Ιστορική εξέλιξη των εννοιών της στατιστικής

Γενικά, ο όρος στατιστική φέρεται με διττή σημασία, αφενός υποδηλώνοντας μαθηματικές μεθόδους χειρισμού δεδομένων που λήφθηκαν με απαρίθμηση ή μέτρηση και αφετέρου αυτά τα ίδια τα δεδομένα που έχουν υποστεί αυτούς τους χειρισμούς. Ο ορισμός που καθορίστηκε τη δεκαετία του 1950 "**Στατιστική είναι σύνολο μεθόδων που καθοδηγούν στη λήψη ορθών αποφάσεων σε περιπτώσεις αβεβαιότητας**" τονίζει την εννοιολογική διάκριση του συνόλου των στοιχείων ενός φαινομένου και το σύνολο των μεθόδων που εξετάζουν αυτά προς τον κοινό σκοπό.

Σύμφωνα με το λεξικό οικονομικοτεχνικών όρων του ελληνικού κέντρου παραγωγικότητας «στατιστική» είναι

α) τα αριθμητικά δεδομένα που αναφέρονται σε σύνολο ατόμων (έμψυχων, άψυχων, φαινόμενα κλπ.) και

β) η επιστήμη συλλογής, ανάλυσης και ερμηνείας τούτων των δεδομένων.

Η στατιστική έρευνα βασίζεται στη χρήση της στατιστικής θεωρίας, ενός κλάδου των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Στη στατιστική, η τυχαιότητα και η απροσδιοριστία ορίζονται στα πλαίσια της θεωρίας πιθανοτήτων. Η πρακτική της στατιστικής περιλαμβάνει τη σχεδίαση, συλλογή και ερμηνεία δεδομένων που προκύπτουν από αβέβαιες παρατηρήσεις. Επειδή η στατιστική αποσκοπεί στην εξαγωγή των «καλύτερων» πληροφοριών από τα διαθέσιμα δεδομένα, κατατάσσεται από μερικούς ως κλάδος της θεωρίας των αποφάσεων.

Τη σύγχρονη γενική έννοια της συλλογής και ταξινόμησης δεδομένων φέρεται να έλαβε στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα. Η στατιστική ως έννοια, εμφανίζεται από τους μυθικούς χρόνους από της πρώτης δημιουργίας οργανωμένων κοινωνιών. Μια πρώτη γραφή στατιστικής μορφής με αριθμητικά δεδομένα είναι ο κατάλογος των πλοίων των Αχαιών στον Τρωικό πόλεμο από τον Όμηρο. Από τον κατάλογο αυτό, οι ιστορικοί απέσπασαν σημαντικές εκτιμήσεις της οικονομικής ευρωστίας και του πληθυσμού των πόλεων– κρατών που συμμετείχαν και σημαντικά στοιχεία για την τότε ναυπηγική, ναυτιλία και ναυτική τέχνη. Στην αρχαιότητα πρώτος στόχος συλλογής των στατιστικών στοιχείων ήταν η στράτευση και η φορολόγηση τόσο των πολιτών όσο και ολόκληρων πόλεων, π.χ. των σατραπειών της Περσίας, πόλεων της «Αθηναϊκής Συμμαχίας» κ.λπ. Χαρακτηριστική ήταν και η κοινωνική διάρθρωση της αρχαίας Αθήνας στην Αρχαϊκή εποχή, λαμβάνοντας υπόψη ως στατιστικά στοιχεία τον μέδιμνο και τον ίππο. Αλλά και η εκπροσώπηση των φυλών και Δήμων της Αθήνας στην Εκκλησία του Δήμου, οι ψηφοφορίες και ο εξοστρακισμός στηρίζονταν σε στατιστικά δεδομένα. Αργότερα με βάση στατιστικά στοιχεία προχώρησαν οι Ρωμαίοι στη διοικητική διαίρεση της Αυτοκρατορίας τους και ακολούθως η Βυζαντινή Αυτοκρατορία, δημιουργώντας τα βυζαντινά θέματα.

Η συστηματική όμως συλλογή δεδομένων για πληθυσμό και οικονομία (δημογραφική στατιστική) άρχισε στη διάρκεια της Αναγέννησης και ειδικότερα στη Βενετία και στη Φλωρεντία και γρήγορα επεκτάθηκε σε όλα τα τότε Βασίλεια της Ευρώπης. Περί το τέλος του $11^{ου}$ αιώνα, επί εποχής Γουλιέλμου του Κατακτητή, πραγματοποιήθηκε μια σπουδαία στατιστική απογραφή που αφορούσε μονάδες παραγωγής της Αγγλίας, όπως μεταλλεία, ιχθυοτροφεία κ.λπ. Οι μεγάλοι όμως ρυθμοί θνησιμότητας που άρχισαν να παρατηρούνται λίγο αργότερα, από επιδημικές ασθένειες, πολέμους και λιμοκτονίες έδωσαν ιδιαίτερη ώθηση στη στατιστική έρευνα καταγράφοντας αιτίες και απώλειες. Έτσι το **1348** ξεκίνησαν οι καταγραφές θανάτων από την πανώλη, τη φοβερή ασθένεια που κράτησε τέσσερις αιώνες. Στις καταγραφές αυτές προστέθηκαν και θάνατοι από άλλες αιτίες. Το **1620** ο Άγγλος έμπορος John Graunt ξεκίνησε πρώτος τη δειγματοληπτική έρευνα σε οικογένειες του Λονδίνου και διαπίστωσε ότι σε κάθε 88 άτομα υπήρχαν τρεις θάνατοι.

Από το στοιχείο αυτό και χρησιμοποιώντας τους καταλόγους που έδιναν 13.200 θανάτους, εκτιμήθηκε ότι ο πληθυσμός του Λονδίνου το 1620 ήταν 387.000 κάτοικοι. Έτσι, πολλοί επιστήμονες θέτουν ως αφετηρία της στατιστικής το έτος **1663**, με την έκδοση του βιβλίου «**Φυσικές & Πολιτικές παρατηρήσεις της Θνησιμότητας**» του John Graunt. Η ραγδαία ανάπτυξη του εμπορίου που σημειώθηκε από τον $16^{\text{ο}}$ μέχρι τον $19^{\text{ο}}$ αιώνα ανάγκασε τις αρχές των κρατών στη μελέτη των νέων οικονομικών δεδομένων του εμπορίου, των μεταφορών, των βιομηχανιών και του εργατικού δυναμικού. Σήμερα, η στατιστική έρευνα από μαθηματική τεχνική έχει αναχθεί σε σπουδαία αυτοτελή επιστήμη ακολουθώντας ιδιαίτερες μεθόδους ανάλυσης.

Διάκριση

Η στατιστική, ως ιδιαίτερος κλάδος των μαθηματικών στην ουσία προσφέρει δύο σπουδαίες δυνατότητες, αφενός την περιγραφή αριθμητικών συνόλων δεδομένων έρευνας και στη συνέχεια την ανάλυση αυτών. Συνέπεια αυτών των δυνατοτήτων είναι και η βασική διάκρισή της σε περιγραφική στατιστική και σε αναλυτική στατιστική.

Στην **περιγραφική στατιστική** περιγράφονται τα διάφορα στατιστικά στοιχεία μετά από συλλογή και ταξινόμηση κατά ομάδες των στατιστικών δεδομένων, τα οποία ακολούθως παρουσιάζονται υπό μορφή ανάλυσης σε πίνακες, διαγράμματα με χαρακτηριστικές τιμές, ή ιδιότητες.

Στην **αναλυτική στατιστική**, που είναι περισσότερο περίπλοκη και αναζητείται με διάφορες μεθόδους ο προσδιορισμός του βαθμού εμπιστοσύνης στην εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, μέσα όμως από κάποιο περιορισμένο δείγμα των στοιχείων ενός γενικότερου συνόλου.

Συνέπεια των παραπάνω είναι η στατιστική να αποτελεί σήμερα τον μεγάλο αρωγό στο ερευνητικό πεδίο όλων των επιστημών και όχι μόνο. Ακόμα και στην καθημερινή ζωή η στατιστική απαντάται σε όλους τους χώρους της ανθρώπινης δραστηριότητας, λαμβάνοντας έτσι επιμέρους ονομασίες π.χ. **δημογραφική**, **τουριστική**, **συγκοινωνιακή**, **πολιτική**, **βιομηχανική**, **ναυτιλιακή**, **αγροτική**, **εκπαιδευτική**, κ.ά. Ιδιαίτερη όμως σημαντική βοήθεια είναι αυτή που προσφέρει στις συμπεριφορικές επιστήμες, επιλύοντας πολύπλοκα και σύνθετα προβλήματα της συμπεριφοράς, μετά από επεξεργασία κάθε είδους αντιδράσεων ή επιδόσεων που με στατιστικές μεθόδους λαμβάνουν μετρήσιμα μεγέθη, ως μεταβλητές, κατόπιν εφαρμογής διαφόρων τεχνικών (π.χ. τεστ, ερωτηματολόγια, κλίμακες μέτρησης, κ.ά.).

Εισαγωγικές έννοιες

Επισημαίνεται ότι η στατιστική, ως ιδιαίτερη μέθοδος έρευνας, σε αντίθεση με την παρατήρηση και το πείραμα, ερευνά πάντα πλήθος παρατηρημάτων. Έτσι γεννιέται η έννοια του **στατιστικού πληθυσμού** που αποτελεί ομάδα παρατηρημάτων, όπως π.χ. μπορεί να είναι ένα σύνολο φοιτητών, ή ένα σύνολο ψηφοφόρων, ή ένα σύνολο παραγομένων οχημάτων κ.ά. Κάθε ένα μέρος αυτής της ομάδας (φοιτητής, ψηφοφόρος, όχημα) αποτελεί μία στατιστική μονάδα του αντίστοιχου στατιστικού πληθυσμού. Επειδή η εκ των πραγμάτων εξέταση της κάθε στατιστικής μονάδας χωριστά είναι χρονοβόρα και οικονομικά ασύμφορη, ακολουθείται η μελέτη ενός μόνο μέρους του συνόλου το οποίο και καλείται **στατιστικό δείγμα** που λαμβάνεται κατά τη δειγματοληψία, με διάφορους τρόπους– μεθόδους.

Η ιδιότητα ή το χαρακτηριστικό στο οποίο εξετάζεται ένας στατιστικός πληθυσμός ονομάζεται **μεταβλητή**, και αποτελεί μετρήσιμο μέγεθος σχέσης, ή αξίας. Οι μεταβλητές (δηλαδή οι εξεταζόμενες ιδιότητες ή χαρακτήρες) διακρίνονται σε διάφορα είδη. Μετά τη συλλογή των στατιστικών στοιχείων, που επιτελείται με διάφορες διαδικασίες, ακολουθεί η επεξεργασία, η ταξινόμηση και η παρουσίασή τους σε πίνακες, ή διαγράμματα.

Περιήγηση στην ιστορία της στατιστικής

450 Ο Ιππίας της αρχαίας Ηλείας χρησιμοποιεί τη μέση τιμή του χρόνου διάρκειας μιας βασιλείας, για να προσδιορίσει την ημερομηνία των πρώτων Ολυμπιακών Αγώνων, περίπου 300 χρόνια πριν από την εποχή του. Γνώριζε πόσοι βασιλείς είχαν προηγηθεί.

431 Οι επιτιθέμενοι στις Πλαταιές, κατά τον Πελοποννησιακό πόλεμο, υπολογίζουν το ύψος των τειχών, μετρώντας τον αριθμό (πλήθος) των σειρών από τούβλα. Η μέτρηση επαναλαμβάνεται αρκετές φορές, από διαφορετικούς στρατιώτες.

Η πλέον συχνή τιμή (mode) λαμβάνεται ως η πιο πιθανή. Πολλαπλασιάζοντας την τιμή αυτή με το ύψος του τούβλου μπορούν οι επιτιθέμενοι να υπολογίσουν το μήκος της σκάλας που αρκεί για να αναρριχηθούν στα τείχη.

Δειγματοληψία

400 π.Χ. Στο Ινδικό έπος “**Mahabharata**”, ο Βασιλιάς Rtuparna εκτιμά το πλήθος (αριθμό) των φρούτων και των φύλλων του δένδρου vibhikata (δένδρο που ευδοκιμεί στη ΝΑ Ασία με καρπούς σαν ζάρια και με πολλές θεραπευτικές ιδιότητες) καταμετρώντας τούς καρπούς και τα φύλλα σε ένα κλαδί και μετά πολλαπλασιάζοντας με τον αριθμό των κλαδιών. Οι εκτιμητές που προέκυψαν (2.095 φρούτα και 50.000.000 φύλλα) ήταν πολύ κοντά στις πραγματικές (αληθινές) τιμές.

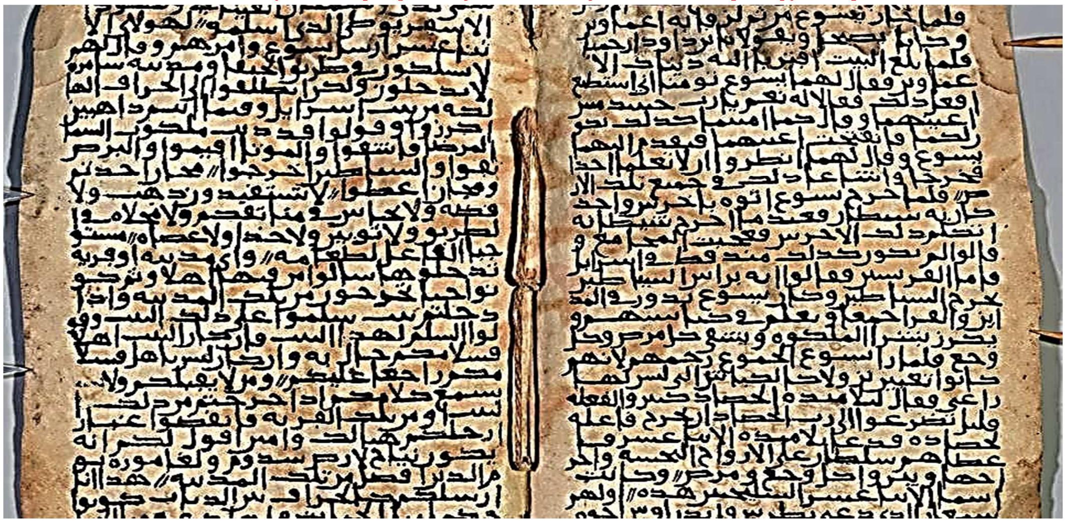
Αυτό αποτελεί το πρώτο καταγραφέν παράδειγμα δειγματοληψίας, «αλλά αυτή η γνώση κρατήθηκε μυστική» λέει το έπος.

7 μ.Χ. Η απογραφή από τον κυβερνήτη της Ρωμαϊκής επαρχίας της Ιουδαίας Κυρήνιο, μνημονεύεται στο κατά Λουκάν Ευαγγέλιο ως ο λόγος του ταξιδιού του Ιωσήφ και της Μαρίας στη Βηθλεέμ, για να φορολογηθούν.

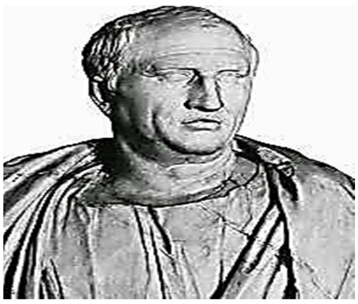
Κινέζικη απογραφή (206 π.Χ. –9 μ.Χ.) & (25–220 μ.Χ.)

Κατά τη διάρκεια της δυναστείας του Han, η απογραφή βρίσκει πληθυσμό 57,67 εκατομμυρίων κατοίκων σε 12,36 εκατομμύρια νοικοκυριά, η πρώτη απογραφή πληθυσμού για την οποία υπάρχουν δεδομένα και θεωρείται ακριβής μέχρι σήμερα, από τους ειδικούς. Ο μαθηματικός Al–Kindy, Μωαμεθανός φιλόσοφος, ιατρός και μουσικός, γνωστός και ως ο φιλόσοφος των Αράβων, από το Ιράκ, χρησιμοποιεί ανάλυση συχνοτήτων για να «σπάσει» μυστικούς κώδικες. Π.χ. τα πλέον συχνά σύμβολα σε ένα κωδικοποιημένο μήνυμα αντιπροσωπεύουν τα πλέον συχνά γράμματα. Επιπλέον, εισάγει τους αραβικούς (σημερινούς) αριθμούς (ψηφία) στην Ευρώπη.

840 μ.Χ. Αραβικός κώδικας– ανάλυση συχνοτήτων.



Γράφημα– βιβλίο Κικέρωνα 10ος αιώνας π.Χ.



Το 1ο χρονολογικά γνωστό γράφημα, σε σχολιασμό βιβλίου του Κικέρωνα, παρουσιάζει την κίνηση των πλανητών στον ζωδιακό κύκλο. Επρόκειτο να χρησιμοποιηθεί στα σχολεία των μοναστηριών.

Απογραφή –επίσημες στατιστικές στην Αγγλία

Είναι η αρχή των επίσημων στατιστικών στην Αγγλία. Το βιβλίο **Domesday** είναι το παλαιότερο δημόσιο αρχείο που υπάρχει στην Αγγλία.

1069 μ.Χ. Βιβλίο Domesday: Απογραφή για τον Ουίλιαμ τον Κατακτητή των αγροκτημάτων, των χωριών και της κτηνοτροφίας στο καινούργιο του βασίλειο.

1150 μ.Χ. Δοκιμή του Pyx (**Trial of the Pyx**) (από το ελληνικό πυξίδα– πυξός): αρχίζει ο ετήσιος έλεγχος της καθαρότητας των νομισμάτων που παράγονται από το βασιλικό νομισματοκοπείο της Αγγλίας. Τα νομίσματα επιλέγονταν τυχαία με σταθερές προκαθορισμένες αναλογίες ως προς τον αριθμό νομισμάτων που κόπτονται. Ο έλεγχος συνεχίζεται μέχρι σήμερα.

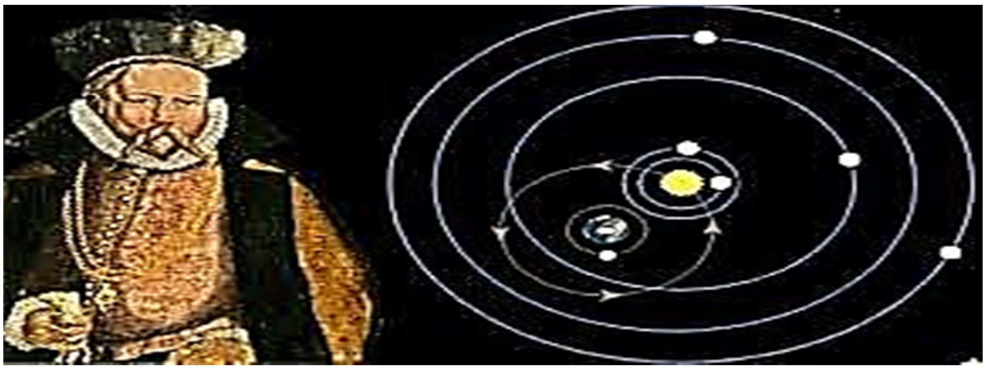
1188 μ.Χ. Πληθυσμιακή απογραφή Ουαλίας. Ο Gerald της Ουαλίας (ιερωμένος του μεσαίωνα και χρονογράφος της εποχής του) ολοκλήρωσε την πρώτη πληθυσμιακή απογραφή της Ουαλίας.

1346 μ.Χ. Το “**Nuova Cronica**” (Νέα χρονικά) του Giovanni Villani δίνει στατιστική πληροφόρηση για τον πληθυσμό και το εμπόριο της Φλωρεντίας. Τα Νέα χρονικά είναι μια ιστορία της Φλωρεντίας του 14ου αιώνα που δημιουργήθηκε χρόνο με το χρόνο και γράφτηκε, αρχικά, από τον Φλωρεντινό τραπεζίτη και αξιωματούχο Villani. Περιγράφει με λεπτομέρεια τα κτήρια της πόλης και δίνει στατιστικές πληροφορίες για τον πληθυσμό, το εμπόριο, την παιδεία, τη θρησκεία, τις καταστροφές κλπ. Έχει αναφερθεί ως μια πρώτη εισαγωγή στη στατιστική.

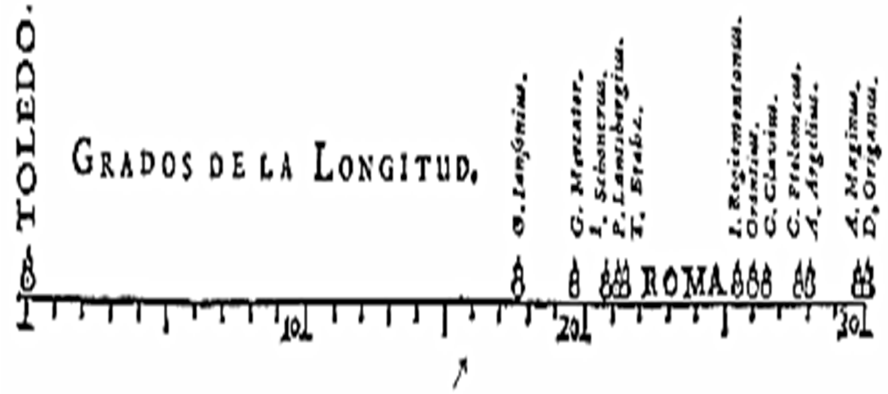
Η μαθηματική θεμελίωση (1500–1900)

1560 Ο Geronymo **Cardano**, Ιταλός μαθηματικός, φυσικός, ιατρός και τζογαδόρος της Αναγέννησης υπολογίζει τις πιθανότητες διαφόρων ρίψεων δυο ζαριών για τους παίκτες των τυχερών παιχνιδιών.

1570 Ο αστρονόμος Tycho **Brache**, Δανός ευγενής γνωστός για τις ακριβείς και λεπτομερείς πλανητικές παρατηρήσεις του, χρησιμοποιεί τον αριθμητικό μέσο για να μειώσει τα σφάλματα των εκτιμητών του, για τις θέσεις των αστέρων και των πλανητών.



1644 Ο Michael **van Langren**, Ολλανδός αστρονόμος και χαρτογράφος, χαράσσει το πρώτο γνωστό γράφημα στατιστικών δεδομένων που δείχνει και το μέγεθος πιθανών σφαλμάτων. Αφορά διαφορετικούς εκτιμητές της απόστασης (γεωγραφικού μήκους) μεταξύ του Τολέδο της Ισπανίας και της Ρώμης.



1654 Οι Blasé **Pascal** & Pier **Fermat** αλληλογραφούν για τον καταμερισμό των στοιχημάτων στα τυχερά παιχνίδια και δημιουργούν τη μαθηματική θεωρία των πιθανοτήτων.

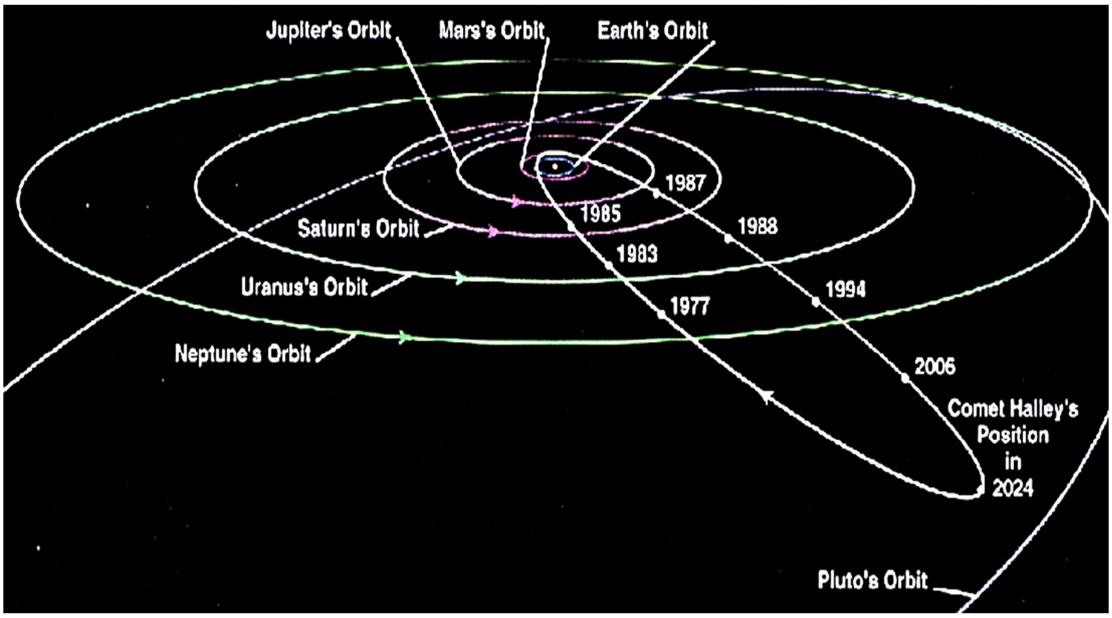
1657 Το βιβλίο του Huygens με τίτλο «Η λογική των τυχερών παιγνιδιών» (**On reasoning in games of chance**) είναι το πρώτο βιβλίο στη θεωρία πιθανοτήτων. Ο Huygens εφεύρε επίσης και το εκκρεμές ρολόι.

1633 Ο Άγγλος John **Graunt,** ένας από τους πρώτους δημογράφους, έμπορος ψιλικών στο επάγγελμα, χρησιμοποιεί ενοριακά αρχεία για να εκτιμήσει τον πληθυσμό του Λονδίνου.

	YEARLY BILLS OF MORTALITY FOR LONDON and DUBLIN				LONDON.			
	London		Dublin		Burials		Births	
Anno	Burials	Births	Burials	Births	Males	Females	Males	Females
1680	21053	12747	1826	1096	11039	10044	6543	6199
1679	21730	12288	1397	1061	11354	10576	6247	6041
1678	20678	12601	1401	1045	10681	9977	6569	6033
1674	21201	11851	1606	942	11000	10196	6113	5738
1672	18230	12563	1436	987	9560	8070	6443	6120
1668	17278	11633	1699	1020	9111	8167	6073	5566
	120170	73683	9865	6157	62545	57030	37992	35697
The medium or 6th part whereof is	20028	12280	1644	1026	10424	9505	6331	5949

A

1693 Ο Edmund **Halley**, Άγγλος αστρονόμος, γεωφυσικός, μαθηματικός & μετεωρολόγος, δημιουργεί τους πρώτους πίνακες θνησιμότητας που συνδέουν την ηλικία με τους ρυθμούς θανάτου, το θεμέλιο των ασφαλειών ζωής.



1713 Ο Jacob **Bernoulli** στο βιβλίο του "**Ars conjectandi**" (The art of conjecturing) παρουσιάζει το νόμο των μεγάλων αριθμών (όσο πιο συχνά επαναλαμβάνεις ένα πείραμα τόσο ακριβέστερα μπορείς να προβλέψεις το αποτέλεσμα).

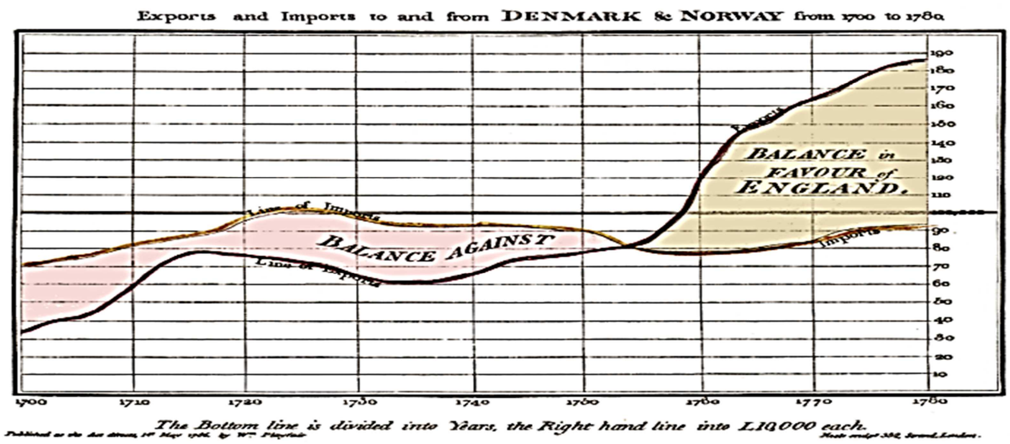
1728 Ο **Βολταίρος** και ο μαθηματικός φίλος του **De la Condamine** εντοπίζουν ότι μια λαχειοφόρος αγορά με ομόλογα στο Παρίσι, αποδίδει με διάφορα βραβεία και jackpots, περισσότερα κέρδη από το συνολικό κόστος των δελτίων. Επενδύουν στην αγορά, αγοράζουν δελτία και με απλά μαθηματικά και νόμιμα τεχνάσματα κερδίζουν μια περιουσία.

1749 Ο Gottfried **Achenwall**, Γερμανός φιλόσοφος, ιστορικός, οικονομολόγος, νομικός και στατιστικός, κατασκευάζει τη λέξη «στατιστική» (statistics –statistik) εννοώντας την πληροφορία που χρειάζεται για να λειτουργεί ένα κράτος (state).

1757 Ο **Καζανόβα** γίνεται θεματοφύλακας (trustee) των γαλλικών κρατικών λαχείων. Εικάζεται ότι συνέβαλε στην επινόηση και δημιουργία του συστήματος των λαχείων.

1761 Ο αιδεσιμότατος Thomas **Bayes** αποδεικνύει το θεώρημα του Bayes, τον ακρογωνιαίο λίθο της δεσμευμένης πιθανότητας και του ελέγχου πεποιθήσεων και υποθέσεων.

1786 Ο William **Playfair**, μηχανικός, οικονομολόγος από τη Σκωτία, εισάγει γραφήματα & ραβδογράμματα για να παρουσιάσει οικονομικά δεδομένα. Θεωρείται ως ο θεμελιωτής των γραφικών μεθόδων της στατιστικής.



1789 Ο Gilbert White και άλλοι ιερωμένοι– νατουραλιστές καταγράφουν (κρατούν αρχεία) θερμοκρασιών, ημερομηνιών των πρώτων χιονοπτώσεων και εμφανίσεων κούκων, χελιδονιών κλπ. Τα δεδομένα αυτά αποβαίνουν χρήσιμα αργότερα στη μελέτη των κλιματικών αλλαγών.

1790 Η 1η απογραφή στις ΗΠΑ, η οποία έγινε με έφιππους απογραφείς σε 13 Πολιτείες και γειτονικές περιοχές και με εντολή του 3ου Προέδρου των ΗΠΑ Thomas Jefferson, καταγράφει 3,9 εκατομμύρια Αμερικανών.

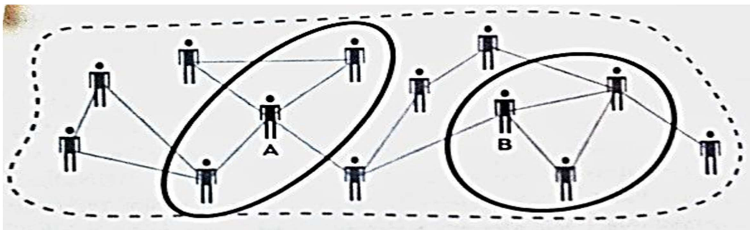
1791 Η 1η χρήση της λέξης "statistics" στα αγγλικά το από τον Sir John Sinclair στις δημοσιεύσεις του με τίτλο "**Statistical account of Scotland"** που περιγράφουν στατιστικά στοιχεία για τη ζωή στη Σκωτία.

1805 Ο διάσημος μαθηματικός Andrien– Marie **Legendre**, ο από την Τουλούζη Γαλλίας, εισάγει τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την προσαρμογή μιας συνάρτησης –καμπύλης σε ένα δεδομένο σύνολο παρατηρήσεων.

1808 Ο **Gauss**, με συνεισφορές από τον **Laplace**, παρουσιάζει την κανονική κατανομή που είναι τόσο θεμελιώδης στη στατιστική και τη θεωρία πιθανοτήτων (μελέτη μεταβλητότητας και σφαλμάτων).

1833 Η British association for the advancement of science ιδρύει τμήμα στατιστικής. Ο Thomas **Malthus**, γνωστός δημογράφος και οικονομολόγος ο οποίος μελέτησε και ανέλυσε την ανάπτυξη πληθυσμών και ο Charles **Babbage** στον οποίο αποδίδεται η ιδέα του προγραμματιζόμενου υπολογιστή, ήσαν μέλη. Αργότερα το τμήμα αυτό έγινε η **Royal statistical society**. Ένα χρόνο πριν, είχε ιδρυθεί η **Manchester statistical society**.

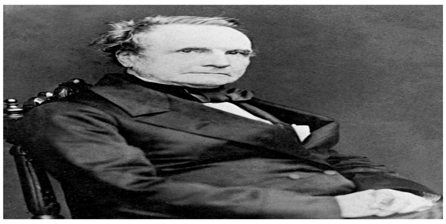
1835 Ο Βέλγος Adolphe **Quetelet** στο βιβλίο του «Πραγματεία επί του ανθρώπου» (**Treatise on man**) εισαγάγει την κοινωνική στατιστική και την έννοια του «μέσου ανθρώπου» ως προς το ύψος, τον δείκτη μάζας σώματος και τις αποδοχές, προσπαθώντας να ερμηνεύσει τους ρυθμούς θνησιμότητας, γάμων ή αυτοκτονιών κόντρα στην αντίληψη της ελεύθερης επιλογής.

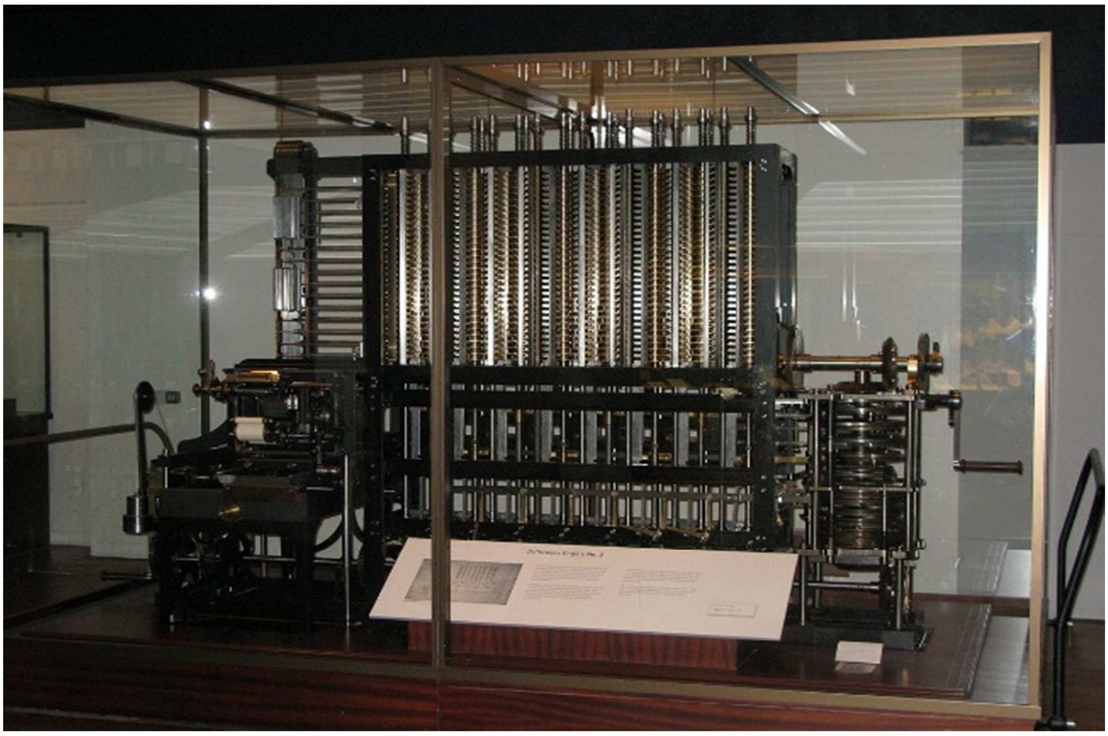


1839 Ιδρύεται η **American statistical association**. Οι Alexander Graham Bell, Andrew Carnegie και Martin Van Buren γίνονται μέλη της.

1840 Ο William Farr, Βρετανός επιδημιολόγος, εγκαθιδρύει το επίσημο σύστημα καταγραφής των αιτίων θανάτου σε Αγγλία και Ουαλία. Αυτό επιτρέπει την παρακολούθηση (ιχνηλάτιση) των επιδημιών και τη σύγκριση ασθενειών. Είναι η αρχή της ιατρικής στατιστικής.

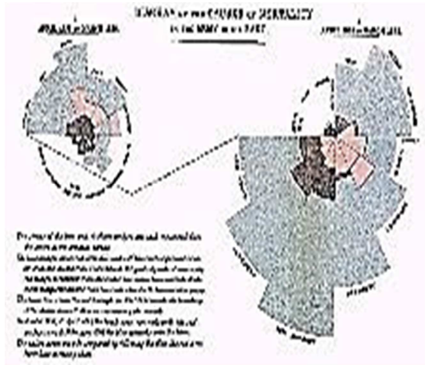
1849 Ο Charles **Babbage** (1791–1871) σχεδιάζει τη «μηχανή διαφορών» (**difference engine**) ενσωματώνοντας ιδέες χειρισμού δεδομένων και του σύγχρονου υπολογιστή. Η μηχανή διαφορών πινακοποιεί πολυωνυμικές συναρτήσεις και το όνομα απορρέει από τη μέθοδο των διαφορών. Η **Ada** Lovelace, ανιψιά του Λόρδου Βύρωνα, κόμισσα και μαθηματικός, γράφει το 1^{o} πρόγραμμα Η/Υ για τη μηχανή.





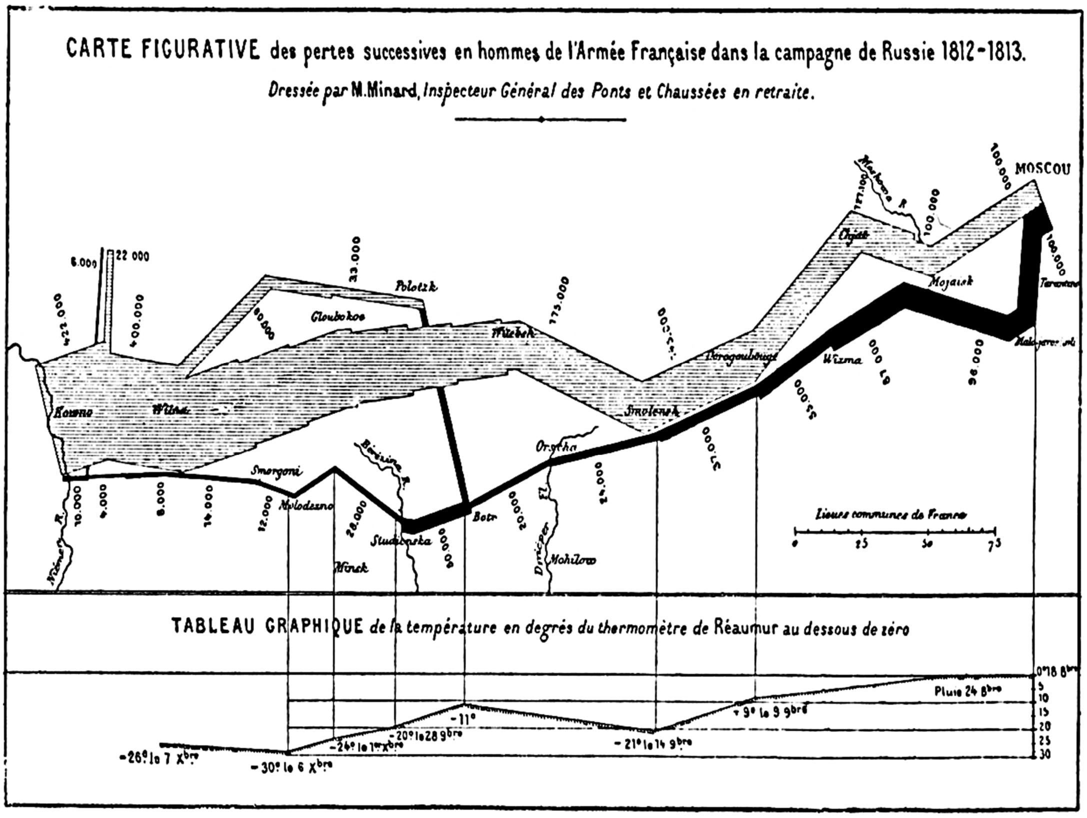
Babbage difference engine

1854 Ο «***χάρτης της χολέρας***» του ιατρού John Snow, ενός από τους πατέρες της σύγχρονης επιδημιολογίας, εντόπισε την πηγή–κέντρο μετάδοσης της μόλυνσης σε μία αντλία νερού στην οδό Broad του Λονδίνου σηματοδοτώντας την αρχή των σύγχρονων επιδημιολογικών μελετών.



1859 Η Florence Nightingale χρησιμοποιεί στατιστικά στοιχεία των ατυχημάτων (θάνατοι κλπ) στον πόλεμο της Κριμαίας για να επηρεάσει την κοινή γνώμη και το Υπουργείο πολέμου της Αγγλίας. Δείχνει τα ατυχήματα ανά μήνα με ένα κυκλικό διάγραμμα που επινοεί, το «**τριαντάφυλλο της Nightingale**», πρόδρομο του “pie chart”. Έγινε η 1η γυναίκα μέλος της RSS και το 1ο μέλος από το εξωτερικό της ASA.

1868 Ο **Minard**, Γάλλος πολιτικός μηχανικός, παρουσίασε ένα γραφικό διάγραμμα για την προέλαση του Ναπολέοντα προς τη Μόσχα (1812–1813). Το διάγραμμα παρουσιάζει την απόσταση που διανύθηκε, τον αριθμό των ανδρών που επιβίωναν σε κάθε Km της πορείας και τις θερμοκρασίες που αντιμετώπισαν.

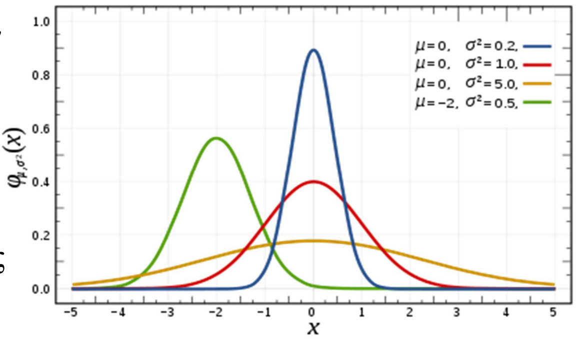


1877 O Francis **Galton**, εξάδελφος του Δαρβίνου, περιγράφει την παλινδρόμηση προς τη μέση τιμή. Το 1888 παρουσιάζει την έννοια της συσχέτισης. Σε ένα διαγωνισμό στο Devon «Μάντεψε το βάρος του βοδιού» περιγράφει τη «Σοφία του πλήθους» ότι δηλαδή ο μέσος πολλών (απληροφόρητων) εικασιών είναι κοντά στην αληθινή τιμή.

1886 Ο φιλάνθρωπος επιχειρηματίας Charles Booth ξεκινά την απογραφή των πτωχών του Λονδίνου με αποτέλεσμα τον «**χάρτη φτώχιας του Λονδίνου**» με τις περιοχές και δρόμους του χρωματισμένες από το μαύρο για τις πιο φτωχές και επικίνδυνες, μέχρι το κίτρινο για τις άνω μέσης τάξης και πλούσιες (κοινωνική χαρτογραφία). Το 1/3 των κατοίκων του Λονδίνου ζούσαν στη φτώχια.

