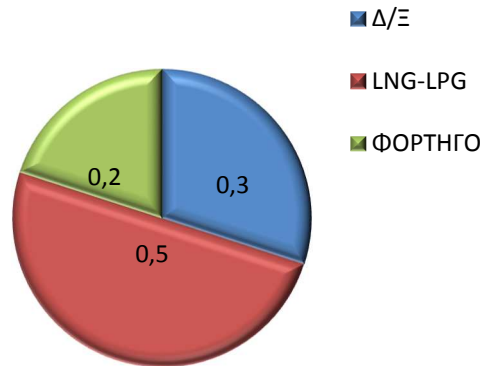
$$\text{Είναι } \frac{\nu_1 + 75}{\nu} = \frac{80}{100} \Leftrightarrow \frac{\nu_1 + 75}{\nu} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \frac{\nu_1 + 75}{\nu} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{\nu_1 + 75}{\nu_1 + 105} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(\nu_1 + 75) = 4(\nu_1 + 105) \Leftrightarrow 5\nu_1 + 375 = 4\nu_1 + 420 \Leftrightarrow \nu_1 = 45$$

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i
$x_1 = \text{Tanker}$	$\nu_1 = 45$	$N_1 = 45$	$f_1\% = 30\%$	$F_1\% = 30\%$	$f_1 = 0,3$	$F_1 = 0,3$
$x_2 = \text{LNG-LPG}$	$\nu_2 = 75$	$N_2 = 120$	$f_2\% = 50\%$	$F_2\% = 80\%$	$f_2 = 0,5$	$F_2 = 0,8$
$x_3 = \text{Φορτηγό}$	$\nu_3 = 30$	$N_3 = 150$	$f_3\% = 20\%$	$F_3\% = 100\%$	$f_3 = 0,2$	$F_3 = 1$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i = 150$		$\sum_{i=1}^3 f_i\% = 100\%$		$\sum_{i=1}^3 f_i = 1$	

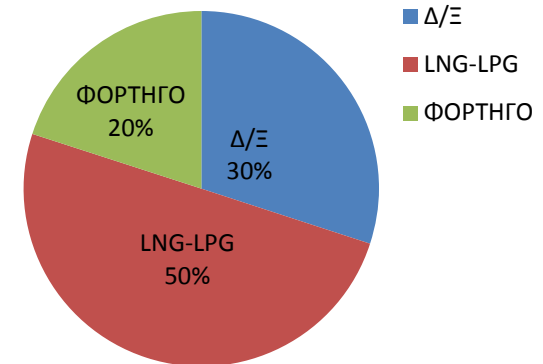
Είδος πλοίου



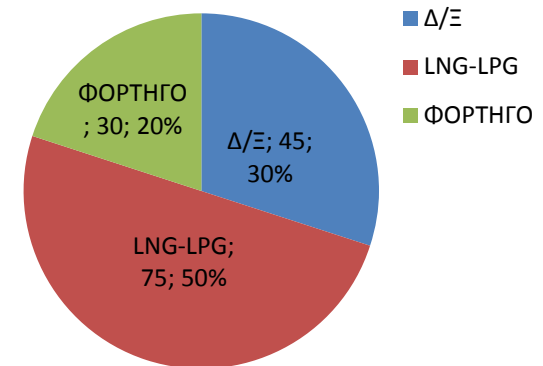
Είδος πλοίου



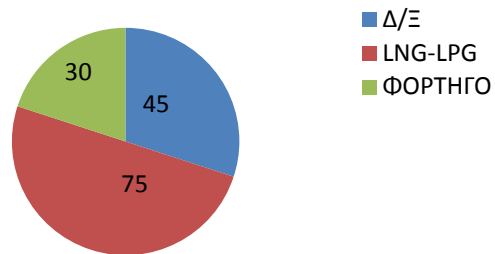
Είδος πλοίου

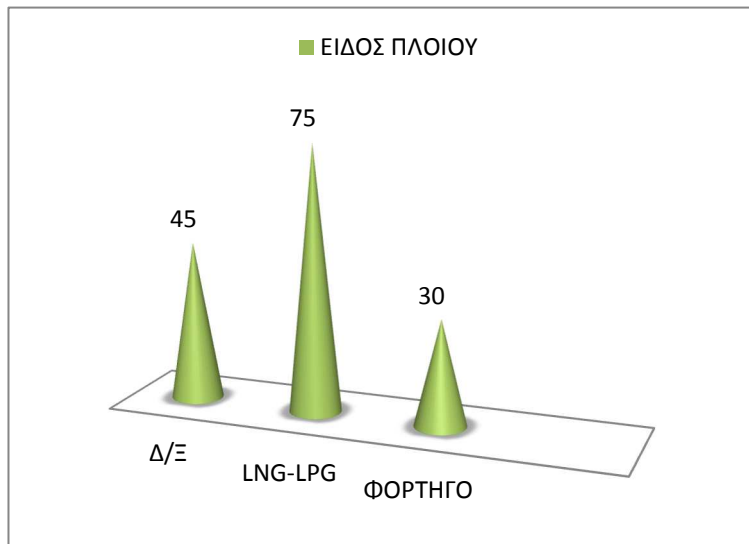
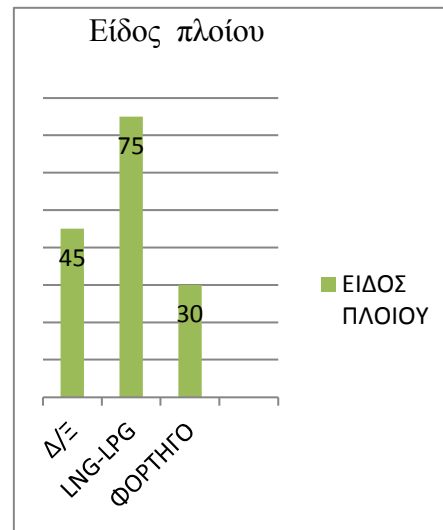
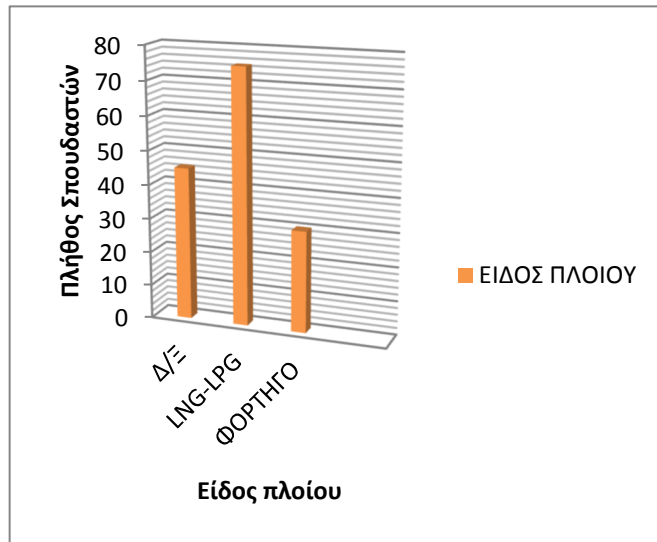


Είδος πλοίου



Είδος πλοίου





Εφαρμογή 10

Συμπληρώστε τον πίνακα των ωρών ημερήσιας μελέτης, 20 σπουδαστών.

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$\hat{a}_i$
$x_1 = 0$	$\nu_1 = 2$	$N_1 =$	$f_1 =$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\hat{a}_1 =$
$x_2 = 1$	$\nu_2 =$	$N_2 =$	$f_2 = 0,3$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\hat{a}_2 =$
$x_3 = 2$	$\nu_3 =$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\hat{a}_3 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i = 20$		$\sum_{i=1}^3 f_i =$		$\sum_{i=1}^3 f_i\% =$		$\sum_{i=1}^3 \hat{a}_i =$

Λύση

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$f_3 = 1 - f_1 - f_2 = 1 - 0,1 - 0,3 = 0,6$$

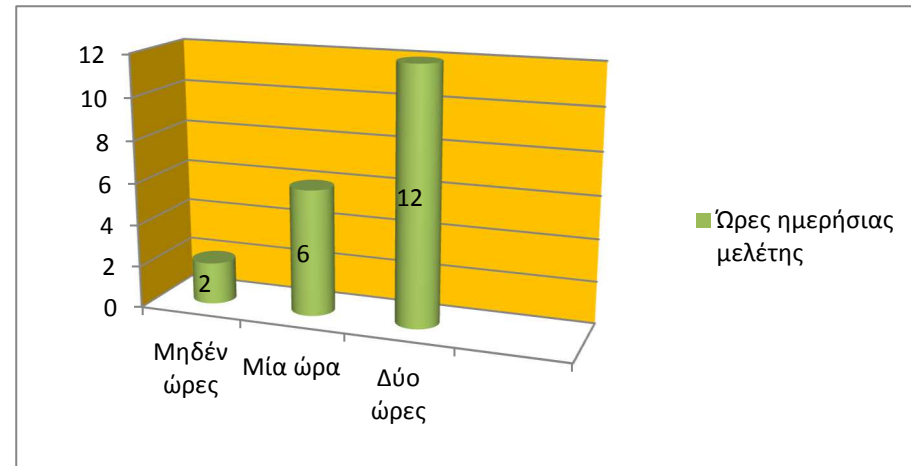
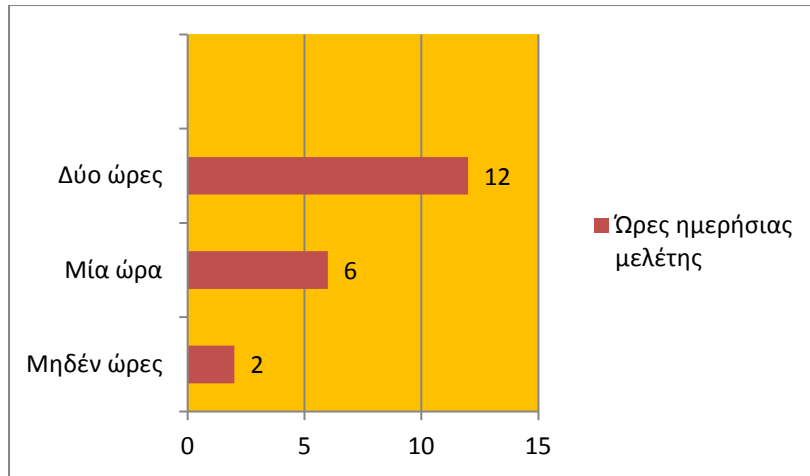
$$\hat{a}_1 = \frac{\nu_1}{\nu} 360^0 = \frac{2}{20} 360^0 = \frac{1}{10} 360^0 = 36^0$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\nu_2}{\nu} 360^0 = \frac{6}{20} 360^0 = \frac{3}{10} 360^0 = 3 \cdot 36^0 = 108^0$$

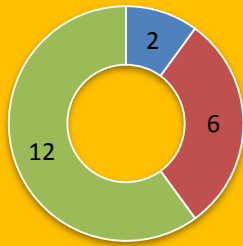
$$\hat{a}_3 = \frac{\nu_3}{\nu} 360^0 = \frac{12}{20} 360^0 = \frac{6}{10} 360^0 = 6 \cdot 36^0 = 216^0$$

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$\hat{a}_i$
$x_1 = 0$	$\nu_1 = 2$	$N_1 = 2$	$f_1 = 0,1$	$F_1 = 0,1$	$f_1\% = 10\%$	$F_1\% = 10\%$	$\hat{a}_1 = 36^0$
$x_2 = 1$	$\nu_2 = 6$	$N_2 = 8$	$f_2 = 0,3$	$F_2 = 0,4$	$f_2\% = 30\%$	$F_2\% = 40\%$	$\hat{a}_2 = 108^0$
$x_3 = 2$	$\nu_3 = 12$	$N_3 = 20$	$f_3 = 0,6$	$F_3 = 1$	$f_3\% = 60\%$	$F_3\% = 100\%$	$\hat{a}_3 = 216^0$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i = 20$		$\sum_{i=1}^3 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^3 f_i\% = 100\%$		$\sum_{i=1}^3 \hat{a}_i = 360^0$





Ώρες ημερήσιας μελέτης



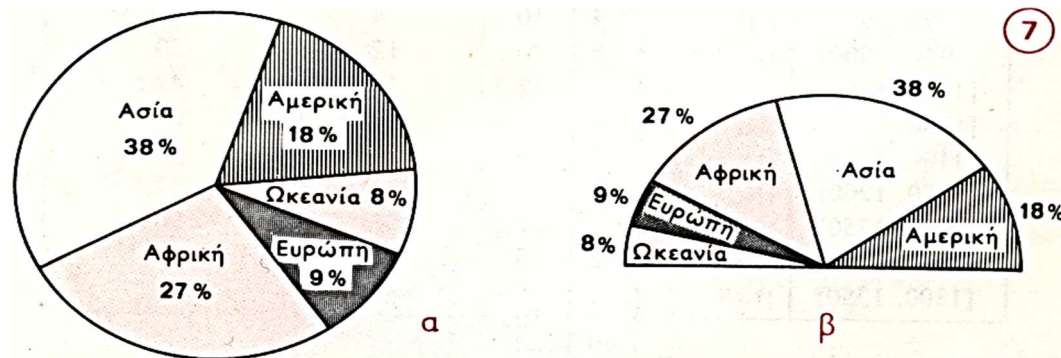
■ Μηδέν ώρες ■ Μία ώρα ■ Δύο ώρες

8.7 Κυκλικό διάγραμμα (pie chart)

Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση ποσοτικών και κυρίως ποιοτικών δεδομένων. Αποτελείται από έναν κυκλικό δίσκο χωρισμένο σε κυκλικούς τομείς, των οποίων τα εμβαδά (ή ισοδύναμα τα τόξα) είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i (ή τις σχετικές συχνότητες f_i) των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν a_i είναι το τόξο που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , τότε ισχύει ότι:

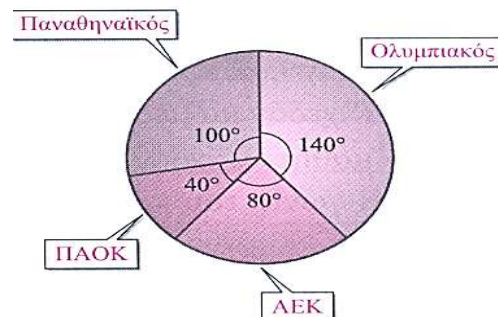
$$a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ \text{ αν πρόκειται για κύκλο}$$

$$a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 180^\circ = f_i \cdot 180^\circ \text{ αν πρόκειται για ημικύκλιο.}$$



Εφαρμογή 11

Αν οι οπαδοί του ΠΑΟΚ είναι 10, τότε από το κυκλικό διάγραμμα, υπολογίστε τους οπαδούς των άλλων ομάδων.



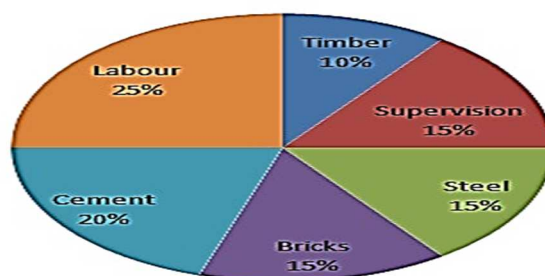
Λύση

Είναι 20 της AEK, 25 του Παναθηναϊκού και 35 του Ολυμπιακού.

Εφαρμογή 12

Αν η κατασκευή ενός κτηρίου κόστισε 300.000 €, βρείτε τα επιμέρους κόστη, από το κυκλικό διάγραμμα.

Cost of Construction of House

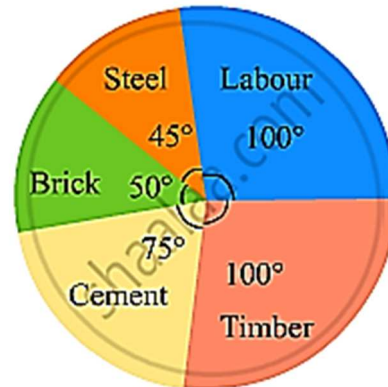


Λύση

Είναι 75.000 € εργασία (labour)
 60.000 € τσιμέντα (cement)
 15.000 € τούβλα (bricks)
 15.000 € ατσάλι (steel)
 15.000 € επιβλέπων μηχανικός (supervision)
 10.000 € ξυλεία (timber)

Εφαρμογή 13

Αν η κατασκευή ενός κτηρίου κόστισε 1.000.000 €, βρείτε τα επιμέρους κόστη, από το κυκλικό διάγραμμα.



Λύση

$$\text{Είναι } \frac{100^\circ}{360^\circ} 10^6 = \frac{10}{36} 10^6 = \frac{5}{18} 10^6 \text{ € εργασία (labour)}$$

$$\frac{100^\circ}{360^\circ} 10^6 = \frac{10}{36} 10^6 = \frac{5}{18} 10^6 \text{ € ξυλεία (timber)}$$

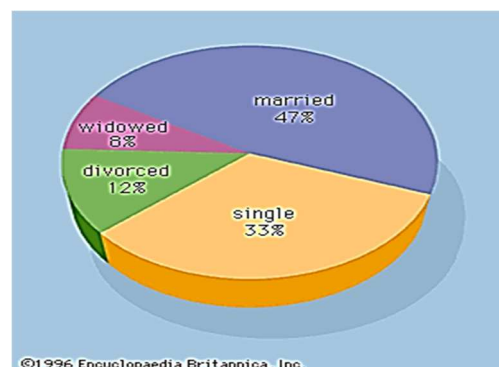
$$\frac{75^\circ}{360^\circ} 10^6 = \frac{3 \cdot 25}{3 \cdot 120} 10^6 = \frac{25}{120} 10^6 = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 24} 10^6 = \frac{5}{24} 10^6 \text{ € τσιμέντα (cement)}$$

$$\frac{50^\circ}{360^\circ} 10^6 = \frac{5}{36} 10^6 \text{ € τούβλα (bricks)}$$

$$\frac{45^\circ}{360^\circ} 10^6 = \frac{5 \cdot 9}{40 \cdot 9} 10^6 = \frac{5}{40} 10^6 = \frac{1}{8} 10^6 = 125.000 \text{ € ατσάλι (steel)}$$

Εφαρμογή 14

Αν η οικογενειακή κατάσταση 200 ναυτικών περιγράφεται από το κυκλικό διάγραμμα, βρείτε τα απόλυτα νούμερα (συχνότητες v_i).



Λύση

Οικογενειακή κατάσταση	V_i
έγγαμοι	94
ανύπανδροι	66
σε διάσταση	24
σε χηρεία	16
Σύνολο	200

8.8 Μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς

Για την περαιτέρω επεξεργασία των δεδομένων, χρειάζονται ορισμένα χαρακτηριστικά μέτρα που καλούνται παράμετροι της κατανομής του πληθυσμού. Οι παράμετροι είναι αριθμητικές εκφράσεις που καθορίζουν τη θέση, τη διασπορά και τη μορφή της κατανομής.

Τα μέτρα θέσης (**location measures**) με πληροφορούν για τη θέση γύρω από την οποία είναι συγκεντρωμένες οι περισσότερες παρατηρήσεις.

Τα μέτρα διασποράς (**measures of variability**) ή μεταβλητότητας (**dispersion measures**) με πληροφορούν σχετικά με το πόσο συγκεντρωμένες ή διασκορπισμένες είναι οι παρατηρήσεις γύρω από τα μέτρα θέσης. Ανάλογα αν αναφέρομαι σε όλο τον πληθυσμό ή σε ένα δείγμα του, ισχύουν τα παρακάτω σύμβολα:

	Πληθυσμός (N)	Δείγμα (n)
Μέση τιμή	μ	$\bar{x}$
Διασπορά	σ^2	s^2

8.8.1 Μέση τιμή

Μέση τιμή $\bar{x}$ (ή μέσος όρος ή αριθμητικός μέσος, average, arithmetic mean) είναι το άθροισμα των παρατηρήσεων, δια του πλήθους τους.

- Όταν σε δείγμα μεγέθους N οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X είναι

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_N, \text{ τότε η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση } \bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}$$

Ο ανωτέρω τύπος, χρησιμοποιείται όταν οι παρατηρήσεις είναι λίγες και διαφορετικές μεταξύ τους. Στο άθροισμα $\sum_{i=1}^N t_i$ το N είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

- Όταν $x_1, x_2, x_3, \dots, x_K$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X και $v_1, v_2, v_3, \dots, v_K$ είναι οι αντίστοιχες συχνότητες, τότε η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση

$$\bar{x} = \frac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + \dots + v_K \cdot x_K}{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_K} = \frac{\sum_{i=1}^K v_i \cdot x_i}{N}$$

Στο άθροισμα $\sum_{i=1}^K v_i \cdot x_i$ το K δίνει το πλήθος των δυνατών τιμών της μεταβλητής και όχι το μέγεθος του δείγματος.

- Όταν $x_1, x_2, x_3, \dots, x_K$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X και $f_1, f_2, f_3, \dots, f_K$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες, τότε

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_k \cdot f_k = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i$$

Αν γνωρίζω τις σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό ($f_i\%$), τότε χρησιμοποιώ τον τύπο
$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1\% + x_2 \cdot f_2\% + x_3 \cdot f_3\% + \dots + x_k \cdot f_k\%}{100} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i\%$$

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της.	Επηρεάζεται πολύ, από τις ακραίες τιμές.
Είναι μοναδική, για κάθε σύνολο δεδομένων.	Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε κάποια δυνατή τιμή της μεταβλητής.
Ο υπολογισμός της, είναι σχετικά εύκολος.	Όταν η μεταβλητή X είναι διακριτή, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος.
Είναι εύκολα κατανοητή.	Δεν υπολογίζεται, για ποιοτικά δεδομένα.
Χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό και για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.	Είναι δύσκολος ο υπολογισμός της, σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές τις ακραίες τιμές.

8.8.2 Ιδιότητες της μέσης τιμής

1 Αν $t_{\min}$ είναι η μικρότερη και $t_{\max}$ η μεγαλύτερη παρατήρηση, τότε $t_{\min} < \bar{x} < t_{\max}$

2 Το άθροισμα των διαφορών των παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ από τη μέση τιμή $\bar{x}$ είναι πάντα μηδέν, δηλαδή $\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x}) = 0$

3 Αν οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε οι παρατηρήσεις $t_1 + c, t_2 + c, t_3 + c, \dots, t_n + c$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} + c$. Έτσι, αν $c > 0$ η μέση τιμή αυξάνεται ενώ αν $c < 0$ μειώνεται.

4 Αν οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1, k \cdot t_2, k \cdot t_3, \dots, k \cdot t_n$ έχουν μέση τιμή $k \cdot \bar{x}$

5 Αν οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1 + c, k \cdot t_2 + c, k \cdot t_3 + c, \dots, k \cdot t_n + c$ έχουν μέση τιμή $k \cdot \bar{x} + c$

Συνοπτικά, ισχύει ότι:

Παρατηρήσεις	Μέση τιμή
$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$	$\bar{x}$
$t_1 + c, t_2 + c, t_3 + c, \dots, t_n + c$	$\bar{x} + c$
$k \cdot t_1, k \cdot t_2, k \cdot t_3, \dots, k \cdot t_n$	$k \cdot \bar{x}$
$k \cdot t_1 + c, k \cdot t_2 + c, k \cdot t_3 + c, \dots, k \cdot t_n + c$	$k \cdot \bar{x} + c$

6 Αν το αρχικό δείγμα έχει χωρισθεί σε επιμέρους ομάδες και έχει υπολογισθεί η μέση τιμή της κάθε ομάδας χωριστά, τότε η μέση τιμή του αρχικού

δείγματος είναι $\bar{x} = \frac{\nu_1 \cdot \bar{x}_1 + \nu_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + \nu_k \cdot \bar{x}_k}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}$, όπου $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ είναι οι μέσες τιμές των επιμέρους ομάδων και $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ είναι τα μεγέθη των επιμέρους ομάδων.

