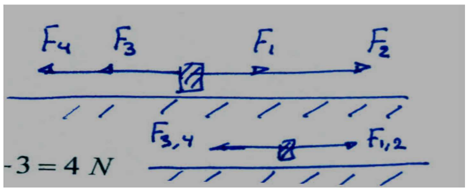
Άσκηση 1, Κεφάλαιο 3.

(**α**) $\vec{F_1} \nearrow\nearrow \vec{F_2}$, $\vec{F_3} \nearrow\nearrow \vec{F_4}$

$F_{1,2} = 1 + 2 = 3\ N$,

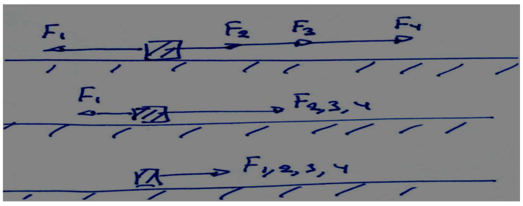
$F_{3,4} = 3 + 4 = 7\ N$,

$F_{1,2,3,4} = 7 - 3 = 4\ N$



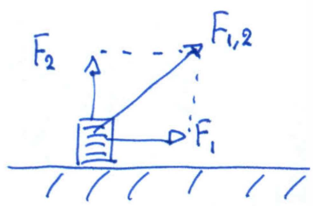
(**β**) $\vec{F_1} \nearrow\nearrow \vec{F_2} \nearrow\nearrow \vec{F_3}$ $F_{1,2,3} = 1 + 2 + 3 = 6\ N$, $F_{1,2,3,4} = 6 - 4 = 2\ N$

(**γ**) $\vec{F_2} \nearrow\nearrow \vec{F_3} \nearrow\nearrow \vec{F_4}$ $F_{2,3,4} = 2 + 3 + 4 = 9\ N$, $F_{1,2,3,4} = 9 - 1 = 8\ N$



Άσκηση 2, Κεφάλαιο 3.

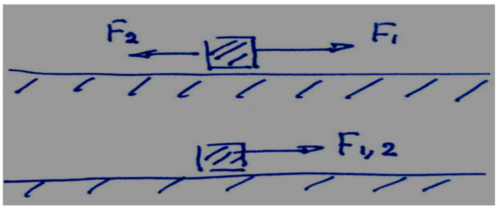
$$\left.\begin{array}{l} \vec{F_1} \nearrow\nearrow \vec{F_2} \\ F_1 = 3\ N \\ F_1 + F_2 = 5\ N \end{array}\right\} F_2 = 2\ N \qquad \vec{F_1} \perp \vec{F_2}$$



$$F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}\ N$$

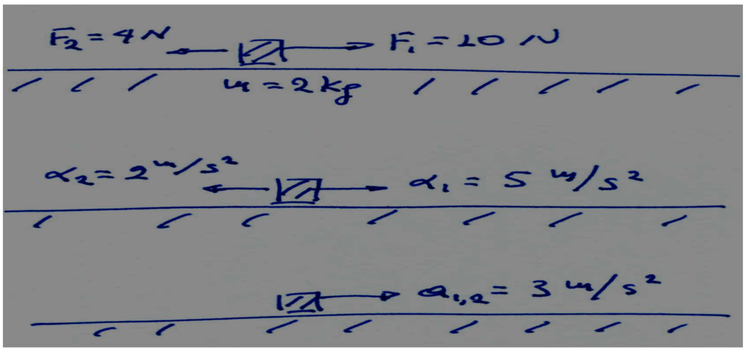
Άσκηση 3, Κεφάλαιο 3.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F_1} \nearrow\swarrow \vec{F_2} \\ F_1 = 10\ N \\ F_2 = 4\ N \end{array}\right\} F_{1,2} = 10 - 4 = 6\ N$$



Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα.

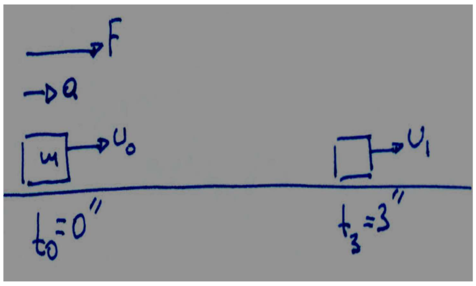
$$a = \frac{F_{1,2}}{m} = \frac{6}{2} = 3\ \frac{m}{s^2} = 3\ \frac{\frac{m}{s}}{s} \quad , \qquad s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}3 \cdot 5 \cdot 5 = \frac{75}{2} = 37{,}5\ m$$



Άσκηση 4, Κεφάλαιο 3.

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 10\ \frac{m}{s} \\ u_1 &= 25\ \frac{m}{s} \end{aligned}\right\} \Delta u = 15\ \frac{m}{s}$$

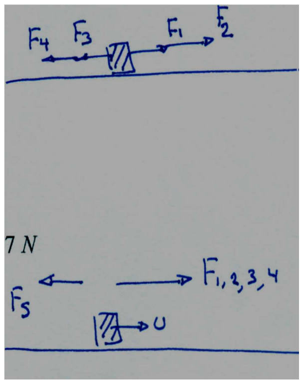
$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{15}{3} = 5\ \frac{m}{s^2}$$



$$F = ma = 4 \cdot 5 = 20\ N$$

Άσκηση 5, Κεφάλαιο 3.

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\vec{F_1} \nearrow\nearrow \vec{F_2} \\ &F_1 = F_2 = 8\ N \end{aligned}\right\} F_{1,2} = 8+8 = 16\ N \\ &\left.\begin{aligned} &\vec{F_3} \nearrow\nearrow \vec{F_4} \\ &F_3 = 4\ N \\ &F_4 = 5\ N \end{aligned}\right\} F_{3,4} = 4+5 = 9\ N \end{aligned}\right\} F_{1,2,3,4} = 16-9 = 7\ N$$



(**α**) Αφού το σώμα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, άρα η επιτάχυνση του είναι μηδέν, οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδέν. Συνεπώς, πρέπει να ασκείται στο σώμα και μία επιπλέον δύναμη η $F_5 = 7\ N$ για την οποία ισχύει ότι $\vec{F_5} \nearrow\nearrow \vec{F_3} \nearrow\nearrow \vec{F_4}$ και $\vec{F_5} \nearrow\swarrow \vec{F_1} \nearrow\nearrow \vec{F_2}$.

(**β**) $u = \frac{s}{t} \Leftrightarrow s = ut = 5 \cdot 60 = 300\ m$.

(**γ**) $u = \frac{s'}{t'} \Leftrightarrow t' = \frac{s'}{u} = \frac{1.000}{5} = 200\ s$.

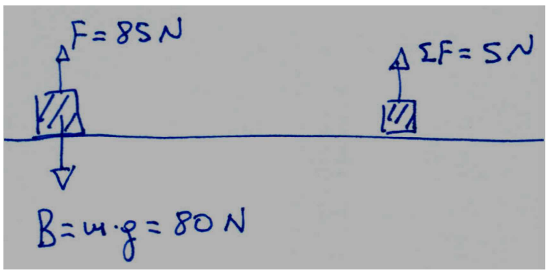
Άσκηση 6, Κεφάλαιο 3.

$B = mg = 8 \cdot 10 = 80\ N$, $\vec{F} \nearrow\swarrow \vec{B}$, $\Sigma\vec{F} = \vec{F} + \vec{B}$, $\Sigma F = F - B = 85 - 80 = 5\ N$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{5}{8}\ \frac{m}{s^2}$, $u = at = \frac{5}{8} 4 = \frac{5}{2} \frac{m}{s}$,

$h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} 4 \cdot 4 = 5\ m$



Άσκηση 7, Κεφάλαιο 3.

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_0 και επιβράδυνση $a = \frac{F}{m} = \frac{5}{8}\ \frac{m}{s^2}$.

(**α**) Αφού το σώμα σταματά μετά από χρόνο $t = 8\ s$ ισχύει ότι

$$u = u_0 - at \Leftrightarrow 0 = u_0 - at \Leftrightarrow u_0 = at = \frac{5}{\cancel{8}}\cancel{8} = 5\ \frac{m}{s}$$

(**β**) Το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να σταματήσει είναι

$$s_{\text{ΟΛ}} = \frac{u_0^{\ 2}}{2a} = \frac{5 \cdot \cancel{5}}{2\frac{\cancel{5}}{8}} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20\ m$$

(**γ**) Αφού το σώμα ακινητοποιείται μετά από χρόνο $t = 8\ s$, εφόσον εξακολουθεί να του ασκείται η σταθερή δύναμη F, θα αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Άσκηση 8, Κεφάλαιο 3.

Το βάρος του σώματος είναι $B = mg = 100 \cdot 10 = 1.000\ N$. Κατά τον κατακόρυφο άξονα, στο σώμα ασκούνται το βάρος του B και η κατακόρυφη αντίδραση του εδάφους N. Αφού το σώμα ακινητεί, είναι $N = B = 1.000\ N$.

Κατά τον οριζόντιο άξονα, στο σώμα ασκούνται η οριζόντια δύναμη F και δύναμη της τριβής. Εφόσον το σώμα ακινητεί, πρόκειται για στατική τριβή μέτρου ιδίου με αυτό της δυνάμεως F. Δηλαδή $T_{\text{ΣΤΑΤ}} = 50\ N$. Για το μέτρο της δυνάμεως της τριβής ισχύει ότι $T = \mu N = \frac{1}{2}1.000 = 500\ N$.