1894 Ο Karl **Pearson** εισάγει τον όρο «**τυπική απόκλιση**». Αν τα σφάλματα ακολουθούν την κανονική κατανομή, 68% των δειγμάτων θα ευρίσκονται εντός μιας τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή.

Αργότερα αναπτύσσει τους ελέγχους– τεστ x^2 καλής προσαρμογής και ανεξαρτησίας.

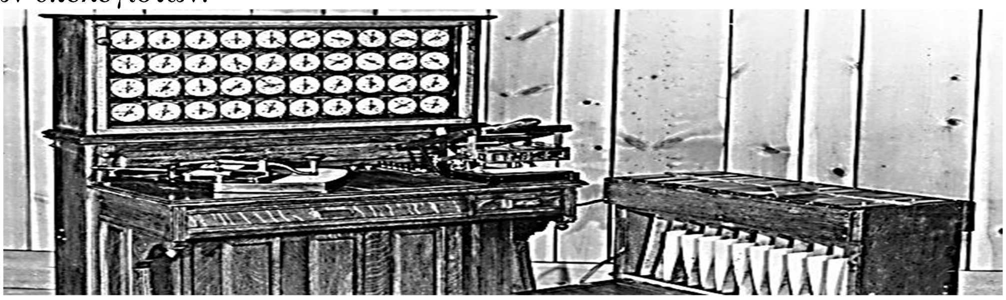


1898 Τα δεδομένα του **Von Bortkiewicz**, Πωλονογερμανού οικονομολόγου, στατιστικού, καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Strassburg, που αναφέρονται στους θανάτους στρατιωτών του Πρωσικού στρατού από κτυπήματα αλόγων δείχνουν ότι σπάνια ενδεχόμενα ακολουθούν ένα προβλέψιμο υπόδειγμα, την κατανομή του Poisson.

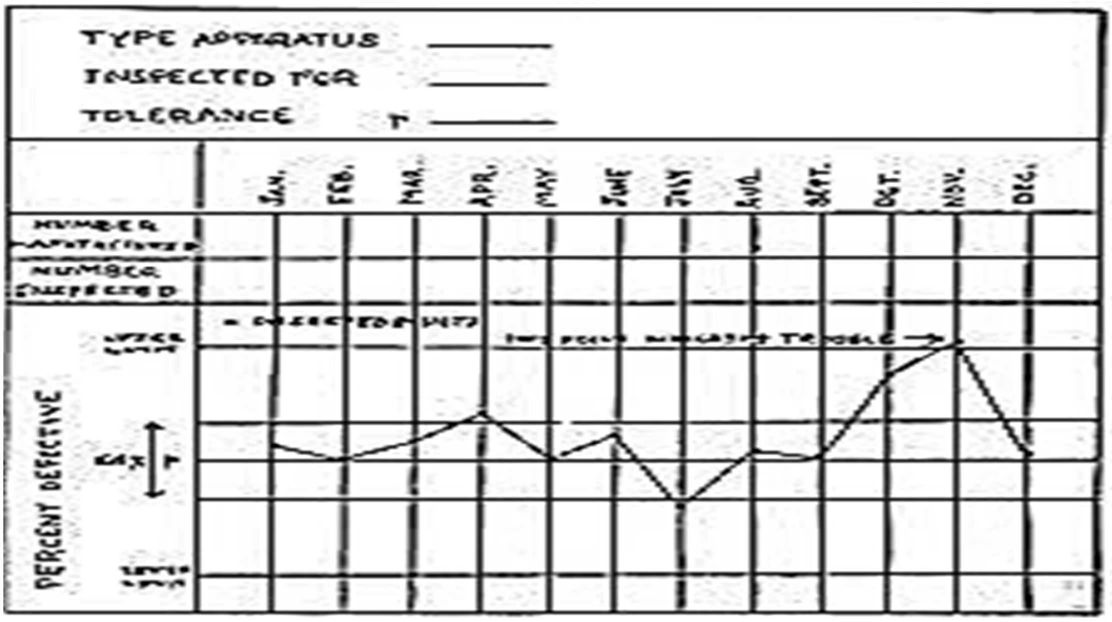
1900 Ο Louis **Bachelier**, Γάλλος μαθηματικός, δείχνει ότι οι διακυμάνσεις των τιμών των μετοχών του χρηματιστηρίου συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο, όπως τα μόρια τυχαίας κίνησης Brown. Είναι η αρχή των χρηματοοικονομικών μαθηματικών.

1908 Ο William Sealy **Gossett**, χημικός και επικεφαλής ζυθοποιός της Guinness στο Δουβλίνο παρουσιάζει τον έλεγχο t (t–test) στο "**Biometrika**" του Karl Pearson. Χρησιμοποιεί μικρά δείγματα για να εξασφαλίσει ότι κάθε παραγωγή ζύθου έχει εξίσου καλή γεύση.

1911 Ο Herman **Hollerith**, εφευρέτης των διατρητικών μηχανών που χρησιμοποιούνταν για την ανάλυση δεδομένων απογραφών του US Census, συγχωνεύει την εταιρεία του για να ιδρύσει την International Business Machines (**IBM**), τη γνωστή πρωτοποριακή εταιρεία μηχανών εμπορικών δεδομένων και των πρώτων υπολογιστών.



1916 Κατά τη διάρκεια του $1^{ου}$ παγκοσμίου πολέμου ο σχεδιαστής αυτοκινήτων Frederick **Lanchester** αναπτύσσει στατιστικούς νόμους για την πρόβλεψη της έκβασης των αερομαχιών. Διπλασιάζοντας το μέγεθος τους, ο στρατός ξηράς γίνεται 2 φορές πιο ισχυρός, αλλά οι αεροπορικές δυνάμεις γίνονται 4 φορές πιο ισχυρές.



1924 Ο Walter Shewhart εφευρίσκει το «**διάγραμμα ελέγχου**» για να βοηθήσει τη βιομηχανική παραγωγή και διοίκηση.

1922 Ο R.A. **Fisher** εισήγαγε στη στατιστική την έννοια της **πιθανοφάνειας** και τους **εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας**.

1935 Ο R.A. Fisher φέρνει επανάσταση στη σύγχρονη στατιστική. Το βιβλίο του "**Designs of experiments**" δίνει τρόπους για να αποφασίζει ο ερευνητής ποιά αποτελέσματα επιστημονικών πειραμάτων είναι σημαντικά και ποιά δεν είναι.

1935 Ο George **Zipf**, Αμερικανός γλωσσολόγος και φιλόλογος βρίσκει ότι πολλά φαινόμενα, όπως μήκη ποταμών, πληθυσμοί πόλεων κλπ, ακολουθούν έναν κανόνα (νόμο) δύναμης, που συνδέεται με την παρατήρηση ότι στη γλωσσολογία η πιο συχνή λέξη έχει περίπου 2 φορές μεγαλύτερη συχνότητα από τη $2^{η}$ πιο συχνή λέξη, 3 φορές μεγαλύτερη συχνότητα από την $3^{η}$ πιο συχνή κλπ. Είναι η κατανομή ή νόμος του Zipf. Οι **κατανομές Pareto** και εν γένει οι δυναμοκατανομές (powerlow distributions) έχουν ανάλογη συμπεριφορά.

1937 Ο Jerzy Neyman παρουσιάζει τα **διαστήματα εμπιστοσύνης** στη στατιστική συμπερασματολογία. Ένα χρόνο πριν, συνέβαλε στη σύγχρονη επιστημονική δειγματοληψία (δειγματοληψία με άνισες πιθανότητες, optimum allocation).

Κατά τη διάρκεια του $2^{ου}$ Παγκοσμίου πολέμου, ο **Alan Turing** στο πάρκο Bletchley, έξω από το Λονδίνο, σπάει τον γερμανικό πολεμικό κώδικα **Enigma** χρησιμοποιώντας προχωρημένη Μπευζιανή στατιστική, δημιουργώντας τον **Colossus**, τον 1^{o} προγραμματιζόμενο ηλεκτρονικό υπολογιστή.

1944 Οι σύμμαχοι έπρεπε να γνωρίζουν πόσα άρματα μάχης panther θα αντιμετώπιζαν στη Γαλλία την D–Day. Στατιστική ανάλυση των αριθμών μητρώου στα κιβώτια ταχυτήτων σε καταληφθέντα άρματα μάχης υποδηλώνει πόσα άρματα, ανά κατηγορία, παράγονται. Οι στατιστικοί προβλέπουν 270 το μήνα, ενώ οι μυστικές υπηρεσίες προβλέπουν πολύ λιγότερα. Τελικά η παραγωγή ήταν 276. Η στατιστική νίκησε τους κατασκόπους.

1946 Ο Richard **Cox**, καθηγητής φυσικής στο John Hopkins παράγει τους νόμους των πιθανοτήτων από ένα σύνολο λογικών αξιωμάτων (Cox's theorem).

1948–1953 Η έκθεση του Kinsey (**Kinsey report**) στις ΗΠΑ συλλέγει αντικειμενικά δεδομένα για την ανθρώπινη σεξουαλική συμπεριφορά. Μία μεγάλης κλίμακας δειγματοληπτική έρευνα 5.000 ανδρών και αργότερα, 5.000 γυναικών προκαλεί θύελλα αντιδράσεων.

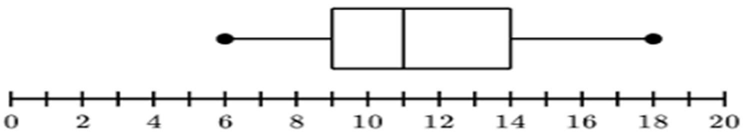
1950 Οι Richard Doll και Bradford Hill παρουσιάζουν τη σχέση μεταξύ **καπνίσματος & καρκίνου των πνευμόνων**. Το 1954 θεμελιώνουν τη σχέση με άρθρο τους 5 σελίδων στο BMJ, κατανοητό από όλους. Το ερωτηματολόγιο τους εστάλη σε 53.000 γιατρούς. Παρά την οξύτατη και θυελλώδη αντίδραση, η σχέση γίνεται τελικά αποδεκτή οδηγώντας σε ένα τεράστιο όφελος για τη δημόσια υγεία. Ο Hill ήταν κορυφαίος βιοστατιστικός και ο Doll διάσημος ιατρός της Οξφόρδης και του MRC και οι δύο έγιναν Sir. Ακόμη και ο R.A. Fisher, μέγας καπνιστής, δεν πείστηκε με την έρευνα.

1950–1960 Οι στατιστικές μέθοδοι του G. **Taguchi** για τη βελτίωση της ποιότητας των εξαρτημάτων των αυτοκινήτων και των ηλεκτρονικών, φέρνουν επανάσταση στην ιαπωνική βιομηχανία, η οποία ξεπερνά κατά πολύ τους δυτικούς ευρωπαϊκούς αντιπάλους.

1958 Ο εκτιμητής Kaplan– Meier δίνει στους γιατρούς έναν απλό στατιστικό τρόπο για να κρίνουν ποιές θεραπευτικές αγωγές, φάρμακα κλπ αποδίδουν καλύτερα. Έχει σώσει εκατομμύρια ζωές.

1972 Ο sir David **Cox** παρουσιάζει το μοντέλο αναλογικού κινδύνου και την έννοια της μερικής πιθανοφάνειας.

1972 Ο John Tukey εισαγάγει το θηκόγραμμα (διάγραμμα **boxplot** ή box & whisker) το οποίο παρουσιάζει τα τεταρτημόρια, τη διάμεσο και το εύρος των δεδομένων σε μια εικόνα.



1979 Ο Bradley Efron εισάγει τη **μέθοδο bootstrap**, έναν απλό τρόπο για να εκτιμήσει την κατανομή σχεδόν οποιουδήποτε δείγματος δεδομένων.

1981 Ιδρύεται το ελληνικό στατιστικό ινστιτούτο.

1982 Ο Edward Tufte, καθηγητής στατιστικής, πολιτικής επιστήμης και πληροφορικής στο Παν/μιο Yale, εκδίδει το βιβλίο "**The visual display of quantitative information**" θέτοντας καινούργια πρότυπα στη γραφική απεικόνιση των δεδομένων.

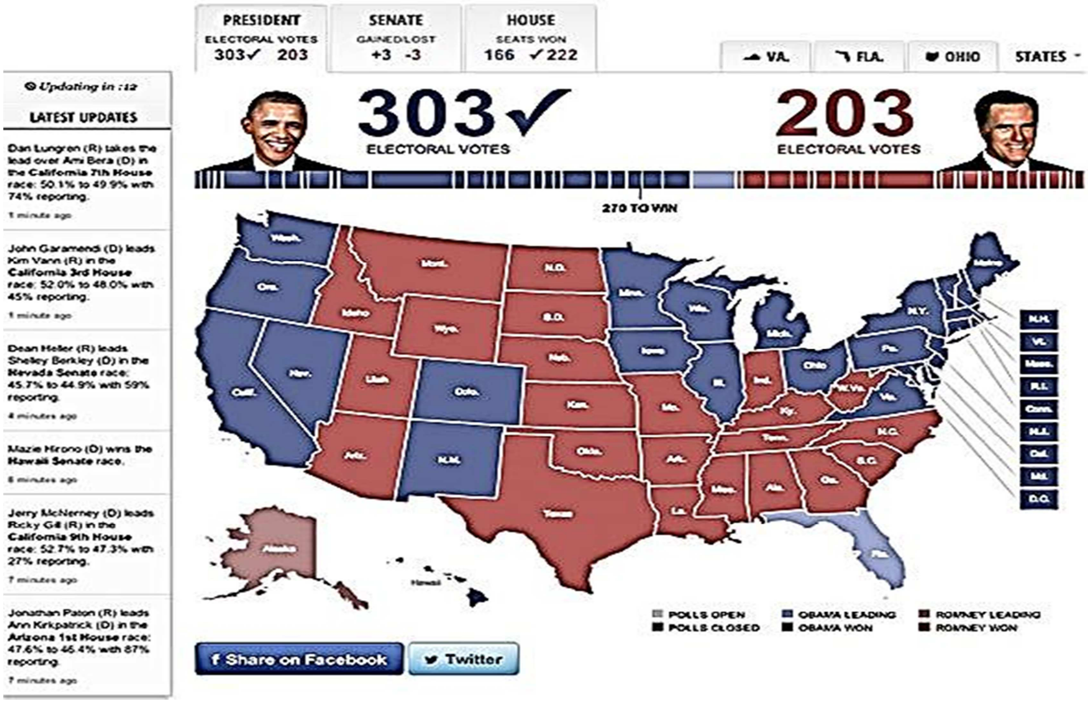
1993 Εκδίδεται η στατιστική γλώσσα προγραμματισμού **R** η οποία σήμερα αποτελεί πρότυπο καθιερωμένο στατιστικό εργαλείο.

1997 Ο όρος «μεγάλα δεδομένα» (**big data**) πρωτοεμφανίζεται στην επιστημονική βιβλιογραφία.

2002 Ο Paul DePodesta χρησιμοποιεί τη στατιστική για να μεταμορφώσει τις τύχες της ομάδας baseball Oakland athletics. Η ιστορία έγινε η ταινία "**Moneyball**".

2008 Ο Hal Varian, κορυφαίος οικονομολόγος της Google ισχυρίζεται ότι στα επόμενα 10 χρόνια η στατιστική θα είναι το πιο σέξυ επάγγελμα.

2012 Ο Nate Silver, στατιστικός και επικοινωνιολόγος, προβλέπει επιτυχώς τα αποτελέσματα των προεδρικών εκλογών και στις 50 πολιτείες της Αμερικής. Γίνεται προσωπικότητα των ΜΜΕ.

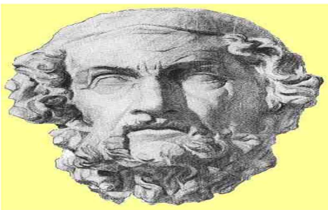


2012 Ο μεγάλος επιταχυντής Hardon του CERN επιβεβαιώνει την ύπαρξη του σωματιδίου του Higgs με 5 τυπικές αποκλίσεις, περίπου με πιθανότητα μια στα 3,5 εκατομμύρια το τι βλέπουν να είναι σύμπτωση.

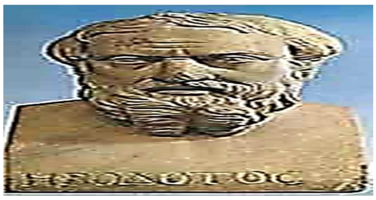
Εισαγωγή στη στατιστική

Στατιστική είναι η επιστήμη που σκοπό έχει να εξάγει συμπεράσματα για την εξυπηρέτηση διαφόρων σκοπών, με βάση παρατηρήσεις που έχουν γίνει σχετικά με το προς μελέτη θέμα. Κύριο αντικείμενο της είναι η **συλλογή,** η **παρουσίαση,** η **ανάλυση** στοιχείων ενός μικρού υποσυνόλου δεδομένων και η **διατύπωση**, με χρήση επαγωγής, των συμπερασμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση.

Βρίσκει εφαρμογές σε επιστήμες όπως η φυσική, η χημεία, η μετεωρολογία, η αστρονομία, η κοινωνιολογία[1], η οικονομία, η υγιεινή, η ιατρική, η βιολογία, η ανθρωπολογία, η πολιτική και η τεχνολογία. Η χρησιμοποίηση του όρου πιθανολογείται ότι προέρχεται από τη λατινική λέξη status που σημαίνει κράτος, διότι αρχικά δήλωνε την καταγραφή και κατάταξη ορισμένων γεγονότων που είχαν σημασία για όλο το κοινωνικό σύνολο (γεννήσεις, θάνατοι, γάμοι, ύψος παραγωγής ανά προϊόν, εγκλήματα). Με την έννοια αυτή, η στατιστική συναντάται στις περισσότερες αρχαίες κοινωνίες. Αναφέρονται περιπτώσεις απογραφής του πληθυσμού και συλλογής στατιστικών στοιχείων για τη ζωή του, στην αρχαία Αθήνα, στη Σπάρτη, στη Ρώμη, στην Αίγυπτο και στην Κίνα. Τον όρο στατιστική αναφέρουν οι Αριστοτέλης στην «Πολιτεία» και ο Σωκράτης (Ξενοφώντος «Απομνημονεύματα»). Πρώτη ιστορική συλλογή καθαρά στατιστικών στοιχείων, θεωρείται η απογραφή πληθυσμού από τον Αυτοκράτορα της Κίνας Γιάο (Yao) το 2238 π.Χ. Μια μορφή στατιστικής με αριθμητικά δεδομένα από τον Όμηρο, είναι ο κατάλογος πλοίων των Αχαιών στον Τρωικό πόλεμο, από όπου αντλήθηκαν στοιχεία της οικονομικής ευρωστίας και του πληθυσμού των πόλεων– κρατών που συμμετείχαν και πληροφορίες για την τότε ναυπηγική, ναυτιλία και ναυτική τέχνη.



Όμηρος



Ηρόδοτος

Ο πατέρας της Ιστορίας Ηρόδοτος (484–420 πΧ), θεωρείται πρωτοπόρος στη στατιστική[2]. Αναφέρει ότι σε συνέλευση του Ξέρξη με τους στρατηγούς του, ο θείος του **Αρτάβανος**, είπε: «Βασιλιά, αν δεν λεχθούν όλες οι γνώμες δεν μπορεί κανείς να διαλέξει την καλύτερη, αλλά πρέπει να δεχθεί την πρώτη. Διότι βλέποντας το μόνο του, δεν ξεχωρίζουμε το καθαρό χρυσάφι. Αφότου όμως το τρίψουμε στην πέτρα και το συγκρίνουμε με άλλο χρυσάφι, τότε αντιλαμβανόμαστε το ποιόν του». Η μέθοδος αυτή (της παραγοντικής ανάλυσης) εφαρμόζεται σήμερα κυρίως για την ταξινόμηση απόψεων κατά τις συνεδριάσεις του ΟΗΕ. Από τις «Ιστορίες» του Ηρόδοτου, προκύπτει ότι οι Έλληνες ήταν εξοικειωμένοι με τις έννοιες της τύχης, του δυνατού συμβάντος και του αδυνάτου. Χαρακτηριστικά αναφέρει ο Ηρόδοτος ότι ο βασιλιάς της Αιγύπτου **Άμασις** απευθυνόμενος στον τύραννο της Σάμου Πολυκράτη, λέει: «Είναι χαρά να ακούει κανείς ότι ένας φίλος είναι ευτυχής, αλλά οι μεγάλες επιτυχίες

[1] Η πλειονότητα των κατόχων βραβείου Nobel είναι πρωτότοκα παιδιά. Το 65% των μεσαίων παιδιών βάζουν χρήματα στην άκρη. Τα στερνοπούλια επισκέπτονται τα νοσοκομεία λόγω τραυματισμών κατά 50% συχνότερα από τα μεγαλύτερα αδέλφια τους, σύμφωνα με έρευνα στα νοσοκομεία της Ιερουσαλήμ το 2013.

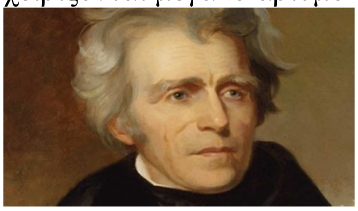
[2] Σύμφωνα με τη μελέτη «Herodotus Statistics–Quantitative commentary» (Τα στατιστικά του Ηρόδοτου– ποσοτικά σχόλια), του Βασιλείου Χομπά, καθηγητή οικονομικού τμήματος Παν/μίου Αθηνών, που δημοσιεύθηκε στο αμερικανικό περιοδικό «Journal of the history of economic thought».

σου δεν μου αρέσουν, διότι ξέρω πολύ καλά πόσο φθονερός είναι ο Θεός. Για αυτό και εύχομαι και για εμένα (και για όσους νοιάζομαι), να έχω επιτυχίες αλλά και αποτυχίες και έτσι να ζήσω με τέτοιες εναλλαγές, παρά να έχω πάντα επιτυχίες, διότι για κανέναν από όσους είχαν μόνο επιτυχίες δεν άκουσα ότι δεν πέθανε δυστυχισμένος και κατεστραμμένος». Η θέση αυτή εκφράζεται στη στατιστική με τις δοκιμές Bernoulli, δηλαδή επιτυχίες και αποτυχίες με κάποια πιθανότητα.

Δεν αναφέρονται απογραφές κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα, εκτός από το Liber consualis (στατιστική περιγραφή των μεταλλείων, ιχθυοτροφείων, αγροτεμαχίων) στην Αγγλία του Γουλιέλμου του Κατακτητή (1086 μ.Χ). Από τα τέλη του 13^{ου} και ιδίως τον 14^{ο} αιώνα οι απογραφές αποκτούν πιο συστηματική μορφή στη Βενετία. Στην Αγγλία τον 17^{ο} αιώνα αναπτύσσετε η στατιστική χάρη στις εργασίες των Edmund Halley και Sir William Petty (26.05.1623–16.12.1687).

Sir William Petty

Η πρώτη γνωστή δημοσκόπηση στη σύγχρονη ιστορία πραγματοποιήθηκε στην Πενσυλβανία των ΗΠΑ το 1824. Πεντακόσιοι πολίτες κλήθηκαν να απαντήσουν αν στις επερχόμενες εκλογές θα ψήφιζαν τον Andrew Jackson[3] ή τον John Quincy Adams[4]. Ο Jackson κέρδισε στη δημοσκόπηση και στις εκλογές. Μετά από περίπου 90 έτη έγινε η πρώτη παναμερικανική δημοσκόπηση που ανέδειξε νικητή τον Thomas Woodrow Wilson[5]. Η στατιστική γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη μετά τον 2^{ο} Παγκόσμιο πόλεμο λόγω της ανάπτυξης των ηλεκτρονικών υπολογιστών που μπορούσαν να χειρίζονται μεγάλο αριθμό δεδομένων, σε σύντομο χρονικό διάστημα.



Andrew Jackson

John Quincy Adams

Thomas Woodrow Wilson

George Horace Gallup

Στην Ευρώπη οι δημοσκοπήσεις ήρθαν στο τέλος του 2^{ου} Παγκοσμίου πολέμου, πρώτα στην Αγγλία από τον George Horace Gallup[6] (18.11.1901–

---

[3] Ο Andrew Jackson (15.03.1767–08.06.1845) ήταν ο 7^{ος} Πρόεδρος (04.03.1829–04.03.1837).

[4] Ο John Quincy Adams (11.07.1767–23.02.1848) ήταν ο 6^{ος} Πρόεδρος (04.03.1825–04.03.1829) και γιος του John Adams, 2^{ου} Προέδρου (04.03.1797– 04.03.1801).

[5] Ο Thomas Woodrow Wilson (28.12.1856–03.02.1924) εκλέχθηκε 28^{ος} Πρόεδρος (04.03.1913–04.03.1921).

[6] Ο Αμερικανός George Horace Gallup ήταν πρωτοπόρος των τεχνικών δειγματοληψίας και επινόησε τη δημοσκόπηση για τη μέτρηση της κοινής γνώμης.

26.07.1984) ο οποίος προέβλεψε την ήττα του έως τότε πρωθυπουργού Sir Winston Leonard Spencer Churchill. Ακολούθως οι δημοσκοπήσεις χρησιμοποιήθηκαν στην κατεχόμενη Γερμανία, από τις συμμαχικές δυνάμεις, για να παρακολουθήσουν τις διαθέσεις της κοινής γνώμης απέναντι στο ναζισμό. Στην Ελλάδα η πρώτη δημοσκόπηση πραγματοποιήθηκε το 1946 από τη «Συμμαχική επιτροπή για την παρακολούθηση των ελληνικών εκλογών»[7]. Το **1956** έγινε η δεύτερη δημοσκόπηση με αντικείμενο έρευνας τον αντιαμερικανισμό. Στις εκλογές του **1977** παρατηρείτε ραγδαία αύξηση του αριθμού των δημοσκοπήσεων που συνοδεύεται από επιφυλάξεις ως προς την αποτελεσματικότητα τους. Η στατιστική χωρίζεται σε τρεις κλάδους:

- Το σχεδιασμό πειραμάτων που ασχολείται με τη διαδικασία συλλογής δεδομένων.
- Την περιγραφική στατιστική (descriptive statistics), που ασχολείται με τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση δεδομένων.
- Τη στατιστική συμπερασματολογία ή επαγωγική στατιστική, που ασχολείται με την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Η στατιστική μελέτη περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε φάσεις:

1η φάση	Σχεδιασμός της μελέτης (experimental design)
2η φάση	Συλλογή των στατιστικών στοιχείων
3η φάση	Παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων (descriptive statistics)
4η φάση	Ανάλυση των στατιστικών στοιχείων με ειδικές μεθόδους
5η φάση	Εξαγωγή συμπερασμάτων (inferential statistics)

Οι πλέον χαρακτηριστικές έννοιες στην επιστήμη της στατιστικής είναι ο πληθυσμός, το δείγμα και η μεταβλητή.

Πληθυσμός στη στατιστική, ονομάζεται το σύνολο των ανθρώπων ή αντικειμένων που εξετάζονται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. (Π.χ. οι οικογένειες μίας πόλης, οι σπουδαστές μίας σχολής, τα πλοία μίας ναυτιλιακής εταιρείας). Κάθε στοιχείο του πληθυσμού ονομάζεται άτομο. Το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού ονομάζεται μέγεθος του πληθυσμού και συμβολίζεται με ν.

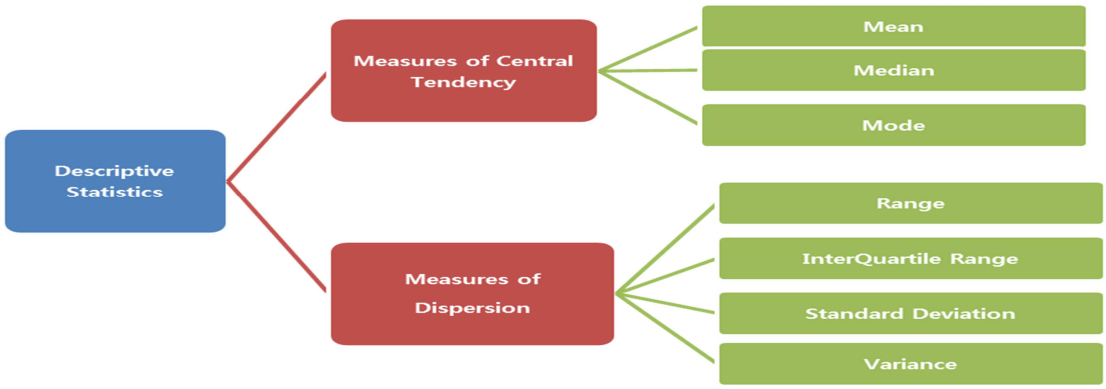
Δείγμα ενός πληθυσμού ονομάζεται μία μικρή ομάδα ανθρώπων ή αντικειμένων που επιλέγονται από τον πληθυσμό. Συνεπώς, το δείγμα είναι υποσύνολο του πληθυσμού. Προκειμένου να εξαχθούν έγκυρα συμπεράσματα, πρέπει το δείγμα να είναι αντιπροσωπευτικό, δηλαδή να έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μέλος του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Η εξέταση ενός δείγματος του πληθυσμού, ονομάζεται **δειγματοληψία**.

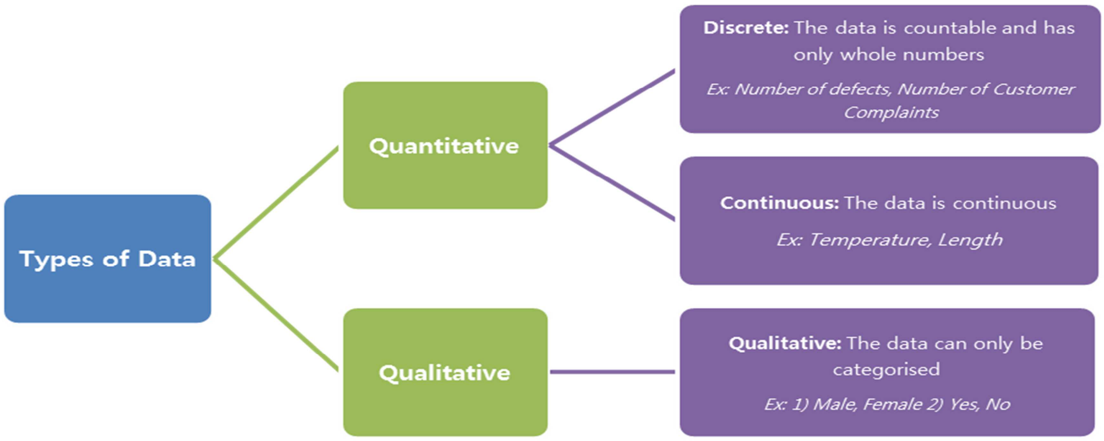
Μεταβλητή στη στατιστική ονομάζεται το χαρακτηριστικό εκείνο ως προς το οποίο εξετάζεται ο πληθυσμός. Συμβολίζεται με X ή Y ή Z, κλπ. Τιμές της μεταβλητής, ονομάζονται οι τιμές εκείνες που μπορεί να λάβει μία μεταβλητή.
Οι μεταβλητές διακρίνονται σε ποιοτικές και ποσοτικές.

Ποιοτικές ονομάζονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί, δηλαδή δεν επιδέχονται μέτρηση (οικογενειακή κατάσταση, τόπος γέννησης, θρησκεία, χρώμα ματιών ή μαλλιών ή αυτοκινήτου, είδος κατοικίας, μάρκα αυτοκινήτου, φύλλο ατόμου, τόπος διακοπών, επάγγελμα, τύπος πλοίων, επίπεδο μόρφωσης). Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά πρέπει να είναι αντικειμενικά. Οι χαρακτηρισμοί «ψηλός», «αδύνατος», «καλός», «ωραίος», δεν αποτελούν ποιοτικά χαρακτηριστικά, διότι είναι εντελώς υποκειμενικά.

[7] Βλέπε «Η ανάπτυξη των πολιτικών δημοσκοπήσεων στην Ελλάδα» του Ηλία Νικολακόπουλου, Καθηγητή τμήματος Πολιτικής Επιστήμης & Δημόσιας Διοίκησης, Πανεπιστημίου Αθηνών.

Ποσοτικές ονομάζονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί. Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. Οι **διακριτές** μεταβλητές λαμβάνουν μόνο μεμονωμένες (διακεκριμένες) τιμές (π.χ. πλήθος παιδιών, νούμερο πλοίων, αριθμός δωματίων, ενδείξεις ζαριού).





Οι **συνεχείς** μεταβλητές λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή εντός ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών ή ένωσης διαστημάτων. (π.χ. ύψος ή βάρος σπουδαστών, μισθός ναυτικών, χρονική διάρκεια τηλεφωνημάτων, ημέρες διακοπών, ώρες εργασίας). Ένα δείγμα σπουδαστών μπορεί να εξετασθεί ως προς τις μεταβλητές: βάρος, ύψος, επίδοση, φύλλο, τόπος καταγωγής, εθνικότητα, επάγγελμα γονέων, αριθμός απουσιών, πλήθος οφειλομένων μαθημάτων. Ένα δείγμα τηλεθεατών μπορεί να εξετασθεί ως προς τις μεταβλητές: φύλλο, ηλικία, μορφωτικό επίπεδο, ποιές ή και πόσες ώρες της ημέρας παρακολουθούν, τηλεοπτικός δίαυλος (κανάλι) ή δίαυλοι που προτιμούν, είδος εκπομπών που επιλέγουν (αθλητικές, σήριαλ, ενημερωτικές, ψυχαγωγικές). Ένα δείγμα προϊόντων μπορεί να εξετασθεί ως προς τις μεταβλητές: τιμή, ποιότητα, εμφάνιση συσκευασίας (χάρτινη, πλαστική, δερμάτινη), βάρος συσκευασίας (κιλό, πεντάκιλο, δεκάκιλο).

Περιγραφική στατιστική

Τα στατιστικά δεδομένα χωρίζονται σε ποιοτικά (qualitative) και ποσοτικά (quantitative). **Στατιστικός πίνακας** ονομάζεται ο πίνακας στον οποίο τοποθετούνται οι τιμές της μεταβλητής X, έτσι ώστε να είναι εύκολα κατανοητές και να διευκολύνεται η εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων. Οι στατιστικοί πίνακες διακρίνονται σε γενικούς και ειδικούς.

Γενικοί ονομάζονται οι στατιστικοί πίνακες που περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από τη στατιστική έρευνα. Αποτελούν πηγή στατιστικών πληροφοριών.

Ειδικοί ονομάζονται οι στατιστικοί πίνακες που είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία που περιέχουν λαμβάνονται από τους γενικούς πίνακες. Κάθε στατιστικός πίνακας πρέπει να περιέχει:

• Τίτλο, που είναι γραμμένος στο πάνω μέρος του και δηλώνει συνοπτικά και με σαφήνεια το περιεχόμενο του.

• Επικεφαλίδες γραμμών και στηλών, που δηλώνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

• Κύριο σώμα, που περιέχει τα στατιστικά δεδομένα διαχωρισμένα σε γραμμές και στήλες.

• Πηγή, που είναι γραμμένη στο κάτω μέρος του. Δείχνει την προέλευση των στατιστικών δεδομένων.

Ερωτήσεις σωστού –λάθους

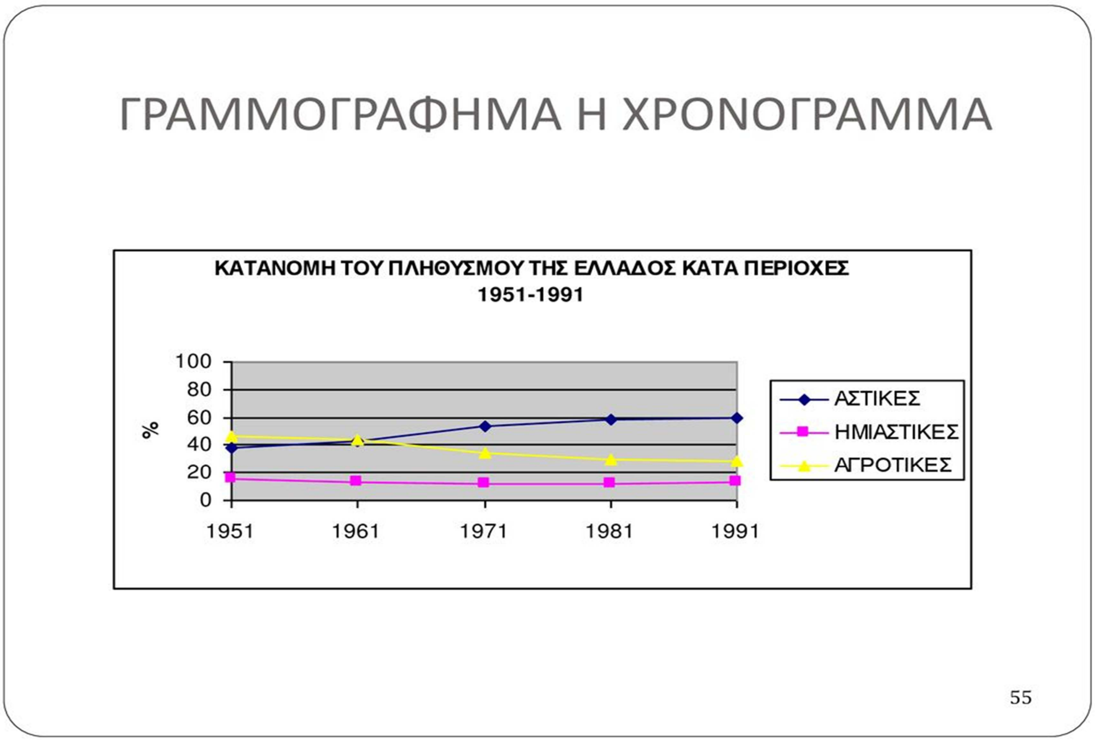
1. Ένα μικρό δείγμα είναι πάντα πιο αξιόπιστο από ένα μεγάλο δείγμα.
2. Ένα μεγάλο δείγμα είναι πάντα πιο αξιόπιστο από ένα μικρό δείγμα.
3. Το ύψος των ναυτικών ενός πλοίου είναι ποιοτική μεταβλητή.
4. Οι διακριτές μεταβλητές λαμβάνουν μόνο μεμονωμένες τιμές.
5. Το βάρος των υπαλλήλων μίας εταιρείας είναι ποσοτική συνεχής μεταβλητή.

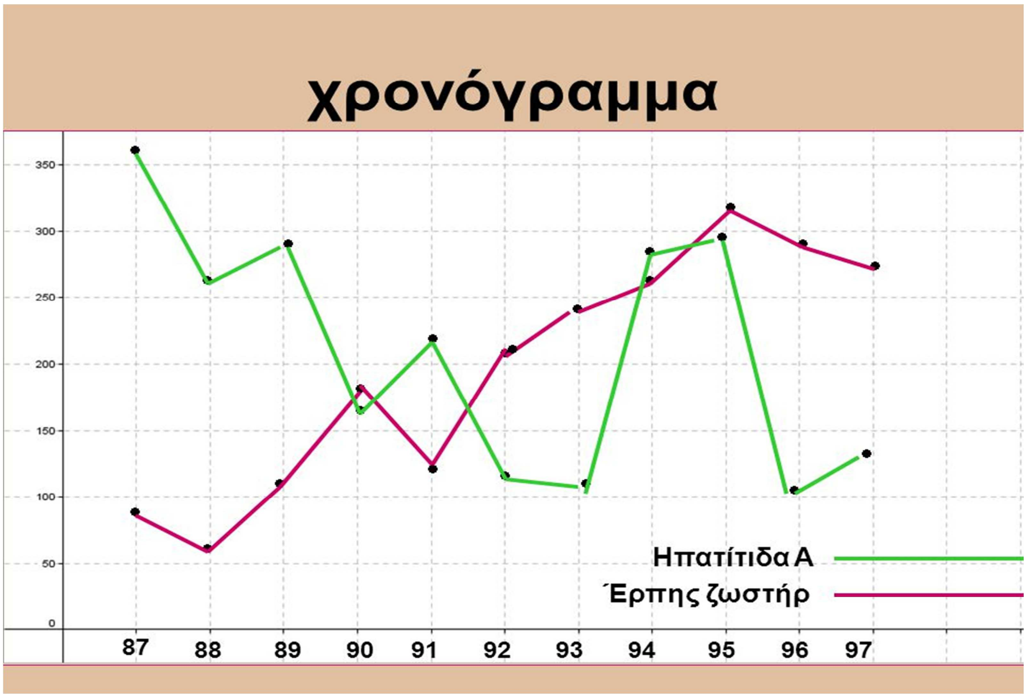
Ερωτήσεις

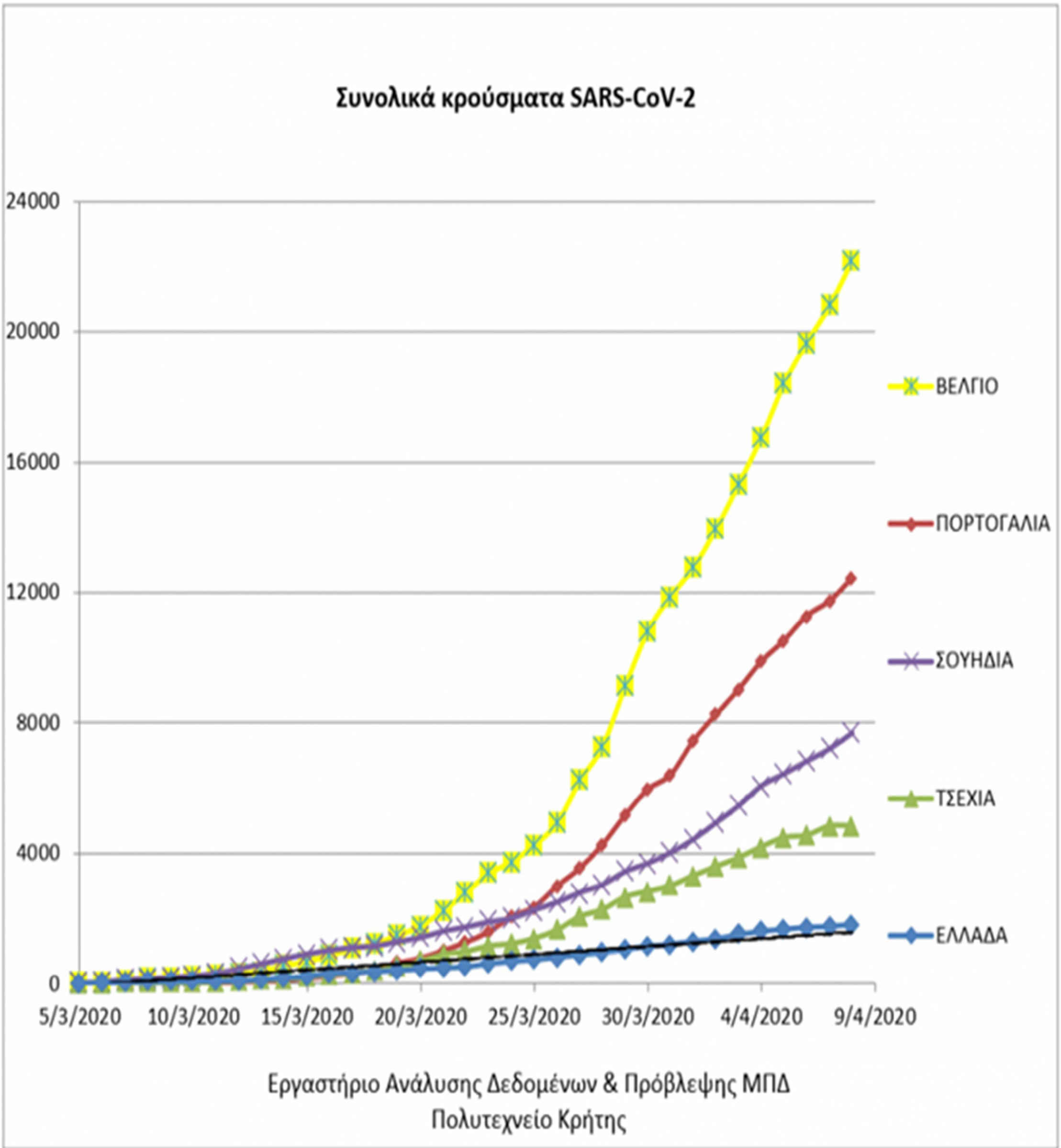
1. Με ποιόν τρόπο θα επέλεγες ένα δείγμα από τους 200 σπουδαστές του Β΄ εξαμήνου, προκειμένου να εξάγεις συμπέρασμα για την επίδοση τους στα μαθηματικά ΙΙ;

Γραμμογράφημα ή χρονόγραμμα

Χρησιμοποιείται για να παραστήσουμε γραφικά ένα φαινόμενο που εξελίσσεται με το πέρασμα του χρόνου (πυρετός ασθενούς, τιμή μετοχής, γεννήσεις, θάνατοι, κέρδη ή ζημίες επιχειρήσεως). Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούνται οι χρονικές στιγμές (ώρες, ημέρες, εβδομάδες, μήνες, έτη) και στον κάθετο άξονα οι τιμές της μεταβλητής που επιθυμούμε να μελετήσουμε.






