1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ

ΑΡΓΥΡΗ Κ. ΜΑΥΡΟΜΜΑΤΑΚΟΥ
Δ^{ΡΟΣ} ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΑΘΗΝΑ
1998

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 1998

ISBN 960-337-025-8

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ο ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», πολύ νωρίς προέβλεψε και σχημάτισε την πεποίθηση ότι η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας, σε συνδυασμό με την εθνική αγωγή, θα ήταν αναγκαίος και αποφασιστικός παράγων για την πρόοδο του Έθνους μας.

Την πεποίθησή του αυτή ο Ευγενίδης εκδήλωσε με τη γενναιόφρονα πράξη ευεργεσίας, να κληροδοτήσει σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι το Φεβρουάριο του 1956 συστήθηκε το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου τη διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Το έργο του Ιδρύματος συνεχίζει από το 1981 ο κ. Νικόλαος Βερνίκος - Ευγενίδης.

Από το 1956 έως σήμερα η συμβολή του Ιδρύματος στην τεχνική εκπαίδευση πραγματοποιείται με διάφορες δραστηριότητες. Όμως απ' αυτές η σημαντικότερη, που κρίθηκε από την αρχή ως πρώτης ανάγκης, είναι η έκδοση βιβλίων για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Σχολών και Λυκείων.

Μέχρι σήμερα, με τη συνεργασία με τα Υπουργεία Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων και Εμπορικής Ναυτιλίας, εκδόθηκαν εκατοντάδες τόμοι βιβλίων, που έχουν διατεθεί σε πολλά εκατομμύρια αντίτυπα. Τα βιβλία αυτά κάλυπταν ή καλύπτουν ανάγκες των Κατωτέρων και Μέσων Τεχνικών Σχολών του Υπ. Παιδείας, των Σχολών του Οργανισμού Απασχολήσεως Εργατικού Δυναμικού (ΟΑΕΔ), των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων, των Τεχνικών Σχολών και των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού.

Μοναδική φροντίδα του Ιδρύματος σ' αυτή την εκδοτική του προσπάθεια ήταν και είναι η συγγραφή και έκδοση βιβλίων ποιότητας, από άποψη όχι μόνον επιστημονική, παιδαγωγική και γλωσσική, αλλά και ως προς την εμφάνιση, ώστε το βιβλίο να αγαπηθεί από τους μαθητές.

Για την επιστημονική και παιδαγωγική αρτιότητα των βιβλίων τα κείμενα υποβάλλονται σε πολλές επεξεργασίες και βελτιώνονται πριν από κάθε νέα έκδοση συμπληρούμενα καταλλήλως.

Ιδιαίτερη σημασία απέδωσε το Ίδρυμα από την αρχή στη γλωσσική διατύπωση των βιβλίων, γιατί πιστεύει ότι και τα τεχνικά βιβλία, όταν είναι γραμμένα σε γλώσσα σωστή και ομοιόμορφη αλλά και κατάλληλη για τη στάθμη των μαθητών, μπορούν να συμβάλλουν στη γλωσσική κατάρτιση των μαθητών.

Έτσι, με απόφαση που ίσχυσε ήδη από το 1956, όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Τεχνίτη, δηλαδή τα βιβλία για τις τότε Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, *όπως αργότερα και για τις Σχολές του ΟΑΕΔ, ήταν γραμμένα σε γλώσσα δημοτική, με βάση τη γραμματική του Τριανταφυλλίδη, ενώ όλα τα άλλα βιβλία ήταν γραμμένα στην απλή καθαρεύουσα. Σήμερα ακολουθείται η γραμματική που διδάσκεται στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαιδεύσεως. Η γλωσσική επεξεργασία των βιβλίων ανατίθεται σε φιλολόγους του Ιδρύματος και έτσι εξασφαλίζεται η ενιαία σύνταξη και ορολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.*

Η ποιότητα του χαρτιού, το είδος των τυπογραφικών στοιχείων, τα σωστά σχήματα, η καλαίσθητη σελιδοποίηση, το εξώφυλλο και το μέγεθος του βιβλίου, περιλαμβάνονται και αυτά στις φροντίδες του Ιδρύματος και συμβάλλουν στη σωστή «λειτουργικότητα» των βιβλίων.

Το Ίδρυμα θεώρησε ότι είναι υποχρέωσή του, σύμφωνα με το πνεύμα του ιδρυτή του, να θέσει στη διάθεση τού Κράτους όλη αυτή την πείρα των 20 ετών, αναλαμβάνοντας το 1978 και την έκδοση των βιβλίων για τις νέες Τεχνικές Επαγγελματικές Σχολές και τα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια, σύμφωνα πάντοτε με τα εγκεκριμένα Αναλυτικά Προγράμματα του Π.Ι. και του ΥΠΕΠΘ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ανταποκρινόμενος στην προσπάθεια του ΥΠΕΠΘ και του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τον εκσυγχρονισμό των διδακτικών βιβλίων, ανασυνέγραψα τον πρώτο τόμο Φυσικής των ΤΕΣ.

Το περιεχόμενο του βιβλίου είναι σύμφωνο με το Πρόγραμμα Σπουδών (Curiculum) του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και με το Εθνικό Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΕΠΠΣ).

Χρόνια τώρα δάσκαλος όλων των βαθμίδων της Τεχνικής – Επαγγελματικής Εκπαιδεύσεως πιστεύω ότι κάθε σχολικό εγχειρίδιο, ιδιαίτερα όταν προορίζεται για μελλοντικούς τεχνικούς, πρέπει να είναι αυτοτελές και να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις μιας ευρείας κατηγορίας εκπαι-δευτικών προγραμμάτων άλλων μαθημάτων. Γι' αυτό σε ορισμένες ενότητες παρέθεσα περισσότερες λεπτομέρειες και συμπεριέλαβα ορισμένες ενότητες που δεν περιέχονται στο αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του ΥΠΕΠΘ.

Σημειώνω ότι αυτά στοιχειοθετήθηκαν με μικρότερα στοιχεία και είναι στην απόλυτη δικαιοδοσία του διδάσκοντος να τα διδάξει ή όχι. Η παράλειψή τους δεν επηρεάζει την ομαλή ροή της διδασκαλίας της ύλης· ούτε κωλύει την εκμάθησή της.

Εξ άλλου, θεωρώ σκόπιμο να υπογραμμίσω ότι για να είναι κάποιος καλός και προσαρμόσιμος στα νέα δεδομένα τεχνικός πρέπει να κατέχει τους βασικούς νόμους και τις αρχές της Φυσικής. Ένας τεχνικός είναι αδύνατον όχι μόνο να κατανοήσει τη λειτουργία μιας πολύπλοκης μηχανής, αλλά ακόμη και να αντικαταστήσει ακίνδυνα μια ηλεκτρική ασφάλεια, αν δεν κατέχει τους βασικούς φυσικούς νόμους. Οι φυσικοί νόμοι κατά κανόνα δεν μεταβάλλονται. Γι' αυτό, όποιος τεχνικός τους κατέχει, εύκολα θα προσαρμόζεται στις εξελίξεις του επαγγέλματός του ή άλλου συγγενικού επαγγέλματος και έτσι δεν θα περάσει ποτέ στο περιθώριο όσον αφορά στην εργασιακή του απασχόληση. Δεν πρέπει σε κανένα σπουδαστή να διαφεύγει ότι η τεχνολογία και η τεχνική σε γενικές γραμμές δεν είναι τίποτα άλλο παρά ευρεία, ευέλικτη και έξυπνη εφαρμογή των φυσικών νόμων.

Οφείλω να σημειώσω ότι το ύφος αυτού του κειμένου είναι σημαντικά πιο απλό από ό,τι στην προηγούμενη έκδοση. Θεωρώ ότι δεν καταφεύγω σε υπεραπλουστεύσεις γιατί αντιμετωπίζω το σπουδαστή ως αποδέκτη ουσιαστικής και «μετατρέψιμης» γνώσεως και όχι ως ακροατή μονότονης και ανούσιας από έδρας διδασκαλίας.

Όλα τα κεφάλαια τα έλεγξαν προσεκτικά ο κ. Εμμανουήλ Δρης, καθηγητής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, και ο κ. Απόστολος Παπαζής, Διευθυντής των Εργαστηρίων της Φυσικής της ΑΣΕΤΕΜ/ΣΕΛΕΤΕ, οι οποίοι προέβησαν σε εύστοχες παρατηρήσεις και για τις οποίες τους ευχαριστώ.

Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω τον εργοστασιάρχη κ. Νικόλαο Ντίζο, πτυχιούχο των τεχνικών σχολών «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ», όπως και το τεχνικό προσωπικό του εργοστασίου του για την εποικοδομητική συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια της συγγραφής αυτού του πονήματος.

Βέβαια θα ήταν μέγιστη παράλειψη αν δεν εξέφραζα τις θερμές μου ευχαριστίες προς το Ίδρυμα Ευγενίδου και στο προσωπικό του Εκδοτικού Τμήματος που συνέβαλε ώστε το βιβλίο αυτό να εκδοθεί όσο μπορούσε καλύτερα.

Ο συγγραφέας

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

1.1 Έννοια της δυνάμεως.

1) Για να κινηθεί ένα ακίνητο βαγονάκι (σχ. 1.1α), θα πρέπει να το σπρώξομε. Αυτό σημαίνει ότι για να κινηθεί ένα ακίνητο βαγονάκι, πρέπει να επιδράσει επάνω του από άλλο σώμα (π.χ. από εμάς) κάποιο αίτιο, το οποίο προκαλεί την κίνησή του.

Γενικά, για να κινηθεί ένα ακίνητο σώμα πρέπει να επιδράσει επάνω του (από άλλο σώμα) κάποιο αίτιο, το οποίο προκαλεί την κίνησή του.

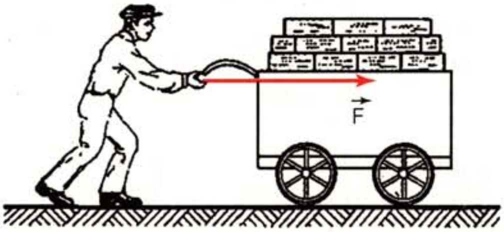
Το αίτιο, το οποίο επιδρά επάνω σε ένα ακίνητο σώμα από άλλο σώμα, με αποτέλεσμα να προκαλέσει την κίνηση αυτού ονομάζεται δύναμη.

2) Η μπάλα ποδοσφαίρου, όταν συναντά τα δίχτυα του τέρματος, σταματά. Αυτό σημαίνει ότι τα δίχτυα ασκούν επάνω στην κινούμενη μπάλα κάποιο αίτιο που τη σταματά.

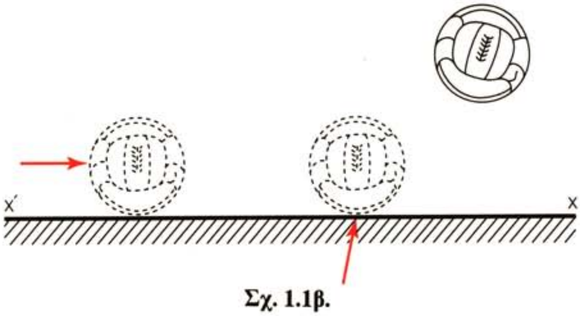
Γενικά, για να σταματήσει ένα σώμα που κινείται πρέπει να επιδράσει (να ασκηθεί) επάνω του, από άλλο σώμα, κάποιο αίτιο που το σταματά.

Το αίτιο που επιδρά σε ένα κινούμενο σώμα από άλλο σώμα με αποτέλεσμα να το σταματήσει ονομάζεται δύναμη.

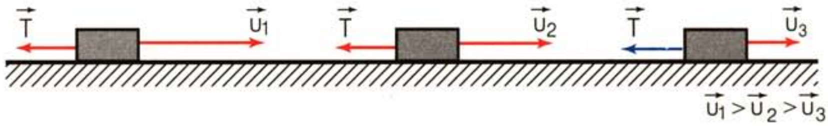
3) Μία μπάλα ποδοσφαίρου (σχ. 1.1β) κινείται σε ευθεία τροχιά x΄x και η κατεύθυνση της ταχύτητάς της είναι $x' \rightarrow x$. Για να αλλάξει η κατεύθυνση της ταχύτητας της μπάλας, πρέπει να την κλωτσήσομε κατά άλλη κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι για να αλλάξει η κατεύθυνση της ταχύτητας της κινούμενης μπάλας πρέπει να ασκηθεί επάνω της από άλλο σώμα (π.χ. το πόδι μας) κά-



Σχ. 1.1α.



Σχ. 1.1β.



Σχ. 1.1γ.

ποιο αίτιο, το οποίο προκαλεί την αλλαγή της κατευθύνσεως της ταχύτητας της μπάλας.

Γενικά, για να αλλάξει η κατεύθυνση της ταχύτητας ενός σώματος, πρέπει να επιδράσει (να ασκηθεί) επάνω του από άλλο σώμα κάποιο αίτιο, που προκαλεί την αλλαγή της κατευθύνσεως της ταχύτητάς του.

Το αίτιο που επιδρά σε ένα κινούμενο σώμα από άλλο σώμα, με αποτέλεσμα να αλλάξει η κατεύθυνση της ταχύτητάς του ονομάζεται δύναμη.

4) Όταν εκσφενδονίσομε ένα σώμα (σχ. 1.1γ) σε οριζόντιο δάπεδο, θα διαπιστώσομε ότι το μέτρο της ταχύτητάς του σιγά-σιγά αλλάζει (ελαττώνεται). Αυτό σημαίνει ότι το δάπεδο ασκεί επάνω στο σώμα κάποιο αίτιο που μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητάς του.

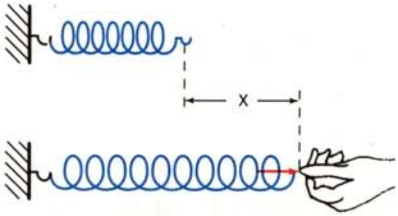
Γενικά, για να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται ένα σώμα πρέπει να επιδράσει (να ασκηθεί) επάνω του από άλλο σώμα κάποιο αίτιο, το οποίο προκαλεί την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητάς του.

Το αίτιο που επιδρά επάνω σε ένα κινούμενο σώμα από άλλο σώμα, με αποτέλεσμα να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του ονομάζεται δύναμη.

5) Για να επιμηκυνθεί (να παραμορφωθεί) ένα χαλύβδινο ελατήριο (σχ. 1.1δ), πρέπει να το έλξομε (να το τραβήξομε). Αυτό σημαίνει ότι για να επιμηκυνθεί (παραμορφωθεί) το χαλύβδινο ελατήριο πρέπει να ασκηθεί επάνω του, από άλλο σώμα (π.χ. το χέρι μας), ένα αίτιο που προκαλεί την παραμόρφωσή του.

Γενικά, για να παραμορφωθεί ένα σώμα, πρέπει να ασκηθεί επάνω του από άλλο σώμα ένα αίτιο που προκαλεί την παραμόρφωσή του.

Το αίτιο που επιδρά επάνω σε ένα σώμα από άλλο σώμα, με αποτέλεσμα να προκαλέσει την παραμόρφωσή του ονομάζεται δύναμη.



Σχ. 1.1δ.

Σχ. 1.1ε.

6) Όταν συγκρούονται δύο αυτοκίνητα (σχ. 1.1ε), τότε ταυτόχρονα αλλάζουν οι ταχύτητές τους και συγχρόνως παραμορφώνονται. Αυτό σημαίνει ότι κάποια αίτια επέδρασαν στο ένα από το άλλο αυτοκίνητο και προκάλεσαν τη μεταβολή της ταχύτητας και την παραμόρφωση του καθενός.

Το αίτιο που επιδρά σε ένα κινούμενο σώμα από άλλο κινούμενο σώμα, με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η ταχύτητά του και ταυτόχρονα να παραμορφωθεί ονομάζεται δύναμη.

Προσοχή:

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να δώσομε τον εξής ορισμό της δυνάμεως:

Δύναμη ονομάζεται κάθε αίτιο το οποίο αν επιδράσει επάνω σ' ένα σώμα από άλλο σώμα μπορεί να το θέσει σε κίνηση (αν ηρεμεί), να το σταματήσει (αν κινείται), να αλλάξει την κατεύθυνση της ταχύτητας με την οποία κινείται, να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του, να το παραμορφώσει, ή τέλος να προκαλέσει στο σώμα όλες τις μεταβολές αυτές ταυτόχρονα.

Παρατήρηση:

Τονίζομε ότι οι δυνάμεις προκαλούνται πάντοτε από σώματα και ασκούνται πάνω σε σώματα. Αυτό σημαίνει ότι για την εμφάνιση δυνάμεων απαιτείται η παρουσία τουλάχιστον δύο σωμάτων.

1.2 Δυνάμεις επαφής και δυνάμεις από απόσταση (πεδίου).

Γενικά διακρίνομε τις δυνάμεις σε δύο κατηγορίες:

α) Στις δυνάμεις επαφής και

β) στις δυνάμεις από απόσταση (πεδίου).

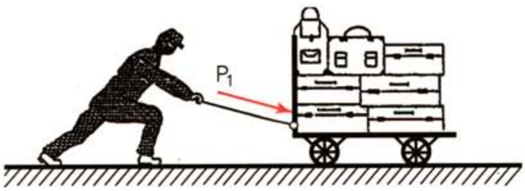
α) Δυνάμεις επαφής.

Δυνάμη επαφής χαρακτηρίζομε (ονομάζομε) τη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα από άλλο σώμα με το οποίο το σώμα αυτό βρίσκεται σε άμεση επαφή.

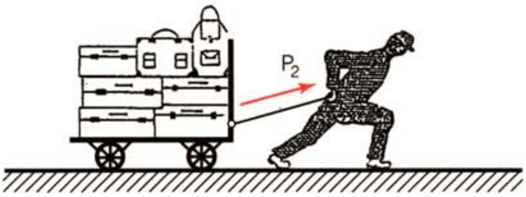
Η δύναμη $\vec{P}_1$ με την οποία ωθείται το βαγονάκι του σχήματος 1.2α είναι δύναμη επαφής, όπως και η δύναμη $\vec{P}_2$ με την οποία έλκεται το βαγονάκι του σχήματος 1.2β.

Η δύναμη $\vec{F}_1$ την οποία ασκεί το αυτοκίνητο επάνω στο τροχόσπιτο (σχ. 1.2γ) και το μετακινεί είναι δύναμη επαφής, όπως επίσης δύναμη επαφής είναι και η δύναμη $\vec{F}_2$ ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$) την οποία ασκεί το τροχόσπιτο στο αυτοκίνητο και η οποία τείνει να σταματήσει το αυτοκίνητο.

Η δύναμη (το βάρος του σώματος) $\vec{B}$ που κάμπτει το σιδερένιο έλασμα εί-

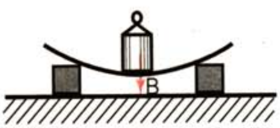


Σχ. 1.2α.

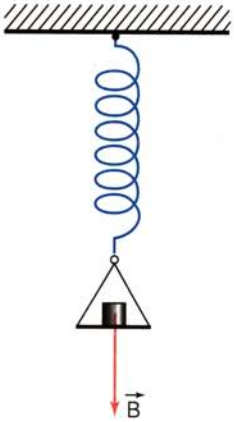


Σχ. 1.2β.

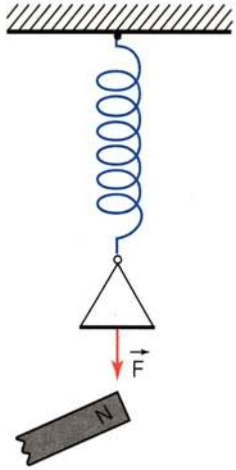
Σχ. 1.2γ.



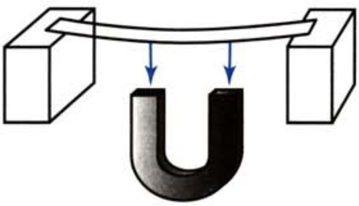
Σχ. 1.2δ.



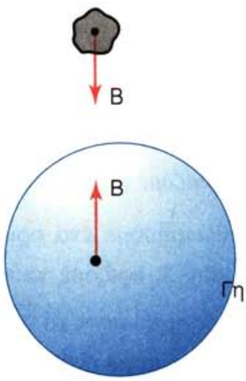
Σχ. 1.2ε.



Σχ. 1.2στ.



Σχ. 1.2ζ.



Σχ. 1.2η.

ναι δύναμη επαφής για το έλασμα αυτό (σχ. 1.2δ). Η δύναμη (το βάρος του σώματος) που εκτείνει το ελατήριο (σχ. 1.2ε) είναι δύναμη επαφής γι' αυτό.

β) Δυνάμεις από απόσταση (πεδίου).

Δύναμη από απόσταση χαρακτηρίζεται η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα από άλλο σώμα, με το οποίο όμως ***δεν*** βρίσκεται σε επαφή.

Η δύναμη την οποία ασκεί ο μαγνήτης Ν επί του ελατηρίου (σχ. 1.2στ) και το τεντώνει όταν ο δίσκος Δ είναι από σίδερο, είναι δύναμη από απόσταση (πεδίου).

Η δύναμη που ασκεί ο μαγνήτης στο σιδερένιο έλασμα και το κάμπτει είναι δύναμη από απόσταση (σχ. 1.2ζ).

Η δύναμη με την οποία η γη έλκει το σώμα Β προς τον εαυτό της είναι δύναμη από απόσταση (σχ. 1.2η).

1.3 Χαρακτηριστικά στοιχεία δυνάμεως.

1.3.1 Βοηθητικές γνώσεις.

α) Τι εννοούμε όταν λέμε άξονα;

Όταν λέμε άξονα εννοούμε μία ευθεία επί της οποίας έχομε αυθαίρετα ορίσει τα εξής:

1) Τη θετική φορά, επομένως και την αρνητική.

2) Ένα σημείο της, το οποίο ονομάζομε αρχή του άξονα. Το σημείο αυτό το ονομάζομε και σημείο αναφοράς, διότι η θέση κάθε σημείου του άξονα προσδιορίζεται ως προς το σημείο αυτό.

3) Ένα διάνυσμα το οποίο έχει τα εξής χαρακτηριστικά στοιχεία:

– Αρχή, την αρχή του άξονα.

– Φορά, τη θετική φορά του άξονα.

– Αλγεβρική τιμή + 1.

Λαμβάνεται δε αυτό ως μονάδα μετρήσεως όλων των διανυσμάτων που κείνται στον άξονα και ονομάζεται ***μοναδιαίο διάνυσμά*** του.

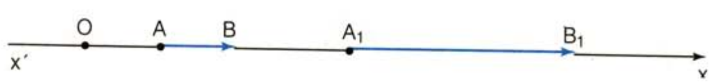
Ο x΄x (σχ. 1.3α) είναι άξονας του οποίου η θετική φορά έχει ορισθεί από το x΄ προς το x, το 0 είναι η αρχή του (ή το σημείο αναφοράς του) και το $\overrightarrow{OM} = \vec{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμά του ($\overline{OM} = +1$). Εξυπακούεται ότι η φορά από το x προς το x΄ είναι η αρνητική φορά του άξονα.

β) Τι ονομάζομε γινόμενο διανύσματος με αριθμό;

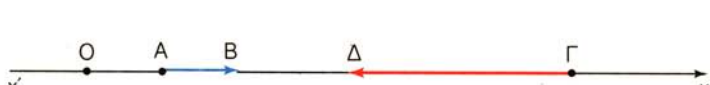
Αν θεωρήσομε ένα ορισμένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα θετικό αριθμό, για παράδειγμα τον 3, ορίζομε το γινόμενο $3\cdot\overrightarrow{AB}$ να παριστάνει ένα διάνυσμα $\overrightarrow{A_1B_1}$ (σχ. 1.3β) ομόρροπο προς το $\overrightarrow{AB}$ και με μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$.

Αν θεωρήσομε ένα ορισμένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα αρνητικό αριθμό, για παράδειγμα τον –3, ορίζομε ότι το γινόμενο $-3\cdot\overrightarrow{AB}$ να παριστάνει ένα διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 1.3γ) αντίρροπο προς το $\overrightarrow{AB}$ και με μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$.

Σχ. 1.3α.



Σχ. 1.3β.



Σχ. 1.3γ.

Με βάση τα παραπάνω ονομάζομε:

1). Γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ με έναν θετικό αριθμό λ το διάνυσμα $\vec{\beta}$ που θα είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και θα έχει μέτρο: $|\vec{\beta}| = \lambda \cdot |\vec{\alpha}|$.

2) Γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ με έναν αρνητικό αριθμό (–Κ) το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που θα είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και θα έχει μέτρο: $|\vec{\gamma}| = |-K| \cdot |\vec{\alpha}|$.

γ) Τι ονομάζομε αλγεβρική τιμή ενός διανύσματος;

Παίρνομε το πηλίκο $\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{OM}} = \lambda$ (1). Τον αριθμό λ τον ονομάζομε αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overrightarrow{A_1B_1}$. Βέβαια από τη σχέση (1) προκύπτει: $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$ (2). Ο λ είναι ένας θετικός αριθμός, διότι το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1B_1}$ είναι ομόρροπο του $\overrightarrow{OM}$, το οποίο ορίζεται ως το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x΄x και το οποίο λαμβάνεται ως μονάδα μετρήσεως του $\overrightarrow{A_1B_1}$ (σχ. 1.3δ).

Παίρνομε το πηλίκο $\dfrac{\overrightarrow{\Gamma_1E_1}}{\overrightarrow{OM}} = K$ (3). Τον αριθμό Κ τον ονομάζομε αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma_1E_1}$. Από τη σχέση (3) προκύπτει: $\overrightarrow{\Gamma_1E_1} = K \cdot \overrightarrow{OM}$ (4). Επειδή το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma_1E_1}$ είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{OM}$ ο Κ είναι ένας αρνητικός αριθμός.

Επομένως, με βάση τα πιο πάνω μπορούμε να δώσομε τον εξής ορισμό της αλγεβρικής τιμής ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$:

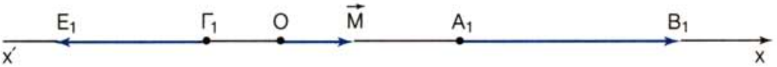
Αλγεβρική τιμή ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται εκείνος ο αλγεβρικός αριθμός (+ ή –) μ επί τον οποίο όταν πολλαπλασιασθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του άξονα επάνω στον οποίο κείται το $\overrightarrow{AB}$, δίνει ως γινόμενο το διάνυσμα αυτό, δηλαδή ισχύει: $\overrightarrow{AB} = \mu \cdot \overrightarrow{OM}$, όπου μ η αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Προσοχή:

1) Γενικά η αλγεβρική τιμή ενός διανύσματος π.χ. $\overrightarrow{AB}$ παρίσταται με το σύμβολο: $\overline{AB}$ οπότε ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Για διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overline{\Gamma\Delta} \cdot \overrightarrow{OM}$ όπου $\overline{\Gamma\Delta}$ η αλγεβρική τιμή του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

2) Δεν πρέπει να μας διαφεύγουν τα εξής: Η $\overline{AB}$ θα είναι θετικός αριθμός όταν το $\overrightarrow{AB}$ είναι ομόρροπο του $\overrightarrow{OM}$, ενώ η $\overline{AB}$ θα είναι αρνητικός αριθμός, όταν το



Σχ. 1.3δ.