Αν στο σώμα ασκηθεί οριζόντια δύναμη $F > 500\ N$ αυτό θα κινηθεί. Αν όμως του ασκηθεί δύναμη $F \le 500\ N$ αυτό θα εξακολουθήσει να ακινητεί. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή που λαμβάνει η δύναμη F, προκειμένου το σώμα να μην αρχίσει να κινείται, είναι $F_{\text{MAX}} = 500\ N$.

Άσκηση 9, Κεφάλαιο 3.

Το βάρος του σώματος είναι $B = mg = 2 \cdot 10 = 20\ N$. Στον κατακόρυφο άξονα, στο σώμα ασκούνται το βάρος του B και η αντίδραση N του εδάφους. Αφού το σώμα ακινητεί στον κατακόρυφο άξονα, είναι $B = N = 20\ N$.

Στον οριζόντιο άξονα, στο σώμα ασκούνται η δύναμη F και η δύναμη T της τριβής (διότι το οριζόντιο επίπεδο δεν είναι λείο) . Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = 8\ \frac{m}{s}$, ισχύει ότι $T = F = 10\ N$. Επιπλέον, για το μέτρο της δυνάμεως της τριβής ισχύει ότι $T = \mu \cdot N = \mu \cdot B = \mu \cdot 20$. Συνεπώς είναι $\mu \cdot 20 = 10 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$.

Το σώμα, αφού κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = 8\ \frac{m}{s}$, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Συνεπώς, σε χρόνο $t = 6\ s$ διανύει απόσταση $s = ut = 8\ \frac{m}{\cancel{s}} \cdot 6\ \cancel{s} = 48\ m$.

Άσκηση 10, Κεφάλαιο 3.

Στον κατακόρυφο άξονα, στο σώμα ασκούνται το βάρος του B και η αντίδραση N του εδάφους. Για τα μέτρα των δυνάμεων αυτών ισχύει ότι: $B = mg = m \cdot 10$, $N = B = m \cdot 10$

Στον οριζόντιο άξονα, η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη T της τριβής. Για το μέτρο της δυνάμεως T ισχύει ότι: $T = \mu N = \frac{8}{10\cancel{0}} m \cdot 1\cancel{0} = \frac{8}{10} m$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής (2^{ος} νόμος του Νεύτωνα) ισχύει ότι:

$\Sigma F = T \Leftrightarrow \cancel{m} \cdot a = \frac{8}{10} \cancel{m} \Leftrightarrow a = \frac{8}{10} \frac{m}{s^2}$. Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Για το συνολικό διανυθέν διάστημα μέχρι να σταματήσει ισχύει ότι:

$$s = \frac{{u_0}^2}{2a} \Leftrightarrow {u_0}^2 = 2as \Leftrightarrow u_0 = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot \frac{8}{10} \cdot 250} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20 \ \frac{m}{s}$$

Άσκηση 11, Κεφάλαιο 3.

Το βάρος του σώματος είναι $B = mg = 200 \cdot 10 = 2.000 \ N$. Από το σχήμα της ασκήσεως, προκύπτει ότι:

$$\sin\hat{\theta} = \frac{F_y}{F} \Leftrightarrow F_y = F \sin\hat{\theta} = 200 \frac{1}{2} = 100 \ N$$

$$\cos\hat{\theta} = \frac{F_x}{F} \Leftrightarrow F_x = F \cos\hat{\theta} = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \ N$$

Αφού το σώμα ακινητεί, για τις δυνάμεις που βρίσκονται στην διεύθυνση του κατακόρυφου άξονα, ισχύει σύμφωνα με τους νόμους του Νεύτωνα ότι:

$$B = F_K + F_y \Leftrightarrow 2.000 = F_K + 100 \Leftrightarrow F_K = 1.900 \ N$$

Για το μέτρο της δυνάμεως της τριβής ισχύει ότι: $T = \mu \cdot F_K = \mu \cdot 1.900$. Αφού το σώμα ακινητεί, σύμφωνα με τους νόμους του Νεύτωνα, για τις δυνάμεις F_x, T που βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, ισχύει ότι:

$$F_x = T \Leftrightarrow 100\sqrt{3} = T \Leftrightarrow 1\cancel{00}\sqrt{3} = \mu \cdot 1.9\cancel{00} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \mu \cdot 19 \Leftrightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{19}$$

Άσκηση 12, Κεφάλαιο 3.

Το βάρος του σώματος είναι $B = mg = 5 \cdot 10 = 50 \ N$. Η ανάλυση της δυνάμεως του βάρους B σε δυο συνιστώσες, μία οριζόντια κατά τη διεύθυνση της κινήσεως, B_x και μία με κατεύθυνση κάθετη στην ευθεία της κινήσεως, B_y δίνει:

$$B_x = B \sin\hat{\varphi} = 50 \frac{1}{2} = 25 \ N \ \ \& \ \ B_y = B \cos\hat{\varphi} = 50 \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \ N$$

(**α**) Αφού το σώμα κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα, από τους νόμους του Νεύτωνα προκύπτει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδέν. Δηλαδή $\Sigma F = 0$. Άρα $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.

(**β**) Από τη σχέση $\Sigma F_x = 0$ προκύπτει ότι: $T = B_x = 25 \ N$.

(γ) Από τη σχέση $\Sigma F_y = 0$ προκύπτει ότι: $F_k = B_y = 25\sqrt{3}\ N$, όπου F_k είναι η αντίδραση του εδάφους. Για το μέτρο της δυνάμεως της τριβής προκύπτει ότι:
$T = \mu \cdot F_k = \mu \cdot B_y = \mu \cdot 25 \cdot \sqrt{3}$.

Άρα, $\left.\begin{cases} T = 25 \\ T = \mu \cdot 25 \cdot \sqrt{3} \end{cases}\right\} \mu \cdot 25 \cdot \sqrt{3} = 25 \Leftrightarrow \mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Άσκηση 13, Κεφάλαιο 3.

$$p = mu \Leftrightarrow m = \frac{p}{u} = \frac{450.000}{30} = 15.000\ kg$$

$$F_k = m\frac{u^2}{R} = 15.000\frac{30 \cdot 30}{250} = 60 \cdot 900 = 54.000\ N$$

Άσκηση 14, Κεφάλαιο 3.

(α) Όταν το όχημα ακινητεί ισχύει ότι: $P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}} = P_{\text{ΠΥΡΟΒΟΛΟΥ}} + P_{\text{ΒΛΗΜΑΤΟΣ}} = 0 + 0 = 0$
Μετά την εκτόξευση του βλήματος, ισχύει ότι:
$P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}} = P_{\text{ΠΥΡΟΒΟΛΟΥ}} + P_{\text{ΒΛΗΜΑΤΟΣ}} = M_{\Pi} \cdot u_{\Pi} + m_{B} \cdot u_{B} = 30.000 \cdot u_{\Pi} + 100 \cdot 300$.
Από την αρχή διατηρήσεως της ορμής προκύπτει ότι

$$P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}} = P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}} \Leftrightarrow 0 = 3\cancel{0}.\cancel{000} \cdot u_{\Pi} + 1\cancel{00} \cdot 3\cancel{00} \Leftrightarrow 0 = 3 \cdot u_{\Pi} + 3 \Leftrightarrow u_{\Pi} = -1\ \frac{m}{s}$$

(β) Όταν το όχημα έχει ταχύτητα $u = -10\ \dfrac{m}{s}$ ισχύει ότι:

$P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}} = P_{\text{ΠΥΡΟΒΟΛΟΥ}} + P_{\text{ΒΛΗΜΑΤΟΣ}} = \left(M_{\Pi} + m_{B}\right)u = 30.100 \cdot (-10)$.
Μετά την εκτόξευση του βλήματος, ισχύει ότι:
$P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}} = P_{\text{ΠΥΡΟΒΟΛΟΥ}} + P_{\text{ΒΛΗΜΑΤΟΣ}} = M_{\Pi} \cdot u'_{\Pi} + m_{B} \cdot u_{B} = 30.000 \cdot u'_{\Pi} + 100 \cdot 300$
Από την αρχή διατηρήσεως της ορμής προκύπτει ότι:

$$P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}} = P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}} \Leftrightarrow 30.1\cancel{00} \cdot \left(-1\cancel{0}\right) = 30.\cancel{000} \cdot u'_{\Pi} + 1\cancel{00} \cdot 30\cancel{0}$$

$$\Leftrightarrow -301 = 30 \cdot u'_{\Pi} + 30 \Leftrightarrow -331 = 30 \cdot u'_{\Pi} \Leftrightarrow u'_{\Pi} = -\frac{331}{30} = -11{,}0\overline{3}$$

Άσκηση 15, Κεφάλαιο 3.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta u}{\Delta t} = \frac{1.50\cancel{0} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}\cancel{0}}}{\dfrac{1}{\cancel{2}}} = 150\ N$$

Άσκηση 16, Κεφάλαιο 3.

Το βάρος του πυραύλου είναι: $B = m_{\text{ΠΥΡ}} \cdot g = 10.000 \cdot 10 = 100.000\ N$.