Συνολικά κρούσματα SARS-CoV-2
24000
20000
16000
12000
8000
4000
0
5/3/2020
10/3/2020
15/3/2020
20/3/2020
25/3/2020
30/3/2020
4/4/2020
9/4/2020
ΒΕΛΓΙΟ
ΠΟΡΤΟΓΑΛΙΑ
ΣΟΥΗΔΙΑ
ΤΣΕΧΙΑ
ΕΛΛΑΔΑ
Εργαστήριο Ανάλυσης Δεδομένων & Πρόβλεψης ΜΠΔ
Πολυτεχνείο Κρήτης

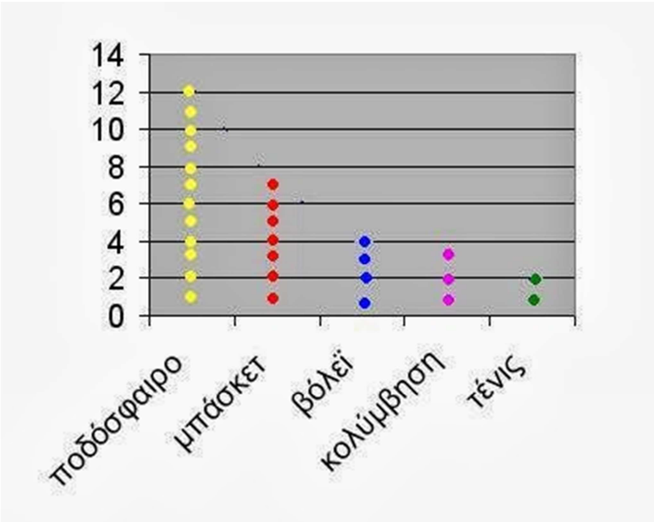

Εκατ. ευρώ
40
35
30
25
20
15
10
5
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
Έξοδα
Έσοδα

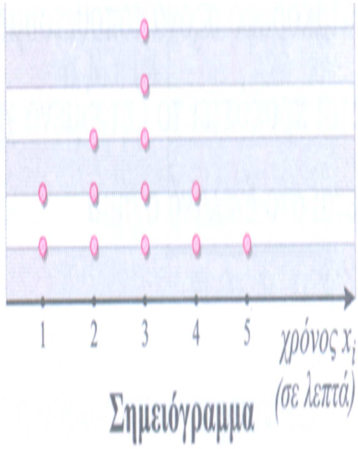
Αριθμός Κρουσμάτων
26 Φεβρουαρίου - 5 Απριλίου
20000
15000
10000
5000
0
26/02
29/02
03/03
06/03
09/03
12/03
15/03
18/03
21/03
26/03
29/03
30/03
3/04
5/04
19.691
Βέλγιο
Πληθυσμός: 11,04 εκατ.
17.851
Ολλανδία
Πληθυσμός: 17,18 εκατ.
11.278
Πορτογαλία
Πληθυσμός: 10,3 εκατ.
1.735
Ελλάδα
Πληθυσμός: 10,8 εκατ.

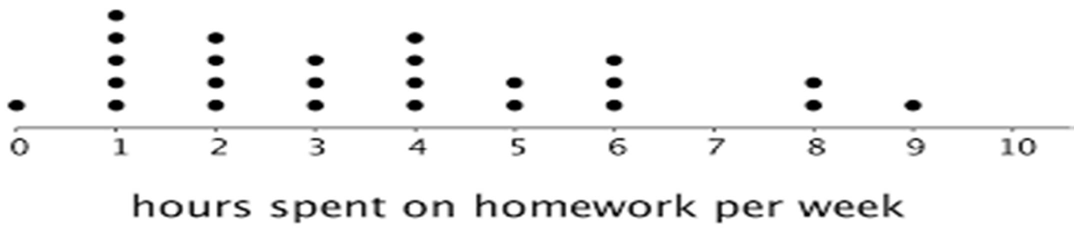
(γ)
Σύγκριση συνολικών κρουσμάτων
Αριθμός κρουσμάτων
6,000
5,000
4,000
3,000
2,000
1,000
0
Ισπανία
Ιταλία
Ελβετία
Γαλλία
Γερμανία
Ελλάδα
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
Ημέρες από τα πρώτα κρούσματα

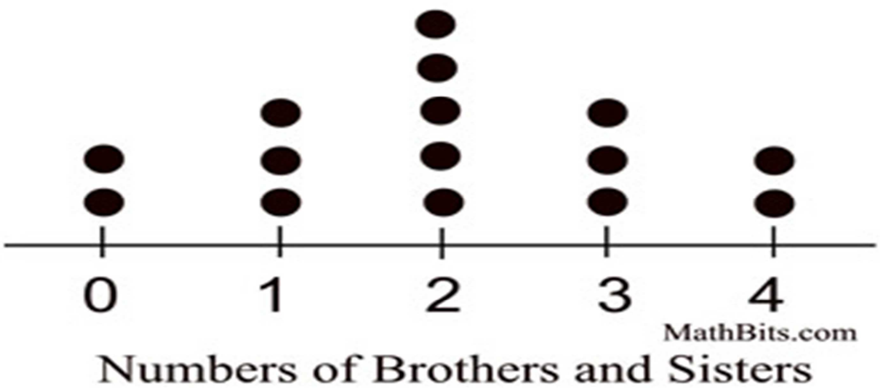
Σημειόγραμμα (Dot diagram)

Χρησιμοποιείται όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό (λίγες παρατηρήσεις). Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε τις τιμές της μεταβλητής και πάνω από κάθε τιμή βάζουμε κατακόρυφα τόσες τελείες όση και η αντίστοιχη συχνότητα.







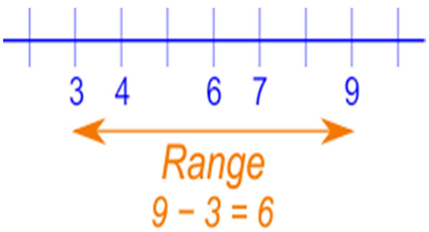


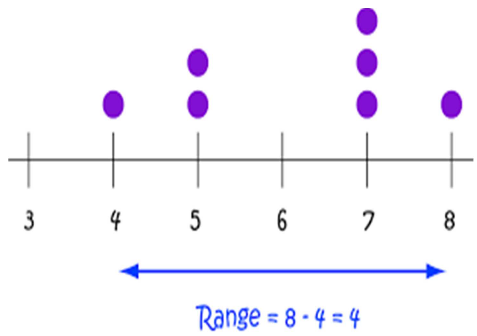
Εύρος ή κύμανση

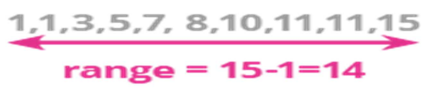
Εύρος ή κύμανση (Range) R ονομάζεται η διαφορά της ελάχιστης από τη μέγιστη παρατήρηση. Δηλαδή $R = \beta - \alpha$, όπου α η μικρότερη και β η μεγαλύτερη παρατήρηση. Για ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του κατωτέρου ορίου της πρώτης κλάσης, από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης.

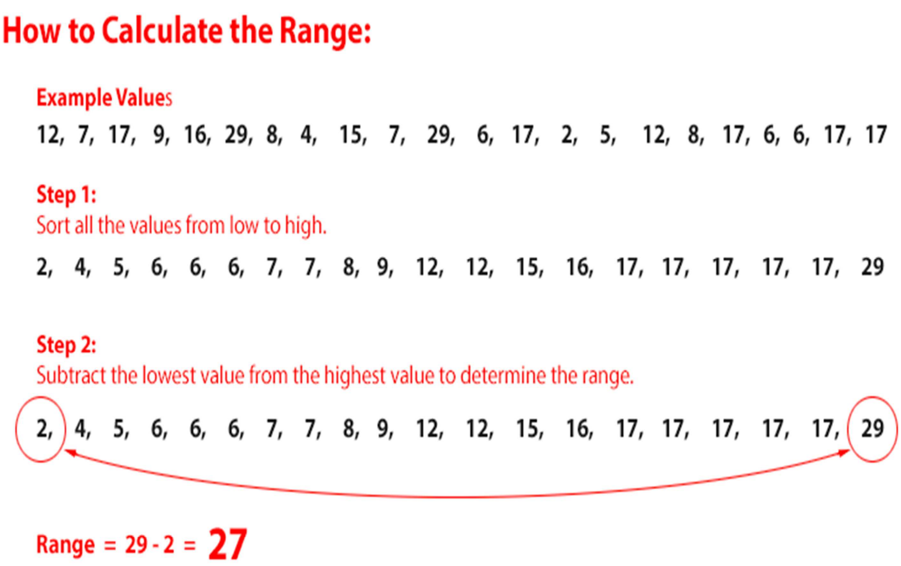
Δεν είναι ικανοποιητικό μέτρο διασποράς, διότι εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές των παρατηρήσεων. Έτσι, αν οι δύο ακραίες τιμές είναι αρκετά απομακρυσμένες από τις άλλες, δίνουν ψεύτικη εικόνα.

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας.	Δε θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.
Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό.	Δε χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης.	Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.









Εφαρμογή 1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα που αφορά την εξέταση δείγματος 20 πωλητών αυτοκινήτων ως προς τις πωλήσεις που σημείωσαν σε διάστημα μίας εβδομάδας.

Πλήθος πωληθέντων αυτοκινήτων	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i	Σχετική επί τοις % συχνότητα $f_i\%$	Επί τοις % αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$
$x_1=0$	$\nu_1=10$	$N_1=$	$f_1=$	$F_1=$	$f_1\%=$	$F_1\%=$
$x_2=1$	$\nu_2=5$	$N_2=$	$f_2=$	$F_2=$	$f_2\%=$	$F_2\%=$
$x_3=2$	$\nu_3=2$	$N_3=$	$f_3=$	$F_3=$	$f_3\%=$	$F_3\%=$
$x_4=3$	$\nu_4=2$	$N_4=$	$f_4=$	$F_4=$	$f_4\%=$	$F_4\%$
$x_5=4$	$\nu_5=1$	$N_5=$	$f_5=$	$F_5=$	$f_5\%=$	$F_5\%=$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{5}\nu_i=20$		$\sum_{i=1}^{5}f_i=1$		$\sum_{i=1}^{5}f_i\%=100\%$	

Λύση

Πλήθος πωληθέντων αυτοκινήτων.	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i	Επί τοις % σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική επί τοις % σχετική συχνότητα $F_i\%$
$x_1=0$	$\nu_1=10$	$N_1=10$	$f_1=0,5$	$F_1=0,50$	$f_1\%=50\%$	$F_1\%=50\%$
$x_2=1$	$\nu_2=5$	$N_2=15$	$f_2=0,25$	$F_2=0,75$	$f_2\%=25\%$	$F_2\%=75\%$
$x_3=2$	$\nu_3=2$	$N_3=17$	$f_3=0,10$	$F_3=0,85$	$f_3\%=10\%$	$F_3\%=85\%$
$x_4=3$	$\nu_4=2$	$N_4=19$	$f_4=0,10$	$F_4=0,95$	$f_4\%=10\%$	$F_4\%=95\%$
$x_5=4$	$\nu_5=1$	$N_5=20$	$f_5=0,05$	$F_5=1$	$f_5\%=5\%$	$F_5\%=100\%$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{5}\nu_i=20$		$\sum_{i=1}^{5}f_i=1$		$\sum_{i=1}^{5}f_i\%=100\%$	

$N_1 = \nu_1 = 10$

$N_2 = \nu_1 + \nu_2 = N_1 + \nu_2 = 10 + 5 = 15$

$N_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = N_2 + \nu_3 = 15 + 2 = 17$

$N_4 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = N_3 + \nu_4 = 17 + 2 = 19$

$N_5 = N_4 + \nu_5 = 19 + 1 = 20 = \nu$

$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{10}{20} = 0,5$

$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$

$f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} = \frac{1}{20} = \frac{0,5}{10} = 0,05$

$F_1 = f_1 = 0,50$

$F_2 = f_1 + f_2 = F_1 + f_2 = 0,50 + 0,25 = 0,75$

$F_3 = \sum_{i=1}^{3} f_i = F_2 + f_3 = 0,75 + 0,10 = 0,85$

$F_4 = \sum_{i=1}^{4} f_i = F_3 + f_4 = 0,85 + 0,10 = 0,95$

$F_5 = \sum_{i=1}^{5} f_i = F_4 + f_5 = 0,95 + 0,05 = 1$

$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu}100 = \frac{10}{20}100 = 50$

$f_2\% = \frac{\nu_2}{\nu}100 = \frac{5}{20}100 = \frac{1}{4}100 = 25$

$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu}100 = \frac{2}{20}100 = \frac{1}{10}100 = 10$

$f_4\% = \frac{\nu_4}{\nu}100 = \frac{2}{20}100 = \frac{1}{10}100 = 10$

$f_5\% = \frac{\nu_5}{\nu}100 = \frac{1}{20}100 = \frac{0,5}{10}100 = 5$

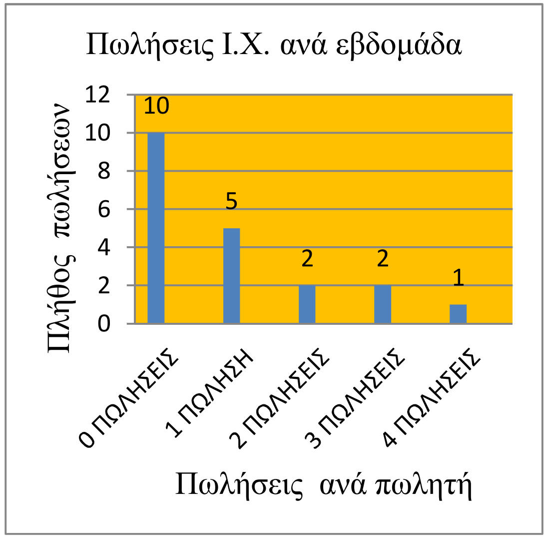
$F_1\% = f_1\% = 50\%$

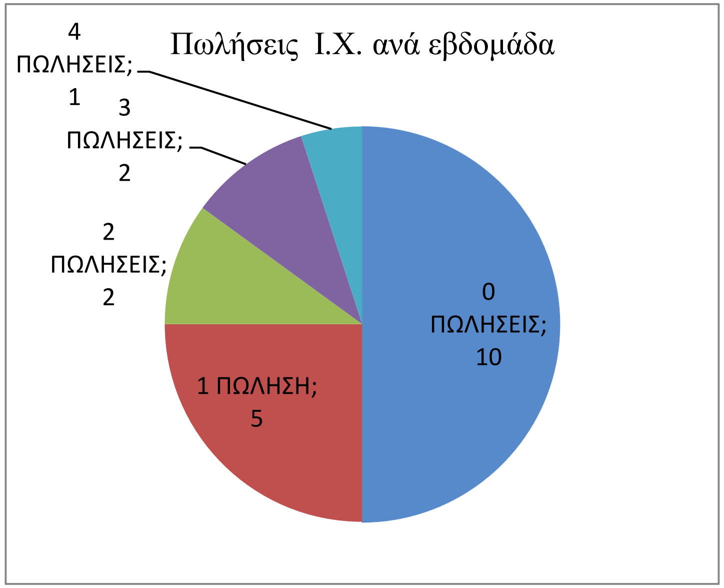
$F_2\% = f_1\% + f_2\% = F_1\% + f_2\% = 50\% + 25\% = 75\%$

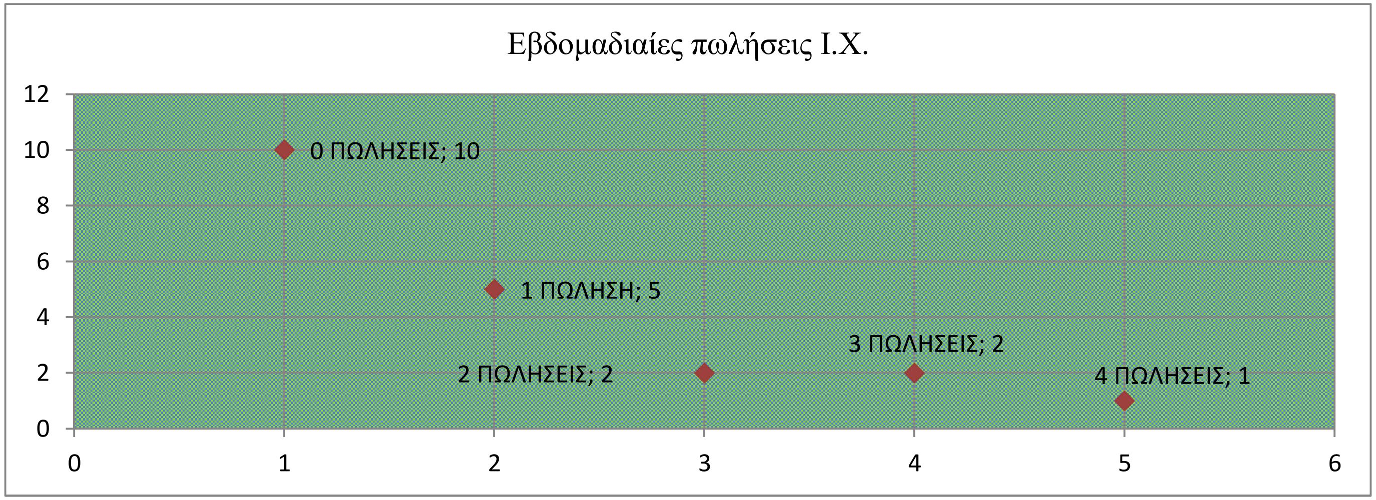
$F_3\% = \sum_{i=1}^{3} f_i\% = F_2\% + f_3\% = 75\% + 10\% = 85\%$

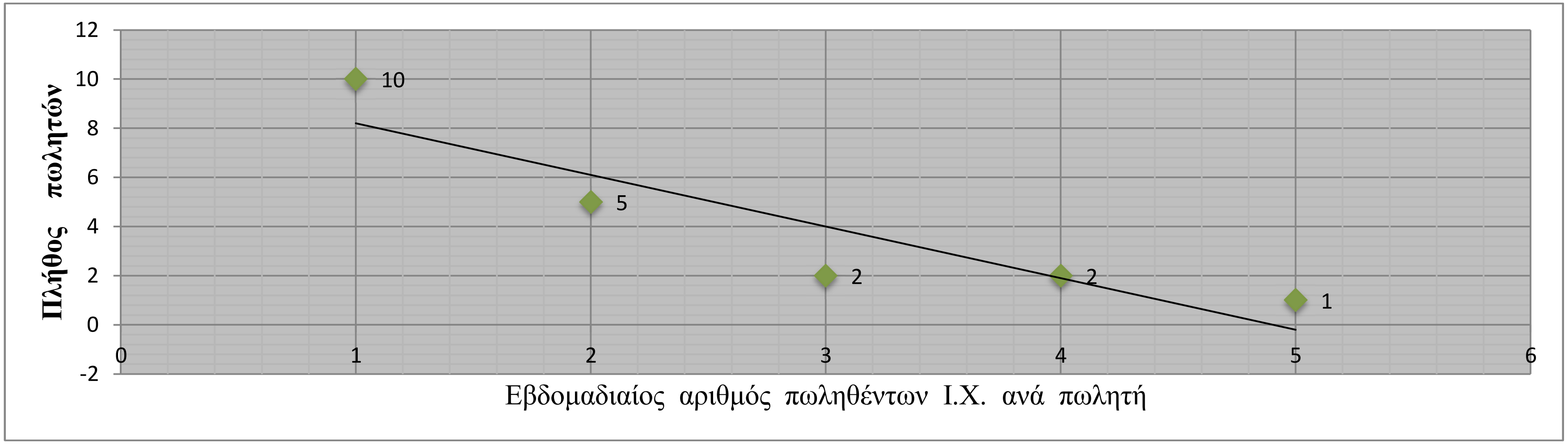
$F_4\% = \sum_{i=1}^{4} f_i\% = F_3\% + f_4\% = 85\% + 10\% = 95\%$

$F_5\% = \sum_{i=1}^{5} f_i\% = F_4\% + f_5\% = 95\% + 5\% = 100\%$

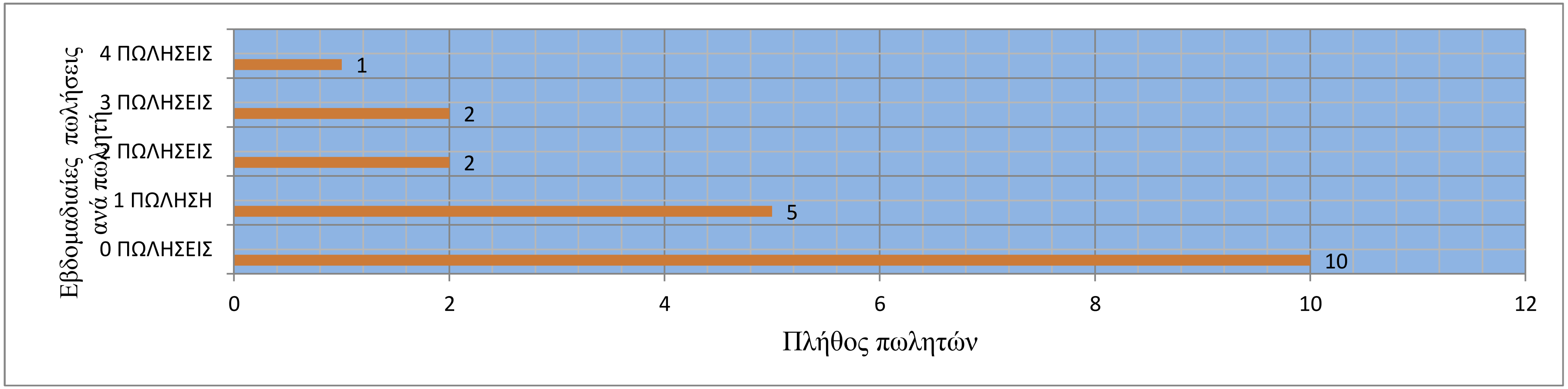

Πωλήσεις Ι.Χ. ανά εβδομάδα
Πλήθος πωλήσεων
12
10
8
6
4
2
0
10
5
2
2
1
0 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
1 ΠΩΛΗΣΗ
2 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
3 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
4 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
Πωλήσεις ανά πωλητή


Πωλήσεις Ι.Χ. ανά εβδομάδα
4 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 1
3 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 2
2 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 2
1 ΠΩΛΗΣΗ; 5
0 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 10


Εβδομαδιαίες πωλήσεις Ι.Χ.
0 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 10
1 ΠΩΛΗΣΗ; 5
2 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 2
3 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 2
4 ΠΩΛΗΣΕΙΣ; 1
12
10
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6



Πλήθος πωλητών
Εβδομαδιαίος αριθμός πωληθέντων Ι.Χ. ανά πωλητή
10
5
2
2
1



Εβδομαδιαίες πωλήσεις ανά πωλητή
4 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
3 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
2 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
1 ΠΩΛΗΣΗ
0 ΠΩΛΗΣΕΙΣ
Πλήθος πωλητών
1
2
2
5
10

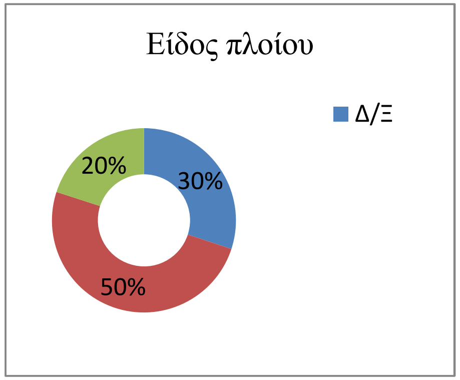
Εφαρμογή 2. ν το πλήθος σπουδαστές ρωτήθηκαν για το είδος πλοίου που επιθυμούν να ναυτολογηθούν και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

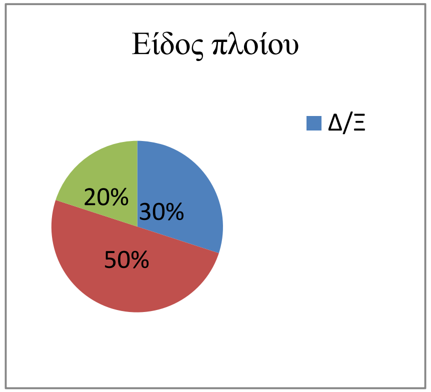
x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i
$x_1 =$ Tanker	$\nu_1 =$	$N_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$f_1 =$	$F_1 =$
$x_2 =$ LNG-LPG	$\nu_2 = 75$	$N_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% = 80\%$	$f_2 =$	$F_2 =$
$x_3 =$ Φορτηγό	$\nu_3 = 30$	$N_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$f_3 =$	$F_3 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{3} \nu_i =$		$\sum_{i=1}^{3} f_i\% = 100\%$		$\sum_{i=1}^{3} f_i = 1$	

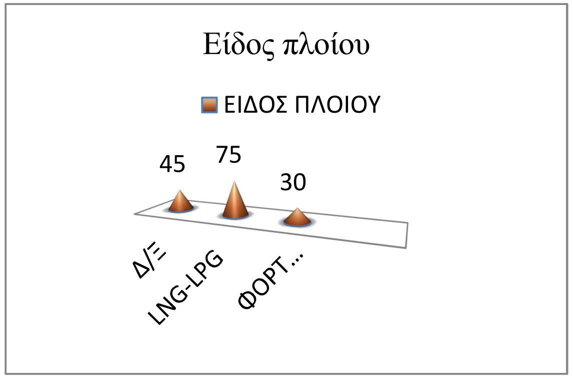
Λύση

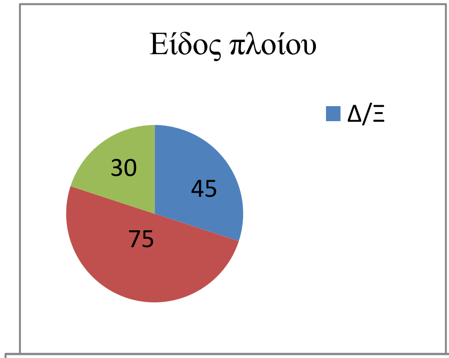
Είναι $\frac{\nu_1+75}{\nu} = \frac{80}{100} \Leftrightarrow \frac{\nu_1+75}{\nu} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \frac{\nu_1+75}{\nu} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{\nu_1+75}{\nu_1+105} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(\nu_1+75) = 4(\nu_1+105) \Leftrightarrow 5\nu_1+375 = 4\nu_1+420 \Leftrightarrow \nu_1 = 45$

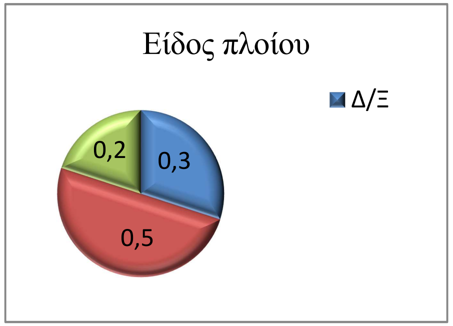
x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i
$x_1 =$ Tanker	$\nu_1 = 45$	$N_1 = 45$	$f_1\% = 30\%$	$F_1\% = 30\%$	$f_1 = 0,3$	$F_1 = 0,3$
$x_2 =$ LNG-LPG	$\nu_2 = 75$	$N_2 = 120$	$f_2\% = 50\%$	$F_2\% = 80\%$	$f_2 = 0,5$	$F_2 = 0,8$
$x_3 =$ Φορτηγό	$\nu_3 = 30$	$N_3 = 150$	$f_3\% = 20\%$	$F_3\% = 100\%$	$f_3 = 0,2$	$F_3 = 1$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{3} \nu_i = 150$		$\sum_{i=1}^{3} f_i\% = 100\%$		$\sum_{i=1}^{3} f_i = 1$	

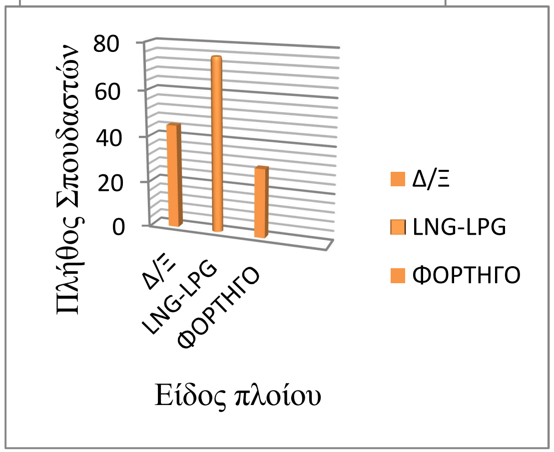

Είδος πλοίου
Δ/Ξ
20%
30%
50%

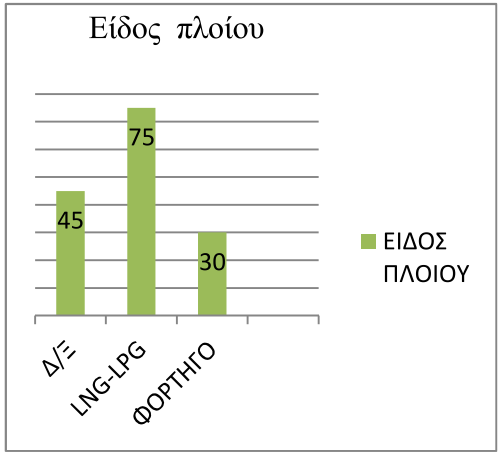

Είδος πλοίου
Δ/Ξ
20%
30%
50%

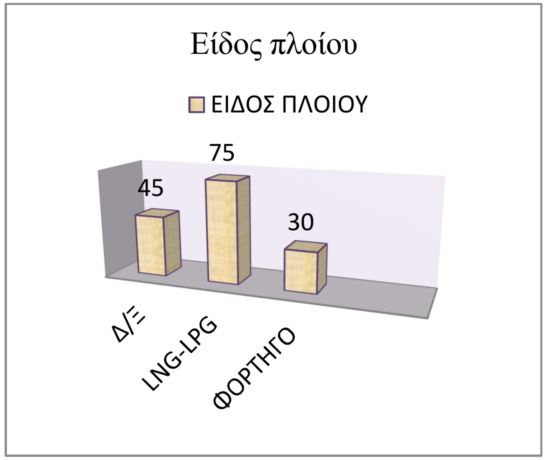

Είδος πλοίου
ΕΙΔΟΣ ΠΛΟΙΟΥ
45
75
30
Δ/Ξ
LNG-LPG
ΦΟΡΤ…


Είδος πλοίου
Δ/Ξ
30
45
75


Είδος πλοίου
Δ/Ξ
0,2
0,3
0,5


Πλήθος Σπουδαστών
80
60
40
20
0
Δ/Ξ
LNG-LPG
ΦΟΡΤΗΓΟ
Δ/Ξ
LNG-LPG
ΦΟΡΤΗΓΟ
Είδος πλοίου


Είδος πλοίου
75
45
30
ΕΙΔΟΣ ΠΛΟΙΟΥ
Δ/Ξ
LNG-LPG
ΦΟΡΤΗΓΟ


Είδος πλοίου
ΕΙΔΟΣ ΠΛΟΙΟΥ
75
45
30
Δ/Ξ
LNG-LPG
ΦΟΡΤΗΓΟ

Εφαρμογή 3. Να συμπληρωθεί ο πίνακας προκύπτει όταν 20 σπουδαστές ερωτώνται για το πλήθος των ωρών που μελετούν ημερησίως.

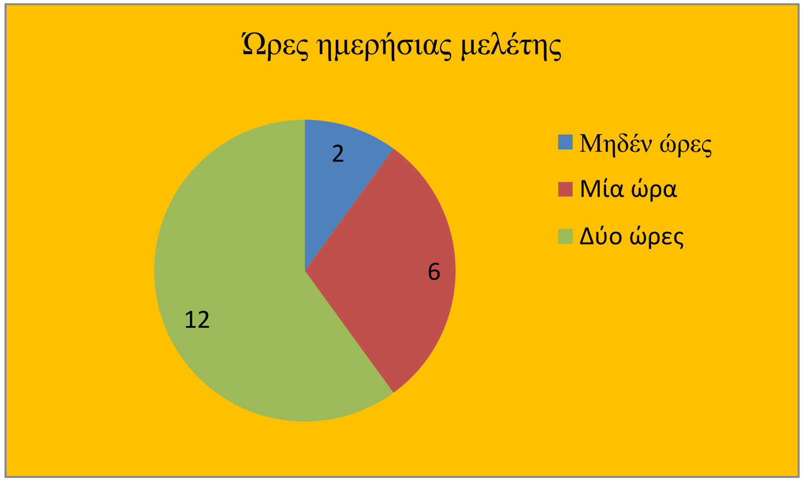
x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$\widehat{a}_i$
$x_1=0$	$\nu_1=2$	$N_1=$	$f_1=$	$F_1=$	$f_1\%=$	$F_1\%=$	$\widehat{a}_1=$
$x_2=1$	$\nu_2=$	$N_2=$	$f_2=0,3$	$F_2=$	$f_2\%=$	$F_2\%=$	$\widehat{a}_2=$
$x_3=2$	$\nu_3=$	$N_3=$	$f_3=$	$F_3=$	$f_3\%=$	$F_3\%=$	$\widehat{a}_3=$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{3}\nu_i=20$		$\sum_{i=1}^{3}f_i=$		$\sum_{i=1}^{3}f_i\%=$		$\sum_{i=1}^{3}\widehat{a}_i=$

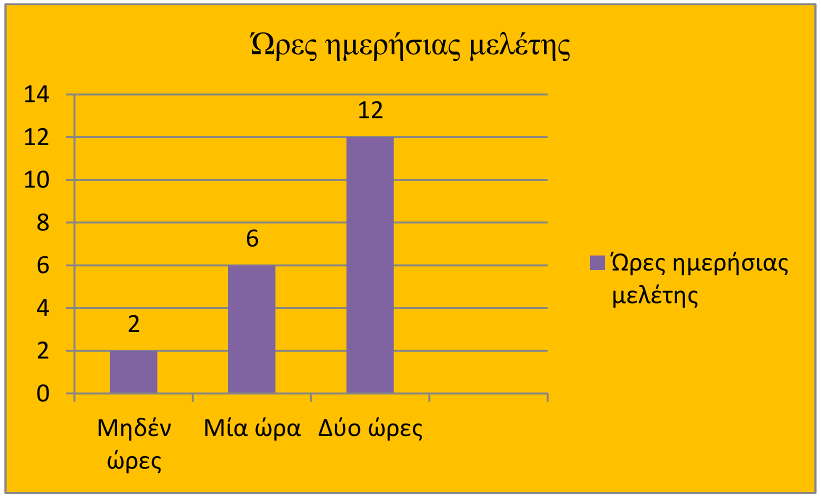
Λύση

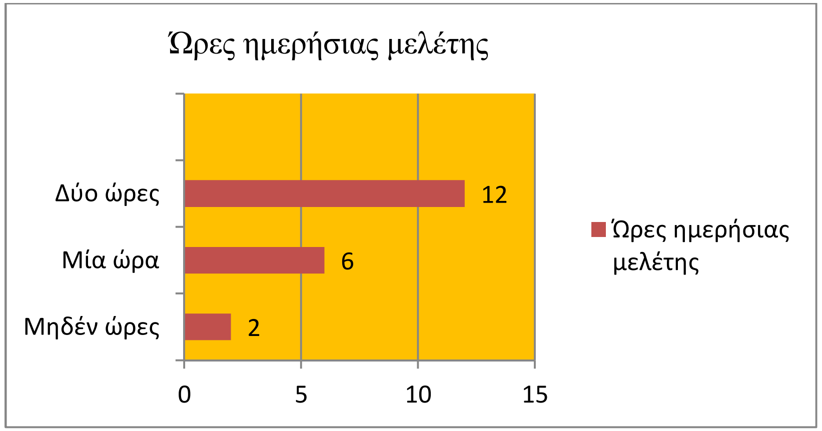
$$f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0,1 \qquad f_3=1-f_1-f_2=1-0,1-0,3=0,6 \qquad \widehat{a}_1=\frac{\nu_1}{\nu}360^0=\frac{2}{20}360^0=\frac{1}{10}360^0=36^0$$

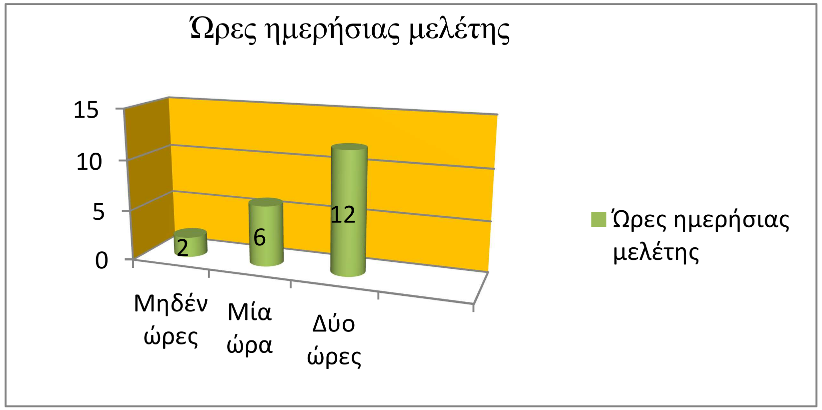
$$\widehat{a}_2=\frac{\nu_2}{\nu}360^0=\frac{6}{20}360^0=\frac{3}{10}360^0=3\cdot 36^0=108^0 \qquad \widehat{a}_3=\frac{\nu_3}{\nu}360^0=\frac{12}{20}360^0=\frac{6}{10}360^0=6\cdot 36^0=216^0$$

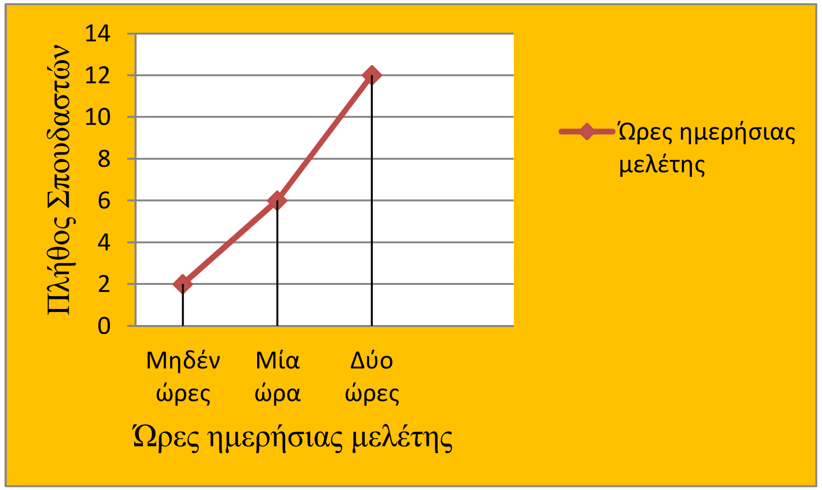
x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$\widehat{a}_i$
$x_1=0$	$\nu_1=2$	$N_1=2$	$f_1=0,1$	$F_1=0,1$	$f_1\%=10\%$	$F_1\%=10\%$	$\widehat{a}_1=36^0$
$x_2=1$	$\nu_2=6$	$N_2=8$	$f_2=0,3$	$F_2=0,4$	$f_2\%=30\%$	$F_2\%=40\%$	$\widehat{a}_2=108^0$
$x_3=2$	$\nu_3=12$	$N_3=20$	$f_3=0,6$	$F_3=1$	$f_3\%=60\%$	$F_3\%=100\%$	$\widehat{a}_3=216^0$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{3}\nu_i=20$		$\sum_{i=1}^{3}f_i=1$		$\sum_{i=1}^{3}f_i\%=100\%$		$\sum_{i=1}^{3}\widehat{a}_i=360^0$


Ώρες ημερήσιας μελέτης
Μηδέν ώρες
Μία ώρα
Δύο ώρες
2
6
12


Ώρες ημερήσιας μελέτης
14
12
10
8
6
4
2
0
Μηδέν ώρες
Μία ώρα
Δύο ώρες
Ώρες ημερήσιας μελέτης


Ώρες ημερήσιας μελέτης
Δύο ώρες
Μία ώρα
Μηδέν ώρες
12
6
2
0
5
10
15
Ώρες ημερήσιας μελέτης


Ώρες ημερήσιας μελέτης
15
10
5
0
Μηδέν ώρες
Μία ώρα
Δύο ώρες
2
6
12
Ώρες ημερήσιας μελέτης

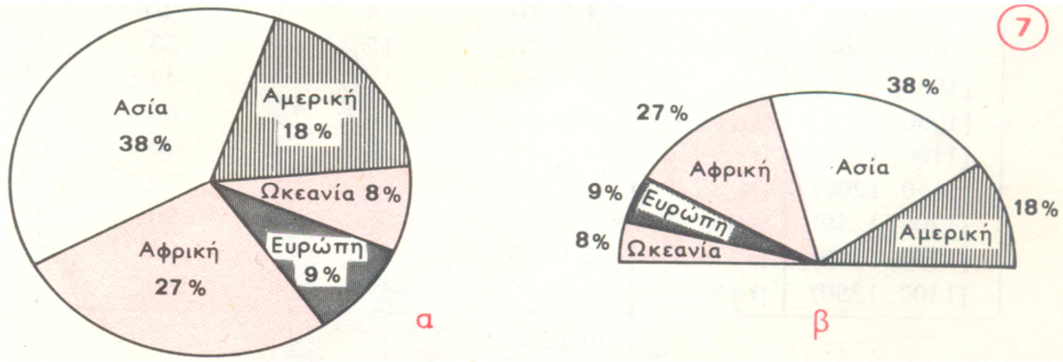

Πλήθος Σπουδαστών
14
12
10
8
6
4
2
0
Μηδέν ώρες
Μία ώρα
Δύο ώρες
Ώρες ημερήσιας μελέτης
Ώρες ημερήσιας μελέτης

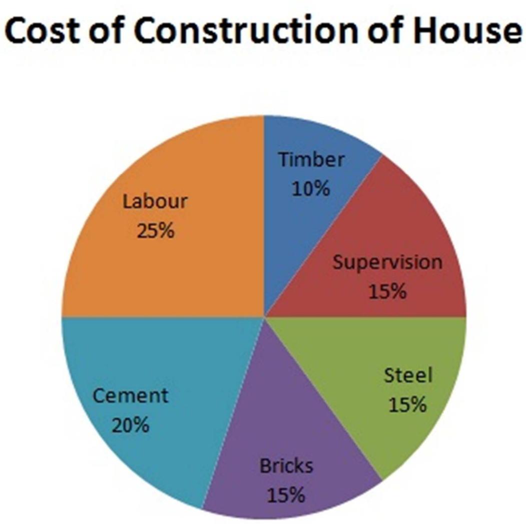

Ώρες ημερήσιας μελέτης
Πλήθος Σπουδαστών
14
12
10
8
6
4
2
0
Μηδέν ώρες
Μία ώρα
Δύο ώρες
Ώρες ημερήσιας μελέτης
2
6
12

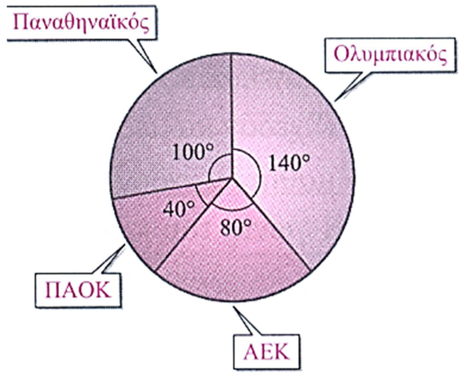

Ώρες ημερήσιας μελέτης
2
6
12
Μηδέν ώρες
Μία ώρα
Δύο ώρες

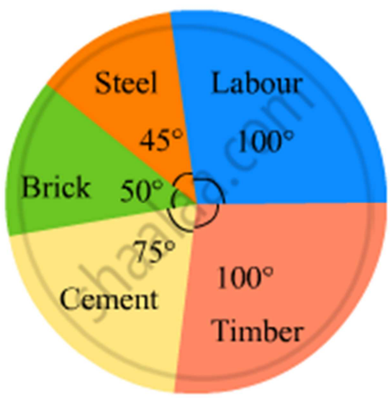
Κυκλικό διάγραμμα (piechart)

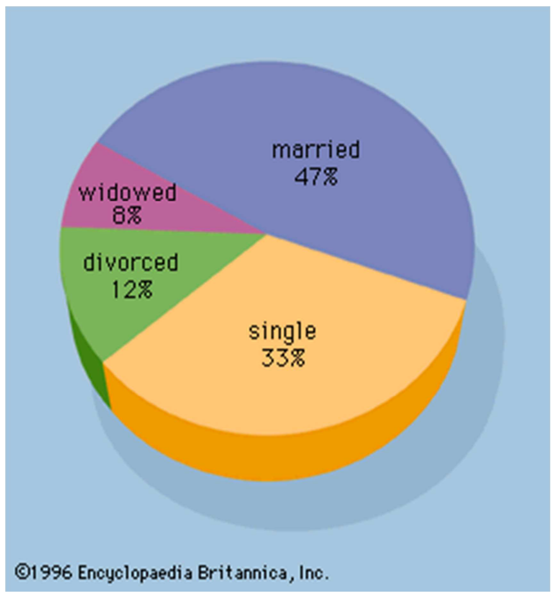
Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση ποσοτικών και κυρίως ποιοτικών δεδομένων. Αποτελείται από έναν κυκλικό δίσκο χωρισμένο σε κυκλικούς τομείς, των οποίων τα εμβαδά ή ισοδύναμα τα τόξα είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν a_i είναι το τόξο που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, ισχύει ότι $a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360^0 = f_i \cdot 360^0$, αν πρόκειται για κύκλο και $a_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 180^0 = f_i \cdot 180^0$ αν πρόκειται για ημικύκλιο.