$\overrightarrow{AB}$ είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{OM}$.

δ) Τι ονομάζομε μέτρο ενός διανύσματος;

Μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζομε την απόλυτη τιμή της αλγεβρικής τιμής του διανύσματος.

Π.χ.: Αν $\overline{AB} = +3$, το μέτρο του θα είναι: $|\overrightarrow{AB}| = 3$.

Αν $\overline{AB} = -3$, το μέτρο του θα είναι: $|\overrightarrow{AB}| = |-3| = 3$.

Σημείωση:

Ευνόητο είναι ότι το μέτρο ενός διανύσματος $|\overrightarrow{AB}|$ είναι θετικός αριθμός και εκφράζει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Συμβολισμοί: 1) $\overline{AB}$ = αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. 2) $|\overrightarrow{AB}|$ ή (ΑΒ) ή ΑΒ = το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ $[|\overrightarrow{AB}| = (AB) = AB]$.

ε) Τι ονομάζομε διανυσματική προβολή διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ σε άξονα x΄x.

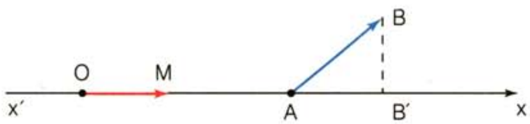
Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB'}$ ονομάζεται διανυσματική προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στον άξονα x΄x (σχ. 1.3ε).

Προσοχή:

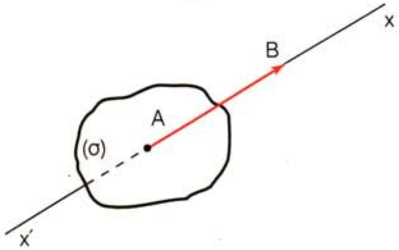
Η αλγεβρική τιμή $\overline{AB'}$ της διανυσματική προβολής $\overrightarrow{AB'}$ ονομάζεται συνήθως και απλά προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στον άξονα x΄x.

1.3.2 Κύριες γνώσεις.

Η δύναμη είναι ένα διανυσματικό μέγεθος. Επομένως, τα χαρακτηριστικά στοιχεία δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 1.3στ) είναι τα χαρακτηριστικά στοιχεία των διανυσματικών μεγεθών, δηλαδή τα εξής:



Σχ. 1.3ε.



Σχ. 1.3στ.

α) Σημείο εφαρμογής της δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$.

Το σημείο (Α) του σώματος (σ) στο οποίο ενεργεί η δύναμη $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται σημείο εφαρμογής της.

β) Διεύθυνση.

Η διεύθυνση της ευθείας x΄x πάνω στην οποία τείνει η δύναμη $\overrightarrow{AB}$ να κινήσει το σημείο εφαρμογής της (Α) ονομάζεται διεύθυνση της δυνάμεως.

Παρατήρηση:

Όταν λέμε ότι: «η ευθεία ενέργειας της δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$ είναι η ευθεία x΄x», εννοούμε ότι η δύναμη $\overrightarrow{AB}$ τείνει να κινήσει το σημείο εφαρμογής της Α επάνω στην ευθεία x΄x. Η ευθεία ενέργειας x΄x της δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται και φορέας της δυνάμεως αυτής.

Σημείωση:

Όλες οι παράλληλες δυνάμεις έχουν την ίδια διεύθυνση.

γ) Φορά της δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$.

Φορά της δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$, η οποία ασκείται στο σημείο (Α) του σώματος (σ) ονομάζεται η φορά κατά την οποία τείνει η δύναμη $\overrightarrow{AB}$ να κινήσει το σημείο εφαρμογής της (Α). Η φορά της $\overrightarrow{AB}$ είναι από το Α προς το Β.

Σημείωση:

Δύο δυνάμεις μπορεί να έχουν την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετες φορές.

Προσοχή:

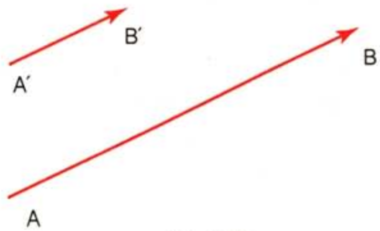
Όταν λέμε «κατεύθυνση» μιας δυνάμεως εννοούμε συγχρόνως και τη διεύθυνση και τη φορά της.

δ) Μέτρο (ένταση, μέγεθος) δυνάμεως.

Μέτρο δυνάμεως είναι ένας θετικός αριθμός μαζί με τη μονάδα μετρήσεώς της. Αυτός ο θετικός αριθμός είναι η απόλυτη τιμή της αλγεβρικής τιμής της δυνάμεως.

Με άλλα λόγια: Μέτρο δυνάμεως είναι η απόλυτη τιμή της αλγεβρικής τιμής της δυνάμεως μαζί με τη μονάδα μετρήσεώς της.

Όταν για παράδειγμα λέμε ότι το μέτρο της δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 1.3ζ) είναι 3 N, εννοούμε ότι η $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο της $\overrightarrow{A'B'}$ της οποίας το μέτρο λαμβάνεται ίσο με 1 N.



Σχ. 1.3ζ.

Προσοχή:

Το μέτρο μιας δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$ συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$, ενώ πολλές φορές α-πλώς με AB ή (AB).

ε) Αλγεβρικό μέτρο δυνάμεως.

Αλγεβρικό μέτρο δυνάμεως ονομάζεται η αλγεβρική τιμή της δυνάμεως μαζί με τη μονάδα μετρήσεώς της. Το αλγεβρικό μέτρο μιας δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$ παρέχει το μέτρο της δυνάμεως $\overrightarrow{AB}$ αλλά και τη φορά της και συμβολίζεται: $\overline{AB}$. Έτσι: α) Το $\overline{AB} = +3$ N σημαίνει ότι η δύναμη $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο: $|+3|$ N $=3$ N και φορά τη θετική φορά του άξονα πάνω στον οποίο κείται. β) Το $\overline{AB} = -3$ N σημαίνει ότι η δύναμη $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο: $|-3|$ N $= 3$ N και φορά την αρνητική φορά του άξονα πάνω στον οποίο κείται.

1.4 Θεμελιώδη και παράγωγα μεγέθη – Θεμελιώδεις και παράγωγες μονάδες.

Κάθε σύστημα μετρήσεως φυσικών μεγεθών συνίσταται από θεμελιώδη και παράγωγα φυσικά μεγέθη. Ως θεμελιώδη μεγέθη ενός συστήματος λαμβάνονται αυθαίρετα κάποια φυσικά μεγέθη, τα οποία θεωρούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους. Όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη εκφράζονται ως συναρτήσεις των θεμελιωδών μεγεθών του συστήματος αυτού και λέγονται παράγωγα μεγέθη αυτού του συστήματος.

Οι μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών λέγονται θεμελιώδεις μονάδες και ορίζονται κατά ανεξάρτητο τρόπο η μία από την άλλη. Οι μονάδες των παραγώγων μεγεθών ορίζονται από τις μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών και τις σχέσεις που συνδέουν τα παράγωγα με τα θεμελιώδη μεγέθη, αφού αγνοηθούν οι αριθμητικοί συντελεστές που μπορεί να υπάρχουν.

Για παράδειγμα η μονάδα κινητικής ενέργειας στο S.I. μπορεί να προσδιορισθεί και από την εξίσωση:

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Η μάζα m μετρείται σε kg ενώ η ταχύτητα σε m/s. Παραλείποντας τον αριθμητικό πολλαπλασιαστή 1/2 στην εξίσωση (1) βρίσκομε ότι, η κινητική ενέργεια μετρείται σε joule (τζουλ):

$$1\,\text{kg} \cdot (1\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 1\,\text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1\,\text{joule} = 1\,\text{j}$$

Παλαιότερα χρησιμοποιούνταν διάφορα συστήματα μονάδων, όπως το MKS, το CGS και το Τ.Σ. Σήμερα, σε διεθνή κλίμακα, χρησιμοποιείται το Διεθνές Σύστημα Μονάδων S.I. (System International) που λέγεται και M.K.S.A. Στο σύστημα αυτό, ως θεμελιώδη μεγέθη για τη μηχανική λαμβάνομε το μήκος, τη μάζα και το χρόνο. Οι θεμελιώδεις μονάδες του συστήματος S.I. για τη μηχανική είναι:

1) Το μέτρο (m).

2) Το χιλιόγραμμο μάζας (kg ή kgr) (ισούται με τη μάζα του προτύπου χιλιογράμμου).

3) Το δευτερόλεπτο (s ή sec).

1.4.1 Μονάδα δυνάμεως. Σύστημα S.I. (Διεθνές Σύστημα).

Μονάδα μετρήσεως δυνάμεως στο S.I. είναι το 1 N (N: Newton). Η δύναμη δεν είναι θεμελιώδες μέγεθος του S.I., αλλά παράγωγο για το σύστημα αυτό. Επομένως το Newton (1 N ή 1 Nt) ***δεν*** είναι θεμελιώδης μονάδα του S.I., αλλά παράγωγος μονάδα για το σύστημα αυτό.

Εδώ θα δώσομε έναν προσεγγιστικό ορισμό του 1 N: Μία δύναμη είναι δύναμη ενός Newton (1 N) όταν είναι ίση με το 1/9,81 της δυνάμεως με την οποία έλκεται από τη γη το πρότυπο χιλιόγραμμο μάζας (1 kg) σε τόπο γεωγραφικού πλάτους 45^o και στο ύψος της επιφάνειας της θάλασσας ($g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$).

Σημείωση:

Μία δύναμη είναι δύναμη ενός χιλιογράμμου δυνάμεως (1 kg* ή 1 kgf ή 1 kp); όταν είναι ίση με τη δύναμη με την οποία έλκεται από τη γη το πρότυπο χιλιόγραμμο μάζας (1 kg) σε τόπο γεωγραφικού πλάτους 45^o και στο ύψος της επιφάνειας της θάλασσας. Προφανώς ισχύει η σχέση: $1\ kgf = 9{,}81\ N \cong 10\ N$.

Τονίζομε ότι το χιλιόγραμμο δυνάμεως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μονάδα μετρήσεως δυνάμεων, αλλά δεν ανήκει στο Διεθνές Σύστημα.

1.5 Στατική μέτρηση των δυνάμεων.

1.5.1 Γενικά.

Οι δυνάμεις μετρούνται από τα αποτελέσματά τους. Δύο δυνάμεις θεωρούνται ίσες, εάν προκαλούν την αυτή ελαστική παραμόρφωση όταν ενεργούν πάνω στο ίδιο σώμα και κατά τον ίδιο τρόπο (ίδιο σημείο εφαρμογής, ίδια διεύθυνση και φορά).

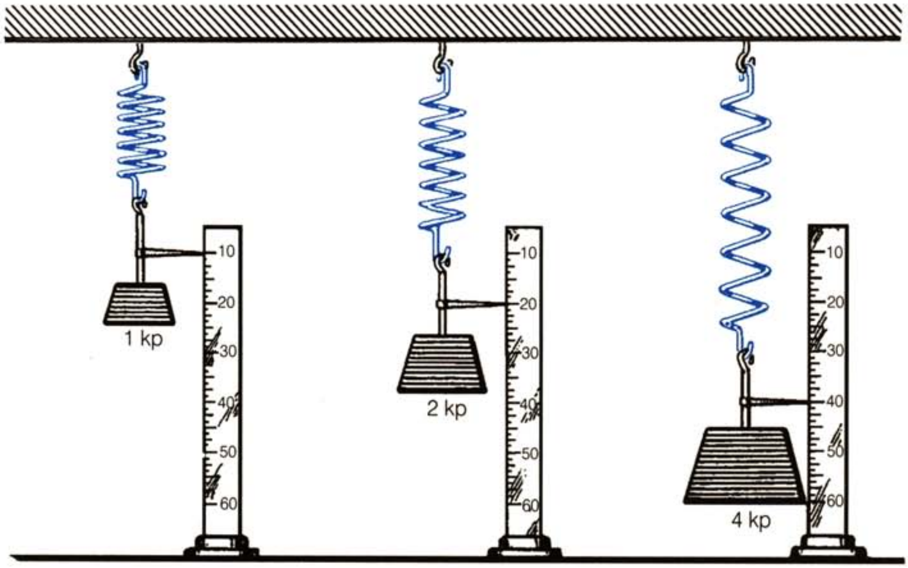
Μία δύναμη F είναι διπλάσια της F΄, αν επιφέρει παραμόρφωση κάποιου σώματος ίση με την παραμόρφωση, που θα επιφέρουν δύο δυνάμεις ίσες με την F΄, που θα επιδράσουν πάνω στο ίδιο σώμα κατά τον ίδιο τρόπο. Ανάλογα ορίζεται η τριπλάσια, τετραπλάσια κ.ο.κ. δύναμη F μιας άλλης δυνάμεως F΄.

Σημείωση:

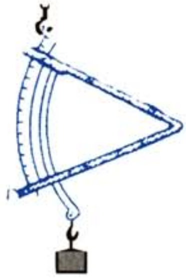
Όταν σε ένα ελατήριο επιδράσουν ορισμένες δυνάμεις, προκαλούν ορισμένες επιμηκύνσεις του ελατηρίου αυτού. Οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων (γενικότερα οι παραμορφώσεις των ελασμάτων) είναι ανάλογες προς τις δυνάμεις που τις προκαλούν, αρκεί οι δυνάμεις αυτές να μην υπερβούν κάποια τιμή, τέτοια ώστε να μπορούν τα ελατήρια να επανέρχονται στο μήκος που είχαν πριν, όταν πάψουν να επιδρούν οι δυνάμεις (νόμος Hooke).

1.5.2 Δυναμόμετρα.

Τα δυναμόμετρα είναι διατάξεις με τις οποίες μετρούμε τις δυνάμεις. Η μέτρηση



Σχ. 1.5α.



Σχ. 1.5β.

Σχ. 1.5γ.

των δυνάμεων που γίνεται με τα δυναμόμετρα ονομάζεται στατική μέτρηση των δυνάμεων .

Η λειτουργία των δυναμομέτρων στηρίζεται στο νόμο του Hooke, σύμφωνα με τον οποίο: αν από ένα συγκεκριμένο ελατήριο εξαρτήσομε διαδοχικά τις δυνάμεις 1 N, 2 N, 4 N κλπ. (σχ. 1.5α) και επάνω στην κλίμακα, σημειώσομε τις θέσεις του δείκτη με 1, 2, 4 κλπ. αντίστοιχα, τότε θα έχομε ένα βαθμονομημένο δυναμόμετρο.

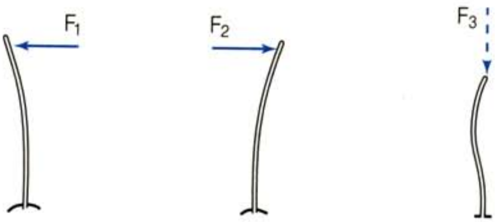
Αν τώρα στο ίδιο ελατήριο ασκήσομε μία άγνωστη δύναμη και ο δείκτης έλθει στη θέση 2,5, τότε η άγνωστη δύναμη είναι 2,5 N.

Τα δυναμόμετρα των σχημάτων 1.5β και 1.5γ χρησιμοποιούνται κυρίως για τη μέτρηση μεγάλων δυνάμεων.

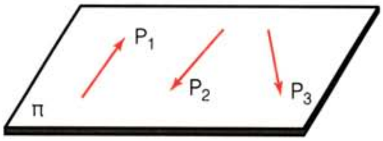
1.6 Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος.

Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος, διότι το αποτέλεσμά της δεν εξαρτάται μόνο από το μέτρο της, αλλά και από τη διεύθυνσή της και τη φορά της.

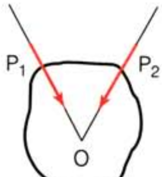
Στο σχήμα 1.6 παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των τριών δυνάμεων



Σχ. 1.6.

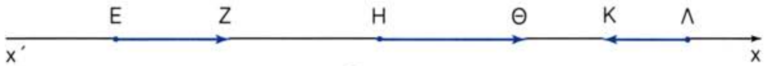


Σχ. 1.7α.



Σχ. 1.7β.

Σχ. 1.7γ.



Σχ. 1.7δ.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ είναι διαφορετικά, αν και οι τρεις αυτές δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα. Αυτό συμβαίνει γιατί: 1) Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι διαφορετικές διότι έχουν ίδια μέτρα και διεύθυνση αλλά διαφορετική φορά και 2) η $\vec{F}_3$ είναι διαφορετική.από τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, διότι η διεύθυνσή της και η φορά της δεν συμπίπτουν με τη διεύθυνση και τη φορά των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

1.7 Περιπτώσεις δυνάμεων.

α) Συνεπίπεδες δυνάμεις.

Συνεπίπεδες δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις των οποίων οι φορείς κείνται επάνω στο ίδιο επίπεδο, όπως οι $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ (σχ. 1.7α).

β) Συντρέχουσες δυνάμεις.

Συντρέχουσες δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις των οποίων οι φορείς συναντώνται σε ένα σημείο (σχ. 1.7β).

γ) Παράλληλες δυνάμεις.

Παράλληλες δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις, των οποίων οι φορείς είναι παράλληλες ευθείες (σχ. 1.7γ και 1.7δ).

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta} \parallel \overrightarrow{EZ} \parallel \overrightarrow{H\Theta} \parallel \overrightarrow{K\Lambda} \parallel \overrightarrow{MN}$$

δ) Συγγραμμικές δυνάμεις.

Συγγραμμικές δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις που έχουν τον ίδιο φορέα (σχ. 1.7ε).

ε) Ομόρροπες δυνάμεις.

Ομόρροπες δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις που είναι παράλληλες ή συγγραμμικές και έχουν την ίδια φορά [(σχ.1.7στ (α) και (β)].

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta},\ \overrightarrow{K\Lambda} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$$

στ) Αντίρροπες δυνάμεις.

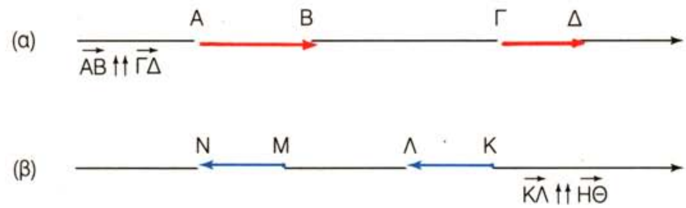
Αντίρροπες δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις που είναι παράλληλες ή συγγραμμικές και έχουν αντίθετες φορές (σχ. 1.7ζ).

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{EZ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{H\Theta}$$

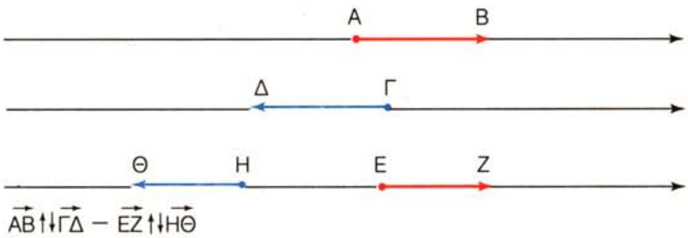
ζ)΄Ισες δυνάμεις.

΄Ισες δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις που έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα: $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$ [σχ. 1.7η(α)], $|\overrightarrow{EZ}|=|\overrightarrow{H\Theta}|$ [σχ. 1.7η (β)].

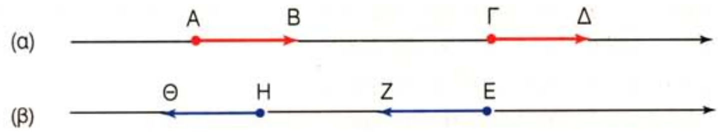
Σχ. 1.7ε.



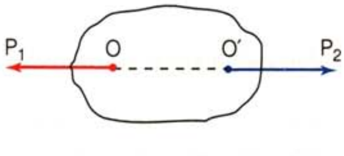
Σχ. 1.7στ.



Σχ. 1.7ζ.



Σχ. 1.7η.



Σχ. 1.7θ.

η) Αντίθετες δυνάμεις.

Αντίθετες δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις που έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα αλλά αντίθετες φορές (σχ. 1.7θ).

$$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{O'P_2}|,\quad \overrightarrow{OP_1}=-\overrightarrow{O'P_2}$$

1.8 Γραφική παράσταση δυνάμεως.

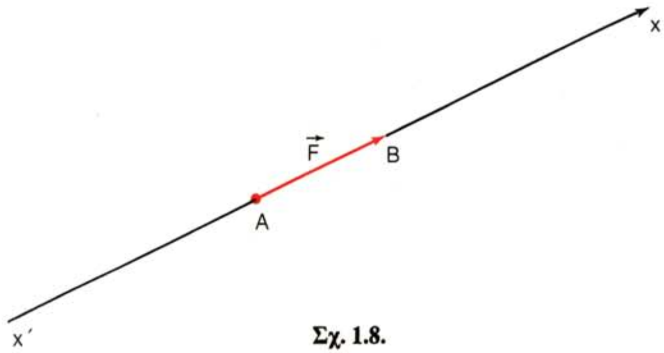
Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος. Επομένως μία δύναμη παρίσταται γραφικά με ένα διάνυσμα, το οποίο εκφράζει όλα τα χαρακτηριστικά της στοιχεία.

Αν η δύναμη $\vec{F}$ παρίσταται με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 1.8), τότε:

1) ***Η αρχή Α*** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ αντιπροσωπεύει το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως $\vec{F}$.

2) ***Η ευθεία x΄x*** επί της οποίας κείται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ παριστά το φορέα της δυνάμεως $\vec{F}$.

3) ***Η φορά του*** διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ (από Α προς Β) εκφράζει (παριστάνει) τη φορά της δυνάμεως $\vec{F}$.



Σχ. 1.8.

4) ***Το μήκος*** (ΑΒ) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, το οποίο μετρείται με κατάλληλη κλίμακα αντιπροσωπεύει το μέτρο της δυνάμεως.

Αν το μέτρο της δυνάμεως $\vec{F}$ είναι 20 N και αν 1 mm αντιστοιχεί σε δύναμη 1 N, τότε η δύναμη $\vec{F}$ θα παρασταθεί γραφικά με ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μήκους 20 mm.

Ομοίως, αν 1 cm αντιστοιχεί σε δύναμη 1 N, τότε η δύναμη 20 N θα παρασταθεί με διάνυσμα 20 cm.

1.9 Δύναμη ασκούμενη σε ένα σώμα είναι ολισθαίνον διανυσματικό μέγεθος.

Αν μία δύναμη, που ασκείται σ' ένα σημείο στερεού σώματος, τη μεταφέρομε πάνω στο φορέα της αλλάζοντας έτσι μόνο το σημείο εφαρμογής της, τότε το αποτέλεσμά της πάνω στο σώμα δεν μεταβάλλεται.

Επομένως μπορούμε μία δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 1.9α) που ασκείται στο σημείο Α του σώματος να την αντικαταστήσομε με μια άλλη δύναμη $\vec{F}_1$, η οποία έχει:

1) Το ίδιο μέτρο με την $\vec{F}$.

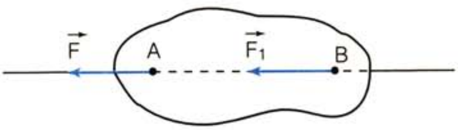
2) Τον ίδιο φορέα με την $\vec{F}$.

3) Την ίδια φορά με την $\vec{F}$, ***αλλά σημείο εφαρμογής ένα άλλο σημείο Β του σώματος. Δηλαδή:*** Μία δύναμη που ασκείται σε στερεό σώμα είναι ολισθαίνον διανυσματικό μέγεθος.

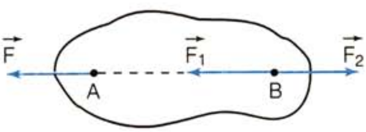
Η παραπάνω πρόταση αναφέρεται συνήθως ως θεώρημα της μεταφοράς (ή ολισθήσεως) δυνάμεως επάνω στο φορέα της.

Απόδειξη:

Έστω ότι στο σημείο Α ενός στερεού σώματος (σχ. 1.9β) ενεργεί η δύναμη $\vec{F}$. Αν σε ένα άλλο σημείο Β του ιδίου σώματος εφαρμόσομε τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που έχουν φορέα και μέτρο το ίδιο με την $\vec{F}$ αλλά η $\vec{F}_1$ είναι ομόρροπη προς την $\vec{F}$ ενώ η $\vec{F}_2$ είναι αντίρροπη προς την $\vec{F}$, τότε το αποτέλεσμα της $\vec{F}$ δεν μεταβάλλεται. Αυτό



Σχ. 1.9α.



Σχ. 1.9β.

συμβαίνει, επειδή οι δύο δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}_2$ αλληλοεξουδετερώνονται. Έτσι, μπορούμε να απομακρύνομε τις δύο αυτές δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}_2$, οπότε στο σώμα θα μείνει μόνο η δύναμη $\vec{F}_1$ εφαρμοσμένη στο σημείο Β. ***Δηλαδή το αποτέλεσμα της $\vec{F}$ στο σώμα είναι τα ίδιο είτε είναι εφαρμοσμένη στο σημείο Α είτε στο σημείο Β, αρκεί να μην αλλάξει ο φορέας της, η φορά της και το μέτρο της.***

1.10 Θεμελιώδεις αρχές (προτάσεις) της στατικής.

Η στατική του υλικού σημείου και του στερεού σώματος στηρίζεται (θεμελιώνεται) στις εξής αρχές:

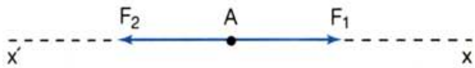
1) Αν σε ένα υλικό σημείο ή σε ένα σημείο στερεού σώματος ασκηθούν δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που έχουν: α) Τον ίδιο φορέα, β) το ίδιο μέτρο ($|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|$) και αντίθετη φορά (σχ. 1.10α), τότε οι δυνάμεις αυτές ισορροπούν.

2) Αν δύο δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, που ασκηθούν σε δύο σημεία (A_1, A_2) ενός στερεού σώματος και έχουν: α) Τον ίδιο φορέα, β) το ίδιο μέτρο ($|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|$) και γ) αντίθετη φορά (σχ. 1.10β και 1.10γ), τότε οι δυνάμεις αυτές ισορροπούν, δηλαδή δεν επιφέρουν μεταβολή στην ισορροπία ή κίνηση που είχε το σώμα πριν την άσκησή τους.

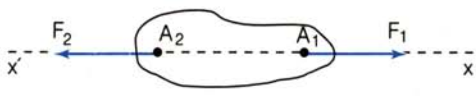
3) Κανόνας ή αρχή του παραλληλογράμμου των δυνάμεων.

Ο κανόνας του παραλληλογράμμου ορίζει τα εξής:

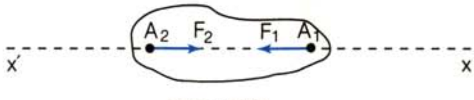
Εάν δύο δυνάμεις οι οποίες παρίστανται με τα διανύσματα $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ (σχ. 1.10δ) ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Sigma}$ το οποίο είναι η διαγώνιος του



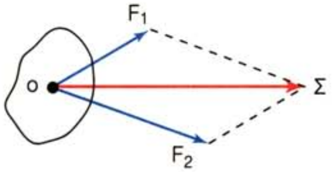
Σχ. 1.10α.



Σχ. 1.10β.



Σχ. 1.10γ.



Σχ. 1.10δ.