Η ανυψωτική δύναμη είναι: $F = \dfrac{p}{t} = \dfrac{m_{\text{ΑΕΡ}} \cdot u}{t} = \dfrac{m_{\text{ΑΕΡ}} \cdot 250}{1} = 250 \cdot m_{\text{ΑΕΡ}}$

Για να καταφέρει να ανυψωθεί ο πύραυλος, πρέπει:
$F > B \Leftrightarrow 250 \cdot m_{\text{ΑΕΡ}} > 100.000 \Leftrightarrow m_{\text{ΑΕΡ}} > 400$. Άρα, πρέπει να φύγουν τουλάχιστον 400 kg αερίων ανά sec, ώστε να αρχίσει ο πύραυλος να ανυψώνεται.

Άσκηση 17, Κεφάλαιο 3.

$$P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}} = m \cdot u_1 = \frac{1}{20}(-20) = -1\, kg\frac{m}{s},\quad P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}} = m \cdot u_2 = \frac{1}{20}25 = \frac{5}{4}\, kg\frac{m}{s}$$

$$\Delta P = P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}} - P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}} = \frac{5}{4} - (-1) = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}\, kg\frac{m}{s},\quad \overline{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\frac{9}{4}\, kg\frac{m}{s}}{1\, s} = \frac{9}{4}\, N$$

Συνεπώς, η μέση δύναμη που ασκεί ο τενίστας, στο μπαλάκι, ανά δευτερόλεπτο, είναι $\overline{F} = \frac{9}{4}\, N$.

Άσκηση 18, Κεφάλαιο 3.

Είναι $x_2 = 0{,}05\, cm = \frac{5}{100}\, cm = \frac{5}{100}\frac{1}{100}\, m$, $F = kx \Leftrightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{20}{\frac{2}{10}} = \frac{200}{2} = 100\, \frac{N}{m}$,

$F' = kx' \Leftrightarrow x' = \frac{F'}{k} = \frac{15}{100} = 0{,}15\, m$, $B = k \cdot x_2 = 100\frac{5}{100}\frac{1}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}\, N$

Άσκηση 19, Κεφάλαιο 3.

$$\Delta\ell = \frac{F}{s}\frac{1}{Y}\ell = \frac{10.000}{\frac{1}{1.000}}\frac{1}{5\cdot 10^{10}}\ell = \frac{10^7}{5\cdot 10^{10}}\ell = \frac{\ell}{5.000}$$

Άσκηση 20, Κεφάλαιο 3

1η περίπτωση

Έστω ότι η ράβδος είναι στερεωμένη στο σταθερό και ακλόνητο σημείο O, γύρω από το οποίο μπορεί να περιστρέφεται. Οι δυνάμεις F_1, F_2 έχουν σκοπό να περιστρέψουν τη ράβδο αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (αρνητική φορά κινήσεως). Για τις ροπές τους ισχύει ότι: $\tau_{1,2} = \tau_1 + \tau_2 = F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 7 = 1\cdot 3 + 6 \cdot 7 = 3 + 42 = 45\, N\cdot m$. Οι δυνάμεις F_3, F_4 έχουν σκοπό να περιστρέψουν τη ράβδο σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (θετική φορά κινήσεως). Για τις ροπές τους ισχύει ότι: $\tau_{3,4} = \tau_3 + \tau_4 = F_3 \cdot 2 + F_4 \cdot 10 = 3\cdot 2 + 4\cdot 10 = 6 + 40 = 46\, N\cdot m$. Η δύναμη B του βάρους της ράβδου ασκείται στο μέσον της και έχει σκοπό να την περιστρέψει σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (θετική φορά κινήσεως). Για τη ροπή της ισχύει ότι $\tau_B = B \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25\, N\cdot m$. Για τη συνισταμένη των ροπών των F_3, F_4, B ισχύει ότι $\tau_{3,4,B} = \tau_{3,4} + \tau_B = 46 + 25 = 71\, N\cdot m$. Για την ολική ροπή της ράβδου ισχύει ότι $\tau_{\text{ΟΛ}} = \tau_{3,4,\text{B}} - \tau_{1,2} = 71 - 45 = 26\, N\cdot m$. Άρα δεν ισορροπεί η ράβδος. Προκειμένου να ισορροπεί η ράβδος, πρέπει να τοποθετήσομε δύναμη $26\, N$ ομόρροπη των F_1, F_2 σε απόσταση $1\, m$ από το σημείο O ή δύναμη $2{,}6\, N$ αντίρροπη των F_3, F_4, B στο σημείο εφαρμογής της F_4, ή να αφαιρεθεί εξολοκλήρου η F_3 και ταυτοχρόνως να μεταφερθεί το σημείο εφαρμογής της F_4 αριστερότερα κατά $5\, m$ προκειμένου να συμπίπτει με το σημείο εφαρμογής του βάρους, κ.ο.κ.

2η περίπτωση

Έστω ότι η ράβδος είναι στερεωμένη στο σταθερό και ακλόνητο σημείο από το οποίο διέρχεται το βάρος της B, γύρω από το οποίο μπορεί να περιστρέφεται, δηλαδή το μέσον της. Οι δυνάμεις F_2, F_3 έχουν σκοπό να περιστρέψουν τη ράβδο αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (αρνητική φορά κινήσεως). Για τις ροπές τους ισχύει ότι: $\tau_{2,3} = \tau_2 + \tau_3 = F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 3 = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 12 + 9 = 21\ N \cdot m$

Η ροπή του βάρους B της ράβδου είναι μηδέν διότι ο μοχλοβραχίονας που της αντιστοιχεί ισούται με το μηδέν. Οι δυνάμεις F_1, F_4 έχουν σκοπό να περιστρέψουν τη ράβδο σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (θετική φορά κινήσεως). Για τις ροπές τους ισχύει ότι:

$$\tau_{1,4} = \tau_1 + \tau_4 = F_1 \cdot 2 + F_4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 2 + 20 = 22\ N \cdot m$$

Για την ολική ροπή της ράβδου ισχύει ότι: $\tau_{\text{ΟΛ}} = \tau_{1,4} - \tau_{2,3} = 22 - 21 = 1\ N \cdot m$.

Άρα δεν ισορροπεί η ράβδος. Προκειμένου να ισορροπεί η ράβδος, πρέπει να μετακινήσομε το σημείο εφαρμογής της F_1 κατά $1\ m$ προς το μέσον της ράβδου, οπότε ο μοχλοβραχίονας που της αντιστοιχεί από $2\ m$ γίνεται $1\ m$.

Άσκηση 21, Κεφάλαιο 3,.

Αφού η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών $\Sigma\tau$ είναι μηδέν, η στροφορμή L θα παραμένει σταθερή. Άρα, από εφαρμογή του θεωρήματος παραλλήλων αξόνων (ή θεώρημα Steiner) προκύπτει ότι

$$\mathrm{I} \cdot \omega = \mathrm{I}' \cdot \omega' \Leftrightarrow \mathrm{I} \cdot \omega = \left(\mathrm{I} + m \cdot r^2\right) \cdot \omega' \Leftrightarrow \mathrm{I} \cdot \omega = \mathrm{I} \cdot \omega' + m \cdot r^2 \cdot \omega' \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{I}\left(\omega - \omega'\right) = m \cdot r^2 \cdot \omega' \Leftrightarrow \mathrm{I} = \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega'}{\omega - \omega'} = \frac{\frac{\cancel{2}}{10\cancel{0}} \frac{\cancel{5}}{100} \frac{5}{100} \cancel{2\pi} \cdot f'}{\cancel{2\pi} \cdot f - \cancel{2\pi} \cdot f'} = \frac{\frac{5}{100.000} f'}{f - f'} =$$

$$\frac{\frac{1}{20.00\cancel{0}} 8\cancel{0}}{90 - 80} = \frac{\frac{8}{2.000}}{10} = \frac{8}{20.000} = \frac{1}{2.500}\ kg \cdot m^2$$

Άσκηση 22, Κεφάλαιο 3.

Οι δυνάμεις F_1 & F_2 έχουν σκοπό να περιστρέψουν τη ράβδο αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και η ολική τους ροπή είναι $\tau_1 = F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 10 = 80 \cdot 4 + 40 \cdot 10 = 320 + 400 = 720\ \mathrm{N} \cdot m$. Η δύναμη Β του βάρους της ράβδου, σκοπό έχει να την στρέψει σύμφωνα με τη φορά κινήσεως των δεικτών του ρολογιού και η ροπή της είναι $\tau_2 = B \cdot 5 = 120 \cdot 5 = 600\ \mathrm{N} \cdot m$. Η ολική ροπή της ράβδου είναι $\tau = \tau_1 - \tau_2 = 720 - 600 = 120\ \mathrm{N} \cdot m$ με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού.

Άσκηση 23, Κεφάλαιο 3,

$\Sigma F = F_1 - F_2 = 10 - 7 = 3\ N$, $\quad \tau = \Sigma F \cdot R = 3 \cdot 4\ N \cdot m = 12\ N \cdot m$

Άσκηση 24, Κεφάλαιο 3,

Αν F_X η οριζόντια και F_Y η κατακόρυφη συνιστώσα στις οποίες αναλύεται η δύναμη F με $\widehat{\left(F,\ F_X\right)} = \hat{\varphi} = 30^0$, είναι $\widehat{\left(F,\ F_X\right)} = 60^0$. Άρα

$$sin\ 30^0 = \frac{F_Y}{F} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{F_Y}{40} \Leftrightarrow F_Y = 20\ N,$$

$$cos\ 30^0 = \frac{F_X}{F} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{F_X}{40} \Leftrightarrow F_X = \frac{\sqrt{3}}{2}40 = 20\sqrt{3}\ N$$

Άσκηση 25, Κεφάλαιο 3.