Εφαρμογή 15

Μία τάξη αποτελείται από **15** αγόρια και **25** κορίτσια. Αν η μέση βαθμολογία των αγοριών είναι **16** και των κοριτσιών **14**, τότε ποια είναι η μέση βαθμολογία της τάξης;

Λύση

$$\text{Η μέση βαθμολογία της τάξης είναι } \bar{x} = \frac{15 \cdot 16 + 25 \cdot 14}{15 + 25} = \frac{240 + 350}{40} = 14,7$$

Εφαρμογή 16

Αν $\bar{x} = 5$ υπολογίστε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ του παρακάτω πίνακα.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
2	0,1	
3	α	
5	0,4	
6	β	
8	0,2	
Σύνολα	$\sum f_i =$	$\sum x_i \cdot f_i =$

Λύση

$$\text{Ισχύει ότι } \sum_{i=1}^5 f_i = 1 \Leftrightarrow 0,1 + \alpha + 0,4 + \beta + 0,2 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 0,7 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0,3$$

$$\text{Ισχύει ότι } \bar{x} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i f_i = 5 \Leftrightarrow$$

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 = 5 \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{1}{10} + 3\alpha + 5 \frac{4}{10} + 6\beta + 8 \frac{2}{10} = 5 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha + 6\beta + 3,8 = 5 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha + 6\beta = 1,2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 2\beta = 0,4$$

$$\text{Άρα, } \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0,4 \\ \alpha + \beta = 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0,2 \\ \beta = 0,1 \end{cases}$$

Εφαρμογή 17

Συμπληρώστε τον πίνακα που περιγράφει τη βαθμολογία 25 σπουδαστών. Ποια είναι η μέση βαθμολογία; Ποιο είναι το ποσοστό των σπουδαστών που προάγονται;

Βαθμολογία	Απόλυτη συχνότητα ν_i	Σχετική επί % συχνότητα $f_i\%$	Σχετική συχνότητα f_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i\nu_i$	Αθροιστική συχνότητα N_i	x_if_i
$[0, 2)$	$\nu_1 = 3$	$f_1\% =$	$f_1 =$	$x_1 =$	$x_1\nu_1 =$	$N_1 =$	$x_1f_1 =$
$[2, 4)$	$\nu_2 = 5$	$f_2\% =$	$f_2 =$	$x_2 = 3$	$x_2\nu_2 = 15$	$N_2 =$	$x_2f_2 =$
$[4, 6)$	$\nu_3 = 7$	$f_3\% =$	$f_3 =$	$x_3 = 5$	$x_3\nu_3 = 35$	$N_3 =$	$x_3f_3 =$
$[6, 8)$	$\nu_4 = 4$	$f_4\% =$	$f_4 =$	$x_4 =$	$x_4\nu_4 =$	$N_4 =$	$x_4f_4 =$
$[8, 10]$	$\nu_5 = 6$	$f_5\% =$	$f_5 =$	$x_5 =$	$x_5\nu_5 =$	$N_5 =$	$x_5f_5 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 25$	$\sum_{i=1}^5 f_i\% =$	$\sum_{i=1}^5 f_i =$		$\sum_{i=1}^5 x_i\nu_i =$		$\sum_{i=1}^5 x_if_i =$

Λύση

Η μέση βαθμολογία, προκύπτει από τον τύπο $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i\nu_i}{\nu} = \frac{135}{25} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5} = 5,4$

Ισχύει ότι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i\nu_i}{\nu} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \dots + x_5\nu_5}{\nu} = \frac{x_1\nu_1}{\nu} + \frac{x_2\nu_2}{\nu} + \dots + \frac{x_5\nu_5}{\nu} = x_1\frac{\nu_1}{\nu} + x_2\frac{\nu_2}{\nu} + \dots + x_5\frac{\nu_5}{\nu} =$

$$x_1f_1 + x_2f_2 + \dots + x_5f_5 = \sum_{i=1}^5 x_if_i = 5,4$$

Βαθμολογία	Απόλυτη συχνότητα ν_i	Σχετική επί % συχνότητα $f_i\%$	Σχετική συχνότητα f_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i \nu_i$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i f_i$
$[0, 2)$	$\nu_1 = 3$	$f_1\% = 12\%$	$f_1 = 0,12$	$x_1 = 1$	$x_1 \nu_1 = 3$	$N_1 = 3$	$x_1 f_1 = 0,12$
$[2, 4)$	$\nu_2 = 5$	$f_2\% = 20\%$	$f_2 = 0,20$	$x_2 = 3$	$x_2 \nu_2 = 15$	$N_2 = 8$	$x_2 f_2 = 0,60$
$[4, 6)$	$\nu_3 = 7$	$f_3\% = 28\%$	$f_3 = 0,28$	$x_3 = 5$	$x_3 \nu_3 = 35$	$N_3 = 15$	$x_3 f_3 = 1,40$
$[6, 8)$	$\nu_4 = 4$	$f_4\% = 16\%$	$f_4 = 0,16$	$x_4 = 7$	$x_4 \nu_4 = 28$	$N_4 = 19$	$x_4 f_4 = 1,12$
$[8, 10)$	$\nu_5 = 6$	$f_5\% = 24\%$	$f_5 = 0,24$	$x_5 = 9$	$x_5 \nu_5 = 54$	$N_5 = 25$	$x_5 f_5 = 2,16$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 25$	$\sum_{i=1}^5 f_i\% = 100\%$	$\sum_{i=1}^5 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i = 135$		$\sum_{i=1}^5 x_i f_i = 5,4$

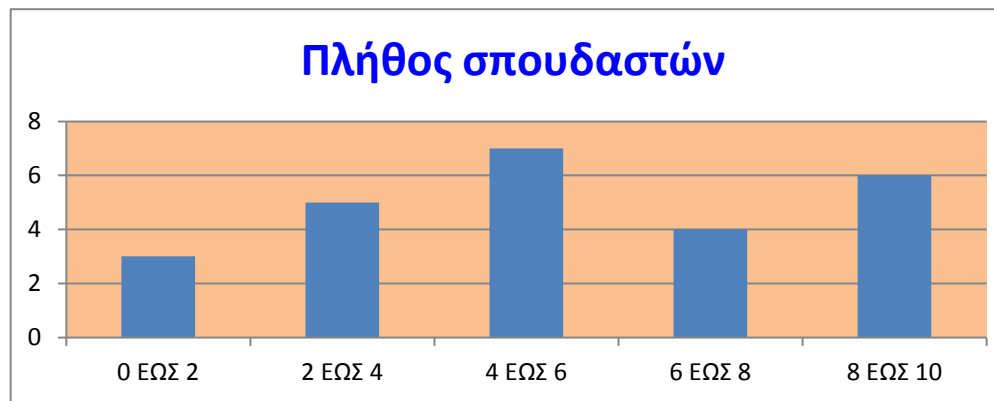
Προάγονται όσοι έλαβαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του πέντε, άρα $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 28\% + 16\% + 24\% = 68\%$

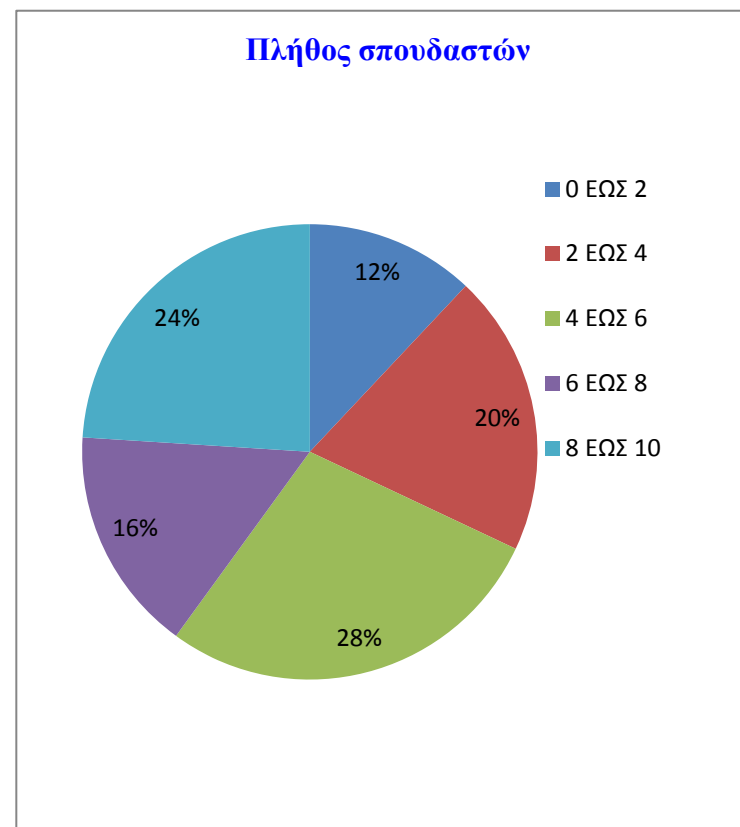
Απορρίπτονται όσοι έλαβαν βαθμό μικρότερο του πέντε, άρα $f_1\% + f_2\% = 12\% + 20\% = 32\%$

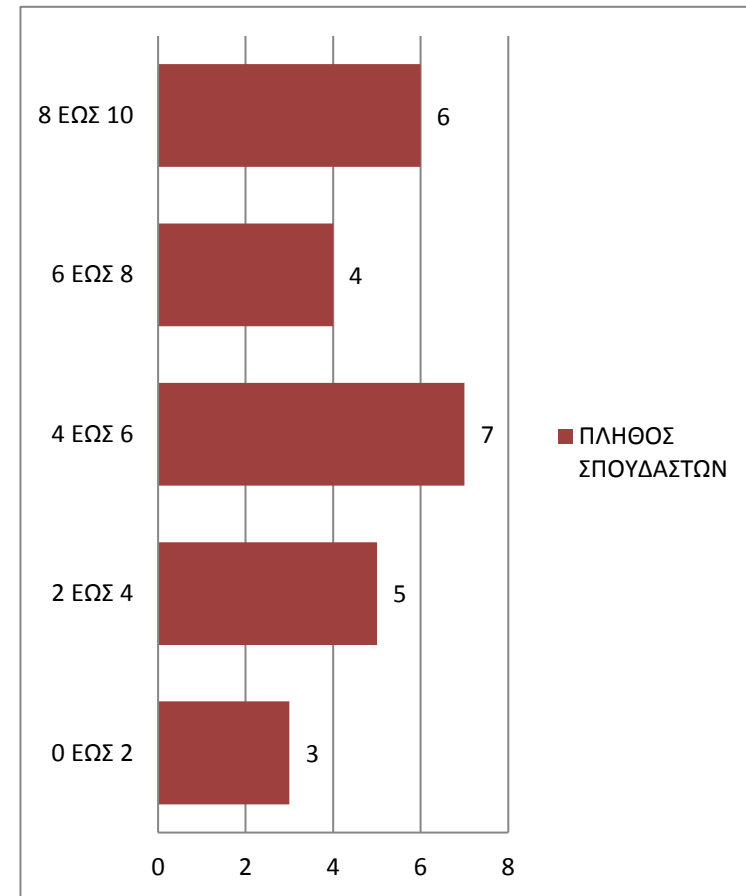
Από τους 25 σπουδαστές, οι 08 απορρίπτονται ενώ οι 17 προάγονται.

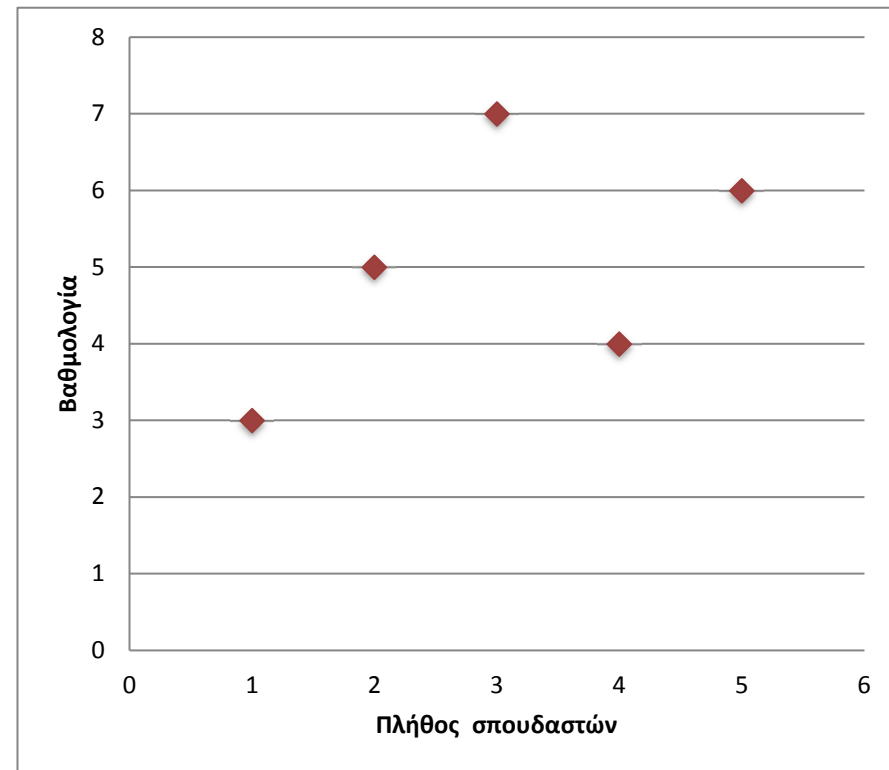
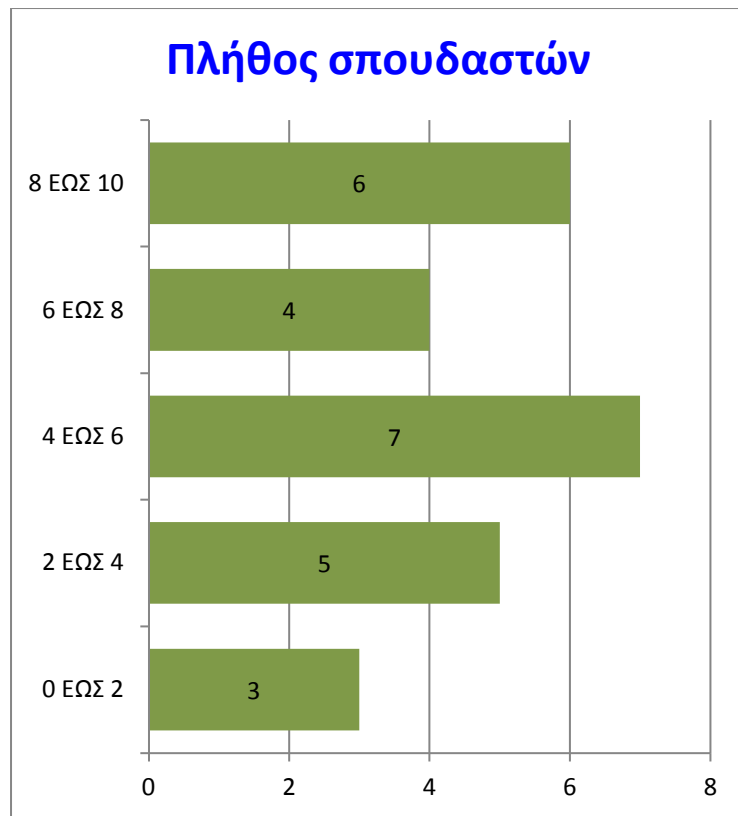
Επικρατούσα κλάση είναι αυτή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, άρα η $[4, 6)$

Διάμεσος είναι η $\delta = 5$ διότι είναι μεγαλύτερη από τις μισές παρατηρήσεις και μικρότερη από τις άλλες μισές.









Εφαρμογή 18

Συμπληρώστε τον πίνακα που περιγράφει τους βαθμούς που συγκέντρωσαν ν σκακιστές. Ποια είναι η μέση επίδοση;

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$
$x_1 = 0$	$\nu_1 =$	$N_1 =$	$f_1 =$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$x_1\nu_1 =$
$x_2 = 2$	$\nu_2 = 4$	$N_2 = 6$	$f_2 = 0,2$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$x_2\nu_2 =$
$x_3 = 2,5$	$\nu_3 =$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 = 0,6$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$x_3\nu_3 =$
$x_4 = 3$	$\nu_4 =$	$N_4 =$	$f_4 =$	$F_4 =$	$f_4\% = 25$	$F_4\% =$	$x_4\nu_4 =$
$x_5 = 6$	$\nu_5 = 2$	$N_5 =$	$f_5 =$	$F_5 =$	$f_5\% =$	$F_5\% =$	$x_5\nu_5 =$
$x_6 = 8$	$\nu_6 =$	$N_6 =$	$f_6 =$	$F_6 =$	$f_6\% =$	$F_6\% =$	$x_6\nu_6 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^6 \nu_i =$		$\sum_{i=1}^6 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^6 f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^6 x_i\nu_i =$

Λύση

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$
$x_1 = 0$	$\nu_1 = 2$	$N_1 = 2$	$f_1 = 0,10$	$F_1 = 0,10$	$f_1\% = 10$	$F_1\% = 10$	$x_1\nu_1 = 0$
$x_2 = 2$	$\nu_2 = 4$	$N_2 = 6$	$f_2 = 0,20$	$F_2 = 0,30$	$f_2\% = 20$	$F_2\% = 30$	$x_2\nu_2 = 8$
$x_3 = 2,5$	$\nu_3 = 6$	$N_3 = 12$	$f_3 = 0,30$	$F_3 = 0,60$	$f_3\% = 30$	$F_3\% = 60$	$x_3\nu_3 = 15$
$x_4 = 3$	$\nu_4 = 5$	$N_4 = 17$	$f_4 = 0,25$	$F_4 = 0,85$	$f_4\% = 25$	$F_4\% = 85$	$x_4\nu_4 = 15$
$x_5 = 6$	$\nu_5 = 2$	$N_5 = 19$	$f_5 = 0,10$	$F_5 = 0,95$	$f_5\% = 10$	$F_5\% = 95$	$x_5\nu_5 = 12$
$x_6 = 8$	$\nu_6 = 1$	$N_6 = 20$	$f_6 = 0,05$	$F_6 = 1$	$f_6\% = 5$	$F_6\% = 100$	$x_6\nu_6 = 8$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^6 \nu_i = 20$		$\sum_{i=1}^6 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^6 f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^6 x_i\nu_i = 58$

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{58}{20} = \frac{29}{10} = 2,9$$

8.8.3 Ιδιότητες του συμβολισμού Σ

Στη στατιστική, εμφανίζονται αθροίσματα αρκετών προσθετέων. Για πρακτικούς λόγους, συμβολίζονται με το σύμβολο Σ όπου

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{\nu-1} + x_{\nu}$$

Ισχύει ότι

- $\sum_{i=1}^{\nu} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{\nu} x_i \pm \sum_{i=1}^{\nu} y_i$
- $\sum_{i=1}^{\nu} k = \underbrace{k + \dots + k}_{\nu\text{-φορές}} = \nu k$
- $\sum_{i=1}^{\nu} k x_i = k \sum_{i=1}^{\nu} x_i$
- $\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^{\nu} x_i$

Εφαρμογή 19

Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα, αν $\sum_{i=1}^4 x_i = 100$

- $\sum_{i=1}^4 3x_i = 3 \sum_{i=1}^4 x_i = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 3 \cdot 100 = 300$
- $\sum_{i=1}^4 (x_i + 5) = \sum_{i=1}^4 x_i + \sum_{i=1}^4 5 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 5 \cdot 4 = 100 + 20 = 120$
- $\sum_{i=1}^4 (3x_i + 5) = \sum_{i=1}^4 3x_i + \sum_{i=1}^4 5 = 3 \sum_{i=1}^4 x_i + 5 \cdot 4 = 300 + 20 = 320$

8.8.4 Σταθμικός μέσος

Ο σταθμικός μέσος (weighted mean), είναι το μέτρο που χρησιμοποιώ όταν θέλω να δώσω διαφορετική βαρύτητα στις τιμές ενός συνόλου δεδομένων.

Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ δώσω διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης $w_1, w_2, w_3, \dots, w_k$, τότε ο σταθμικός μέσος

$$\text{δίνεται από τον τύπο } \bar{x} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + \dots + w_k \cdot x_k}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_k} = \frac{\sum_{i=1}^k w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^k w_i}$$

Μέθοδος εργασίας 1

Number (Hrs of Sleep)	Weighting factor (Number of weeks)	Number x Weighting factor
7	9	63
5	3	15
8	2	16
4	1	4
	15	98

Weighted Average = $\frac{\text{Sum of (Number X Weighting Factor)}}{\text{Sum of all the Weights}}$

$= \frac{98}{15} = 6.53 \text{ (Hrs)}$

wiki How to Calculate Weighted Average

Μέθοδος εργασίας 2

How To Calculate The Weighted Mean

source	score, x	weight, w	x · w
test 1	84	0.2	16.8
test 2	86	0.2	17.2
written report	95	0.35	33.25
group project	98	0.15	14.7
homework	82	0.1	8.2

least important

most important

stats26

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \cdot w)}{\sum w}$$

$$\bar{x} = \frac{(x_1 \cdot w_1) + (x_2 \cdot w_2) + (x_3 \cdot w_3) + (x_4 \cdot w_4) + (x_5 \cdot w_5)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

Εφαρμογή 20

Η επίδοση σπουδαστή σε 5 μαθήματα είναι 6, 7, 8, 9, 10

α Ποια είναι η μέση βαθμολογία;

β Αν οι συντελεστές στάθμισης των μαθημάτων είναι 3, 2, 2, 2, 1

αντίστοιχα, ποια είναι η μέση βαθμολογία;

Λύση

α $\bar{x} = \frac{6+7+8+9+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$

β $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i w_i}{\sum_{i=1}^5 w_i} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + x_4 w_4 + x_5 w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} =$

$\frac{6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{3 + 2 + 2 + 2 + 1} = \frac{76}{10} = 7,6$

Εφαρμογή 21

Ο μέσος μισθός των ν ναυτικών της A εταιρείας είναι α , ενώ των μ ναυτικών της B εταιρείας είναι β . Ποιος είναι ο μέσος μισθός που προκύπτει από τη συγχώνευση των δύο εταιρειών;

Λύση

$$\bar{x} = \frac{\nu\alpha + \mu\beta}{\nu + \mu}$$

Εφαρμογή 22

Σπουδαστής μελετά εβδομαδιαίως 25 ώρες. Μετά από την εξεταστική περίοδο, αυξάνει το διάβασμα κατά 3 ώρες εβδομαδιαίως. Ποιος ο νέος $\bar{x}$;

Λύση

4 ώρες

Εφαρμογή 23

Να συγκριθούν οι σταθμικοί μέσοι του John και της Kelly.

The Weighted Mean

Homework	15%
Quiz	10%
Lab	20%
Test	25%
Final Exam	30%

Homework	92
Quiz	74
Lab	83
Test	76
Final Exam	88

Homework	100
Quiz	82
Lab	95
Test	70
Final Exam	76

$$\bar{X}_w = \frac{\sum (w x)}{\sum w}$$

Class	Hours	Grade	Points
Chemistry	3	B	3
Physics	3	C	2
Chem Lab	1	A	4
Calculus	4	A	4
English	3	B	3

$$\bar{X}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \dots}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots}$$

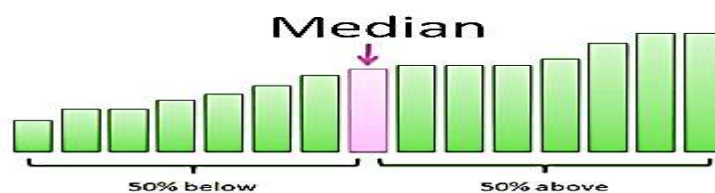
Λύση

Για τον John, είναι $\bar{x} = \frac{15 \cdot 92 + 10 \cdot 74 + 20 \cdot 83 + 25 \cdot 76 + 30 \cdot 88}{100} = \dots$

Για την Kelly είναι $\bar{x} = \frac{15 \cdot 100 + 10 \cdot 82 + 20 \cdot 95 + 25 \cdot 70 + 30 \cdot 76}{100} = \dots$

8.8.5 Διάμεσος

Διάμεσος (median) δ είναι η τιμή που έχει το 50% των παρατηρήσεων μικρότερο ή ίσο και το άλλο 50% των παρατηρήσεων μεγαλύτερο ή ίσο.