παραλληλογράμμου ($OF_1\Sigma F_2$) το οποίο έχει προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ παριστά τη συνισταμένη των δύο δυνάμεων $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$.

1.11 Αρχή δράσεως και αντιδράσεως ή τρίτο αξίωμα (νόμος) του Νεύτωνα.

Η αρχή δράσεως και αντιδράσεως ορίζει τα εξής:

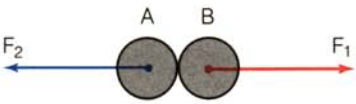
Αν ένα σώμα Α ασκεί μία δύναμη $\vec{F}_1$ επάνω σε ένα άλλο σώμα Β, τότε και το σώμα Β ασκεί ταυτόχρονα στο Α μία άλλη δύναμη $\vec{F}_2$. Οι δύο αυτές δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουν τον ίδιο φορέα και το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες φορές (σχ. 1.11α).

Τα δύο σώματα Α και Β μπορεί να βρίσκονται σε επαφή (σχ. 1.11α), οπότε οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι δυνάμεις επαφής. Μπορεί όμως και να ***μην*** βρίσκονται σε επαφή (σχ. 1.11β), οπότε οι δυνάμεις είναι δυνάμεις από απόσταση. Λέμε συνήθως ότι οι δυνάμεις αυτές είναι «ίσες και αντίθετες».

Αν με το δάκτυλό μας ασκήσομε μία δύναμη $\vec{F}_1$ επάνω σε ένα έλασμα (σχ. 1.11γ), τότε και το έλασμα ασκεί επάνω στο δάκτυλό μας μία δύναμη $\vec{F}_2$.

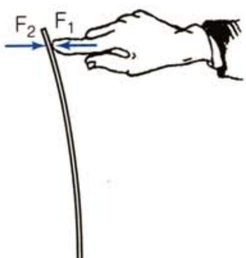
Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουν τον ίδιο φορέα και το ίδιο μέτρο, αλλά οι φορές τους είναι αντίθετες. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι δυνάμεις επαφής (σχ. 1.11γ).

Επάνω σε πλωτήρες στηρίζονται ο μαγνήτης Μ και το σιδερένιο σώμα Σ (σχ. 1.11δ). Ο μαγνήτης Μ έλκει το σώμα Σ με δύναμη $\vec{F}_1$ και το σώμα Σ έλκει το μαγνήτη Μ με δύναμη $\vec{F}_2$.

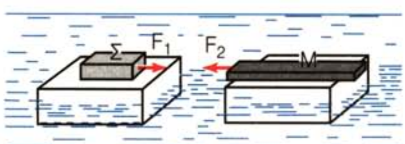


Σχ. 1.11α.

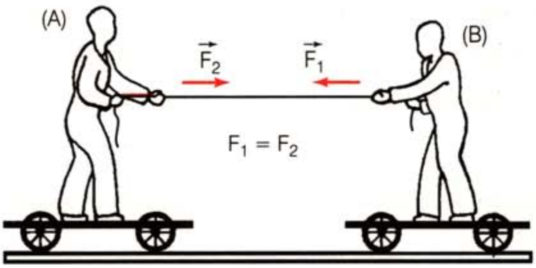
Σχ. 1.11β.



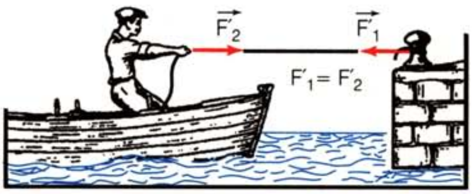
Σχ. 1.11γ.



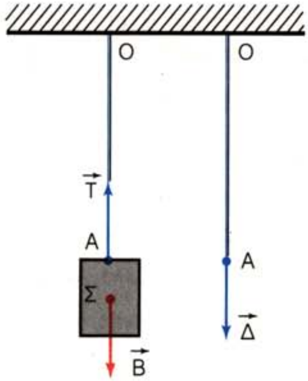
Σχ. 1.11δ.



Σχ. 1.11ε.



Σχ. 1.11στ.



Σχ. 1.11ζ.

Οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουν τον ίδιο φορέα και το ίδιο μέτρο, αλλά οι φορές τους είναι αντίθετες. Η δύναμη $\vec{F}_1$ που ασκείται από το μαγνήτη Μ στο σώμα Σ αναγκάζει το σώμα Σ (μαζί με τον πλωτήρα του) να κινείται προς τα δεξιά. Ταυτοχρόνως όμως κινείται προς τα αριστερά ο μαγνήτης Μ (μαζί με τον πλωτήρα του), εξ αιτίας της δυνάμεως $\vec{F}_2$, την οποία ασκεί επάνω του το σώμα Σ.

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ στο παράδειγμα του σχήματος 1.11δ είναι δυνάμεις από απόσταση.

Παρατηρήσεις:

1) Οι δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη.

2) Τη δύναμη $\vec{F}_1$, την οποία ασκεί ο άνθρωπος Α πάνω στον Β την ονομάζομε δράση, και τη δύναμη $\vec{F}_2$, την οποία ασκεί ο Β επάνω στον Α, την ονομάζομε αντίδραση και αντίστροφα (σχ. 1.11ε). Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση του σχήματος 1.11στ.

Προσοχή:

Δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι η δράση $\vec{F}_1$ και η αντίδραση $\vec{F}_2$ ασκούνται επάνω ***σε διαφορετικά*** σώματα (η $\vec{F}_1$ στο Β από το Α, και η $\vec{F}_2$ στο Α από το Β) ή με άλλα λόγια, η δράση και η αντίδραση δεν ασκούνται στο ίδιο σώμα, δηλαδή τα σημεία εφαρμογής τους ανήκουν σε δύο διαφορετικά σώματα.

Τάση νήματος.

Αν σώμα Σ βάρους $\vec{B}$ (σχ. 1.11ζ) είναι κρεμασμένο με νήμα από σταθερό σημείο Ο και ισορροπεί, τότε το νήμα δέχεται από επαφή κάποια δύναμη $\vec{\Delta}$ από το σώμα και συνεπώς το σώμα δέχεται την αντίδραση $\vec{T}$ αυτής $(\vec{T} = -\vec{\Delta})$. Τη δύναμη $\vec{T}$ που ασκείται στο σώμα από το νήμα την ονομάζομε τάση του νήματος. Εφ' όσον το σώμα ισορροπεί έχομε: $\vec{T} = -\vec{B}$. Συνεπώς το μήμα δέχεται από το σώμα δράση $\vec{\Delta}$ ίση με το βάρος του $\vec{B}$.

1.12 Γενικά περί συνθέσεως δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σημείο στερεού σώματος ή σε ένα υλικό σημείο.

1.12.1 Βοηθητικές γνώσεις.

α) Τι εννοούμε όταν λέμε διαδοχικά διανύσματα;

Εννοούμε δύο ή περισσότερα διανύσματα που το τέλος του καθενός συμπίπτει με την αρχή του επομένου.

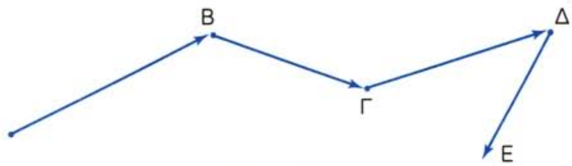
Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}$ είναι διαδοχικά (σχ. 1.12α).

Τα διανύσματα $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1\Gamma_1}$ είναι διαδοχικά (σχ. 1.12β).

Τα διανύσματα $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{B_2\Gamma_2}$ είναι διαδοχικά (σχ. 1.12γ).

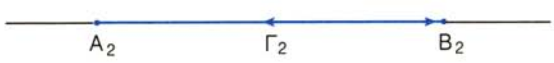
β) Πώς καθιστούμε δύο ή περισσότερα διανύσματα διαδοχικά;

Έστω ότι έχομε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ (σχ. 1.12δ). Από ένα τυχαίο σημείο Α παίρνομε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$. Από το τέλος του $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή από το

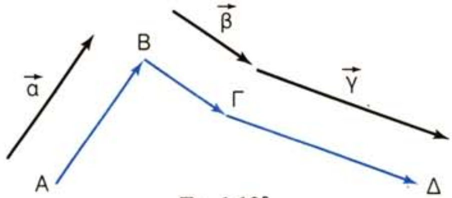


Σχ. 1.12α.

Σχ. 1.12β.



Σχ. 1.12γ.



Σχ. 1.12δ.

σημείο Β, παίρνομε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \vec{\beta}$. Από το τέλος του $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, δηλαδή από το σημείο Γ, παίρνομε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\gamma}$.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που είναι διαδοχικά αντιπροσωπεύουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Σημείωση:

Όταν λέμε ότι τα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ αντιπροσωπεύουν αντιστοίχως τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ εννοούμε ότι αυτά έχουν όλες τις ιδιότητες των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ αντίστοιχα.

Στο σχήμα 1.12ε φαίνεται πώς τα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ κατέστησαν διαδοχικά $\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B_1\Gamma_1}}$.

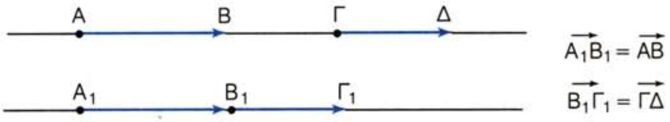
Στο σχήμα 1.12στ φαίνεται πώς τα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ZH}}$ κατέστησαν διαδοχικά $\overrightarrow{\Delta_1\mathrm{E}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{E_1H_1}}$.

γ) Τι εννοούμε όταν λέμε άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων;

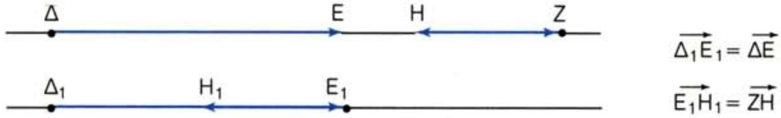
Εννοούμε το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του τελευταίου.

Το άθροισμα των διαδοχικών διανυσμάτων του σχήματος 1.12ζ είναι το $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ και για να το δηλώσομε αυτό, γράφομε: $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$.

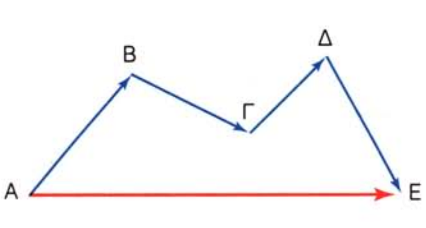
Γενικότερα, αν έχομε οποιαδήποτε διανύσματα, για παράδειγμα τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ (σχ. 1.12η) και πάρομε τα ίσα τους διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\gamma}$, το



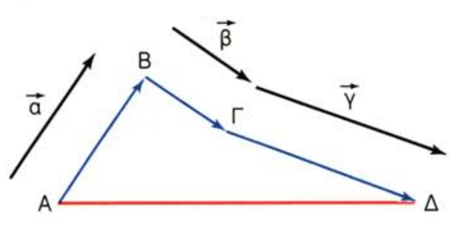
Σχ. 1.12ε.



Σχ. 1.12στ.



Σχ. 1.12ζ.



Σχ. 1.12η.

άθροισμα $\overrightarrow{ΑΔ}$ των $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΓΔ}$ λέγεται άθροισμα των $\vec{α}, \vec{β}, \vec{γ}$ και γράφομε: $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{α} + \vec{β} + \vec{γ}$.

Σημείωση:

1) Το άθροισμα διανυσμάτων λέγεται και γεωμετρικό άθροισμα ή και διανυσματικό άθροισμα. Επίσης, το άθροισμα διανυσμάτων ονομάζεται και διανυσματική συνισταμένη των διανυσμάτων αυτών. Στο σχήμα 1.12ζ το $\overrightarrow{ΑΕ}$ είναι η διανυσματική συνισταμένη των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΓΔ}, \overrightarrow{ΔΕ}$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΓΔ}, \overrightarrow{ΔΕ}$ ονομάζονται διανυσματικές συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{ΑΕ}$ (σχ. 1.12ζ).

2) Τι σημαίνει όταν μας λένε να προσθέσομε διανύσματα, για παράδειγμα τα $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΓΔ}, \overrightarrow{ΔΕ}$ (σχ. 1.12ζ);

Σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΓΔ}, \overrightarrow{ΔΕ}$, δηλαδή να βρούμε το $\overrightarrow{ΑΕ}$.

δ) Πώς προσθέτομε διανύσματα;

Το διανυσματικό άθροισμα δύο ή περισσοτέρων διανυσμάτων το βρίσκομε κυρίως με τους πιο κάτω τρόπους:

1) Καθιστούμε τα διανύσματα διαδοχικά.

Το διάνυσμα που η αρχή του είναι η αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του τελευταίου των διαδοχικών διανυσμάτων είναι το άθροισμα αυτών.

Π.χ. Το $\overrightarrow{ΑΕ}$ (σχ. 1.12ζ) είναι το άθροισμα των $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΓΔ}, \overrightarrow{ΔΕ}$.

Το $\overrightarrow{ΑΔ}$ (σχ. 1.12η) είναι το άθροισμα των $\vec{α}, \vec{β}, \vec{γ}$.

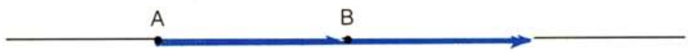
Γράφομε: $\overrightarrow{ΑΕ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΕ}$, $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{α} + \vec{β} + \vec{γ}$.

Το $\overrightarrow{ΑΓ}$ (σχ. 1.12θ) είναι το άθροισμα των $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}$ και γράφομε: $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ}$.

Το $\overrightarrow{Α_1Γ_1}$ (σχ. 1.12ι) είναι το άθροισμα των $\overrightarrow{Α_1Β_1}, \overrightarrow{Β_1Γ_1}$ και γράφομε: $\overrightarrow{Α_1Γ_1} = \overrightarrow{Α_1Β_1} + \overrightarrow{Β_1Γ_1}$.

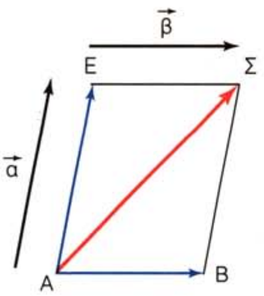
2) Με βάση την αρχή του παραλληλογράμμου.

Για να βρούμε το άθροισμα των $\vec{α}$ και $\vec{β}$ παίρνομε ένα σημείο Α (σχ. 1.12ια). Κατόπιν παίρνομε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΕ} = \vec{α}$ και $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{β}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΣ}$ που ορίζει η διαγώνιος του παραλληλογράμμου, το οποίο έχει πλευρές (ΑΕ) = $|\vec{α}|$ και (ΑΒ) = $|\vec{β}|$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$: $\overrightarrow{ΑΣ} = \vec{α} + \vec{β}$.

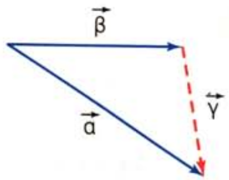


Σχ. 1.12θ.

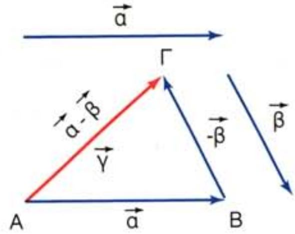
Σχ. 1.12ι.



Σχ. 1.12ια.



Σχ. 1.12ιβ.



Σχ. 1.12ιγ.

ε) Τι ονομάζομε διαφορά δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Ονομάζομε διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$, το οποίο προστιθέμενο στο $\vec{\beta}$ δίνει ως άθροισμα το $\vec{\alpha}$, δηλαδή: $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$ (1).

Από τη σχέση (1) προκύπτει η σχέση: $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ (2).

Η παράσταση $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ συμβολίζει τη διαφορά του $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ ή όπως συνήθως λέμε την αφαίρεση του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Το $\vec{\gamma}$ μπορεί να προκύψει κατά τους εξής δύο τρόπους:

1) Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ το οποίο έχει αρχή το τέλος του $\vec{\beta}$ και τέλος το τέλος του $\vec{\alpha}$ είναι αυτό που ζητούμε, διότι: $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$ (σχ. 1.12ιβ).

2) Από το τέλος του $\vec{\alpha}$ (σχ. 1.12ιγ) φέρνομε διάνυσμα ίσο προς το $-\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ το οποίο έχει αρχή την αρχή του $\vec{\alpha}$ και τέλος το τέλος του $-\vec{\beta}$. είναι αυτό που ζητούμε, διότι: $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})=\vec{\gamma}$ ή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

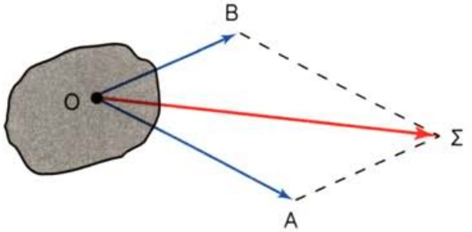
Σημείωση:

Συνήθως ονομάζομε διαφορά του $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ το διάνυσμα που θα προκύψει αν στο $\vec{\alpha}$ προσθέσομε το αντίθετο του $\vec{\beta}$, δηλαδή $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})=\vec{\gamma}$.

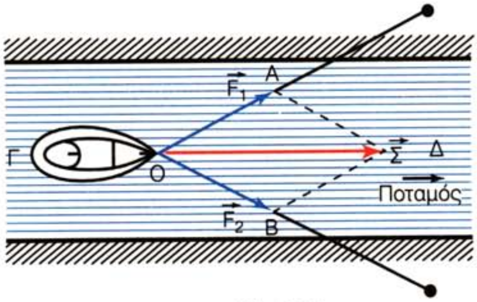
1.12.2 Βασικές γνώσεις.

Όταν λέμε σύνθεση δύο δυνάμεων $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (και κατ' επέκταση περισσοτέρων) που ασκούνται συγχρόνως επάνω σε ένα σημείο Ο στερεού σώματος (ή επάνω σε ένα υλικό σημείο Ο) εννοούμε την ***αντικατάσταση*** αυτών από μία άλλη δύναμη $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$, η οποία θα επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα που επιφέρουν αυτές, όταν μόνον αυτή (δηλαδή η $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$) επιδράσει στο ίδιο σημείο Ο (σχ. 1.12ιδ).

Η δύναμη $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ που μπορεί να αντικαταστήσει δύο δυνάμεις $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (και κατ' επέκταση περισσότερες) που ασκούνται επάνω σε ένα σημείο Ο



Σχ. 1.12ιδ.



Σχ. 1.12ιε.

ονομάζεται ***συνισταμένη*** των δυνάμεων αυτών (δηλαδή των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$).

Δύο δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ (και κατ' επέκταση περισσότερες) που ασκούνται επάνω στο ίδιο σημείο Ο ονομάζονται ***συνιστώσες*** της δυνάμεως $\overrightarrow{OΣ}$, όταν αυτές έχουν συνισταμένη τη δύναμη αυτή (δηλαδή την $\overrightarrow{OΣ}$).

Σημείωση:

Όταν λέμε λοιπόν ότι οι $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι συνιστώσες της $\overrightarrow{OΣ}$, εννοούμε ότι αυτές έχουν συνισταμένη την $\overrightarrow{OΣ}$. Όταν λέμε ότι συνθέτομε δύο δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ (και κατ' επέκταση περισσότερες) που ασκούνται στο σημείο Ο, βρίσκομε (προσδιορίζομε, καθορίζομε) τη συνισταμένη $\overrightarrow{OΣ}$ των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

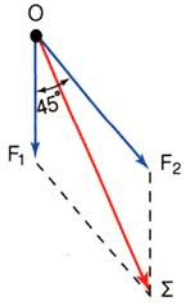
Αν επί χρόνο t έλκομε μία βάρκα (σχ. 1.12ιε) με δυνάμεις $\vec{F} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{F} = \overrightarrow{OB}$, τότε η βάρκα μετακινείται από τη θέση Γ στη θέση Δ. Φέρνομε τη βάρκα πάλι στη θέση Γ και την έλκομε μόνο με τη δύναμη $\overrightarrow{OΣ}$. Αν η βάρκα έλθει από τη θέση Γ στη θέση Δ μέσα σε χρόνο t, τότε η $\overrightarrow{OΣ}$ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων $\overrightarrow{OA} = \vec{F}_1$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{F}_2$. Οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι οι συνιστώσες της $\overrightarrow{OΣ}$.

1.13 Σύνθεση δύο δυνάμεων $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ που ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο και σχηματίζουν γωνία φ.

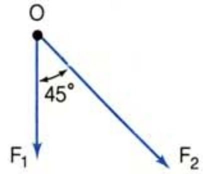
α) Γραφικός προσδιορισμός της $\overrightarrow{OΣ}$.

1) Μέθοδος με τον κανόνα του παραλληλογράμμου των δυνάμεων.

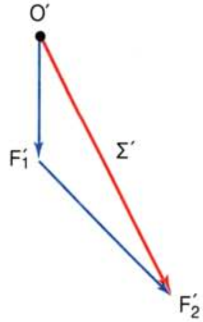
Έστω ότι το μέτρο της $\overrightarrow{OF_1}$ είναι $|\overrightarrow{OF_1}| = 200$ N και της $\overrightarrow{OF_2}$: $|\overrightarrow{OF_2}| = 300$ N, η



Σχ. 1.13α.



Σχ. 1.13β.



Σχ. 1.13γ.

γωνία δε τη οποία σχηματίζουν οι $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ είναι: $\varphi = 45^o$ (σχ. 1.13α).

Κατασκευάζομε κατά τα γνωστά από τη γεωμετρία μία γωνία 45°. Με κλίμακα 1 cm $\widehat{=}$ 100 N χαράσσομε επί των πλευρών της γωνίας φ τη δύναμη $\overrightarrow{OF_1}$ μήκους 2 cm και τη δύναμη $\overrightarrow{OF_2}$ μήκους 3 cm. Κατόπιν σχηματίζομε το παραλληλόγραμμο: $OF_1\,\Sigma\,F_2$. Η διαγώνιος $\overrightarrow{O\Sigma}$ του παραλληλογράμμου $OF_1\,\Sigma\,F_2$ παριστά τη συνισταμένη των $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$. Για να καθορίσομε το μέτρο της $\overrightarrow{O\Sigma}$, μετρούμε το μήκος της· έστω ότι αυτό είναι 4,8 cm. Άρα το μέτρο της $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι: $|\overrightarrow{O\Sigma}| = 4{,}8 \cdot 100\ N = 480\ N$.

2) Μέθοδος του πολυγώνου των δυνάμεων.

Έστω ότι το μέτρο της $\overrightarrow{OF_1}$ είναι: $|\overrightarrow{OF_1}| = 200\ N$ και της $\overrightarrow{OF_2}$: $|\overrightarrow{OF_2}| = 300\ N$, ενώ η γωνία φ την οποία σχηματίζουν οι $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ είναι: $\varphi = 45^o$.

Κατασκευάζομε μία γωνία 45° (σχ. 1.13β). Με κλίμακα 1 cm $\widehat{=}$ 100 N χαράσσομε επί των πλευρών της γωνίας φ τη δύναμη $\overrightarrow{OF_1}$ μήκους 2 cm και τη δύναμη $\overrightarrow{OF_2}$ μήκους 3 cm.

Κατόπιν από το σημείο Ο΄ φέρομε τη δύναμη $\overrightarrow{O'F'_2}$ παράλληλη, ομόρροπη και ίση προς την $\overrightarrow{OF_1}$ (σχ. 1.13γ). Από το πέρας F_1' της $\overrightarrow{O'F'_1}$ φέρομε τη δύναμη $\overrightarrow{F_1'F_2'}$ παράλληλη, ομόρροπη και ίση προς την $\overrightarrow{OF_2}$.

Ενώνομε τα σημεία Ο΄ και F_2', οπότε το διάνυσμα $\overrightarrow{O'F'_2}$ παριστάνει μια δύναμη, η οποία είναι η συνισταμένη των $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$. Μετρούμε το μήκος της $\overrightarrow{O'F'_2}$ και έστω ότι το βρίσκομε 4,8 cm.

Το μέτρο της $\overrightarrow{O'F'_2}$ είναι: $4{,}8 \cdot 100\ N = 480\ N$.

β) Υπολογιστικός προσδιορισμός της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$.

1) Υπολογισμός του μέτρου της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$.

Έστω ότι δίδονται: α) Οι δυνάμεις $\overrightarrow{OA} = \vec{F}_1$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{F}_2$ και β) η γωνία φ που σχηματίζουν αυτές μεταξύ τους, και ζητείται να υπολογισθεί το μέτρο της συνισταμένης $\vec{\Sigma} = \overrightarrow{O\Gamma}$ (σχ. 1.13δ).

Εφαρμόζομε το νόμο του συνημιτόνου στο τρίγωνο ΟΒΓ και έχομε:

$(O\Gamma)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\,\text{συν}\,(180^\circ - \varphi)$ και

$(O\Gamma)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB) \cdot (-\text{συν}\varphi)$

$(O\Gamma)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)(OB)\,\text{συν}\varphi$

$(O\Gamma) = +\sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)(OB)\,\text{συν}\varphi}$

$$\boxed{|\vec{\Sigma}| = +\sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2|\,\text{συν}\varphi}} \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) υπολογίζομε το μέτρο $|\vec{\Sigma}|$ της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, όταν δίδονται τα μέτρα τους.

2) Καθορισμός της διευθύνσεως της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$.

Η διεύθυνση της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ καθορίζεται από τη γωνία θ, (σχ. 1.13δ) την οποία υπολογίζομε ως εξής:

Προβάλλομε τη $\vec{\Sigma} = \overrightarrow{O\Gamma}$ επάνω στη διεύθυνση της $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$, οπότε έχομε:

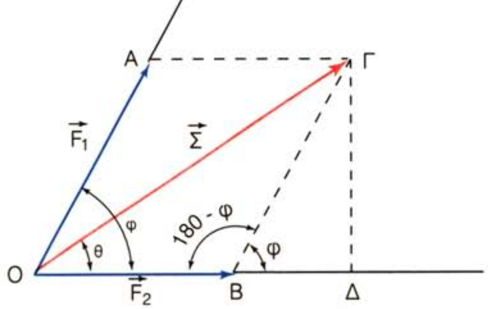
$$\text{εφ}\theta = \frac{\Gamma\Delta}{O\Delta} \qquad (2)$$

Επίσης έχομε:

$$\Gamma\Delta = F_1 \cdot \text{ημ}\varphi \qquad (3)$$

$$O\Delta = OB + B\Delta = F_2 + F_1\,\text{συν}\varphi \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) υπολογίζομε την εφαπτομένη της γωνίας θ:



Σχ. 1.13δ.

$$\boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_1 \cdot \eta\mu\varphi}{F_2 + F_1\ \sigma\upsilon\nu\varphi}}$$

Από την εφθ υπολογίζομε τη γωνία θ, η οποία καθορίζει τη διεύθυνση της $\vec{\Sigma}$ (η διεύθυνση της $\overrightarrow{OF_2}$ θεωρείται γνωστή).

1.14 Σύνθεση δύο δυνάμεων που ασκούνται στο ίδιο σημείο και οι φορείς τους σχηματίζουν γωνία 90°.

α) Γραφική μέθοδος.

Έστω ότι οι φορείς των δυνάμεων $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ είναι οι ημιευθείες οx και οy αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία $\varphi = 90^o$ (σχ. 1.14).

Επίσης έστω ότι τα μέτρα των $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ είναι: $|\overrightarrow{OF_1}| = 3000$ N και $|\overrightarrow{OF_2}| = 4000$ N.