(**α**) Όταν η ράβδος είναι αβαρής, οι μόνες δυνάμεις που τις ασκούνται είναι τα βάρη B_1, B_2. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο είναι $B_1 + B_2$.

Αν η διεύθυνση της συνισταμένης διέρχεται από το σημείο Ο, ισχύει σύμφωνα με το θεώρημα Varignon, ότι:

$$B_1 \cdot \mathrm{OA} = B_2 \cdot \mathrm{O\Gamma} \Leftrightarrow B_1 \cdot (\ell - x_1) = B_2 \cdot x_1 \Leftrightarrow B_1 \cdot \ell - B_1 \cdot x_1 = B_2 \cdot x_1 \Leftrightarrow$$

$$B_1 \cdot \ell = (B_1 + B_2) x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{B_1}{B_1 + B_2}\ell = \frac{8}{8+14}2 = \frac{8}{11}\ m$$

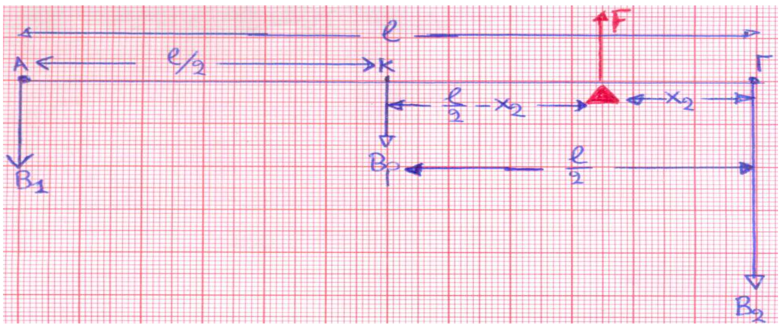
(**β**) Όταν η ράβδος έχει βάρος $B_\rho = 4\ N$, επειδή είναι ομογενής και ισοπαχής, αυτό ασκείται στο μέσον της Κ. Στα άκρα της ράβδου ασκούνται τα βάρη B_1, B_2.

Η αντίδραση F ασκείται στο σημείο στηρίξεως Ο. Προκειμένου η ράβδος να ισορροπεί οριζόντια, πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων που της ασκούνται, να είναι μηδέν. Συνεπώς:

$$\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{OA} + \mathrm{B}_\rho \cdot \mathrm{KO} + F \cdot 0 - \mathrm{B}_2 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{B}_1 (\ell - x_2) + \mathrm{B}_\rho \left(\frac{\ell}{2} - x_2\right) - \mathrm{B}_2 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{B}_1 \cdot \ell - \mathrm{B}_1 \cdot x_2 + \mathrm{B}_\rho \frac{\ell}{2} - \mathrm{B}_\rho \cdot x_2 - \mathrm{B}_2 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{B}_1 \cdot \ell + \mathrm{B}_\rho \frac{\ell}{2} = x_2 (\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_\rho + \mathrm{B}_2) \Leftrightarrow$$

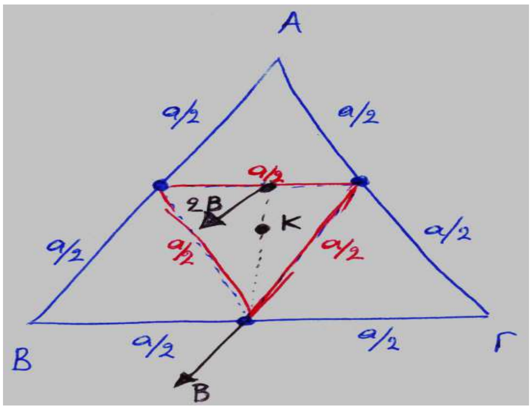
$$x_2 = \frac{\mathrm{B}_1 \cdot \ell + \mathrm{B}_\rho \frac{\ell}{2}}{\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_\rho + \mathrm{B}_2} = \frac{2\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_\rho}{2(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_\rho + \mathrm{B}_2)}\ell = \frac{2 \cdot 8 + 4}{\cancel{2}(8+4+14)}\cancel{2} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} = 0,769\ m$$

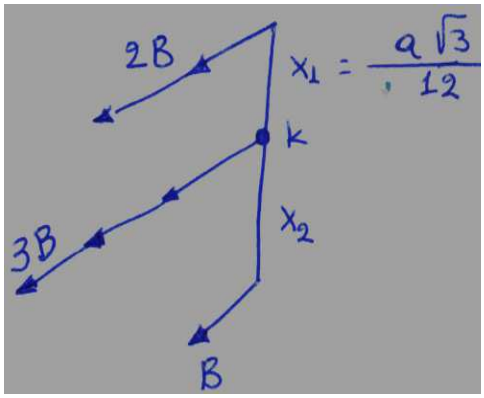


Άσκηση 26, Κεφάλαιο 3.

Είναι η τομή των διχοτόμων του τριγώνου που σχηματίζεται από τα μέσα των ράβδων. Γνωρίζομε ότι το ύψος υ ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a είναι $\upsilon = \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$. Το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Η απόσταση του από την πλευρά ΒΓ ισούται με το $\frac{1}{3}$ του ύψους υ, δηλαδή είναι $x_2 = \frac{1}{3}\upsilon = \frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Από το 2^o σχήμα, ισχύει ότι: $2Bx_1 = Bx_2 \Leftrightarrow 2x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{12}$.





Άσκηση 27, Κεφάλαιο 3.

$$x_{\kappa\mu} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 9}{1+2} = \frac{3+18}{3} = 1+6 = 7\ m$$

Άσκηση 28, Κεφάλαιο 3.

Το κέντρο βάρους K του στερεού σώματος που προκύπτει, ανήκει στην ευθεία K_1, K_2 όπου K_1, K_2 τα κέντρα βάρους των δυο πλακών. Συνεπώς K είναι το σημείο από όπου διέρχεται ο φορέας της συνισταμένης των βαρών B_1, B_2 των δυο πλακών. Είναι $\frac{B_1}{B_2} = \frac{KK_2}{KK_1}$. Ισχύει ότι

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\varepsilon\cdot V_1}{\varepsilon\cdot V_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{h\cdot S_1}{h\cdot S_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{a^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$. Άρα $\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{KK_2}{KK_1}$ Είναι:

$$\frac{KK_2}{KK_1} = \frac{K_1K_2 - x}{x} = \frac{K_1K_2}{x} - 1 = \frac{K_1K + KK_2}{x} - 1 = \frac{\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{x} - 1 =$$

$$\frac{\frac{3a}{6} + \frac{a\sqrt{3}}{6}}{x} - 1 = \frac{3a + a\sqrt{3}}{6x} - 1 = \frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6x} - 1$$

Συνεπώς:

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6x} - 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{3} = \frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{2x} - 3 \Leftrightarrow 4\sqrt{3} + 3 = \frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{2\left(4\sqrt{3}+3\right)}$$

Με αντικατάσταση είναι $x = \frac{20\left(3+\sqrt{3}\right)}{2\left(4\sqrt{3}+3\right)} = 10\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+3} \cong 10\frac{4,73}{9,93} = \frac{47,3}{9,93} \cong 4,76\ cm$.

Άσκηση 29, Κεφάλαιο 3.

Το βάρος B του στερεού σώματος που απομένει, ισούται με τη διαφορά του βάρους B_1 του αρχικού στερεού σώματος, μείον το βάρος B_2 του στερεού σώματος που αφαιρέθηκε. Συνεπώς, το βάρος B είναι συνισταμένη δύο παραλλήλων και αντίρροπων δυνάμεων και το σημείο εφαρμογής του ανήκει στην διάκεντρο των δυο κύκλων. Ισχύει ότι: $B_1 \cdot KK_1 = B_2 \cdot KK_2 \Leftrightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{KK_2}{KK_1}$

Είναι $\frac{B_1}{B_2} = \frac{\varepsilon \cdot V_1}{\varepsilon \cdot V_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{h \cdot S_1}{h \cdot S_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi \cdot R^2}{\pi \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2} = \frac{R^2}{\frac{R^2}{16}} = 16$. Άρα $16 = \frac{KK_2}{KK_1}$

Είναι $\frac{KK_2}{KK_1} = \frac{KK_1 + K_1K_2}{KK_1} = \frac{x + \frac{R}{4}}{x} = \frac{x}{x} + \frac{\frac{R}{4}}{x} = 1 + \frac{R}{4x}$

Άρα, $16 = 1 + \frac{R}{4x} \Leftrightarrow 15 = \frac{R}{4x} \Leftrightarrow x = \frac{R}{60}$.

Άσκηση 30, Κεφάλαιο 3.

Είναι $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\pi}\ Hz$, $\quad u = \omega \cdot R = 2\pi \cdot f \cdot R = \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{4}\pi} \cdot \cancel{2} = \frac{\pi}{\pi} = 1\ \frac{m}{s}$

$F_K = m\frac{u^2}{R} = 3\frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}\ N$

Άσκηση 31, Κεφάλαιο 3.