Αν $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ είναι οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους n τις οποίες έχω διατάξει σε αύξουσα σειρά, τότε

$$\delta = \begin{cases} \text{η μεσαία παρατήρηση, όταν } n \text{ περιττός} \\ \text{ο μέσος όρος των δυο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

• Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι αρκετά μεγάλο και περιττός αριθμός, τότε ισχύει ότι $\delta = t_{\frac{n+1}{2}}$

• Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι αρκετά μεγάλο και άρτιος αριθμός, τότε ισχύει ότι $\delta = \frac{t_{\frac{n}{2}} + t_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

• Αν έχω ομαδοποιημένα δεδομένα, τότε επειδή η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες, θα έχει αθροιστική συχνότητα (Cumulative frequency) $F_i = 50\%$

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Είναι εύκολα κατανοητή.	Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της.
Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές.	Είναι δύσκολη η εφαρμογή της, για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
Ο υπολογισμός της, είναι απλός.	Δεν υπολογίζεται, για ποιοτικά δεδομένα.
Είναι μοναδική, σε κάθε σύνολο δεδομένων.	

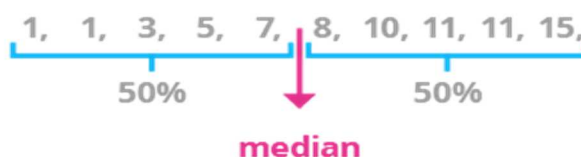
Μέθοδος εργασίας

Έστω οι παρατηρήσεις 10, 8, 7, 9, 6. Τις διατάσσω κατά αύξουσα σειρά 6, 7, 8, 9, 10. Ο μέσος όρος είναι $\bar{x} = 8$ και η διάμεσος είναι $\delta = 8$

Εφαρμογή 24

Έστω οι παρατηρήσεις 6, 7, 8, 9, 10, 11. Τότε δ είναι οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των αριθμών 8 και 9 δηλαδή $\delta \in (8, 9)$

Λύση



Εφαρμογή 25

Βρείτε τη διάμεσο των 9, 8, 7, 6, 3, 3, 1 και των 4, 3, 2, 1, 5, 9, 6, 8

Λύση

$$\begin{array}{c}
 1, 3, 3, \mathbf{6}, 7, 8, 9 \\
 \text{Median} = \mathbf{6} \\
 \\
 1, 2, 3, \mathbf{4}, \mathbf{5}, 6, 8, 9 \\
 \text{Median} = (4 + 5) \div 2 \\
 = \mathbf{4.5}
 \end{array}$$

Εφαρμογή 26

Βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων $\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{39 \text{ φορές}}, \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{11 \text{ φορές}}, \underbrace{9, 9, \dots, 9}_{19 \text{ φορές}}$

Λύση

$$\text{Είναι } n = 39 + 11 + 19 = 69 \quad \text{άρα, } \delta = t_{\frac{n+1}{2}} = t_{\frac{69+1}{2}} = t_{35} = 2$$

Εφαρμογή 27

Βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων $\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{50 \text{ φορές}}, \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{20 \text{ φορές}}, \underbrace{9, 9, \dots, 9}_{30 \text{ φορές}}$ είναι

Λύση

$$\text{Είναι } n = 50 + 30 + 20 = 100 \quad \text{άρα, } \delta = \frac{t_{\frac{n}{2}} + t_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{t_{50} + t_{50+1}}{2} = \frac{t_{50} + t_{51}}{2} = \frac{2 + 5}{2} = 3,5$$

8.8.6 Ιδιότητες της διαμέσου

1 Διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, σε δύο ίσα μέρη, διότι είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες.

2 Έστω ότι οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ έχουν διάμεσο δ

Οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1, k \cdot t_2, k \cdot t_3, \dots, k \cdot t_n$ έχουν διάμεσο $k \cdot \delta$

Οι παρατηρήσεις $t_1 + c, t_2 + c, t_3 + c, \dots, t_n + c$ έχουν διάμεσο $\delta + c$

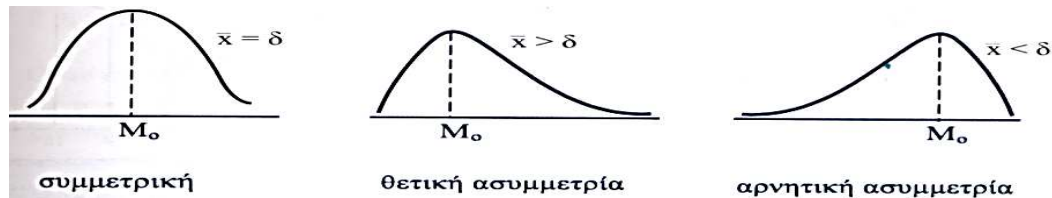
Οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1 + c, k \cdot t_2 + c, k \cdot t_3 + c, \dots, k \cdot t_n + c$ έχουν διάμεσο $k \cdot \delta + c$

Συνοπτικά ισχύει ότι

Παρατηρήσεις	Διάμεσος
$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$	δ
$t_1 + c, t_2 + c, t_3 + c, \dots, t_n + c$	$\delta + c$
$k \cdot t_1, k \cdot t_2, k \cdot t_3, \dots, k \cdot t_n$	$k \cdot \delta$
$k \cdot t_1 + c, k \cdot t_2 + c, k \cdot t_3 + c, \dots, k \cdot t_n + c$	$k \cdot \delta + c$

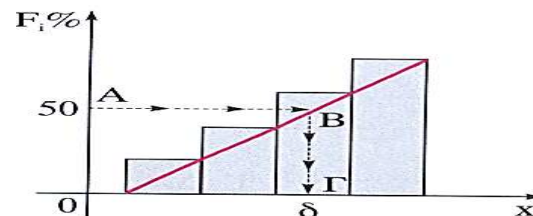
Αν το πλήθος των παρατηρήσεων N είναι άρτιος αριθμός, τότε για τον υπολογισμό της διαμέσου μπορώ αντί του ιστογράμματος των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$, να έχω το ιστόγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων N_i .

Στην περίπτωση αυτή, η μόνη διαφορά είναι ότι η παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα δεν άγεται από το $F_i\% = 50$, αλλά από το $\frac{V}{2}$. Η ως άνω διαδικασία, εφαρμόζεται μόνο όταν ο V είναι άρτιος αριθμός. Η σχέση της μέσης τιμής, της διαμέσου και της επικρατούσας τιμής, στις διάφορες καμπύλες συχνοτήτων, είναι:



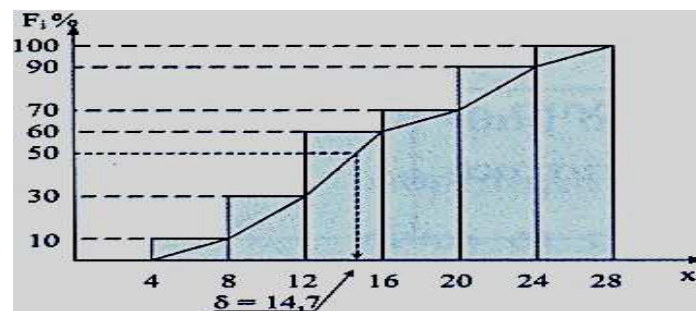
8.8.7 Εύρεση διαμέσου από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων

Φέρνω από το σημείο A (0,50) του κατακόρυφου άξονα, παράλληλη προς τον άξονα xx' η οποία τέμνει την πολυγωνική γραμμή στο σημείο B. Από το B, φέρνω κάθετη στον άξονα Ox που τον τέμνει στο σημείο Γ. Διάμεσος δ είναι η τετμημένη του Γ



Εφαρμογή 28

Από το ιστόγραμμα και από το πολύγωνο (Polygon) των σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων, υπολογίστε τη διάμεσο δ



Λύση

$$\text{Είναι } \frac{16 - \delta}{\delta - 12} = \frac{60 - 50}{50 - 30} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα, } \frac{16 - \delta}{\delta - 12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

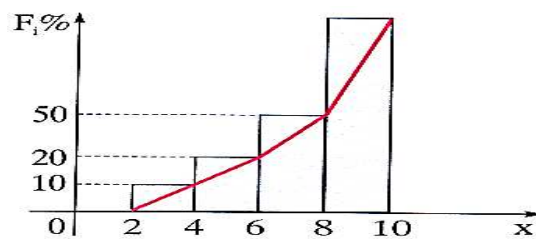
$$2(16 - \delta) = \delta - 12 \Leftrightarrow$$

$$32 - 2\delta = \delta - 12 \Leftrightarrow$$

$$44 = 3\delta \Leftrightarrow \delta = \frac{44}{3}$$

Εφαρμογή 29

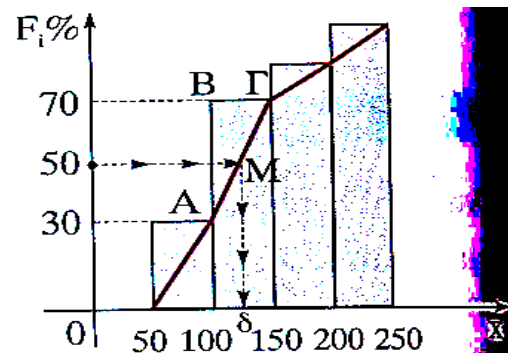
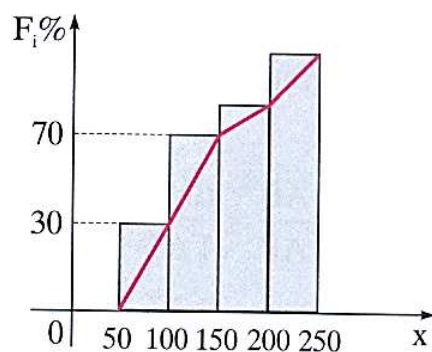
Υπολογίστε τη διάμεσο δ από το ιστόγραμμα και από το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.

**Λύση**

Το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερο από το 8 άρα $\delta=8$

Εφαρμογή 30

Υπολογίστε τη διάμεσο από το ιστόγραμμα και από το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.

**Λύση**

$$\text{Είναι } \frac{150 - \delta}{\delta - 100} = \frac{70 - 50}{50 - 30} \Leftrightarrow \frac{150 - \delta}{\delta - 100} = \frac{20}{20} \Leftrightarrow 150 - \delta = \delta - 100 \Leftrightarrow \delta = 125$$

2^{ος} τρόπος

Έστω X το σημείο τομής του πολυγώνου με την παράλληλη στον οριζόντιο άξονα xx' , που άγεται από το 50% του κατακόρυφου άξονα.

$$\begin{aligned} \text{Τότε είναι } \frac{AB}{AX} &= \frac{B\Gamma}{XM} \Leftrightarrow \frac{40}{20} = \frac{50}{\delta - 100} \Leftrightarrow \\ &2 = \frac{50}{\delta - 100} \Leftrightarrow \delta = 125 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 31

Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε παρατηρήσεων είναι 4. Οι τρεις από αυτούς, είναι οι 1, 2, 6 Βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς.

Λύση

Αφού οι παρατηρήσεις είναι 5 το πλήθος, δηλαδή περιττός αριθμός, η μεσαία παρατήρηση που είναι η 3^η, ισούται με την τιμή της διαμέσου, δηλαδή 4.

Διατάσσω τους αριθμούς με αύξουσα σειρά ως ακολούθως.

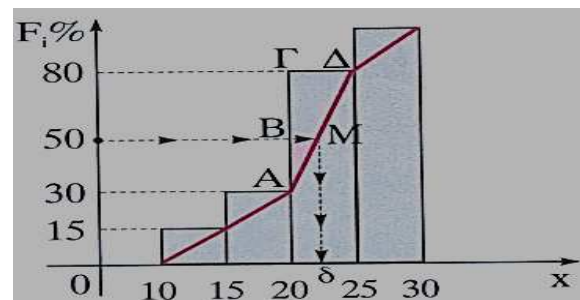
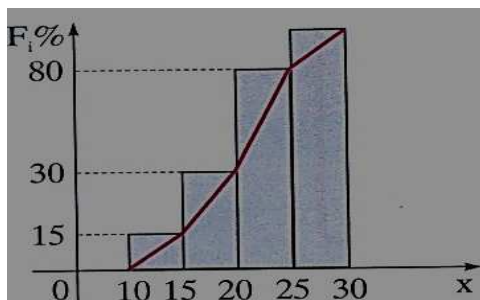
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 6 & y \\ & & \uparrow & & \\ & & \delta & & \end{array}$$

$$\text{Ισχύει ότι } \bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{n} = 4 \Leftrightarrow \frac{1+2+4+6+y}{5} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{13+y}{5} = 4 \Leftrightarrow 13+y = 20 \Leftrightarrow y = 7$$

Εφαρμογή 32

Υπολογίστε τη διάμεσο από το παρακάτω ιστόγραμμα και πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.



Λύση

$$\text{Είναι } \frac{25 - \delta}{\delta - 20} = \frac{80 - 50}{50 - 30} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα, } 50 - 2\delta = 3\delta - 60 \Leftrightarrow 110 = 5\delta \Leftrightarrow \delta = 22$$

Εφαρμογή 33

Στον πίνακα δίνεται ο αριθμός των αρχιμηχανικών σε εταιρείες. Υπολογίστε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ αν $\delta = 39$

x_i	v_i
$x_1 = 10$	$v_1 = 4$
$x_2 = 20$	$v_2 = 4$
$x_3 = 30$	$v_3 = \alpha$
$x_4 = 40$	$v_4 = 10$
$x_5 = 50$	$v_5 = 3$
Σύνολο	$v = \sum_{i=1}^5 v_i =$

Λύση

Αφού η διάμεσος είναι 39, οι μισές παρατηρήσεις είναι μικρότερες και οι άλλες μισές μεγαλύτερες.

$$\text{Ισχύει ότι } 4 + 4 + \alpha = 10 + 3$$

$$\text{Άρα, } \alpha = 5$$

Εφαρμογή 34

Οι αριθμοί 5, 6, 10, 11, 13, x , y έχουν μέση τιμή 8 και διάμεσο 7. Υπολογίστε τους $x, y \in \mathbb{R}$

Λύση

Αφού οι παρατηρήσεις είναι 7 το πλήθος, δηλαδή περιττός αριθμός, η μεσαία παρατήρηση που είναι η 4^η, ισούται με την τιμή της διαμέσου, δηλαδή 7

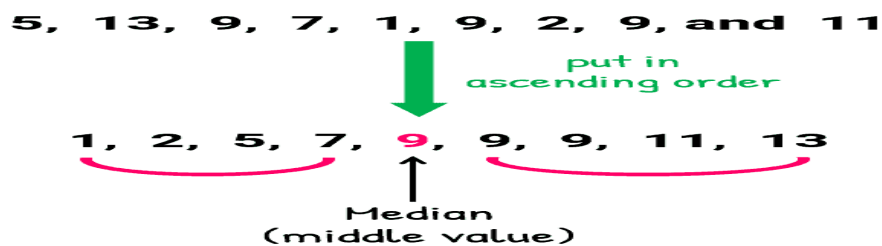
Διατάσσω τους αριθμούς με αύξουσα σειρά, ως ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccccc} y & 5 & 6 & 7 & 10 & 11 & 13 \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & \delta & & & \end{array}$$

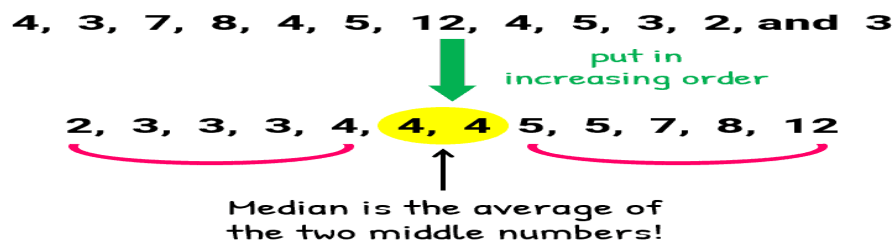
$$\begin{aligned} \text{Ισχύει ότι } \bar{x} = 8 &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{n} = 8 \Leftrightarrow \frac{y + 5 + 6 + 7 + 10 + 11 + 13}{7} = 8 \Leftrightarrow \\ &\frac{52 + y}{7} = 8 \Leftrightarrow 52 + y = 56 \Leftrightarrow y = 4 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 35

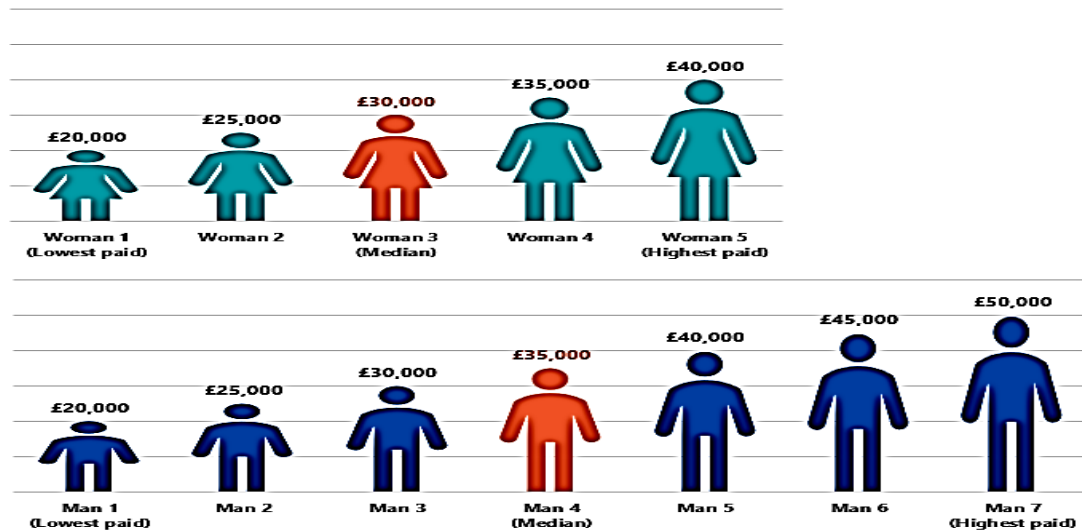
Βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων 5, 13, 9, 7, 1, 9, 2, 9, 11

Λύση**Εφαρμογή 36**

Βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων 4, 3, 7, 8, 4, 5, 12, 4, 5, 3, 2, 3

Λύση**Εφαρμογή 37**

Βρείτε τη διάμεσο των αποδοχών ανά φύλλο, από το παρακάτω γράφημα.



Λύση

Για τις γυναίκες είναι £ 30.000 και για τους άνδρες είναι £ 35.000

Εφαρμογή 38

Βρείτε τον μέσο όρο, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος των παρατηρήσεων 9, 3, 1, 8, 3, 6

Λύση

mean

The mean is the average or norm.

- Add up all of the values to find a total.
- Divide the total by the number of values you added together.

$$\begin{aligned}
 &9, 3, 1, 8, 3, 6 \\
 &9 + 3 + 1 + 8 + 3 + 6 = 30 \\
 &30 \div 6 = 5 \\
 &\text{The mean is 5}
 \end{aligned}$$

mode

The mode is the most frequent value.

- Count how many of each value appears.
- The mode is the value that appears the most.
- You can have more than one mode.

The most common number
 9, 3, 1, 8, 3, 6
The mode is 3

median

The median is the middle value

- Put all of the values into order.
- The median is the middle value.
- If there are two values in the middle, find the mean of these two.

$$\begin{aligned}
 &9, 3, 1, 8, 3, 6 \\
 &1, 3, 3, 6, 8, 9
 \end{aligned}$$

The median is 4.5

range

The range is the difference between the lowest and highest value.

- Find the highest and lowest values.
- Subtract the lowest value from the highest.

$$\begin{aligned}
 &9, 3, 1, 8, 3, 6 \\
 &9 - 1 = 8 \\
 &\text{The range is 8}
 \end{aligned}$$

8.9 Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων

Η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, εφαρμόζεται όταν είναι μεγάλο το μέγεθος του δείγματος της ποσοτικής μεταβλητής X . Προς τούτο, μοιράζω τα δεδομένα σε ομάδες, οι οποίες ονομάζονται κλάσεις (Class intervals), τοποθετώντας σε κάθε μία κλάση το πλήθος των παρατηρήσεων που της αντιστοιχούν. Συνήθως, οι κλάσεις είναι διαστήματα της μορφής $[\alpha, \beta)$ με το α να ονομάζεται **κατώτερο** και το β **ανώτερο** όριο της κλάσης. Τα α, β είναι τα **όρια** της κλάσης (Class boundaries). Η κάθε κλάση χαρακτηρίζεται και διακρίνεται, από τα όρια της.

• **Πλάτος** c της κλάσης, είναι η διαφορά του ανώτερου από το κατώτερο όριο της, άρα ισχύει ότι $c = \beta - \alpha$

• **Κέντρο** της κλάσης, είναι ο αριθμός $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ο οποίος αντιπροσωπεύει την κλάση, λειτουργώντας ως μία διακριτή μεταβλητή.

• Οι κεντρικοί όροι x_i των κλάσεων, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με 1^ο όρο x_1 και διαφορά $\omega = c$ άρα ισχύει ότι $x_n = x_1 + (n - 1)c$

• Ο καθορισμός του πλήθους των κλάσεων, των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων, προκύπτει από τον **κανόνα του Sturges**. Ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος και εφόσον δεν αναφέρεται διαφορετικά, στην πράξη ισχύουν τα παρακάτω.

Μέγεθος δείγματος	< 20	20 – 50	50 – 100	100 – 200
Πλήθος κλάσεων k	5	6	7	8

• Για τη δημιουργία κλάσεων ίσου πλάτους, μετά την εύρεση του εύρους, υπολογίζεται το πλάτος c των κλάσεων, από τον τύπο $c = \frac{R}{k}$. Αν το πλάτος δεν είναι ακέραιος αριθμός, γίνεται στρογγυλοποίηση του προς τα πάνω. Στην τελευταία κλάση μόνο, είναι δυνατό το διάστημα να θεωρηθεί κλειστό και στα δύο του άκρα.

Εφαρμογή 39

Αν ο νεότερος υπάλληλος μιας εταιρείας είναι 20 ετών και ο γηραιότερος 70 ετών, τότε $R = 70 - 20 = 50$. Αν η εταιρεία απασχολεί 19 εργαζομένους είναι $k = 5$, άρα $c = \frac{R}{k} = \frac{50}{5} = 10$ συνεπώς, θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω πίνακας.

Αριθμός κλάσεων	Ηλικία	Συχνότητα
1	[20, 30)	$\nu_1 =$
2	[30, 40)	$\nu_2 =$
3	[40, 50)	$\nu_3 =$
4	[50, 60)	$\nu_4 =$
5	[60, 70)	$\nu_5 =$
	Σύνολο	$V =$

Για 199 εργαζομένους είναι $k = 8$, άρα $c = \frac{R}{k} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} = \frac{12,50}{2} = 6,25$

Με προς τα πάνω στρογγυλοποίηση, είναι $c = 6,5$ άρα, θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω πίνακας.