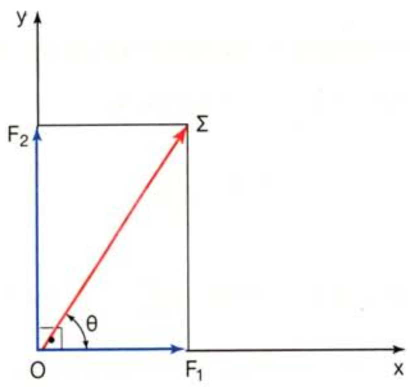
Με κλίμακα για παράδειγμα 1 cm $\triangleq$ 1000 N χαράσσομε:

1) Πάνω στην οx ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OF_1}$ μήκους 3 cm. Αυτό παριστάνει τη δύναμη $\overrightarrow{OF_1}$ που έχει μέτρο $|\overrightarrow{OF_1}| = 3\cdot1000$ N= 3000N.

2) Πάνω στην οy ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OF_2}$ μήκους 4 cm. Αυτό παριστάνει τη δύναμη $\overrightarrow{OF_2}$ που έχει μέτρο $|\overrightarrow{OF_2}| = 4\cdot1000$ N = 4000N.

Η διαγώνιος $\overrightarrow{O\Sigma}$ του παραλληλογράμμου $OF_1\Sigma F_2$ παριστάνει τη συνισταμένη των $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$. ***Μετρούμε*** το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Sigma}$ και το βρίσκομε 5 cm. Επομένως το μέτρο της συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ των δύο δυνάμεων $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ είναι $5\cdot1000$ N = 5000 N. Στη συνέχεια μετρούμε τη γωνία θ και τη βρίσκομε $\theta = 53^o$.

Επομένως, φορέας της $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι εκείνος που σχηματίζει με το φορέα της δυνάμεως $\overrightarrow{OF_1}$ γωνία 53°.



Σχ. 1.14.

Συμπέρασμα:

Η συνισταμένη $\overrightarrow{O\Sigma}$ των $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ που σχηματίζουν γωνία 90^o έχει μέτρο 5000 N και ο φορέας της σχηματίζει με το φορέα της $\overrightarrow{OF_1}$ γωνία $\theta = 53^o$.

β) Υπολογιστική μέθοδος.

1) Υπολογισμός του μέτρου της $\overrightarrow{O\Sigma}$.

Οι δύο δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$ ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο και επομένως το μέτρο της συνισταμένης τους $\overrightarrow{O\Sigma}$ δίνεται από τη γενική σχέση:

$$|\overrightarrow{O\Sigma}| = +\sqrt{|\overrightarrow{OF_1}|^2 + |\overrightarrow{OF_2}|^2 + 2|\overrightarrow{OF_1}||\overrightarrow{OF_2}|\text{συνφ}} \qquad (1)$$

Στην περίπτωσή μας η $\varphi = 90^o$ και

$$\text{συνφ} = \text{συν}\,90^o = 0 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνομε:

$$\boxed{|\overrightarrow{O\Sigma}| = +\sqrt{|\overrightarrow{OF_1}|^2 + |\overrightarrow{OF_2}|^2}}$$

Αν για παράδειγμα το μέτρο της $\overrightarrow{OF_1}$ είναι $|\overrightarrow{OF_1}| = 3000$ N και της $\overrightarrow{OF_2}$ είναι $|\overrightarrow{OF_2}| = 4000$ N, τότε έχομε:

$$|\overrightarrow{O\Sigma}| = +\sqrt{(3000\text{ N})^2 + (4000\text{ N})^2}$$

$$|\overrightarrow{O\Sigma}| = +\sqrt{25 \cdot 10^6\text{ N}^2} = 5 \cdot 10^3\text{ N} = 5000\text{ N}$$

$$|\overrightarrow{O\Sigma}| = 5000\text{ N}$$

2) Υπολογιστικός προσδιορισμός της διευθύνσεως της $\overrightarrow{O\Sigma}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $OF_1\Sigma$ λαμβάνομε:

$$\boxed{\text{συνθ} = \frac{(OF_1)}{(O\Sigma)}}$$

Για την περίπτωσή μας έχομε: $\text{συνθ} = \frac{3000}{5000} = \frac{3}{5}$ και $\theta = 53^o$.

Επίσης μπορούμε να υπολογίσομε τη γωνία θ χωρίς να χρησιμοποιήσομε το μέτρο της $\overrightarrow{O\Sigma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $OF_1\Sigma$ λαμβάνομε:

$$\boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{(F_1\,\Sigma)}{(OF_1)} = \frac{(OF_2)}{(OF_1)}}$$

Για την περίπτωσή μας έχομε: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{4000}{3000} = \dfrac{4}{3}$ και $\theta = 53^{\circ}$.

1.15 Σύνθεση δύο δυνάμεων που κείνται επάνω στον ίδιο άξονα.

1.15.1 Βοηθητικές γνώσεις.

Τι ισχύουν για το άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων που κείνται επάνω στον ίδιο άξονα;

1) Το διανυσματικό άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων που κείνται επάνω στον ίδιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των διανυσμάτων αυτών (σχ. 1.15α και 1.15β).

2) Η αλγεβρική τιμή αθροίσματος διαδοχικών διανυσμάτων που κείνται επάνω στον ίδιο άξονα είναι ίση με το άθροισμα των αλγεβρικών τιμών των διανυσμάτων αυτών:

3) Για το μέτρο αθροίσματος διαδοχικών διανυσμάτων που κείνται επάνω στον ίδιο άξονα διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

α) Τα διανύσματα να είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτήν το μέτρο του διανυσματικού αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους (σχ. 1.15γ και 1.15δ).

β) Τα διανύσματα να είναι αντίρροπα. Στην περίπτωση αυτήν το μέτρο του διανυ-

$\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overline{A\Delta} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta}$

Σχ. 1.15α.

$\overrightarrow{A_1\Delta_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1\Gamma_1} + \overrightarrow{\Gamma_1\Delta_1}$ και $\overline{A_1\Delta_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1\Gamma_1} + \overline{\Gamma_1\Delta_1}$

Σχ. 1.15β.

$|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{B\Gamma}|$ και $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$

Σχ. 1.15γ.

$|\overrightarrow{\Delta Z}| = |\overrightarrow{\Delta E}| + |\overrightarrow{EZ}|$ και $\overline{\Delta Z} = \overline{\Delta E} + \overline{EZ}$

Σχ. 1.15δ.

σματικού αθροίσματος είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων τους (σχ. 1.15ε).

Επίσης, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε και την εξής έκφραση: ***Το μέτρο του διανυσματικού αθροίσματος είναι ίσο με το μέτρο του μεγαλύτερου διανύσματος μείον του μέτρου του μικρότερου διανύσματος.***

$$|\vec{\mathrm{A\Gamma}}| = |\vec{\mathrm{AB}}| - |\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$$

$$\left(|\vec{\mathrm{AB}}| > |\vec{\mathrm{B\Gamma}}|\right)$$

Προσοχή:

Όταν επάνω σε έναν άξονα κείνται δύο διαδοχικά διανύσματα, τότε η φορά του διανυσματικού τους αθροίσματος βρίσκεται ως εξής:

1) Από το σχήμα 1.15ε, οπότε έχει τη φορά του μεγαλύτερου διανύσματος.

2) Από την αλγεβρική του τιμή. Αν η αλγεβρική τιμή του διανυσματικού αθροίσματος που θα προκύψει από το άθροισμα των αλγεβρικών τιμών των διανυσμάτων είναι θετική, τότε το διανυσματικό τους άθροισμα έχει τη θετική φορά του άξονα. Αν είναι αρνητική, θα έχει την αρνητική φορά του άξονα.

1.15.2 Σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ οι οποίες ασκούνται στον ίδιο σημείο (0), κείνται στο ίδιο άξονα x΄x και έχουν θετικές φορές (σχ. 1.15στ).

Καθιστάμε τις δυνάμεις αυτές διαδοχικές. Η $\vec{\mathrm{O\Sigma}}$ είναι η συνισταμένη των $\vec{\mathrm{OA}}$ και $\vec{\mathrm{OB}}$.

Ισχύουν οι σχέσεις:

$\vec{\mathrm{O\Sigma}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{A\Sigma}} \quad (\vec{\mathrm{A\Sigma}} = \vec{\mathrm{OB}})$

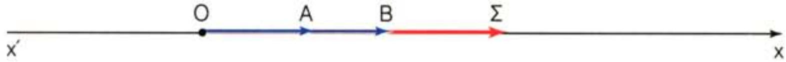
$|\vec{\mathrm{O\Sigma}}| = |\vec{\mathrm{OA}}| + |\vec{\mathrm{A\Sigma}}|$ (οι δυνάμεις έχουν τη ίδια φορά)

$\overline{\mathrm{O\Sigma}} = \overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{A\Sigma}}$

Αν $|\vec{\mathrm{OA}}| = 5$ N και $|\vec{\mathrm{OB}}| = 7$ N τότε το μέτρο της συνισταμένης τους $\vec{\mathrm{O\Sigma}}$ είναι:

$|\vec{\mathrm{A\Gamma}}| = \left||\vec{\mathrm{AB}}| - |\vec{\mathrm{B\Gamma}}|\right|$ και $\overline{\mathrm{A\Gamma}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{B\Gamma}}$

Σχ. 1.15ε.



Σχ. 1.15στ.

$$|\overrightarrow{O\Sigma}| = 5\text{ N} + 7\text{ N} = +12\text{ N}$$

Επειδή οι $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ έχουν θετικές φορές τα αλγεβρικά μέτρα τους είναι: $\overrightarrow{OA}$ = = +5 N και $\overrightarrow{OB}$ = +7 N. Επομένως το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι:

$$\overrightarrow{O\Sigma} = (+5\text{ N}) + (+7\text{ N}) = +12\text{ N}$$

Αφού το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης είναι θετικό η φορά της είναι θετική (αυτό φαίνεται και στο σχήμα 1.15στ). Δηλαδή η συνισταμένη $\overrightarrow{O\Sigma}$ έχει τη φορά των συνιστωσών της: $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

1.16 Σύνθεση δύο δυνάμεων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ οι οποίες ασκούνται στο ίδιο σημείο (0), κείται στον ίδιο άξονα x΄x και έχουν αρνητικές φορές (σχ. 1.16).

Καθιστάμε τις δυνάμεις αυτές διαδοχικές. Η $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι η συνισταμένη των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

Ισχύουν οι σχέσεις:

$\overrightarrow{O\Sigma} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Sigma} \quad (\overrightarrow{A\Sigma} = \overrightarrow{OB})$

$|\overrightarrow{O\Sigma}| = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{A\Sigma}|$ (οι δυνάμεις είναι ομόρροπες)

$\overline{O\Sigma} = \overline{OA} + \overline{A\Sigma}$

Αν $|\overrightarrow{OA}|$ = 5 N και $|\overrightarrow{OB}|$ = 7 N τότε το μέτρο της συνισταμένης τους $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι:

$$\overrightarrow{O\Sigma} = 5\text{ N} + 7\text{ N} = 12\text{ N}$$

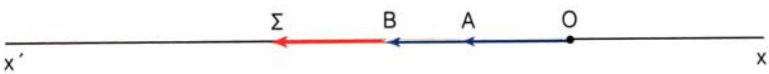
Επειδή οι $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ έχουν αρνητικές φορές τα αλγεβρικά μέτρα τους είναι:

$$\overline{OA} = -5\text{ N} \text{ και } \overline{OB} = -7\text{ N}$$

Επομένως το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι:

$$\overline{O\Sigma} = (-5\text{ N}) + (-7\text{ N}) = -12\text{ N}$$

Αφού το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης είναι αρνητικό η φορά της είναι αρνητική (αυτό φαίνεται και στο σχήμα 1.16). Δηλαδή η $\overrightarrow{O\Sigma}$ έχει τη φορά των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.



Σχ. 1.16.

1.17 Σύνθεση δύο δυνάμεων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ οι οποίες ασκούνται στο ίδιο σημείο (0), κείνται στον ίδιο άξονα x΄x και έχουν αντίθετες φορές.

Θα μελετήσομε τις εξής περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση, όπου η $\overrightarrow{OA} > \overrightarrow{OB}$ (σχ. 1.17α).

Καθιστάμε τις δυνάμεις διαδοχικές. Η $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι η συνισταμένη των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A\Sigma}$).

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{O\Sigma} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Sigma} \quad (\overrightarrow{A\Sigma} = \overrightarrow{OB})$$

$$|\overrightarrow{O\Sigma}| = \left||\overrightarrow{OA}| - |\overrightarrow{A\Sigma}|\right| \text{ (οι δυνάμεις αντίρροπες)}$$

$$\overline{O\Sigma} = \overline{OA} + \overline{A\Sigma}$$

Αν $|\overrightarrow{OA}| = 7\ \text{N}$ και $|\overrightarrow{OB}| = 5\ \text{N}$ τότε το μέτρο της συνισταμένης τους $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι:

$$|O\Sigma| = \left||OA| - |A\Sigma|\right| = |7\text{N} - 5\text{N}| = 2\text{N}$$

Το αλγεβρικό μέτρο της $\overrightarrow{OA}$ είναι: $\overline{OA} = +7\ \text{N}$. Το αλγεβρικό μέτρο της $\overrightarrow{OB}$ είναι: $\overline{OB} = -5\text{N}$. Επομένως το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι:

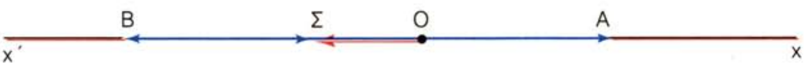
$$\overline{O\Sigma} = (+7\ \text{N}) + (-5\ \text{N}) = +2\ \text{N}$$

Αφού το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι θετικό η φορά της είναι θετική (αυτό φαίνεται και στο σχήμα 1.17α). Δηλαδή η $\overrightarrow{O\Sigma}$ έχει τη φορά της $\overrightarrow{OA}$ που είναι μεγαλύτερη της $\overline{OB}$.

Δεύτερη περίπτωση όπου η $\overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OB}$ (σχ. 1.17β).

Καθιστάμε τις δυνάμεις αυτές διαδοχικές. Η $\overrightarrow{O\Sigma}$ είναι η συνισταμένη των $\overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B\Sigma}$) και $\overrightarrow{OB}$.

Σχ. 1.17α.



Σχ. 1.17β.

Ισχύουν οι σχέσεις:

$\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Sigma}} \quad (\overrightarrow{\mathrm{B\Sigma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$|\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}| = \left||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| - |\overrightarrow{\mathrm{B\Sigma}}|\right|$

$\overline{\mathrm{O\Sigma}} = \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{B\Sigma}}$

Αν $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 5\ \mathrm{N}$ και $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 7\ \mathrm{N}$ τότε το μέτρο της συνισταμένης τους $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ είναι:

$$|\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}| = |7\mathrm{N} - 5\mathrm{N}| = +2\mathrm{N}$$

Το αλγεβρικό μέτρο της $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ είναι: $\overline{\mathrm{OA}} = +5\ \mathrm{N}$.

Το αλγεβρικό μέτρο της $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ είναι: $\overline{\mathrm{OB}} = -7\ \mathrm{N}$.

Επομένως το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ είναι:

$$\overline{\mathrm{O\Sigma}} = (-7\ \mathrm{N}) + (+5\ \mathrm{N}) = -2\ \mathrm{N}$$

Αφού το αλγεβρικό μέτρο της συνισταμένης $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ είναι αρνητικό η φορά της είναι αρνητική (αυτό φαίνεται και στο σχήμα 1.17β). Δηλαδή η $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ έχει φορά τη φορά της $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ που είναι μεγαλύτερη της $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

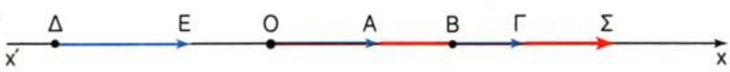
1.18 Σύνθεση πολλών δυνάμεων που έχουν τον ίδιο φορέα και ίδιες φορές.

α) Οι δυνάμεις έχουν θετικές φορές.

Έστω ότι θέλομε να βρούμε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$ που έχουν θετικές φορές (σχ. 1.18α).

Τοποθετούμε τα διανύσματα ώστε να είναι ***διαδοχικά*** επάνω στον άξονα $x_1'x_1$ ($x_1'x_1 \uparrow\uparrow x'x$), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.18β.

$$(\overrightarrow{\mathrm{O'A'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{B'\Gamma'}} = \overrightarrow{\mathrm{\Delta E}})$$



Σχ. 1.18α.

Σχ. 1.18β.

Σχ. 1.18γ.

Σχ. 1.18δ.

Βρίσκομε τη συνισταμένη των $\overrightarrow{Ο΄Α΄}$ και $\overrightarrow{Α΄Β΄}$ έστω ότι αυτή είναι η $\overrightarrow{Ο΄Β΄}$. Κατόπιν βρίσκομε τη συνισταμένη της $\overrightarrow{Ο΄Β΄}$ και της $\overrightarrow{Β΄Γ΄}$ έστω ότι είναι η $\overrightarrow{Ο΄Γ΄}$.

Η $\overrightarrow{Ο΄Γ΄}$ είναι η συνισταμένη των $\overrightarrow{Ο΄Α΄}$, $\overrightarrow{Α΄Β΄}$ και $\overrightarrow{Β΄Γ΄}$. Στη συνέχεια ορίζομε στο φορέα x΄x ένα διάνυσμα $\overrightarrow{ΟΣ}$ τέτοιο, ώστε: $\overrightarrow{ΟΣ} = \overrightarrow{Ο΄Γ΄}$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΟΣ}$ παριστάνει τη συνισταμένη των $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$.

Η συνισταμένη $\overrightarrow{ΟΣ}$ των $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$ (σχ. 1.18α) έχει τα εξής χαρακτηριστικά στοιχεία:

1) Ο φορέας της $\overrightarrow{ΟΣ}$ συμπίπτει με το φορέα των δυνάμεων $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$.

2) Η φορά της $\overrightarrow{ΟΣ}$ συμπίπτει με τη φορά των δυνάμεων $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$, δηλαδή έχει θετική φορά.

3) Το μέτρο της $\overrightarrow{ΟΣ}$ είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δυνάμεων $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$, δηλαδή $|\overrightarrow{ΟΣ}| = |\overrightarrow{ΟΑ}| + |\overrightarrow{ΒΓ}| + |\overrightarrow{ΔΕ}|$.

4) Η $\overrightarrow{ΟΣ}$ έχει σημείο εφαρμογής ένα τυχαίο σημείο Ο του φορέα x΄x (η δύναμη είναι ολισθαίνον διανυσματικό μέγεθος).

β) Οι δυνάμεις έχουν αρνητικές φορές.

Όταν οι δυνάμεις έχουν αρνητικές φορές, εργαζόμασθε όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΟΣ} = (\overrightarrow{Ο΄Γ΄})$ στο φορέα x΄x (σχ. 1.18γ και 1.18δ) παριστάνει τη συνισταμένη των $\overrightarrow{ΟΑ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΔΕ}$ και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Ο φορέας της $\overrightarrow{ΟΣ}$ συμπίπτει με το φορέα των δυνάμεων $\overrightarrow{ΟΑ}, \overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$.

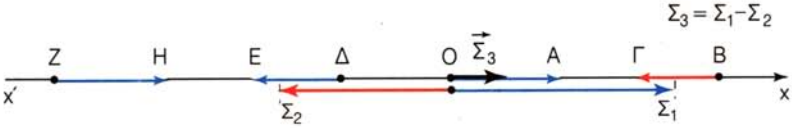
2) Η φορά της $\overrightarrow{ΟΣ}$ συμπίπτει με τη φορά των δυνάμεων $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ $\overrightarrow{ΔΕ}$ και δηλαδή έχει αρνητική φορά.

3) Το μέτρο της $\overrightarrow{ΟΣ}$ είναι ίσο με το άθροισμα τω μέτρων των δυνάμεων $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$, δηλαδή $|\overrightarrow{ΟΣ}| = |\overrightarrow{ΟΑ}| + |\overrightarrow{ΒΓ}| + |\overrightarrow{ΔΕ}|$.

4) Η $\overrightarrow{ΟΣ}$ έχει σημείο εφαρμογής ένα τυχαίο σημείο Ο του φορέα x΄x.

Προσοχή:

Ανάλογη πορεία ακολουθούμε, όταν θέλομε να συνθέσομε περισσότερες από τρεις δυνάμεις.



Σχ. 1.19.

1.19 Σύνθεση πολλών δυνάμεων που έχουν τον ίδιο φορέα και διαφορετικές φορές.

Βρίσκομε τη συνισταμένη των δυνάμεων που έχουν θετική φορά, δηλαδή των $\overrightarrow{ΟΑ}$ και $\overrightarrow{ΖΗ}$ έστω ότι αυτή είναι η $\overrightarrow{Ο\Sigma_1} = \overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΖΗ}$ (σχ. 1.19).

Κατόπιν βρίσκομε τη συνισταμένη των δυνάμεων που έχουν αρνητική φορά, δηλαδή των $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$ ·έστω ότι αυτή είναι $\overrightarrow{Ο\Sigma_2} = \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΔΕ}$.

Τώρα απομένει να βρούμε τη συνισταμένη δύο δυνάμεων $\overrightarrow{Ο\Sigma_1}$ και $\overrightarrow{Ο\Sigma_2}$ που έχουν τον αυτό φορέα αλλά αντίθετες φορές.

Προσοχή:

Επαναλαμβάνομε και τονίζομε ότι συνήθως για να βρούμε τη συνισταμένη πολλών δυνάμεων που έχουν τον ίδιο φορέα αλλά διαφορετικές φορές ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1) Βρίσκομε τη συνισταμένη όλων των δυνάμεων που έχουν θετική φορά· έστω ότι αυτή είναι η $\vec{\Sigma}_1$.

2) Βρίσκομε τη συνισταμένη όλων των δυνάμεων που έχουν αρνητική φορά·έστω ότι αυτή είναι η $\vec{\Sigma}_2$.

3) Βρίσκομε τη συνισταμένη των $\vec{\Sigma}_1$ και $\vec{\Sigma}_2$ έστω αυτή είναι $\vec{\Sigma}_3$.

Η $\vec{\Sigma}_3$ είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που έχουν τον ίδιο φορέα και διαφορετικές φορές.

1.20 Σύνθεση πολλών συντρεχουσών δυνάμεων.

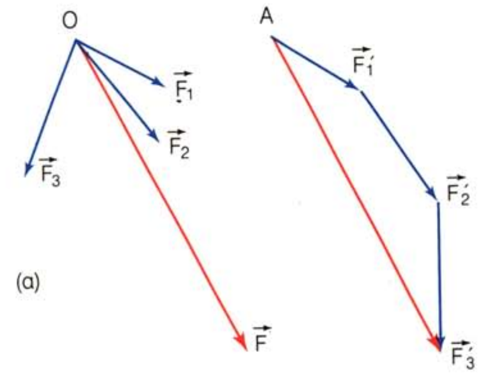
α) Με τη μέθοδο του δυναμοπολυγώνου.

Έστω ότι έχομε τρεις συντρέχουσες δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF_2}$ και $\overrightarrow{OF_3}$, οι οποίες ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο.

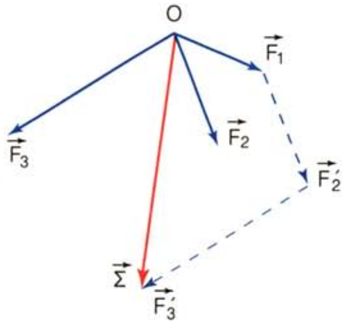
Χαράσσομε τις δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF_2}$ και $\overrightarrow{OF_3}$ υπό κλίμακα [σχ. 1.20α(α)].

Παίρνομε στο επίπεδο των δυνάμεων αυτών το σημείο Α [σχ. 1.20α(β)]. Από το σημείο Α φέρομε μία δύναμη $\overrightarrow{AF_1'}$ ομόρροπη και ίση προς την $\overrightarrow{OF_1}$.

Κατόπιν, από το άκρο (F_1') της $\overrightarrow{AF_1'}$ φέρομε τη δύναμη $\overrightarrow{F_1' F_2'}$ ομόρροπη και ίση προς την $\overrightarrow{OF_2}$. Μετά, από το άκρο (F_2') της $\overrightarrow{F_1' F_2'}$ φέρνομε τη δύναμη $\overrightarrow{F_2' F_3'}$ ομόρροπη και ίση προς την $\overrightarrow{OF_3}$. Έτσι σχηματίζομε την πολυγωνική γραμμή $AF_1' F_2' F_3'$. Συνδέομε τα άκρα αυτής της πολυγωνικής γραμμής με το διάνυσμα $\overrightarrow{AF_3'}$.



Σχ. 1.20α.



Σχ. 1.20β.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AF_3'}$ παριστάνει τη συνισταμένη των δυνάμεων $\overrightarrow{AF_1'}$, $\overrightarrow{F'_1 F_2'}$, $\overrightarrow{F'_2 F_3'}$ κατά μέτρο διεύθυνση και φορά.

Τέλος, φέρομε από το σημείο Ο τη δύναμη $\overrightarrow{OF}$ ομόρροπη και ίση προς τη δύναμη $\overrightarrow{AF_3'}$.

Η δύναμη $\overrightarrow{OF}$ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων $\overrightarrow{OF_1}$, $\overrightarrow{OF_2}$, $\overrightarrow{OF_3}$.

Εφαρμογή:

Έστω ότι θέλομε να συνθέσομε τις συντρέχουσες δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1}$, $\overrightarrow{OF_2}$ και $\overrightarrow{OF_3}$ που έχουν αντιστοίχως μέτρα: $|\overrightarrow{OF_1}| = 130$ N, $|\overrightarrow{OF_2}| = 160$ N και $|\overrightarrow{OF_3}| = 260$ N.

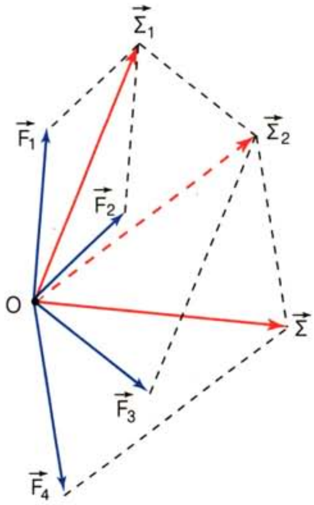
Με κλίμακα για παράδειγμα 1 mm $\triangleq$ 10 N χαράσσομε πάνω στο χαρτί (σχ. 1.20β) τη δύναμη $\overrightarrow{OF_1}$ μήκους 13 mm, την $\overrightarrow{OF_2}$ μήκους 16 mm και την $\overrightarrow{OF_3}$ μήκους 26 mm. Από το σημείο (F_1) φέρομε τη $\overrightarrow{F'_1F'_2}$ παράλληλη, ομόρροπη και ίσου μεγέθους προς την $\overrightarrow{OF_2}$ και κατόπιν την $\overrightarrow{F'_2F_3}$ παράλληλη, ομόρροπη και ίσου μεγέθους προς την $\overrightarrow{OF_3}$. Φέρομε το διάνυσμα $\overrightarrow{OF_3'}$. Μετρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OF_3'}$ και βρίσκομε το μήκος του ίσο με 38 mm. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OF'_3}$ είναι η συνισταμένη των $\overrightarrow{OF_1}$, $\overrightarrow{OF_2}$ και $\overrightarrow{OF_3}$. Επομένως, η συνισταμένη των $\overrightarrow{OF_1}$, $\overrightarrow{OF_2}$ και $\overrightarrow{OF_3}$ έχει μέτρο: $|\overrightarrow{OF_3'}| = 38 \text{ mm} \cdot 10 \text{ N} = 380$ N.