Είναι: $F_K = m\frac{u^2}{R} \Leftrightarrow 300 = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{u^2}{\frac{3}{\cancel{2}}} \Leftrightarrow 300 = \frac{u^2}{3} \Leftrightarrow u^2 = 900 \Leftrightarrow u = 30\ \frac{m}{s}$

Ισχύει ότι: $u = \omega \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \Leftrightarrow f = \frac{u}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{30}{\cancel{2}\pi\frac{3}{\cancel{2}}} = \frac{30}{3 \cdot \pi} = \frac{10}{\pi}\ Hz$

Άρα, $T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{10}\ s$

Σε χρόνο T το σώμα κάνει 1 πλήρη περιστροφή.
Σε χρόνο $10 \cdot T$ το σώμα κάνει 10 πλήρεις περιστροφές.

Συνεπώς, $t = 10 \cdot T = 10\frac{\pi}{10} = \pi\ s$.

Άσκηση 32, Κεφάλαιο 3.

Το βάρος του δορυφόρου παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως. Άρα είναι:

$$\left.\begin{aligned} F_K &= m\frac{u^2}{R} \\ F_K &= B = mg \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \cancel{m}\frac{u^2}{R} = \cancel{m}g \Leftrightarrow \frac{u^2}{R} = g \Leftrightarrow u = \sqrt{R \cdot g} = \sqrt{6.400.000 \cdot 10} = 8.000\ \frac{m}{s}$$

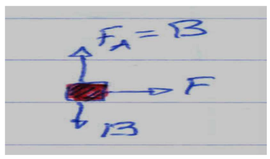
Η ταχύτητα περιφοράς του δορυφόρου γύρω από τη Γη δίνεται από τον τύπο $u = \sqrt{R \cdot g}$, συνεπώς είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του δορυφόρου.

Άσκηση 33, Κεφάλαιο 3.

Τα βάρη των σωμάτων Α, Β αντίστοιχα υπολογίζονται από τους τύπους $B_1 = m_1 \cdot g = 200\ N$, $B_2 = m_2 \cdot g = 200\ N$. Οι τριβές που ασκούνται στα σώματα Α, Β υπολογίζονται αντίστοιχα από τους τύπους $\mathrm{T}_1 = \mu \cdot B_1 = \frac{2}{10} 200\ N = 40\ N$, $\mathrm{T}_2 = \mu \cdot B_2 = \frac{2}{10} 200\ N = 40\ N$. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στα δυο σώματα κατά τον οριζόντιο άξονα πάνω στον οποίο κινούνται είναι $\Sigma F = F - \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 = 120 - 40 - 40 = 40\ N$. Τα δύο σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση που δίνεται από τον τύπο $\Sigma F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{40}{20+20} = 1\ \frac{m}{s^2}$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4''$ έχουν κοινή ταχύτητα μέτρου $u_4 = a \cdot t_1 = 1\ \frac{m}{s^2} 4'' = 4\ \frac{m}{s}$. Όταν το νήμα κοπεί, το σώμα Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_4 και επιβράδυνση $a_2 = \frac{\mathrm{T}_2}{m_2} = \frac{40}{20} = 2\ \frac{m}{s^2}$, άρα ακινητεί $(u = 0)$ μετά από χρόνο που δίνεται από τον τύπο $u = u_4 - a_2 \cdot t \Leftrightarrow 0 = 4 - 2 \cdot t \Leftrightarrow t = 2''$ έχοντας διανύσει απόσταση $s_2 = \frac{u_4^2}{2 \cdot a_2} = \frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 4\ m$. Το σώμα Α, όταν κοπεί το νήμα, θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_4 και επιτάχυνση $a_1 = \frac{F - \mathrm{T}_1}{m_1} = \frac{120-40}{20} = \frac{80}{20} = 4\ \frac{m}{s^2}$ άρα σε χρονικό διάστημα $5'' = 9'' - 4''$ διανύει απόσταση $s_1 = u_4 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_1 (t_2 - t_1)^2 = 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} 4 \cdot 25 = 20 + 50 = 70\ m$.

Επειδή το σώμα Α ήταν πάντα μπροστά από το Β κατά απόσταση $\ell = 2\ m$, η μεταξύ τους απόσταση τη χρονική στιγμή $t_2 = 9''$ είναι $s_1 + \ell - s_2 = 70 + 2 - 4 = 68\ m$.
Παρατήρηση. Το νήμα θεωρείται αβαρές και μη εκτατό.

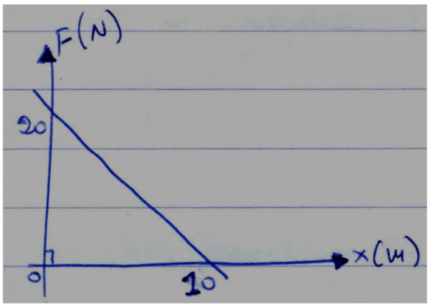
Άσκηση 34, Κεφάλαιο 3.

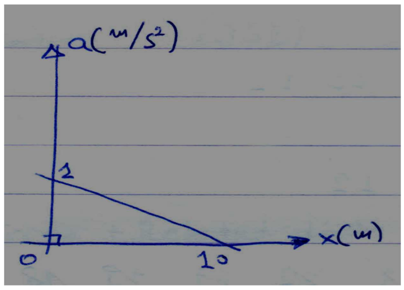


$F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{20 - 2x}{20} = \frac{20}{20} - \frac{2x}{20} = 1 - \frac{x}{10}$.

Όταν $x = 0\ m$ τότε $F = 20\ N$ και $a = 1\ \frac{m}{s^2}$. Όταν $x_1 = 10\ m$ τότε $F = 0\ N$ και $a = 0\ \frac{m}{s^2}$. Το σώμα επιταχύνει διότι $\Sigma F = F > 0$. Όταν $\Sigma F = F = 0$ τότε το σώμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα του. Όταν $\Sigma F = F < 0$ τότε το σώμα επιβραδύνει.

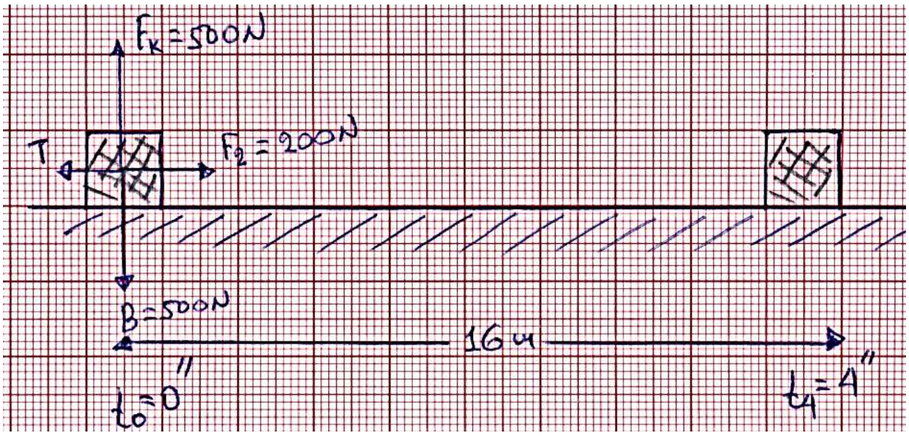
(**β**) Το έργο της δυνάμεως που προσφέρθηκε στο σώμα είναι $W = F \cdot x = \frac{1}{2} 10 \cdot 20 = 100\ J$ και από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας είναι $100 = \frac{1}{2} m \cdot u^2 \Leftrightarrow 100 = \frac{1}{2} 20 \cdot u^2 \Leftrightarrow u^2 = 10 \Leftrightarrow u = \sqrt{10}\ \frac{m}{s}$.





Άσκηση 35, Κεφάλαιο 3.

(α) **i.** Σωστό, **ii.** Σωστό, **iii.** Σωστό, **iv.** Λάθος

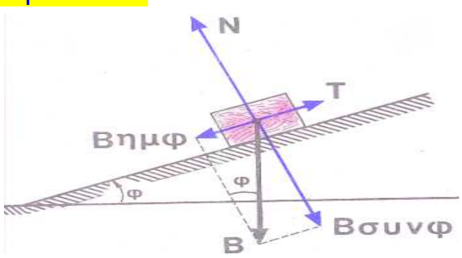


(β) $B = m \cdot g = 500\ N$. Επειδή το σώμα δεν κινείται στον κατακόρυφο άξονα, ισχύει ότι $F_K = B = 500\ N$. Είναι $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Leftrightarrow \cancel{16} = \frac{1}{2} a \cdot \cancel{4^2} \Leftrightarrow a = 2\ \frac{m}{s^2}$ και $\Sigma F = m \cdot a = 100\ N$. Για τον υπολογισμό της τριβής ολισθήσεως είναι $\Sigma F = F_2 - T \Leftrightarrow 100 = 200 - T \Leftrightarrow T = 100\ N$.