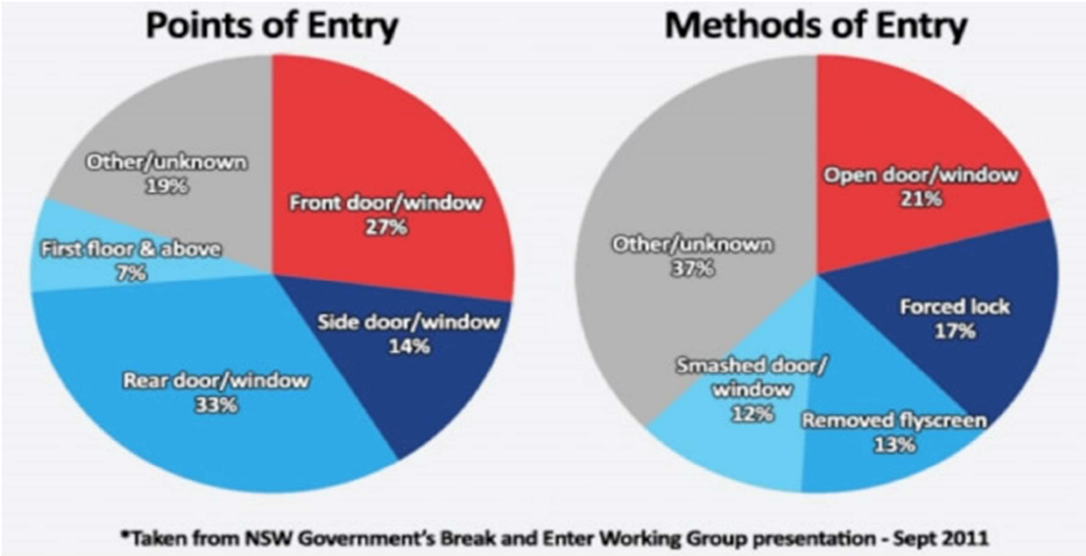


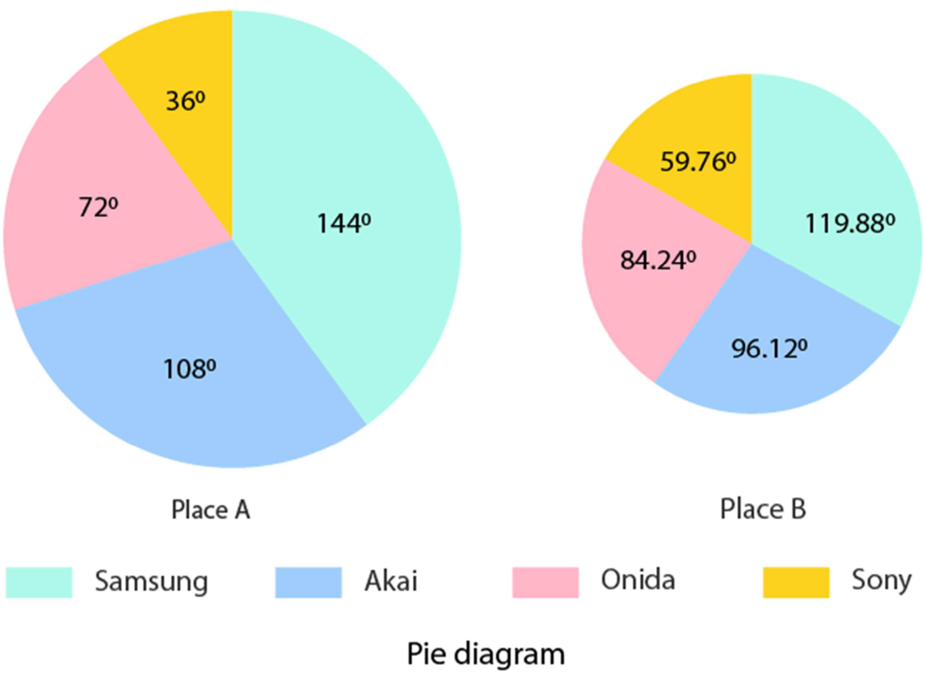












Μέτρα θέσης & μέτρα διασποράς (ή μεταβλητότητας)

Για την περαιτέρω επεξεργασία των δεδομένων χρειάζονται ορισμένα χαρακτηριστικά μέτρα που καλούνται παράμετροι της κατανομής του πληθυσμού. Οι παράμετροι είναι αριθμητικές εκφράσεις που καθορίζουν τη θέση, τη διασπορά και τη μορφή της κατανομής. Τα μέτρα θέσης (**location measures**) μας πληροφορούν για την θέση γύρω από την οποία είναι συγκεντρωμένες οι περισσότερες παρατηρήσεις ενώ τα μέτρα διασποράς (**measures of variability**) ή μεταβλητότητας (**dispersion measures**) μας πληροφορούν σχετικά με το πόσο συγκεντρωμένες ή διασκορπισμένες είναι οι παρατηρήσεις γύρω από τα μέτρα θέσης. Ανάλογα αν αναφερόμαστε σε όλο τον πληθυσμό ή σε ένα δείγμα του, ισχύουν τα παρακάτω σύμβολα:

	Πληθυσμός (N)	Δείγμα (n)
Μέση τιμή	μ	$\bar{x}$
Διασπορά	σ^2	s^2

Μέση τιμή ή μέσος όρος ή αριθμητικός μέσος (average, arithmetic mean)

Μέση τιμή $\bar{x}$ ονομάζετε το άθροισμα των παρατηρήσεων, δια του πλήθους τους.

• Όταν σε δείγμα μεγέθους ν οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής Χ είναι $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_\nu$, τότε η μέση τιμή δίνεται από την σχέση: $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_\nu}{\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}$.

Ο ανωτέρω τύπος χρησιμοποιείται όταν οι παρατηρήσεις είναι λίγες και διαφορετικές μεταξύ τους. Στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ το ν είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

• Όταν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής Χ και $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_\kappa$ είναι οι αντίστοιχες συχνότητες, τότε η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 \cdot x_1 + \nu_2 \cdot x_2 + \nu_3 \cdot x_3 + \ldots + \nu_\kappa \cdot x_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i \cdot x_i}{\nu}.$$

Στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i \cdot x_i$ το κ δίνει το πλήθος των δυνατών τιμών της μεταβλητής και όχι το μέγεθος του δείγματος.

• Όταν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής Χ και $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\kappa$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες, τότε:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \ldots + x_\kappa \cdot f_\kappa = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot f_i .$$

Όταν γνωρίζουμε τις σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό $(f_i\%)$, χρησιμοποιούμε τον τύπο: $\bar{x} = \dfrac{x_1 \cdot f_1\% + x_2 \cdot f_2\% + x_3 \cdot f_3\% + \ldots + x_\kappa \cdot f_\kappa\%}{100} = \dfrac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot f_i\%$.

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της.	Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές.
Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων.	Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε κάποια δυνατή τιμή της μεταβλητής.
Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος.	Όταν η μεταβλητή Χ είναι διακριτή τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος.
Είναι εύκολα κατανοητή.	Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.
Χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό και για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.	Είναι δύσκολος ο υπολογισμός της σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές τις ακραίες τιμές.

Ιδιότητες της μέσης τιμής

1. Αν $t_{\min}$ είναι η μικρότερη και $t_{\max}$ η μεγαλύτερη παρατήρηση, τότε $t_{\min} < \bar{x} < t_{\max}$.

2. Το άθροισμα των διαφορών των παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$ από την μέση τιμή $\bar{x}$ είναι πάντοτε μηδέν, δηλαδή: $\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i - \bar{x}\right) = 0$.

3. Αν οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε οι παρατηρήσεις $t_1 + c,\ t_2 + c,\ t_3 + c,\ ...,\ t_\nu + c$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} + c$. Έτσι αν $c > 0$ η μέση τιμή αυξάνεται ενώ αν $c < 0$ μειώνεται.

4. Αν οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1,\ k \cdot t_2,\ k \cdot t_3,\ ...,\ k \cdot t_\nu$ έχουν μέση τιμή $k \cdot \bar{x}$.

5. Αν οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1 + c,\ k \cdot t_2 + c,\ k \cdot t_3 + c,\ ...,\ k \cdot t_\nu + c$ έχουν μέση τιμή $k \cdot \bar{x} + c$.

Συνοπτικά ισχύει ότι:

Παρατηρήσεις	**Μέση τιμή**
$t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$	$\bar{x}$
$t_1 + c,\ t_2 + c,\ t_3 + c,\ ...,\ t_\nu + c$	$\bar{x} + c$
$k \cdot t_1,\ k \cdot t_2,\ k \cdot t_3,\ ...,\ k \cdot t_\nu$	$k \cdot \bar{x}$
$k \cdot t_1 + c,\ k \cdot t_2 + c,\ k \cdot t_3 + c,\ ...,\ k \cdot t_\nu + c$	$k \cdot \bar{x} + c$

6. Αν το αρχικό δείγμα έχει χωρισθεί σε επιμέρους ομάδες και έχει υπολογισθεί η μέση τιμή της κάθε ομάδας χωριστά, η μέση τιμή του αρχικού δείγματος είναι:

$\bar{x} = \dfrac{\nu_1 \cdot \bar{x}_1 + \nu_2 \cdot \bar{x}_2 + ... + \nu_\kappa \cdot \bar{x}_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}$, όπου $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_\kappa$ οι μέσες τιμές των επιμέρους ομάδων και $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ τα μεγέθη των επιμέρους ομάδων.

Εφαρμογή 4. Μία τάξη αποτελείται από 15 αγόρια και 25 κορίτσια και η μέση βαθμολογία των αγοριών σε ένα διαγώνισμα είναι 16 ενώ των κοριτσιών είναι 14. Η μέση βαθμολογία της τάξης είναι: $\bar{x} = \dfrac{15 \cdot 16 + 25 \cdot 14}{15 + 25} = \dfrac{240 + 350}{40} = 14,7$.

Εφαρμογή 5. Αν $\bar{x} = 5$ υπολογίστε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ του παρακάτω στατιστικού πίνακα.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
2	0,1	
3	α	
5	0,4	
6	β	
8	0,2	
Σύνολα	$\sum f_i =$	$\sum x_i \cdot f_i =$

Λύση.

Ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Leftrightarrow 0,1 + \alpha + 0,4 + \beta + 0,2 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 0,7 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0,3$

Ισχύει ότι $\bar{x}=5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 5 \Leftrightarrow x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 = 5 \Leftrightarrow$

$$2\frac{1}{10}+3a+5\frac{4}{10}+6\beta+8\frac{2}{10}=5 \Leftrightarrow 3\alpha+6\beta+3,8=5 \Leftrightarrow 3\alpha+6\beta=1,2 \Leftrightarrow \alpha+2\beta=0,4$$

Συνεπώς είναι $\begin{Bmatrix} \alpha+2\beta=0,4 \\ \alpha+\beta=0,3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0,2 \\ \beta=0,1 \end{cases}$.

Εφαρμογή 6. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα που παρουσιάζει τη βαθμολογία 25 σπουδαστών στο μάθημα «Στατιστική». Ποιά η μέση βαθμολογία; Ποιό είναι το ποσοστό των σπουδαστών που προάγονται;

Βαθμολογία	Απόλυτη συχνότητα ν_i	Σχετική επί % συχνότητα $f_i\%$	Σχετική συχνότητα f_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i\nu_i$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i f_i$
$[0,\ 2)$	$\nu_1 = 3$	$f_1\% =$	$f_1 =$	$x_1 =$	$x_1\nu_1 =$	$N_1 =$	$x_1 f_1 =$
$[2,\ 4)$	$\nu_2 = 5$	$f_2\% =$	$f_2 =$	$x_2 = 3$	$x_2\nu_2 = 15$	$N_2 =$	$x_2 f_2 =$
$[4,\ 6)$	$\nu_3 = 7$	$f_3\% =$	$f_3 =$	$x_3 = 5$	$x_3\nu_3 = 35$	$N_3 =$	$x_3 f_3 =$
$[6,\ 8)$	$\nu_4 = 4$	$f_4\% =$	$f_4 =$	$x_4 =$	$x_4\nu_4 =$	$N_4 =$	$x_4 f_4 =$
$[8,\ 10]$	$\nu_5 = 6$	$f_5\% =$	$f_5 =$	$x_5 =$	$x_5\nu_5 =$	$N_5 =$	$x_5 f_5 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i = 25$	$\sum_{i=1}^{5} f_i\% =$	$\sum_{i=1}^{5} f_i =$		$\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i =$		$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i =$

Λύση

Η μέση βαθμολογία προκύπτει από τον τύπο $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i}{\nu} = \dfrac{135}{25} = \dfrac{27}{5} = 5\dfrac{2}{5} = 5,4$.

Ισχύει ότι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i}{\nu} = \dfrac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \ldots + x_5\nu_5}{\nu} = \dfrac{x_1\nu_1}{\nu} + \dfrac{x_2\nu_2}{\nu} + \ldots + \dfrac{x_5\nu_5}{\nu} = x_1\dfrac{\nu_1}{\nu} + x_2\dfrac{\nu_2}{\nu} + \ldots + x_5\dfrac{\nu_5}{\nu} =$

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_5 f_5 = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 5,4$$

Βαθμολογία	Απόλυτη συχνότητα ν_i	Σχετική επί % συχνότητα $f_i\%$	Σχετική συχνότητα f_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i\nu_i$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i f_i$
$[0,\ 2)$	$\nu_1 = 3$	$f_1\% = 12\%$	$f_1 = 0,12$	$x_1 = 1$	$x_1\nu_1 = 3$	$N_1 = 3$	$x_1 f_1 = 0,12$
$[2,\ 4)$	$\nu_2 = 5$	$f_2\% = 20\%$	$f_2 = 0,20$	$x_2 = 3$	$x_2\nu_2 = 15$	$N_2 = 8$	$x_2 f_2 = 0,60$
$[4,\ 6)$	$\nu_3 = 7$	$f_3\% = 28\%$	$f_3 = 0,28$	$x_3 = 5$	$x_3\nu_3 = 35$	$N_3 = 15$	$x_3 f_3 = 1,40$
$[6,\ 8)$	$\nu_4 = 4$	$f_4\% = 16\%$	$f_4 = 0,16$	$x_4 = 7$	$x_4\nu_4 = 28$	$N_4 = 19$	$x_4 f_4 = 1,12$
$[8,\ 10)$	$\nu_5 = 6$	$f_5\% = 24\%$	$f_5 = 0,24$	$x_5 = 9$	$x_5\nu_5 = 54$	$N_5 = 25$	$x_5 f_5 = 2,16$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i = 25$	$\sum_{i=1}^{5} f_i\% = 100\%$	$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1$		$\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i = 135$		$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 5,4$

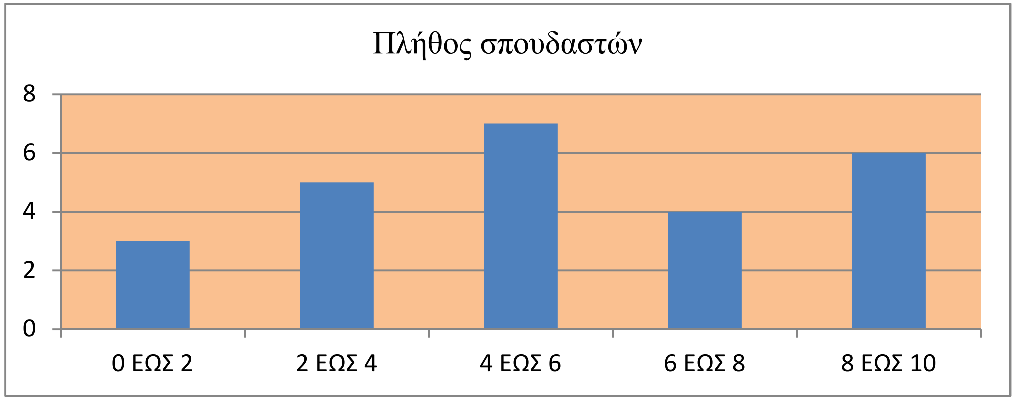
Προάγονται όσοι σπουδαστές έλαβαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του πέντε, άρα $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 28\% + 16\% + 24\% = 68\%$.

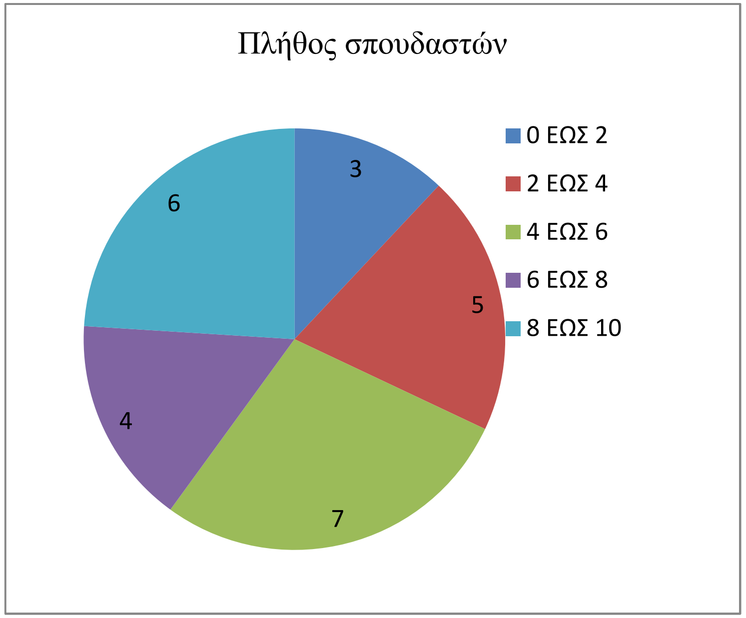
Απορρίπτονται όσοι σπουδαστές έλαβαν βαθμό μικρότερο του πέντε, άρα $f_1\% + f_2\% = 12\% + 20\% = 32\%$.

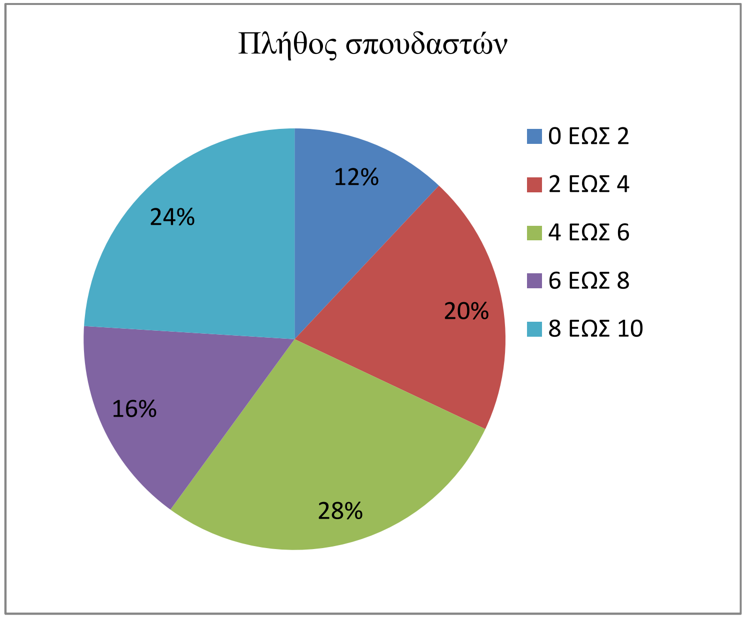
Από τους 25 σπουδαστές, οι 08 απορρίπτονται ενώ οι 17 προάγονται.

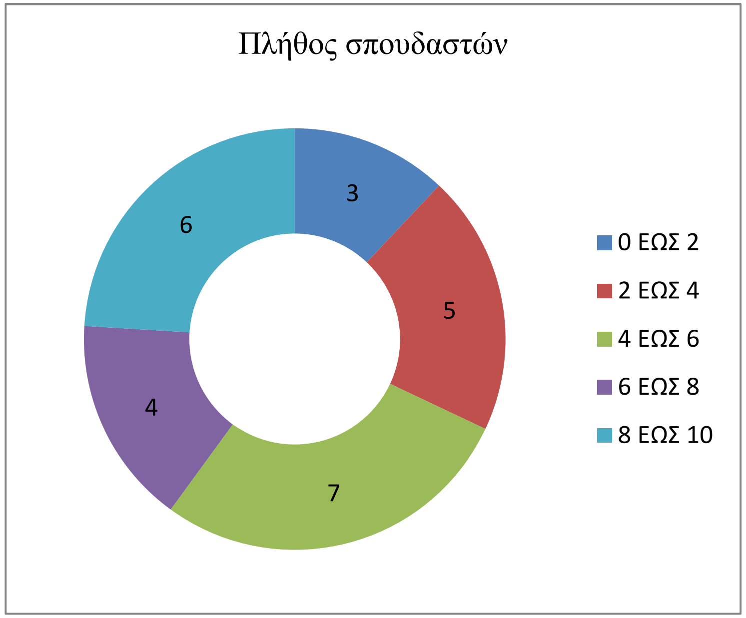
Επικρατούσα κλάση είναι αυτή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, άρα η $[4,\ 6)$.

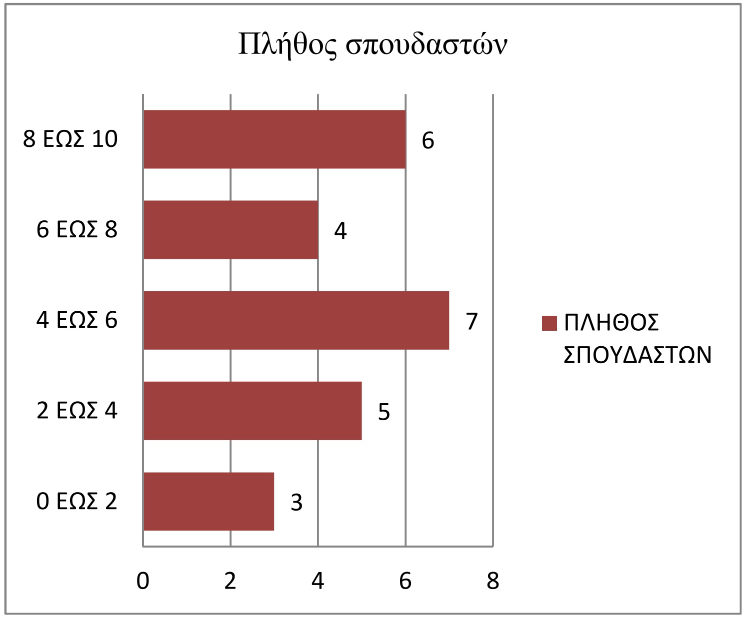
Διάμεσος είναι η $\delta = 5$ διότι είναι μεγαλύτερη από τις μισές παρατηρήσεις και μικρότερη από τις άλλες μισές.

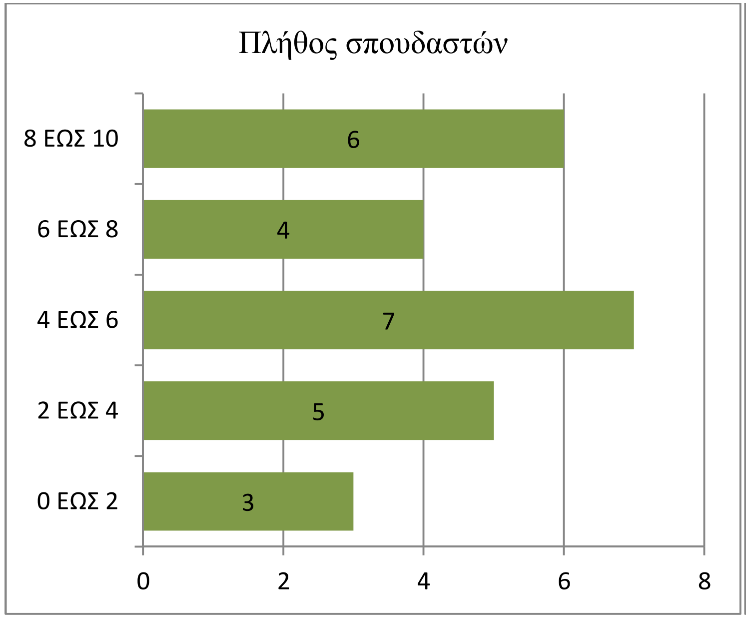


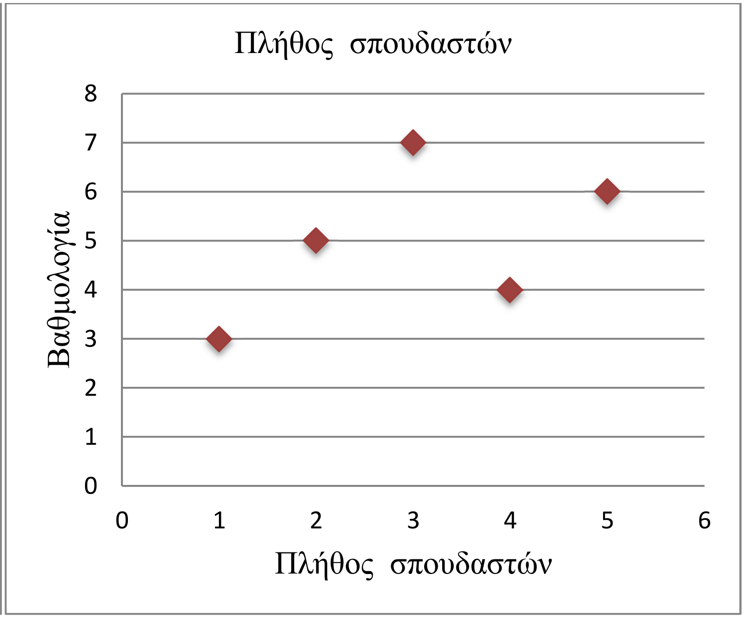

Πλήθος σπουδαστών
0 ΕΩΣ 2
2 ΕΩΣ 4
4 ΕΩΣ 6
6 ΕΩΣ 8
8 ΕΩΣ 10
3
5
7
4
6


Πλήθος σπουδαστών
0 ΕΩΣ 2
2 ΕΩΣ 4
4 ΕΩΣ 6
6 ΕΩΣ 8
8 ΕΩΣ 10
12%
20%
28%
16%
24%


Πλήθος σπουδαστών
0 ΕΩΣ 2
2 ΕΩΣ 4
4 ΕΩΣ 6
6 ΕΩΣ 8
8 ΕΩΣ 10
3
5
7
4
6


Πλήθος σπουδαστών
8 ΕΩΣ 10
6 ΕΩΣ 8
4 ΕΩΣ 6
2 ΕΩΣ 4
0 ΕΩΣ 2
6
4
7
5
3
0
2
4
6
8
ΠΛΗΘΟΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ


Πλήθος σπουδαστών
8 ΕΩΣ 10
6 ΕΩΣ 8
4 ΕΩΣ 6
2 ΕΩΣ 4
0 ΕΩΣ 2
6
4
7
5
3
0
2
4
6
8


Πλήθος σπουδαστών
Βαθμολογία
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
Πλήθος σπουδαστών

Εφαρμογή 7. Συμπληρώστε τον πίνακα που αφορά στις τιμές x_i που λαμβάνει η μεταβλητή X (περιγράφει τους βαθμούς που συγκέντρωσαν ν σκακιστικοί σύλλογοι στη διάρκεια τουρνουά). Ποιά η μέση επίδοση;

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$
$x_1=0$	$\nu_1=$	$N_1=$	$f_1=$	$F_1=$	$f_1\%=$	$F_1\%=$	$x_1\nu_1=$
$x_2=2$	$\nu_2=4$	$N_2=6$	$f_2=0,2$	$F_2=$	$f_2\%=$	$F_2\%=$	$x_2\nu_2=$
$x_3=2,5$	$\nu_3=$	$N_3=$	$f_3=$	$F_3=0,6$	$f_3\%=$	$F_3\%=$	$x_3\nu_3=$
$x_4=3$	$\nu_4=$	$N_4=$	$f_4=$	$F_4=$	$f_4\%=25$	$F_4\%=$	$x_4\nu_4=$
$x_5=6$	$\nu_5=2$	$N_5=$	$f_5=$	$F_5=$	$f_5\%=$	$F_5\%=$	$x_5\nu_5=$
$x_6=8$	$\nu_6=$	$N_6=$	$f_6=$	$F_6=$	$f_6\%=$	$F_6\%=$	$x_6\nu_6=$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{6}\nu_i=$		$\sum_{i=1}^{6} f_i=1$		$\sum_{i=1}^{6} f_i\%=100$		$\sum_{i=1}^{6} x_i\nu_i=$

Λύση

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$
$x_1=0$	$\nu_1=2$	$N_1=2$	$f_1=0,10$	$F_1=0,10$	$f_1\%=10$	$F_1\%=10$	$x_1\nu_1=0$
$x_2=2$	$\nu_2=4$	$N_2=6$	$f_2=0,20$	$F_2=0,30$	$f_2\%=20$	$F_2\%=30$	$x_2\nu_2=8$
$x_3=2,5$	$\nu_3=6$	$N_3=12$	$f_3=0,30$	$F_3=0,60$	$f_3\%=30$	$F_3\%=60$	$x_3\nu_3=15$
$x_4=3$	$\nu_4=5$	$N_4=17$	$f_4=0,25$	$F_4=0,85$	$f_4\%=25$	$F_4\%=85$	$x_4\nu_4=15$
$x_5=6$	$\nu_5=2$	$N_5=19$	$f_5=0,10$	$F_5=0,95$	$f_5\%=10$	$F_5\%=95$	$x_5\nu_5=12$
$x_6=8$	$\nu_6=1$	$N_6=20$	$f_6=0,05$	$F_6=1$	$f_6\%=5$	$F_6\%=100$	$x_6\nu_6=8$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{6}\nu_i=20$		$\sum_{i=1}^{6} f_i=1$		$\sum_{i=1}^{6} f_i\%=100$		$\sum_{i=1}^{6} x_i\nu_i=58$

Είναι $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i \nu_i}{\nu}=\dfrac{58}{20}=\dfrac{29}{10}=2{,}9$.

Εφαρμογή 8. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα, αν ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{4} x_i = 100$.

- $\sum_{i=1}^{4} 3x_i = 3\sum_{i=1}^{4} x_i = 3(x_1+x_2+x_3+x_4) = 3\cdot 100 = 300$
- $\sum_{i=1}^{4}(x_i+5) = \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} 5 = (x_1+x_2+x_3+x_4)+5\cdot 4 = 100+20=120$
- $\sum_{i=1}^{4}(3x_i+5) = \sum_{i=1}^{4} 3x_i + \sum_{i=1}^{4} 5 = 3\sum_{i=1}^{4} x_i + 5\cdot 4 = 300+20=320$

Ιδιότητες του συμβολισμού $\sum$

Στη στατιστική εμφανίζονται αθροίσματα αρκετών προσθετέων. Για πρακτικούς λόγους συμβολίζονται με το σύμβολο $\sum$ όπου $\sum_{i=1}^{\nu} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{\nu-1} + x_\nu$.

Ισχύει ότι
- $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{\nu} x_i \pm \sum_{i=1}^{\nu} y_i$
- $\sum_{i=1}^{\nu} k = \underbrace{k+\ldots+k}_{\nu-\varphi o\rho\varepsilon\varsigma} = \nu k$
- $\sum_{i=1}^{\nu} kx_i = k\sum_{i=1}^{\nu} x_i$
- $\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{\nu} x_i$

Σταθμικός μέσος (weighted mean)

Ο σταθμικός μέσος είναι το μέτρο που χρησιμοποιούμε στις περιπτώσεις που θέλουμε να δώσουμε διαφορετική βαρύτητα στις τιμές ενός συνόλου δεδομένων. Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\kappa$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζετε με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\kappa$, τότε ο σταθμικός μέσος δίνεται από τον τύπο: $\overline{x}=\dfrac{w_1\cdot x_1 + w_2\cdot x_2 + w_3\cdot x_3 + \ldots + w_\kappa \cdot x_\kappa}{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_\kappa} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa} w_\kappa \cdot x_\kappa}{\sum_{i=1}^{\kappa} w_\kappa}$.

Εφαρμογή 9. Η επίδοση σπουδαστή σε πέντε μαθήματα είναι 6, 7, 8, 9, 10.

α. Ποιά η μέση βαθμολογία;
β. Αν οι συντελεστές στάθμισης των μαθημάτων είναι 3, 2, 2, 2, 1 αντίστοιχα, Ποιά η μέση βαθμολογία;

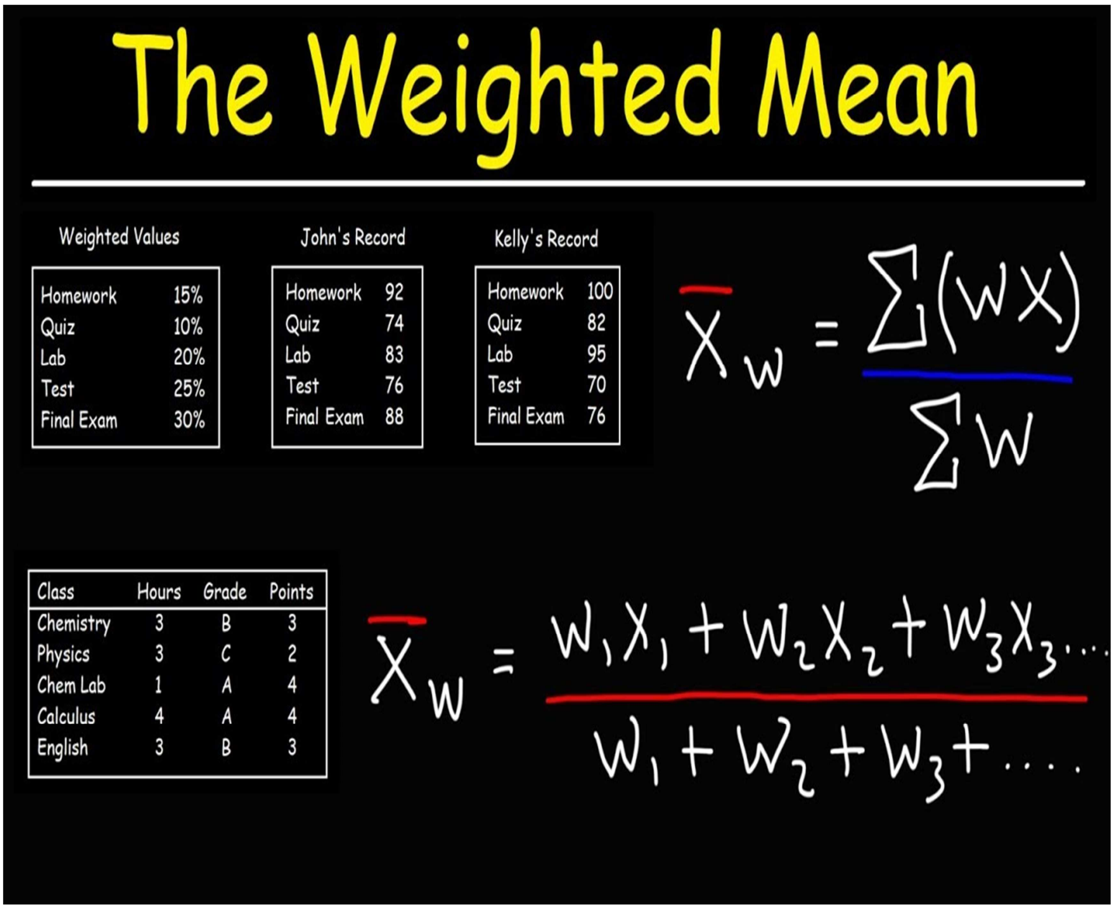
Λύση. α. $\overline{x}=\dfrac{6+7+8+9+10}{5}=\dfrac{40}{5}=8$

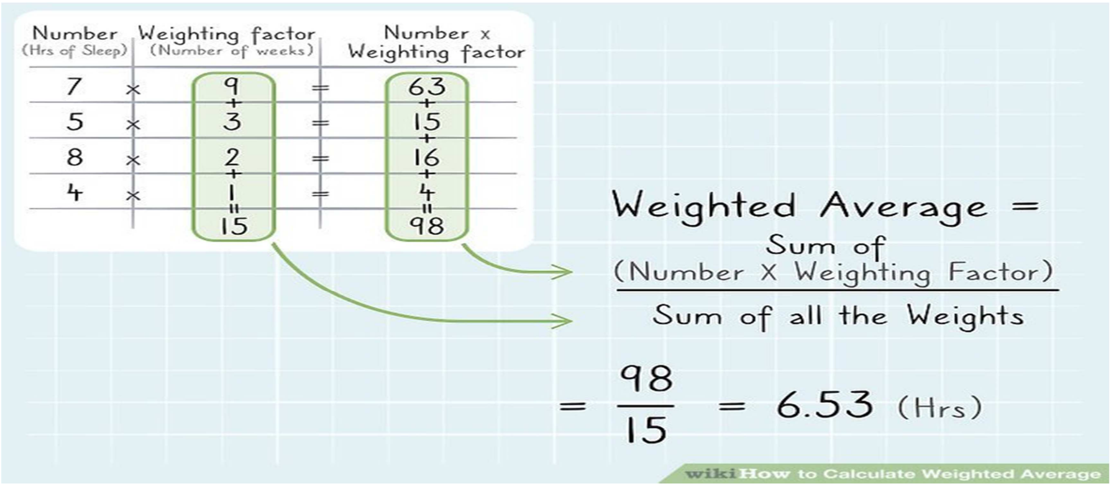
β. $$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i w_i}{\sum_{i=1}^{5}w_i}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+x_3w_3+x_4w_4+x_5w_5}{w_1+w_2+w_3+w_4+w_5}=$$

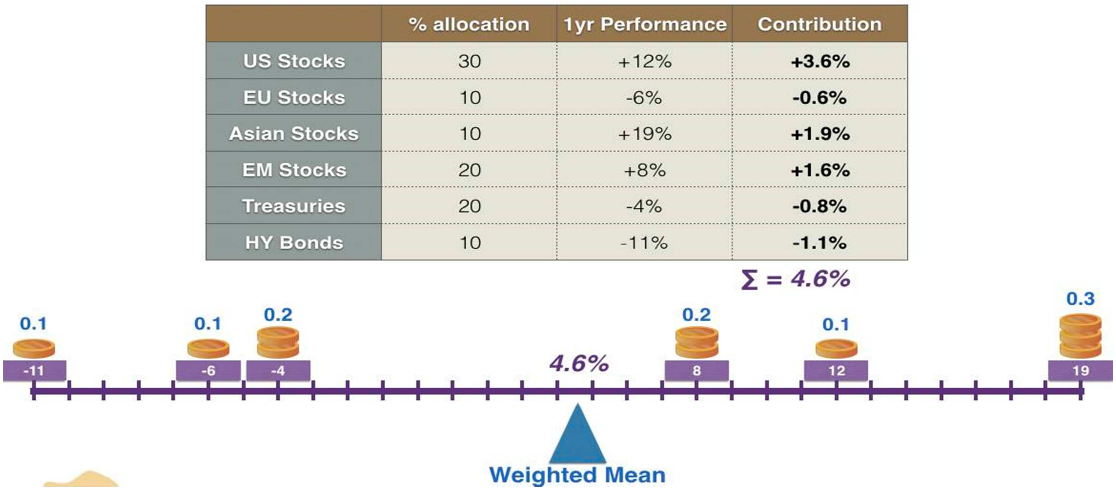
$$\frac{6\cdot 3+7\cdot 2+8\cdot 2+9\cdot 2+10\cdot 1}{3+2+2+2+1}=\frac{76}{10}=7,6$$

Εφαρμογή 10. Ο μέσος μηνιαίος μισθός των ν ναυτικών της Α εταιρείας είναι α, ενώ ο μέσος μηνιαίος μισθός των μ ναυτικών της Β εταιρείας είναι β. Ποιός θα είναι ο μέσος μηνιαίος μισθός των ναυτικών που προκύπτει από τη συγχώνευση των δύο εταιρειών; **Λύση.** $\overline{x}=\dfrac{\nu\alpha+\mu\beta}{\nu+\mu}$.