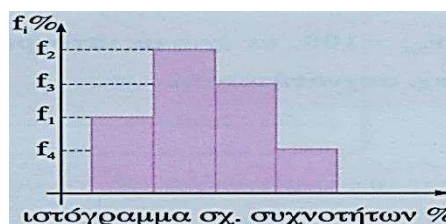
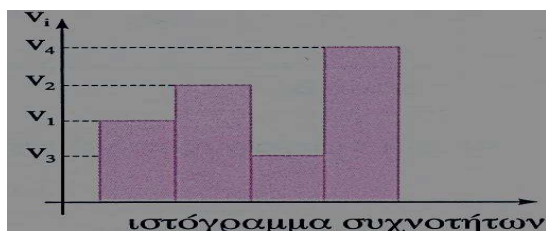
Αριθμός κλάσεων	Ηλικία	Συχνότητα
1	[20 – 26,5)	$\nu_1 =$
2	[26,5 – 33)	$\nu_2 =$
3	[33 – 39,5)	$\nu_3 =$
4	[39,5 – 46)	$\nu_4 =$
5	[46 – 52,5)	$\nu_5 =$
6	[52,5 – 59)	$\nu_6 =$
7	[59 – 65,5)	$\nu_7 =$
8	[65,5 – 72)	$\nu_8 =$
	Σύνολο	$V =$

Αν το $c = 6,25$ είχε στρογγυλοποιηθεί προς τα κάτω σε $c = 6$, τότε θα προέκυπτε ο παρακάτω πίνακας που είναι ατελής διότι δεν περιλαμβάνει τους άνω των 68 ετών υπαλλήλους.

Αριθμός κλάσεων	Ηλικία	Συχνότητα
1	[20 – 26)	$v_1 =$
2	[26 – 32)	$v_2 =$
3	[32 – 38)	$v_3 =$
4	[38 – 44)	$v_4 =$
5	[44 – 50)	$v_5 =$
6	[50 – 56)	$v_6 =$
7	[56 – 62)	$v_7 =$
8	[62 – 68)	$v_8 =$
	Σύνολο	$V =$

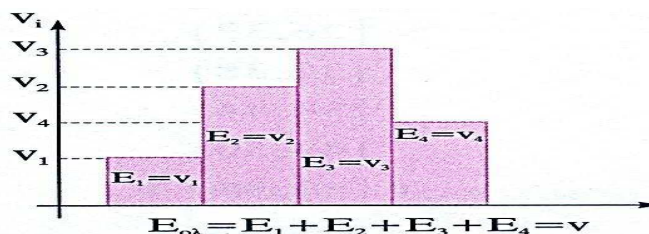
8.9.1 Γραφική παράσταση των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων

Το ιστόγραμμα των συχνοτήτων, αποτελείται από μία σειρά ορθογωνίων παραλληλογράμμων, εφαπτόμενων μεταξύ τους, που έχουν ίσες βάσεις πλάτους c και ύψη ίσα με τη συχνότητα που αντιπροσωπεύουν.

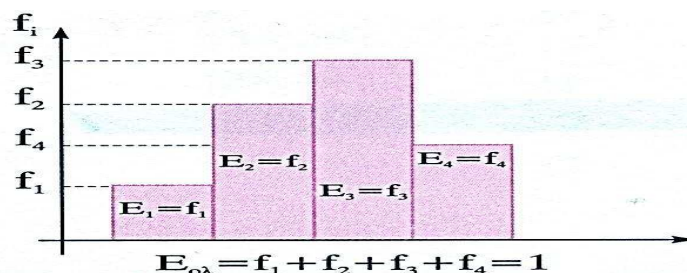


Αν το πλάτος c της κάθε κλάσης θεωρηθεί ως μονάδα μέτρησης του οριζόντιου άξονα, τότε **το εμβαδόν του κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου του ιστογράμματος, ισούται με την αντίστοιχη συχνότητα**. Για το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων ισχύουν τα παρακάτω.

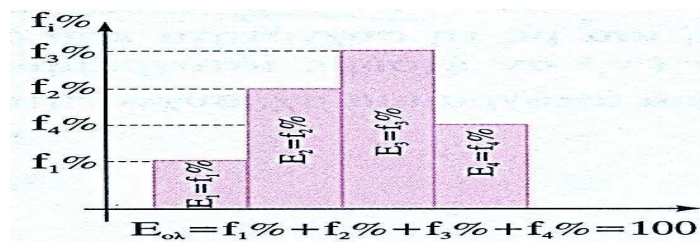
Για το ιστόγραμμα των συχνοτήτων, ισχύει ότι $E_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = V$



Για το ιστόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων, ισχύει ότι $E_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = 1$

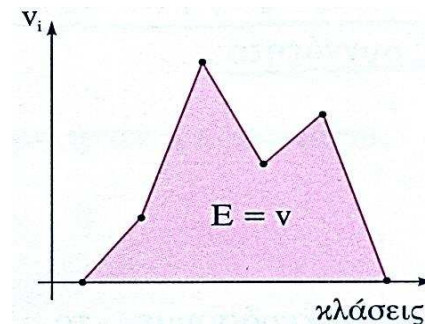
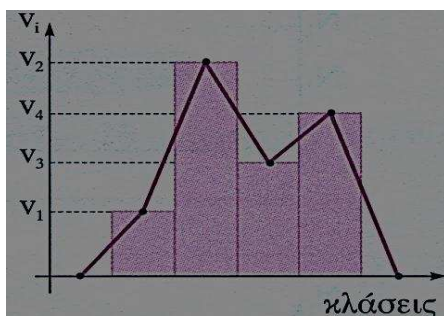


Για το ιστόγραμμα των
σχετικών % συχνοτήτων,
ισχύει ότι $E_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = 100$

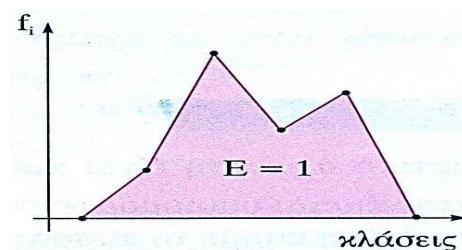
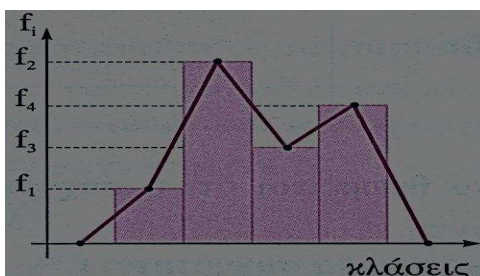


8.9.2 Πολύγωνο συχνοτήτων (Frequency polygon)

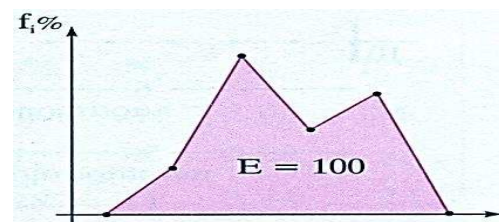
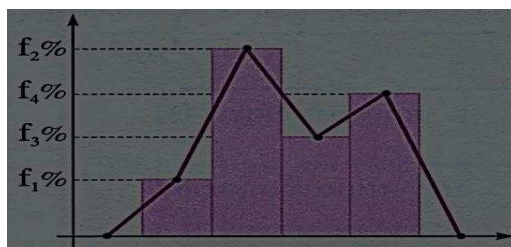
Στην αρχή και στο τέλος του ιστογράμματος, θεωρώ ότι υπάρχουν 2 υποθετικές κλάσεις, μηδενικής συχνότητας εκάστη. Το πολύγωνο των συχνοτήτων, είναι η πολυγωνική γραμμή που ενώνει **τα μέσα των άνω βάσεων** των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, περιλαμβανομένων και των υποθετικών κλάσεων.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι, το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο των συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα, ισούται με το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή v



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι, το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ισούται με 1



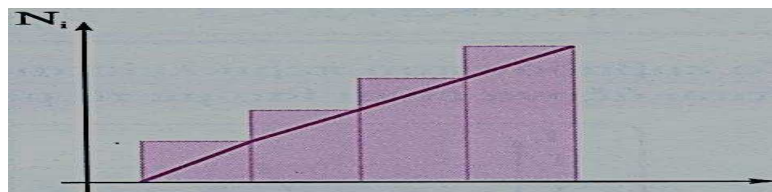
Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι, το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο των σχετικών % συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ισούται με 100

8.9.3 Ιστόγραμμα και πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων

Κατά τη σχεδίαση των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, ως ύψος τους λαμβάνονται οι αθροιστικές τους συχνότητες.



Για την κατασκευή του πολυγώνου των αθροιστικών συχνοτήτων, ενώνω με ευθύγραμμα τμήματα τα δεξιά άκρα των πάνω βάσεων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων.

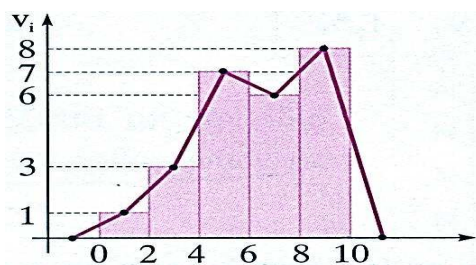


Εφαρμογή 40

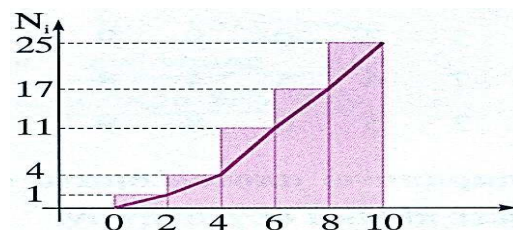
Συμπληρώστε τον πίνακα που αναφέρεται στην ηλικία 25 πλοίων. Σχεδιάστε το ιστόγραμμα των συχνοτήτων, το πολύγωνο των συχνοτήτων, το ιστόγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων και το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.

Κλάσεις	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[0, 2)$	$x_1 =$	1					
$[2, 4)$	$x_2 =$	3					
$[4, 6)$	$x_3 =$	7					
$[6, 8)$	$x_4 =$	6					
$[8, 10)$	$x_5 =$	8					
Σύνολο		25					

Λύση



Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων

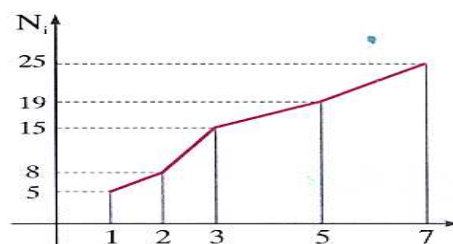


Ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

Κλάσεις	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[0, 2)$	$x_1 = 1$	1	1	0,04	0,04	4	4
$[2, 4)$	$x_2 = 3$	3	4	0,12	0,16	12	16
$[4, 6)$	$x_3 = 5$	7	11	0,28	0,44	28	44
$[6, 8)$	$x_4 = 7$	6	17	0,24	0,68	24	68
$[8, 10)$	$x_5 = 9$	8	25	0,32	1	32	100
Σύνολο		25		1		100	

Εφαρμογή 41

Από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων, κατασκευάστε τον πίνακα κατανομής όλων των συχνοτήτων.

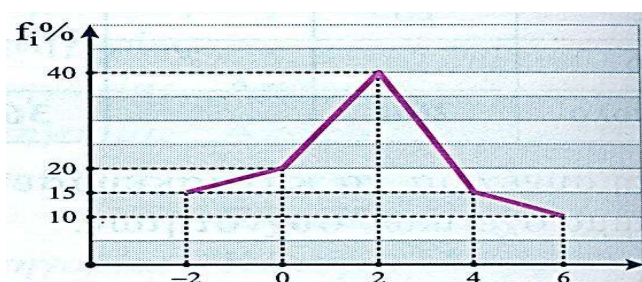


Λύση

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i
1	5	5	20	20	0,20	0,20
2	3	8	12	32	0,12	0,32
3	7	15	28	60	0,28	0,60
5	4	19	16	76	0,16	0,76
7	6	25	24	100	0,24	1
Σύνολο	25		100		1	

Εφαρμογή 42

Από το διάγραμμα, συμπληρώστε τον πίνακα για τις συνολικά 200 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής.



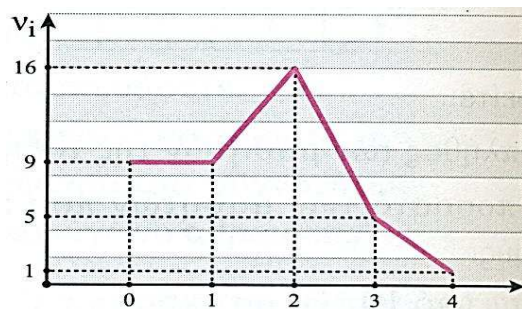
x_i	v_i	$f_i\%$	N_i
Σύνολο			

Λύση

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i
-2	30	15	30
0	40	20	70
2	80	40	150
4	30	15	180
6	20	10	200
Σύνολο	200	100	

Εφαρμογή 43

Από το διάγραμμα, συμπληρώστε τον πίνακα και κατασκευάστε τα πολύγωνα των αθροιστικών και των αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων.

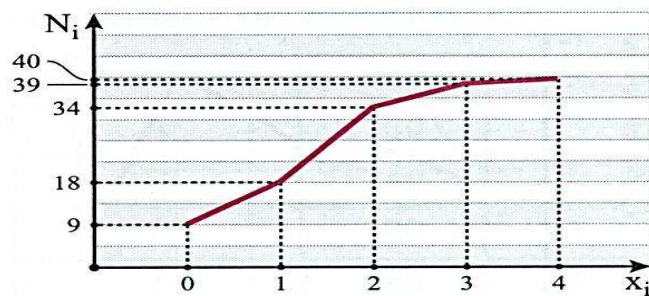


x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
Σύνολο				

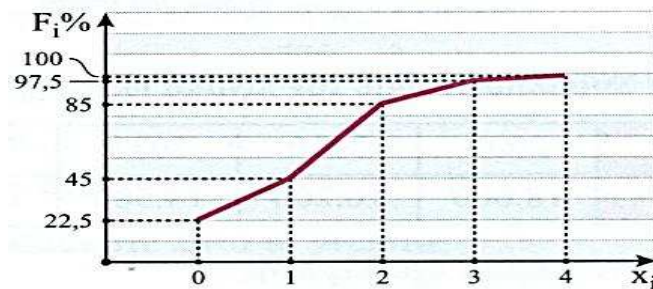
Λύση

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0	9	9	22,5	22,5
1	9	18	22,5	45
2	16	34	40	85
3	5	39	12,5	97,5
4	1	40	2,5	100
Σύνολο	40		100	

Πολύγωνο των αθροιστικών

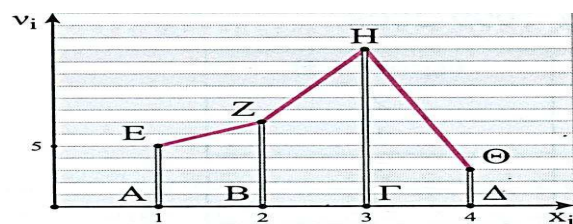


Πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων



Εφαρμογή 44

Από το διάγραμμα, βρείτε τις απόλυτες συχνότητες ν_2 , ν_3 , ν_4 αν $E_{ABZE} = 7$, $E_{B\Gamma HZ} = 12$, $E_{\Gamma\Delta\Theta H} = 9$



Λύση

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

Το εμβαδό των πολυγώνων που σχηματίζονται, ισούται με το εμβαδόν των αντίστοιχων τραπεζίων. Οι βάσεις των τραπεζίων, ισούται με τις αντίστοιχες συχνότητες και οι βάσεις τους θεωρούνται ίσες με τη μονάδα.

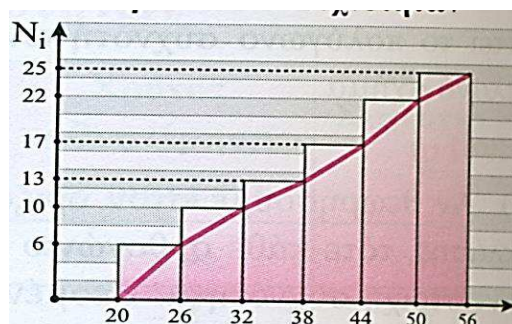
$$E_{ABZE} = 7 \Leftrightarrow 1 \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = 7 \Leftrightarrow \frac{5 + \nu_2}{2} = 7 \Leftrightarrow 5 + \nu_2 = 14 \Leftrightarrow \nu_2 = 9$$

$$E_{B\Gamma HZ} = 12 \Leftrightarrow 1 \frac{\nu_2 + \nu_3}{2} = 12 \Leftrightarrow \frac{9 + \nu_3}{2} = 12 \Leftrightarrow 9 + \nu_3 = 24 \Leftrightarrow \nu_3 = 15$$

$$E_{\Gamma\Delta\Theta H} = 9 \Leftrightarrow 1 \frac{\nu_3 + \nu_4}{2} = 9 \Leftrightarrow \frac{15 + \nu_4}{2} = 9 \Leftrightarrow 15 + \nu_4 = 18 \Leftrightarrow \nu_4 = 3$$

Εφαρμογή 45

Από το διάγραμμα για μία ποσοτική μεταβλητή (μήνες θαλάσσιας υπηρεσίας), κατασκευάστε τον πίνακα των συχνοτήτων.



Λύση

Μήνες [... - ...)	N_i	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i
20 - 26	6	6	24	24	0,24	0,24
26 - 32	10	4	16	40	0,16	0,40
32 - 38	13	3	12	52	0,12	0,52
38 - 44	17	4	16	68	0,16	0,68
44 - 50	22	5	20	88	0,20	0,88
50 - 56	25	3	12	100	0,12	1
Σύνολο		25	100		1	

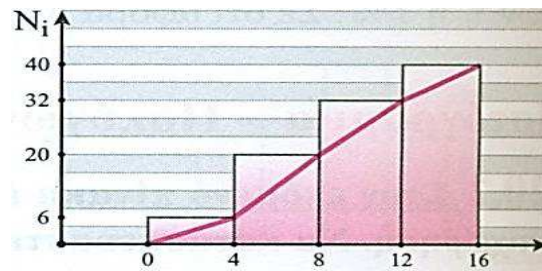
Εφαρμογή 46

Ο πίνακας, παρουσιάζει την ηλικία 40 πλοίων. Κατασκευάστε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων. Πόσα πλοία έχουν ηλικία μικρότερη των: (α) 2 ετών (β) 6 ετών (γ) 13 ετών;

Ηλικία πλοίων [... - ...)	ν_i	N_i
0 - 4	6	6
4 - 8	14	20
8 - 12	12	32
12 - 16	8	40
Σύνολο	40	

Λύση

Από το ιστόγραμμα των αθροιστικών, συχνοτήτων προκύπτει το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.



(α) Μικρότερη ηλικία των 2 ετών, έχουν 3 πλοία $\left(\frac{v_1}{2} = 3\right)$

(β) Μικρότερη ηλικία των 6 ετών, έχουν 13 πλοία $\left(v_1 + \frac{v_2}{2} = 6 + \frac{14}{2} = 6 + 7 = 13\right)$

(γ) Μικρότερη ηλικία των 13 ετών έχουν τα 6 πλοία της 1^{ης} κλάσης, συν τα 14 πλοία της 2^{ης} κλάσης, συν τα 12 πλοία της 3^{ης} κλάσης, συν τα x πλοία της 4^{ης} κλάσης.

Υπολογισμός του x

Σε διάστημα πλάτους 16-12 αντιστοιχούν 8 πλοία

Σε διάστημα πλάτους 13-12 αντιστοιχούν x πλοία

Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν 8 πλοία

Σε διάστημα πλάτους 1 αντιστοιχούν x πλοία Άρα, $x = 2$

Συνεπώς, κάτω των 13 ετών είναι $6 + 14 + 12 + 2 = 34$ πλοία

2^{ος} τρόπος

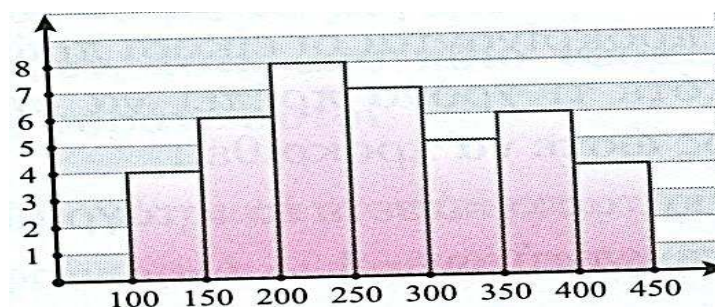
Από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων, προκύπτει ότι

$$\frac{40 - y}{y - 32} = \frac{16 - 13}{13 - 12} \Leftrightarrow \frac{40 - y}{y - 32} = 3 \Leftrightarrow 40 - y = 3(y - 32) \Leftrightarrow y = 34$$

Εφαρμογή 47

Από το ιστόγραμμα των συχνοτήτων που περιγράφει τη διάρκεια ζωής λαμπτήρων (σε ώρες), κατασκευάστε τον πίνακα των συχνοτήτων και το ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων.

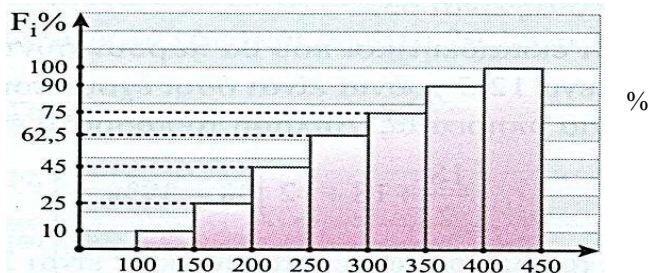
Ποιο είναι το ποσοστό των λαμπτήρων με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών;



Λύση

Ωρες [... - ...)	ν_i	$f_i\%$	f_i	N_i	$F_i\%$	F_i
100 – 150	4	10	0,100	4	10	0,100
150 – 200	6	15	0,150	10	25	0,250
200 – 250	8	20	0,200	18	45	0,450
250 – 300	7	17,5	0,175	25	62,5	0,625
300 – 350	5	12,5	0,125	30	75	0,750
350 – 400	6	15	0,150	36	90	0,900
400 – 450	4	10	0,100	40	100	1
Σύνολο	40	100	1			

Ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων



Πάνω από 320 ώρες ζωής έχουν οι 4 λαμπτήρες της κλάσης [400 – 450), συν τους 6 λαμπτήρες της κλάσης [350 – 400) συν τους x λαμπτήρες της κλάσης [300 – 350)

Υπολογισμός του x

Σε διάστημα πλάτους 350–300 αντιστοιχούν 5 λαμπτήρες

Σε διάστημα πλάτους 320–300 αντιστοιχούν y λαμπτήρες

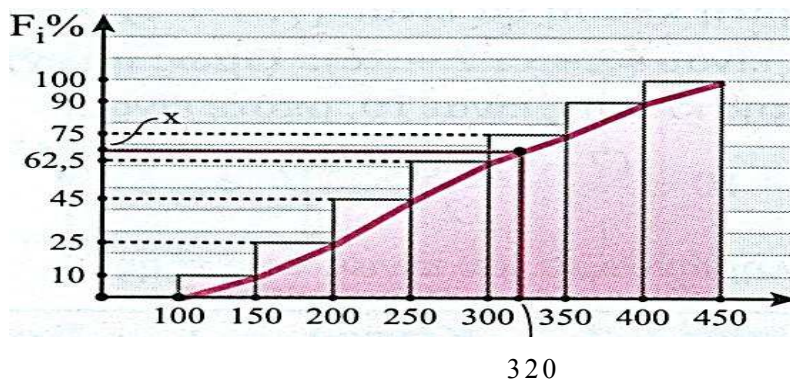
Σε διάστημα πλάτους 50 αντιστοιχούν 5 λαμπτήρες

Σε διάστημα πλάτους 20 αντιστοιχούν y λαμπτήρες

Άρα, $y = 2$ συνεπώς, $x = 3$

Οπότε 13 λαμπτήρες έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών. Αυτοί αντιστοιχούν σε ποσοστό $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} 100 = \frac{13}{40} 100 = \frac{13}{4} 10 = \frac{130}{4} = \frac{65}{2} = 32,5\%$

2^{ος} τρόπος υπολογισμού του ποσοστού

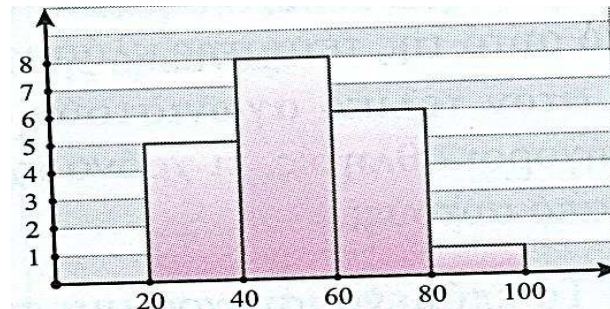


$$\frac{350-320}{320-300} = \frac{75-x}{x-62,5} \Leftrightarrow \frac{30}{20} = \frac{75-x}{x-62,5} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{75-x}{x-62,5} \Leftrightarrow x=67,5$$

Άρα, το $100-67,5=32,5\%$ των λαμπτήρων έχει διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών.