Άσκηση 36, Κεφάλαιο 3.

$$\left.\begin{array}{l} m = 25\ kg \\ g = 10\ \frac{m}{s^2} \end{array}\right\} B = m \cdot g = 250\ N$$

$\hat{\varphi} = 30^0$, $F = 100\ N$



(α) Αφού το κιβώτιο ακινητεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $F + T_\sigma = B \cdot \sin 30^0 \Leftrightarrow 100 + T_\sigma = 250 \frac{1}{2} \Leftrightarrow T_\sigma = 25\ N$

(β) Η σταθερή δύναμη (ή συνισταμένη δυνάμεων) δίνει σταθερή επιτάχυνση, άρα το κιβώτιο κατά την κάθοδο του εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

$$\left\{\begin{array}{l} u=a\cdot t \\ x=\frac{1}{2}a\cdot t^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 24=a\cdot t \\ 12=\frac{1}{2}a\cdot t^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 24=a\cdot t \\ 24=a\cdot t^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cancel{a}\cdot t=\cancel{a}\cdot t^2 \Leftrightarrow t=t^2 \Leftrightarrow t=1''$$

Συνεπώς από $u=a\cdot t \Leftrightarrow 24=a\cdot 1 \Leftrightarrow a=24\frac{m}{s^2}$

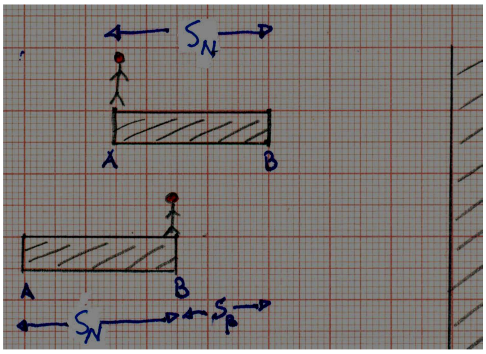
Από τον $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα, για τη συνισταμένη των δυνάμεων, ισχύει ότι

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma F=m\cdot a=25\cdot 24 \\ \Sigma F=B\cdot \sin 30^0-T=125-T \end{array}\right\} 25\cdot 24=125-T \Leftrightarrow 600=125-T \Leftrightarrow T=-475$$

Η τριβή ολισθήσεως είναι $T=\mu\cdot N=\mu\cdot B\cdot\cos 30^0=\mu\cdot 250\frac{\sqrt{3}}{2}=125\cdot\mu\cdot\sqrt{3}$

Από τη μεταβατική ιδιότητα είναι $125\cdot\mu\cdot\sqrt{3}=475 \Leftrightarrow \mu\cdot\sqrt{3}=3,8 \Leftrightarrow \mu=\frac{3,8}{\sqrt{3}}$

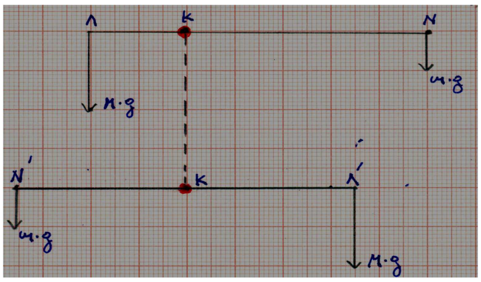
Άσκηση 37, Κεφάλαιο 3.



Το σύστημα ναύτης– βάρκα είναι μονωμένο διότι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι μηδέν. Όταν ο ναύτης προχωρήσει κατά διάστημα s_N πάνω στη βάρκα και η βάρκα κινηθεί αντίθετα κατά διάστημα s_β, τότε ο ναύτης θα έχει κινηθεί σε σχέση με το νερό κατά διάστημα s_N-s_β. Από την αρχή διατηρήσεως της ορμής ισχύει ότι

$$p_N=p_\beta \Leftrightarrow m_N\cdot u_N=m_\beta\cdot u_\beta \Leftrightarrow 7\cancel{0}\cdot u_N=13\cancel{0}\cdot u_\beta \Leftrightarrow 7\cdot u_N=13\cdot u_\beta \Leftrightarrow$$

$$7\frac{s_N-s_\beta}{\cancel{t}}=13\frac{s_\beta}{\cancel{t}} \Leftrightarrow 7\left(s_N-s_\beta\right)=13\cdot s_\beta \Leftrightarrow 7\cdot s_N=20\cdot s_\beta \Leftrightarrow 7\cancel{0}=2\cancel{0}\cdot s_\beta \Leftrightarrow s_\beta=3,5\ m$$



$2^{ος}$ τρόπος. Αφού οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ναύτης – βάρκα έχουν συνισταμένη μηδέν, το κέντρο βάρους του συστήματος θα παραμένει σταθερό.

Από το πάνω τμήμα του σχήματος προκύπτει ότι:

$$(\Lambda\mathrm{K})M\cdot\cancel{g}=(\mathrm{KN})m\cdot\cancel{g} \Leftrightarrow (\Lambda\mathrm{K})M=(\mathrm{KN})m \Leftrightarrow (\Lambda\mathrm{K})13\cancel{0}=(\mathrm{KN})7\cancel{0} \Leftrightarrow$$

$$13(\Lambda\mathrm{K})=7(\mathrm{KN}) \Leftrightarrow \frac{7}{13}=\frac{(\Lambda\mathrm{K})}{(\mathrm{KN})} \Leftrightarrow \frac{7}{7+13}=\frac{(\Lambda\mathrm{K})}{(\Lambda\mathrm{K})+(\mathrm{KN})} \Leftrightarrow \frac{7}{20}=\frac{(\Lambda\mathrm{K})}{(\Lambda N)} \Leftrightarrow$$

$(\Lambda\mathrm{K})=\frac{7}{20}(\Lambda N)$. Από το κάτω τμήμα του σχήματος προκύπτει ότι:

$$m\cdot\cancel{g}(\mathrm{N'K})=M\cdot\cancel{g}(\mathrm{K}\Lambda') \Leftrightarrow m(\mathrm{N'K})=M(\mathrm{K}\Lambda') \Leftrightarrow 7\cancel{0}(\mathrm{N'K})=13\cancel{0}(\mathrm{K}\Lambda') \Leftrightarrow$$

$$7(\mathrm{N'K})=13(\mathrm{K}\Lambda') \Leftrightarrow \frac{7}{13}=\frac{(\mathrm{K}\Lambda')}{(\mathrm{N'K})} \Leftrightarrow \frac{7}{7+13}=\frac{(\mathrm{K}\Lambda')}{(\mathrm{K}\Lambda')+(\mathrm{N'K})} \Leftrightarrow \frac{7}{20}=\frac{(\mathrm{K}\Lambda')}{(\mathrm{N'}\Lambda')} \Leftrightarrow$$

$(\mathrm{K}\Lambda')=\frac{7}{20}(\mathrm{N}'\Lambda')$. Η βάρκα διανύσει διάστημα

$$(\Lambda\mathrm{K})+(\mathrm{K}\Lambda')=\frac{7}{20}(\Lambda N)+\frac{7}{20}(\mathrm{N}'\Lambda')=\frac{7}{20}\left[(\Lambda N)+(\mathrm{N}'\Lambda')\right]=\frac{7}{20}s_{\mathrm{N}}=\frac{7}{20}10=3,5\ m$$

Άσκηση 38, Κεφάλαιο 3.

(**α**) (**i**) Λάθος. (**ii**) Σωστό.

(**β**) $P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}}=m_1\cdot u_1+M\cdot 0=m_1\cdot u_1=\frac{1}{10}300=30\ kg\frac{m}{s}$

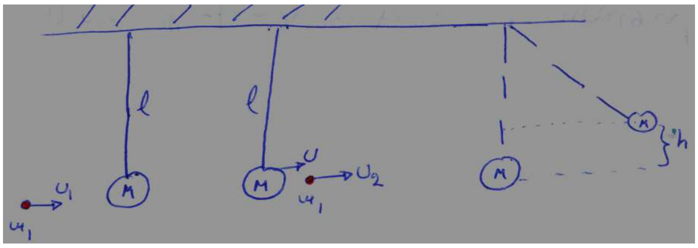
$P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}}=m_1\cdot u_2+M\cdot u=\frac{1}{10}40+2u=(4+2u)\ kg\frac{m}{s}$. Από την αρχή διατηρήσεως ορμής, για το σύστημα βλήμα– σώμα, είναι $4+2u=30 \Leftrightarrow 2u=26 \Leftrightarrow u=13\ \frac{m}{s}$

(**γ**) $\mathrm{K}=\frac{1}{2}M\cdot u^2=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cdot 13^2=169\ J$, $U=M\cdot g\cdot h=2\cdot 10\cdot h=20\cdot h\ J$

Από την αρχή διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας, για το σώμα, προκύπτει ότι:

$$20\cdot h=169 \Leftrightarrow h=\frac{169}{20}=\frac{16,9}{2}=8,45\ m$$

Επιπλέον ερώτημα. Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{\theta}$ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο, όταν το σώμα φτάνει στη θέση μεγίστου ύψους, μετά την κρούση.



Είναι:

$$h=\ell-\ell\cdot cos\hat{\theta} \Leftrightarrow 8,45=5-5\cdot cos\hat{\theta} \Leftrightarrow 3,45=-5\cdot cos\hat{\theta} \Leftrightarrow cos\hat{\theta}=-\frac{3,45}{5}=-0,69$$

Άσκηση 39, Κεφάλαιο 3,.