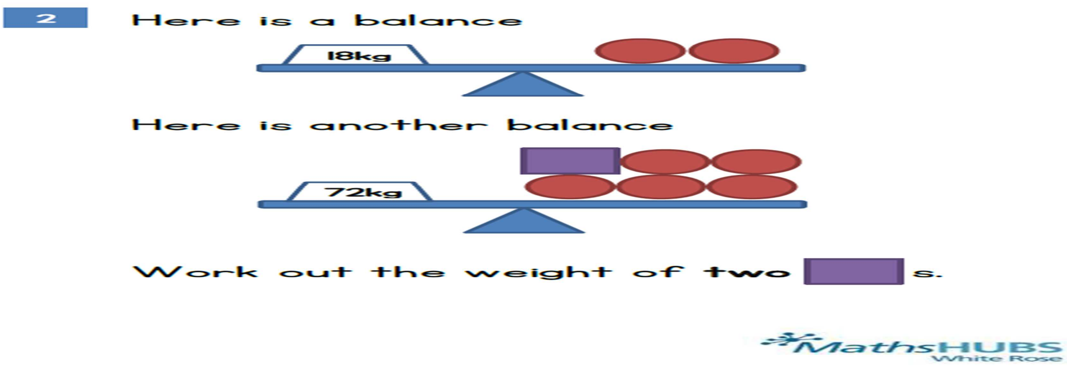
Εφαρμογή 11. Δευτεροετής σπουδαστής μελετά εβδομαδιαίως περίπου 25 ώρες. Μετά την εξεταστική περίοδο Φεβρουαρίου, αυξάνει το διάβασμα κατά 3 ώρες εβδομαδιαίως. Ποιός ο νέος αριθμητικός μέσος; **Λύση.** 4 ώρες

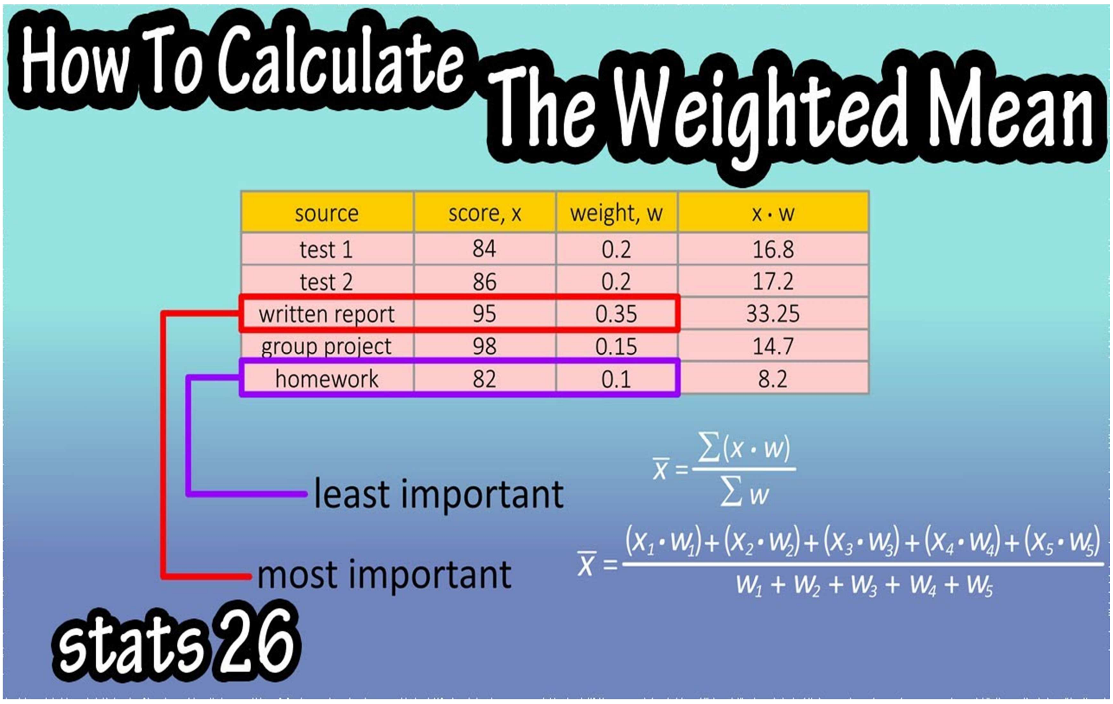


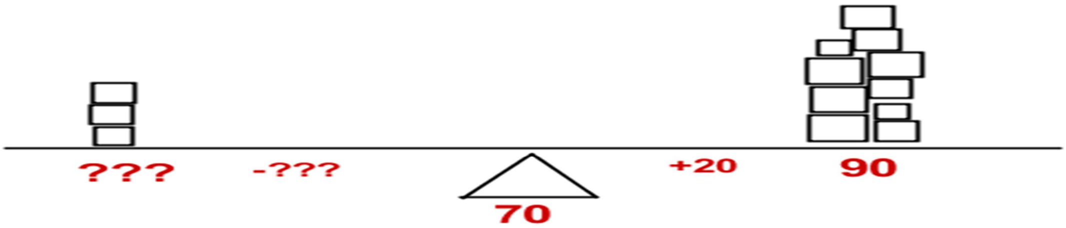


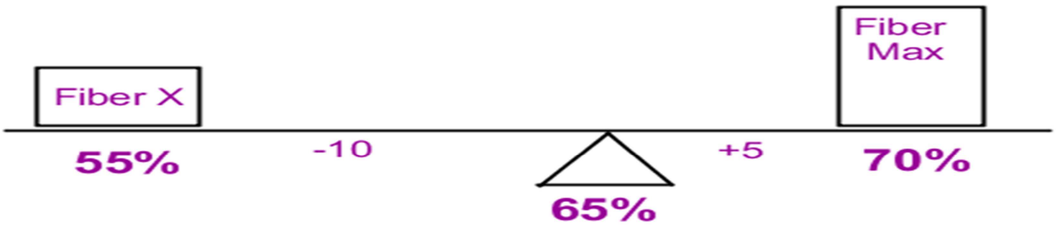


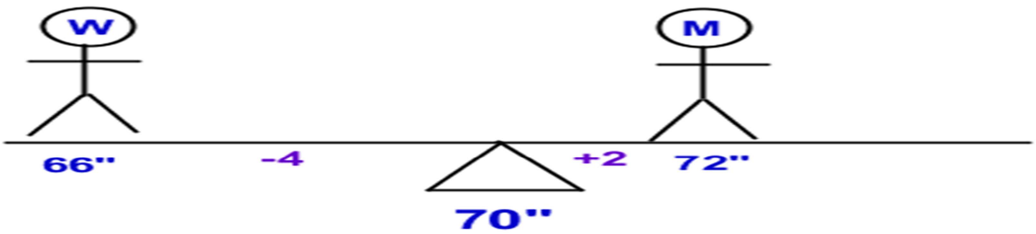
	% allocation	1yr Performance	Contribution
US Stocks	30	+12%	**+3.6%**
EU Stocks	10	-6%	**-0.6%**
Asian Stocks	10	+19%	**+1.9%**
EM Stocks	20	+8%	**+1.6%**
Treasuries	20	-4%	**-0.8%**
HY Bonds	10	-11%	**-1.1%**




How To Calculate The Weighted Mean
source | score, x | weight, w | x · w
test 1 | 84 | 0.2 | 16.8
test 2 | 86 | 0.2 | 17.2
written report | 95 | 0.35 | 33.25
group project | 98 | 0.15 | 14.7
homework | 82 | 0.1 | 8.2
least important
most important
$\overline{X} = \dfrac{\sum(x \cdot w)}{\sum w}$
$\overline{X} = \dfrac{(x_1 \cdot w_1)+(x_2 \cdot w_2)+(x_3 \cdot w_3)+(x_4 \cdot w_4)+(x_5 \cdot w_5)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$
stats 26

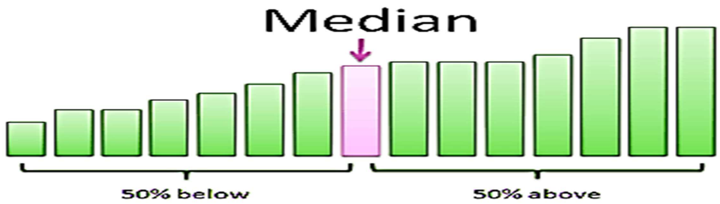

???
-???
+20
90
70


Fiber X
Fiber Max
55%
-10
+5
70%
65%

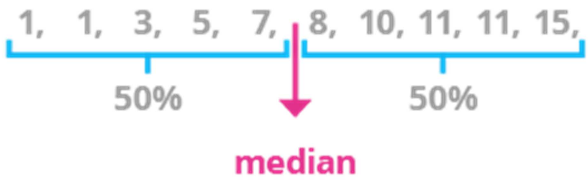

W
M
66"
-4
+2
72"
70"

Διάμεσος (median)

Έστω οι ακόλουθες παρατηρήσεις: 10, 8, 7, 9, 6. Τις διατάσω κατά αύξουσα σειρά: 6, 7, 8, 9, 10. Ο μέσος είναι $\bar{x}=8$ και η διάμεσος είναι $\delta=8$.



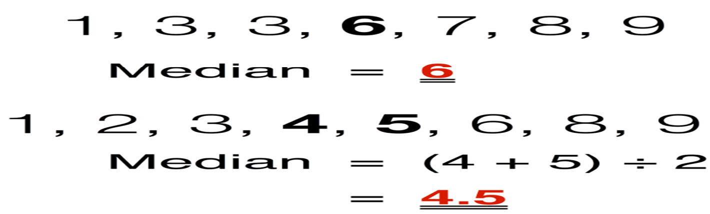
Ορισμός διαμέσου. Η τιμή εκείνη δ ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερο ή ίσο του δ και το άλλο 50% των παρατηρήσεων μεγαλύτερο ή ίσο του δ.



Έστω οι παρατηρήσεις: 6, 7, 8, 9, 10, 11. Τότε δ είναι οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των αριθμών 8 και 9. Δηλαδή $\delta \in (8,\ 9)$.

Αν $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους ν τις οποίες έχουμε διατάξει σε αύξουσα σειρά, τότε:

$$\delta = \begin{cases} \text{η μεσαία παρατήρηση, όταν ν περιττός} \\ \text{ο μέσος όρος των δυο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν ν άρτιος} \end{cases}$$



• Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι αρκετά μεγάλο και περιττός αριθμός, ισχύει ότι: $\delta = t_{\frac{\nu+1}{2}}$.

Εφαρμογή 12. Για τις παρατηρήσεις: $\underbrace{2,2,\ldots,2}_{39\text{ φορες}}$, $\underbrace{5,5,\ldots,5}_{11\text{ φορες}}$, $\underbrace{9,9,\ldots,9}_{19\text{ φορες}}$ είναι $\nu = 39+11+19=69$. Άρα, $\delta = t_{\frac{\nu+1}{2}} = t_{\frac{69+1}{2}} = t_{35} = 2$.

• Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι αρκετά μεγάλο και άρτιος αριθμός, ισχύει ότι: $\delta = \dfrac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$.

Εφαρμογή 13. Για τις παρατηρήσεις: $\underbrace{2,2,...,2}_{50\ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma}$, $\underbrace{5,5,...,5}_{20\ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma}$, $\underbrace{9,9,...,9}_{30\ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma}$ είναι $\nu = 50+30+20=100$. Άρα, $\delta = \dfrac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2} = \dfrac{t_{\frac{100}{2}} + t_{\frac{100}{2}+1}}{2} = \dfrac{t_{50}+t_{51}}{2} = \dfrac{2+5}{2} = 3,5$.

Αν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα, τότε επειδή η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν, θα έχει αθροιστική συχνότητα (Cumulative frequency) $F_i = 50\%$.

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Είναι εύκολα κατανοητή.	Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της.
Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές.	Είναι δύσκολή η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
Ο υπολογισμός της είναι απλός.	Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.
Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων.	

Ιδιότητες διαμέσου

1. Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, σε δύο ίσα μέρη. Η διάμεσος δηλαδή είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

2. Έστω ότι οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$ έχουν διάμεσο δ.

Οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1,\ k \cdot t_2,\ k \cdot t_3,\ ...,\ k \cdot t_\nu$ έχουν διάμεσο $k \cdot \delta$.

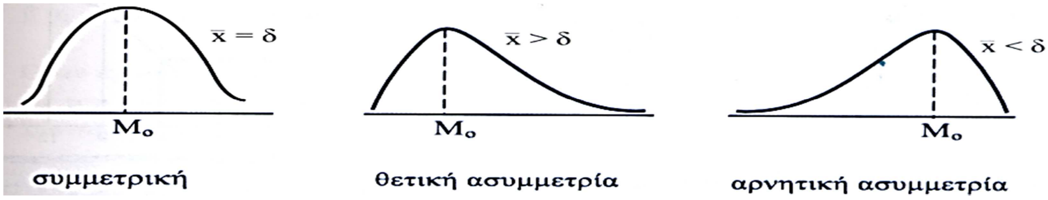
Οι παρατηρήσεις $t_1 + c,\ t_2 + c,\ t_3 + c,\ ...,\ t_\nu + c$ έχουν διάμεσο $\delta + c$.

Οι παρατηρήσεις $k \cdot t_1 + c,\ k \cdot t_2 + c,\ k \cdot t_3 + c,\ ...,\ k \cdot t_\nu + c$ έχουν διάμεσο $k \cdot \delta + c$.

Συνοπτικά ισχύει ότι:

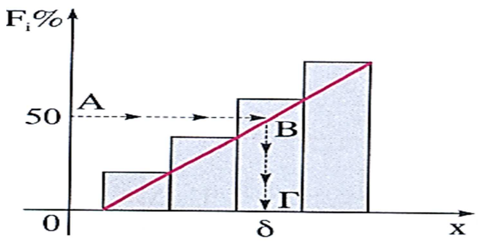
Παρατηρήσεις	Διάμεσος
$t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$	δ
$t_1 + c,\ t_2 + c,\ t_3 + c,\ ...,\ t_\nu + c$	$\delta + c$
$k \cdot t_1,\ k \cdot t_2,\ k \cdot t_3,\ ...,\ k \cdot t_\nu$	$k \cdot \delta$
$k \cdot t_1 + c,\ k \cdot t_2 + c,\ k \cdot t_3 + c,\ ...,\ k \cdot t_\nu + c$	$k \cdot \delta + c$

Αν το πλήθος των παρατηρήσεων ν είναι άρτιος αριθμός, τότε για τον υπολογισμό της διαμέσου μπορούμε αντί του ιστογράμματος (Histogram) αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων (Cumulative relative frequencies) $F_i\%$, να έχουμε ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων N_i. Στην περίπτωση αυτή η μόνη διαφορά είναι ότι η παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα δεν άγεται από το $F_i\% = 50$, αλλά από το $\dfrac{\nu}{2}$. Η ως άνω περιγραφόμενη διαδικασία εφαρμόζεται μόνο όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός. Η σχέση μέσης τιμής, διαμέσου και επικρατούσας τιμής στις διάφορες καμπύλες συχνοτήτων είναι:

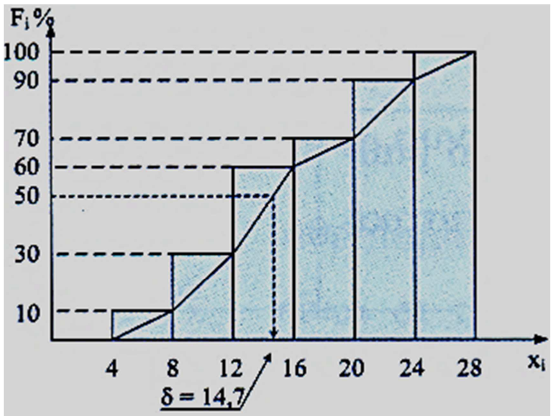


Εύρεση διαμέσου δ από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων F_i %

Φέρνουμε από το σημείο Α (0,50) του κατακόρυφου άξονα, παράλληλη προς τον άξονα xx΄ η οποία τέμνει την πολυγωνική γραμμή στο Β. Από το Β φέρνουμε κάθετη στον άξονα Ox που τον τέμνει στο σημείο Γ. Διάμεσος δ είναι η τετμημένη του Γ.



Στο διπλανό σχήμα, από το ιστόγραμμα και το πολύγωνο (**Polygon**) των σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων, προκύπτει η τιμή της διαμέσου δ , η οποία ως γνωστόν αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων.



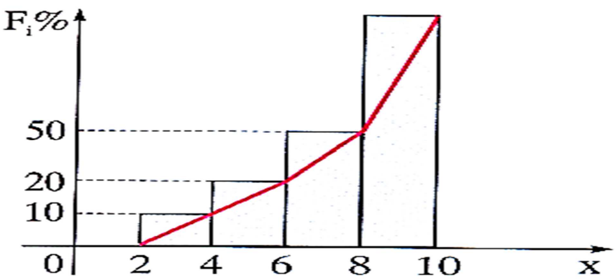
Είναι $\dfrac{16-\delta}{\delta-12}=\dfrac{60-50}{50-30}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$. Άρα,

$$\frac{16-\delta}{\delta-12}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left(16-\delta\right)=\delta-12\Leftrightarrow$$

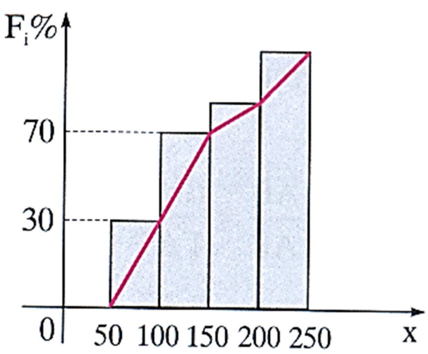
$$32-2\delta=\delta-12\Leftrightarrow 44=3\delta\Leftrightarrow \delta=\frac{44}{3}$$

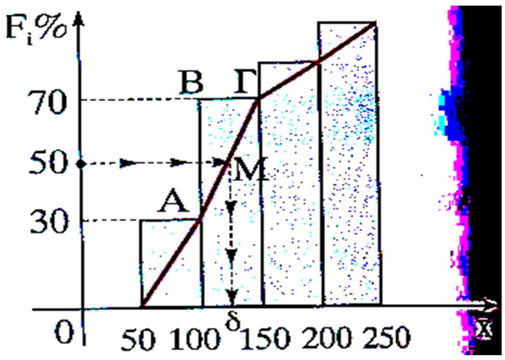
Εφαρμογή 14. Υπολογίστε τη διάμεσο δ για το διπλανό ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.

Λύση. Το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερο από το 8. Άρα δ=8.



Εφαρμογή 15. Υπολογίσετε τη διάμεσο για τα παρακάτω ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.

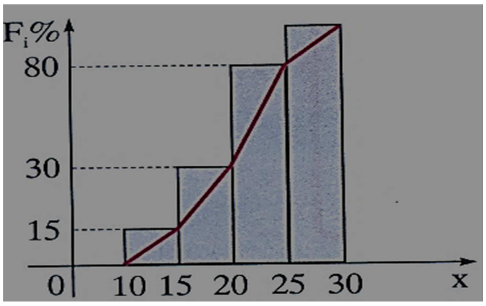


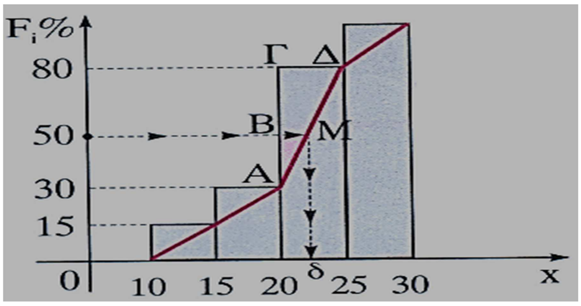


Λύση.

Είναι $\dfrac{150-\delta}{\delta-100}=\dfrac{70-50}{50-30}\Leftrightarrow\dfrac{150-\delta}{\delta-100}=\dfrac{20}{20}\Leftrightarrow 150-\delta=\delta-100\Leftrightarrow\delta=125$.

Εφαρμογή 16. Υπολογίστε τη διάμεσο για το παρακάτω ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων.





Λύση. Είναι $\dfrac{25-\delta}{\delta-20}=\dfrac{80-50}{50-30}=\dfrac{30}{20}=\dfrac{3}{2}$. Άρα,
$50-2\delta=3\delta-60\Leftrightarrow 110=5\delta\Leftrightarrow\delta=22$.

Εφαρμογή 17. Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 4. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 1, 2, 6. Βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς.

Λύση. Αφού οι παρατηρήσεις είναι 5 το πλήθος, δηλαδή περιττός αριθμός, η μεσαία παρατήρηση που είναι η τρίτη, θα ισούται με την τιμή της διαμέσου, δηλαδή 4.

Διατάσσουμε τους αριθμούς με αύξουσα σειρά όπως ακολούθως:

$$1\quad 2\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \delta}}{4}\quad 6\quad y$$

Ισχύει ότι $\bar{x}=4\Leftrightarrow\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{\nu}=4\Leftrightarrow\dfrac{1+2+4+6+y}{5}=4\Leftrightarrow$

$$\frac{13+y}{5}=4\Leftrightarrow 13+y=20\Leftrightarrow y=7.$$

Εφαρμογή 18. Στον διπλανό στατιστικό πίνακα δίνεται ο συνολικός αριθμός των εργαζομένων σε ναυτιλιακές εταιρείες του Πειραιά. Υπολογίστε τον $\alpha\in\mathbb{R}$ αν $\delta=39$.

x_i	ν_i
$x_1=10$	$\nu_1=4$
$x_2=20$	$\nu_2=4$
$x_3=30$	$\nu_3=\alpha$
$x_4=40$	$\nu_4=10$
$x_5=50$	$\nu_5=3$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{5}\nu_i=$

Λύση. Αφού η διάμεσος είναι 39, οι μισές παρατηρήσεις (50% των συχνοτήτων) θα είναι μικρότερες της και οι άλλες μισές μεγαλύτερες.
Ισχύει ότι 4 + 4 + α = 10 + 3.   Συνεπώς α = 5.

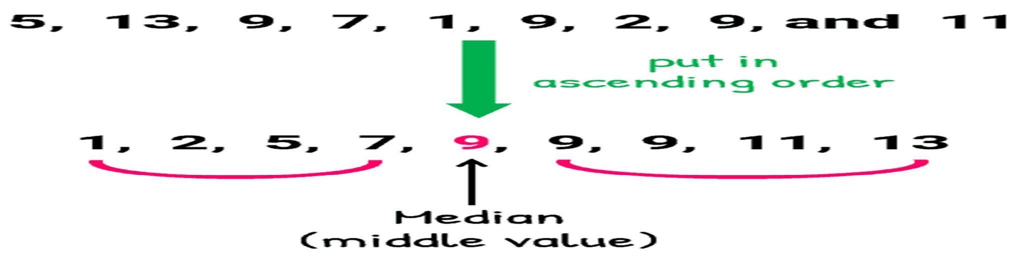
Εφαρμογή 19. Οι αριθμοί 5, 6, 10, 11, 13, x, y έχουν μέση τιμή 8 και διάμεσο 7. Υπολογίστε τους $x,\ y\in\mathbb{R}$.

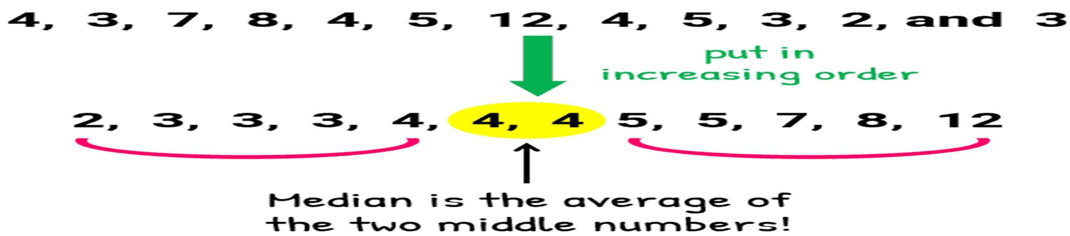
Λύση. Αφού οι παρατηρήσεις είναι 7 το πλήθος, δηλαδή περιττός αριθμός, η μεσαία παρατήρηση που είναι η τέταρτη, θα ισούται με την τιμή της διαμέσου, δηλαδή 7.
Διατάσσουμε τους αριθμούς με αύξουσα σειρά όπως ακολούθως:

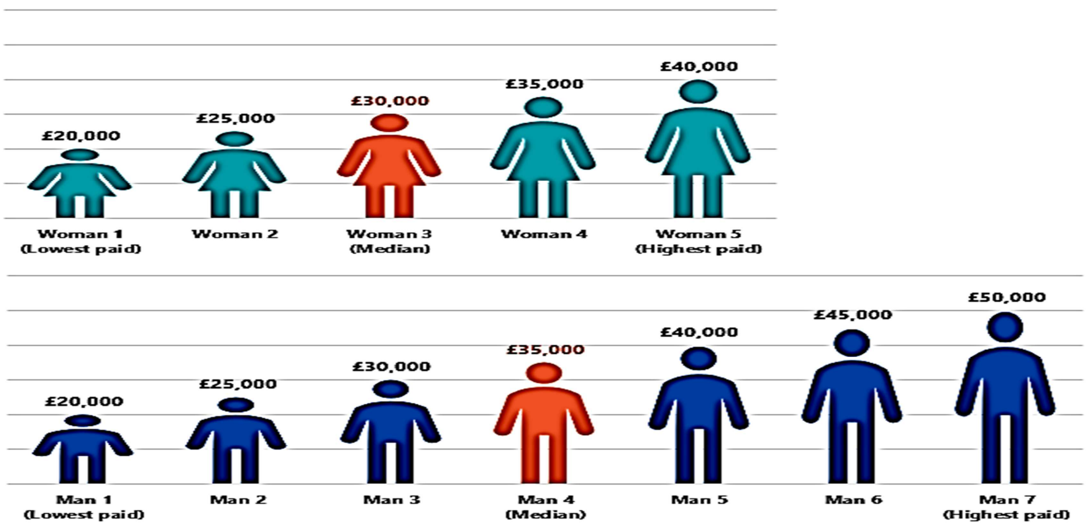
$$y \quad 5 \quad 6 \quad \underset{\delta}{\underset{\uparrow}{7}} \quad 10 \quad 11 \quad 13$$

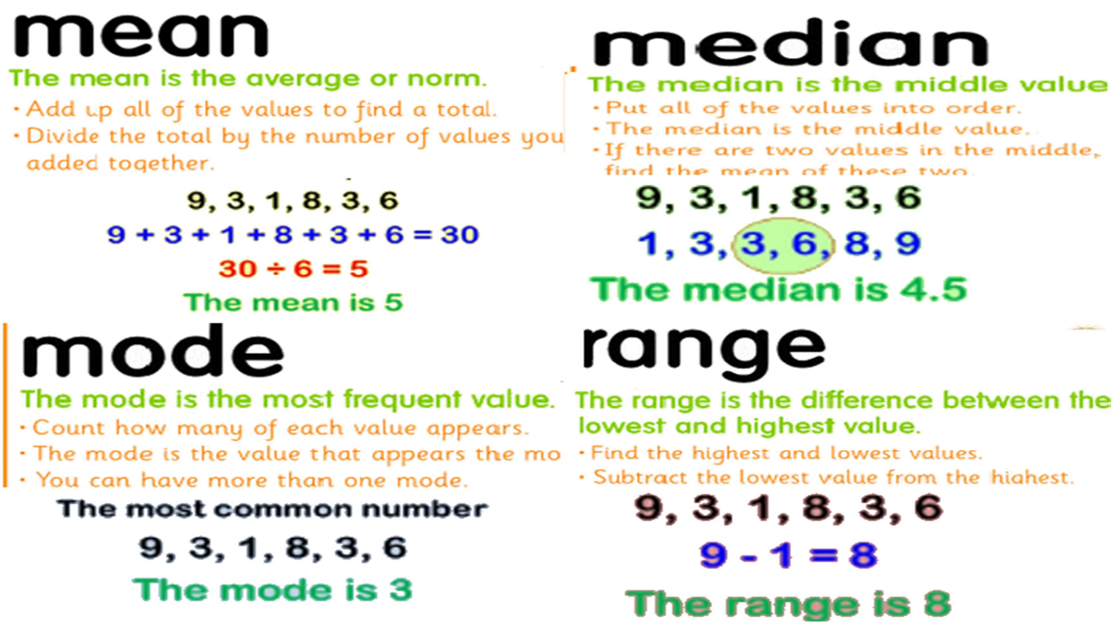
Ισχύει ότι $\bar{x} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{\nu} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{y+5+6+7+10+11+13}{7} = 8 \Leftrightarrow$

$$\frac{52+y}{7} = 8 \Leftrightarrow 52+y = 56 \Leftrightarrow y = 4.$$









Median age of marriage and divorce 2017 — Australian Bureau of Statistics

	FEMALE	MALE
First marriage	28.8	30.4
Same-sex marriage*	39.0	48.5
All marriages	30.1	32.0
Divorce	42.9	45.5

*Preliminary data presented for same-sex marriages is for the period 9 December 2017 until 30 June 2018 and is subject to change.
Source: ABS, Marriages and Divorces, Australia, (cat. no. 3310.0) 2017

Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

Η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων εφαρμόζεται όταν είναι μεγάλο το μέγεθος του δείγματος της ποσοτικής μεταβλητής X. Προς τούτο μοιράζουμε τα δεδομένα σε ομάδες οι οποίες ονομάζονται κλάσεις (Class intervals), τοποθετώντας σε κάθε μία κλάση το πλήθος των παρατηρήσεων που της αντιστοιχούν. Συνήθως, οι κλάσεις είναι διαστήματα της μορφής $[\alpha,\ \beta)$ με το α να ονομάζεται **κατώτερο** και το β **ανώτερο** όριο της κλάσης. Τα α, β ονομάζονται **όρια** της κλάσης (Class boundaries). Η κάθε κλάση χαρακτηρίζεται και διακρίνεται από τα όριά της.

- **Πλάτος** c της κλάσης ονομάζεται η διαφορά του ανωτέρου από το κατώτερο όριο της. Συνεπώς ισχύει ότι $c=\beta-\alpha$.
- **Κέντρο** της κλάσης ονομάζεται ο αριθμός $x=\dfrac{a+\beta}{2}$ ο οποίος αντιπροσωπεύει την κλάση, λειτουργώντας ως μία διακριτή μεταβλητή.
- Οι κεντρικοί όροι x_i των κλάσεων αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο x_i και διαφορά $\omega=c$. Ισχύει ότι $x_\nu=x_1+(\nu-1)c$.
- Ο καθορισμός του πλήθους των κλάσεων των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων προκύπτει από τον **κανόνα του Sturges**. Αναλόγως με το μέγεθος του δείγματος και εφόσον δεν αναφέρεται διαφορετικά, στην πράξη ισχύουν τα παρακάτω:

Μέγεθος δείγματος	<20	$20-50$	$50-100$	$100-200$
Πλήθος κλάσεων k	5	6	7	8

➢ Για τη δημιουργία κλάσεων ίσου πλάτους, μετά την εύρεση του εύρους (Range), υπολογίζεται το πλάτος c των κλάσεων, από τον τύπο $c=\frac{R}{k}$. Αν το πλάτος δεν είναι ακέραιος αριθμός, γίνεται στρογγυλοποίηση του προς τα πάνω. Στην τελευταία κλάση μόνο, είναι δυνατό το διάστημα να θεωρηθεί κλειστό και στα δύο του άκρα.

Εφαρμογή 20. Αν ο νεότερος υπάλληλος εταιρείας είναι 20 ετών και ο γηραιότερος 70 ετών, είναι $R=70-20=50$. Αν η εταιρεία απασχολεί 19 εργαζομένους είναι $k=5$, άρα $c=\frac{R}{k}=\frac{50}{5}=10$. Άρα, για τη στατιστική μελέτη της ηλικιακής κατανομής τους, θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω στατιστικός πίνακας.

Αριθμός κλάσεων	Ηλικία	Συχνότητα
1	$[20,\ 30)$	$\nu_1=$
2	$[30,\ 40)$	$\nu_2=$
3	$[40,\ 50)$	$\nu_3=$
4	$[50,\ 60)$	$\nu_4=$
5	$[60,\ 70)$	$\nu_5=$
	Σύνολο	$\nu=$

Για 199 εργαζομένους είναι $k=8$, άρα $c=\frac{R}{k}=\frac{50}{8}=\frac{25}{4}=\frac{12,50}{2}=6,25$. Με προς τα πάνω στρογγυλοποίηση είναι $c=6,5$. Άρα, για τη στατιστική μελέτη της ηλικιακής κατανομής τους, θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω στατιστικός πίνακας.

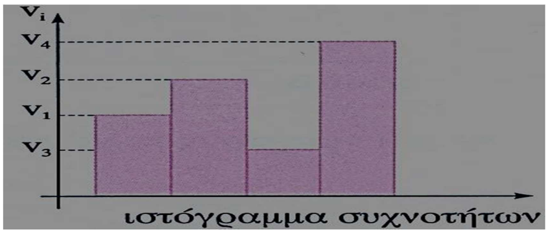
Αριθμός κλάσεων	Ηλικία	Συχνότητα
1	$[20-26,5)$	$\nu_1=$
2	$[26,5-33)$	$\nu_2=$
3	$[33-39,5)$	$\nu_3=$
4	$[39,5-46)$	$\nu_4=$
5	$[46-52,5)$	$\nu_5=$
6	$[52,5-59)$	$\nu_6=$
7	$[59-65,5)$	$\nu_7=$
8	$[65,5-72)$	$\nu_8=$
	Σύνολο	$\nu=$

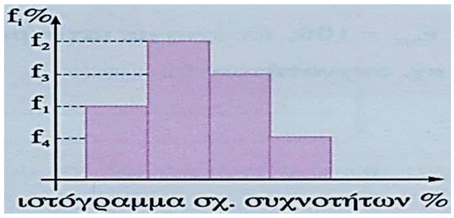
Αν το $c=6,25$ είχε στρογγυλοποιηθεί προς τα κάτω σε $c=6$ θα προέκυπτε ο παρακάτω στατιστικός πίνακας που είναι ατελής διότι δεν περιλαμβάνει τους άνω των 68 ετών υπαλλήλους.

Αριθμός κλάσεων	Ηλικία	Συχνότητα
1	$[20-26)$	$\nu_1 =$
2	$[26-32)$	$\nu_2 =$
3	$[32-38)$	$\nu_3 =$
4	$[38-44)$	$\nu_4 =$
5	$[44-50)$	$\nu_5 =$
6	$[50-56)$	$\nu_6 =$
7	$[56-62)$	$\nu_7 =$
8	$[62-68)$	$\nu_8 =$
	Σύνολο	$\nu =$

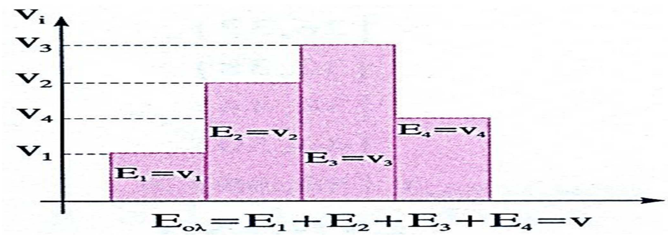
Γραφική παράσταση ομαδοποιημένης κατανομής. Ιστόγραμμα συχνοτήτων

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων αποτελείται από μία σειρά ορθογωνίων παραλληλογράμμων, εφαπτόμενων μεταξύ τους, που έχουν ίσες βάσεις πλάτους c και ύψη ίσα με τη συχνότητα που αντιπροσωπεύουν. Αν το πλάτος c της κάθε κλάσης θεωρηθεί ως μονάδα μέτρησης του οριζοντίου άξονα, **το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου του ιστογράμματος ισούται με την αντίστοιχη συχνότητα**. Για το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων παραλληλογράμμου ισχύουν:

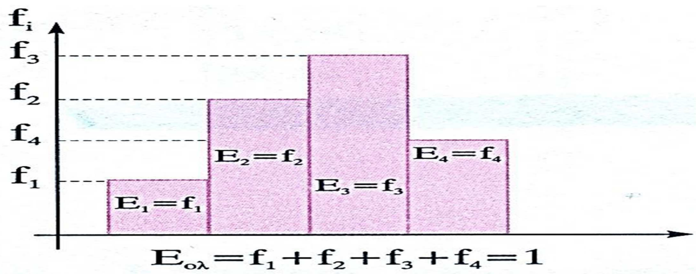




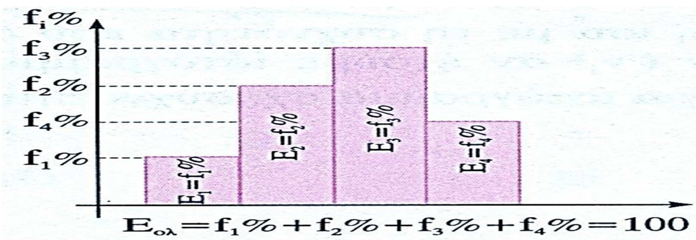
Για το ιστόγραμμα συχνοτήτων ισχύει ότι $E_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = \nu$.



Για το ιστόγραμμα (Histogram) των σχετικών συχνοτήτων (Relative frequencies) ισχύει ότι $E_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = 1$.

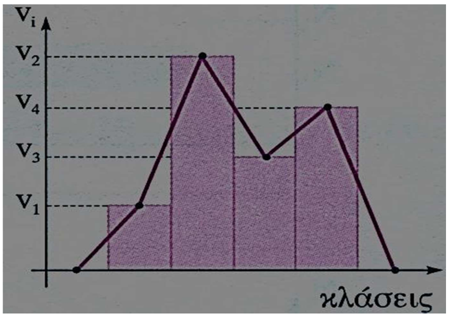


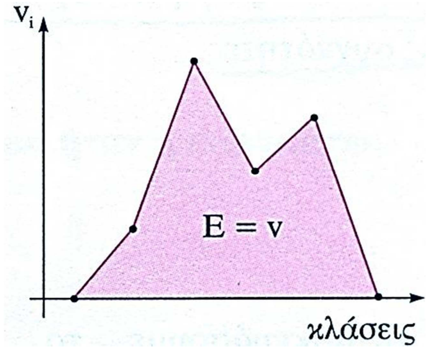
Για το ιστόγραμμα των σχετικών % συχνοτήτων ισχύει ότι $E_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = 100$.



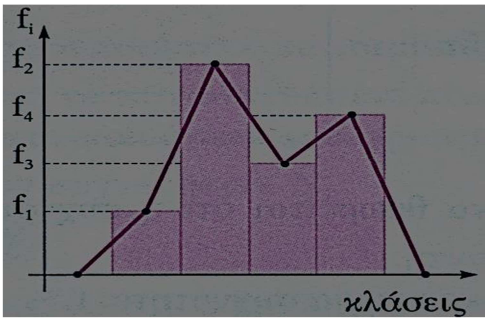
Πολύγωνο συχνοτήτων (Frequency polygon)

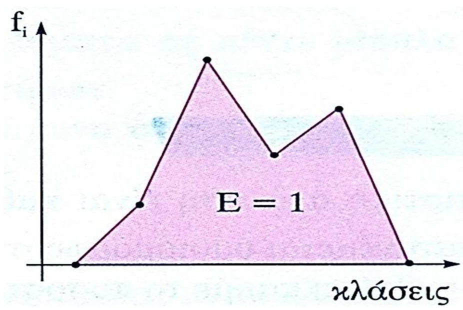
Στην αρχή και στο τέλος του ιστογράμματος θεωρούμε ότι υπάρχουν δύο υποθετικές κλάσεις, μηδενικής συχνότητας εκάστη. Το πολύγωνο συχνοτήτων είναι εκείνη η πολυγωνική γραμμή που ενώνει **τα μέσα των άνω βάσεων** των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, περιλαμβανομένων και των υποθετικών κλάσεων.



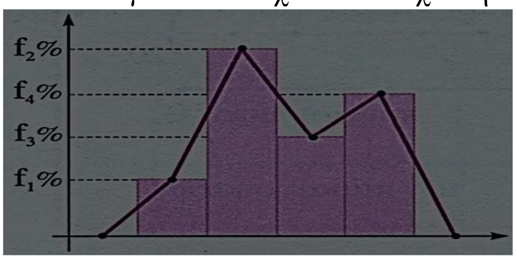


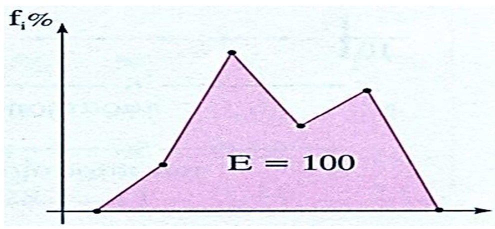
Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει ότι το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο των συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ισούται με το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή ν.





Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει ότι το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ισούται με 1.

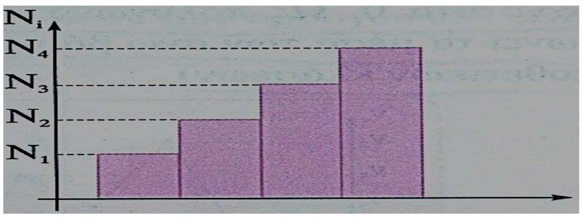


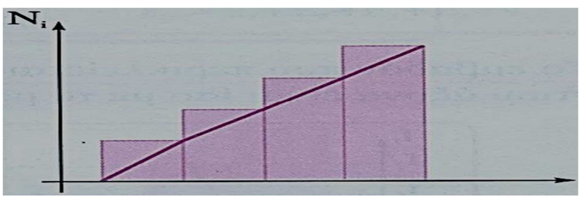


Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει ότι το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο των σχετικών % συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ισούται με 100.

Ιστόγραμμα και πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων

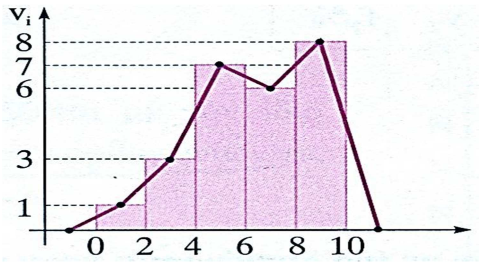
Κατά τη σχεδίαση των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, ως ύψος τους λαμβάνονται οι αθροιστικές τους συχνότητες. Για την κατασκευή του πολυγώνου των αθροιστικών συχνοτήτων ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα δεξιά άκρα των πάνω βάσεων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων.