Σημείωση:

Το πολύγωνο $OF_1F'_2F'_3$ ονομάζεται πολύγωνο των δυνάμεων $\overrightarrow{OF_1}$, $\overrightarrow{OF_2}$ και $\overrightarrow{OF_3}$ ή δυναμοπολύγωνο αυτών.

Παρατήρηση:

Την ίδια εργασία θα επαναλάβομε αν οι δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1}$, $\overrightarrow{OF_2}$ και $\overrightarrow{OF_3}$ δεν



κείνται (βρίσκονται) και οι τρεις στο ίδιο επίπεδο.

β) Με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου των δυνάμεων.

Θεωρούμε τις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, και $\vec{F}_4$, που είναι εφαρμοσμένες στο ίδιο σημείο Ο (σχ. 1.20γ).

Για να τις συνθέσομε, αντικαθιστούμε τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου με τη συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}_1$. Κατόπιν αντικαθιστούμε τις $\vec{\Sigma}_1$ και $\vec{F}_3$ με την $\vec{\Sigma}_2$ και τέλος τις $\vec{\Sigma}_2$ και $\vec{F}_4$ με την $\vec{\Sigma}$.

Η $\vec{\Sigma}$ είναι η τελική συνισταμένη των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$.

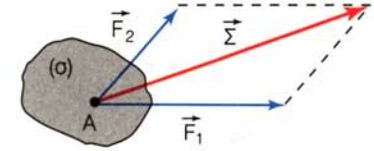
Σημείωση:

Η σειρά κατά την οποία συνθέτομε τις συνιστώσες για την εύρεση της συνισταμένης δεν παίζει κανένα ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα.

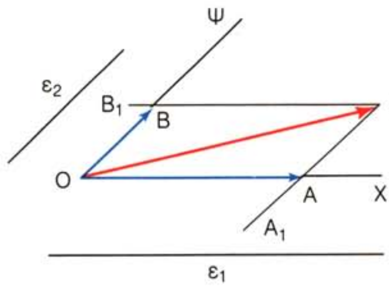
1.21 Ανάλυση δυνάμεως.

1.21.1 Γενικά περί αναλύσεως δυνάμεως.

Ανάλυση μιας δυνάμεως $\vec{\Sigma}$ (σχ. 1.21α) που επενεργεί σε ένα σημείο Α του σώματος (σ), σε δύο άλλες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ονομάζεται η ***αντικατάσταση*** αυτής από τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Οι δυνάμεις αυτές είναι τέτοιες, ώστε αν επιδράσουν ταυτόχρονα επί του σημείου Α του σώματος (σ), θα ***προκαλέσουν το ίδιο*** αποτέλεσμα το οποίο προκαλεί η δύναμη $\vec{\Sigma}$, όταν ασκείται μόνη της στο σημείου Α του σώματος.



Σχ. 1.21α.



Σχ. 1.21β.

Η $\vec{F}_1$ και η $\vec{F}_2$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\Sigma}$, ενώ η $\vec{\Sigma}$ είναι η συνισταμένη τους.

Σημείωση:

Έστω ότι θέλομε να αναλύσομε τη δύναμη $\overrightarrow{O\Sigma}$ σε δύο συνιστώσες (σχ. 1.21β) των οποίων δίνονται οι διευθύνσεις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Από σημείο Ο, που είναι το σημείο εφαρμογής της $\overrightarrow{O\Sigma}$, φέρομε την ΟΧ παράλληλη της ε_1 και την ΟΨ παράλληλη της ε_2. Στη συνέχεια από το Σ φέρομε τη ΣB_1 παράλληλη της ΟΧ η οποία τέμνει την ΟΨ στο σημείο Β.

Κατόπιν από το Σ φέρομε την OA_1 παράλληλη της ΟΨ, η οποία τέμνει την ΟΧ στο σημείο Α. Οι $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι οι συνιστώσες της $\overrightarrow{O\Sigma}$.

1.21.2 Η ανάγκη της αναλύσεως μιας δυνάμεως.

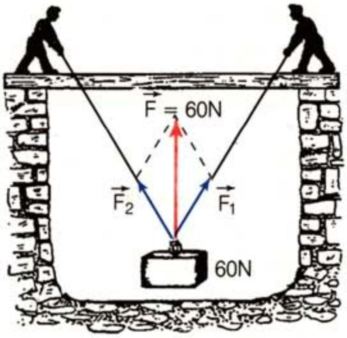
Η ανάγκη της αναλύσεως μιας δυνάμεως σε δύο συνιστώσες φαίνεται από τα παρακάτω παραδείγματα.

Ένας άνθρωπος ανυψώνει κατακόρυφα σώμα βάρους 60 N τραβώντας το με ένα σχοινί. Ευνόητο είναι ότι η δύναμη $\vec{F}$ την οποία αυτός πρέπει να ασκεί έχει μέτρο ίσο με 60 N.

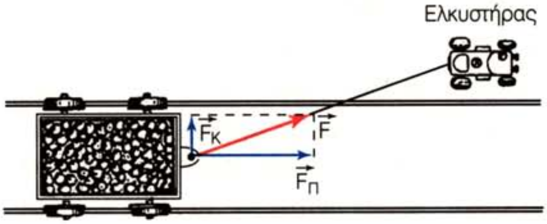
Αν αντί ενός ανθρώπου χρησιμοποιηθούν δύο, οι οποίοι έλκουν το σώμα με σχοινιά που σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους, τότε τίθεται το ερώτημα: Ποια δύναμη πρέπει να ασκεί καθένας απ' αυτούς;

Για να απαντήσομε στο ερώτημα αναλύομε τη δύναμη $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των δύο σχοινιών (1.21γ). Από το τέλος της δυνάμεως $\vec{F}$ φέρομε δύο ευθείες παράλληλες προς τις διευθύνσεις των δύο σχοινιών, οπότε σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο που έχει διαγώνιο την $\vec{F}$. Καταλαβαίνομε αμέσως ότι ο ένας πρέπει να ασκεί τη δύναμη $\vec{F}_1$, ενώ ο άλλος τη δύναμη $\vec{F}_2$. Δηλαδή οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ μπορεί να αντικαταστήσουν την $\vec{F}$ (διότι αυτή είναι η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων).

Μία άλλη περίπτωση όπου απαιτείται η ανάλυση μιας δυνάμεως σε δύο συνιστώσες είναι η εξής: Όχημα που μπορεί να κινηθεί σε σιδηροτροχιές, έλκεται από ελκυστήρα, ο οποίος κινείται έξω από αυτές (σχ. 1.21δ). Όπως φαίνεται στο σχήμα, η δύ-



Σχ. 1.21γ.



Σχ. 1.21δ.

ναμη την οποία ασκεί ο ελκυστήρας στο όχημα $\vec{F}$ έχει διεύθυνση πλάγια ως προς τη διεύθυνση κινήσεως του οχήματος.

Εν τούτοις, από τη δράση της δυνάμεως $\vec{F}$ το όχημα θα κινηθεί κατά μήκος των σιδηροτροχιών. Για την εξήγηση του φαινομένου αυτού πρέπει να αναλύσομε τη δύναμη $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες, δηλαδή πρέπει να αναζητήσομε δύο δυνάμεις, των οποίων η $\vec{F}$ θα είναι η συνισταμένη.

Στην περίπτωση αυτή οι διευθύνσεις των συνιστωσών θα είναι η μια παράλληλη προς τη διεύθυνση της κινήσεως και η άλλη κάθετη προς αυτήν. Από το τέλος της δυνάμεως $\vec{F}$ φέρομε δύο κάθετες επάνω στις διευθύνσεις αυτές, οπότε σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου οι $\vec{F}_\Pi$ και $\vec{F}_K$ είναι οι πλευρές του. Ευνόητο είναι ότι με τη σύνθεση των $\vec{F}_\Pi$ και $\vec{F}_K$ θα λάβομε ως συνισταμένη τους τη δύναμη $\vec{F}$. Δηλαδή οι $\vec{F}_\Pi$ και $\vec{F}_K$ είναι οι δυνάμεις που αναζητούσαμε. Από τις δύο αυτές συνιστώσες η $\vec{F}_\Pi$ προκαλεί την κίνηση του οχήματος, ενώ η $\vec{F}_K$ πιέζει (σπρώχνει) το όχημα πλάγια (κάθετα) στη σιδηροτροχιά.

1.21.3 Περιπτώσεις αναλύσεως μιας δυνάμεως.

Για να είναι δυνατή η ανάλυση μιας δυνάμεως, πρέπει να ορίζονται ορισμένα στοιχεία. Με βάση τα στοιχεία που δίνονται, διακρίνομε κυρίως τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Όταν δίνονται οι διευθύνσεις των συνιστωσών.

β) Όταν δίνονται οι εντάσεις και των δύο συνιστωσών.

γ) Όταν δίνονται η ένταση της μιας συνιστώσας και η διεύθυνση της άλλης.

α) Ανάλυση δυνάμεων σε δύο συνιστώσες των οποίων δίνονται οι διευθύνσεις.

Έστω ότι θέλομε να αναλύσομε τη δύναμη $\overrightarrow{\text{ΟΣ}}$ (σχ. 1.21ε) σε δύο συνιστώσες οι οποίες έχουν διευθύνσεις $ε_1ε_2$ και $ε_1΄ε_2΄$.

Από το σημείο εφαρμογής (Ο) της δυνάμεως $\overrightarrow{\text{ΟΣ}}$ φέρομε την ευθεία ΟΧ, παράλληλη προς τη διεύθυνση της $ε_1ε_2$ και την ευθεία ΟΨ παράλληλη προς τη διεύθυνση της $ε΄_1ε΄_2$. Κατόπιν από το σημείο Σ της $\overrightarrow{\text{ΟΣ}}$ φέρομε παράλληλη προς τη $ε΄_1ε_2΄$ η οποία τέμνει την ΟΧ στο σημείο Α. Επίσης από το Σ φέρομε παράλληλη προς την $ε_1ε_2$, η οποία τέμνει την ΟΨ στο σημείο Β. Σχηματίζεται έτσι το παραλληλόγραμμο ΟΑΣΒ.

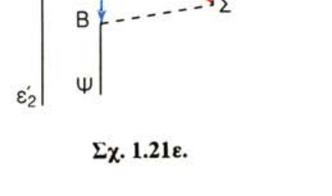
Τα μέτρα των συνιστωσών $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$ βρίσκονται ως εξής: Αν η δύναμη $\overrightarrow{\text{ΟΣ}}$, η οποία δίνεται, είναι 250 N, τότε για να υπολογίζομε τα μέτρα των δύο συνιστωσών $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$, χαράσσομε τη δύναμη $\overrightarrow{\text{ΟΣ}}$ υπό ορισμένη κλίμακα, για παράδειγμα 1 cm $\triangleq$ 100 N, δηλαδή μία δύναμη μήκους 2,5 cm. Κατόπιν χαράσσομε τις $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$. ***Αν μετρήσομε*** τα μήκη των $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$, βρίσκομε ότι το μήκος της $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$ είναι 1,6 cm και το μήκος της $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$ είναι 2,8 cm.

Επομένως οι συνιστώσες είναι:

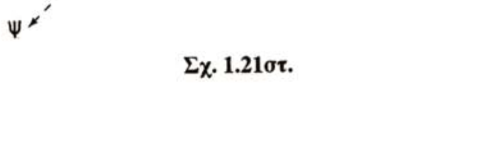
$$|\overrightarrow{\text{ΟΑ}}| = 100 \cdot 1{,}6\ \text{N} = 160\ \text{N} \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{\text{ΟΒ}}| = 100 \cdot 2{,}8\ \text{N} = 280\ \text{N}$$

Υπολογισμός των συνιστωσών.

Θέλομε να αναλύσομε τη δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 1.21στ) σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, των οποίων οι διευθύνσεις ΟΧ και ΟΨ σχηματίζουν αντίστοιχα τις γωνίες θ και φ με τη διεύθυνση της δυνάμεως $\vec{F}$. Εάν από το τέλος της $\vec{F}$ φέρομε δύο ευθείες παράλληλες προς τις διευθύνσεις των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, σχηματίζεται



Σχ. 1.21ε.



Σχ. 1.21στ.

παραλληλόγραμμο, του οποίου η $\overrightarrow{OF}$ είναι διαγώνιος. Συνεπώς, οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι οι συνιστώσες που ζητούμε (επειδή, σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, συνισταμένη τους είναι η δύναμη $\vec{F}$).

Τα μέτρα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ των δύο συνιστωσών υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{\eta\mu\varphi}=\frac{|\vec{F}_2|}{\eta\mu\theta}=\frac{|\vec{F}|}{\eta\mu\,(\theta+\varphi)} \quad \text{(νόμος των ημιτόνων)} \qquad (1)$$

$$|\vec{F}_1|\frac{|\vec{F}|\cdot\eta\mu\varphi}{\eta\mu\,(\theta+\varphi)}$$

$$|\vec{F}_2|=\frac{|\vec{F}|\,\eta\mu\theta}{\eta\mu\,(\theta+\varphi)}$$

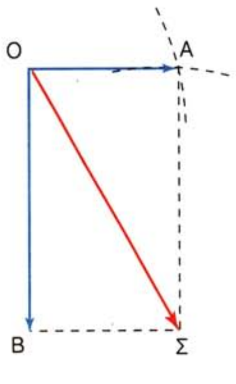
β) Ανάλυση δυνάμεως σε δύο άλλες δυνάμεις, των οποίων δίνονται τα μέτρα.

Έστω ότι έχομε τη δύναμη $\overrightarrow{O\Sigma}$, της οποίας το μέτρο είναι $|\overrightarrow{O\Sigma}|$ = 400 N και θέλομε να την αναλύσομε σε δύο άλλες, την $\overrightarrow{OA}$ που έχει μέτρο $|\overrightarrow{OA}|$ = 200 N και την $\overrightarrow{OB}$ που έχει μέτρο $|\overrightarrow{OB}|$ = 350 N.

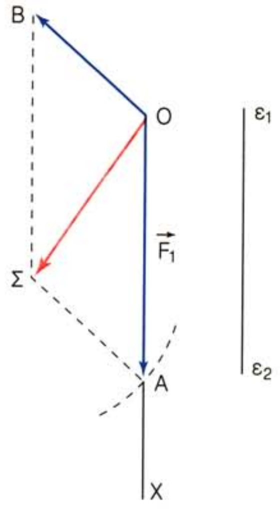
Χαράσσομε υπό κλίμακα (π.χ. 1 cm $\triangleq$ 100 N) τη δύναμη $\overrightarrow{O\Sigma}$, η οποία θα έχει μήκος 4 cm, δηλαδή όσο αντιστοιχεί σε 400 N (σχ. 1.21ζ).

Κατόπιν με κέντρο το σημείο Ο γράφομε κύκλο ακτίνας ίση προς το μήκος της $\overrightarrow{OA}$, δηλαδή με ακτίνα ίση με 2 cm, που αντιστοιχεί σε 200 N.

Στη συνέχεια με κέντρο το Σ γράφομε άλλο κύκλο ακτίνας ίσης προς το μήκος της $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή με ακτίνα ίση με 3,5 cm, που αντιστοιχεί σε 350 N. Οι δύο κύκλοι τέμνονται στο σημείο Α και τα τμήματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{\Sigma A}$ μας δίνουν τα μέτρα και τη διεύθυνση



Σχ. 1.21ζ.



Σχ. 1.21η.

των συνιστωσών. Εάν τώρα σχηματίσομε το παραλληλόγραμμο ΟΑΣΒ, έχομε τις δύο συνιστώσες $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

γ) Ανάλυση δυνάμεως σε δύο άλλες, όταν γνωρίζομε το μέτρο της μιας και τη διεύθυνση της άλλης.

Έστω ότι θέλομε να αναλύσομε τη δύναμη $\overrightarrow{O\Sigma}$, της οποίας το μέτρο είναι $|\overrightarrow{O\Sigma}| =$ 250 N, σε δυο άλλες, την $\overrightarrow{OF_1}$ που έχει διεύθυνση ε_1 ε_2 και την $\overrightarrow{OB}$, που έχει μέτρο $|\overrightarrow{OB}| = 200$ N.

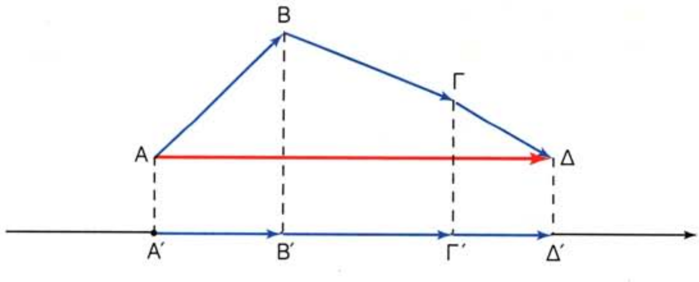
Χαράσσομε υπό κλίμακα, (π.χ. 1 cm $\triangleq$ 100 N) τη δύναμη $\overrightarrow{O\Sigma}$, η οποία θα έχει μήκος 2,5 cm, δηλαδή όσο αντιστοιχεί σε 250 N (σχ. 1.21η). Από το σημείο Ο φέρομε παράλληλη ΟΧ προς τη διεύθυνση ε_1 ε_2 και με κέντρο το σημείο Σ και ακτίνα ίση προς το μέγεθος της $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή 2 cm, που αντιστοιχεί σε 200 N γράφομε κύκλο (περιφέρεια). Ο κύκλος αυτός τέμνει την παράλληλη ΟΧ στο σημείο Α. Τα τμήματα $\overrightarrow{\Sigma A}$ και $\overrightarrow{OA}$ μας δίδουν τα μέτρα των δύο συνιστωσών $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, οι οποίες αποτελούν τις δύο πλευρές του σχηματιζόμενου παραλληλογράμμου, ΟΑΣΒ.

1.22 Ανάλυση δυνάμεως σε δύο ορθογώνιους άξονες που κείνται στο ίδιο επίπεδο με αυτήν.

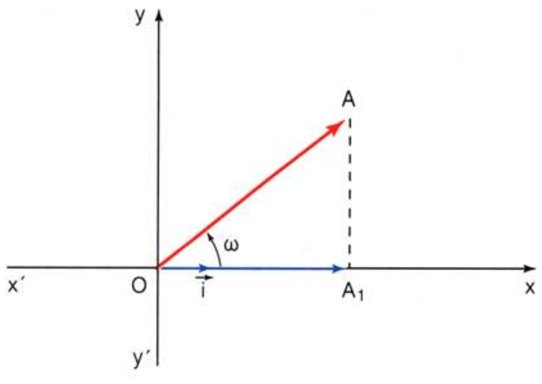
1.22.1 Βοηθητικές γνώσεις.

α) Θεώρημα των προβολών.

1) Η διανυσματική προβολή $\overrightarrow{A'\Delta'_1}$ (σχ. 1.22α) του διανυσματικού αθροίσματος $\overrightarrow{A\Delta}$ των διαδοχικών διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των



Σχ. 1.22α.



Σχ. 1.22β.

διανυσματικών προβολών των διανυσμάτων αυτών, δηλαδή:

$$\boxed{\overrightarrow{A'\Delta'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'\Gamma'} + \overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$$

2) Η αλγεβρική τιμή της διανυσματικής προβολής του διανυσματικού αθροίσματος $\overrightarrow{A\Delta}$ (σχ. 1.22α) είναι ίση με το άθροισμα των αλγεβρικών τιμών των διανυσματικών προβολών των διανυσμάτων αυτών, δηλαδή:

$$\boxed{\overline{A'\Delta'} = \overline{A'B'} + \overline{B'\Gamma'} + \overline{\Gamma'\Delta'}}$$

β) Αλγεβρική τιμή προβολής διανύσματος επί άξονα.

1) Στον άξονα x΄x (σχ. 1.22β).

Για την αλγεβρική τιμή της διανυσματικής προβολής $\overrightarrow{OA_1}$ του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ ισχύει η σχέση:

$$\overline{OA_1} = \sigma\upsilon\nu\,|\overrightarrow{OA}|\,(\widehat{\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA}}) = |\overrightarrow{OA}|\,\sigma\upsilon\nu\omega$$

Προσοχή:

Η γωνία $\hat{\omega}$ είναι θετική.

2) Στον άξονα y΄y (σχ. 1.22γ).

Για την αλγεβρική τιμή της διανυσματικής προβολής $\overrightarrow{OA_2}$ του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ ισχύει η σχέση:

$$\overline{OA_2} = |\overrightarrow{OA}|\text{συν}(\widehat{\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA}}) = |\overrightarrow{OA}|\text{συν}\varphi$$

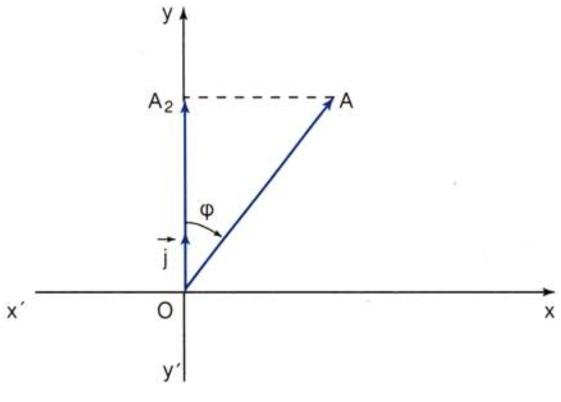
Προσοχή:

Η γωνία $\hat{\varphi}$ είναι αρνητική.

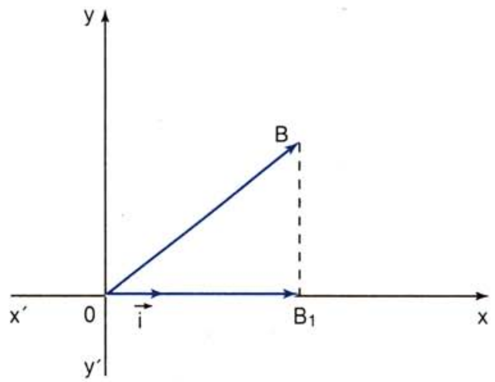
Παρατηρήσεις:

1) Το διάνυσμα $\overrightarrow{OB_1}$ (σχ. 1.22δ) ονομάζεται ***διανυσματική προβολή*** στον άξονα x΄x του διανύσματος $\overrightarrow{OB}$. Επίσης το διάνυσμα $\overrightarrow{OB_1}$ λέγεται και ***διανυσματική συνιστώσα*** του διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ ως προς τον άξονα x΄x.

2) Η αλγεβρική τιμή $\overline{OB_1}$ του διανύσματος $\overrightarrow{OB_1}$ (σχ. 1.22δ) λέγεται απλά και ***προβολή του διανύσματος*** $\overrightarrow{OB}$ στον άξονα x΄x.



Σχ. 1.22γ.



Σχ. 1.22δ.

1.22.2 Περιπτώσεις αναλύσεως δυνάμεως σε δύο ορθογώνιους άξονες που κείνται στο ίδιο επίπεδο με αυτήν.

Διακρίνομε κυρίως τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Το διάνυσμα της δυνάμεως $\overrightarrow{OA}$ να σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ, όπου $0^o < \theta^o < 90^o$ (σχ. 1.22ε).

1) Προσδιορισμός της συνιστώσας $\overrightarrow{OA}_x$.

Από τον ορισμό του συνημιτόνου της γωνίας θ έχομε:

$$\text{συν}\theta = \frac{(OA_x)}{(OA)} = \frac{|\overrightarrow{OA}_x|}{|\overrightarrow{OA}|} \text{ και } |\overrightarrow{OA}_x| = |\overrightarrow{OA}|\text{συν}\theta$$

Η διανυσματική προβολή (διανυσματική συνιστώσα) $\overrightarrow{OA}_x$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.22ε έχει θετική φορά· επομένως έχομε:

$$\boxed{\overline{OA}_x = +|\overrightarrow{OA}_x|}$$

Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις:

$$|\overrightarrow{OA}_x| = |\overrightarrow{OA}|\text{ συν}\theta$$
$$\overline{OA_x} = +|\overrightarrow{OA}_x|$$

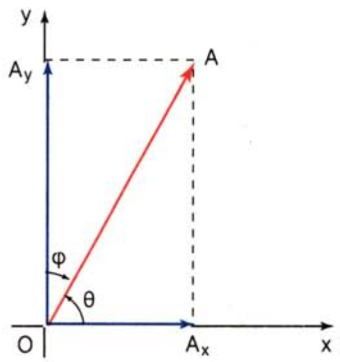
Για παράδειγμα αν $|\overrightarrow{OA}| = 150$ N και $\theta^o = 60^o$ τότε έχομε:

$$|\overrightarrow{OA}_x| = |\overrightarrow{OA}|\cdot\text{συν}\theta = |\overrightarrow{OA}|\text{ συν }60^o = 150 \cdot 0{,}5 \text{ N} = 75 \text{ N}$$

Άρα $|\overrightarrow{OA}_x| = 75$ N και $\overline{OA}_x = +75$ N.

2) Προσδιορισμός της συνιστώσας $\overrightarrow{OA}_y$.

Από τον ορισμό του ημιτόνου της γωνίας θ έχομε:



Σχ. 1.22ε.

$$\eta\mu\theta = \frac{(A_x A)}{(OA)} = \frac{|\overrightarrow{OA}_y|}{|\overrightarrow{OA}|} \quad \kappa\alpha\iota \quad |\overrightarrow{OA}_y| = |\overrightarrow{OA}|\,\eta\mu\theta$$

Η διανυσματική προβολή (διανυσματική συνιστώσα) $\overrightarrow{OA}_y$ όπως φαίνεται στο σχήμα 1.22ε έχει θετική φορά επάνω στον άξονα y΄y. Συνεπώς $\overline{OA_y} = +|\overrightarrow{OA}_y|$.

Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις:

$$|\overrightarrow{OA}_y| = |\overrightarrow{OA}|\,\eta\mu\theta$$

$$\overline{OA_y} = +\,|\overrightarrow{OA}|\,\eta\mu\theta$$

Για παράδειγμα, αν $|\overrightarrow{OA}| = 150$ N και $\theta^o = 60^o$, τότε:

$$|\overrightarrow{OA}_y| = |\overrightarrow{OA}|\,\eta\mu\theta = 150\ \mathrm{N}\cdot\eta\mu\,60^o = 150\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\ \mathrm{N} = 129\ \mathrm{N}$$

Άρα $|\overrightarrow{OA}_y| = 129{,}9$ N και $\overline{OA_y} = +\,129$ N.

Άλλη πορεία προσδιορισμού των $\overrightarrow{OA}_x$ και $\overrightarrow{OA}_y$.

1) Προσδιορισμός της $\overrightarrow{OA}_x$.

Η $\overrightarrow{OA}_x$ είναι η διανυσματική προβολή της $\overrightarrow{OA}$ στο άξονα x΄x, επομένως για την $\overline{OA_x}$ ισχύει η σχέση $\overline{OA_x} = |\overrightarrow{OA}|$ συνθ.