(**α**) Η αρχική ορμή του βλήματος δίνεται από τον τύπο $P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}}=m\cdot u_0=\frac{1}{\cancel{100}}kg\cdot 3\cancel{00}\ \frac{m}{s}=3\ kg\frac{m}{s}$

(**γ**) Η τελική ορμή του βλήματος δίνεται από τον τύπο $P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}}=m\cdot u_1=\frac{1}{100}kg\cdot 40\ \frac{m}{s}=\frac{4}{10}\ kg\frac{m}{s}$

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος είναι $\Delta P=P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}}-P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}}=3-\frac{4}{10}=2,6\ kg\frac{m}{s}$

(**β**) Η αρχική ορμή του συστήματος βλήμα – σώμα πριν την κρούση είναι

$P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ Συστήματος}}=P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ Βλήματος}}+P_{\text{ΑΡΧΙΚΗ Σώματος}}=3+0=3\ kg\frac{m}{s}$

Η τελική ορμή του συστήματος βλήμα – σώμα πριν την κρούση είναι

$P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ Συστήματος}}=P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ Βλήματος}}+P_{\text{ΤΕΛΙΚΗ Σώματος}}=0,4+M\cdot u_A$

Από την αρχή διατηρήσεως της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων ισχύει ότι $0,4+M\cdot u_A=3 \Leftrightarrow M\cdot u_A=2,6 \Leftrightarrow 2,6\cdot u_A=2,6 \Leftrightarrow u_A=1\ \frac{m}{s}$

(**δ**) Η μέση δύναμη που δέχεται το βλήμα είναι $\overline{F} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{2,6}{\frac{1}{2}} = 5,2\ N$

(**ε**) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α είναι $\overline{F} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{2,6}{\frac{1}{2}} = 5,2\ N$

(**στ**) $B = M \cdot g = 2,6 \cdot 10 = 26\ N$ Από την ισορροπία του σώματος στον κατακόρυφο άξονα ισχύει ότι $B = N$ όπου N η αντίδραση του εδάφους. Ισχύει ότι $T = \mu \cdot N = 0,3 \cdot 26 = 7,8\ N$. Το έργο της τριβής δίνεται από τον τύπο $W_T = T \cdot s = 7,8 \cdot s$ αλλά ισούται και με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος $\Delta K = \frac{1}{2} M \cdot u_A^2 - \frac{1}{2} M \cdot 0^2 = \frac{1}{2} M \cdot u_A^2 = \frac{1}{2} 2,6 \cdot 1^2 = 1,3\ J$. Συνεπώς $7,8 \cdot s = 1,3 \Leftrightarrow s = \dfrac{1,3}{7,8} = \dfrac{1}{6}\ m$.

Άσκηση 40, Κεφάλαιο 3.

$$\left.\begin{array}{l} sin30^0 = \dfrac{1}{2} \\[2ex] sin30^0 = \dfrac{P_2}{P} = \dfrac{\frac{2\cancel{m}}{3} u_2}{\cancel{m} \cdot 10} = \dfrac{2u_2}{30} \end{array}\right\} \dfrac{1}{2} = \dfrac{2u_2}{30} \Leftrightarrow u_2 = \dfrac{30}{4} = 7,5\ \dfrac{m}{s}$$

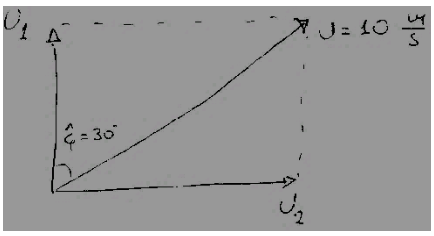
$$\left.\begin{array}{l} cos30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] cos30^0 = \dfrac{P_1}{P} = \dfrac{\frac{\cancel{m}}{3} u_1}{\cancel{m} \cdot 10} = \dfrac{u_1}{30} \end{array}\right\} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{u_1}{30} \Leftrightarrow u_1 = 15 \cdot \sqrt{3}\ \dfrac{m}{s}$$

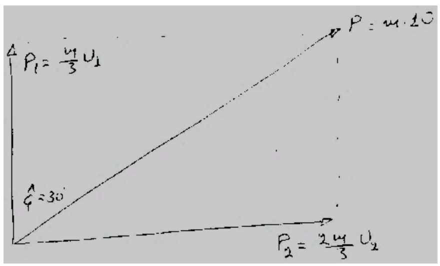
Επαλήθευση.

$$P_1^2 + P_2^2 = P^2 \Leftrightarrow P_1 \cdot P_1 + P_2 \cdot P_2 = P^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\cancel{m}}{3} 15 \cdot \sqrt{3}\right)\left(\frac{\cancel{m}}{3} 15 \cdot \sqrt{3}\right) + \left(\frac{2\cancel{m}}{3} 7,5\right)\left(\frac{2\cancel{m}}{3} 7,5\right) = 100\cancel{m}^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{15 \cdot 15}{3} + 4 \frac{7,5}{3} \frac{7,5}{3} = 100 \Leftrightarrow 15 \cdot 5 + 4 \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 100 \Leftrightarrow 75 + 25 = 100$$





Άσκηση 42, Κεφάλαιο 3.

$$B = m \cdot g = 300\ N, \qquad B = F_K = 300\ N \quad \left.\begin{cases} T = n \cdot F_K \\ T = F_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow F_1 = n \cdot F_K = n \cdot 300\ N$$

Αν F_1 γνωστό τότε n γνωστό. Υπολογισμός των ροπών ως προς το σημείο Γ.

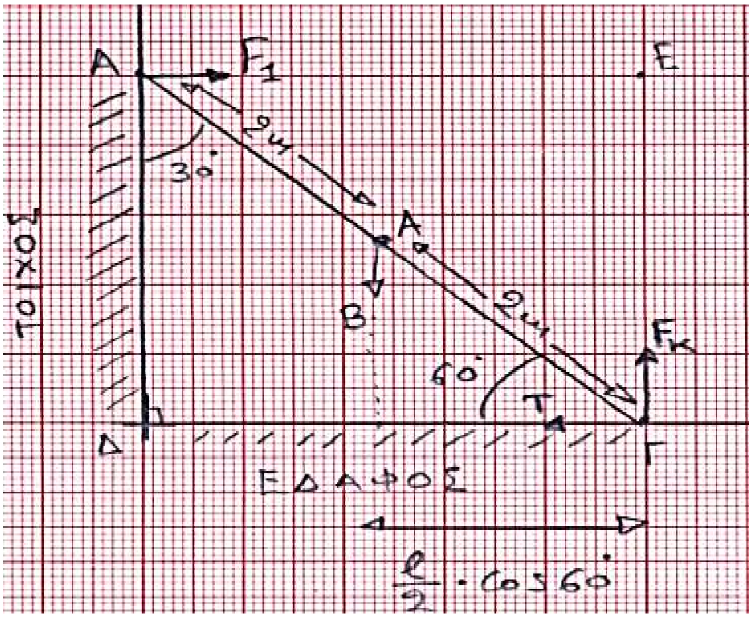
$$F_1 \cdot (\Gamma \mathrm{E}) = \mathrm{B}\frac{\ell}{2}\cos 60^0 \Leftrightarrow F_1 \cdot \cancel{\ell} \cdot \cos 30^0 = \mathrm{B}\frac{\cancel{\ell}}{2}\cos 60^0 \Leftrightarrow$$

$$F_1 \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 300\frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{2}} \Leftrightarrow F_1\sqrt{3} = 150 \Leftrightarrow F_1 = \frac{150}{\sqrt{3}}\ N$$

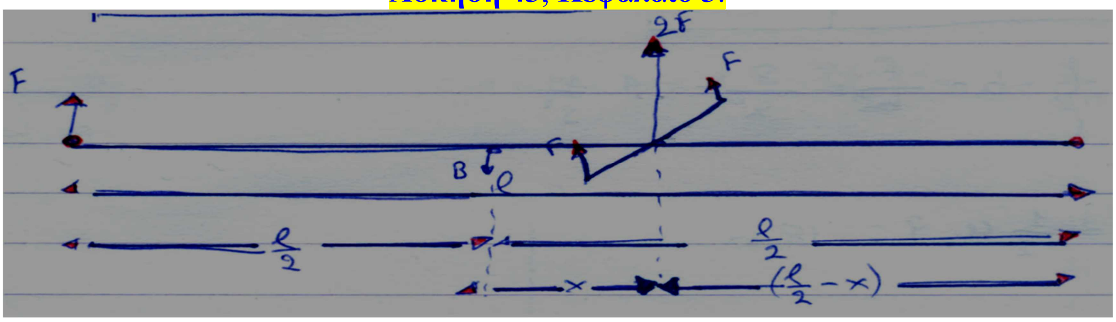
Συνεπώς, $F_1 = n \cdot 300\ N \Leftrightarrow \frac{15\cancel{0}}{\sqrt{3}}\ N = n \cdot 30\cancel{0}\ N \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = 2n \Leftrightarrow n = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Παρατήρηση. Στην άσκηση αυτή γίνεται εφαρμογή του θεωρήματος των τριών δυνάμεων σε ισορροπία, η διατύπωση του οποίου είναι η ακόλουθη.