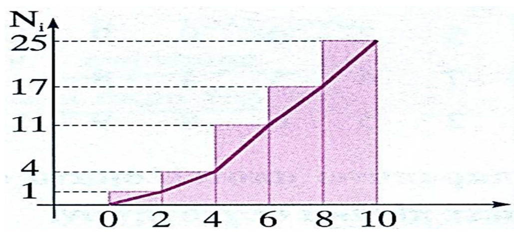


Εφαρμογή 21. Συμπληρώστε τον πίνακα που αναφέρεται στην ηλικία ν, 25 πλοίων. Φτιάξτε τα: ιστόγραμμα συχνοτήτων ν_i, πολύγωνο συχνοτήτων ν_i, ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων N_i και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων N_i.

Κλάσεις	x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[0,\ 2)$	$x_1 =$	1	1				
$[2,\ 4)$	$x_2 =$	3	4				
$[4,\ 6)$	$x_3 =$	7	11				
$[6,\ 8)$	$x_4 =$	6	17				
$[8,\ 10)$	$x_5 =$	8	25				
Σύνολο		25					

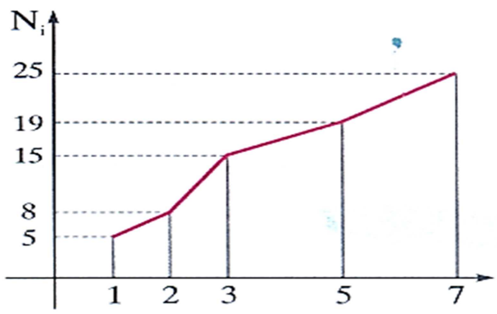


Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων ν_i.



Ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων N_i.

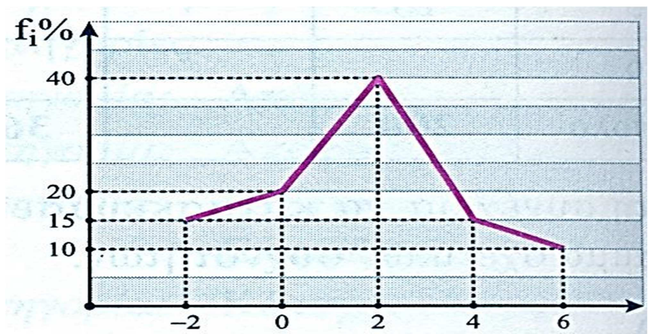
Εφαρμογή 22. Από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων, κατασκευάστε τον πίνακα κατανομής όλων των συχνοτήτων.



Λύση

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i
1	5	5	20	20	0,20	0,20
2	3	8	12	32	0,12	0,32
3	7	15	28	60	0,28	0,60
5	4	19	16	76	0,16	0,76
7	6	25	24	100	0,24	1
Σύνολο	25		100		1	

Εφαρμογή 23. Από τον πίνακα κατανομής των επί τοις εκατό σχετικών συχνοτήτων, συμπληρώστε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων (απολύτων, σχετικών επί τοις εκατό και αθροιστικών) για τις

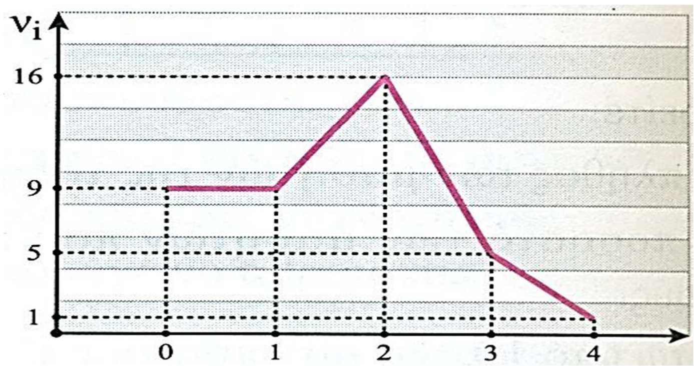


συνολικά 200 παρατηρήσεις της ποσοτικής μεταβλητής.

Λύση

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i
–2	30	15	30
0	40	20	70
2	80	40	150
4	30	15	180
6	20	10	200
Σύνολο	200	100	

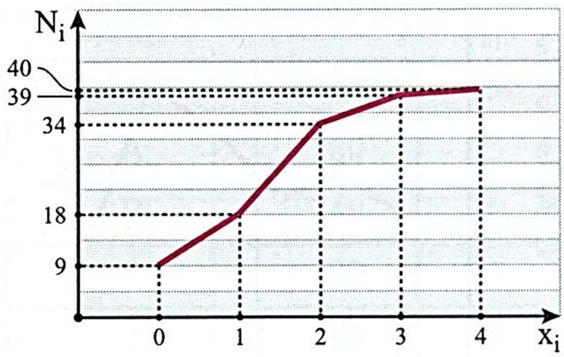
Εφαρμογή 24. Από το ακόλουθο διάγραμμα κατανομής συχνοτήτων, συμπληρώστε τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα και κατασκευάστε τα πολύγωνα αθροιστικών και αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων.



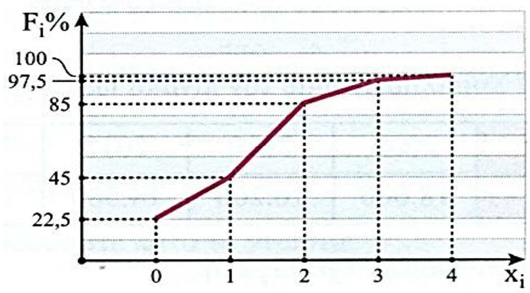
Λύση

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0	9	9	22,5	22,5
1	9	18	22,5	45
2	16	34	40	85
3	5	39	12,5	97,5
4	1	40	2,5	100
Σύνολο	40		100	

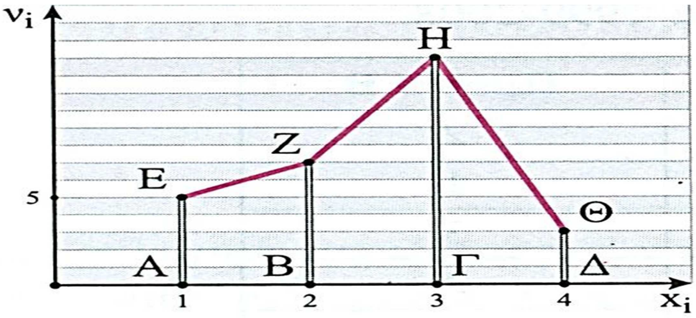
Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



Πολύγωνο αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων.



Εφαρμογή 25. Από το ακόλουθο διάγραμμα συχνοτήτων, βρείτε τις απόλυτες συχνότητες ν_2, ν_3, ν_4 αν $E_{ΑΒΖΕ}=7$, $E_{ΒΓΗΖ}=12$, $E_{ΓΔΘΗ}=9$.



Λύση. Το εμβαδό των πολυγώνων που σχηματίζονται ισούται με το εμβαδόν των αντίστοιχων τραπεζίων. Οι βάσεις των τραπεζίων ισούται με τις αντίστοιχες συχνότητες και η βάσεις τους θεωρούνται ίσες με τη μονάδα.

$$E_{ΑΒΖΕ}=7 \Leftrightarrow 1\frac{\nu_1+\nu_2}{2}=7 \Leftrightarrow \frac{5+\nu_2}{2}=7 \Leftrightarrow 5+\nu_2=14 \Leftrightarrow \nu_2=9$$

$$E_{ΒΓΗΖ}=12 \Leftrightarrow 1\frac{\nu_2+\nu_3}{2}=12 \Leftrightarrow \frac{9+\nu_3}{2}=12 \Leftrightarrow 9+\nu_3=24 \Leftrightarrow \nu_2=15$$

$$E_{ΓΔΘΗ}=9 \Leftrightarrow 1\frac{\nu_3+\nu_4}{2}=9 \Leftrightarrow \frac{15+\nu_4}{2}=9 \Leftrightarrow 15+\nu_4=18 \Leftrightarrow \nu_4=3$$

Εφαρμογή 26. Από τα πολύγωνο και ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων για μία ποσοτική μεταβλητή (πραγματική θαλάσσια υπηρεσία σε μήνες) κατασκευάστε τον πίνακα συχνοτήτων.

Λύση

Μήνες [...−...)	N_i	ν_i	f_i%
20 – 26	6	6	24
26 – 32	10	4	16
32 – 38	13	3	12
38 – 44	17	4	16
44 – 50	22	5	20
50 – 56	25	3	12
Σύνολο		25	100

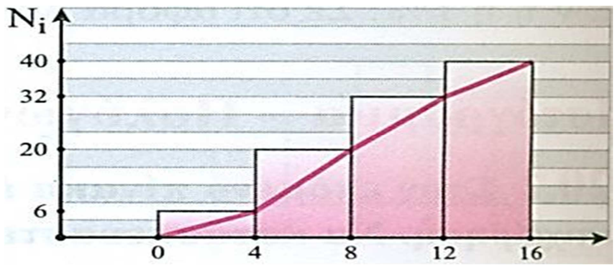
Εφαρμογή 27. Ο πίνακας παρουσιάζει την ηλικία 40 πλοίων. Κατασκευάστε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Πόσα πλοία έχουν ηλικία μικρότερη των:

(i) δύο,
(ii) έξι,
(iii) δεκατριών ετών;

Ηλικία πλοίων [...−...)	ν_i	N_i
0 – 4	6	6
4 – 8	14	20
8 – 12	12	32
12 – 16	8	40
Σύνολο	40	

Λύση

Από το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων προκύπτει το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



(i) Μικρότερη ηλικία των δύο ετών, έχουν τρία πλοία $\left(\dfrac{\nu_1}{2}=3\right)$.

(ii) Μικρότερη ηλικία των έξι ετών, έχουν δεκατρία πλοία $\left(\nu_1+\dfrac{\nu_2}{2}=6+\dfrac{14}{2}=6+7=13\right)$.

(iii) Μικρότερη ηλικία των δεκατριών ετών έχουν τα 6 πλοία της 1ης κλάσης, συν τα 14 πλοία της δεύτερης κλάσης, συν τα 12 πλοία της 3ης κλάσης, συν τα x πλοία της 4ης κλάσης.

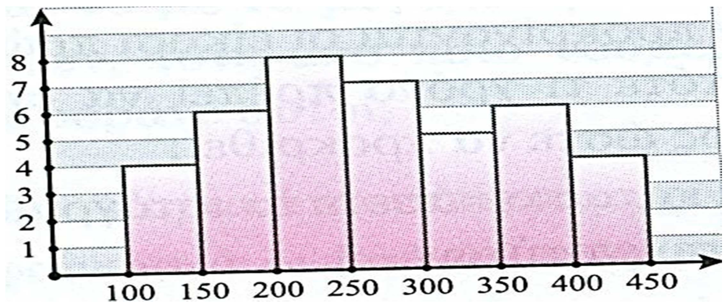
Υπολογισμός του x

Σε διάστημα πλάτους 16 – 12 αντιστοιχούν 8 πλοία.
Σε διάστημα πλάτους 13 – 12 αντιστοιχούν x πλοία.

Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν 8 πλοία.
Σε διάστημα πλάτους 1 αντιστοιχούν x πλοία. Άρα $x=2$.
Συνεπώς κάτω των 13 ετών είναι 6 + 14 + 12 + 2 = 34 πλοία.

2ος τρόπος υπολογισμού. Από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων προκύπτει ότι $\dfrac{40-y}{y-32}=\dfrac{16-13}{13-12}\Leftrightarrow\dfrac{40-y}{y-32}=3\Leftrightarrow 40-y=3(y-32)\Leftrightarrow y=34$.

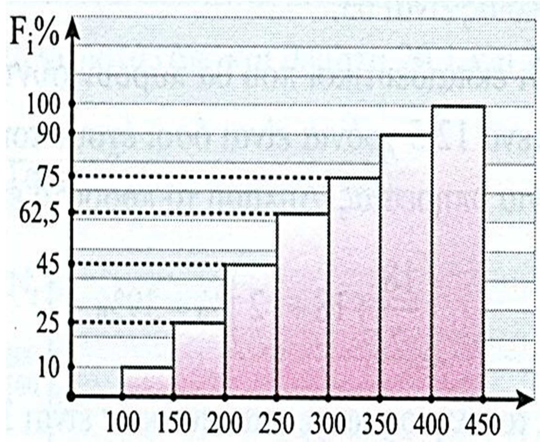
Εφαρμογή 28. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων που περιγράφει τη διάρκεια ζωής ηλεκτρικών λαμπτήρων (σε ώρες), κατασκευάστε πίνακα συχνοτήτων και ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων.
Ποιό το ποσοστό των λαμπτήρων με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών;



Λύση.

Ώρες [...–...)	ν_i	$f_i\%$	f_i	N_i	$F_i\%$	F_i
100 – 150	4	10	0,100	4	10	0,100
150 – 200	6	15	0,150	10	25	0,250
200 – 250	8	20	0,200	18	45	0,450
250 – 300	7	17,5	0,175	25	62,5	0,625
300 – 350	5	12,5	0,125	30	75	0,750
350 – 400	6	15	0,150	36	90	0,900
400 – 450	4	10	0,100	40	100	1
Σύνολο	40	100	1			

Ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων.



Πάνω από 320 ώρες ζωής έχουν οι 4 λαμπτήρες της κλάσης $[400-450)$, συν τους 6 λαμπτήρες της κλάσης $[350-400)$ συν τους x λαμπτήρες της κλάσης $[300-350)$.

Υπολογισμός x

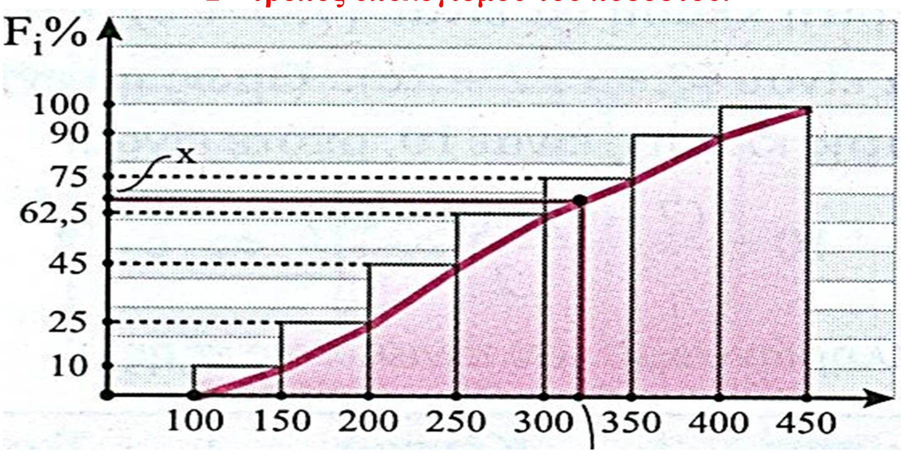
Σε διάστημα πλάτους $350-300$ αντιστοιχούν 5 λαμπτήρες.
Σε διάστημα πλάτους $320-300$ αντιστοιχούν y λαμπτήρες.

Σε διάστημα πλάτους 50 αντιστοιχούν 5 λαμπτήρες.
Σε διάστημα πλάτους 20 αντιστοιχούν y λαμπτήρες.

Άρα, $y=2$ συνεπώς, $x=3$

Οπότε 13 λαμπτήρες έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών. Αυτοί αντιστοιχούν σε ποσοστό $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}100=\frac{13}{40}100=\frac{13}{4}10=\frac{130}{4}=\frac{65}{2}=32,5$.

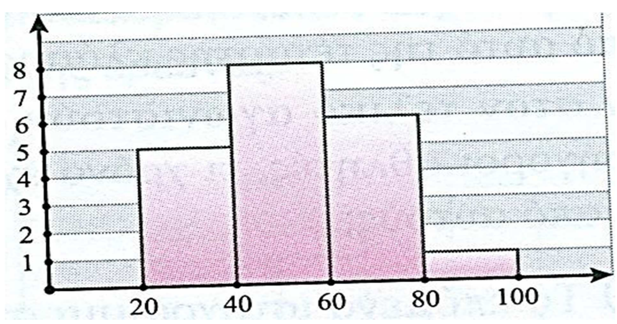
2ος τρόπος υπολογισμού του ποσοστού.



$$\frac{350-320}{320-300}=\frac{75-x}{x-62,5}\Leftrightarrow\frac{30}{20}=\frac{75-x}{x-62,5}\Leftrightarrow\frac{3}{2}=\frac{75-x}{x-62,5}\Leftrightarrow x=67,5$$

Συνεπώς, το 100–67,5= 32,5% των λαμπτήρων έχει διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 320 ωρών.

Εφαρμογή 29. Στο σχήμα φαίνονται οι βαθμοί μαθητών. Βρείτε το πλήθος των μαθητών. Πόσοι εξ΄ αυτών έλαβαν βαθμό άνω του 60;



Λύση.

Βαθμοί $[...-...)$	ν_i	N_i
$20-40$	5	5
$40-60$	8	13
$60-80$	6	19
$80-100$	1	20
Σύνολο	20	

Πάνω από 60 έλαβαν 6 + 1 = 7 μαθητές.

Εφαρμογή 30. Τα 100 πλοία ναυτιλιακής εταιρείας, έχουν ομαδοποιηθεί σε κλάσεις ίσου πλάτους. Έστω ότι στην κλάση $[12,\ 18)$ ανήκει το 30% των πλοίων.

Α. Ποιά η απόλυτη συχνότητα των πλοίων που ανήκουν στην ανωτέρω κλάση;
Β. Πόσα πλοία της κλάσης έχουν ηλικία από 17 έως 18 έτη;
Γ. Πόσα πλοία της κλάσης έχουν ηλικία μικρότερη των 16 ετών;

Δ. Ποιό το ποσοστό των πλοίων της κλάσης με ηλικίες μεταξύ 13 και 17 ετών;
Ε. Βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε στο διάστημα $[13,\ x)$ να ανήκουν 25 πλοία.

Στ. Βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε στο διάστημα $[13,\ x)$ να ανήκει το 15% όλων των πλοίων.

Λύση

Α. Το 30% των συνολικά ν=100 πλοίων είναι τα 30 πλοία της κλάσης $[12,\ 18)$.

Β. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $18-17$ αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 1 αντιστοιχούν x πλοία

Άρα $x=5$ πλοία.

Γ. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $16-12$ αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν x πλοία

Άρα $x=30\dfrac{4}{6}=20$ πλοία.

Δ. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $17-13$ αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 4 αντιστοιχούν x πλοία

Άρα $x=30\dfrac{4}{6}=20$ πλοία. Τα $\dfrac{2}{3}$ των πλοίων της κλάσης βρίσκονται μεταξύ $13-17$.

Ε. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $x-13$ αντιστοιχούν 25 πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία
Σε διάστημα πλάτους $x-13$ αντιστοιχούν 25 πλοία

Άρα, $6\cdot 25=30(x-13)\Leftrightarrow 25=5(x-13)\Leftrightarrow 5=x-13\Leftrightarrow x=18$.

Στ. Σε διάστημα πλάτους $18-12$ αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους $x-13$ αντιστοιχούν 15 πλοία

Συνεπώς Σε διάστημα πλάτους 6 αντιστοιχούν 30 πλοία

Σε διάστημα πλάτους $x-13$ αντιστοιχούν 15 πλοία

Άρα $x-13=3 \Leftrightarrow x=16$.

Εφαρμογή 31. Οι ηλικίες Δ/Ξ δίνονται στον παρακάτω στατιστικό πίνακα. Αφού συμπληρωθεί ο πίνακας, βρείτε το πλήθος και ποσοστό των πλοίων με ηλικία: Α. κάτω των 12 ετών, Β. άνω των 17,5 ετών, Γ. Τα τρία νεότερα πλοία του στόλου, είναι το πολύ έως πόσων ετών; Δ. Που κυμαίνεται η ηλικία του γηραιότερου πλοίου του στόλου; Ε. Ποιά η μέση ηλικία όλων αυτών των δεξαμενοπλοίων;

Κλάσεις	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i	Κεντρικοί όροι x_i	$x_i\nu_i$
$[0,\ 5)$	$\nu_1 = 6$							
$[5,\ 10)$	$\nu_2 = 3$							
$[10,\ 15)$	$\nu_3 = 10$							
$[15,\ 20)$	$\nu_4 = 4$							
$[20,\ 25)$	$\nu_5 = 2$							
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i =$		$\sum_{i=1}^{5} f_i\% =$		$\sum_{i=1}^{5} f_i =$			$\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i =$

Λύση

Κλάσεις	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	f_i	F_i	Κεντρικοί όροι x_i	$x_i\nu_i$
$[0,\ 5)$	$\nu_1 = 6$	$N_1 = 6$	$f_1\% = 24$	$F_1\% = 24$	$f_1 = 0{,}24$	$F_1 = 0{,}24$	$x_1 = 2{,}5$	$x_1\nu_1 = 15$
$[5,\ 10)$	$\nu_2 = 3$	$N_2 = 9$	$f_2\% = 12$	$F_2\% = 36$	$f_2 = 0{,}12$	$F_2 = 0{,}36$	$x_2 = 7{,}5$	$x_2\nu_2 = 22{,}5$
$[10,\ 15)$	$\nu_3 = 10$	$N_3 = 19$	$f_3\% = 40$	$F_3\% = 76$	$f_3 = 0{,}40$	$F_3 = 0{,}76$	$x_3 = 12{,}5$	$x_3\nu_3 = 125$
$[15,\ 20)$	$\nu_4 = 4$	$N_4 = 23$	$f_4\% = 16$	$F_4\% = 92$	$f_4 = 0{,}16$	$F_4 = 0{,}92$	$x_4 = 17{,}5$	$x_4\nu_4 = 70$
$[20,\ 25)$	$\nu_5 = 2$	$N_5 = 25$	$f_5\% = 8$	$F_5\% = 100$	$f_5 = 0{,}08$	$F_5 = 1$	$x_5 = 22{,}5$	$x_5\nu_5 = 45$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i = 25$		$\sum_{i=1}^{5} f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1$			$\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i = 277{,}5$

Α. Κάτω των 12 ετών βρίσκονται τα $\nu_1 = 6$ πλοία της κλάσης $[0,\ 5)$ συν τα $\nu_2 = 3$ πλοία της κλάσης $[5,\ 10)$ συν τα x πλοία της κλάσης $[10,\ 15)$ που θα υπολογίσουμε.

Σε διάστημα πλάτους 15 – 10 αντιστοιχούν 10 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 12 – 10 αντιστοιχούν x πλοία

Συνεπώς

Σε διάστημα πλάτους 5 αντιστοιχούν 10 πλοία
Σε διάστημα πλάτους 2 αντιστοιχούν x πλοία

Άρα $x = 4$ πλοία. Συνεπώς 6 + 3 + 4 = 13 πλοία.

Β. Άνω των 17,5 ετών βρίσκονται τα $\frac{\nu_4}{2} = 2$ πλοία της κλάσης $[15,\ 20)$ συν τα $\nu_5 = 2$ πλοία της κλάσης $[20,\ 25)$.

Γ. Τα 6 νεότερα πλοία του στόλου απαρτίζουν την κλάση $[0,\ 5)$. Συνεπώς τα 3 πιο νέα πλοία του στόλου έχουν ηλικία έως 2,5 ετών.

Δ. Τα 2 παλαιότερα του στόλου απαρτίζουν την κλάση $[20,\ 25)$. Συνεπώς το γηραιότερο πλοίο του στόλου έχει ηλικία από 22,5 έως 25 έτη.

Ε. Η μέση ηλικία όλων (και των 25) των πλοίων είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{277,5}{25} = \frac{55,5}{5} = 11,1$ έτη.

Απόλυτη συχνότητα ή συχνότητα ν_i, κατανομή συχνοτήτων, σχετική συχνότητα f_i, σχετική επί τοις εκατό συχνότητα $f_i\%$

Χαρακτηρισμός ενδεικτικού	ΑΕΝ Α΄			ΑΕΝ Β΄		
x_i	ν_i	$f_i\%$	f_i	ν_i	$f_i\%$	f_i
$x_1 =$ Μέτρια	$\nu_1 = 8$	$f_1\% = 20\%$	$f_1 = 0{,}2$	$\nu_1 = 6$	$f_1\% = 24\%$	$f_1 = 0{,}24$
$x_2 =$ Καλά	$\nu_2 = 17$	$f_2\% = 42{,}5\%$	$f_2 = 0{,}425$	$\nu_2 = 11$	$f_2\% = 44\%$	$f_2 = 0{,}44$
$x_3 =$ Πολύ καλά	$\nu_3 = 13$	$f_3\% = 32{,}5\%$	$f_3 = 0{,}325$	$\nu_3 = 7$	$f_3\% = 28\%$	$f_3 = 0{,}28$
$x_4 =$ Άριστα	$\nu_4 = 2$	$f_4\% = 5\%$	$f_4 = 0{,}05$	$\nu_4 = 1$	$f_4\% = 4\%$	$f_4 = 0{,}04$
Σύνολο	$\nu = 40$	100%	1	$\nu = 25$	100%	1

$0 \le f_i \le 1$, $\quad f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$, $\quad f_1\% + f_2\% + \ldots + f_k\% = 100\%$, $\quad f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$

Αθροιστική συχνότητα, Σχετική αθροιστική συχνότητα

Αριθμός παιδιών που έχουν 32 οικογένειες μίας συνοικίας των Αθηνών.

x_i	ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική Αθροιστική συχνότητα F_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Σχετική Αθροιστική συχνότητα F_i %
$x_1 = 0$	$\nu_1 = 4$	$N_1 = 4$	$f_1 = 0{,}125$	$F_1 = 0{,}125$	$f_1\% = 12{,}5\%$	$F_1\% = 12{,}5\%$
$x_2 = 1$	$\nu_2 = 6$	$N_2 = 10$	$f_2 = 0{,}1875$	$F_2 = 0{,}3125$	$f_2\% = 18{,}75\%$	$F_2\% = 31{,}25\%$
$x_3 = 2$	$\nu_3 = 10$	$N_3 = 20$	$f_3 = 0{,}3125$	$F_3 = 0{,}625$	$f_3\% = 31{,}25\%$	$F_3\% = 62{,}5\%$
$x_4 = 3$	$\nu_4 = 6$	$N_4 = 26$	$f_4 = 0{,}1875$	$F_4 = 0{,}8125$	$f_4\% = 18{,}75\%$	$F_4\% = 81{,}25\%$
$x_5 = 4$	$\nu_5 = 4$	$N_5 = 30$	$f_5 = 0{,}125$	$F_5 = 0{,}9375$	$f_5\% = 12{,}5\%$	$F_5\% = 93{,}75\%$
$x_6 = 5$	$\nu_6 = 2$	$N_6 = 32$	$f_6 = 2/32$	$F_6 = 1$	$f_6\% = 6{,}25\%$	$F_6\% = 100\%$
	$\nu = 32$		1		100%	

Εφαρμογή 32. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας που δείχνει το πλήθος των απορριφθέντων σπουδαστών.

Μαθήματα x_i	ν_i	$f_i\%$
Μαθηματικά	6	….
Φυσική	…	5
Ναυτιλία	8	…
ΝΗΟ	8	…
Ραντάρ	10	25
Ν. Μετεωρολογία	…	…
	…	…

Μαθήματα x_i	ν_i	$f_i\%$
Μαθηματικά	6	**15**
Φυσική	**2**	5
Ναυτιλία	8	**20**
ΝΗΟ	8	**20**
Ραντάρ	10	25
Ν. Μετεωρολογία	**6**	**15**
	40	**100**

Παράδειγμα.

Τέρματα x_i	Πλήθος ομάδων ν_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 0$	$\nu_1 =$	$\nu_1 x_1 = 0$
$x_2 = 1$	$\nu_2 =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 2$	$\nu_3 =$	$\nu_3 x_3 =$
$x_4 = 3$	$\nu_4 =$	$\nu_4 x_4 =$
$x_5 = 4$	$\nu_5 =$	$\nu_5 x_5 =$
$x_6 = 5$	$\nu_6 =$	$\nu_6 x_6 =$

Ο μέσος αριθμός τερμάτων ανά ομάδα είναι

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4 + \nu_5 x_5 + \nu_6 x_6}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} \nu_i x_i}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6}$$

Παράδειγμα.

Εισόδημα (σε χιλιάδες €)	Πλήθος οικογενειών
$x_1 = 3$	$\nu_1 = 1$
$x_2 = 17$	$\nu_2 = 1$

Εισόδημα (σε χιλιάδες €)	Πλήθος οικογενειών
$x_1 = 9$	$\nu_1 = 1$
$x_2 = 11$	$\nu_2 = 1$

Και στις δύο περιπτώσεις είναι $\bar{x} = 10$.

$$\frac{(3-10)+(17-10)}{2} = \frac{-7+7}{2} = 0$$

Μέση απόλυτη απόκλιση e.

$$e = \frac{|3-10|+|17-10|}{2} = \frac{7+7}{2} = 7 \qquad e = \frac{|9-10|+|11-10|}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Διακύμανση ή Διασπορά

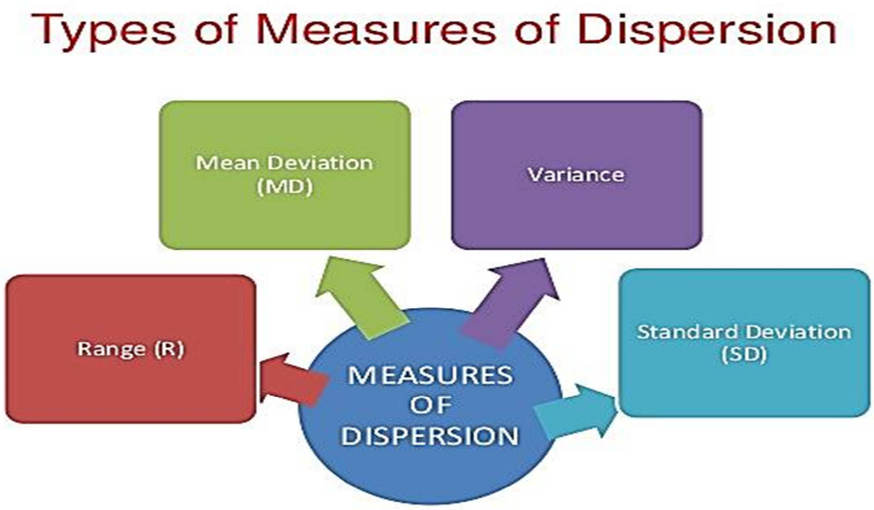
$$s^2 = \frac{(3-10)^2+(17-10)^2}{2} = \frac{49+49}{2} = 49$$

$$s^2 = \frac{(9-10)^2+(11-10)^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$s^2 = \frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_\nu-\bar{x}\right)^2}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\nu}$$

Για ομαδοποιημένα δεδομένα είναι

$$s^2 = \frac{\nu_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\nu_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\nu_k\left(x_k-\bar{x}\right)^2}{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\nu}$$



Διακύμανση ή διασπορά (Variance)

Διακύμανση ή διασπορά (S^2) των παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu$ ονομάζεται ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων x_i από τη μέση τιμή $\bar{x}$. Δηλαδή $S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$. Είναι το πιο σημαντικό μέτρο διασποράς.

• Αν έχουμε λίγες παρατηρήσεις και η μέση τιμή είναι ακέραιος, χρησιμοποιούμε τον τύπο: $S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$.

Εφαρμογή 33. Βρείτε τη διασπορά των παρατηρήσεων: 2, 5, 8, 11, 14.

$$\bar{x} = \frac{2+5+8+11+14}{5} = 8$$

$$S^2 = \frac{1}{5}\left[(2-8)^2 + (5-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2 + (14-8)^2\right] =$$

$$\frac{1}{5}\left[(-6)^2 + (-3)^2 + (0)^2 + (3)^2 + (6)^2\right] = 18$$

• Αν έχουμε λίγες παρατηρήσεις και η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος, χρησιμοποιούμε τον τύπο: $S^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu^2} = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$.

Απόδειξη

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{\nu}\sum\left(x_i^{\,2}-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)=\frac{1}{\nu}\left(\sum x_i^{\,2}-\sum 2x_i\bar{x}+\sum \bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{\nu}\left(\sum x_i^{\,2}-2\bar{x}\sum x_i+\nu\bar{x}^2\right)=\frac{1}{\nu}\left(\sum x_i^{\,2}-2\frac{\sum x_i}{\nu}\sum x_i+\nu\frac{\sum x_i}{\nu}\frac{\sum x_i}{\nu}\right)$$

$$=\frac{1}{\nu}\left(\sum x_i^{\,2}-2\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{\nu}+\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{\nu}\right)=\frac{1}{\nu}\left(\sum x_i^{\,2}-\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{\nu}\right)$$

Εφαρμογή 34. Βρείτε τη διασπορά των παρατηρήσεων $t_1=1,\ t_2=3,\ t_3=4,\ t_4=5,\ t_5=6$.

Είναι $\sum_{i=1}^{\nu} t_i=1+3+4+5+6=19$ & $t_1^{\,2}=1,\ t_2^{\,2}=9,\ t_3^{\,2}=16,\ t_4^{\,2}=25,\ t_5^{\,2}=36$. Άρα

$\sum_{i=1}^{\nu} t_i^{\,2}=1+9+16+25+36=87$. Άρα $S^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{1}{5}\left(87-\frac{19^2}{5}\right)=2{,}96$.

Δηλαδή είναι $s^2=\overline{x^2}-\left(\bar{x}\right)^2=\frac{87}{5}-\left(\frac{19}{5}\right)^2=2{,}96$.

- Αν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα χρησιμοποιούμε τον τύπο: $S^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^{\,2}\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^{\,2}\nu_i}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i\right)^2}{\nu^2}=\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^{\,2}\nu_i}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\nu}\right)^2$.

Στην περίπτωση των ομαδοποιημένων δεδομένων τη θέση των x_i παίρνουν τα κέντρα των κλάσεων.

Απόδειξη

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i\left(x_i^{\,2}-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i^{\,2}-\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i 2x_i\bar{x}+\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i\bar{x}^2$$

$$=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i^{\,2}-\frac{2\bar{x}}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i+\frac{\bar{x}^2}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i==\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i^{\,2}-\frac{2\bar{x}}{\cancel{\nu}}\cancel{\nu}\bar{x}+\frac{\bar{x}^2}{\cancel{\nu}}\cancel{\nu}$$

$$=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i^{\,2}-2\bar{x}^2+\bar{x}^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i^{\,2}-\bar{x}^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}x_i^{\,2}\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\nu_i\right)^2}{\nu^2}=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i^{\,2}\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$$

Εφαρμογή 35. Βρείτε τη διασπορά των παρατηρήσεων για τα δεδομένα του παρακάτω στατιστικού πίνακα:

x_i	ν_i
2	3
3	2
5	4
6	1
Σύνολο	10

Για πρακτικούς λόγους κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

x_i	ν_i	x_i^2	$x_i^2\nu_i$	$x_i\nu_i$
2	3	4	12	6
3	2	9	18	6
5	4	25	100	20
6	1	36	36	6
Σύνολο	10		$\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i = 166$	$\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i = 38$

Με αντικατάσταση προκύπτει $S^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right] = \frac{1}{10}\left[166 - \frac{38^2}{10}\right] = 2{,}16$.

Δηλαδή $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\nu}\right)^2 = \frac{166}{10} - \left(\frac{38}{10}\right)^2 = 2{,}16$.

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις.	Χρειάζονται πολύ περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό παρά στα άλλα μέτρα.
Έχουν μεγάλη εφαρμογή.	Η διασπορά δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό, κάτι το οποίο παύει να ισχύει όταν χρησιμοποιήσουμε την τυπική απόκλιση.
Σε κανονικούς πληθυσμούς το 68%, 95%, 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκονται στα $\left(\overline{x}-s,\ \overline{x}+s\right)$, $\left(\overline{x}-2s,\ \overline{x}+2s\right)$ $\left(\overline{x}-3s,\ \overline{x}+3s\right)$ διαστήματα αντίστοιχα.	

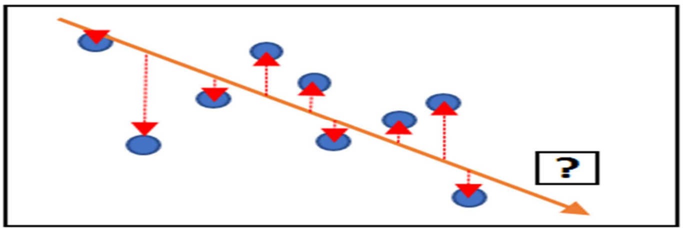
Παρατηρήσεις

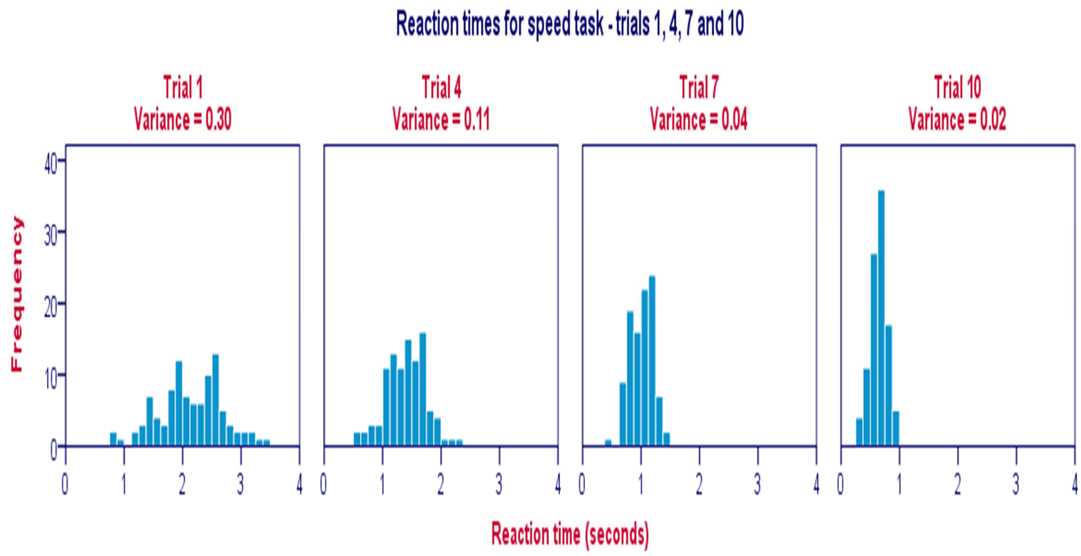
• Έστω μεταβλητή που παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5. Είναι $\overline{x} = 3$, $s^2 = 2{,}5$. Αν οι αρχικές τιμές της μεταβλητής πολλαπλασιασθούν με μία σταθερά a, έστω $a = 10$, οι νέες τιμές γίνονται 10, 20, 30, 40, 50 και είναι $\overline{x} = 30$, $s^2 = 250$. Δηλαδή ο μέσος όρος πολλαπλασιάσθηκε επί τη σταθερά $a = 10$, ενώ η διασπορά πολλαπλασιάσθηκε επί $a^2 = 100$.

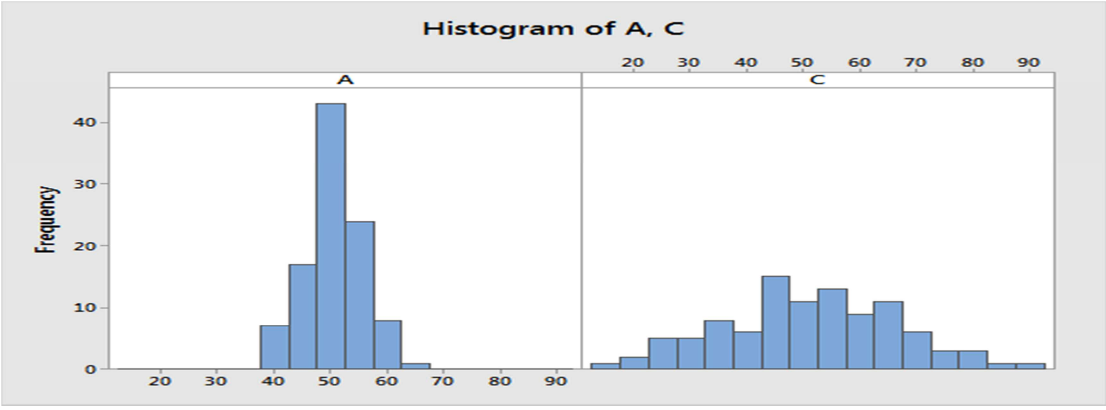
• Εξετάζομε τους δευτεροετείς σπουδαστές ως προς τον αριθμό των σελίδων μαθηματικών που μελέτησαν την προηγούμενη εβδομάδα. Έστω ότι τα μέτρα θέσης είναι: $\overline{x},\ \mathrm{M}_0,\ \delta,\ P_{70}$. Έστω ότι τα μέτρα διασποράς είναι: $s,\ Q$. Αν όλοι οι σπουδαστές μελετήσουν επιπλέον 100 σελίδες, τα νέα μέτρα θέσης και διασποράς είναι: $\overline{x}' = \overline{x} + 100$, $s' = s$, $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + 100$, $\delta' = \delta + 100$, $Q' = Q$, $P_{70}{}' = P_{70} + 100$.

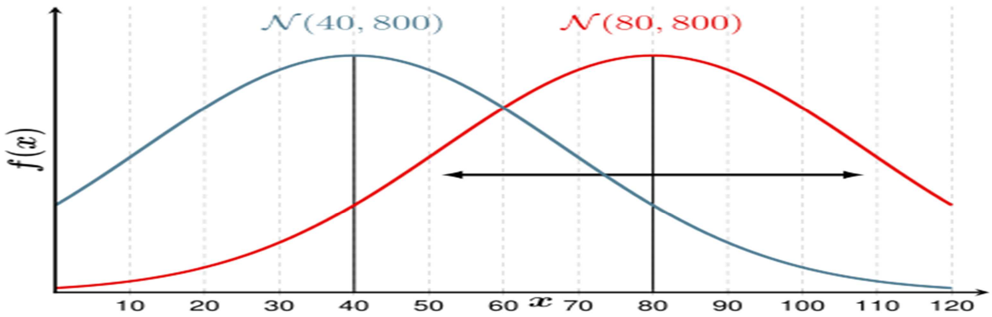
• Γενικά ισχύουν τα παρακάτω:

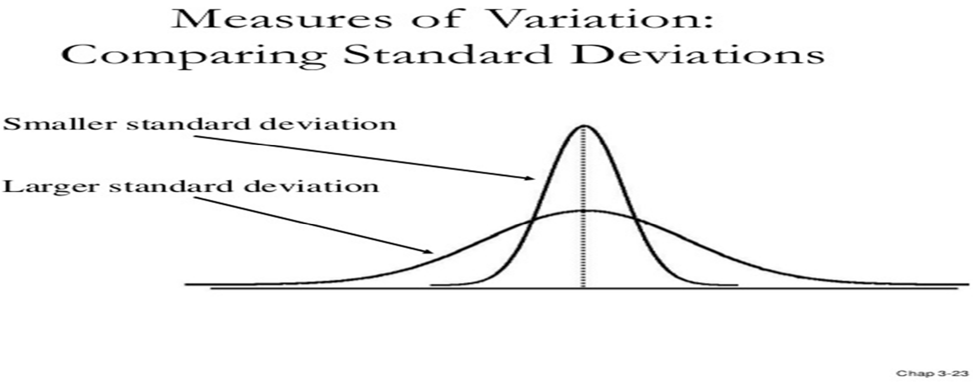
x_1	x_2	x_3	$\overline{x}$	s^2	s	M_0	δ	Q	P_{70}
x_1+c	x_2+c	x_3+c	$\overline{x}+c$	s^2	s	M_0+c	$\delta+c$	Q	$P_{70}+100$
kx_1	kx_2	kx_3	$k\overline{x}$	k^2s^2	$\lvert k\rvert s$		$k\delta$		











Εφαρμογή 36. Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς της παρακάτω κατανομής των βαθμών που έλαβε σπουδαστής σε 20 μαθήματα, αφού πρώτα συμπληρώσετε τον πίνακα.