Επειδή $0<\theta<90^o$, είναι συνθ>0, άρα ισχύει η σχέση $\overline{OA_x} = |\overrightarrow{OA}|$ συνθ>0.

Το ότι η $\overline{OA_x}$ είναι θετική σημαίνει ότι: α) Η $\overrightarrow{OA}_x$ έχει θετική φορά και β) $\overline{OA_x} = +\,|\overrightarrow{OA}_x|$.

2) Προσδιορισμός της $\overrightarrow{OA}_y$.

Η $\overrightarrow{OA}_y$ είναι η διανυσματική προβολή της $\overrightarrow{OA}$ στον άξονα y΄y, επομένως ισχύει η σχέση:

$$\overline{OA_y} = |\overrightarrow{OA}|\,\sigma\upsilon\nu\varphi,\ (\varphi<0) \qquad (1)$$

Ισχύει η σχέση:

$$\varphi = [(-90) + \theta]\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\theta \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\overline{OA_y} = |\overrightarrow{OA}|\,\eta\mu\theta$$

Επειδή $0<\theta<90^o$, είναι ημθ>0, άρα ισχύει η σχέση: $\overline{OA_y} = |\overrightarrow{OA}|$ ημθ >0.

Το ότι η $\overline{OA_y}$ είναι θετική σημαίνει ότι: Η $\overrightarrow{OA_y}$ έχει θετική φορά και η $\overline{OA_y} = +|\overrightarrow{OA_y}|$.

β) Το διάνυσμα της δυνάμεως $\overrightarrow{OB}$ να σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα O_x γωνία θ, που είναι $90^o < \theta^o < 180^o$ (σχ. 1.22στ).

1) Προσδιορισμός της $\overrightarrow{OB}_x$.

Από τον ορισμό του συνημιτόνου γωνίας έχομε:

$$\text{συνφ} = \frac{(OB_x)}{(OB)} = \frac{|\overrightarrow{OB_x}|}{|\overrightarrow{OB}|} \text{ και } |\overrightarrow{OB_x}| = |\overrightarrow{OB}|\text{συνφ}$$

Επειδή η φορά της $\overrightarrow{OB_x}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 1.22στ, είναι αρνητική, ισχύει η σχέση: $\overline{OB_x} = -|\overrightarrow{OB_x}|$.

Για παράδειγμα αν $|\overrightarrow{OB}| = 150$ N και $\theta^o = 120^o$ οπότε: $\varphi = 60^o$, τότε:

– Το μέτρο της $\overrightarrow{OB_x}$ είναι: $|\overrightarrow{OB_x}| = |\overrightarrow{OB}|\cdot\text{συν}\ 60^o = 150\cdot0{,}5$ N $= 75$ N

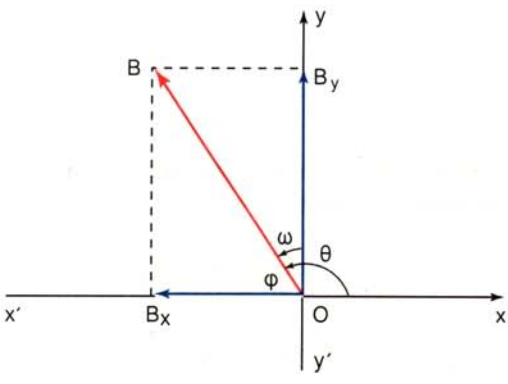
– Η αλγεβρική τιμή της $\overrightarrow{OB_x}$ είναι: $\overline{OB_x} = -|\overrightarrow{OB_x}| = -75$ N

2) Προσδιορισμός της $\overrightarrow{OBy}$.

Από τον ορισμό του ημιτόνου γωνίας έχομε:

$$\text{ημφ} = \frac{(B_xB)}{(OB)} = \frac{|\overrightarrow{OB_y}|}{|\overrightarrow{OB}|} \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{OB_y}| = |\overrightarrow{OB}|\text{ημφ}$$

Επειδή η φορά της $\overrightarrow{OB_y}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.22στ, επάνω στον άξονα y′y είναι θετική, ισχύει η σχέση: $\overline{OB_y} = |\overrightarrow{OB'_y}|$.



Σχ. 1.22στ.

Για παράδειγμα: αν $|\overrightarrow{OB}| = 150$ N και $\theta^o = 120^o$, οπότε $\varphi = 60^o$, τότε:

1) Το μέτρο της $\overrightarrow{OB_y}$ είναι: $|\overrightarrow{OB_y}| = |\overrightarrow{OB}|$ ημ $60 = 150\ \text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{N} = 129{,}9$ N.

2) Η αλγεβρική τιμή της $\overrightarrow{OB_y}$ είναι: $\overline{OB_y} = +|\overrightarrow{OBy}| = +129{,}9$ N.

Άλλη πορεία προσδιορισμού των $\overrightarrow{OB_x}$ και $\overrightarrow{OB_y}$.

1) Προσδιορισμός της $\overrightarrow{OB_x}$.

Η $\overrightarrow{OB_x}$ είναι η διανυσματική συνιστώσα (διανυσματική προβολή) της $\overrightarrow{OB}$ στον άξονα x΄x, επομένως ισχύει: $\overline{OB_x} = |\overrightarrow{OB}|$ συνθ.

Για παράδειγμα αν $|\overrightarrow{OB}| = 150$ N και $\theta = 120^o$, τότε έχομε:

$$\overline{OB}_x = |\overrightarrow{OB}|\ \text{συνθ} = |\overrightarrow{OB}|\ \text{συν}\,120^o = 150 \cdot (-0{,}5)\ \text{N} = -75\ \text{N}$$

Δηλαδή η $\overrightarrow{OB_x}$ έχει μέτρο $|\overrightarrow{OB_x}| = 75$ N και φορά αρνητική.

2) Προσδιορισμός της $\overrightarrow{OB_y}$.

Η $\overrightarrow{OB_y}$ είναι η διανυσματική προβολή της $\overrightarrow{OB}$ στον άξονα y΄y (σχ. 1.22στ), επομένως ισχύει: $\overline{OB_y} = |\overrightarrow{OB}|$ συνω.

Ισχύουν $\omega = \theta - 90^o$ και συνω = ημθ, άρα: $\overline{OB_y} = |\overrightarrow{OB}|$ ημθ.

Επειδή $90^o < \theta < 180^o$, ισχύει: $\overline{OB_y} = |\overrightarrow{OB}|$ ημθ > 0 οπότε η φορά της $\overrightarrow{OB_y}$ είναι θετική και $\overline{OB_y} = |\overrightarrow{OB_y}|$.

Για παράδειγμα, αν $|\overrightarrow{OB}| = 150$ N και $\theta^o = 120^o$, τότε για τη διανυσματική προβολή της $\overrightarrow{OB_y}$ ισχύουν:

1) $\overline{OB_y} = 150$ ημ 120^o N $= 150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ N $= +129{,}9$ N

2) $|\overrightarrow{OB_y}| = 129{,}9$ N και

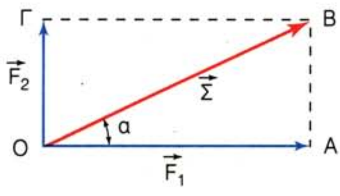
3) η φορά της θετική.

1.23 Σύνθεση δυνάμεων, που δρουν στο ίδιο σημείο, με τη μέθοδο της αναλύσεως σε ορθογώνιους άξονες.

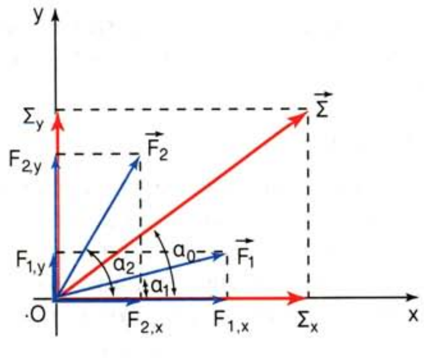
1.23.1 Σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90^o (σχ. 1.23α).

Για να τις συνθέσομε, σχηματίζομε το παραλληλόγραμμο από τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, δηλαδή το ΟΑΒΓ.

Έχομε: $(OB) = \sqrt{(OA)^2 + (O\Gamma)^2}$ ή $\Sigma^2 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ και



Σχ. 1.23α.



Σχ. 1.23β.

$$συνα = \frac{(OA)}{(OB)} = \frac{F_1}{\Sigma},\ \ ημα = \frac{(OΓ)}{(OB)} = \frac{F_2}{\Sigma}$$

1.23.2 Σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που δεν σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90^o (σχ. 1.23β).

Για να τις συνθέσομε, εργαζόμαστε ως εξής:

1) Αναλύομε κάθε μία από τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ κατά τους άξονες x΄x και y΄y ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων και έχομε:

$$F_{1x} = F_1\ συνα_1,\ F_{1y} = F_1\ ημα_1$$

$$F_{2x} = F_2\ συνα_2,\ F_{2y} = F_2\ ημα_2$$

2) Συνθέτομε τις συνιστώσες των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ κατά τον άξονα x΄x και παίρνομε την Σ_x:

$$\Sigma_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1\ συνα_1 + F_2\ συνα_2$$

3) Συνθέτομε τις συνιστώσες των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ κατά τον άξδνα y΄y και παίρνομε την Σ_y:

$$\Sigma_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1\ ημα_1 + F_2\ ημα_2$$

4) Συνθέτομε τις $\vec{\Sigma}_x$ και $\vec{\Sigma}_y$ και βρίσκομε την $\vec{\Sigma}$. Η $\vec{\Sigma}$ είναι η συνισταμένη των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και για αυτήν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2}\ \ (1),\ \ συνα_o = \frac{\Sigma_x}{\Sigma}\ \ (2)\ \ και\ \ ημα_o = \frac{\Sigma_y}{\Sigma}\ \ \ (3)$$

Προσοχή:

Όλα τα πιο πάνω ισχύουν ανεξάρτητα από το αν οι γωνίες α_1 και α_2 είναι οξείες ή αμβλείες. Στην περίπτωση όμως όπου οι γωνίες είναι μεγαλύτερες από 90°, χρειάζεται πολλή προσοχή στα πρόσημα των ημιτόνων και των συνημιτόνων.

1.23.3 Εφαρμογή.

Ζητείται να υπολογισθεί το μέγεθος και η διεύθυνση της συνισταμένης των δύο δυνάμεων του σχήματος 1.23γ(α).

Θα εργασθούμε με δύο τρόπους.

1) Με βάση το σχήμα και μόνο με οξείες γωνίες [σχ. 1.23γ (β)]. Διαπιστώνομε από το σχήμα ότι η F_{2x} έχει αντίθετη φορά από την F_{1x}. Επομένως:

$\Sigma_x = 200$ συν $20^\circ - 150$ συν $60^\circ = 200 \cdot 0{,}940 - 150 \cdot 0{,}5 = 113$ kgf

$\Sigma_x = 113$ kgf και με φορά προς τα δεξιά.

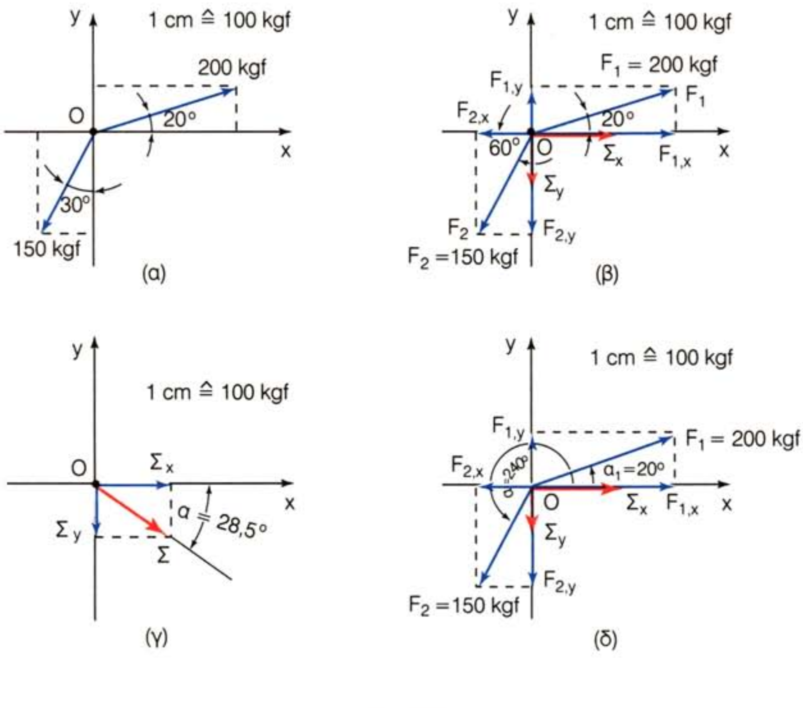
$\Sigma_y = 200$ ημ $20^\circ - 150$ ημ $60^\circ = 200 \cdot 0{,}342 - 150 \cdot 0{,}866 = -61{,}5$ kgf

$\Sigma_y = 61{,}5$ kgf και με φορά προς τα κάτω.

Συνεπώς βρίσκομε [σχ. 1.23γ(γ)]:

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2} = \sqrt{113^2 + 61{,}5^2} = 128{,}6 \text{ kgf} \quad (1)$$

$$\text{συν}\alpha_o = \frac{\Sigma_x}{\Sigma} = 0{,}878 \ (2) \text{ και } \alpha_o = 28{,}5^\circ \quad (3)$$



Σχ. 1.23γ.

Από το σχήμα 1.23γ(γ) και από τις σχέσεις (1), (2) και (3) διαπιστώνομε ότι η $\vec{\Sigma}$ έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά και κάτω και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 28,5°.

2) Με οξείες και αμβλείες γωνίες [σχ. 1.23γ (δ)].

Όλες τις γωνίες τις μετρούμε από το θετικό ημιάξονα Ox.

Έχομε:

$\Sigma_x = F_1$ συν$\alpha_1 + F_2$ συν$\alpha_2 = 200$ συν $20^o + 150$ συν 240^o

$\Sigma_x = 200 \cdot 0{,}940 + 150 \cdot (-0{,}5) = +113$ kgf

$\Sigma_y = F_1$ ημ$\alpha_1 + F_2$ ημ$\alpha_2 = 200$ ημ $20^o + 150$ ημ 240^o

$\Sigma_y = 200 \cdot 0{,}342 + 150 \cdot (-0{,}866) = -61{,}5$ kgf

Επομένως βρίσκομε:

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2} = \sqrt{113^2 + 61{,}5^2} = 128{,}6 \text{ kgf}$$

$$\text{ημ}\alpha_o = \frac{\Sigma_x}{\Sigma} = -\frac{61{,}5}{128{,}6} = -0{,}477 \text{ και } \alpha_o = 208{,}5^o \text{ ή } 331{,}5^o$$

$$\text{συν}\alpha_o = \frac{\Sigma_x}{\Sigma} = \frac{113}{128{,}6} = 0{,}878 \text{ και } \alpha_o = 28{,}5^o \text{ ή } 331{,}5$$

Προσοχή:

Η ζητούμενη γωνία είναι εκείνη που συμπίπτει και για το ημίτονο και για το συνημίτονο και στην περίπτωσή μας είναι:

$$\alpha_o = 331{,}5^o, (360-28{,}5^o)$$

Σημείωση:

Όπως διαπιστώνομε, ο υπολογισμός με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περίπλοκος.

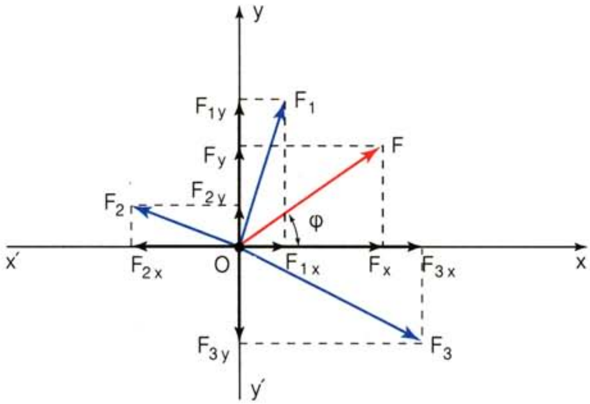
Επομένως είναι προτιμότερο να γίνεται σχέδιο των δυνάμεων και να εργαζόμαστε μόνο με οξείες γωνίες.

1.23.4 Σύνθεση πολλών δυνάμεων, που δρουν στο ίδιο σημείο, με τη μέθοδο της αναλύσεως σε ορθογώνιους άξονες.

Έστω ότι θέλομε να συνθέσομε τις $\overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF_2}, \overrightarrow{OF_3}$ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο O. Θεωρούμε στο επίπεδο των δυνάμεων αυτών δύο ορθογώνιους άξονες x΄x και y΄y, οι οποίοι τέμνονται στο O (σχ. 1.23δ). Αναλύομε κάθε μία δύναμη από αυτές σε δύο συνιστώσες κατά τους άξονες αυτούς. Για παράδειγμα την $\overrightarrow{OF_1}$ την αναλύομε στις συνιστώσες $\overrightarrow{OF_{1,x}}$ και $\overrightarrow{OF_{1,y}}$ κ.ο.κ.

Στη συνέχεια υπολογίζομε τις προβολές $\overline{F}_{1,x}$, $\overline{F}_{2,x}$, $\overline{F}_{3,x}$, στον άξονα x΄x και $\overline{F}_{1,y}$ $\overline{F}_{2,y}$, $\overline{F}_{3,y}$ στον άξονα y΄y.

Με πρόσθεση των προβολών σε κάθε άξονα χωριστά υπολογίζομε τις προβολές $\overline{F}_x$ και $\overline{F}_y$ της άγνωστης συνισταμένης $\overrightarrow{OF}$. Δηλαδή:



Σχ. 1.23δ.

$$\overline{F}_x = \overline{F}_{1,x} + \overline{F}_{2,x} + \overline{F}_{3,x} \text{ και } \overline{F}_y = \overline{F}_{1,y} + \overline{F}_{2,y} + \overline{F}_{3,y}$$

Επομένως, το μέτρο της τελικής συνισταμένης $\overrightarrow{OF}$ παρέχεται από τη σχέση:

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{(\overline{F}_x)^2 + (\overline{F}_y)^2}$$

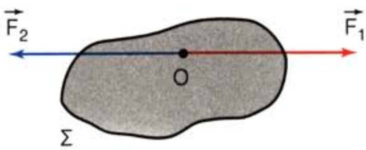
Επίσης, η διεύθυνση της $\overrightarrow{OF}$ καθορίζεται από τη γωνία $\varphi = \widehat{FO}_x$, δηλαδή τη σχέση $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\overline{F}_y}{\overline{F}_x}$.

Παρατήρηση:

Όταν οι συνιστώσες δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF_2}$ ... δεν βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο, τότε η συνισταμένη τους υπολογίζεται παρόμοια, με τη βοήθεια όμως τρισορθογωνίου συστήματος αξόνων Oxyz και ανάλυση κάθε μιας από αυτές σε τρεις συνιστώσες κατά τους τρεις άξονες.

1.24 Συνθήκη ισορροπίας σώματος, όταν σε ένα σημείο αυτού ασκούνται δύο δυνάμεις (συνθήκη ισορροπίας υλικού σημείου).

Η συνθήκη ισορροπίας σώματος όταν σε ένα του σημείο (σχ. 1.24) ασκούνται δύο δυνάμεις καθορίζει τα εξής: Για να ισορροπεί ένα σώμα Σ όταν σε ένα σημείο του O ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ πρέπει οι δυνάμεις αυτές



Σχ. 1.24.

να έχουν τον ίδιο φορέα, το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά, δηλαδή πρέπει να είναι αντίθετες: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Με άλλα λόγια: Για να ισορροπεί ένα σώμα όταν σε ένα του σημείο ασκούνται δύο δυνάμεις, πρέπει οι δυνάμεις αυτές να έχουν ***συνισταμένη ίση με μηδέν,*** δηλαδή $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

Προσοχή:

Ισχύει και το ***αντίστροφο*** αυτής της συνθήκης:

Όταν σε ένα σημείο ενός σώματος ασκούνται δύο δυνάμεις και το σώμα ισορροπεί, ***τότε*** οι δυνάμεις αυτές έχουν τον ίδιο φορέα, το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά, δηλαδή είναι αντίθετες. Με άλλα λόγια: Όταν σε ένα σημείο ενός σώματος ασκούνται δύο δυνάμεις και το σώμα ισορροπεί, τότε η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών ισούται με μηδέν.

1.25 Συνθήκη ισορροπίας στερεού σώματος, όταν σε ένα σημείο αυτού ασκούνται τρεις δυνάμεις.

Η συνθήκη ισορροπίας σώματος, όταν σε ένα σημείο του ασκούνται τρεις δυνάμεις ορίζει τα εξής:

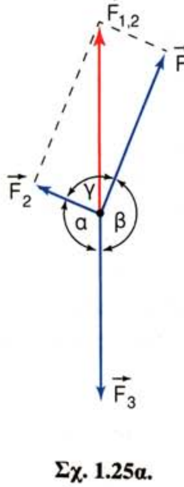
Για να ισορροπεί ένα σώμα (σχ. 1.25α) όταν σε ένα του σημείο Ο ασκούνται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$, ***πρέπει:***

1) Οι τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και

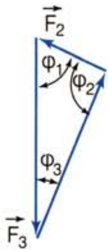
2) η συνισταμένη, των δύο από αυτές, για παράδειγμα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, να έχει την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο με την τρίτη δύναμη $\vec{F}_3$, αλλά φορά αντίθετη από τη φορά της $\vec{F}_3$ δηλαδή: $\vec{F}_3 = -\vec{F}_{1,2}$ (σχ. 1.25α).

Σημείωση:

Αν τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ που ασκούνται σε ένα σημείο ενός στε-



Σχ. 1.25α.



Σχ. 1.25β.

ρεού σώματος εκπληρούν τις πιο πάνω προϋποθέσεις, ***τότε*** η συνισταμένη αυτών είναι ίση με μηδέν. Γι' αυτό η συνθήκη ισορροπίας σώματος όταν σε ένα του σημείο ασκούνται τρεις δυνάμεις διατυπώνεται ***και*** ως εξής:

Για να ισορροπεί ένα σώμα, όταν σε ένα του σημείο Ο ασκούνται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ***και*** $\vec{F}_3$, ***πρέπει η συνισταμένη τους να είναι ίση με μηδέν.***

Παρατηρήσεις:

1) Ισχύει και ***το αντίστροφο*** της συνθήκης:

Όταν σε ένα σημείο Ο ενός σώματος ασκούνται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ***και*** $\vec{F}_3$ ***και το σώμα ισορροπεί, τότε η συνισταμένη αυτών είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή εκπληρούν τις προαναφερθείσες προϋποθέσεις (1) και (2).***

2) Επειδή το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων αυτών είναι το τρίγωνο F_1, F_2, F_3 (σχ. 1.25β), θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{F_1}{\eta\mu\varphi_1} = \frac{F_2}{\eta\mu\varphi_2} = \frac{F_3}{\eta\mu\varphi_3} \qquad (1)$$

Αλλά οι γωνίες φ_1, φ_2, φ_3 είναι αντίστοιχα παραπληρωματικές των γωνιών α, β, γ, άρα έχουν τα ίδια ημίτονα και συνεπώς η σχέση (1) γράφεται:

$$\boxed{\frac{F_1}{\eta\mu\alpha} = \frac{F_2}{\eta\mu\beta} = \frac{F_3}{\eta\mu\gamma}} \qquad (2)$$

Η σχέση (2) εκφράζει την ακόλουθη πρόταση:

Όταν τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις, ασκούνται επί του αυτού σημείου ενός σώματος και αυτό ισορροπεί, τότε η ένταση (το μέτρο, το μέγεθος) κάθε μιας από αυτές είναι ανάλογη προς ημίτονο της γωνίας, μεταξύ των δύο άλλων.

1.26 Συνθήκη ισορροπίας στερεού σώματος, όταν σε ένα σημείο αυτού ασκούνται πολλές δυνάμεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Η συνθήκη ισορροπίας σώματος, όταν σε ένα σημείο του ασκούνται πολλές δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ... \vec{F}_\nu$ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (ομοεπίπεδες) καθορίζει τα εξής: ***Για να ισορροπεί ένα σώμα, όταν σε ένα του σημείο***

ασκούνται πολλές δυνάμεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, πρέπει αυτές να έχουν συνισταμένη μηδέν, θα πρέπει δηλαδή το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων αυτών να είναι κλειστό.

Η συνθήκη αυτή διατυπώνεται διανυσματικά ως εξής:

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_\nu = 0} \text{ ή } \boxed{\Sigma\vec{F}_\nu = 0}$$

1.27 Συνθήκη ισορροπίας στερεού σώματος, όταν σε ένα σημείο αυτού ασκούνται πολλές δυνάμεις, οι οποίες δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (μη ομοεπίπεδες δυνάμεις).

Η συνθήκη ισορροπίας σώματος όταν σε ένα σημείο του ασκούνται πολλές δυνάμεις, οι οποίες ***δεν*** βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ορίζει τα εξής:

Για να ισορροπεί ένα σώμα, όταν σε ένα σημείο αυτού ασκούνται πολλές δυνάμεις που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, πρέπει αυτές να έχουν συνισταμένη μηδέν, θα πρέπει δηλαδή το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων αυτών να είναι κλειστό.

Η συνθήκη αυτή την οποία πρέπει να εκπληρούν ν δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3 ... F_\nu$ που ασκούνται σε ένα σημείο ενός σώματος και οι οποίες δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο για να ισορροπεί το σώμα αυτό διατυπώνεται διανυσματικά ως εξής:

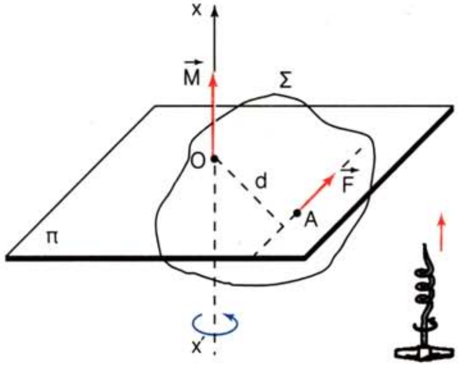
$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_\nu = 0} \text{ ή } \boxed{\Sigma_1^\nu \vec{F}_\nu = 0}$$

Προσοχή:

Από όλα τα προηγούμενα συμπεραίνομε ότι για να ισορροπεί κάποιο σώμα, ***σε ένα σημείο*** του οποίου ασκούνται δυνάμεις, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών να ισούται με μηδέν ανεξάρτητα από το πλήθος των δυνάμεων και ανεξάρτητα από το αν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι.

1.28 Ροπή δυνάμεως ως προς σημείο.

Έστω δύο σημεία Ο και Α ενός σώματος και έστω ότι στο σημείο Α του σώματος Σ ασκείται μία δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 1.28).



Σχ. 1.28.

Ονομάζομε ***ροπή της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς στο σημείο O***, ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{M}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά στοιχεία:

1) Το σημείο εφαρμογής της $\vec{M}$ είναι το σημείο O.

2) Η διεύθυνση της $\vec{M}$ συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα x΄x, ο οποίος διέρχεται από το σημείο O και είναι ***κάθετος*** στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της $\vec{F}$ και το σημείο O.

3) Η φορά της ροπής $\vec{M}$ ορίζεται με χρήση δεξιόστροφου κοχλία (βίδας). Η φορά της $\vec{M}$ είναι η φορά κατά την οποία προχωρεί ο δεξιόστροφος κοχλίας, αν τον περιστρέψομε όπως τείνει να περιστρέψει η δύναμη το σώμα .