Εφαρμογή 48

Στο ιστόγραμμα, φαίνονται οι βαθμοί μαθητών. Βρείτε το πλήθος των μαθητών. Πόσοι εξ' αυτών έλαβαν βαθμό άνω του 60;



Λύση

Βαθμοί [... - ...)	v_i	N_i
20 - 40	5	5
40 - 60	8	13
60 - 80	6	19
80 - 100	1	20
Σύνολο	20	

Πάνω από 60, έλαβαν $6 + 1 = 7$ μαθητές και όλοι οι μαθητές είναι 20

Εφαρμογή 49

Τα 100 πλοία εταιρείας, έχουν ομαδοποιηθεί σε ισοπλατείς κλάσεις. Στην κλάση $[12, 18)$, ανήκει το 30% των πλοίων.

(α) Ποια είναι η απόλυτη συχνότητα των πλοίων, που ανήκουν στην ανωτέρω κλάση;

(β) Πόσα πλοία έχουν ηλικία από 17 έως 18 έτη;

(γ) Πόσα πλοία έχουν ηλικία μικρότερη των 16 ετών;

(δ) Ποιο είναι το ποσοστό των πλοίων, με ηλικίες μεταξύ 13 και 17 ετών;

(ε) Βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε στο διάστημα $[13, x)$ να ανήκουν 25 πλοία.

(στ) Βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε στο διάστημα $[13, x)$ να ανήκει το 15% των πλοίων.

Λύση

(α) Το 30% των συνολικά $v=100$ πλοίων, είναι τα 30 πλοία της κλάσης $[12, 18)$

(β) Σε διάστημα πλάτους $18 - 12$ αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους $18 - 17$ αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς

Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους 1 αντιστοιχούν x πλοία

Άρα, $x=5$ πλοία

(γ) Σε διάστημα πλάτους 18–12 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 16–12 αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς

Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν x πλοία

$$\text{Άρα, } x = 30 \frac{4}{6} = 20 \text{ πλοία}$$

(δ) Σε διάστημα πλάτους 18–12 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 17–13 αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς

Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν x πλοία

$$\text{Άρα, } x = 30 \frac{4}{6} = 20 \text{ πλοία. Τα } \frac{2}{3} \text{ των πλοίων της κλάσης βρίσκονται μεταξύ 13 – 17}$$

(ε) Σε διάστημα πλάτους 18–12 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $x - 13$ αντιστοιχούν 25 πλοία

Συνεπώς

Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους $x - 13$ αντιστοιχούν 25 πλοία

$$\text{Άρα, } 6 \cdot 25 = 30(x - 13) \Leftrightarrow 25 = 5(x - 13) \Leftrightarrow 5 = x - 13 \Leftrightarrow x = 18$$

(στ) Σε διάστημα πλάτους 18–12 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $x - 13$ αντιστοιχούν 15 πλοία

Συνεπώς

Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους $x - 13$ αντιστοιχούν 15 πλοία

$$\text{Άρα, } x - 13 = 3 \Leftrightarrow x = 16$$

Εφαρμογή 50

Συμπληρώστε τον πίνακα με τις ηλικίες Δ/Ξ. Βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των Δ/Ξ με ηλικία:

- (α) κάτω των 12 ετών
 (β) άνω των 17,5 ετών
 (γ) Τα 3 νεότερα Δ/Ξ, είναι το πολύ έως πόσων ετών;
 (δ) Που κυμαίνεται η ηλικία του γηραιότερου Δ/Ξ;
 (ε) Ποια η είναι μέση ηλικία όλων αυτών των Δ/Ξ;

Κλάσεις	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i	x_i	$x_i \nu_i$
$[0, 5)$	$\nu_1 = 6$							
$[5, 10)$	$\nu_2 = 3$							
$[10, 15)$	$\nu_3 = 10$							
$[15, 20)$	$\nu_4 = 4$							
$[20, 25)$	$\nu_5 = 2$							
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i =$		$\sum_{i=1}^5 f_i\% =$		$\sum_{i=1}^5 f_i =$			$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i =$

Λύση

Κλάσεις	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i	x_i	$x_i\nu_i$
$[0, 5)$	$\nu_1 = 6$	$N_1 = 6$	$f_1\% = 24$	$F_1\% = 24$	$f_1 = 0,24$	$F_1 = 0,24$	$x_1 = 2,5$	$x_1\nu_1 = 15$
$[5, 10)$	$\nu_2 = 3$	$N_2 = 9$	$f_2\% = 12$	$F_2\% = 36$	$f_2 = 0,12$	$F_2 = 0,36$	$x_2 = 7,5$	$x_2\nu_2 = 22,5$
$[10, 15)$	$\nu_3 = 10$	$N_3 = 19$	$f_3\% = 40$	$F_3\% = 76$	$f_3 = 0,40$	$F_3 = 0,76$	$x_3 = 12,5$	$x_3\nu_3 = 125$
$[15, 20)$	$\nu_4 = 4$	$N_4 = 23$	$f_4\% = 16$	$F_4\% = 92$	$f_4 = 0,16$	$F_4 = 0,92$	$x_4 = 17,5$	$x_4\nu_4 = 70$
$[20, 25)$	$\nu_5 = 2$	$N_5 = 25$	$f_5\% = 8$	$F_5\% = 100$	$f_5 = 0,08$	$F_5 = 1$	$x_5 = 22,5$	$x_5\nu_5 = 45$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 25$		$\sum_{i=1}^5 f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^5 f_i = 1$			$\sum_{i=1}^5 x_i\nu_i = 277,5$

(α) Κάτω των 12 ετών είναι τα $\nu_1 = 6$ Δ/Ξ της $[0, 5)$ + τα $\nu_2 = 3$ Δ/Ξ της $[5, 10)$ + τα x Δ/Ξ της $[10, 15)$ που θα υπολογίσω.

Σε διάστημα πλάτους 15–10 αντιστοιχούν 10 Δ/Ξ Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 5 αντιστοιχούν 10 Δ/Ξ
 Σε διάστημα πλάτους 12–10 αντιστοιχούν x Δ/Ξ Σε διάστημα πλάτους 2 αντιστοιχούν x Δ/Ξ
 Άρα, $x = 4$ Συνεπώς, $6 + 3 + 4 = 13$ Δ/Ξ

(β) Άνω των 17,5 ετών είναι τα $\frac{\nu_4}{2} = 2$ Δ/Ξ της $[15, 20)$ συν τα $\nu_5 = 2$ Δ/Ξ της κλάσης $[20, 25)$

(γ) Τα 6 νεότερα Δ/Ξ απαρτίζουν την $[0, 5)$ άρα, τα 3 πιο νέα Δ/Ξ έχουν ηλικία έως 2,5 ετών

(δ) Τα 2 παλαιότερα Δ/Ξ απαρτίζουν την $[20, 25)$ άρα, το γηραιότερο Δ/Ξ έχει ηλικία από 22,5 έως 25 έτη

(ε) Η μέση ηλικία όλων (και των 25) των Δ/Ξ είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i\nu_i}{\nu} = \frac{277,5}{25} = \frac{55,5}{5} = 11,1$ έτη

Εφαρμογή 51

Συμπληρώστε τον πίνακα και ακολούθως επιλέξτε την ΑΕΝ με τους υψηλότερης επίδοσης σπουδαστές.

Χαρακτηρισμός πτυχίου	ΑΕΝ Α΄			ΑΕΝ Β΄		
x_i	v_i	$f_i\%$	f_i	v_i	$f_i\%$	f_i
x_1 = Μέτρια	8			6		
x_2 = Καλά	17			11		
x_3 = Πολύ καλά	13			7		
x_4 = Άριστα	2			1		
Σύνολο						

Λύση

Χαρακτηρισμός πτυχίου	ΑΕΝ Α΄			ΑΕΝ Β΄		
x_i	v_i	$f_i\%$	f_i	v_i	$f_i\%$	f_i
x_1 = Μέτρια	$v_1 = 8$	$f_1\% = 20\%$	$f_1 = 0,2$	$v_1 = 6$	$f_1\% = 24\%$	$f_1 = 0,24$
x_2 = Καλά	$v_2 = 17$	$f_2\% = 42,5\%$	$f_2 = 0,425$	$v_2 = 11$	$f_2\% = 44\%$	$f_2 = 0,44$
x_3 = Πολύ καλά	$v_3 = 13$	$f_3\% = 32,5\%$	$f_3 = 0,325$	$v_3 = 7$	$f_3\% = 28\%$	$f_3 = 0,28$
x_4 = Άριστα	$v_4 = 2$	$f_4\% = 5\%$	$f_4 = 0,05$	$v_4 = 1$	$f_4\% = 4\%$	$f_4 = 0,04$
Σύνολο	$V=40$	100%	1	$V=25$	100%	1

Υψηλότερη επίδοση έχει η ΑΕΝ Α΄ στα πτυχία με χαρακτηρισμό άριστα (5% έναντι 4%) και στα πτυχία με χαρακτηρισμό πολύ καλά (32,5% έναντι 28%).

Εφαρμογή 52

Συμπληρώστε τον πίνακα του πλήθους παιδιών 32 οικογενειών. Τι ποσοστό είναι οι οικογένειες με έως και 2 παιδιά;

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$x_1 = 0$	$v_1 = 4$					
$x_2 = 1$	$v_2 = 6$					
$x_3 = 2$	$v_3 = 10$					
$x_4 = 3$	$v_4 = 6$					
$x_5 = 4$	$v_5 = 4$					
$x_6 = 5$	$v_6 = 2$					
	$v = 32$		1		100	

Λύση

Οι οικογένειες με έως και 2 παιδιά, είναι το 62,5% αυτών των 32 οικογενειών.

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$x_1 = 0$	$v_1 = 4$	$N_1 = 4$	$f_1 = 0,125$	$F_1 = 0,125$	$f_1\% = 12,5\%$	$F_1\% = 12,5\%$
$x_2 = 1$	$v_2 = 6$	$N_2 = 10$	$f_2 = 0,1875$	$F_2 = 0,3125$	$f_2\% = 18,75\%$	$F_2\% = 31,25\%$
$x_3 = 2$	$v_3 = 10$	$N_3 = 20$	$f_3 = 0,3125$	$F_3 = 0,625$	$f_3\% = 31,25\%$	$F_3\% = 62,5\%$
$x_4 = 3$	$v_4 = 6$	$N_4 = 26$	$f_4 = 0,1875$	$F_4 = 0,8125$	$f_4\% = 18,75\%$	$F_4\% = 81,25\%$
$x_5 = 4$	$v_5 = 4$	$N_5 = 30$	$f_5 = 0,125$	$F_5 = 0,9375$	$f_5\% = 12,5\%$	$F_5\% = 93,75\%$
$x_6 = 5$	$v_6 = 2$	$N_6 = 32$	$f_6 = 2/32$	$F_6 = 1$	$f_6\% = 6,25\%$	$F_6\% = 100\%$
	$v = 32$		1		100%	

Εφαρμογή 53

Συμπληρώστε τον πίνακα που δείχνει το πλήθος των απορριφθέντων πλοιάρχων, ανά μάθημα.

Μαθήματα x_i	v_i	$f_i\%$
Μαθηματικά	6	...
Φυσική	...	5
Ναυτιλία	8	...
NHO	8	...
Ραντάρ	10	25
N. Μετεωρολογία	...	...
Σύνολο	...	...

Λύση

Μαθήματα x_i	v_i	$f_i\%$
Μαθηματικά	6	15
Φυσική	2	5
Ναυτιλία	8	20
NHO	8	20
Ραντάρ	10	25
N. Μετεωρολογία	6	15
Σύνολο	40	100

Εφαρμογή 54

Υπολογίστε τον μέσο όρο των τερμάτων, ανά ποδοσφαιρική ομάδα.

Τέρματα x_i	Πλήθος ομάδων v_i	$v_i x_i$
$x_1 = 0$	$v_1 =$	$v_1 x_1 = 0$
$x_2 = 1$	$v_2 =$	$v_2 x_2 =$
$x_3 = 2$	$v_3 =$	$v_3 x_3 =$
$x_4 = 3$	$v_4 =$	$v_4 x_4 =$
$x_5 = 4$	$v_5 =$	$v_5 x_5 =$
$x_6 = 5$	$v_6 =$	$v_6 x_6 =$

Λύση

Ο μέσος αριθμός τερμάτων ανά ομάδα είναι

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4 + \nu_5 x_5 + \nu_6 x_6}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6} = \frac{\sum_{i=1}^6 \nu_i x_i}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6}$$

Εφαρμογή 55

Υπολογίστε το μέσο εισόδημα, τη μέση τυπική απόκλιση και τη διασπορά, ανά κτήριο για τα εισοδήματα των 4 οικογενειών.

Κτήριο Α	
Εισόδημα (σε χιλιάδες €)	Πλήθος οικογενειών
$x_1 = 3$	$\nu_1 = 1$
$x_2 = 17$	$\nu_2 = 1$

Κτήριο Β	
Εισόδημα (σε χιλιάδες €)	Πλήθος οικογενειών
$x_1 = 9$	$\nu_1 = 1$
$x_2 = 11$	$\nu_2 = 1$

Και στις δύο περιπτώσεις είναι $\bar{x} = 10$

Παρατηρώ ότι $\frac{(3-10)+(17-10)}{2} = \frac{-7+7}{2} = 0$

Μέση απόλυτη απόκλιση e

$$e = \frac{|3-10| + |17-10|}{2} = \frac{7+7}{2} = 7$$

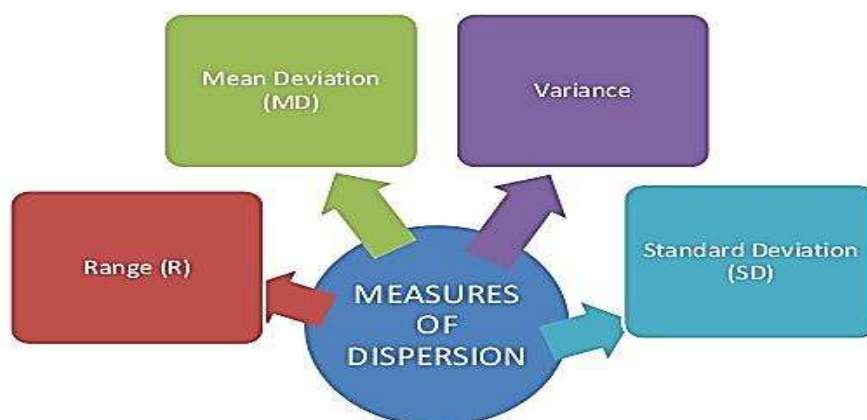
$$e = \frac{|9-10| + |11-10|}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Διακύμανση ή διασπορά

$$s^2 = \frac{(3-10)^2 + (17-10)^2}{2} = \frac{49+49}{2} = 49$$

$$s^2 = \frac{(9-10)^2 + (11-10)^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Types of Measures of Dispersion



8.10 Διασπορά

Διασπορά ή διακύμανση (variance) S^2 , των παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ ονομάζεται ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων x_i από τη μέση τιμή $\bar{x}$,

$$\text{δηλαδή } S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2 \text{ άρα, } s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2}{\nu}$$

Είναι το πιο σημαντικό μέτρο διασποράς. Για ομαδοποιημένα δεδομένα, είναι

$$s^2 = \frac{\nu_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \nu_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + \nu_k (x_k - \bar{x})^2}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2}{\nu}$$

- Αν έχω λίγες παρατηρήσεις και η μέση τιμή τους είναι ακέραιος, τότε χρησιμοποιώ τον τύπο $S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2$

- Αν έχω λίγες παρατηρήσεις και η μέση τιμή τους δεν είναι ακέραιος, τότε χρησιμοποιώ τον τύπο $S^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2}{\nu} \right] = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2}{\nu^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{\nu} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\nu} \sum (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{\nu} \left(\sum x_i^2 - \sum 2x_i \bar{x} + \sum \bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\nu} \left(\sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + \nu \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{\nu} \left(\sum x_i^2 - 2 \frac{\sum x_i}{\nu} \sum x_i + \nu \frac{\sum x_i}{\nu} \frac{\sum x_i}{\nu} \right) \\ &= \frac{1}{\nu} \left(\sum x_i^2 - 2 \frac{(\sum x_i)^2}{\nu} + \frac{(\sum x_i)^2}{\nu} \right) = \frac{1}{\nu} \left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{\nu} \right) \end{aligned}$$

- Αν έχω έναν πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, τότε χρησιμοποιώ τον τύπο

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right] = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu^2} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k x_i \nu_i}{\nu} \right)^2$$

Στην περίπτωση των ομαδοποιημένων δεδομένων, τη θέση των x_i παίρνουν τα κέντρα των κλάσεων.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^k \nu_i (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^k \nu_i (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i 2\bar{x} \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i \bar{x}^2 = \\
& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^k v_i x_i + \frac{\bar{x}^2}{n} \sum_{i=1}^k v_i = \\
& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n} \cancel{\sum_{i=1}^k v_i x_i} + \frac{\bar{x}^2}{n} \cancel{\sum_{i=1}^k v_i} = \\
& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \\
& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n^2} = \\
& \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n} \right\}
\end{aligned}$$

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό της, όλες οι παρατηρήσεις.	Χρειάζονται πολύ περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό, παρά στα άλλα μέτρα.
Έχει πολλές εφαρμογές.	Η διασπορά δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό, κάτι που παύει να ισχύει όταν χρησιμοποιήσω την τυπική απόκλιση.
Σε κανονικούς πληθυσμούς το 68%, 95%, 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκονται στα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$, $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ διαστήματα, αντίστοιχα.	

Εφαρμογή 56

Βρείτε τη διασπορά των παρατηρήσεων 2, 5, 8, 11, 14

Λύση

$$\bar{x} = \frac{2+5+8+11+14}{5} = 8$$

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{5} \left[(2-8)^2 + (5-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2 + (14-8)^2 \right] = \\
& \frac{1}{5} \left[(-6)^2 + (-3)^2 + (0)^2 + (3)^2 + (6)^2 \right] = 18
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 57

Βρείτε τη διασπορά των παρατηρήσεων $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 4, t_4 = 5, t_5 = 6$

Λύση

$$\text{Είναι } \sum_{i=1}^n t_i = 1+3+4+5+6 = 19 \ \& \ t_1^2 = 1, t_2^2 = 9, t_3^2 = 16, t_4^2 = 25, t_5^2 = 36$$

$$\text{Άρα, } \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 1+9+16+25+36=87$$

$$\text{Άρα, } S^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i \right)^2}{\nu} \right] = \frac{1}{5} \left(87 - \frac{19^2}{5} \right) = 2,96$$

$$\text{Άρα, } s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{87}{5} - \left(\frac{19}{5} \right)^2 = 2,96$$

Εφαρμογή 58

Βρείτε τη διασπορά των παρατηρήσεων για τα δεδομένα του πίνακα.

x_i	ν_i
2	3
3	2
5	4
6	1
Σύνολο	10

Λύση

Για πρακτικούς λόγους κατασκευάζω τον πίνακα.

x_i	ν_i	x_i^2	$x_i^2 \nu_i$	$x_i \nu_i$
2	3	4	12	6
3	2	9	18	6
5	4	25	100	20
6	1	36	36	6
Σύνολο	10		$\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i = 166$	$\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i = 38$

$$\text{Με αντικατάσταση, προκύπτει } S^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right] = \frac{1}{10} \left[166 - \frac{38^2}{10} \right] = 2,16$$

$$\text{Δηλαδή, } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i}{\nu} \right)^2 = \frac{166}{10} - \left(\frac{38}{10} \right)^2 = 2,16$$

8.10.1 Ιδιότητες της διασποράς

• Έστω μεταβλητή που παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5. Είναι $\bar{x} = 3$, $s^2 = 2,5$
 Αν οι αρχικές τιμές της μεταβλητής πολλαπλασιαστούν επί μία σταθερά a έστω $a = 10$, τότε οι νέες τιμές γίνονται 10, 20, 30, 40, 50 και είναι $\bar{x} = 30$, $s^2 = 250$

δηλαδή, ο μέσος όρος πολλαπλασιάστηκε επί τη σταθερά $a = 10$, ενώ η διασπορά πολλαπλασιάστηκε επί $a^2 = 100$

• Εξετάζω τους σπουδαστές ως προς τον αριθμό των σελίδων που μελέτησαν. Έστω ότι τα μέτρα θέσης είναι $\bar{x}$, M_0 , δ , P_{70} και τα μέτρα διασποράς s , Q

Αν όλοι οι σπουδαστές μελετήσουν επιπλέον 100 σελίδες, τότε τα νέα μέτρα θέσης και διασποράς είναι $\bar{x}' = \bar{x} + 100$, $M = M_0 + 100$, $\delta' = \delta + 100$, $P_{70}' = P_{70} + 100$ και $s' = s$, $Q' = Q$

• Γενικά, ισχύουν τα παρακάτω.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}$	s^2	s	M_0	δ	Q	P_{70}
$x_1 + c$	$x_2 + c$	$x_3 + c$	$\bar{x} + c$	s^2	s	$M_0 + c$	$\delta + c$	Q	$P_{70} + 100$
kx_1	kx_2	kx_3	$k\bar{x}$	k^2s^2	$ k s$		$k\delta$		

Εφαρμογή 59

Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς των βαθμών σε 20 μαθήματα, αφού συμπληρώσετε τον πίνακα.