Βαθμοί Μαθημάτων $[...-...)$	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
$0-2$	$x_1=1$	$\nu_1=4$	$x_1\nu_1=$
$2-4$	$x_2=3$	$\nu_2=10$	$x_2\nu_2=$
$4-6$	$x_3=5$	$\nu_3=3$	$x_3\nu_3=$
$6-8$	$x_4=7$	$\nu_4=2$	$x_4\nu_4=$
$8-10$	$x_5=9$	$\nu_5=1$	$x_5\nu_5=$
Σύνολο		$\nu=\sum_{i=1}^{5}\nu_i=$	$\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i=$

Λύση.

Βαθμοί Μαθημάτων $[\ldots-\ldots)$	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
$0-2$	$x_1=1$	$\nu_1=4$	$x_1\nu_1=4$
$2-4$	$x_2=3$	$\nu_2=10$	$x_2\nu_2=30$
$4-6$	$x_3=5$	$\nu_3=3$	$x_3\nu_3=15$
$6-8$	$x_4=7$	$\nu_4=2$	$x_4\nu_4=14$
$8-10$	$x_5=9$	$\nu_5=1$	$x_5\nu_5=9$
Σύνολο		$\nu=\sum_{i=1}^{5}\nu_i=20$	$\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i=72$

$R=10-0=10$ $\quad\quad$ $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{72}{20}=\dfrac{36}{10}=3,6$

Η διάμεσος κυμαίνεται μεταξύ 3 και 4.

Επικρατούσα κλάση είναι η 2 – 4.

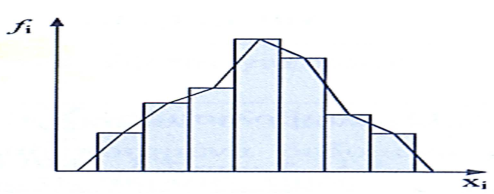
$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_i}{\nu}=\frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_1+\left(x_2-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_2+\left(x_3-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_3+\left(x_4-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_4+\left(x_5-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_5}{\nu}=$$

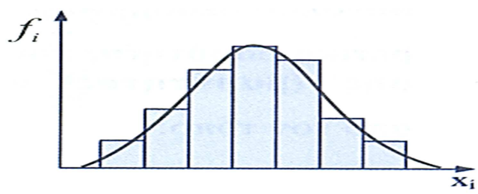
$$\frac{(1-3,6)^2\cdot4+(3-3,6)^2\cdot10+(5-3,6)^2\cdot3+(7-3,6)^2\cdot2+(9-3,6)^2\cdot1}{20}=$$

$$\frac{2,6^2\cdot4+0,36\cdot10+1,4^2\cdot3+(3,4)^2\cdot2+5,4^2}{20}=\ldots$$

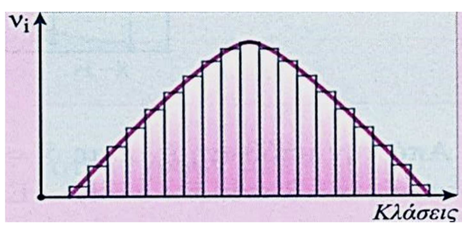
Τυπική απόκλιση (Standard deviation)

Τυπική απόκλιση (S) ονομάζεται η **θετική** τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης ή διασποράς (variance). Δηλαδή $S=\sqrt{S^2}$. Εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες που εκφράζονται και οι παρατηρήσεις. Έστω η συνεχής μεταβλητή X ενός πληθυσμού. Χωρίζεται το δείγμα σε μεγάλο αριθμό κλάσεων, πολύ μικρού πλάτους η κάθε μία. Παρατηρούμε ότι το πολύγωνο συχνοτήτων τείνει να γίνει ομαλή καμπύλη που ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**.

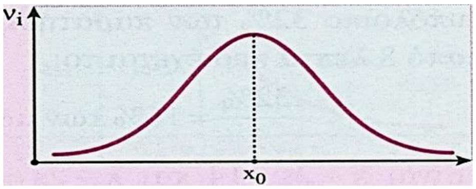




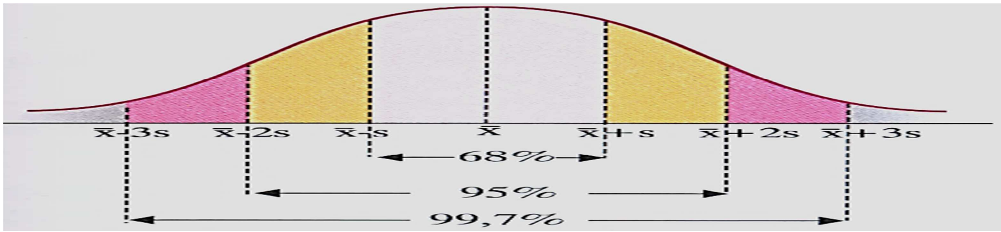
Καμπύλη συχνοτήτων (Frequency curve) είναι η μορφή που θα έπαιρνε ένα πολύγωνο συχνοτήτων, αν το πλήθος των κλάσεων ήταν πολύ μεγάλο και το πλάτος τους πολύ μικρό.

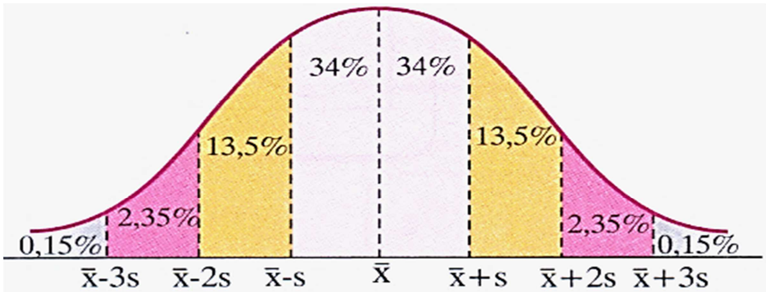


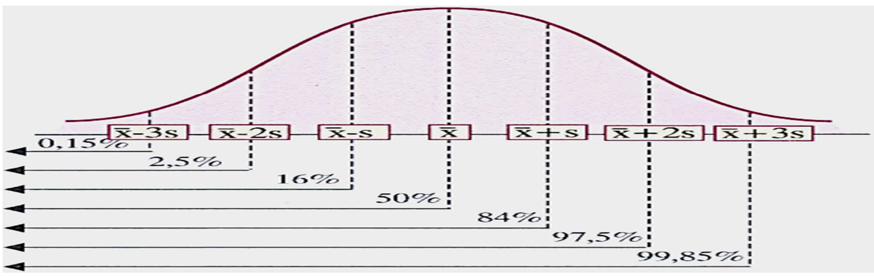
Όταν η καμπύλη συχνοτήτων λάβει τη μορφή του διπλανού σχήματος, η κατανομή συχνοτήτων ονομάζεται **κανονική**. Δηλαδή η μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή (Normal distribution). Αν η καμπύλη συχνοτήτων, για το χαρακτηριστικό που εξετάσαμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

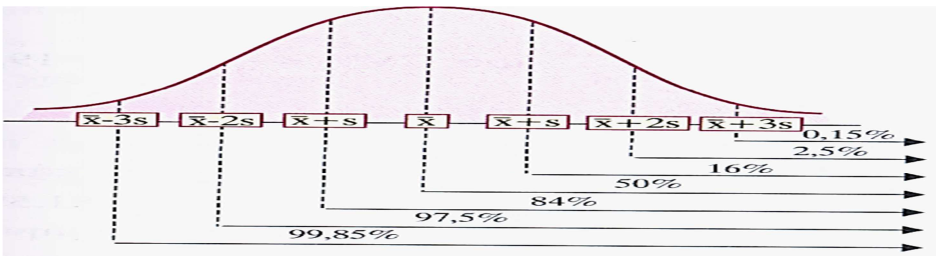


- Το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s\right)$.
- Το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s\right)$.
- Το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s\right)$.
- Το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6 \cdot s$.



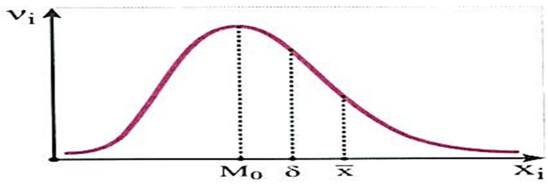




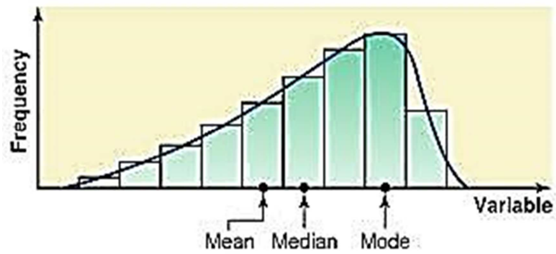


Στην κανονική κατανομή, ισχύουν $\bar{x} = \delta$ δηλαδή η μέση τιμή συμπίπτει με τη διάμεσο και $R \cong 6s$, δηλαδή το εύρος είναι περίπου εξαπλάσιο της τυπικής απόκλισης. Αν M_0 η επικρατούσα τιμή, τότε είναι $M_0 = \bar{x} = \delta$.

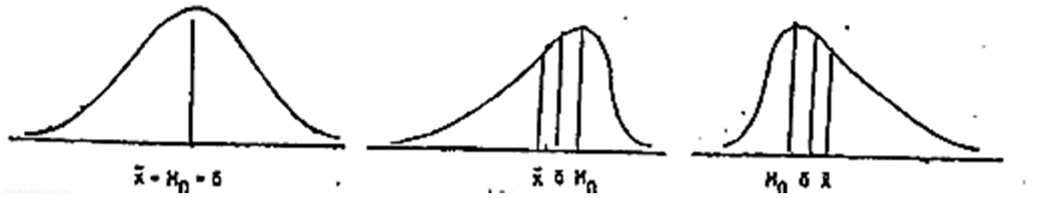
Αν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, έχουμε ασύμμετρη κατανομή. Αν η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία ισχύει ότι $M_0 < \delta < \bar{x}$.



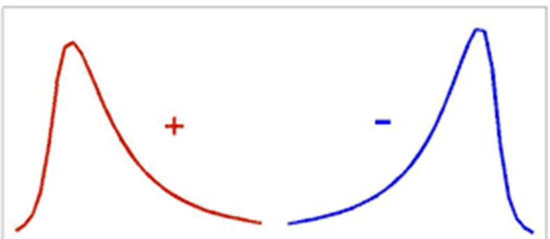
Αν η κατανομή παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία ισχύει ότι $\bar{x} < \delta < M_0$.



Η σχέση μέσης τιμής, διαμέσου και επικρατούσας τιμής στις διάφορες καμπύλες συχνοτήτων είναι:



Χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων.



Συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας (coefficient of variation)

Όταν μελετάμε δύο δείγματα ως προς την ίδια μεταβλητή, παρουσιάζονται διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους θέσης και διασποράς. Η μέση τιμή των υψών των ναυτικών εταιρείας Α είναι $\bar{x} = 160\ cm$ και η τυπική απόκλιση είναι $s = 5\ cm$. Οι αντίστοιχες τιμές για τους ναυτικούς της εταιρείας Β είναι $\bar{x} = 180\ cm$ και $s = 5\ cm$. Προφανώς οι δύο πληθυσμοί, δεν παρουσιάζουν τον ίδιο βαθμό μεταβλητότητας.

Υπάρχει περίπτωση να μετράμε τους δύο πληθυσμούς σε διαφορετικές μονάδες ή κλίμακες. Οι φοιτητές ελληνικού ΑΕΙ (κλίμακα βαθμολογίας 0–10) εξεταζόμενοι ως προς την επίδοση τους στη στατιστική, παρουσιάζουν μέση τιμή $\bar{x} = 7$ και τυπική απόκλιση $s = 2$. Οι φοιτητές ΑΕΙ της αλλοδαπής (κλίμακα βαθμολογίας 0–100) εξεταζόμενοι ως προς την επίδοση τους στη στατιστική, παρουσιάζουν μέση τιμή $\bar{x}=65$ και τυπική απόκλιση $s=20$. Λόγω της διαφορετικής κλίμακας δεν είναι δυνατό να συγκριθούν τα ανωτέρω δύο δείγματα. Προκειμένου να ξεπερασθεί η δυσκολία αυτή, χρησιμοποιείται ο συντελεστής μεταβολής. Ο συντελεστής μεταβολής δίνεται από τον τύπο $\mathrm{CV}=\frac{s}{|\bar{x}|}$ ή αν εκφράζεται ως ποσοστό, δίνεται από τον τύπο $\mathrm{CV}\%=\frac{s}{|\bar{x}|}\%$. Ακριβέστερα ορίζεται ως $cv=\frac{\sigma}{\mu}$ για πληθυσμό και ως $cv=\frac{s}{\bar{x}}$ για δείγμα. Χρησιμοποιείται για τη σύγκριση της μεταβλητότητας δύο ή περισσοτέρων ομάδων τιμών (κατανομών) που εκφράζονται σε διαφορετική μονάδα μέτρησης. Ουσιαστικά μετρά την ομοιογένεια του πληθυσμού. Αν η τιμή του είναι κάτω από το 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής. Είναι δηλαδή μέτρο σχετικής μεταβλητότητας. Μέτρα απόλυτης μεταβλητότητας είναι τα $R,\ Q,\ \sigma,\ \sigma^2$.

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού.	Δεν ενδείκνυται αν η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν.
Χρησιμοποιείται ακόμα και σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.	
Είναι καθαρός αριθμός.	

Εφαρμογή 37. Η τιμή της μετοχής της εταιρείας Α είχε μέση τιμή 5.000 δρχ. και τυπική απόκλιση 1.000 δρχ. Οι αντίστοιχες τιμές για τη Β εταιρεία ήταν 12.000 δρχ. και 4.000 δρχ. αντίστοιχα. Ποιά μετοχή είχε περισσότερη μεταβλητότητα;
$cv_{\mathrm{A}}=\frac{1.000}{5.000}100=20\ \%$ $\quad cv_{\mathrm{B}}=\frac{4.000}{12.000}100=33,\bar{3}\ \%$

Παρατηρήσεις

- Ο CV αποτελεί μέτρο διασποράς. Εκφράζει την τυπική απόκλιση στο ποσοστό της μέσης τιμής $\bar{x}$.
- Ο CV εκφράζεται επί τοις εκατό (%) και είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.
- Ο CV είναι αξιόπιστο μέτρο μόνο αν η μέση τιμή $\bar{x}$ δεν λαμβάνει τιμές κοντά στο μηδέν.
- **Ομοιογενές** ονομάζεται το δείγμα αν ο CV είναι μικρότερος ή ίσος του 10% .
- Αν ισχύει ότι $s>|\bar{x}|$ τότε ο CV λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας.
- Μεταξύ δύο δειγμάτων αυτό που έχει μικρότερο συντελεστή μεταβολής έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.
- Μεταξύ δύο δειγμάτων που έχουν την ίδια διασπορά, αυτό που έχει μεγαλύτερη μέση τιμή $\bar{x}$, θα έχει μικρότερο συντελεστή μεταβολής.
- Όσο πιο μεγάλη διασπορά έχει ένα δείγμα, τόσο μικρότερη είναι η ομοιογένεια του και αντίστροφά.

Εφαρμογή 38. Το μέσο πλήθος των υπαλλήλων 30 ναυτιλιακών εταιρειών με έδρα τον Πειραιά που ενδεικτικά εξετάσθηκαν είναι $\overline{x_{\Pi}} = 50$ με $s_{\Pi} = 7$. Αντιστοίχως για 20 ναυτιλιακές εταιρείες με έδρα το Λονδίνο που ενδεικτικά εξετάσθηκαν είναι $\overline{x_{\Lambda}} = 75$ με $s_{\Lambda} = 7$. Αφού υπολογίσετε τους συντελεστές μεταβολής των δύο δειγμάτων, εξετάστε τα ως προς την ομοιογένεια τους.

Λύση

$CV_{\Pi} = \dfrac{s_{\Pi}}{\overline{x_{\Pi}}} = \dfrac{7}{50} = \dfrac{14}{100} = 0,14$ $\quad CV_{\Pi} = 14\%$ όχι ομοιογενές το δείγμα

$CV_{\Lambda} = \dfrac{s_{\Lambda}}{\overline{x_{\Lambda}}} = \dfrac{7}{75} = 0,093$ $\quad CV_{\Lambda} = 9,3\%$ ομοιογενές το δείγμα

$CV_{\Lambda} < CV_{\Pi}$

Εφαρμογή 39. Έστω κανονική κατανομή $N\left(\overline{x},\, s^2\right) = N(30,\, 25)$ με $\overline{x} = 30$, $s = 5$. Ποιά ποσοστά των παρατηρήσεων ανήκουν στα διαστήματα: $(25,\, 35)$, $(20,\, 40)$, $(15,\, 45)$; Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Λύση

	$\overline{x}-3s$	$\overline{x}-2s$	$\overline{x}-s$	$\overline{x}$	$\overline{x}+s$	$\overline{x}+2s$	$\overline{x}+3s$
	15	20	25	30	35	40	45
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%

Στο διάστημα $(25,\, 35) = \left(\overline{x}-s,\, \overline{x}+s\right)$ ανήκει το 68% των παρατηρήσεων.

Στο διάστημα $(20,\, 40) = \left(\overline{x}-2s,\, \overline{x}+2s\right)$ ανήκει το 95% των παρατηρήσεων.

Στο διάστημα $(15,\, 45) = \left(\overline{x}-3s,\, \overline{x}+3s\right)$ ανήκει το 99,7% των παρατηρήσεων.

Είναι $CV = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{10}$. Συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Εφαρμογή 40. Έστω ότι οι θερμοκρασίες που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μηχανής, κατά τη λειτουργία της, είναι πάντα μεγαλύτερες από $0^o C$ και ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση θερμοκρασία $100^o C$ και $CV = 10\%$. Υπολογίστε το ποσοστό επί των ωρών λειτουργίας της μηχανής που η αναπτυσσόμενη θερμοκρασία στο εσωτερικό της είναι:

• μικρότερη των $80^o C$, • μεγαλύτερη των $130^o C$, • μεταξύ των $110^o C$ και $120^o C$.

Λύση

Είναι $\left.\begin{array}{l} CV = 10\% = \dfrac{10}{100} \\ CV = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{s}{100} \end{array}\right\} \dfrac{s}{100} = \dfrac{10}{100} \Rightarrow s = 10$

	$\bar{x}-3s$	$\bar{x}-2s$	$\bar{x}-s$	$\bar{x}$	$\bar{x}+s$	$\bar{x}+2s$	$\bar{x}+3s$	
	70	80	90	100	110	120	130	
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%	

Μικρότερη των $80^{o}C$ είναι η θερμοκρασία κατά το 0,15 + 2,35 = 2,5% των ωρών λειτουργίας της μηχανής. Μεγαλύτερη των $130^{o}C$ είναι η θερμοκρασία κατά το 0,15% των ωρών λειτουργίας της μηχανής. Μεταξύ των $110^{o}C$ και $120^{o}C$ είναι η θερμοκρασία κατά το 13,5% των ωρών λειτουργίας της μηχανής.

Εφαρμογή 41. Ο χρόνος αναμονής πολιτών έως ότου εξυπηρετηθούν σε μία δημόσια υπηρεσία, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 5΄ και τυπική απόκλιση 1΄. Υπολογίστε, κατά προσέγγιση, το ποσοστό πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο: • από 4΄ έως 6΄ • από 3΄ έως 6΄. Υπολογίστε διάμεσο και εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής πολιτών. Υπολογίστε συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

Λύση

	$\bar{x}-3s$	$\bar{x}-2s$	$\bar{x}-s$	$\bar{x}$	$\bar{x}+s$	$\bar{x}+2s$	$\bar{x}+3s$	
	2	3	4	5	6	7	8	
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%	

Από 4 έως 6 λεπτά είναι ο χρόνος που χρειάζεται ώστε να εξυπηρετηθεί το 68% των πολιτών. Από 3 έως 6 λεπτά είναι ο χρόνος που χρειάζεται ώστε να εξυπηρετηθεί το 68 + 13,5 = 81,5 % των πολιτών. Διάμεσος $\delta = 5'$, εύρος $R = 6s = 6'$. Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$ ή $CV = 20\%$.

Εφαρμογή 42. Η ωριαία αποζημίωση (σε £) των υπαλλήλων δικηγορικής εταιρείας δίνεται από τον παρακάτω στατιστικό πίνακα. Αφού τον συμπληρώσετε, υπολογίστε τη μέση ωριαία αποζημίωση και τα μέτρα διασποράς.

Αμοιβή σε £ [...−...)	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	x_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
20 – 30	$F_1\% = 20\ \%$	$f_1\% =$	$f_1 =$	$x_1 =$	$x_1 f_1 =$	$x_1^2 =$	$x_1^2 f_1 =$
30 – 40	$F_2\% = 45\ \%$	$f_2\% =$	$f_2 =$	$x_2 =$	$x_2 f_2 =$	$x_2^2 =$	$x_2^2 f_2 =$
40 – 50	$F_3\% = 85\ \%$	$f_3\% =$	$f_3 =$	$x_3 =$	$x_3 f_3 =$	$x_3^2 =$	$x_3^2 f_3 =$
50 – 60	$F_4\% = 95\ \%$	$f_4\% =$	$f_4 =$	$x_4 =$	$x_4 f_4 =$	$x_4^2 =$	$x_4^2 f_4 =$
60 – 70	$F_5\% = 100\ \%$	$f_5\% =$	$f_5 =$	$x_5 =$	$x_5 f_5 =$	$x_5^2 =$	$x_5^2 f_5 =$
Σύνολο		$\sum_{i=1}^{5} f_i\% =$	$\sum_{i=1}^{5} f_i =$		$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i =$		$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i =$

Λύση

Αμοιβή σε £ [...−...)	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	x_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
20 – 30	$F_1\% = 20\ \%$	$f_1\% = 20\ \%$	$f_1 = 0{,}20$	$x_1 = 25$	$x_1 f_1 = 5$	$x_1^2 = 625$	$x_1^2 f_1 = 625 \cdot 0{,}2 = 62{,}5 \cdot 2$
30 – 40	$F_2\% = 45\ \%$	$f_2\% = 25\ \%$	$f_2 = 0{,}25$	$x_2 = 35$	$x_2 f_2 = 8{,}75$	$x_2^2 = 35^2$	$x_2^2 f_2 = 35^2 \cdot 0{,}25$
40 – 50	$F_3\% = 85\ \%$	$f_3\% = 40\ \%$	$f_3 = 0{,}40$	$x_3 = 45$	$x_3 f_3 = 18$	$x_3^2 = 45^2$	$x_3^2 f_3 = 45^2 \cdot 0{,}4$
50 – 60	$F_4\% = 95\ \%$	$f_4\% = 10\ \%$	$f_4 = 0{,}10$	$x_4 = 55$	$x_4 f_4 = 5{,}5$	$x_4^2 = 55^2$	$x_4^2 f_4 = 55^2 \cdot 0{,}1$
60 – 70	$F_5\% = 100\ \%$	$f_5\% = 5\ \%$	$f_5 = 0{,}05$	$x_5 = 65$	$x_5 f_5 = 3{,}25$	$x_5^2 = 65^2$	$x_5^2 f_5 = 65^2 \cdot 0{,}05$
Σύνολο		$\sum_{i=1}^{5} f_i\% = 100$	$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1$		$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 40{,}5$		$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i =$

$R = 70 - 20 = 50$ $\quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 40{,}5$ £ $\quad s^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i - \left(\bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i - 40{,}5^2 = \ldots$ $\quad CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{s}{40{,}5} = \ldots$

Εφαρμογή 43. Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς για την ακόλουθη κατανομή βαθμών 20 μαθημάτων.

Κλάσεις [...−...)	ν_i	x_i	$x_i\nu_i$	x_i^2	f_i	$x_i^2 f_i$
0 − 2	$\nu_1 = 4$					$x_1^2 f_1 =$
2 − 4	$\nu_2 = 5$					$x_2^2 f_2 =$
4 − 6	$\nu_3 = 2$					$x_3^2 f_3 =$
6 − 8	$\nu_4 = 5$					$x_4^2 f_4 =$
8 − 10	$\nu_5 = 4$					$x_5^2 f_5 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i =$		$\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i =$		$\sum_{i=1}^{5} f_i =$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i =$

Λύση

Εύρος $R = 10 - 0 = 10$,

Μέση τιμή $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i}{\nu} = \dfrac{100}{20} = 5$,

Διασπορά $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i - 5^2 = 33,4 - 25 = 8,4$

Τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8,4} = 2,9$

Κλάσεις [...−...)	ν_i	x_i	$x_i\nu_i$	x_i^2	f_i	$x_i^2 f_i$
0 − 2	$\nu_1 = 4$	$x_1 = 1$	$x_1\nu_1 = 4$	$x_1^2 = 1$	$f_1 = 0,2$	$x_1^2 f_1 = 0,2$
2 − 4	$\nu_2 = 5$	$x_2 = 3$	$x_2\nu_2 = 15$	$x_2^2 = 9$	$f_2 = 0,25$	$x_2^2 f_2 = 2,25$
4 − 6	$\nu_3 = 2$	$x_3 = 5$	$x_3\nu_3 = 10$	$x_3^2 = 25$	$f_3 = 0,1$	$x_3^2 f_3 = 2,5$
6 − 8	$\nu_4 = 5$	$x_4 = 7$	$x_4\nu_4 = 35$	$x_4^2 = 49$	$f_4 = 0,25$	$x_4^2 f_4 = 12,25$
8 − 10	$\nu_5 = 4$	$x_5 = 9$	$x_5\nu_5 = 36$	$x_5^2 = 81$	$f_5 = 0,2$	$x_5^2 f_5 = 16,2$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i = 20$		$\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i = 100$		$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i = 33,4$

Συντελεστής μεταβολής

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,9}{5} = \frac{5,8}{10} = 0,58$$

Άρα, $CV\% = 58\%$. Όχι ομοιογενές.

Εφαρμογή 44. Για την ακόλουθη κατανομή του βάρους 40 containers, βρείτε επικρατούσα τιμή, αριθμητικό μέσο, διάμεσο, εύρος, διασπορά και τυπική απόκλιση.

x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
$x_1=1$	$\nu_1=6$	
$x_2=2$	$\nu_2=7$	
$x_3=3$	$\nu_3=8$	
$x_4=4$	$\nu_4=9$	
$x_5=5$	$\nu_5=10$	
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{5}\nu_i=40$	$\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i=$

Λύση

x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
$x_1=1$	$\nu_1=6$	$x_1\nu_1=6$
$x_2=2$	$\nu_2=7$	$x_2\nu_2=14$
$x_3=3$	$\nu_3=8$	$x_3\nu_3=24$
$x_4=4$	$\nu_4=9$	$x_4\nu_4=36$
$x_5=5$	$\nu_5=10$	$x_5\nu_5=50$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{5}\nu_i=40$	$\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i=120$

Επικρατούσα τιμή είναι αυτή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, δηλαδή η $x_5=5$.

Αριθμητικός μέσος (ή μέση τιμή) είναι ο $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{6}x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{120}{40}=3$.

Διάμεσος των 40 παρατηρήσεων είναι η παρατήρηση $x_3=3$.

Εύρος ή διακύμανση είναι $R=5-1=4$.

Διασπορά είναι $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_i}{\nu}=$

$$\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_1+\left(x_2-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_3+\left(x_4-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_4+\left(x_5-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_5}{\nu}=$$

$$\frac{(1-3)^2\cdot 6+(2-3)^2\cdot 7+(3-3)^2\cdot 8+(4-3)^2\cdot 9+(5-3)^2\cdot 10}{40}=$$

$$\frac{2^2\cdot 6+1^2\cdot 7+0^2\cdot 8+1^2\cdot 9+2^2\cdot 10}{40}=\frac{24+7+9+40}{40}=\frac{80}{40}=2.$$

Τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2}\cong 1,4$.

Συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\dfrac{s}{\overline{x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cong\dfrac{1,4}{3}\cong 0,466$.

Άρα $CV\%\cong 46,6\%$, συνεπώς όχι ομοιογενές.

Εφαρμογή 45. Οι μηνιαίες εισπράξεις (σε χιλιάδες €) δείγματος 10 καταστημάτων, φαίνονται στον πίνακα. Αφού τον συμπληρώσετε, υπολογίστε επικρατούσα τιμή, διάμεσο, μέση τιμή $\bar{x}$ των εισπράξεων, εύρος, διασπορά, τυπική απόκλιση και CV.

Εισπράξεις (σε χιλιάδες €) x_i	Συχνότητα ν_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
$x_1 = 15$	$\nu_1 = 4$	$f_1 =$			
$x_2 = 20$	$\nu_2 = 2$	$f_2 =$			
$x_3 = 30$	$\nu_3 = 1$	$f_3 =$			
$x_4 = 50$	$\nu_4 = 3$	$f_4 =$			
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{4} \nu_i = 10$	$\sum_{i=1}^{4} f_i =$			$\sum_{i=1}^{4} \nu_i (x_i - \bar{x})^2 =$

Λύση

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \nu_i \cdot x_i}{\nu} = \frac{4 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 30 + 150}{10} = \frac{280}{10} = 28 \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \nu_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{2260}{10} = 226 \qquad CV = \frac{s}{\bar{x}} \simeq \frac{15}{28} = 0,53 \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{226} \simeq 15$$

Επικρατούσα τιμή $x_1 = 15$ Διάμεσος $x_2 = 20$ Εύρος $R = 50 - 15 = 35$

Εισπράξεις (σε χιλιάδες €) x_i	Συχνότητα ν_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
$x_1 = 15$	$\nu_1 = 4$	$f_1 = 0,4$	$15 - 28 = -13$	169	$169 \cdot 4 = 676$
$x_2 = 20$	$\nu_2 = 2$	$f_2 = 0,2$	$20 - 28 = -8$	64	$64 \cdot 2 = 128$
$x_3 = 30$	$\nu_3 = 1$	$f_3 = 0,1$	$30 - 28 = 2$	4	$4 \cdot 1 = 4$
$x_4 = 50$	$\nu_4 = 3$	$f_4 = 0,3$	$50 - 28 = 22$	484	$484 \cdot 3 = 1452$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{4} \nu_i = 10$	$\sum_{i=1}^{4} f_i = 1$			$\sum_{i=1}^{4} \nu_i (x_i - \bar{x})^2 = 2260$

Εφαρμογή 46. Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς για τον παρακάτω στατιστικό πίνακα:

Κλάσεις	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
$[0,\ 2)$		$F_1 = 10$					
$[2,\ 4)$		$F_2 = 60$					
$[4,\ 6)$		$F_3 = 100$					
Σύνολο			$\sum_{i=1}^{3} f_i\% =$	$\sum_{i=1}^{3} f_i =$	$\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot f_i =$		$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot f_i =$

Λύση. Εύρος $R = 6 - 0 = 6$.

Κλάσεις	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
$[0,\ 2)$	$x_1 = 1$	$F_1 = 10$	$f_1 = 10$	$f_1 = 0,1$	$x_1 f_1 = 0,1$	$x_1^2 = 1$	$x_1^2 f_1 = 0,1$
$[2,\ 4)$	$x_2 = 3$	$F_2 = 60$	$f_2 = 50$	$f_2 = 0,5$	$x_2 f_2 = 1,5$	$x_2^2 = 9$	$x_2^2 f_2 = 4,5$
$[4,\ 6)$	$x_3 = 5$	$F_3 = 100$	$f_3 = 40$	$f_3 = 0,4$	$x_3 f_3 = 2$	$x_3^2 = 25$	$x_3^2 f_3 = 10$
Σύνολο			$\sum_{i=1}^{3} f_i\% = 100$	$\sum_{i=1}^{3} f_i = 1$	$\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot f_i = 3,6$		$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot f_i = 14,6$

Υπολογισμός μέσης τιμής $\bar{x}$. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot f_i = 3,6$

Υπολογισμός συντελεστή μεταβολής. $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1,28}{3,6} = \frac{12,8}{36} = \frac{6,4}{18} = \frac{3,2}{9} = 0,355$ Άρα $CV = 35,5\%$

Συνεπώς, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

1ος τρόπος υπολογισμού της διασποράς & της τυπικής απόκλισης.

$s^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot f_i - \left(\bar{x}\right)^2 = 14,6 - 3,6^2 = 14,6 - 12,96 = 1,64$ Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,64} = 1,28$

2^{ος} τρόπος υπολογισμού της διασποράς & της τυπικής απόκλισης. $s^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 14,6 - 12,96 = 1,64$ Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,64} = 1,28$

3^{ος} τρόπος υπολογισμού της διασποράς & της τυπικής απόκλισης. $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_1 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_2 + \left(x_3 - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_3}{\nu} =$

$$\frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_1}{\nu} + \frac{\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_2}{\nu} + \frac{\left(x_3 - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_3}{\nu} = \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 \cdot f_1 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 \cdot f_2 + \left(x_3 - \overline{x}\right)^2 \cdot f_3 =$$

$$\left(1 - 3,6\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(3 - 3,6\right)^2 \cdot \frac{5}{10} + \left(5 - 3,6\right)^2 \cdot \frac{4}{10} =$$

$$\frac{2,6^2}{10} + \frac{0,6^2}{2} + \frac{1,4^2 \cdot 2}{5} = 0,676 + 0,18 + 0,784 = 1,64$$ Άρα, $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,64} = 1,28$

Εφαρμογή 47. Υπολογίστε τα μέτρα διασποράς.

x_i	ν_i
$x_1=1$	$\nu_1=5$
$x_2=2$	$\nu_2=35$
$x_3=3$	$\nu_3=10$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{3}\nu_i=$

Λύση Εύρος $R=3-1=2$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{3}\nu_i\cdot x_i}{\nu}=\frac{105}{50}=\frac{210}{100}=2,1$$

x_i	ν_i	$\nu_i\cdot x_i$
$x_1=1$	$\nu_1=5$	$\nu_1\cdot x_1=5$
$x_2=2$	$\nu_2=35$	$\nu_2\cdot x_2=70$
$x_3=3$	$\nu_3=10$	$\nu_3\cdot x_3=30$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{3}\nu_i=50$	$\sum_{i=1}^{3}\nu_i\cdot x_i=105$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{3}\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\nu}=\frac{5\left(x_1-\bar{x}\right)^2+35\left(x_2-\bar{x}\right)^2+10\left(x_3-\bar{x}\right)^2}{50}=$$

$$\frac{5(1-2,1)^2+35(2-2,1)^2+10(3-2,1)^2}{50}=\frac{14,9}{50}=\frac{29}{100}=0,29.$$

Τυπική απόκλιση $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{0,29}=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{29}}{10}\cong\frac{5,3}{10}=0,53$.

Συντελεστής μεταβολής $CV=\frac{s}{\bar{x}}\simeq\frac{0,53}{0,29}=\frac{53}{29}$.

Εφαρμογή 48. Βρείτε τις τιμές των συχνοτήτων ν_1, ν_2, ν_3 της μεταβλητής X αν $\bar{x}=1,5$ και $s^2=4,5$, για τα δεδομένα του διπλανού πίνακα. **Λύση** • Είναι $\nu_1+\nu_2+\nu_3=80$.

x_i	ν_i
$x_1=0$	ν_1
$x_2=2$	ν_2
$x_3=5$	ν_3
Σύνολο	80

•Είναι $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i\nu_i}{\nu}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{80}=\frac{0\nu_1+2\nu_2+5\nu_3}{80}=\frac{2\nu_2+5\nu_3}{80}$

Από $\bar{x}=1,5$ έπεται ότι $\frac{2\nu_2+5\nu_3}{80}=1,5\Leftrightarrow 2\nu_2+5\nu_3=120$.

• Από $s^2=\overline{x^2}-\left(\bar{x}\right)^2\Leftrightarrow 4,5=\overline{x^2}-(1,5)^2\Leftrightarrow 4,5=\overline{x^2}-2,25\Leftrightarrow\overline{x^2}=6,75$

Και $\overline{x^2}=\sum_{i=1}^{3}x_i^2f_i=x_1^2f_1+x_2^2f_2+x_3^2f_3=0f_1+4f_2+25f_3=4f_2+25f_3=$

$4\frac{\nu_2}{\nu}+25\frac{\nu_3}{\nu}=4\frac{\nu_2}{80}+25\frac{\nu_3}{80}$ προκύπτει ότι $4\frac{\nu_2}{80}+25\frac{\nu_3}{80}=6,75\Leftrightarrow 4\nu_2+25\nu_3=540$.

Συνεπώς $\left\{\begin{matrix}\nu_1+\nu_2+\nu_3=80\\2\nu_2+5\nu_3=120\\4\nu_2+25\nu_3=540\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\nu_1=50\\\nu_2=10\\\nu_3=20\end{matrix}\right.$.

Stem & leaf plots (φυλλογράφημα, μίσχος & φυλλαράκια)

Έστω ότι έχω τις τιμές
Ζητείται να παρασταθούν.

136,4	110,9	120	110,1	110,6
116,2	99	134,5	121,7	

Μέθοδος εργασίας

1. Οι αριθμοί στρογγυλοποιούνται στον πλησιέστερο ακέραιο.

136	111	120	110	111
116	99	135	122	

2. Επιλέγω πρώτα stem (μίσχοι ή οδηγούνταν ψηφία) ΔΕΚΑΔΕΣ και μετά leaves (φυλλαράκια ή επόμενα ψηφία) ΜΟΝΑΔΕΣ.

stems	leaves
13	6
11	1
12	0
11	0
11	1
11	6
9	9
13	5
12	2

3. Καταγράφουμε τα stems.
4. Διατάσσουμε τα stems κατά αύξουσα τάξη, γράφοντας τα κατακόρυφα.

Stem & leaf plot

Δεκάδες	Μονάδες
9	9
10	--
11	1, 0, 1, 6
12	0, 2
13	6, 5

5. Γράφουμε τα leaves στην ίδια γραμμή που βρίσκεται το αντίστοιχο τους stem.
6. Ελέγχω αν έχω καταγράψει όλα τα φύλλα. Ο αριθμός τους πρέπει να ισούται με το σύνολο των παρατηρήσεων.
Παρατήρηση. Αν το δω ανάποδα, είναι διάγραμμα συχνοτήτων. Το φυλλογράφημα παρουσιάζει την ίδια οπτική εικόνα με το διάγραμμα των συχνοτήτων, αλλά οι αριθμοί εδώ διατηρούνται.

To IQ test

Οι έννοιες του «δείκτη νοημοσύνης» και των test ευφυΐας, εισέρχονται όλο και περισσότερο στην καθημερινή μας ζωή, με σκοπό την επιλογή του κατάλληλου ανθρώπου για την κατάλληλη θέση. Ο όρος «δείκτης νοημοσύνης» αποτελεί την απόδοση στα ελληνικά του αγγλικού όρου « Intelligence Quotient » (IQ) που ερμηνεύεται ως πηλίκο ευφυΐας ή διανοητικό πηλίκο. Ο όρος αυτός υιοθετήθηκε στην επιστημονική ορολογία το 1912 και από τότε γνώρισε μεγάλη δημοσιότητα. Εκφράζει το πηλίκο της «διανοητικής ηλικίας» (Mental Age – MA) προς τη «χρονολογική ηλικία» (Chronological Age– CA) πολλαπλασιασμένο επί 100. $IQ=\frac{MA}{CA}100$

Το M.A. εξαρτάται από την απόδοση του ατόμου σε μία αναγνωρισμένη δοκιμασία ευφυΐας (I.Q. test). Το C.A. εκφράζει την πραγματική ηλικία του ατόμου.

Αν άτομο ηλικίας 10 ετών επιτύχει σε test ευφυΐας 120 βαθμούς, έχει M.A. = 12, δηλαδή νοητική ηλικία δωδεκάχρονου παιδιού. Η ανάπτυξη της ευφυΐας ολοκληρώνεται περί τα 15 έως 17 έτη της ηλικίας του ατόμου. Κατά άλλους ειδικούς η νοητική ανάπτυξη ολοκληρώνεται στα 16 έτη, οπότε τίθεται ως συμβατικό επίπεδο η ηλικία των 15,5 ετών. Συνεπώς δεν έχει νόημα να θεωρηθεί ότι ένα άτομο ηλικίας 22 ετών έχει διανοητική ηλικία 28, καθόσον η διανοητική ηλικία είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Σε ενήλικα άτομα του πληθυσμού, το IQ test χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης τους στην κλίμακα κατανομής του IQ και όχι για τον προσδιορισμό της διανοητικής ηλικίας του εξεταζόμενου ατόμου. Προϊόντος του χρόνου, ο παρονομαστής του ανωτέρω τύπου αυξάνεται, ενώ ο αριθμητής παραμένει σταθερός, συνεπώς παρατηρείται διαρκής και σταθερή μείωση του δείκτη νοημοσύνης. Προς τούτο για όλα τα άτομα ηλικίας άνω των 16 ετών, θεωρούμε ότι C.A. = 16 ή C.A. = 15,5. Τα σύγχρονα IQ test εξετάζουν ένα δείγμα ικανοτήτων που θεωρείται ότι σχετίζονται με την ευφυΐα. Το test Stanford–Binet και οι παραλλαγές του, εξετάζουν συστηματικά στοιχεία ευφυΐας ατόμων δυτικών κοινωνιών.

Τα test λεκτικών ικανοτήτων, οι κλίμακες του Raven και τα test πρακτικής σκέψεως εξετάζουν διαφορετικά στοιχεία ευφυΐας το κάθε ένα. Οι βαθμολογίες που επιτυγχάνονται στα test αυτά είναι παραπλήσιες, αλλά όχι ταυτόσημες. Οι «Νοομομετρικής προϊούσης δυσχέρειας κλίμακες του Raven» πλεονεκτούν στο ότι μετρούν ορισμένους θεμελιώδεις συντελεστές νοημοσύνης, ανεξάρτητα από το μορφωτικό επίπεδο του εξεταζομένου ατόμου. Μπορεί να δοθεί σε άτομα διαφορετικών κοινωνικών, πολιτιστικών συστημάτων χωρίς να υπάρχουν σημαντικά σφάλματα κατά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, δηλαδή σφάλματα οφειλόμενα στη διαφορετική επίδραση που ασκούν οι διάφορες μορφές του πολιτισμού στην εξέλιξη της ευφυΐας του ατόμου.