4) Το μέτρο της $\vec{M}$ ισούται με το γινόμενο του μέτρου της $\vec{F}$ επί την απόσταση d του O από το φορέα της $\vec{F}$, δηλαδή:

$$\boxed{|\vec{M}| = d \cdot |\vec{F}|}$$

Σημείωση:

Η απόσταση d ονομάζεται συνήθως βραχίονας της ροπής $\vec{M}$.

Παρατηρήσεις:

1) Η ροπή $\vec{M}$ της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς το σημείο O δεν μεταβάλλεται, αν η δύναμη $\vec{F}$ μετακινηθεί επάνω στο φορέα της, ***γιατί*** κατά τη μετακίνηση αυτή ούτε η d μεταβάλλεται ούτε η $\vec{F}$.

2) Η ροπή $\vec{M}$ της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς το σημείο O θα είναι μηδέν, ***αν*** ο φορέας της δυνάμεως $\vec{F}$ διέρχεται από το O γιατί, όταν ο φορέας της δυνάμεως $\vec{F}$ διέρχεται από το O, τότε η απόσταση d του O από το φορέα της είναι μηδέν.

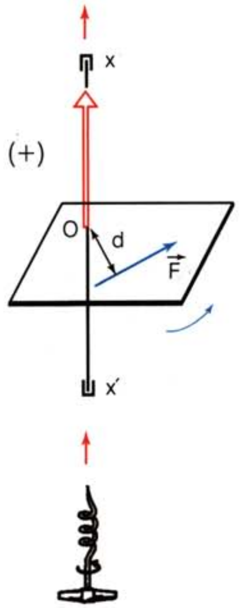
1.29 Ροπή δυνάμεως ως προς άξονα.

Θα εξετάσομε τη ροπή δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς τον άξονα x΄x, όταν η δύναμη $\vec{F}$ βρίσκεται σε επίπεδο που είναι ***κάθετο*** στον άξονα x΄x και το οποίο τέμνει τον άξονα αυτόν στο σημείο O (σχ. 1.29α, και 1.29β).

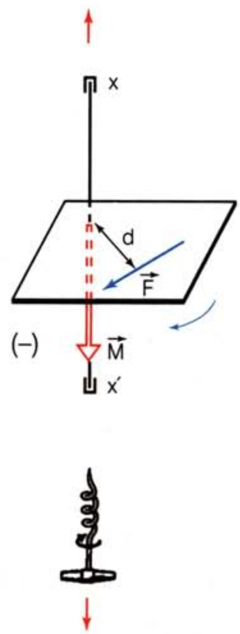
Ροπή της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς το άξονα x΄x ονομάζομε το ***διανυσματικό μέγεθος $\vec{M}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά στοιχεία:***

1) Ο φορέας της $\vec{M}$ συμπίπτει με τον άξονα x΄x.

2) Το μέτρο της $\vec{M}$ ισούται με το γινόμενο της αποστάσεως d του O από το φορέα της $\vec{F}$, επί το μέτρο της $\vec{F}$:



Σχ. 1.29α.



Σχ. 1.29β.

$$\boxed{|\vec{M}| = d \cdot |\vec{F}|}$$

3) Η φορά ορίζεται όπως και πριν με τη χρήση του δεξιόστροφου κοχλία.

1.29.1 Μονάδες ροπής.

Η σχέση ορισμού της ροπής είναι: $|\vec{M}| = d \cdot |\vec{F}|$.

Μονάδα δυνάμεως στο S.I. είναι το 1 N και μονάδα αποστάσεως το 1 m. Άρα μονάδα ροπής στο S.I. είναι:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot d = 1\ N \cdot 1\ m = 1\ Nm$$

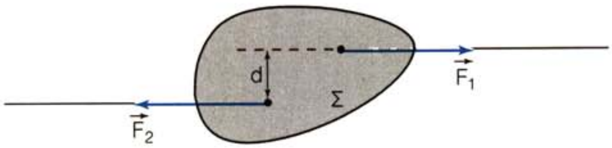
Προσοχή:

Η μονάδα της ροπής ***δεν*** είναι το Joule (τζουλ) γιατί η ροπή δεν είναι έργο.

1.30 Ζεύγος δυνάμεων.

1.30.1 Γενικά περί ζεύγους δυνάμεων.

Αν οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που ενεργούν επί του αυτού σώματος Σ είναι αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα, τότε λέμε ότι οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ α-



Σχ. 1.30α.

ποτελούν ζεύγος δυνάμεων (σχ. 1.30α).

Γενικά, ***ζεύγος*** δυνάμεων ονομάζομε ***σύστημα δύο*** δυνάμεων που ενεργούν επί του αυτού σώματος, είναι παράλληλες, αντίρροπές και έχουν ίσα μέτρα.

Επίπεδο ζεύγους ή επίπεδο εφαρμογής ζεύγους ονομάζομε το επίπεδο που ορίζουν οι δυνάμεις του, δηλαδή το επίπεδο ***επί του οποίου κείνται*** οι δυνάμεις αυτού του ζεύγους.

Αν θεωρήσομε (σχ. 1.30β) ότι η συνολική ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ως προς άξονα x΄x, που είναι κάθετος στο επίπεδό τους, είναι η $\vec{M}_Z$, τότε αυτή είναι το διανυσματικό άθροισμα των ροπών $\vec{M}_1$ και $\vec{M}_2$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ως προς τον άξονα αυτόν (x΄x). Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{M}_Z = \vec{M}_1 + \vec{M}_2}$$

Η ροπή $\vec{M}_Z$ (του ζεύγους) ***ως διανυσματικό άθροισμα δύο διανυσματικών μεγεθών*** $\vec{M}_1$ και $\vec{M}_2$ είναι διανυσματικό μέγεθος, το οποίο έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά στοιχεία:

1) Σημείο εφαρμογής αυτού είναι το σημείο τομής του άξονα x΄x και του επιπέδου του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, δηλαδή το Ο.

2) Η διεύθυνση της $\vec{M}_Z$ συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα x΄x.

3) Φορά της $\vec{M}_Z$ είναι εκείνη που ορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

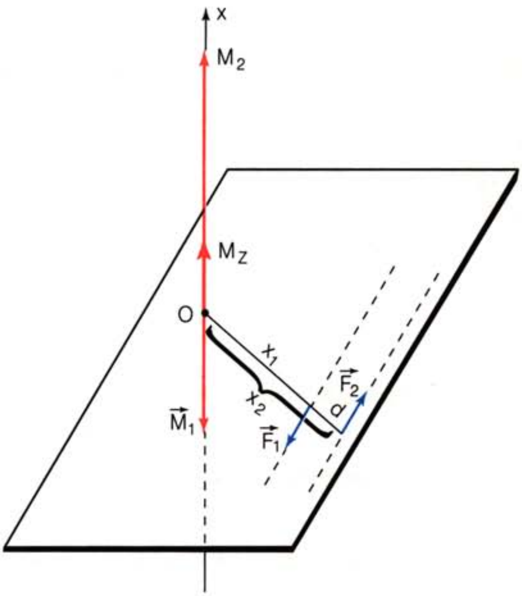
4) Το μέτρο της $\vec{M}_Z$ ισούται με το μέτρο της μιας από τις δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ του ζεύγους επί την απόστασή τους $d = (x_2 - x_1)$, δηλαδή (σχ. 1.30β):

$$\boxed{|\vec{M}_Z| = d \cdot |\vec{F}_1| = d\,|\vec{F}_2|} \qquad (1)$$

Παρατηρήσεις:

1) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ροπή $\vec{M}_Z$ του ζεύγους ως προς τον άξονα x΄x δεν εξαρτάται από τη θέση του ως προς τις δύο δυνάμεις, αλλά μόνο από το μέτρο των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και τη μεταξύ τους απόσταση.

Επομένως, η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιονδήποτε άξο-



Σχ. 1.30β.

να, κάθετο στο επίπεδό του, δηλαδή είναι ***ελεύθερο*** διανυσματικό μέγεθος ***(μπορεί δηλαδή να μετακινηθεί*** ή ***επάνω στο φορέα του*** ή ***παράλληλα προς αυτόν).***

2) Επειδή η ροπή ζεύγους δυνάμεων ως προς οποιονδήποτε άξονα κάθετο στο επίπεδό του εξαρτάται μόνο από το μέτρο των δυνάμεών του και την μεταξύ τους απόσταση είναι ***χαρακτηριστικό*** μέγεθος του ζεύγους.

Προσοχή:

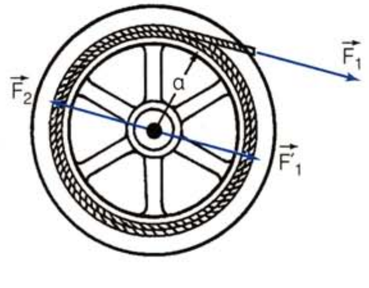
Δύο δυνάμεις που ασκούνται στο ίδιο σώμα, όταν είναι παράλληλες, αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα, τότε η συνισταμένη τους είναι ίση με μηδέν.

Άρα ένα ζεύγος δυνάμεων ***δεν μπορεί*** ούτε να ***αντικατασταθεί*** από μία άλλη δύναμη ούτε να ***αντικαταστήσει*** μια άλλη δύναμη.

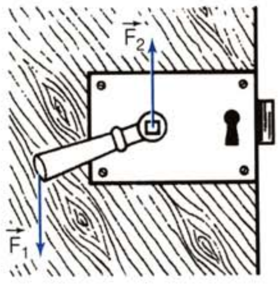
1.30.2 Η επίδραση του ζεύγους δυνάμεων είναι αναγκαία προϋπόθεση, για να περιστραφεί ένα σώμα γύρω από άξονα.

Για να περιστραφεί ένα σώμα γύρω από έναν άξονα, πρέπει να ασκηθεί επάνω του ζεύγος δυνάμεων. Η διεύθυνση της ροπής του ζεύγους αυτού πρέπει να συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα, (πρέπει δηλαδή το επίπεδό του ζεύγους να είναι κάθετο στον άξονα).

Όταν στον τροχό (σχ. 1.30γ) εφαρμόζομε δύναμη $\vec{F}_1$ και αυτός περιστρέφεται, τότε συμβαίνει το εξής: Ο τροχός ασκεί στον άξονα μία δύναμη $\vec{F}_1'$, η οποία είναι παράλληλη και ομόρροπη με την $\vec{F}_1$ και έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της. Επειδή ο τροχός ασκεί στον άξονα τη δύναμη $\vec{F}_1'$ (δράση), ο άξονας ασκεί στον τροχό τη δύναμη $\vec{F}_2$ (αντίδραση), η οποία έχει την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μέτρο με την $\vec{F}_1'$ αλλά αντίθετη φορά.



Σχ. 1.30γ.



Σχ. 1.30δ.

Επομένως, στον τροχό ασκούνται ***δύο*** δυνάμεις, η $\vec{F}_1$ την οποία ασκούμε ***εμείς*** και η $\vec{F}_2$ την οποία ασκεί ***ο άξονάς του***.

Οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που ασκούνται στον τροχό είναι παράλληλες, έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες φορές.

Έτσι στον τροχό επιδρά ένα ζευγάρι δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που κάνει τον τροχό να περιστρέφεται.

Επειδή η ροπή της δυνάμεως $\vec{F}_2$ ως προς τον άξονα είναι μηδέν, λέμε ***καταχρηστικά***, ότι ο τροχός περιστρέφεται εξ αιτίας της ροπής της δυνάμεως $\vec{F}_1$ (σχ. 1.30γ).

Προσοχή:

Όταν ένα σώμα περιστρέφεται, παρ' όλο που πολλές φορές αυτό δεν φαίνεται, ασκείται επάνω του κάποιο ζεύγος δυνάμεων.

Επομένως, όταν ένα σώμα περιστρέφεται, πρέπει να αναζητήσομε το ζεύγος των δυνάμεων που το περιστρέφουν.

Για παράδειγμα την περιστροφή της χειρολαβής (σχ. 1.30δ) την προκαλεί το ζεύγος των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και όχι η δύναμη $\vec{F}_1$ που εφαρμόζομε εμείς.

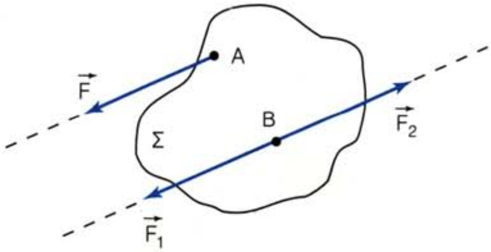
Την $\vec{F}_2$ την ασκεί ο άξονας περιστροφής επάνω στη χειρολαβή και συγκεκριμένα στο σημείο στηρίξεώς της επάνω σε αυτόν.

Επειδή η ροπή της δυνάμεως $\vec{F}_2$ ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν, λέμε ***καταχρηστικά***, ότι η χειρολαβή περιστρέφεται εξ αιτίας της ροπής της δυνάμεως $\vec{F}_1$ ως προς τον άξονα αυτόν.

1.31 Μεταφορά δυνάμεως παράλληλα προς τον εαυτό της (αναγωγή δυνάμεως ως προς ένα σημείο).

Έστω ότι η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στο σημείο Α ενός σώματος Σ (σχ. 1.31) και έστω ότι θέλομε να ***μεταφέρομε*** τη δύναμη αυτή ***παράλληλα προς τον εαυτό της***, για να αποκτήσει ως νέο σημείο εφαρμογής το σημείο Β του σώματος.

Για το σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής:



Σχ. 1.31.

Στο σημείο Β του σώματος Σ εφαρμόζομε δύο δυνάμεις, $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, που είναι: 1) Παράλληλες προς την $\vec{F}$, 2) $|\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ και 3) η $\vec{F}_1$ ομόρροπη προς την $\vec{F}$ και η $\vec{F}_2$ αντίρροπη προς την $\vec{F}$ (η $\vec{F}_2$ είναι αντίρροπη και προς την $\vec{F}_1$). Επειδή οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι αντίθετες ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$) εξουδετερώνονται αμοιβαία.

Επομένως, όταν στο σώμα επιδρούν ταυτόχρονα οι τρεις δυνάμεις $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_3$, προκαλούν το ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που προκαλεί η $\vec{F}$ όταν ενεργεί μόνη της. Δηλαδή: Το σύστημα των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}$ είναι ισοδύναμο με τη δύναμη $\vec{F}$. Αλλά το σύστημα των τριών δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}$ συνίσταται από μία δύναμη $\vec{F}_1$, και από ένα ζεύγος δυνάμεων ($\vec{F}$, $\vec{F}_2$). Άρα: ***Η δύναμη $\vec{F}$ είναι ισοδύναμη με μία δύναμη $\vec{F}_1$ και με ένα ζεύγος δυνάμεων ($\vec{F}$, $\vec{F}_2$).*** Έτσι:

Το αποτέλεσμα που προκαλεί η δύναμη $\vec{F}$, όταν ασκείται μόνης της στο σημείο Α του στερεού σώματος Σ είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα που προκαλούν η δύναμη $\vec{F}_1$ και το ζεύγος των δυνάμεων $\vec{F}$, $\vec{F}_2$, αν ασκηθούν ταυτόχρονα στο σώμα αυτό.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Μία δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σε ένα σημείο Α στερεού σώματος μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ζεύγος δυνάμεων ($\vec{F}$, $\vec{F}_2$) και από μία άλλη δύναμη $\vec{F}_1$, η οποία: 1) Έχει το ίδιο μέτρο με την $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = |\vec{F}_1|$), 2) είναι παράλληλη και ομόρροπη προς την $\vec{F}$, αλλά 3) έχει άλλο σημείο εφαρμογής (το Β).

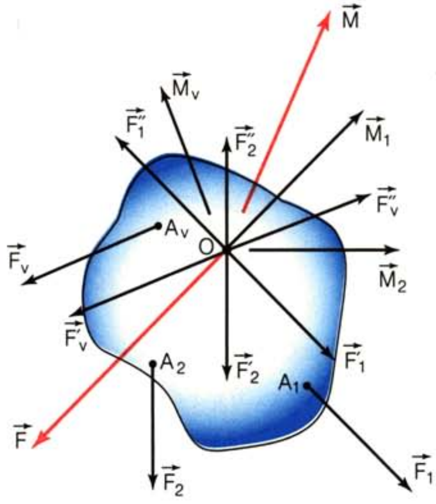
Σημειώσεις:

1) Η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}$ και $\vec{F}_2$ είναι ίση με τη ροπή της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς το σημείο Β.

2) Την αντικατάσταση της δυνάμεως $\vec{F}$ από ένα ζεύγος δυνάμεων ($\vec{F}$, $\vec{F}_2$) και από μία δύναμη $\vec{F}_1$ ***την ονομάζομε αναγωγή*** της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς το σημείο Β.

1.32 Αναγωγή συστήματος δυνάμεων σε ένα σημείο.

Αν στα σημεία A_1, A_2 ... A_ν ενός σώματος ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ... $\vec{F}_\nu$, οι οποίες ούτε ομοεπίπεδες ούτε παράλληλες είναι, τότε αποδεικνύεται ότι μπορούν να αντικατα-



Σχ. 1.32.

σταθούν από μία συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$, που θα ασκείται σε ένα τυχαίο σημείο Ο του σώματος και ένα συνιστάμενο ζεύγος $\overrightarrow{M}$ (σχ. 1.32).

Παρατήρηση:

Το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της συνισταμένης δυνάμεως $\vec{F}$ είναι ***ανεξάρτητα από την εκλογή*** του σημείου Ο, ενώ η συνισταμένη ροπή $\overrightarrow{M}$ ***εξαρτάται*** από τη θέση του σημείου Ο.

Προσοχή:

Η αναγωγή συστήματος δυνάμεων σε ένα σημείο του στερεού σώματος μπορεί να οδηγήσει σε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

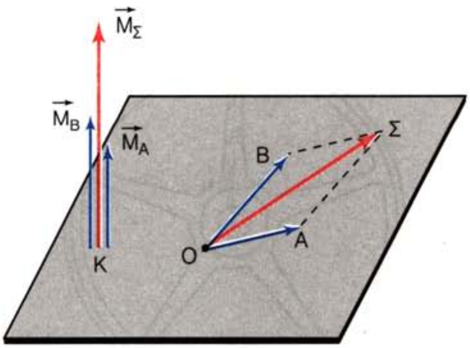
1) $\vec{F} \neq 0$ και $\overrightarrow{M} \neq 0$.
2) $\vec{F} \neq 0$ και $\overrightarrow{M} = 0$.
3) $\vec{F} = 0$ και $\overrightarrow{M} \neq 0$.
4) $\vec{F} = 0$ και $\overrightarrow{M} = 0$.

1.33 Θεώρημα των ροπών.

Θα αναφέρομε τις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις.

1.33.1 Όταν δύο δυνάμεις ασκούνται στο ίδιο σημείο.

Το σχήμα 1.33 δείχνει δύο δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, οι οποίες ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο, και τη συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$. Οι ροπές των δυνάμεων αυτών, ως προς τυχαίο σημείο Κ του επιπέδου τους, παριστάνονται από τα διανύσματα $\overrightarrow{M}_A$, $\overrightarrow{M}_B$ και $\overrightarrow{M}_\Sigma$ αντιστοίχως, τα οποία βρίσκονται επάνω στον ίδιο άξονα που είναι κάθετος



Σχ. 1.33α.

στο επίπεδο των δυνάμεων στο σημείο Κ.

Αν θεωρήσομε τα αλγεβρικά μέτρα των πιο πάνω ροπών, τότε μπορούμε να αποδείξομε το εξής θεώρημα:

Το αλγεβρικό μέτρο $\overline{M}_\Sigma$ της ροπής της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ των δύο δυνάμεων, ως προς ένα σημείο του επιπέδου τους, ισούται με το άθροισμα των αλγεβρικών μέτρων $\overline{M}_A$, $\overline{M}_B$ των ροπών των συνιστωσών $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ως προς αυτό το σημεί-ο. Δηλαδή:

$$\boxed{\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_A + \overline{M}_B}$$

Το θεώρημα αυτό ονομάζεται ***θεώρημα των ροπών.***

Σημείωση:

Βέβαια ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\vec{M}_\Sigma = \vec{M}_A + \vec{M}_B}$$

1.33.2 Συνηθισμένη περίπτωση:

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουν τον ίδιο φορέα και αντίθετες φορές (σχ. 1.33β) έχομε:

$$\Sigma = F_1 - F_2 \qquad (1)$$

Ισχύει και η σχέση:

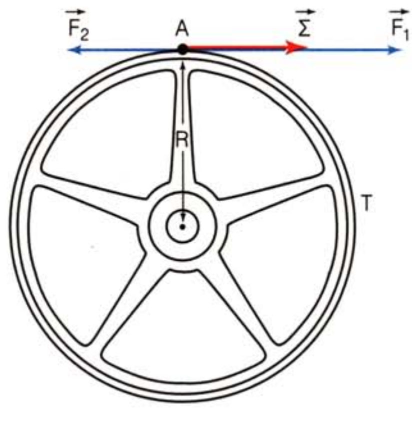
$$M_\Sigma = \Sigma \cdot R \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η σχέση:

$$M_\Sigma = (F_1 - F_2) \cdot R \Rightarrow M_\Sigma = F_1 \cdot R - F_2 \cdot R \qquad (3)$$

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

$$M_1 = F_1 \cdot R \qquad (4)$$



Σχ. 1.33β.

και

$$M_2 = F_2 \cdot R \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) και (5) προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{M_\Sigma = M_1 - M_2}$$

Επειδή $M_1 \neq M_2$, έχομε $M_\Sigma \neq 0$. Επομένως ο τροχός περιστρέφεται περί τον άξονά του.

1.33.3 Όταν πολλές δυνάμεις ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο ενός σώματος και βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει το εξής θεώρημα των ροπών:

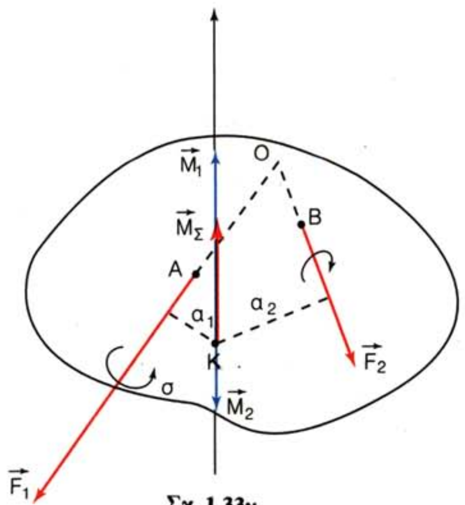
Όταν πολλές δυνάμεις $\overrightarrow{OF}_1$, $\overrightarrow{OF}_2$, $\overrightarrow{OF}_3 ... \overrightarrow{OF}_\nu$ ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο ενός σώματος, και βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο, τότε το αλγεβρικό μέτρο της ροπής $\overrightarrow{M}_\Sigma$ της συνισταμένης τους $\overrightarrow{O\Sigma}$, ως προς ένα σημείο Κ του επιπέδου τους είναι ίσο με το άθροισμα των αλγεβρικών μέτρων των ροπών $\overrightarrow{M}_1$, $\overrightarrow{M}_2$, $\overrightarrow{M}_3$, $\overrightarrow{M}_\nu$ των δυνάμεων αυτών ως προς το ίδιο σημείο Κ.

$$\boxed{\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + ... + \overline{M}_\nu}$$

1.33.4 Όταν δύο δυνάμεις ασκούνται σε διαφορετικά σημεία του σώματος και είναι συντρέχουσες.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει το εξής θεώρημα των ροπών:

Όταν δύο δυνάμεις $\overrightarrow{AF}_1$ και $\overrightarrow{BF}_2$ (σχ. 1.33γ) ασκούνται στο σώμα σ και συντρέχουν στο σημείο Ο, τότε το αλγεβρικό μέτρο $\overline{M}_\Sigma$ της ροπής της συνισταμένης των δυ-



Σχ. 1.33γ.

νάμεων αυτών ως προς ένα τυχαίο σημείο Κ του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των αλγεβρικών μέτρων $\overline{M_1}$ και $\overline{M_2}$ των ροπών των δυνάμεων αυτών ως προς το ίδιο σημείο Κ.

$\overline{M_1} = +|\vec{F}_1|\cdot\alpha_1$ (θετική), $\overline{M_2} = -|\vec{F}_2|\cdot\alpha_2$ (αρνητική) και

$$\boxed{\overline{M_\Sigma} = \overline{M_1} + \overline{M_2} = +|\vec{F}_1|\cdot\alpha_1 - |\vec{F}_2|\cdot\alpha_2}$$

Σημείωση:

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση όπου στο σώμα ασκούνται πολλές συντρέχουσες και ομοεπίπεδες δυνάμεις.

1.33.5 Όταν πολλές δυνάμεις ασκούνται στο ίδιο σημείο Ο σώματος και δεν βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει το εξής θεώρημα:

Όταν πολλές δυνάμεις $\vec{OF}_1, \vec{OF}_2, \vec{OF}_3 ... \vec{OF}_\nu$ ασκούνται στο ίδιο σημείο ενός σώματος (για παράδειγμα στο σημείο Ο) και δεν βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο, τότε η ροπή $\vec{M}_\Sigma$ της συνισταμένης τους $\vec{O\Sigma}$ ως προς ένα σημείο του σώματος (για παράδειγμα ως προς το σημείο Κ) είναι ίση με το διανυσματικό (γεωμετρικό) άθροισμα των ροπών $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3 ... \vec{M}_\nu$ των δυνάμεων αυτών ως προς το ίδιο σημείο Κ.

$$\boxed{\vec{M}_\Sigma = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + ... + \vec{M}_\nu}$$

Σημείωση:

Η περίπτωση αυτή είναι απλή εφαρμογή του ***ορισμού αθροίσματος των διανυσματικών μεγεθών.***

1.33.6 Όταν σε σώμα ασκούνται δύο παράλληλες δυνάμεις.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει το εξής θεώρημα:

Όταν δύο δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$ ασκούνται σε ένα σώμα και είναι παράλληλες, τότε το αλγεβρικό μέτρο $\overline{M}_\Sigma$ της ροπής της συνισταμένης τους $\overrightarrow{O\Sigma}$ ως προς ένα σημείο Κ του επιπέδου τους είναι ίσο με το άθροισμα των αλγεβρικών μέτρων των ροπών τους $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ ως προς το ίδιο σημείο Κ. Δηλαδή:

$$\boxed{\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2}$$

1.34 Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος, όταν σε διαφορετικά σημεία αυτού και κατά οποιονδήποτε τρόπο ασκούνται πολλές δυνάμεις. (Γενική περίπτωση ισορροπίας σώματος).

Για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα, όταν επάνω του ασκούνται κατά οποιονδήποτε τρόπο πολλές δυνάμεις, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ... \vec{F}_\nu$, πρέπει ταυτόχρονα να ισχύουν οι εξής δύο συνθήκες:

1) Η συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$, όταν αναχθούν σε ένα οποιοδήποτε σημείο Α του σώματος πρέπει να είναι ίση με μηδέν.