Βαθμοί [... - ...)	x_i	ν_i	$x_i \nu_i$
0 - 2	$x_1 = 1$	$\nu_1 = 4$	$x_1 \nu_1 =$
2 - 4	$x_2 = 3$	$\nu_2 = 10$	$x_2 \nu_2 =$
4 - 6	$x_3 = 5$	$\nu_3 = 3$	$x_3 \nu_3 =$
6 - 8	$x_4 = 7$	$\nu_4 = 2$	$x_4 \nu_4 =$
8 - 10	$x_5 = 9$	$\nu_5 = 1$	$x_5 \nu_5 =$
Σύνολο		$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i =$	$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i =$

Λύση

Βαθμοί [... - ...)	x_i	ν_i	$x_i \nu_i$
0 - 2	$x_1 = 1$	$\nu_1 = 4$	$x_1 \nu_1 = 4$
2 - 4	$x_2 = 3$	$\nu_2 = 10$	$x_2 \nu_2 = 30$
4 - 6	$x_3 = 5$	$\nu_3 = 3$	$x_3 \nu_3 = 15$
6 - 8	$x_4 = 7$	$\nu_4 = 2$	$x_4 \nu_4 = 14$
8 - 10	$x_5 = 9$	$\nu_5 = 1$	$x_5 \nu_5 = 9$
Σύνολο		$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 20$	$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i = 72$

$$R = 10 - 0 = 10$$

Η διάμεσος κυμαίνεται μεταξύ 3 και 4

Επικρατούσα κλάση είναι η 2^η, δηλαδή η 2 - 4

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{72}{20} = \frac{36}{10} = 3,6$$

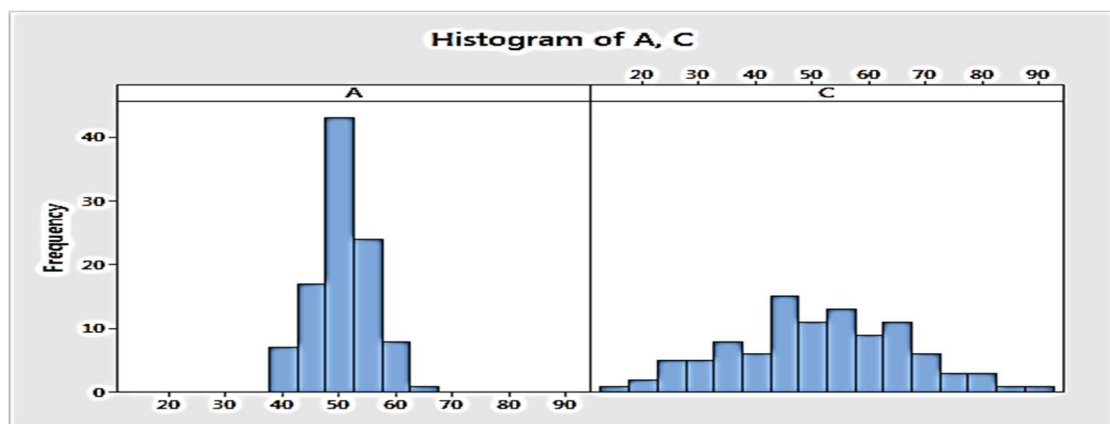
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot \nu_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot \nu_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot \nu_3 + (x_4 - \bar{x})^2 \cdot \nu_4 + (x_5 - \bar{x})^2 \cdot \nu_5}{\nu} =$$

$$\frac{(1-3,6)^2 \cdot 4 + (3-3,6)^2 \cdot 10 + (5-3,6)^2 \cdot 3 + (7-3,6)^2 \cdot 2 + (9-3,6)^2 \cdot 1}{20} =$$

$$\frac{2,6^2 \cdot 4 + 0,36 \cdot 10 + 1,4^2 \cdot 3 + (3,4)^2 \cdot 2 + 5,4^2}{20} = \dots$$

Εφαρμογή 60

Ποιο από τα 2 ιστογράμματα Α και C, παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά;



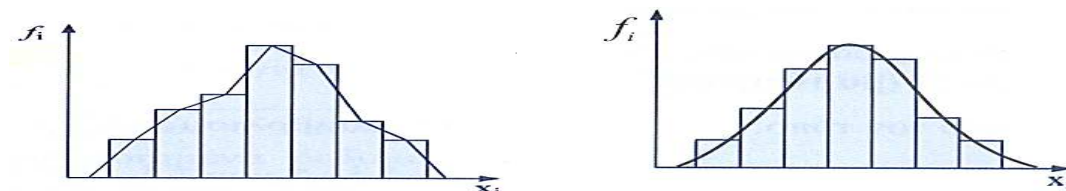
Λύση

Το ιστόγραμμα C

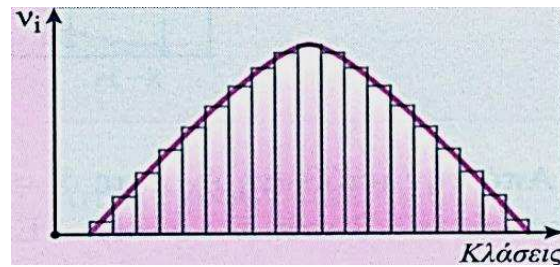
8.11 Τυπική απόκλιση (Standard deviation)

Τυπική απόκλιση (s) είναι η **θετική** τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης δηλαδή $s = \sqrt{s^2}$ και εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες που εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Έστω η συνεχής μεταβλητή X ενός πληθυσμού.

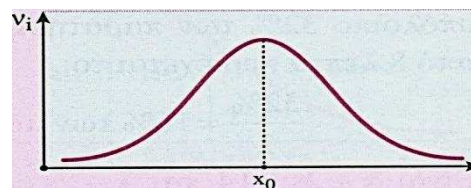
Χωρίζεται το δείγμα σε μεγάλο αριθμό κλάσεων, πολύ μικρού πλάτους η κάθε μία. Παρατηρώ ότι, το πολύγωνο των συχνοτήτων τείνει να γίνει ομαλή καμπύλη που ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**.



Καμπύλη συχνοτήτων (Frequency curve), είναι η μορφή που θα έπαιρνε ένα πολύγωνο συχνοτήτων, αν το πλήθος των κλάσεων ήταν πολύ μεγάλο και το πλάτος τους πολύ μικρό.

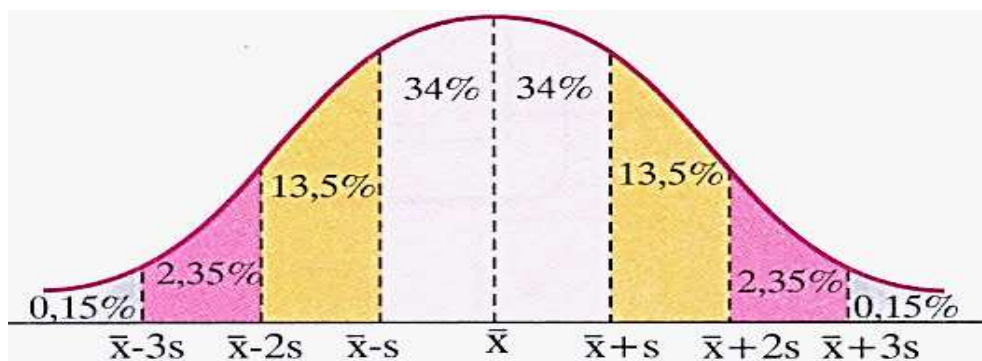
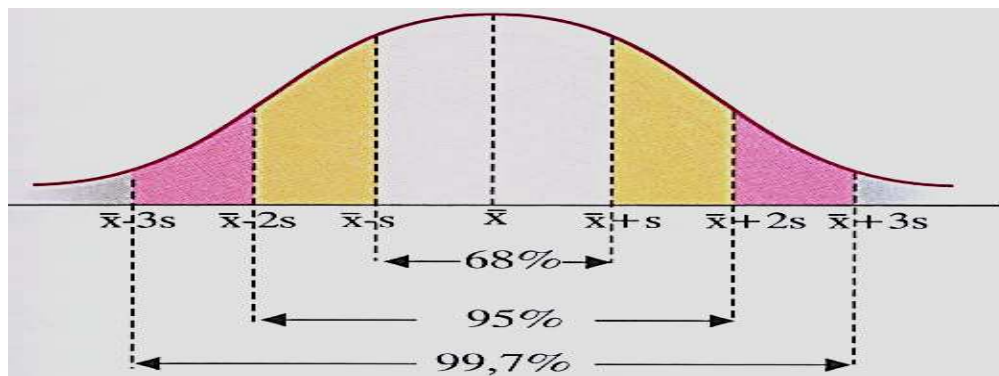


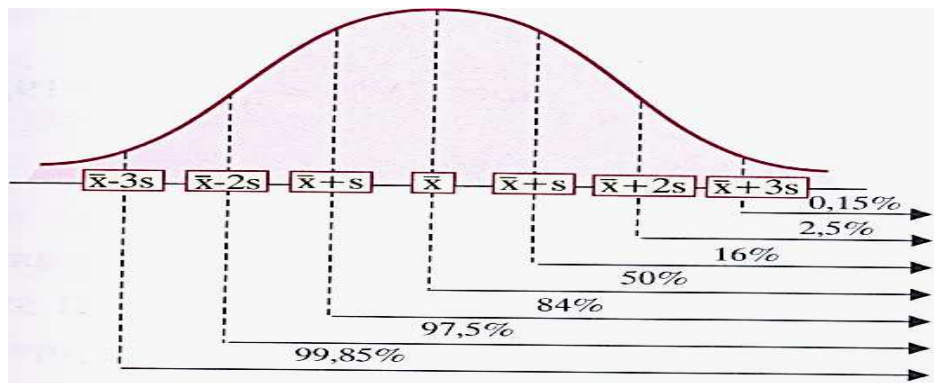
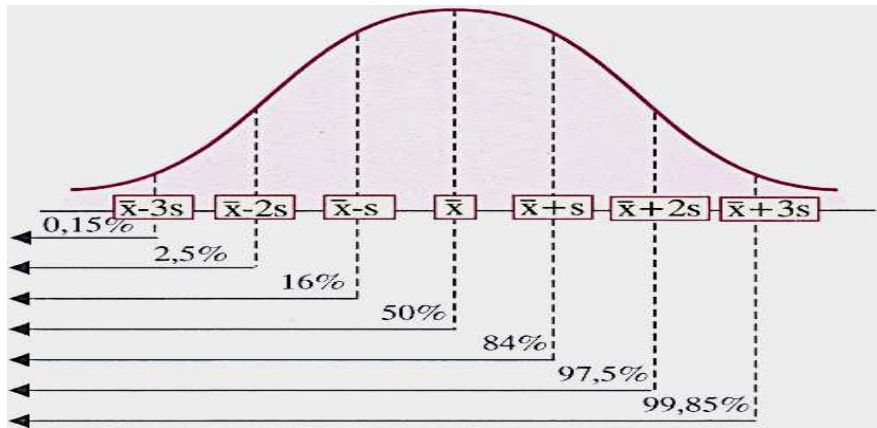
Όταν η καμπύλη συχνοτήτων λάβει τη μορφή του παρακάτω σχήματος, τότε η κατανομή συχνοτήτων ονομάζεται **κανονική**, δηλαδή η μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή (Normal distribution).



Αν η καμπύλη συχνοτήτων, για το χαρακτηριστικό που εξέτασα είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

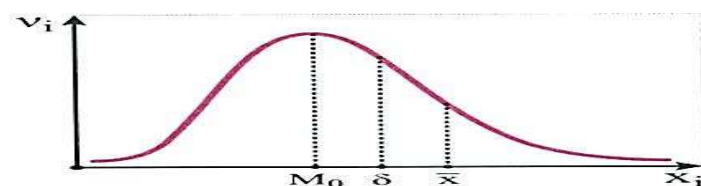
- Το 68% περίπου των παρατηρήσεων ανήκει στο $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
- Το 95% περίπου των παρατηρήσεων ανήκει στο $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- Το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων ανήκει στο $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
- Το εύρος ισούται περίπου με 6 τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6 \cdot s$



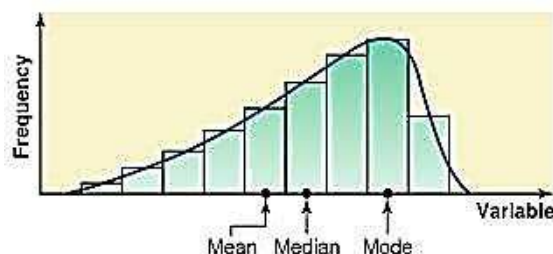


Αν M_0 η επικρατούσα τιμή, τότε είναι $M_0 = \bar{x} = \delta$

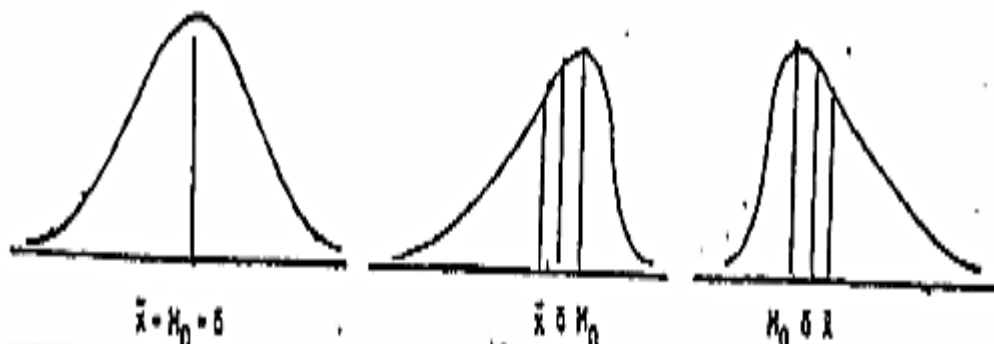
Αν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανομημένες, τότε έχω ασύμμετρη κατανομή. Αν η κατανομή παρουσιάζει **θετική ασυμμετρία** ισχύει ότι $M_0 < \delta < \bar{x}$



Αν η κατανομή παρουσιάζει **αρνητική ασυμμετρία** ισχύει ότι $\bar{x} < \delta < M_0$



Η σχέση της μέσης τιμής, της διαμέσου και της επικρατούσας τιμής στις διάφορες καμπύλες συχνοτήτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



8.12 Συντελεστής μεταβολής

Όταν μελετώ δύο δείγματα ως προς την ίδια μεταβλητή, τότε παρουσιάζονται διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους θέσης και διασποράς.

Το μέσο ύψος των ναυτικών της εταιρείας Α είναι $\bar{x}=160\text{ cm}$ με $s=5\text{ cm}$ ενώ της εταιρείας Β είναι $\bar{x}=180\text{ cm}$ με $s=5\text{ cm}$. Προφανώς οι δύο πληθυσμοί, δεν παρουσιάζουν τον ίδιο βαθμό μεταβλητότητας.

Υπάρχει περίπτωση να μετρώ τους δύο πληθυσμούς σε διαφορετικές μονάδες ή κλίμακες. Οι σπουδαστές ελληνικής ΑΕΝ (κλίμακα βαθμολογίας 0–10) παρουσιάζουν επίδοση $\bar{x}=7$ με $s=2$ ενώ οι σπουδαστές αλλοδαπής ΑΕΝ (κλίμακα βαθμολογίας 0–100), παρουσιάζουν $\bar{x}=65$ με $s=15$.

Λόγω της διαφορετικής κλίμακας, δεν είναι δυνατό να συγκριθούν τα ανωτέρω δύο δείγματα. Προκειμένου να ξεπερασθεί αυτή η δυσκολία, χρησιμοποιείται ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας (coefficient of variation) που είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ ή αν εκφράζεται ως ποσοστό, είναι $CV\% = \frac{s}{\bar{x}}\%$

Ακριβέστερα, ορίζεται ως $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ για πληθυσμό και ως $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ για δείγμα.

Χρησιμοποιείται για τη σύγκριση της μεταβλητότητας δύο ή περισσότερων ομάδων τιμών (κατανομών) που εκφράζονται σε διαφορετική μονάδα μέτρησης. Ουσιαστικά, μετρά την ομοιογένεια του πληθυσμού. Αν η τιμή του είναι κάτω από το 10%, τότε ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής. Είναι μέτρο σχετικής μεταβλητότητας. Μέτρα απόλυτης μεταβλητότητας είναι τα R , Q , σ , σ^2

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού.	Δεν ενδείκνυται αν η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν.
Χρησιμοποιείται ακόμα και σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.	
Είναι καθαρός αριθμός.	

8.12.1 Ιδιότητες του CV

1 Ο CV αποτελεί μέτρο διασποράς. Εκφράζει την τυπική απόκλιση, στο ποσοστό της μέσης τιμής $\bar{x}$

2 Ο CV εκφράζεται επί τοις εκατό (%) και είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.

3 Ο CV είναι αξιόπιστο μέτρο μόνο, αν η μέση τιμή $\bar{x}$ δε λαμβάνει τιμές κοντά στο μηδέν.

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

4 Ομοιογενές ονομάζεται το δείγμα, αν $CV\% \leq 10\%$

5 Αν ισχύει ότι $s > \left| \bar{x} \right|$ τότε ο CV λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας.

6 Μεταξύ δύο δειγμάτων, αυτό που έχει μικρότερο συντελεστή μεταβολής έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

7 Μεταξύ δύο δειγμάτων, που έχουν την ίδια διασπορά, αυτό που έχει μεγαλύτερη μέση τιμή $\bar{x}$, θα έχει μικρότερο συντελεστή μεταβολής.

8 Όσο πιο μεγάλη διασπορά έχει ένα δείγμα, τόσο μικρότερη είναι η ομοιογένεια του και αντίστροφα.

Εφαρμογή 61

Η τιμή της μετοχής Α είχε μέση τιμή 5.000\$ και τυπική απόκλιση 1.000\$. Οι αντίστοιχες τιμές για τη Β μετοχή ήταν 12.000\$ και 4.000\$ αντίστοιχα. Ποια μετοχή είχε περισσότερη μεταβλητότητα;

Λύση

$$\text{Είναι } cv_A = \frac{1.000}{5.000} 100 = 20 \% \quad cv_B = \frac{4.000}{12.000} 100 = 33,3 \%$$

Εφαρμογή 62

Το μέσο πλήθος των υπαλλήλων 30 εταιρειών στον Πειραιά είναι $\bar{x}_{\Pi} = 50$ με $s_{\Pi} = 7$. Αντιστοίχως, για 20 εταιρείες στο Λονδίνο είναι $\bar{x}_{\Lambda} = 75$ με $s_{\Lambda} = 7$.

Υπολογίστε τους CV των δύο δειγμάτων και εξετάστε τα ως προς την ομοιογένειά τους.

Λύση

$$CV_{\Pi} = \frac{s_{\Pi}}{\bar{x}_{\Pi}} = \frac{7}{50} = \frac{14}{100} = 0,14 \quad CV_{\Pi} = 14\% \quad \text{όχι ομοιογενές το δείγμα}$$

$$CV_{\Lambda} = \frac{s_{\Lambda}}{\bar{x}_{\Lambda}} = \frac{7}{75} = 0,093 \quad CV_{\Lambda} = 9,3\% \quad \text{ομοιογενές το δείγμα}$$

$$CV_{\Lambda} < CV_{\Pi}$$

Εφαρμογή 63

Έστω κανονική κατανομή $N(\bar{x}, s^2) = N(30, 25)$ με $\bar{x} = 30$, $s = 5$. Ποια ποσοστά των παρατηρήσεων ανήκουν στα διαστήματα (25, 35), (20, 40), (15, 45); Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Λύση

	$\bar{x} - 3s$	$\bar{x} - 2s$	$\bar{x} - s$	$\bar{x}$	$\bar{x} + s$	$\bar{x} + 2s$	$\bar{x} + 3s$
	15	20	25	30	35	40	45
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%

Στο (25, 35) = $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ ανήκει το 68% των παρατηρήσεων.

Στο (20, 40) = $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ ανήκει το 95% των παρατηρήσεων.

Στο (15, 45) = $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ ανήκει το 99,7% των παρατηρήσεων.

Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} > \frac{1}{10}$ άρα, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Εφαρμογή 64

Έστω ότι οι θερμοκρασίες στο εσωτερικό μηχανής είναι πάντα μεγαλύτερες από $0^\circ C$ και ακολουθούν την κανονική κατανομή με $\bar{x} = 100^\circ C$ και $CV = 10\%$

Υπολογίστε το ποσοστό επί των ωρών που η θερμοκρασία είναι:

(α) μικρότερη των $80^\circ C$

(β) μεγαλύτερη των $130^\circ C$

(γ) μεταξύ των $110^\circ C$ και $120^\circ C$

Λύση

$$\text{Είναι } \left. \begin{aligned} CV = 10\% &= \frac{10}{100} \\ CV &= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{s}{100} \end{aligned} \right\} \frac{s}{100} = \frac{10}{100} \Rightarrow s = 10$$

	$\bar{x} - 3s$	$\bar{x} - 2s$	$\bar{x} - s$	$\bar{x}$	$\bar{x} + s$	$\bar{x} + 2s$	$\bar{x} + 3s$	
	70	80	90	100	110	120	130	
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%	

Μικρότερη των $80^\circ C$ είναι η θερμοκρασία κατά το $0,15 + 2,35 = 2,5\%$ των ωρών.

Μεγαλύτερη των $130^\circ C$ είναι η θερμοκρασία κατά το $0,15\%$ των ωρών.

Μεταξύ των $110^\circ C$ και $120^\circ C$ είναι η θερμοκρασία κατά το $13,5\%$ των ωρών.

Εφαρμογή 65

Ο χρόνος αναμονής των ναυτικών σε ένα λιμεναρχείο, ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\bar{x} = 5'$ και $s = 1'$ Ποιο είναι το ποσοστό των ναυτικών που εξυπηρετούνται σε χρόνο: (α) από $4'$ έως $6'$

(β) από $3'$ έως $6'$;

Υπολογίστε δ , R και CV του χρόνου αναμονής.

Λύση

	$\bar{x} - 3s$	$\bar{x} - 2s$	$\bar{x} - s$	$\bar{x}$	$\bar{x} + s$	$\bar{x} + 2s$	$\bar{x} + 3s$	
	2	3	4	5	6	7	8	
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%	

Από $4'$ έως $6'$ χρειάζονται για να εξυπηρετηθεί το 68% των ναυτικών.

Από $3'$ έως $6'$ λεπτά χρειάζονται για να εξυπηρετηθεί το $68 + 13,5 = 81,5\%$ των ναυτικών.

$$\delta = 5'$$

$$R = 6s = 6'$$

$$\text{Είναι } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2 \quad \text{ή} \quad CV = 20\%$$

Εφαρμογή 66

Για την κατανομή βάρους 40 containers, βρείτε M_0 , $\bar{x}$, δ , R , s^2 , s , CV , $CV\%$

x_i	ν_i	$x_i \nu_i$
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 6$	
$x_2 = 2$	$\nu_2 = 7$	
$x_3 = 3$	$\nu_3 = 8$	
$x_4 = 4$	$\nu_4 = 9$	
$x_5 = 5$	$\nu_5 = 10$	
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 40$	$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i =$

Λύση

x_i	ν_i	$x_i \nu_i$
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 6$	$x_1 \nu_1 = 6$
$x_2 = 2$	$\nu_2 = 7$	$x_2 \nu_2 = 14$
$x_3 = 3$	$\nu_3 = 8$	$x_3 \nu_3 = 24$
$x_4 = 4$	$\nu_4 = 9$	$x_4 \nu_4 = 36$
$x_5 = 5$	$\nu_5 = 10$	$x_5 \nu_5 = 50$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 40$	$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i = 120$

$$M_0 = 5 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{120}{40} = 3 \quad \delta = 3 \quad R = 5 - 1 = 4$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} =$$

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot \nu_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot \nu_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot \nu_3 + (x_4 - \bar{x})^2 \cdot \nu_4 + (x_5 - \bar{x})^2 \cdot \nu_5}{\nu} =$$

$$\frac{(1-3)^2 \cdot 6 + (2-3)^2 \cdot 7 + (3-3)^2 \cdot 8 + (4-3)^2 \cdot 9 + (5-3)^2 \cdot 10}{40} =$$

$$\frac{2^2 \cdot 6 + 1^2 \cdot 7 + 0^2 \cdot 8 + 1^2 \cdot 9 + 2^2 \cdot 10}{40} = \frac{24 + 7 + 9 + 40}{40} = \frac{80}{40} = 2$$

$$\text{άρα, } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2} \cong 1,4$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cong \frac{1,4}{3} \cong 0,466$$

άρα, $CV\% \cong 46,6\%$, συνεπώς όχι ομοιογενές.

Εφαρμογή 67

Συμπληρώστε τον πίνακα της ωριαίας αποζημίωσης και υπολογίστε τα μέτρα διασποράς.