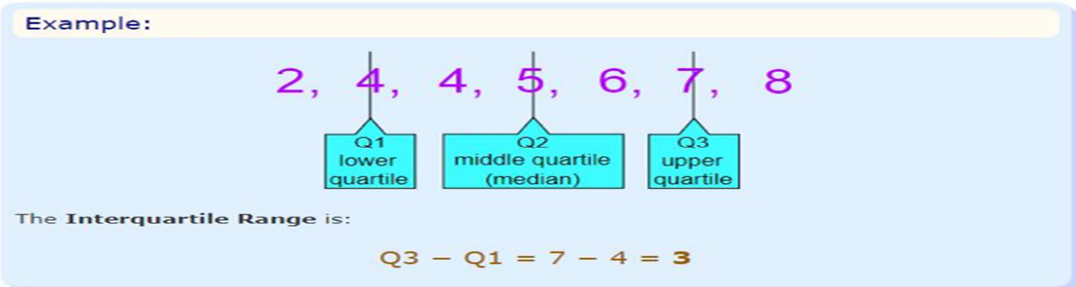
Μπορεί να δοθεί σε αγράμματα άτομα, ή με δυσκολίες στην ακοή ή στην ομιλία, μιας και οι προφορικές υποδείξεις περιορίζονται στο ελάχιστο. Οι κλίμακες του Raven δεν εξετάζουν σφαιρικά την ευφυΐα, αλλά επιλεκτικά ορισμένα μόνο στοιχεία νοημοσύνης, όπως αναλυτική ικανότητα, αριθμητική ικανότητα, χωροαντιληπτική ικανότητα, αίσθηση συμμετρίας, ικανότητα συσχετισμού σχημάτων και συμβόλων. Τα περισσότερα test νοημοσύνης έχουν χρονικό περιορισμό, συνήθως 30 έως 45 λεπτών και η κάθε δοκιμασία είναι δυσκολότερη από την προηγούμενη.

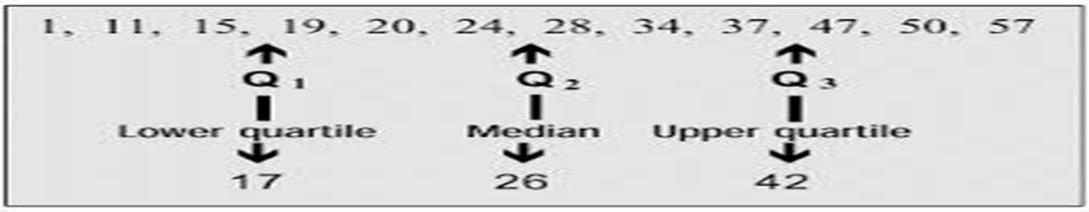
Ενδεικτικά, για test διάρκειας 30 λεπτών, όσοι το ολοκληρώσουν σε λιγότερο από 15 λεπτά πριμοδοτούνται με 5 επιπλέον βαθμούς, όσοι τελειώσουν σε λιγότερο από 20 λεπτά πριμοδοτούνται με 3 επιπλέον βαθμούς, ενώ όσοι χρειασθούν λιγότερο από 25 λεπτά πριμοδοτούνται με 2 επιπλέον βαθμούς. Δεν αποτελούν τέλειες διαδικασίες και ως εκ τούτου δεν πρέπει να υπερτιμώνται. Αν η ευφυΐα δεν συνοδεύεται από άλλες ιδιότητες, πιθανό να αποδειχθεί επιζήμια και καταστροφική για το άτομο και το κοινωνικό σύνολο. Τα ειδικά test για παιδιά 5 έως 11 ετών, έχουν περιορισμένη προγνωστική αξία. Όσο μικρότερη είναι η ηλικία του παιδιού, τόσο λιγότερο αξιόπιστα είναι τα αποτελέσματα των IQ test. Αν η βαθμολογία είναι κατά πολύ χαμηλότερη από το μέσο όρο, ενδείκνυται η παροχή βοήθειας από εξειδικευμένο παιδοψυχολόγο. Η διάγνωση της πνευματικής καθυστερήσεως δε μπορεί να στηριχθεί μόνο στα αποτελέσματα ενός IQ test, ειδικά αν πρόκειται για παιδιά.

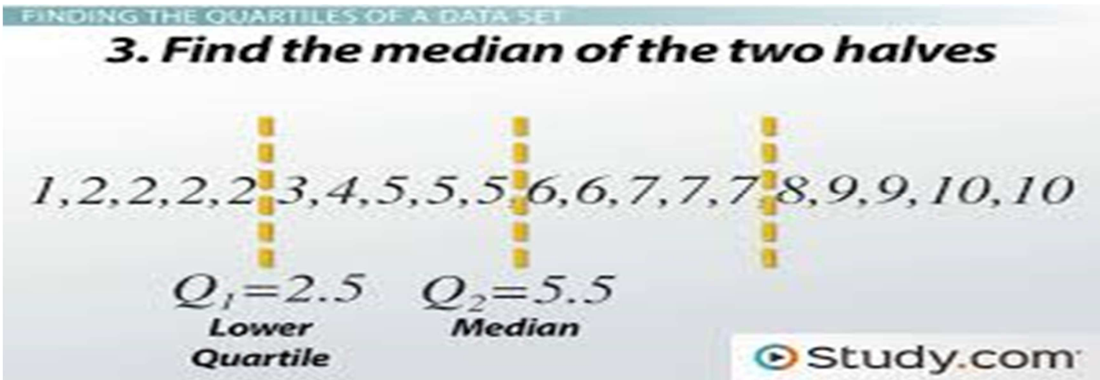
Η MENSA είναι η διεθνής λέσχη των ατόμων με εξαιρετικά υψηλό δείκτη νοημοσύνης, ιδρύθηκε το 1945 και αριθμεί πάνω από 45.000 μέλη παγκοσμίως. Δέχεται άτομα ανεξαρτήτως φυλής, θρησκείας, χρώματος, κοινωνικής, οικονομικής κατάστασης, επαγγέλματος, μορφωτικού επιπέδου, αρκεί το IQ τους να ανήκει στο ανώτερο 2% του πληθυσμού (132 ή 133 βαθμοί σε ένα κλασσικό test).

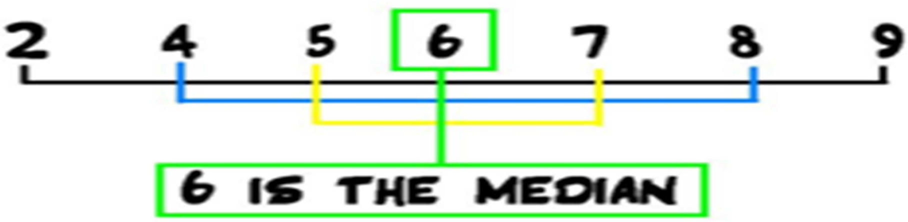
IQ	Επίπεδο ευφυΐας
Κάτω από 70	Πνευματικά υπολειπόμενος
70 – 79	Οριακό επίπεδο
80 – 89	Κάτω του μετρίου
90 – 109	Μέσης ευφυΐας
110 – 119	Άνω του μετρίου
120 – 140	Εξαιρετικής ευφυΐας
Πάνω από 140	Εξαιρετικά υψηλής ευφυΐας

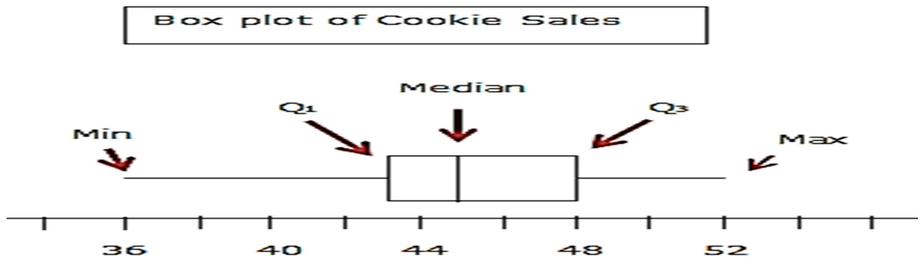
Θηκόγραμμα (boxplot) & Τεταρτημόρια (Quartiles)

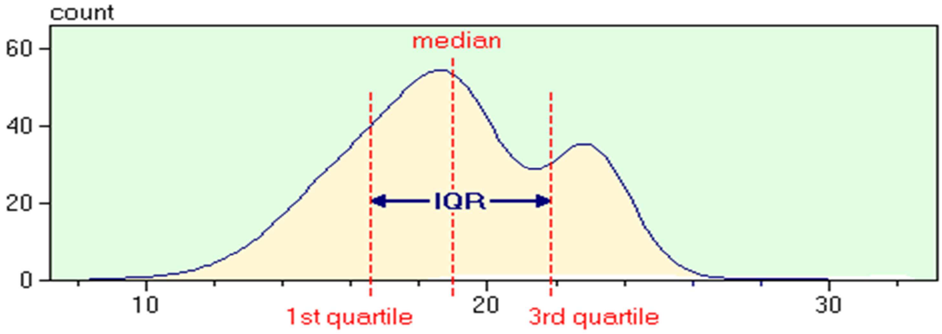


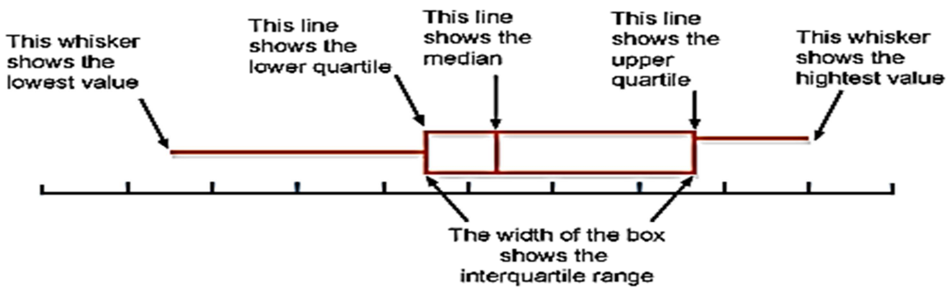


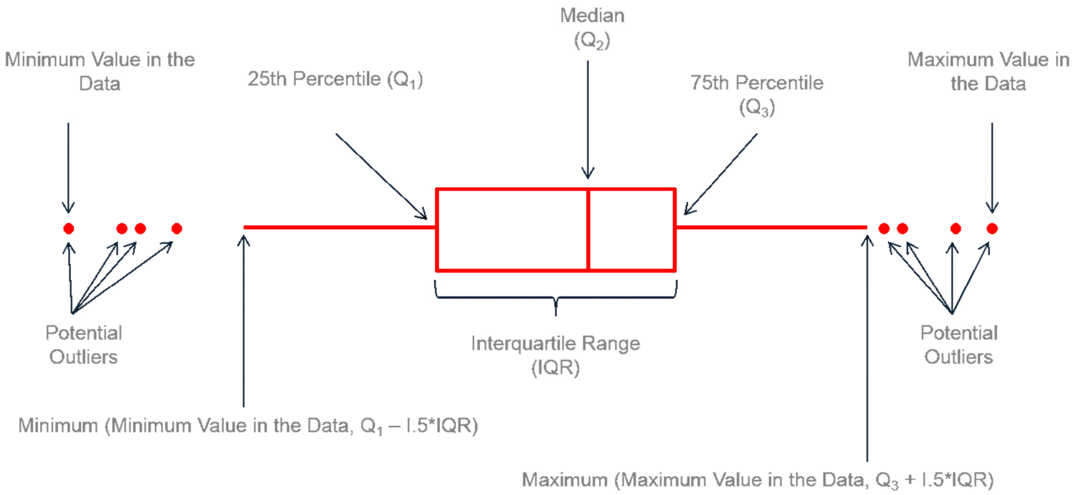


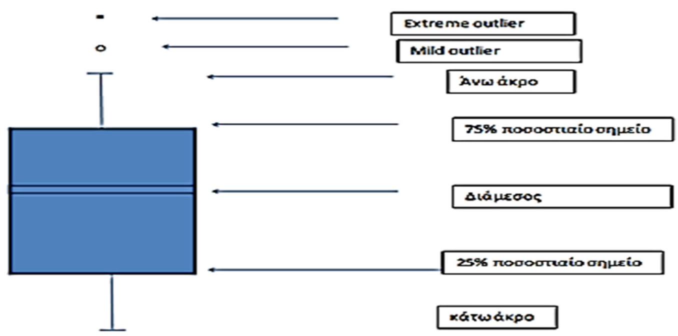



Box plot of Cookie Sales
Median
Q1
Q3
Min
Max
36
40
44
48
52

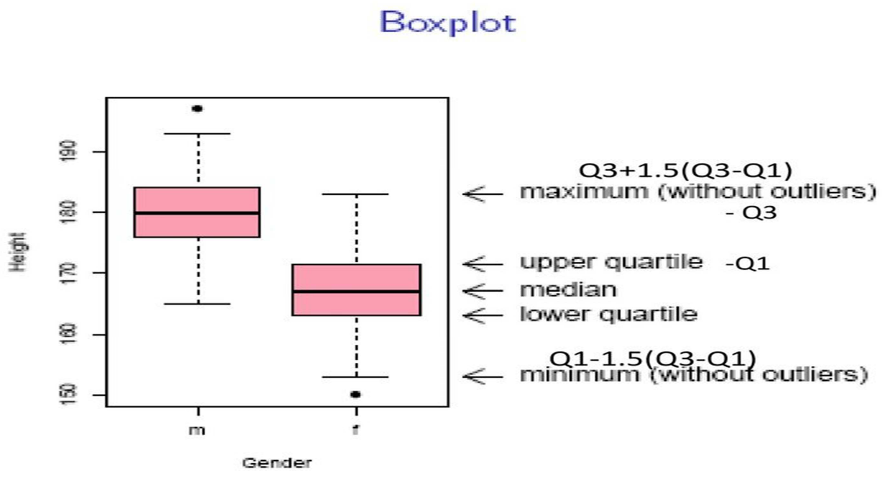

count
60
40
20
0
median
IQR
10
20
30
1st quartile
3rd quartile

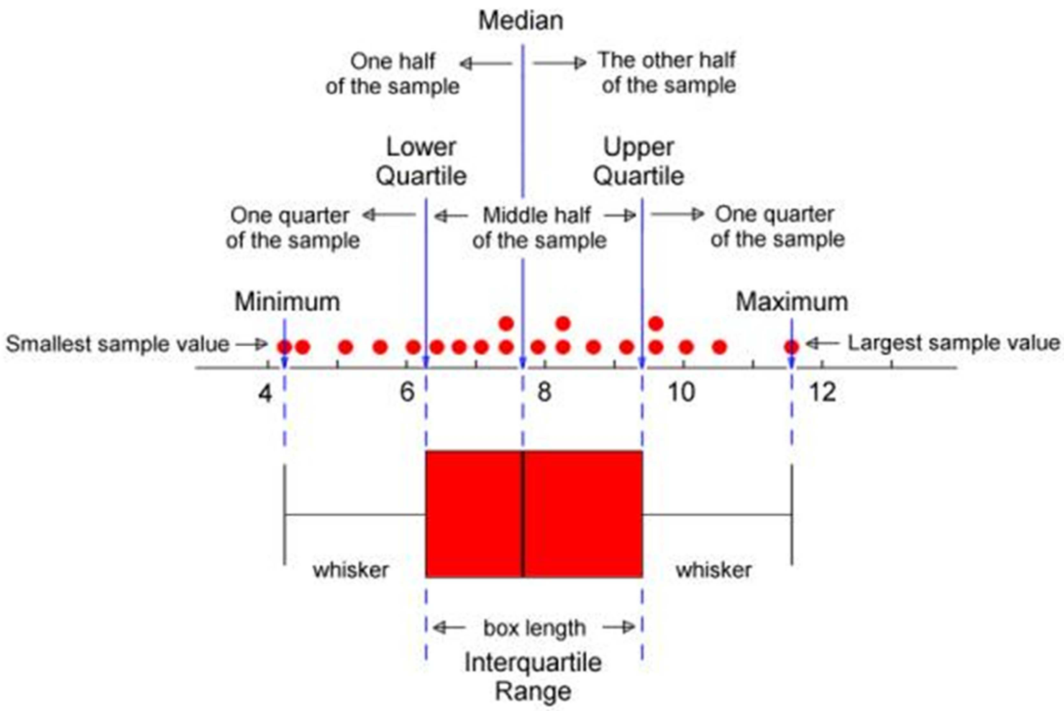

This whisker shows the lowest value
This line shows the lower quartile
This line shows the median
This line shows the upper quartile
This whisker shows the hightest value
The width of the box shows the interquartile range

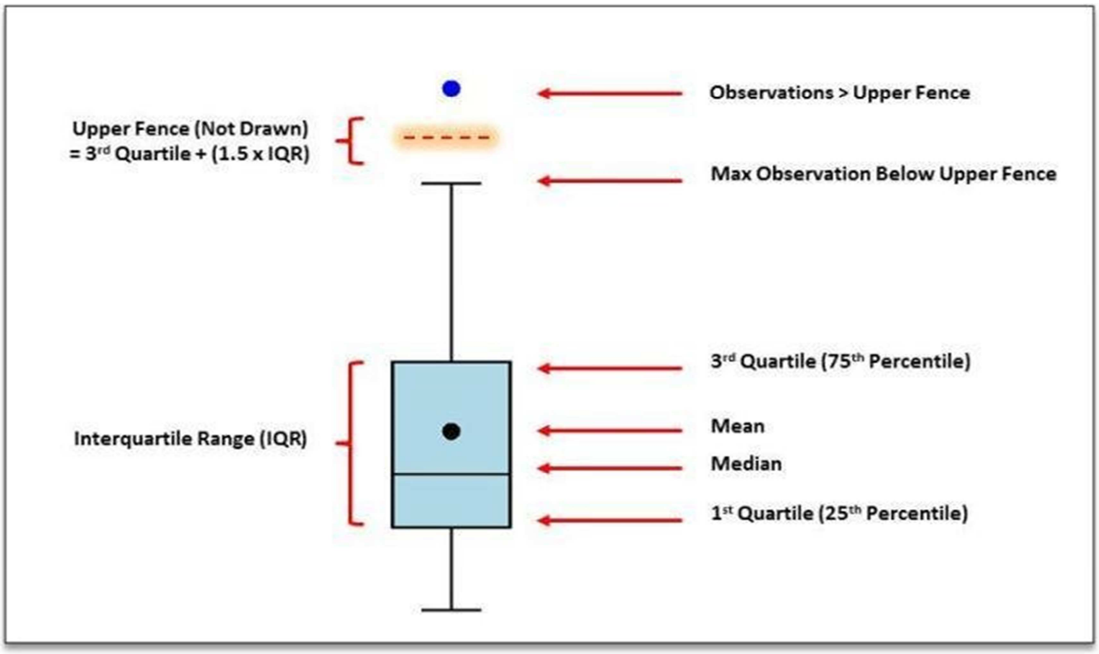

Median (Q2)
Minimum Value in the Data
25th Percentile (Q1)
75th Percentile (Q3)
Maximum Value in the Data
Potential Outliers
Interquartile Range (IQR)
Potential Outliers
Minimum (Minimum Value in the Data, Q1 – 1.5*IQR)
Maximum (Maximum Value in the Data, Q3 + 1.5*IQR)


Extreme outlier
Mild outlier
Άνω άκρο
75% ποσοστιαίο σημείο
Διάμεσος
25% ποσοστιαίο σημείο
κάτω άκρο

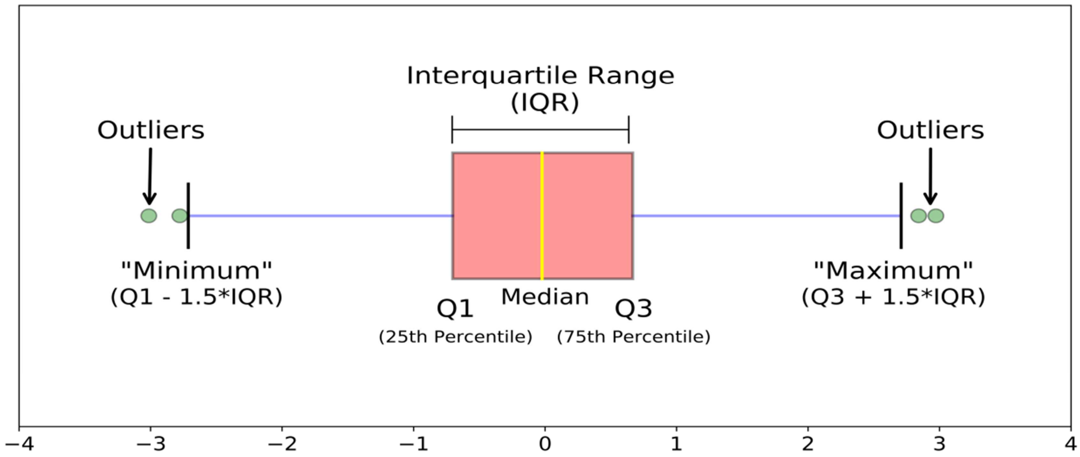
Θηκόγραμμα (Boxplot)



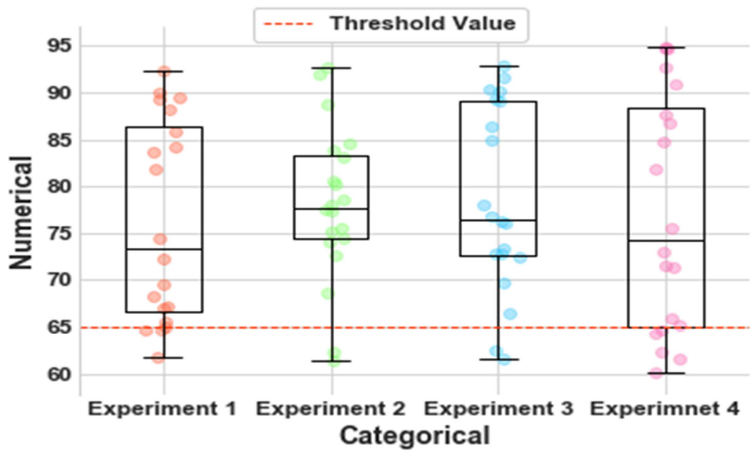




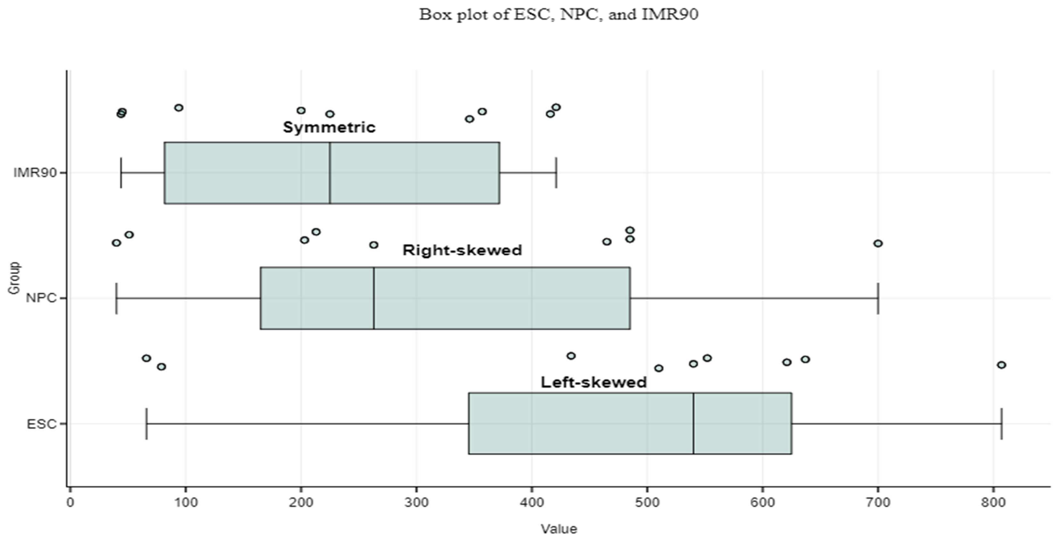
Observations > Upper Fence
Upper Fence (Not Drawn)
= 3rd Quartile + (1.5 x IQR)
Max Observation Below Upper Fence
3rd Quartile (75th Percentile)
Interquartile Range (IQR)
Mean
Median
1st Quartile (25th Percentile)



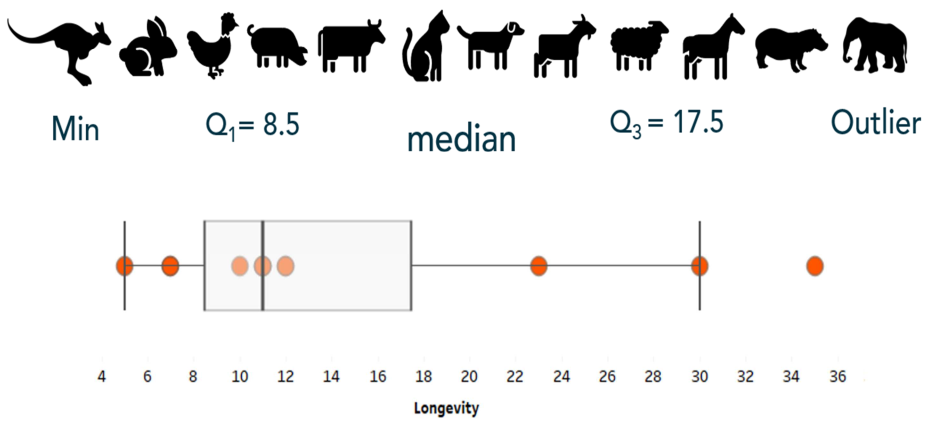
Interquartile Range
(IQR)
Outliers
Outliers
"Minimum"
(Q1 - 1.5*IQR)
"Maximum"
(Q3 + 1.5*IQR)
Q1
Median
Q3
(25th Percentile)
(75th Percentile)
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

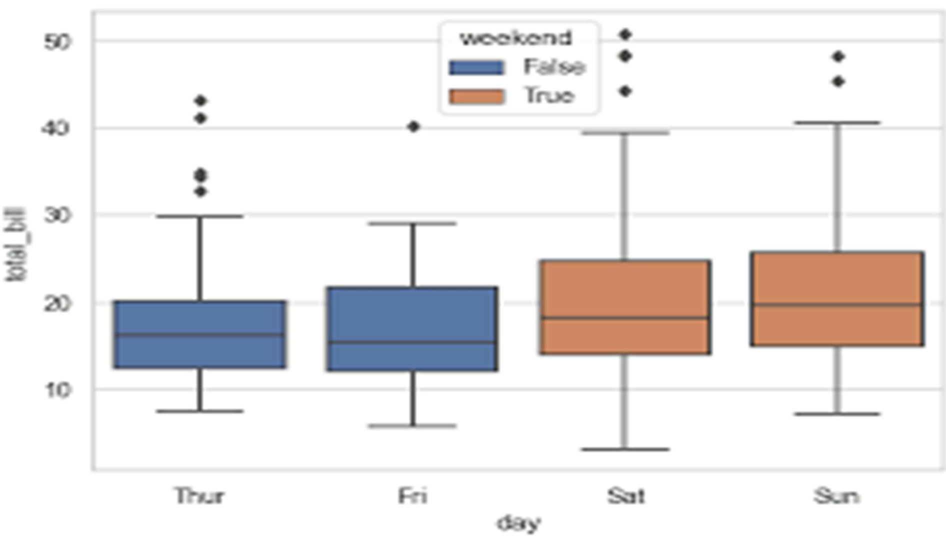


Threshold Value
95
90
85
80
75
70
65
60
Numerical
Experiment 1
Experiment 2
Experiment 3
Experimnet 4
Categorical



Modern Boxplot





Ερωτήσεις σωστού– λάθους

1. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε συνεχείς και διακριτές.

2. Οι τιμές μίας ποιοτικής μεταβλητής είναι αριθμοί.

3. Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ν_i, των τιμών x_i μίας μεταβλητής X, ισούται με 1.

4. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων f_i, των τιμών x_i μίας μεταβλητής X, ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος.

5. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων f_i, των τιμών x_i μίας μεταβλητής X, ισούται με 100.

6. Για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει ότι $f_i > 1 \quad \forall i = 1,\ 2, ...,\ k$.

7. Οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

8. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

9. Η συχνότητα ν_i της τιμής x_i, μίας μεταβλητής X, είναι αρνητικός αριθμός.

10. Στην περίπτωση των <u>ποσοτικών</u> μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες ν_i & f_i, χρησιμοποιούνται και οι αθροιστικές συχνότητες N_i & F_i.

11. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας <u>ποιοτικής</u> μεταβλητής.

12. Το κυκλικό διάγραμμα (ή πίττα) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής ή και ποσοτικής μεταβλητής.

13. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους έχουν ίσα μήκη.

14. Η μέση τιμή, ενός συνόλου ν παρατηρήσεων, είναι μέτρο θέσης.

15. Η διάμεσος δ, ενός δείγματος, είναι μέτρο διασποράς.

16. Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, τότε και η διακύμανση εκφράζεται σε cm.

17. Ο συντελεστής μεταβολής (ή μεταβλητότητας) CV είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

18. Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μίας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

19. Ο CV παραστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς.

20. Το εύρος R, ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της ελάχιστης παρατηρήσεως.

21. Το εύρος R, ενός δείγματος, εξαρτάται από τις δύο ακραίες παρατηρήσεις και είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

22. Τα μέτρα ασυμμετρίας καθορίζουν τη μορφή της κατανομής.

23. Τα μέτρα ασυμμετρίας εκφράζονται μόνο ως συνάρτηση των μέτρων θέσης.

24. Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν πόσο επεκτείνονται οι παρατηρήσεις γύρω από το «κέντρο» τους.

25. Η διασπορά είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i παρατηρήσεων από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$.

26. Ο CV εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής.

27. Το κέντρο, κάθε κλάσης ενός δείγματος, ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης.

28. Το εύρος του δείγματος χρησιμοποιείται για την κατασκευή ισοπλατών κλάσεων.

29. Η κατανομή συχνοτήτων με «κωδωνοειδή» μορφή ονομάζεται κανονική κατανομή.

30. Σε όλες τις περιπτώσεις, οι κλάσεις ενός δείγματος έχουν όλες το ίδιο πλάτος.

31. Όταν το πλήθος των τιμών μίας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο, είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν τα δεδομένα σε κλάσεις.

Ερωτήσεις

1. Ποιες μεταβλητές ονομάζονται ποσοτικές;

2. Πότε μία ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

3. Πότε ένα δείγμα ονομάζεται αντιπροσωπευτικό;

4. Τι ονομάζεται πληθυσμός και τι δείγμα;

5. Τι ονομάζεται μεταβλητή X ενός πληθυσμού και πως συμβολίζεται;

6. Ορισμός συχνότητας (ή απόλυτης συχνότητας) ν_i μίας τιμής x_i της μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν.

7. Τι ονομάζεται αθροιστική συχνότητα N_i μίας τιμής x_i, της μεταβλητής X, ενός δείγματος μεγέθους ν;

8. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i μίας τιμής x_i, της μεταβλητής X, ενός δείγματος μεγέθους ν και τι τιμές λαμβάνει;

9. Τι ονομάζεται επί τοις εκατό σχετική συχνότητα $f_i\%$ μίας τιμής x_i, της μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και τι τιμές λαμβάνει;

10. Τι ονομάζεται επί τοις εκατό αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$ μίας τιμής x_i της μεταβλητής X, ενός δείγματος μεγέθους ν και τι τιμές λαμβάνει;

11. Τι ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων;

12. Για τη γραφική παράσταση ποιού φαινομένου χρησιμοποιείται το χρονόγραμμα;

13. Σε μία κανονική κατανομή είναι $\bar{x}=30$ και $s=3$. Ποιό είναι κατά προσέγγιση, το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ 30 και 33; Τα δείγμα των τιμών της μεταβλητής είναι ομοιογενές;

14. Σε μία κανονική κατανομή είναι $\bar{x}=20$, $s=3$ Ποιό είναι κατά προσέγγιση, το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ 14 και 26;

15. Σε μία κανονική κατανομή είναι $\bar{x}=25$, $s=5$ Ποιό είναι κατά προσέγγιση, το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ 20 και 30;

16. Αν οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής Χ σε ένα δείγμα μεγέθους ν, είναι $t_1, t_2, ..., t_\nu$, η μέση τιμή ισούται με:

(α) $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}$ **(β)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu^2}$ **(γ)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu}$ **(δ)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu^2}$ **(ε)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu-1}$

17. Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων, δοθεί διαφορετική βαρύτητα, εκφραζόμενη με τους συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, ..., w_\nu$, ο σταθμικός μέσος δίνεται από τον τύπο:

(α) $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i}$ **(β)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\nu}$ **(γ)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i^2}$ **(δ)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$ **(ε)** $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$

18. Πλήθος ν_1 παρατηρήσεων έχει μέση τιμή μ_1. Πλήθος ν_2 παρατηρήσεων έχει μέση τιμή μ_2. Πλήθος ν_3 παρατηρήσεων έχει μέση τιμή μ_3. Όλες οι παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή μ. Αποδείξτε ότι $\mu_1 = \mu + \frac{\nu_2}{\nu_1}(\mu - \mu_2) + \frac{\nu_3}{\nu_1}(\mu - \mu_3)$.

19. Δίνονται οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$, μίας μεταβλητής X, που έχουν μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s. Αν οι τιμές $x_1^2, x_2^2, ..., x_\nu^2$ έχουν μέση τιμή $\overline{x^2}$, αποδείξτε ότι $s^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$.

20. Δίνονται οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$, μίας μεταβλητής X, που έχουν μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s. Οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ έχουν, αντίστοιχα, σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, ..., f_\nu$ αποδείξτε ότι $s^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 f_i - \left(\overline{x}\right)^2$.

21. Ποιά είναι τα σπουδαιότερα μέτρα θέσης;

22. Ποιά είναι τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς (ή μεταβλητότητας);

23. Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, αν είναι R το εύρος του δείγματος και k ο αριθμός των κλάσεων, το πλάτος των κλάσεων c είναι (**α**) $c = \frac{k}{R}$, (**β**) $c = \frac{R}{k}$, (**γ**) $c = Rk$, (**δ**) $c = R + k$, (**ε**) $c = R - k$ (**στ**) $c = k - R$

Προβλήματα

1. Σπουδαστής διαθέτει τα χρήματα του ως εξής: Για ενοίκιο 20%, για φαγητό 30%, για ρούχα 30%, για διασκέδαση 15% και αποταμιεύει τα υπόλοιπα. Κάντε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

2. Ο χημικός τύπος του νιτρικού νατρίου είναι $NaNO_3$, δηλαδή το μόριο του αποτελείται από ένα άτομο νατρίου (Na), ένα άτομο αζώτου (N) και τρία άτομα οξυγόνου (O). Γράψτε κυκλικό διάγραμμα για τη σύσταση του $NaNO_3$.

3. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη σχετική % συχνότητα της εβδομαδιαίας αποζημιώσεως 500 υπαλλήλων επιχειρήσεως. Συμπληρώστε τον πίνακα με τις συχνότητες (ν_i, f_i) και τις αθροιστικές συχνότητες $(N_i,\ F_i,\ F_i\%)$.

€/ week	$350 \le x < 360$	$360 \le x < 370$	$370 \le x < 380$	$380 \le x < 390$	$390 \le x < 400$
$f_i\%$	$f_1 = 8\%$	$f_2 = 28\%$	$f_3 = 44\%$	$f_4 = 16\%$	$f_5 = 4\%$

4. Η μέση ηλικία των 30 γυναικών που εργάζονται σε εταιρεία είναι 38 έτη, ενώ των 50 ανδρών 42 έτη. Ποιά η μέση ηλικίας όλων των εργαζομένων στην εταιρεία;

5. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις απουσίες 100 σπουδαστών. Αν η μέση τιμή των απουσιών των σπουδαστών είναι 34, υπολογίστε τα a, β.

Απουσίες	20	30	40	Σύνολο
Σπουδαστές	α	40	β	100

6. Αν πάρουμε για παρατηρήσεις τους αριθμούς 3, 6, 6, 9, 2, 4, βρείτε την τυπική απόκλιση τους.

7. Ο αριθμός των παιδιών ενός δείγματος 100 οικογενειών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής.

Παιδιά	0	1	2	3	4	5	6
Οικογένειες	18	20	30	15	10	5	2

8. Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής

Κλάσεις	$0 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$
Συχνότητες	4	3	2	1

9. Σε μία κατανομή η μέση τιμή ν παρατηρήσεων είναι a και η μέση τιμή μ παρατηρήσεων β. Αν οι παρατηρήσεις μ, ν αντιστοιχούν σε διαφορετικά άτομα, βρείτε τη μέση τιμή των $\mu + \nu$ παρατηρήσεων.

10. Σε ένα δείγμα μεγέθους ν η μέση τιμή είναι a. Αν για μ άτομα του δείγματος $(\mu < \nu)$ έχουμε μέση τιμή β, να βρεθεί η μέση τιμή των υπολοίπων $\nu - \mu$ ατόμων του δείγματος.

11. Μία μεταβλητή x λαμβάνει τις ν το πλήθος τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$. Αν a είναι το ελάχιστο και β το μέγιστο αυτών, δείξτε ότι $\alpha \le \bar{x} \le \beta$. Πότε ισχύει η ισότητα;

12. Αν η τυπική απόκλιση μίας μεταβλητής x είναι 0, δείξτε ότι η μέση τιμή ισούται με κάθε μία από τις τιμές της μεταβλητής.

13. Κατά τη διάρκεια μίας ημέρας καταγράψαμε τις εξής θερμοκρασίες σε ^{O}C 2, 5, 6, 6, 7, 5, 5, 4. Υπολογίστε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

14. Έστω $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X που αφορά τα άτομα δείγματος με αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες $N_1 = 9,\ N_2 = 32,\ N_3 = 40,\ N_4 = 50$. Βρείτε το μέγεθος του δείγματος, τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των τιμών $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

15. Πέντε διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 5. Βρείτε τους αριθμούς αυτούς και τη διάμεσο τους. Αν σε κάθε έναν από τους δύο μεγαλύτερους από τους παραπάνω πέντε αριθμούς προσθέσουμε τον αριθμό a, η μέση τιμή των πέντε αριθμών γίνεται 7. Δείξτε ότι $a = 5$.

16. Έστω δείγμα ν παρατηρήσεων κάθε μία από τις οποίες μπορεί να έχει τιμή 1, 3 ή 4. Βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και το μέγεθος ν του δείγματος αν είναι γνωστό ότι αυτά είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 10x + 21 = 0$.

17. Η μέση βαθμολογία σπουδαστή σε 4 διαγωνίσματα μαθηματικών είναι 92 μονάδες.
Α. Αν στο πέμπτο διαγώνισμα γράψει 87, Ποιά η νέα μέση βαθμολογία;
Β. Πόσο πρέπει να γράψει στο πέμπτο διαγώνισμα για να ανεβάσει τη μέση βαθμολογία του κατά μία μονάδα;

18. Το μέσο βάρος 4 μαθητών είναι $60\ kg$. Έρχονται άλλοι δύο μαθητές που τα βάρη τους διαφέρουν κατά $2\ kg$ και το μέσο βάρος γίνεται $61\ kg$.
Α. Πόσο ζυγίζουν οι δύο νέοι μαθητές;
Β. Αν φύγει ένας μαθητής που ζυγίζει $59\ kg$, ποιό το μέσο βάρος των 5 μαθητών που απομένουν;

19. Το μέσο βάρος 6 κοριτσιών είναι $58\ kg$ και 3 αγοριών $61\ kg$. Βρείτε το συνολικό βάρος των κοριτσιών, το συνολικό βάρος των αγοριών και το μέσο βάρος αγοριών – κοριτσιών μαζί.

20. Το μέσο βάρος μία ομάδας ανθρώπων είναι $70\ kg$. Αν σε αυτούς προστεθεί ακόμη ένας που ζυγίζει $76\ kg$, το νέο βάρος είναι $71\ kg$. Πόσοι ήταν οι άνθρωποι της αρχικής ομάδας;

21. Ο μέσος μισθός 15 ανδρών και 10 γυναικών που απασχολούνται σε μία επιχείρηση είναι 900 €. Αν ο μέσος μισθός των ανδρών είναι 920 €, βρείτε το μέσο μισθό των γυναικών.

22. Η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι 4 και η διάμεσος 3. Οι τρεις από αυτούς είναι οι αριθμοί 2, 5, 7. Βρείτε τους άλλους δύο. Αν στους πέντε παραπάνω αριθμούς προσθέσουμε άλλους τρεις διαδοχικούς ακεραίους, η μέση τιμή των οκτώ αριθμών γίνεται 5,5. Ποίοι είναι οι αριθμοί που προσθέσαμε;

23. Επιχείρηση έχει προς ενοικίαση αυτοκίνητα για τα οποία ο μέσος χρόνος λειτουργίας τους πριν από την εμφάνιση της πρώτης βλάβης είναι 12 μήνες με τυπική απόκλιση 3 μήνες. Δείξτε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

24. Συμπληρώστε τους παρακάτω στατιστικούς πίνακες.

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1=5$	$\nu_1=$	$N_1=3$	$f_1=$	$F_1=$	$f_1\%=$	$F_1\%=$	$\nu_1 x_1=$
$x_2=6$	$\nu_2=$	$N_2=10$	$f_2=$	$F_2=$	$f_2\%=$	$F_2\%=$	$\nu_2 x_2=$
$x_3=7$	$\nu_3=$	$N_3=15$	$f_3=$	$F_3=$	$f_3\%=$	$F_3\%=$	$\nu_3 x_3=$
$x_4=8$	$\nu_4=$	$N_4=20$	$f_4=$	$F_4=$	$f_4\%=$	$F_4\%=$	$\nu_4 x_4=$
Σύνολο	$\nu=\sum_{i=1}^{4}\nu_i=$		$\sum_{i=1}^{4} f_i=1$		$\sum_{i=1}^{4} f_i\%=100$		$\sum_{i=1}^{4}\nu_i x_i=$

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 5$	$\nu_1 =$	$N_1 =$	$f_1 = 0,1$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\nu_1 x_1 =$
$x_2 = 6$	$\nu_2 =$	$N_2 =$	$f_2 = 0,2$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 7$	$\nu_3 =$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\nu_3 x_3 =$
$x_4 = 8$	$\nu_4 =$	$N_4 =$	$f_4 = 0,3$	$F_4 =$	$f_4\% =$	$F_4\% =$	$\nu_4 x_4 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{4} \nu_i = 50$		$\sum_{i=1}^{4} f_i = 1$		$\sum_{i=1}^{4} f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i =$

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 10$	$N_1 =$	$f_1 =$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\nu_1 x_1 =$
$x_2 = 2$	$\nu_2 =$	$N_2 = 35$	$f_2 =$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 3$	$\nu_3 =$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\nu_3 x_3 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{3} \nu_i = 50$		$\sum_{i=1}^{3} f_i = 1$		$\sum_{i=1}^{3} f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^{3} \nu_i x_i =$

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	F_i	$\nu_i x_i$
$x_1 = 1$	$\nu_1 = 2$	$N_1 =$	$f_1 = 0,1$	$F_1 =$	$f_1\% =$	$F_1\% =$	$\nu_1 x_1 =$
$x_2 = 2$	$\nu_2 =$	$N_2 = 8$	$f_2 =$	$F_2 =$	$f_2\% =$	$F_2\% =$	$\nu_2 x_2 =$
$x_3 = 3$	$\nu_3 = 8$	$N_3 =$	$f_3 =$	$F_3 =$	$f_3\% =$	$F_3\% =$	$\nu_3 x_3 =$
$x_4 = 4$	$\nu_4 =$	$N_4 =$	$f_4 =$	$F_4 =$	$f_4\% =$	$F_4\% =$	$\nu_4 x_4 =$
Σύνολο	$\nu = \sum_{i=1}^{4} \nu_i =$		$\sum_{i=1}^{4} f_i = 1$		$\sum_{i=1}^{4} f_i\% = 100$		$\sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i =$