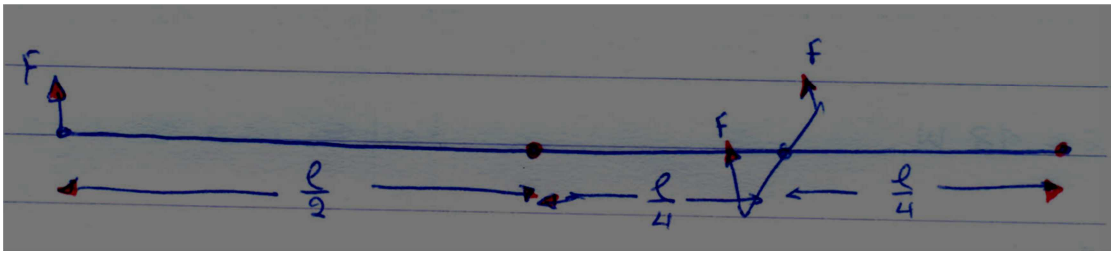
«Τρεις ομοεπίπεδες και μη παράλληλες δυνάμεις μπορούν να ισορροπήσουν μόνο όταν:
1. Οι φορείς τους τέμνονται και
2. Το δυναμοπολύγωνο τους (τρίγωνο) είναι κλειστό.»



Άσκηση 43, Κεφάλαιο 3.



$$\frac{\cancel{B}}{\cancel{3}}\frac{\ell}{2} = x2\frac{\cancel{B}}{\cancel{3}} \Leftrightarrow \frac{\ell}{2} = x2 \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{4}$$

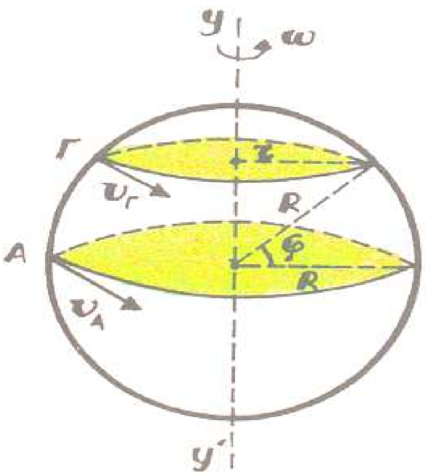


Άσκηση 44, Κεφάλαιο 3.

Η κεντρομόλος δύναμη για το σώμα Α, που βρίσκεται τοποθετημένο στην επιφάνεια της Γης στον Ισημερινό, δίνεται από τον τύπο $F_K = \frac{m\cdot u^2}{R} = \frac{m\cdot(\omega\cdot R)^2}{R} = m\cdot\omega^2\cdot R$.

Ομοίως, για το σώμα Γ που βρίσκεται τοποθετημένο στην επιφάνεια της Γης σε τόπο με βόρειο γεωγραφικό πλάτος $\hat{\varphi} = 45^0$, δίνεται από τον τύπο $F'_K = \frac{m\cdot u^2}{r} = \frac{m\cdot(\omega\cdot r)^2}{r} = m\cdot\omega^2\cdot r$.

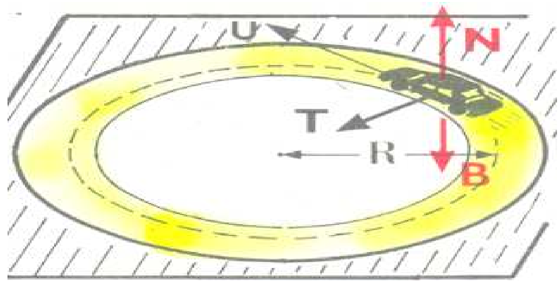
Άρα, είναι $\frac{F_K}{F'_K} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot R}{m\cdot\omega^2\cdot r} = \frac{R}{r} = \frac{r\sqrt{2}}{r} = \sqrt{2}$.



Άσκηση 45, Κεφάλαιο 3.

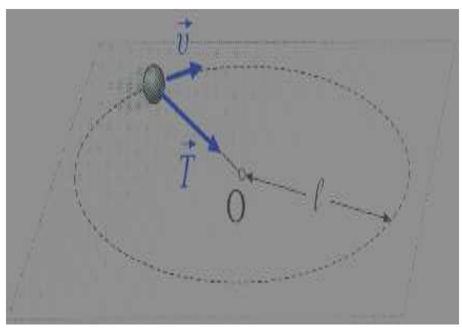
$$\left.\begin{array}{l} F_K = \frac{m\cdot u^2}{R} \\ F_K = T = \mu\cdot B = \mu\cdot m\cdot g \end{array}\right\} \frac{\cancel{m}\cdot u^2}{R} = \mu\cdot\cancel{m}\cdot g \Leftrightarrow \frac{u^2}{R} = \mu\cdot g \Leftrightarrow u^2 = R\cdot\mu\cdot g = 300\frac{3}{\cancel{10}}\cancel{10} = 900$$

Άρα, $u = 30\ \frac{m}{s}$ είναι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του αυτοκινήτου προκειμένου να μην πεταχτεί έξω από την στροφή.



Άσκηση 46, Κεφάλαιο 3.

Το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, διαγράφοντας κύκλο, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η κεντρομόλος δύναμη είναι $F_K = m\frac{u^2}{\ell} = m\frac{(2\pi\cdot f\cdot\ell)^2}{\ell} = m\cdot 4\pi^2\cdot f^2\cdot\ell$. Το επίπεδο περιστροφής του σώματος είναι οριζόντιο. Άρα, η μόνη δύναμη που επενεργεί στο σώμα, πάνω στο επίπεδο περιστροφής, είναι η τάση του νήματος T, οπότε θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως. Δηλαδή $\vec{T} = \vec{F_K}$.

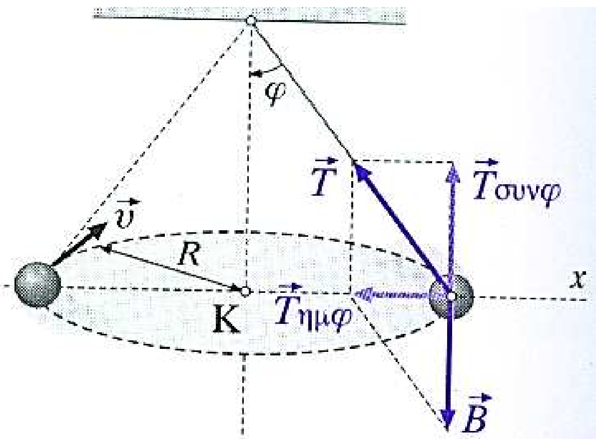


Συνεπώς $T = m\cdot 4\pi^2\cdot f^2\cdot\ell$.

Όταν $T = T_{ΘΡ}$ τότε $f = f_{max}$. Συνεπώς $T_{ΘΡ} = m\cdot 4\pi^2\cdot f_{max}^2\cdot\ell$. Αντικαθιστώντας, στον ανωτέρω τύπο, προκύπτει ότι

$$50 = \frac{1}{2}4\cdot\pi^2\cdot f_{max}^2 1 \Leftrightarrow 50 = 2\cdot\pi^2\cdot f_{max}^2 \Leftrightarrow 25 = \pi^2\cdot f_{max}^2 \Leftrightarrow f_{max}^2 = \frac{25}{\pi^2} \Leftrightarrow f_{max} = \frac{5}{\pi}\ Hz$$

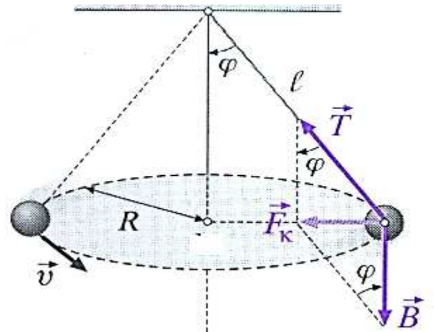
Άσκηση 47, Κεφάλαιο 3.



Στη σφαίρα ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Επειδή η σφαίρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{B}, \vec{T}$ θα είναι η κεντρομόλος δύναμη $\vec{F_K}$.

Η τάση του νήματος αναλύεται σε δυο άξονες. Ο ένας έχει τη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς και ο άλλος είναι κάθετος σε αυτόν.

Στον κατακόρυφο άξονα η σφαίρα παραμένει ακίνητη. Άρα ισχύει ότι

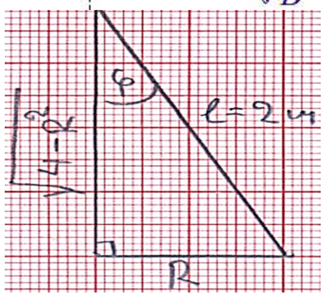


$$B = m \cdot g = \frac{10}{3}\ N$$

$$\left.\begin{cases} T_y = T \cdot \cos\varphi \\ T_y = B \end{cases}\right\} T \cdot \cos\varphi = \frac{10}{3}\ N$$

$$\sin\varphi = \frac{R}{\ell} = \frac{R}{2}, \quad T_x = T \cdot \sin\varphi = T\frac{R}{2}$$

Στον οριζόντιο άξονα η σφαίρα εκτελεί ομαλή κίνηση. Άρα ισχύει ότι



$$\left.\begin{cases} T_x = T \cdot \sin\varphi = T\frac{R}{2} \\ \Sigma F_x = m\frac{u^2}{R} \\ \Sigma F_x = T_x \end{cases}\right\} T\frac{R}{2} = m\frac{u^2}{R} \Leftrightarrow T = 2m\frac{u^2}{R^2} = \frac{2}{3}\frac{u^2}{R^2}$$

Ως γνωστόν ισχύει ότι $u = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow u^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Leftrightarrow \frac{u^2}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{100} = \frac{\pi^2}{25}$

Οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει ότι $T = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{25} = \frac{2\pi^2}{75}\ N$.