Αμοιβή [... - ...)	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	x_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
20 – 30	$F_1\% = 20\%$	$f_1\% =$	$f_1 =$	$x_1 =$	$x_1 f_1 =$	$x_1^2 =$	$x_1^2 f_1 =$
30 – 40	$F_2\% = 45\%$	$f_2\% =$	$f_2 =$	$x_2 =$	$x_2 f_2 =$	$x_2^2 =$	$x_2^2 f_2 =$
40 – 50	$F_3\% = 85\%$	$f_3\% =$	$f_3 =$	$x_3 =$	$x_3 f_3 =$	$x_3^2 =$	$x_3^2 f_3 =$
50 – 60	$F_4\% = 95\%$	$f_4\% =$	$f_4 =$	$x_4 =$	$x_4 f_4 =$	$x_4^2 =$	$x_4^2 f_4 =$
60 – 70	$F_5\% = 100\%$	$f_5\% =$	$f_5 =$	$x_5 =$	$x_5 f_5 =$	$x_5^2 =$	$x_5^2 f_5 =$
Σύνολο		$\sum_{i=1}^5 f_i\% =$	$\sum_{i=1}^5 f_i =$		$\sum_{i=1}^5 x_i f_i =$		$\sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i =$

Λύση

Αμοιβή [... - ...)	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	x_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
20 – 30	$F_1\% = 20\%$	$f_1\% = 20\%$	$f_1 = 0,20$	$x_1 = 25$	$x_1 f_1 = 5$	$x_1^2 = 625$	$x_1^2 f_1 = 625 \cdot 0,2 = 125$
30 – 40	$F_2\% = 45\%$	$f_2\% = 25\%$	$f_2 = 0,25$	$x_2 = 35$	$x_2 f_2 = 8,75$	$x_2^2 = 1225$	$x_2^2 f_2 = 1225 \cdot 0,25 = 306,25$
40 – 50	$F_3\% = 85\%$	$f_3\% = 40\%$	$f_3 = 0,40$	$x_3 = 45$	$x_3 f_3 = 18$	$x_3^2 = 2025$	$x_3^2 f_3 = 2025 \cdot 0,4 = 810$
50 – 60	$F_4\% = 95\%$	$f_4\% = 10\%$	$f_4 = 0,10$	$x_4 = 55$	$x_4 f_4 = 5,5$	$x_4^2 = 3025$	$x_4^2 f_4 = 3025 \cdot 0,1 = 302,5$
60 – 70	$F_5\% = 100\%$	$f_5\% = 5\%$	$f_5 = 0,05$	$x_5 = 65$	$x_5 f_5 = 3,25$	$x_5^2 = 4225$	$x_5^2 f_5 = 4225 \cdot 0,05 = 211,25$
Σύνολο		$\sum_{i=1}^5 f_i\% = 100$	$\sum_{i=1}^5 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^5 x_i f_i = 40,5$		$\sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i =$

$$R = 70 - 20 = 50 \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 40,5 \quad s^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i - 40,5^2 = \dots \quad CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{s}{40,5} = \dots$$

Εφαρμογή 68

Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς για την κατανομή των βαθμών 20 μαθημάτων.

Κλάσεις [... - ...)	ν_i	x_i	$x_i \nu_i$	x_i^2	f_i	$x_i^2 f_i$
0 - 2	$\nu_1 = 4$					$x_1^2 f_1 =$
2 - 4	$\nu_2 = 5$					$x_2^2 f_2 =$
4 - 6	$\nu_3 = 2$					$x_3^2 f_3 =$
6 - 8	$\nu_4 = 5$					$x_4^2 f_4 =$
8 - 10	$\nu_5 = 4$					$x_5^2 f_5 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i =$		$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i =$		$\sum_{i=1}^5 f_i =$	$\sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i =$

Λύση

$$R = 10 - 0 = 10 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{100}{20} = 5$$

$$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i - 5^2 = 33,4 - 25 = 8,4$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8,4} = 2,9$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,9}{5} = \frac{5,8}{10} = 0,58 \quad \text{Άρα, } CV\% = 58\% . \text{ Όχι ομοιογενές.}$$

Κλάσεις [... – ...)	ν_i	x_i	$x_i \nu_i$	x_i^2	f_i	$x_i^2 f_i$
0 – 2	$\nu_1 = 4$	$x_1 = 1$	$x_1 \nu_1 = 4$	$x_1^2 = 1$	$f_1 = 0,2$	$x_1^2 f_1 = 0,2$
2 – 4	$\nu_2 = 5$	$x_2 = 3$	$x_2 \nu_2 = 15$	$x_2^2 = 9$	$f_2 = 0,25$	$x_2^2 f_2 = 2,25$
4 – 6	$\nu_3 = 2$	$x_3 = 5$	$x_3 \nu_3 = 10$	$x_3^2 = 25$	$f_3 = 0,1$	$x_3^2 f_3 = 2,5$
6 – 8	$\nu_4 = 5$	$x_4 = 7$	$x_4 \nu_4 = 35$	$x_4^2 = 49$	$f_4 = 0,25$	$x_4^2 f_4 = 12,25$
8 – 10	$\nu_5 = 4$	$x_5 = 9$	$x_5 \nu_5 = 36$	$x_5^2 = 81$	$f_5 = 0,2$	$x_5^2 f_5 = 16,2$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i = 20$		$\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i = 100$		$\sum_{i=1}^5 f_i = 1$	$\sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i = 33,4$

Εφαρμογή 69

Οι εισπράξεις 10 καταστημάτων, φαίνονται στον πίνακα. Αφού τον συμπληρώσετε, υπολογίστε M_0 , δ , $\bar{x}$, R , s^2 , s και CV

Εισπράξεις	ν_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
$x_1 = 15$	$\nu_1 = 4$	$f_1 =$			
$x_2 = 20$	$\nu_2 = 2$	$f_2 =$			
$x_3 = 30$	$\nu_3 = 1$	$f_3 =$			
$x_4 = 50$	$\nu_4 = 3$	$f_4 =$			
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^4 \nu_i = 10$	$\sum_{i=1}^4 f_i =$			$\sum_{i=1}^4 \nu_i (x_i - \bar{x})^2 =$

Λύση

Εισπράξεις	ν_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
$x_1 = 15$	$\nu_1 = 4$	$f_1 = 0,4$	$15 - 28 = -13$	169	$169 \cdot 4 = 676$
$x_2 = 20$	$\nu_2 = 2$	$f_2 = 0,2$	$20 - 28 = -8$	64	$64 \cdot 2 = 128$
$x_3 = 30$	$\nu_3 = 1$	$f_3 = 0,1$	$30 - 28 = 2$	4	$4 \cdot 1 = 4$
$x_4 = 50$	$\nu_4 = 3$	$f_4 = 0,3$	$50 - 28 = 22$	484	$484 \cdot 3 = 1452$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^4 \nu_i = 10$	$\sum_{i=1}^4 f_i = 1$			$\sum_{i=1}^4 \nu_i (x_i - \bar{x})^2 = 2260$

$$M_0 = 15$$

$$\delta = 20$$

$$R = 50 - 15 = 35$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 \nu_i \cdot x_i}{\nu} = \frac{4 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 30 + 150}{10} = \frac{280}{10} = 28$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 \nu_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{2260}{10} = 226$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \approx \frac{15}{28} = 0,53$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{226} \approx 15$$

Εφαρμογή 70

Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς.

Κλάσεις	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
$[0, 2)$		$F_1 = 10$					
$[2, 4)$		$F_2 = 60$					
$[4, 6)$		$F_3 = 100$					
Σύνολο			$\sum_{i=1}^3 f_i\% =$	$\sum_{i=1}^3 f_i =$	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot f_i =$		$\sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot f_i =$

Λύση

Εύρος $R = 6 - 0 = 6$

Κλάσεις	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
$[0, 2)$	$x_1 = 1$	$F_1 = 10$	$f_1 = 10$	$f_1 = 0,1$	$x_1 f_1 = 0,1$	$x_1^2 = 1$	$x_1^2 f_1 = 0,1$
$[2, 4)$	$x_2 = 3$	$F_2 = 60$	$f_2 = 50$	$f_2 = 0,5$	$x_2 f_2 = 1,5$	$x_2^2 = 9$	$x_2^2 f_2 = 4,5$
$[4, 6)$	$x_3 = 5$	$F_3 = 100$	$f_3 = 40$	$f_3 = 0,4$	$x_3 f_3 = 2$	$x_3^2 = 25$	$x_3^2 f_3 = 10$
Σύνολο			$\sum_{i=1}^3 f_i\% = 100$	$\sum_{i=1}^3 f_i = 1$	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot f_i = 3,6$		$\sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot f_i = 14,6$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot f_i = 3,6$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1,28}{3,6} = \frac{12,8}{36} = \frac{6,4}{18} = \frac{3,2}{9} = 0,355 \quad \text{άρα } CV = 35,5\% \quad \text{συνεπώς, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

1^{ος} τρόπος υπολογισμού της s^2 και της s

$$s^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot f_i - (\bar{x})^2 = 14,6 - 3,6^2 = 14,6 - 12,96 = 1,64$$

$$\text{Άρα, } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,64} = 1,28$$

2^{ος} τρόπος υπολογισμού της s^2 και της s $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 14,6 - 12,96 = 1,64$

$$\text{Άρα, } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,64} = 1,28$$

3^{ος} τρόπος υπολογισμού της s^2 και της s

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot \nu_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot \nu_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot \nu_3}{\nu} = \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot \nu_1}{\nu} + \frac{(x_2 - \bar{x})^2 \cdot \nu_2}{\nu} + \frac{(x_3 - \bar{x})^2 \cdot \nu_3}{\nu} = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot f_3 = \\ &= (1 - 3,6)^2 \cdot \frac{1}{10} + (3 - 3,6)^2 \cdot \frac{5}{10} + (5 - 3,6)^2 \cdot \frac{4}{10} = \\ &= \frac{2,6^2}{10} + \frac{0,6^2}{2} + \frac{1,4^2 \cdot 2}{5} = 0,676 + 0,18 + 0,784 = 1,64 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,64} = 1,28$$

Εφαρμογή 71

Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς.

x_i	ν_i
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 5$
$x_2 = 2$	$\nu_2 = 35$
$x_3 = 3$	$\nu_3 = 10$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i =$

Λύση

$$R = 3 - 1 = 2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 \nu_i \cdot x_i}{\nu} = \frac{105}{50} = \frac{210}{100} = 2,1$$

x_i	ν_i	$\nu_i \cdot x_i$
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 5$	$\nu_1 \cdot x_1 = 5$
$x_2 = 2$	$\nu_2 = 35$	$\nu_2 \cdot x_2 = 70$
$x_3 = 3$	$\nu_3 = 10$	$\nu_3 \cdot x_3 = 30$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i = 50$	$\sum_{i=1}^3 \nu_i \cdot x_i = 105$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 \nu_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{5(x_1 - \bar{x})^2 + 35(x_2 - \bar{x})^2 + 10(x_3 - \bar{x})^2}{50} =$$

$$\frac{5(1 - 2,1)^2 + 35(2 - 2,1)^2 + 10(3 - 2,1)^2}{50} = \frac{14,9}{50} = \frac{29}{100} = 0,29$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,29} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{29}}{10} \cong \frac{5,3}{10} = 0,53$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cong \frac{0,53}{2,1} = \frac{53}{210}$$

Εφαρμογή 72

Βρείτε τις τιμές των ν_1, ν_2, ν_3 αν $\bar{x} = 1,5$ και $s^2 = 4,5$, για τα δεδομένα του πίνακα.

x_i	ν_i
$x_1 = 0$	ν_1
$x_2 = 2$	ν_2
$x_3 = 5$	ν_3
Σύνολο	80

Λύση

- Είναι $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 80$

- Είναι
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{x_1 \nu_1 + x_2 \nu_2 + x_3 \nu_3}{80} = \frac{0\nu_1 + 2\nu_2 + 5\nu_3}{80} = \frac{2\nu_2 + 5\nu_3}{80}$$

Από $\bar{x} = 1,5$ έπεται ότι $\frac{2\nu_2 + 5\nu_3}{80} = 1,5 \Leftrightarrow 2\nu_2 + 5\nu_3 = 120$.

- Από $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow 4,5 = \overline{x^2} - (1,5)^2 \Leftrightarrow 4,5 = \overline{x^2} - 2,25 \Leftrightarrow \overline{x^2} = 6,75$

Και
$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^3 x_i^2 f_i = x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + x_3^2 f_3 = 0f_1 + 4f_2 + 25f_3 = 4f_2 + 25f_3 =$$

$4\frac{\nu_2}{80} + 25\frac{\nu_3}{80} = 4\frac{\nu_2}{80} + 25\frac{\nu_3}{80}$ προκύπτει ότι $4\frac{\nu_2}{80} + 25\frac{\nu_3}{80} = 6,75 \Leftrightarrow 4\nu_2 + 25\nu_3 = 540$.

Άρα,
$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 80 \\ 2\nu_2 + 5\nu_3 = 120 \\ 4\nu_2 + 25\nu_3 = 540 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 50 \\ \nu_2 = 10 \\ \nu_3 = 20 \end{array} \right.$$

8.13 Stem and leaf plots (φυλλογράφημα, μίσχος και φυλλαράκια)

Έστω ότι έχω τις τιμές

136,4	110,9	120	110,1	110,6
116,2	99	134,5	121,7	

Ζητείται να παρασταθούν.

Μέθοδος εργασίας

1 Οι αριθμοί στρογγυλοποιούνται στον πλησιέστερο ακέραιο.

136	111	120	110	111
116	99	135	122	

2 Επιλέγω πρώτα stem (μίσχοι ή οδηγούνται ψηφία) ΔΕΚΑΔΕΣ και μετά leaves (φυλλαράκια ή επόμενα ψηφία) ΜΟΝΑΔΕΣ.

stems	leaves
13	6
11	1
12	0
11	0
11	1
11	6
9	9
13	5
12	2

3 Καταγράφω τα stems.

4 Διατάσσω τα stems κατά αύξουσα τάξη, γράφοντας τα κατακόρυφα.

Stem and leaf plot

Δεκάδες	Μονάδες
9	9
10	--
11	1, 0, 1, 6
12	0, 2
13	6, 5

5 Γράφω τα leaves στην ίδια γραμμή που βρίσκεται το αντίστοιχο τους stem.

6 Ελέγχω αν έχω καταγράψει όλα τα φύλλα. Ο αριθμός τους πρέπει να ισούται με το σύνολο των παρατηρήσεων.

8.13.1 Παρατήρηση

Αν το δω ανάποδα, είναι διάγραμμα συχνοτήτων. Το φυλλογράφημα παρουσιάζει την ίδια οπτική εικόνα με το διάγραμμα των συχνοτήτων, αλλά οι αριθμοί εδώ διατηρούνται.

8.14 Το IQ test

Οι έννοιες του δείκτη νοημοσύνης και των test ευφυΐας, εισέρχονται όλο και περισσότερο στην καθημερινή ζωή, με σκοπό την επιλογή του κατάλληλου ανθρώπου για την κατάλληλη θέση. Ο όρος δείκτης νοημοσύνης αποτελεί την απόδοση στα ελληνικά του αγγλικού όρου **Intelligence Quotient** (IQ) που ερμηνεύεται ως πηλίκο ευφυΐας ή διανοητικό πηλίκο. Ο όρος αυτός υιοθετήθηκε στην επιστημονική ορολογία το 1912 και από τότε γνώρισε μεγάλη δημοσιότητα. Εκφράζει το πηλίκο της διανοητικής ηλικίας (**Mental Age-MA**) προς τη χρονολογική ηλικία (**Chronological Age-CA**) πολλαπλασιασμένο επί 100.

$$IQ = \frac{MA}{CA} 100$$

Το MA εξαρτάται από την απόδοση του ατόμου σε μία αναγνωρισμένη δοκιμασία ευφυΐας (IQ test). Το CA εκφράζει την πραγματική ηλικία του ατόμου.

Αν άτομο ηλικίας 10 ετών επιτύχει σε test ευφυΐας 120 βαθμούς, τότε έχει MA=12, δηλαδή νοητική ηλικία δωδεκάχρονου παιδιού. Η ανάπτυξη της ευφυΐας ολοκληρώνεται περί τα 15 έως 17 έτη της ηλικίας του ατόμου.

Κατά άλλους ειδικούς η νοητική ανάπτυξη ολοκληρώνεται στα 16 έτη, οπότε τίθεται ως συμβατικό επίπεδο η ηλικία των 15,5 ετών. Άρα, δεν έχει νόημα να θεωρηθεί ότι ένα άτομο ηλικίας 22 ετών έχει διανοητική ηλικία 28, καθόσον η διανοητική ηλικία είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Σε ενήλικα άτομα του πληθυσμού, το IQ test χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης τους στην κλίμακα κατανομής του IQ και όχι για τον προσδιορισμό της διανοητικής ηλικίας του εξεταζόμενου ατόμου. Προϊόντος του χρόνου, ο παρονομαστής του ανωτέρω τύπου αυξάνεται, ενώ ο αριθμητής παραμένει σταθερός, συνεπώς παρατηρείται διαρκής και σταθερή μείωση του δείκτη νοημοσύνης. Προς τούτο για όλα τα άτομα ηλικίας άνω των 16 ετών, θεωρείται ότι CA=16 ή CA=15,5. Τα σύγχρονα IQ test εξετάζουν ένα δείγμα ικανοτήτων που θεωρείται ότι σχετίζονται με την ευφυΐα.

Το **test Stanford-Binet** και οι παραλλαγές του, εξετάζουν συστηματικά στοιχεία ευφυΐας ατόμων δυτικών κοινωνιών.

Τα test λεκτικών ικανοτήτων, οι **κλίμακες του Raven** και τα test πρακτικής σκέψης, εξετάζουν διαφορετικά στοιχεία ευφυΐας το κάθε ένα. Οι βαθμολογίες που επιτυγχάνονται στα test αυτά είναι παραπλήσιες, αλλά όχι ταυτόσημες.

Οι **προϊούσης δυσχέρειας κλίμακες του Raven** πλεονεκτούν στο ότι μετρούν ορισμένους θεμελιώδεις συντελεστές νοημοσύνης, ανεξάρτητα από το μορφωτικό επίπεδο του εξεταζόμενου ατόμου. Μπορεί να δοθεί σε άτομα διαφορετικών κοινωνικών, πολιτιστικών συστημάτων χωρίς να υπάρχουν σημαντικά σφάλματα κατά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, δηλαδή σφάλματα οφειλόμενα στη διαφορετική επίδραση που ασκούν οι διάφορες μορφές του πολιτισμού στην εξέλιξη της ευφυΐας του ατόμου.

Μπορεί να δοθεί σε αγράμματα άτομα, ή με δυσκολίες στην ακοή ή στην ομιλία, μιας και οι προφορικές υποδείξεις περιορίζονται στο ελάχιστο. Οι κλίμακες του Raven δεν εξετάζουν σφαιρικά την ευφυΐα, αλλά επιλεκτικά ορισμένα μόνο στοιχεία της νοημοσύνης, όπως η αναλυτική ικανότητα, η αριθμητική ικανότητα, η χωροαντιληπτική ικανότητα, η αίσθηση της συμμετρίας, η ικανότητα συσχετισμού σχημάτων και συμβόλων. Τα περισσότερα test νοημοσύνης έχουν χρονικό περιορισμό, συνήθως 30' έως 45' και η κάθε δοκιμασία είναι δυσκολότερη από την προηγούμενη.

Ενδεικτικά, για test διάρκειας 30', όσοι το ολοκληρώσουν σε λιγότερο από 15' πριμοδοτούνται με 5 επιπλέον βαθμούς, όσοι τελειώσουν σε λιγότερο από 20' πριμοδοτούνται με 3 επιπλέον βαθμούς, ενώ όσοι χρειασθούν λιγότερο από 25'

πριμοδοτούνται με 2 επιπλέον βαθμούς. Δεν αποτελούν τέλειες διαδικασίες και ως εκ τούτου δεν πρέπει να υπερτιμώνται. Αν η ευφυΐα δε συνοδεύεται από άλλες ιδιότητες, τότε είναι πιθανό να αποδειχθεί επιζήμια και καταστροφική για το άτομο και το κοινωνικό σύνολο.

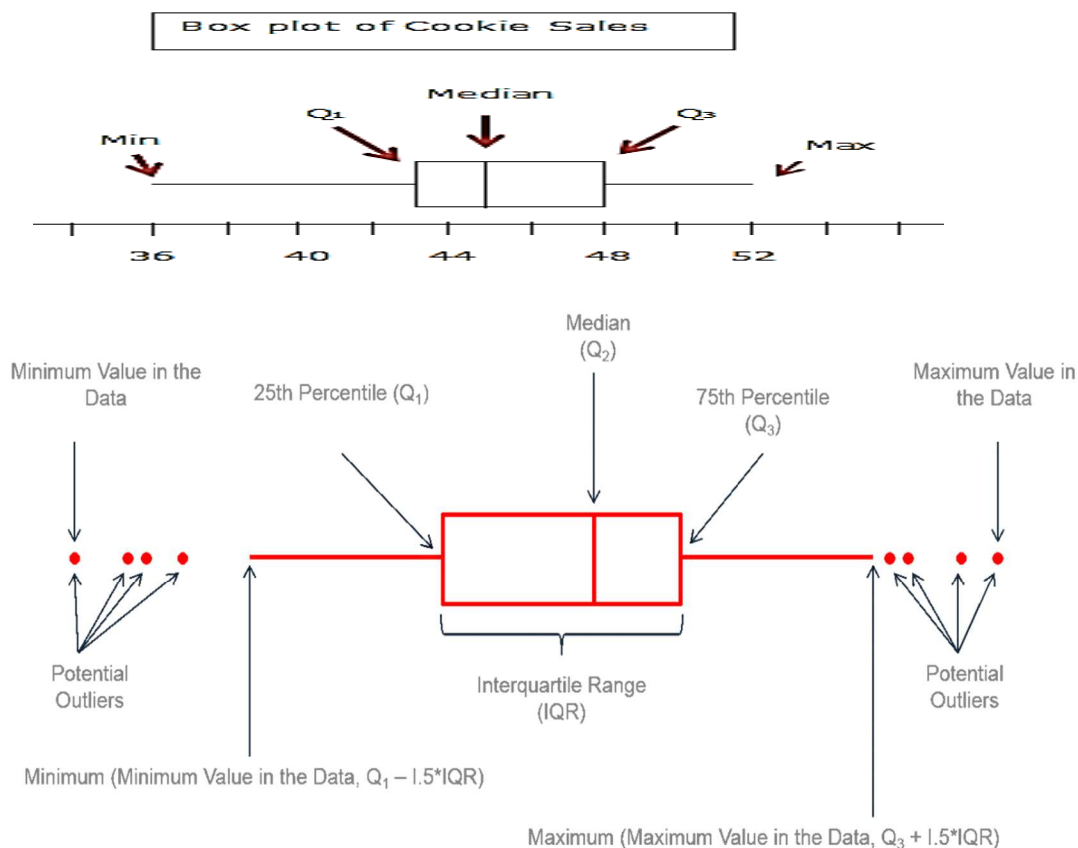
Τα ειδικά test για παιδιά 5 έως 11 ετών, έχουν περιορισμένη προγνωστική αξία. Όσο μικρότερη είναι η ηλικία του παιδιού, τόσο λιγότερο αξιόπιστα είναι τα αποτελέσματα των IQ tests. Αν η βαθμολογία είναι κατά πολύ χαμηλότερη από το μέσο όρο, ενδείκνυται η παροχή βοήθειας από εξειδικευμένο παιδοψυχολόγο. Η διάγνωση της πνευματικής καθυστέρησης δε μπορεί να στηριχθεί μόνο στα αποτελέσματα ενός IQ test, ειδικά αν πρόκειται για παιδιά.

Η MENSA, είναι η διεθνής λέσχη των ατόμων με εξαιρετικά υψηλό δείκτη νοημοσύνης, ιδρύθηκε το 1945 και αριθμεί πάνω από 45.000 μέλη παγκοσμίως.

Δέχεται άτομα ανεξαρτήτως φυλής, θρησκείας, χρώματος, κοινωνικής, οικονομικής κατάστασης, επαγγέλματος, μορφωτικού επιπέδου, αρκεί το IQ τους να ανήκει στο ανώτερο 2% του πληθυσμού (132 ή 133 βαθμοί σε ένα κλασσικό test).

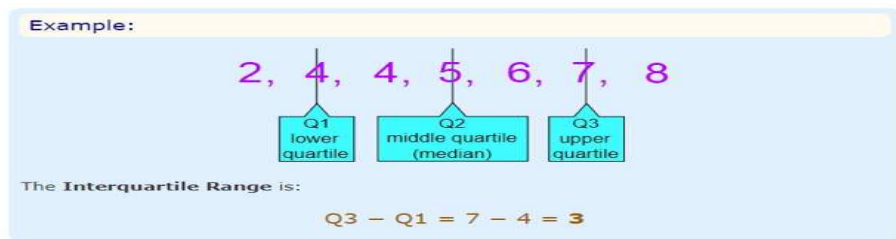
IQ	Επίπεδο ευφυΐας
Κάτω από 70	Πνευματικά υπολειπόμενος
70 – 79	Οριακό επίπεδο
80 – 89	Κάτω του μετρίου
90 – 109	Μέσης ευφυΐας
110 – 119	Άνω του μετρίου
120 – 140	Εξαιρετικής ευφυΐας
Πάνω από 140	Εξαιρετικά υψηλής ευφυΐας

8.15 Θηκόγραμμα (boxplot)



Εφαρμογή 73

Για το θηκόγραμμα βρείτε $x_{\min}$, $x_{\max}$, R , δ , Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q , M_0

**Λύση**

$$x_{\min} = 2$$

$$x_{\max} = 8,$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 8 - 2 = 6$$

$$M_0 = 4$$

$$Q_1 = 4$$

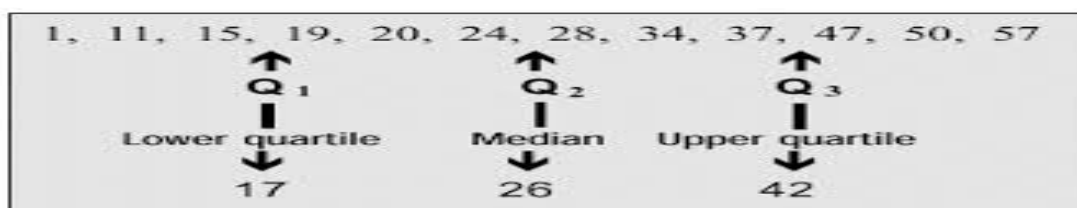
$$\delta = Q_2 = 5$$

$$Q_3 = 7$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$$

Εφαρμογή 74

Για το θηκόγραμμα βρείτε $x_{\min}$, $x_{\max}$, R , δ , Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q

**Λύση**

$$x_{\min} = 1$$

$$x_{\max} = 57$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 57 - 1 = 56$$

$$Q_1 = 17$$

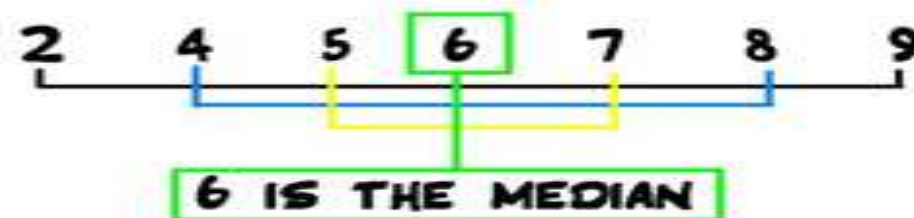
$$\delta = Q_2 = 26$$

$$Q_3 = 42$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 42 - 17 = 25$$

Εφαρμογή 75

Για το θηκόγραμμα βρείτε $x_{\min}$, $x_{\max}$, R , δ , Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q

**Λύση**

$$x_{\min} = 2$$

$$x_{\max} = 9$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 9 - 2 = 7$$

$$Q_1 = 4$$

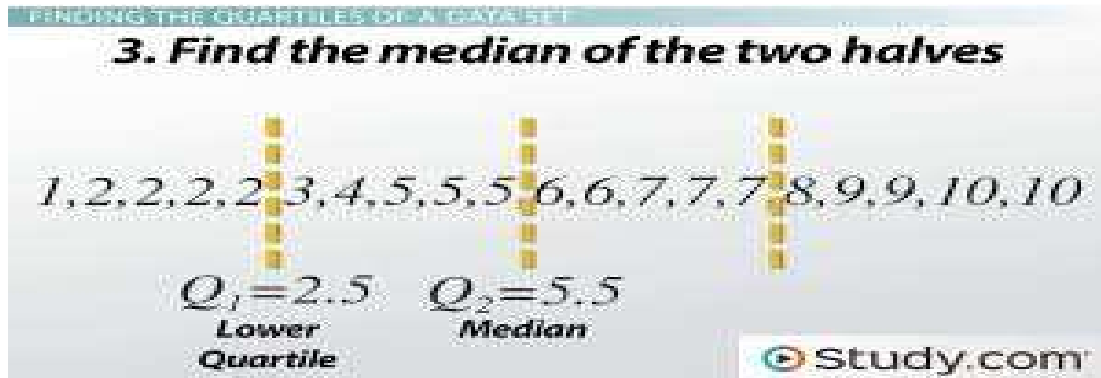
$$\delta = Q_2 = 6$$

$$Q_3 = 7$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$$

Εφαρμογή 76

Για το θηκόγραμμα βρείτε $x_{\min}$, $x_{\max}$, R , δ , Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q , M_0



Λύση

$$x_{\min} = 1$$

$$x_{\max} = 10$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10 - 1 = 9$$

$$M_0 = 2$$

$$Q_1 = 2,5$$

$$\delta = Q_2 = 5,5$$

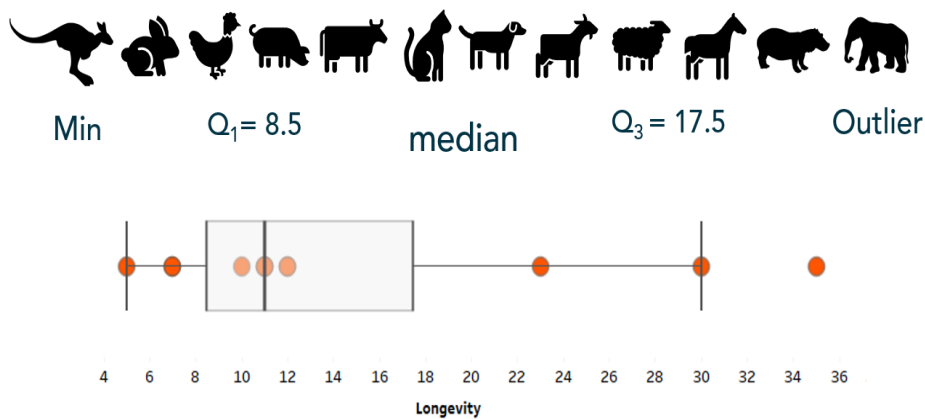
$$Q_3 = 7,5$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7,5 - 2,5 = 5$$

Εφαρμογή 77

Για το θηκόγραμμα βρείτε $x_{\min}$, $x_{\max}$, R , δ , Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q

Modern Boxplot



Λύση

$$x_{\min} = 5$$

$$x_{\max} = 30$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 30 - 5 = 25$$

$$Q_1 = 8,5$$

$$\delta = Q_2 = 11$$

$$Q_3 = 17,5$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 17,5 - 8,5 = 9$$

8.16 Ερωτήσεις σωστού– λάθους

- 1 Οι ποιοτικές μεταβλητές, διακρίνονται σε συνεχείς και διακριτές.
- 2 Οι τιμές μίας ποιοτικής μεταβλητής, είναι αριθμοί.
- 3 Το άθροισμα των συχνοτήτων ν_i ισούται με 1.
- 4 Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i , ισούται με το μέγεθος N του δείγματος.
- 5 Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i , ισούται με 100
- 6 Για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει ότι $f_i > 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$
- 7 Οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i
- 8 Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i
- 9 Η συχνότητα ν_i της τιμής x_i , μίας μεταβλητής X , είναι αρνητικός αριθμός.
- 10 Για ποσοτικές μεταβλητές, εκτός από τις συχνότητες ν_i και f_i , χρησιμοποιούνται και οι αθροιστικές συχνότητες N_i και F_i
- 11 Το ραβδόγραμμα, χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.
- 12 Το κυκλικό διάγραμμα, χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής ή και ποσοτικής μεταβλητής.
- 13 Το ραβδόγραμμα, αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους έχουν ίσα μήκη.
- 14 Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων, είναι μέτρο θέσης.
- 15 Η διάμεσος d ενός δείγματος, είναι μέτρο διασποράς.
- 16 Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, τότε και η s^2 εκφράζεται σε cm
- 17 Ο CV είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.
- 18 Τα μέτρα διασποράς, εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μίας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.
- 19 Ο CV παραστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς.

20 Το R ενός δείγματος n παρατηρήσεων, ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της ελάχιστης παρατήρησης.

21 Το εύρος R ενός δείγματος, εξαρτάται από τις δύο ακραίες παρατηρήσεις και είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

22 Τα μέτρα ασυμμετρίας, καθορίζουν τη μορφή της κατανομής.

23 Τα μέτρα ασυμμετρίας, εκφράζονται μόνο ως συνάρτηση των μέτρων θέσης.

24 Τα μέτρα διασποράς, εκφράζουν πόσο επεκτείνονται οι παρατηρήσεις γύρω από το «κέντρο» τους.

25 Διασπορά είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i παρατηρήσεων από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$

26 Ο CV εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων, απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής.

27 Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος, ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης.

28 Το εύρος του δείγματος, χρησιμοποιείται για την κατασκευή ισοπλατών κλάσεων.

29 Η κατανομή συχνοτήτων με «κωδωνοειδή» μορφή, ονομάζεται κανονική κατανομή.

30 Σε όλες τις περιπτώσεις, οι κλάσεις ενός δείγματος έχουν όλες το ίδιο πλάτος.

31 Όταν το πλήθος των τιμών μίας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο, τότε είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν τα δεδομένα σε κλάσεις.

32 Ένα μικρό δείγμα, είναι πάντα πιο αξιόπιστο από ένα μεγάλο δείγμα.

33 Ένα μεγάλο δείγμα, είναι πάντα πιο αξιόπιστο από ένα μικρό δείγμα.

34 Το ύψος των ναυτικών ενός πλοίου, είναι ποιοτική μεταβλητή.

35 Οι διακριτές μεταβλητές, λαμβάνουν μόνο μεμονωμένες τιμές.

36 Το βάρος των ναυτικών, είναι ποσοτική συνεχής μεταβλητή.

8.17 Ερωτήσεις

1 Ποιες μεταβλητές ονομάζονται ποσοτικές;

2 Πότε μία ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

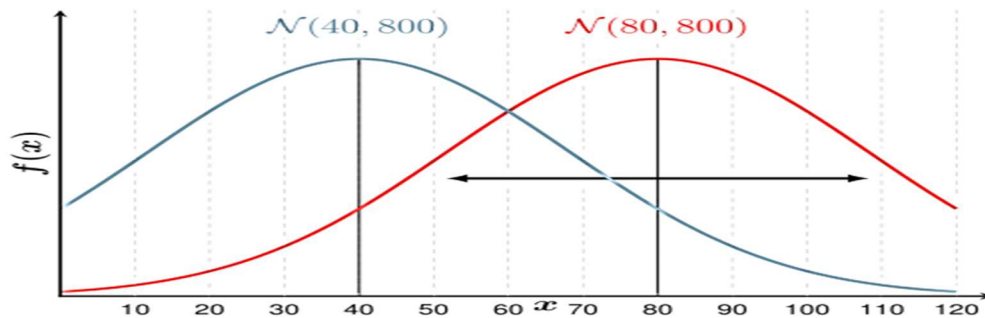
3 Πότε ένα δείγμα ονομάζεται αντιπροσωπευτικό;

- 4** Τι ονομάζεται πληθυσμός και τι δείγμα;
- 5** Τι ονομάζεται μεταβλητή X ενός πληθυσμού και πως συμβολίζεται;
- 6** Ορισμός της ν_i μίας τιμής x_i της μεταβλητής X ενός δείγματος
- 7** Ορισμός της N_i μίας τιμής x_i της μεταβλητής X , ενός δείγματος.
- 8** Ορισμός της f_i μίας τιμής x_i της μεταβλητής X , ενός δείγματος και τι τιμές λαμβάνει.
- 9** Ορισμός της $f_i\%$ μίας τιμής x_i της μεταβλητής X ενός δείγματος και τι τιμές λαμβάνει.
- 10** Ορισμός της $F_i\%$ μίας τιμής x_i της μεταβλητής X , ενός δείγματος και τι τιμές λαμβάνει.
- 11** Ορισμός πίνακα κατανομής συχνοτήτων.
- 12** Για τη γραφική παράσταση ποιου φαινομένου χρησιμοποιείται το χρονόγραμμα;
- 13** Σε μία κανονική κατανομή είναι $\bar{x} = 30$ και $s = 3$. Ποιο είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ 30 και 33; Τα δείγμα των τιμών της μεταβλητής είναι ομοιογενές;
- 14** Σε μία κανονική κατανομή είναι $\bar{x} = 20$, $s = 3$ Ποιο είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ 14 και 26;
- 15** Σε μία κανονική κατανομή είναι $\bar{x} = 25$, $s = 5$ Ποιο είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ 20 και 30;
- 16** Πλήθος ν_1 παρατηρήσεων έχει μέση τιμή μ_1 . Πλήθος ν_2 παρατηρήσεων έχει μέση τιμή μ_2 . Πλήθος ν_3 παρατηρήσεων έχει μέση τιμή μ_3 . Όλες οι παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή μ . Αποδείξτε ότι $\mu_1 = \mu + \frac{\nu_2}{\nu_1}(\mu - \mu_2) + \frac{\nu_3}{\nu_1}(\mu - \mu_3)$
- 17** Δίνονται οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$, μίας μεταβλητής X , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s . Αν οι τιμές $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ έχουν μέση τιμή $\overline{x^2}$, αποδείξτε ότι $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$
- 18** Δίνονται οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$, μίας μεταβλητής X , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s . Οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ έχουν, αντίστοιχα, σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_n$ αποδείξτε ότι $s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i - (\bar{x})^2$

19 Ποια είναι τα σπουδαιότερα μέτρα θέσης;

20 Ποια είναι τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς;

21 Πότε είχες καλύτερη επίδοση, όταν πήρες 50 στο μπλε διαγώνισμα ή 70 στο κόκκινο;



8.18 Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1 Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, αν είναι R το εύρος του δείγματος και k ο αριθμός των κλάσεων, τότε το πλάτος των κλάσεων c είναι

- (α) $c = \frac{k}{R}$, (β) $c = \frac{R}{k}$, (γ) $c = Rk$,
 (δ) $c = R + k$, (ε) $c = R - k$ (στ) $c = k - R$

2 Αν οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X σε ένα δείγμα μεγέθους n , είναι $t_1, t_2, \dots, t_n$, τότε η μέση τιμή ισούται με:

- (α) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$ (β) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n^2}$ (γ) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n}$ (δ) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n^2}$ (ε) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n-1}$

3 Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων, δοθεί διαφορετική βαρύτητα, εκφραζόμενη με τους συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \dots, w_n$, ο σταθμικός

- μέσος δίνεται από τον τύπο: (α) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ (β) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{n}$ (γ) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}$
 (δ) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ (ε) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$

8.19 Ασκήσεις για επίλυση

Άσκηση 1

Σπουδαστής διαθέτει τα χρήματα του ως εξής: Για ενοίκιο 20%, για φαγητό 30%, για ρούχα 30%, για διασκέδαση 15% και αποταμιεύει τα υπόλοιπα. Κάντε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

Άσκηση 2

Ο χημικός τύπος του νιτρικού νατρίου είναι NaNO_3 , δηλαδή το μόριο του αποτελείται από 1 άτομο νατρίου (Na), 1 άτομο αζώτου (N) και 3 άτομα οξυγόνου (O). Σχεδιάστε κυκλικό διάγραμμα για τη σύσταση του NaNO_3

Άσκηση 3

Η μέση ηλικία 30 γυναικών είναι 38 έτη, ενώ 50 ανδρών 42 έτη. Ποια είναι η μέση ηλικίας όλων μαζί;

Άσκηση 4

Ποια η τυπική απόκλιση των 3, 6, 6, 9, 2, 4;

Άσκηση 5

Ο πίνακας δείχνει τη σχετική % συχνότητα της εβδομαδιαίας αποζημιώσεως 500 υπαλλήλων. Συμπληρώστε τον πίνακα με τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες.

€/ week	$350 \leq x < 360$	$360 \leq x < 370$	$370 \leq x < 380$	$380 \leq x < 390$	$390 \leq x < 400$
$f_i \%$	$f_1 = 8\%$	$f_2 = 28\%$	$f_3 = 44\%$	$f_4 = 16\%$	$f_5 = 4\%$

Άσκηση 6

Το μέσο βάρος 6 κοριτσιών είναι 58 kg και 3 αγοριών 61 kg. Βρείτε το βάρος των κοριτσιών, το βάρος των αγοριών και το μέσο βάρος όλων μαζί.

Άσκηση 7

Ο πίνακας δείχνει τις απουσίες 100 σπουδαστών. Αν η μέση τιμή των απουσιών είναι 34, υπολογίστε τα a , β

Απουσίες	20	30	40	Σύνολο
Σπουδαστές	a	40	β	100

Άσκηση 8

Ο αριθμός των παιδιών 100 οικογενειών φαίνεται στον πίνακα. Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

Παιδιά	0	1	2	3	4	5	6
Οικογένειες	18	20	30	15	10	5	2

Άσκηση 9

Βρείτε $\bar{x}$ και s

Κλάσεις	$0 \leq x < 10$	$10 \leq x < 20$	$20 \leq x < 30$	$30 \leq x < 40$
Συχνότητες	4	3	2	1

Άσκηση 10

Σε μία κατανομή η μέση τιμή ν παρατηρήσεων είναι a και η μέση τιμή μ παρατηρήσεων β . Αν οι παρατηρήσεις μ , ν αντιστοιχούν σε διαφορετικά άτομα, βρείτε τη μέση τιμή των $(\mu + \nu)$ παρατηρήσεων.

Άσκηση 11

Για ν άτομα είναι $\bar{x} = a$. Για μ άτομα του δείγματος ($\mu < \nu$) είναι $\bar{x} = \beta$. Ποια η $\bar{x}$ των υπολοίπων ($\nu - \mu$) ατόμων;

Άσκηση 12

Μία μεταβλητή x λαμβάνει τις ν το πλήθος τιμές $x_1, x_2, \dots, x_\nu$. Αν a είναι το ελάχιστο και β το μέγιστο αυτών, δείξτε ότι $a \leq \bar{x} \leq \beta$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 13

Αν $s = 0$ για μία μεταβλητή x , δείξτε ότι η $\bar{x}$ ισούται με κάθε μία από τις τιμές της μεταβλητής.

Άσκηση 14

Έστω 2, 5, 6, 6, 7, 5, 5, 4 θερμοκρασίες σε $^{\circ}C$. Υπολογίστε $\bar{x}$, δ , R , s και το CV .

Άσκηση 15

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X με $N_1 = 9$, $N_2 = 32$, $N_3 = 40$, $N_4 = 50$.

Βρείτε το μέγεθος του δείγματος, τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες.

Άσκηση 16

Βρείτε τους 5 διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς που έχουν μέση τιμή 5. Ποια είναι η διάμεσος τους; Αν σε κάθε έναν από τους δύο μεγαλύτερους προσθέσω τον αριθμό a , η μέση τιμή γίνεται 7. Δείξτε ότι $a = 5$.

Άσκηση 17

Έστω δείγμα ν παρατηρήσεων κάθε μία από τις οποίες μπορεί να έχει τιμή 1, 3 ή 4. Βρείτε τη $\bar{x}$ και το μέγεθος ν του δείγματος αν αυτά είναι ρίζες της $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Άσκηση 18

Η μέση βαθμολογία σπουδαστή σε 4 διαγωνίσματα είναι 92.

(α) Αν στο 5^ο διαγώνισμα γράψει 87, ποια είναι η νέα μέση βαθμολογία;

(β) Πόσο πρέπει να γράψει στο 5^ο διαγώνισμα, για να ανεβάσει τη μέση βαθμολογία κατά μία μονάδα;

Άσκηση 19

Το μέσο βάρος 4 μαθητών είναι 60 kg. Έρχονται άλλοι 2 μαθητές που τα βάρη τους διαφέρουν κατά 2 kg και το μέσο βάρος γίνεται 61 kg.

(α) Πόσο ζυγίζουν οι 2 νέοι μαθητές;

(β) Αν φύγει ένας μαθητής που ζυγίζει 59 kg, ποιο είναι το μέσο βάρος των 5 που απομένουν;

Άσκηση 20

Το μέσο βάρος μία ομάδας είναι 70 kg . Αν σε αυτούς προστεθεί ακόμη ένας που ζυγίζει 76 kg , το νέο βάρος είναι 71 kg . Πόσοι ήταν οι άνθρωποι της αρχικής ομάδας;

Άσκηση 21

Ο μέσος μισθός 15 ανδρών και 10 γυναικών είναι 900 €. Αν ο μέσος μισθός των ανδρών είναι 920 €, βρείτε το μέσο μισθό των γυναικών.

Άσκηση 22

Η μέση τιμή 5 αριθμών είναι 4 και η διάμεσος τους 3. Αν οι τρεις από αυτούς είναι οι 2, 5, 7 βρείτε τους άλλους δύο. Αν στους 5 παραπάνω αριθμούς προσθέσω άλλους τρεις διαδοχικούς ακραίους, τότε η $\bar{x}$ των 8 αριθμών γίνεται 5,5. Ποιοι είναι οι αριθμοί που προσέθεσα;

Άσκηση 23

Επιχείρηση έχει προς ενοικίαση αυτοκίνητα για τα οποία ο μέσος χρόνος λειτουργίας τους πριν από την εμφάνιση της πρώτης βλάβης είναι 12 μήνες με τυπική απόκλιση 3 μήνες. Δείξτε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Άσκηση 24

Συμπληρώστε τον πίνακα.

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 5$	$\nu_1 =$	$N_1 = 3$	$f_1 =$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\nu_1 x_1 =$
$x_2 = 6$	$\nu_2 =$	$N_2 = 10$	$f_2 =$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 7$	$\nu_3 =$	$N_3 = 15$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\nu_3 x_3 =$
$x_4 = 8$	$\nu_4 =$	$N_4 = 20$	$f_4 =$	$F_4 =$	$f_4\% =$	$F_4\% =$	$\nu_4 x_4 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^4 \nu_i =$		$\sum_{i=1}^4 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^4 f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^4 \nu_i x_i =$

Άσκηση 25

Συμπληρώστε τον πίνακα.

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 5$	$\nu_1 =$	$N_1 =$	$f_1 = 0,1$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\nu_1 x_1 =$
$x_2 = 6$	$\nu_2 =$	$N_2 =$	$f_2 = 0,2$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 7$	$\nu_3 =$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\nu_3 x_3 =$
$x_4 = 8$	$\nu_4 =$	$N_4 =$	$f_4 = 0,3$	$F_4 =$	$f_4\% =$	$F_4\% =$	$\nu_4 x_4 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^4 \nu_i = 50$		$\sum_{i=1}^4 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^4 f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^4 \nu_i x_i =$

Άσκηση 26

Συμπληρώστε τον πίνακα.

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 10$	$N_1 =$	$f_1 =$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\nu_1 x_1 =$
$x_2 = 2$	$\nu_2 =$	$N_2 = 35$	$f_2 =$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 3$	$\nu_3 =$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\nu_3 x_3 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i = 50$		$\sum_{i=1}^3 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^3 f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^3 \nu_i x_i =$

Άσκηση 27

Συμπληρώστε τον πίνακα.

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 2$	$N_1 =$	$f_1 = 0,1$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\nu_1 x_1 =$
$x_2 = 2$	$\nu_2 =$	$N_2 = 8$	$f_2 =$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 3$	$\nu_3 = 8$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\nu_3 x_3 =$
$x_4 = 4$	$\nu_4 =$	$N_4 =$	$f_4 =$	$F_4 =$	$f_4\% =$	$F_4\% =$	$\nu_4 x_4 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^4 \nu_i =$		$\sum_{i=1}^4 f_i = 1$		$\sum_{i=1}^4 f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^4 \nu_i x_i =$

Άσκηση 28

Για το θηκόγραμμα βρείτε $x_{\min}$, $x_{\max}$, R , δ , Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q