2) Η συνισταμένη $\vec{M}_\Sigma$ των ροπών των δυνάμεων αυτών ως προς το ίδιο σημείο Α του σώματος να είναι επίσης ίση με μηδέν. Η μαθηματική διατύπωση αυτών των συνθηκών είναι:

$$\boxed{\vec{\Sigma} = 0} \text{ και } \boxed{\vec{M}_\Sigma = 0} \text{ ή } \boxed{\Sigma\vec{F} = 0} \text{ και } \boxed{\Sigma\vec{M} = 0}$$

Ισχύει και το ***αντίστροφο*** των συνθηκών αυτών, δηλαδή:

Όταν μας πούνε ότι ένα σώμα ισορροπεί, τότε η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα αυτό, όταν αναχθούν ως προς οποιοδήποτε σημείο Α αυτού είναι μηδέν· επί πλέον, είναι μηδέν και η συνισταμένη των ροπών τους ως προς το σημείο αυτό.

1.35 Συνθήκη ισορροπίας σώματος, όταν σε διαφορετικά σημεία του ασκούνται δυνάμεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και οι φορείς τους τέμνονται στο ίδιο σημείο.

Στην περίπτωση αυτή η συνθήκη ισορροπίας του σώματος είναι η εξής: Για να ισορροπεί ένα σώμα, όταν σε διαφορετικά σημεία του ασκούνται πολλές δυνάμεις, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ... \vec{F}_\nu$, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και επί πλέον οι φορείς τους τέμνονται στο ίδιο σημείο, πρέπει και αρκεί η συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$ να είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\Sigma} = \vec{0}}$$

Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία και ικανή ***για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα, διότι:***

Όταν η συνισταμένη ομοεπιπέδων και συντρεχουσών δυνάμεων είναι μηδέν, τότε και η συνισταμένη των ροπών τους ως προς οποιοδήποτε σημείο του σώματος είναι επίσης μηδέν, οπότε έχομε:

$$\boxed{\vec{\Sigma}=0} \quad \text{και} \quad \boxed{\vec{M}_{\Sigma}=0}$$

1.36 Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος, όταν σε διαφορετικά σημεία του ασκούνται δύο ομοεπίπεδες δυνάμεις.

Για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα, όταν σε διαφορετικά σημεία του ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ (σχ. 1.36) πρέπει και αρκεί να ισχύουν ταυτοχρόνως οι εξής συνθήκες:

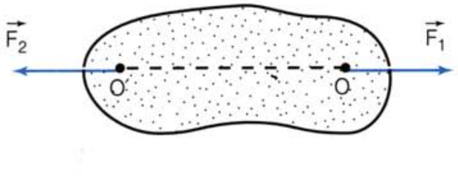
Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ να έχουν:

1) Τον ίδιο φορέα.
2) Το ίδιο μέτρο.
3) Αντίθετες φορές.

Σημείωση:

Όταν μας πούνε ότι επάνω σε ένα σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και το σώμα ισορροπεί, τότε οι δυνάμεις αυτές έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Τον ίδιο φορέα.
2) Ίσα μέτρα.
3) Αντίθετες φορές.



Σχ. 1.36.

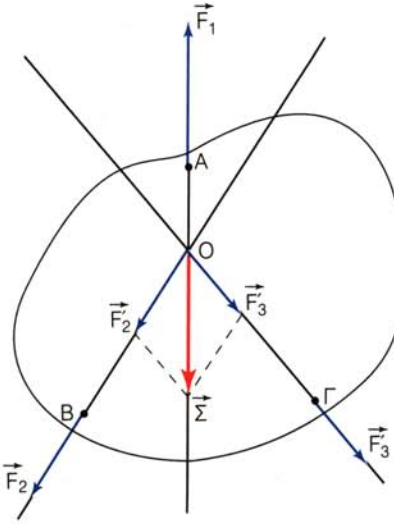
1.37 Συνθήκες ισορροπίας σώματος, όταν σε διαφορετικά σημεία του ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις.

Διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

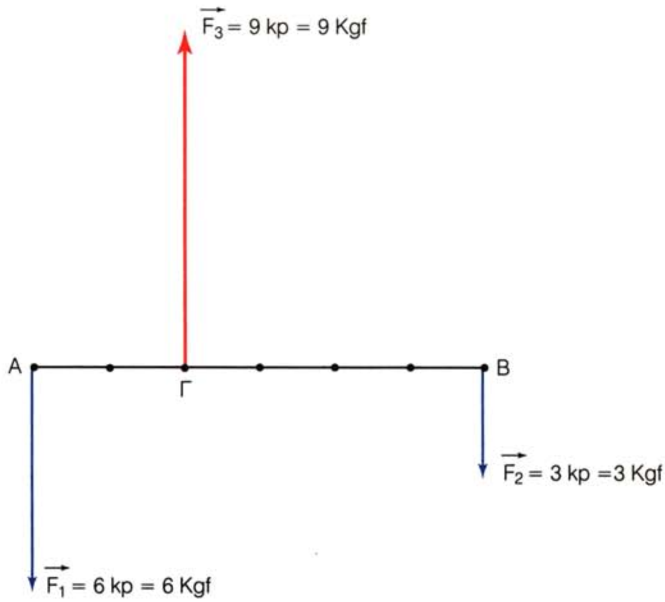
α) Οι τρεις δυνάμεις να είναι ομοεπίπεδες και μη παράλληλες.

Για να ισορροπεί ένα σώμα, όταν σε διαφορετικά σημεία του Α, Β, Γ ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες και μη παράλληλες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ (σχ. 1.37α), πρέπει και αρκεί να ισχύουν ταυτοχρόνως οι εξής συνθήκες:

1) Οι φορείς τους να τέμνονται στο ίδιο σημείο.
2) Ο φορέας της κάθε μιας από τις τρεις να συμπίπτει με το φορέα της συ-



Σχ. 1.37α.



Σχ. 1.37β.

νισταμένης των δύο άλλων.

3) Η φορά της κάθε μιας από τις τρεις να είναι αντίθετη προς τη φορά της συνισταμένης των δύο άλλων.

4) Το μέτρο της κάθε μιας από τις τρεις να είναι ίσο με το μέτρο της συνισταμένης των δύο άλλων.

β) Οι τρεις δυνάμεις να είναι ομοεπίπεδες και παράλληλες.

Για να ισορροπεί ένα σώμα, όταν σε διαφορετικά σημεία του A, B, Γ ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες και παράλληλες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ (σχ. 1.37β), πρέπει και αρκεί να ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής συνθήκες:

1) Η μεγαλύτερη από τις τρεις δυνάμεις να έχει φορά αντίθετη προς τη φορά των δύο άλλων.

2) Το σημείο εφαρμογής της μεγαλύτερης από τις τρεις να βρίσκεται μεταξύ των σημείων εφαρμογής των δύο άλλων.

3) Το μέτρο της μεγαλύτερης να είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο άλλων.

1.38 Σύνθεση δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων, που επενεργούν σε δύο σημεία σώματος.

α) Γραφική μέθοδος.

Στα σημεία A και B σώματος (σχ. 1.38α) ενεργούν δύο παράλληλες και ομόρροπες δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$. Ζητούμε να υπολογίσομε τη συνισταμένη των δυνάμεων αυτών.

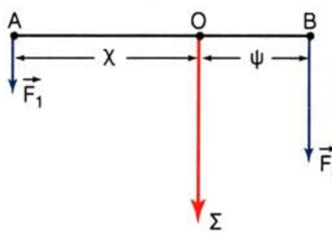
Για να βρούμε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, πρέπει να προσδιορίσομε:

1) Το μέτρο της.
2) Τη διεύθυνσή της.
3) Τη φορά της.
4) Το φορέα της, δηλαδή τη συγκεκριμένη ευθεία, επάνω στην οποία βρίσκεται.
5) Το σημείο εφαρμογής της.

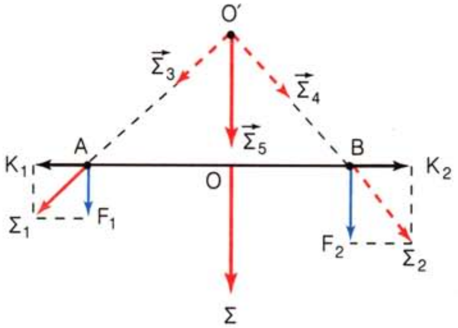
Με τη μέθοδο του δυναμοπολυγώνου βρίσκομε ότι:

1) Το μέτρο της $\vec{\Sigma}$ είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, δηλαδή:

$$\boxed{|\vec{\Sigma}| = |\overrightarrow{AF}| + |\overrightarrow{BF_2}|}$$



Σχ. 1.38α.



Σχ. 1.38β.

2) Η διεύθυνση της $\vec{\Sigma}$ συμπίπτει με τη διεύθυνση των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, δηλαδή η $\vec{\Sigma}$ είναι παράλληλη προς τις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$.

3) Η φορά της $\vec{\Sigma}$ συμπίπτει με τη φορά των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, δηλαδή η $\vec{\Sigma}$ είναι ομόρροπη προς τις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$.

Απομένει να προσδιορίσομε το φορέα της $\vec{\Sigma}$ (που θα είναι παράλληλος προς τους φορείς των $\overrightarrow{OF_1}$ και $\overrightarrow{OF_2}$) και το σημείο εφαρμογής της. Θεωρούμε ότι επάνω στα δύο σημεία Α και Β του σώματος (σχ. 1.38β) επενεργούν εκτός των δυνάμεων $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$ και οι δύο δυνάμεις $\overrightarrow{AK_1}$ και $\overrightarrow{BK_2}$, οι οποίες είναι ίσες και αντίθετες ($\overrightarrow{AK_1} = -\overrightarrow{BK_2}$). Επειδή οι δύο αυτές δυνάμεις, $\overrightarrow{AK_1}$ και $\overrightarrow{BK_2}$ αλληλοαναιρούνται, η επενέργεια (προσθήκη) αυτών στο σώμα δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα της επενέργειας επάνω σε αυτό των δυνάμεων $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$. Επομένως, η συνισταμένη των τεσσάρων δυνάμεων $\overrightarrow{AK_1}$, $\overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{AF_2}$ και $\overrightarrow{BK_2}$ θα είναι η συνισταμένη των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$.

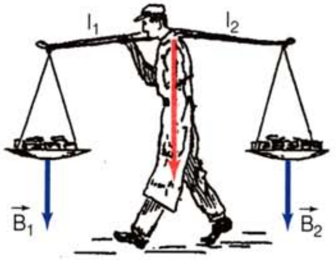
Βρίσκομε τη συνισταμένη $\overrightarrow{A\Sigma_1}$ των $\overrightarrow{AK_1}$ και $\overrightarrow{AF_1}$, καθώς και τη συνισταμένη $\overrightarrow{B\Sigma_2}$ των $\overrightarrow{BK_2}$ και $\overrightarrow{BF_2}$ με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.

Μεταφέρομε τις δυνάμεις $\overrightarrow{A\Sigma_1}$ και $\overrightarrow{B\Sigma_2}$ επάνω στους φορείς τους, μέχρις ότου τμηθούν (σημείο Ο΄) και έχομε:

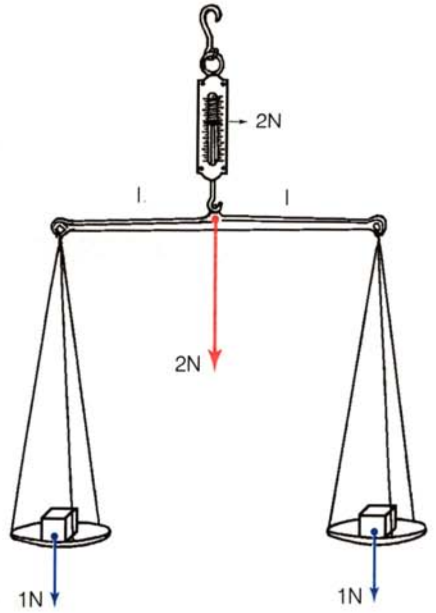
$$\overrightarrow{O'\Sigma_3} = \overrightarrow{A\Sigma_1} \text{ και } \overrightarrow{O'\Sigma_4} = \overrightarrow{B\Sigma_2}$$

Τώρα, συνθέτομε με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου τις $\overrightarrow{O'\Sigma_3}$ και $\overrightarrow{O'\Sigma_4}$ και βρίσκομε τη συνισταμένη $\overrightarrow{O'\Sigma_5}$ αυτών. Ο φορέας της $\overrightarrow{O'\Sigma_5}$ είναι ο φορέας της συνισταμένης των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$.

Τέλος, μεταφέρομε την $\overrightarrow{O'\Sigma_5}$ επάνω στο φορέα της, μέχρις ότου τμήσει την ευθεία του σώματος που διέρχεται από τα σημεία του Α και Β. Αν η τομή του



Σχ. 1.38γ.



Σχ. 1.38δ.

φορέα της $\overrightarrow{O\Sigma_5}$ και της ευθείας που ορίζεται από το σημείο Α και Β είναι το σημείο Ο του σώματος, τότε το σημείο Ο είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$.

Σημείωση:

1) Τα βάρη των δύο δίσκων έχουν συνισταμένη το συνολικό βάρος που σηκώνει ο άνθρωπος (σχ. 1.38γ).

2) Αν βάλομε σε κάθε δίσκο της ζυγαριάς από 1 Ν βάρος, τότε βλέπομε ότι το κανταράκι δείχνει 2 Ν. Συμπεραίνομε ότι η συνισταμένη δύο ίσων και παραλλήλων ομορρόπων δυνάμεων βρίσκεται ακριβώς στη μέση των συνιστωσών και είναι ίση με το άθροισμά τους (σχ. 1.38δ).

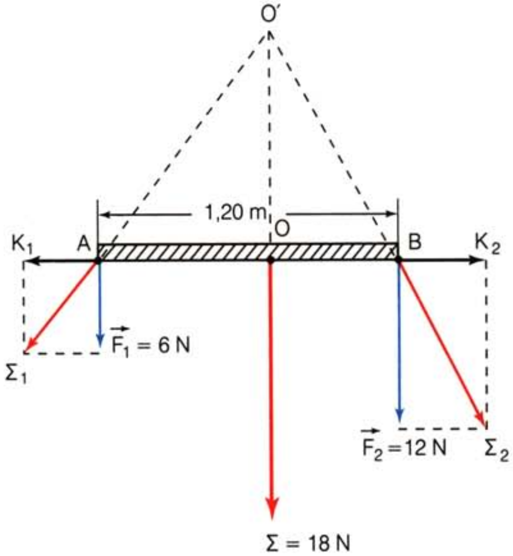
Αριθμητική εφαρμογή:

Στα άκρα μιας ράβδου Α, Β, κυκλικής διατομής, που έχει μήκος 1,20 m επενεργούν δύο ομόρροπες δυνάμεις που έχουν μέτρα $|\overrightarrow{AF_1}| = 6$ N και $|\overrightarrow{BF_2}| = 12$ N (σχ. 1.38ε).

Να βρεθεί και να χαραχθεί η συνισταμένη τους.

Πρώτο βήμα: Χαράσσομε τη ράβδο, για παράδειγμα με κλίμακα $1 \triangleq 30$. Οπότε αυτή θα είναι ίση προς 4 cm.

Δεύτερο βήμα: Χαράσσομε τις δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, για παράδειγμα με κλίμακα 1 mm $\triangleq$ 0,5 N, οπότε η $\overrightarrow{AF_1}$ θα έχει μήκος 12 mm και η $\overrightarrow{BF_2}$ 24 mm.



Σχ. 1.38ε.

Τρίτο βήμα: Χαράσσομε δύο δυνάμεις, για παράδειγμα τις $\overrightarrow{AK_1}$ και $\overrightarrow{BK_2}$, έτσι ώστε να είναι $\overrightarrow{AK_1} = -\overrightarrow{BK_2}$.

Τέταρτο βήμα: Χαράσσομε τις συνισταμένες $\overrightarrow{A\Sigma_1}$ και $\overrightarrow{B\Sigma_2}$.

Πέμπτο βήμα: Προεκτείνομε την $\overrightarrow{A\Sigma_1}$ και $\overrightarrow{B\Sigma_2}$ μέχρις ότου τμηθούν. Έστω ότι αυτές τέμνονται στο σημείο O΄.

Έκτο βήμα: Από το σημείο O΄ φέρομε την παράλληλη προς τις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, η οποία έστω ότι τέμνει τη ράβδο στο σημείο O.

Έβδομο βήμα: Χαράσσομε το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Sigma}$ (το οποίο είναι $\overrightarrow{O\Sigma} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AF_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BF_2}$) έτσι, ώστε το μήκος του να είναι 36 mm.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Sigma}$ παριστάνει τη συνισταμένη των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$ που έχει μέτρο $36 \cdot 0{,}5\ N = 18\ N$, είναι παράλληλη και ομόρροπη με τις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, έχει δε σημείο εφαρμογής το O που είναι σημείο της ράβδου $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$.

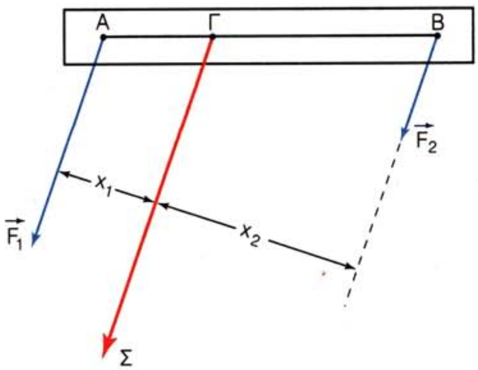
β) Υπολογιστική μέθοδος.

1) Απόδειξη της σχέσεως $|\overrightarrow{\Gamma\Sigma}| = |\overrightarrow{AF_1}| + |\overrightarrow{BF_2}|$ (σχ. 1.38στ).

Για να αποδείξομε τη σχέση $|\overrightarrow{\Gamma\Sigma}| = |\overrightarrow{AF_1}| + |\overrightarrow{BF_2}|$, σκεπτόμαστε ως εξής:

α) Δεχόμαστε ότι η συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ διέρχεται από το σημείο Γ.

β) Εφαρμόζομε το θεώρημα των ροπών για τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{\Sigma}$ ως προς



Σχ. 1.38στ.

τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{\Sigma}$, οπότε έχομε:

$$|\vec{F}_1|\cdot 0+|\vec{F}_2|\cdot(x_1+x_2)=|\vec{\Sigma}|x_1 \qquad (1)$$

γ) Εφαρμόζομε το θεώρημα των ροπών για τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{\Sigma}$ ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο (Β) και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{\Sigma}$, οπότε έχομε:

$$|\vec{F}_1|(x_1+x_2)+|\vec{F}_2|0=|\vec{\Sigma}|x_2 \qquad (2)$$

δ) Προσθέτομε τις (1) και (2) και έχομε:

$$|\vec{F}_1|(x_1+x_2)+|\vec{F}_2|(x_1+x_2)=|\vec{\Sigma}|x_2+|\vec{\Sigma}|x_1$$

$$\text{ή } \left[|\vec{F}_1|+|\vec{F}_2|\right](x_1+x_2)=|\vec{\Sigma}|(x_1+x_2)$$

$$\text{ή } \boxed{|\vec{\Sigma}|=|\vec{F}_1|+|\vec{F}_2|}$$

2) Απόδειξη της σχέσεως: $\dfrac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|}=\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma}$ (σχ. 1.38στ).

Για να αποδείξομε τη σχέση: $\dfrac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}}$, σκεπτόμασθε ως εξής:

α) Δεχόμασθε ότι η συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ διέρχεται από το σημείο Γ.

β) Εφαρμόζομε το θεώρημα των ροπών για τι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{\Sigma}$ ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Γ και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οπότε έχομε:

Ροπή της $\vec{F}_1$ ως προς το Γ+ ροπή της $\vec{F}_2$ ως προς το Γ = Ροπή της $\vec{\Sigma}$ ως προς το Γ.

Δηλαδή: $-|\vec{F}_1|x_1 + |\vec{F}_2|x_2 = \vec{\Sigma}\cdot 0$ και $|\vec{F}_2|x_2 = |\vec{F}_1|x_1$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{x_2}{x_1} \qquad (1)$$

γ) Ισχύει η σχέση: $$\frac{x_2}{x_1} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \qquad (2)$$

δ) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχομε:

$$\boxed{\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}}$$

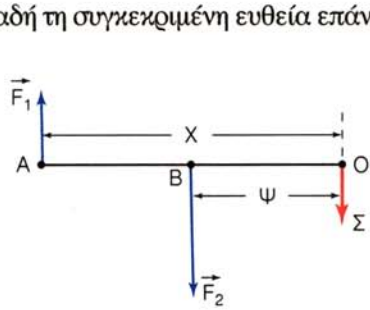
1.39 Σύνθεση δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων που επενεργούν σε δύο σημεία σώματος.

α) Γραφική μέθοδος.

Στα σημεία Α και Β σώματος (σχ. 1.39α) επενεργούν δύο αντίρροπες και άνισες δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, όπου $|\overrightarrow{BF_2}|>|\overrightarrow{AF_1}|$. Ζητούμε να βρούμε τη συνισταμένη των δυνάμεων αυτών.

Για να βρούμε τη συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ των δυνάμεων $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, πρέπει να προσδιορίσομε:

1) Το μέτρο της.
2) Τη διεύθυνσή της.
3) Τη φορά της.
4) Το φορέα της, δηλαδή τη συγκεκριμένη ευθεία επάνω στην οποία βρίσκεται.



Σχ. 1.39α.

5) Το σημείο εφαρμογής της.

Με τη μέθοδο του δυναμοπολυγώνου βρίσκομε ότι:

1) Το μέτρο της $\vec{\Sigma}$ είναι ίσο με τη διαφορά του μέτρου της μικρότερης $\overrightarrow{AF_1}$ από το μέτρο της μεγαλύτερης $\overrightarrow{BF_1}$, δηλαδή:

$$\boxed{|\vec{\Sigma}| = |\overrightarrow{BF_2}| - |\overrightarrow{AF_1}|}$$

2) Η διεύθυνση της $\vec{\Sigma}$ συμπίπτει με τη διεύθυνση των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, δηλαδή η $\vec{\Sigma}$ είναι παράλληλη προς την $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{AF_2}$ ($\vec{\Sigma} \parallel \overrightarrow{AF_1} \parallel \overrightarrow{BF_2}$).

3) Η φορά της $\vec{\Sigma}$ συμπίπτει με τη φορά της $\overrightarrow{BF_2}$, δηλαδή έχει φορά τη φορά της μεγαλύτερης από τις δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$.

Απομένει να προσδιορίσομε το φορέα της $\vec{\Sigma}$, που θα είναι παράλληλος προς τους φορείς των $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_2}$, καθώς και το σημείο εφαρμογής της.

Για να βρούμε το σημείο εφαρμογής της $\vec{\Sigma}$ ενεργούμε ως εξής (σχ. 1.39β):

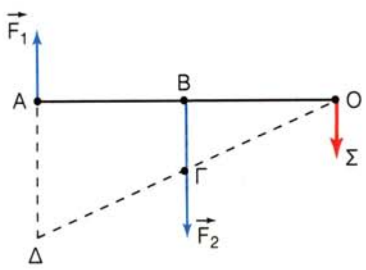
1) Προεκτείνομε τη μικρότερη $\overrightarrow{AF_1}$ και επί της προεκτάσεώς της ορίζομε τμήμα ΑΔ, ίσο με το μήκος της δυνάμεως $\overrightarrow{BF_2}$.

2) Ορίζομε επί της μεγαλύτερης $\overrightarrow{BF_2}$ τμήμα ΒΓ με μήκος ίσο με το μήκος της δυνάμεως $\overrightarrow{AF_1}$.

3) Ενώνομε τα σημεία Δ και Γ και προεκτείνομε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ μέχρις ότου συναντήσει την προέκταση του τμήματος ΑΒ. Έστω ότι η τομή της προεκτάσεως του τμήματος ΑΒ και του τμήματος ΔΓ είναι το σημείο Ο.

Το σημείο Ο είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δυνάμεων $\overrightarrow{AF_1}$ και $\overrightarrow{BF_1}$.

Από το σημείο Ο φέρομε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{O\Sigma}$ παράλληλο προς τις $\overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{BF_2}$ και ομόρροπο προς τη μεγαλύτερη δύναμη $\overrightarrow{BF_2}$ ($|\overrightarrow{BF_2}| > |\overrightarrow{AF_1}|$) και με μέτρο ίσο με τη διαφορά του μέτρου της μικρότερης $\overrightarrow{AF_1}$ από το μέτρο της μεγαλύτερης $\overrightarrow{BF_2}$, δηλαδή $|\overrightarrow{O\Sigma}| = |\overrightarrow{BF_2}| - |\overrightarrow{AF_1}|$.



Σχ. 1.39β.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ παριστάνει τη συνισταμένη των $\overrightarrow{\mathrm{AF_1}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BF_2}}$, δηλαδή αυτήν που ζητούσαμε.

β) Αριθμητική εφαρμογή.

Μία ράβδος ΑΒ που έχει μήκος 5,2 m δέχεται στα άκρα της την επίδραση δύο αντιρρόπων δυνάμεων $P_1 = 200$ N και $P_2 = 400$ N (σχ. 1.39γ). Ζητούμε να υπολογίσομε τη δύναμη που καταπονεί τη ράβδο και να τη χαράξομε.

Λύση.

Δίδονται: Μήκος ράβδου = 5,2 m.
Μέτρο της $P_1 = 200$ N.
Μέτρο της $P_2 = 400$ N.
Οι $\vec{P}_1$ και $\vec{P}_2$: $\vec{P}_1 \uparrow\downarrow \vec{P}_2$.

Ζητείται: $\vec{\Sigma} =;$

Ορίζομε την κλίμακα με την οποία θα χαράξομε τη ράβδο και τις δυνάμεις.

Κλίμακα ράβδου: 1:200.

Κλίμακα δυνάμεων: 1 cm $\triangleq$ 200 N.

Χαράσσομε τη ράβδο με μήκος 2,6 cm (μήκος ράβδου 5,2 m, κλίμακα 1:200 cm).

Χαράσσομε τις δυνάμεις $\vec{P}_1$ με μήκος 1 cm και $\vec{P}_2$ με μήκος 2 cm (μέτρο δυνάμεων $|\vec{P}_1| = 200$ N, $|\vec{P}_2| = 400$ N, κλίμακα 1 cm $\triangleq$ 200 N).

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, βρίσκομε το σημείο Ο το οποίο είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης.

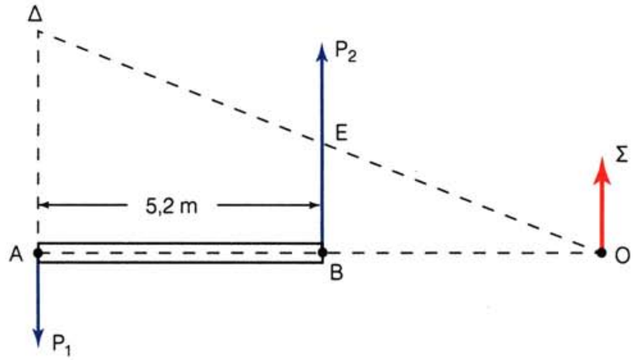
Φέρομε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ έτσι, ώστε:

1) Να είναι παράλληλο προς τις $\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$.

2) Να έχει φορά τη φορά της $\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$ ($\overrightarrow{\mathrm{BP_2}} > \overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$).

3) Να έχει μήκος 1 cm [$(\mathrm{O\Sigma}) = (\mathrm{BP_2}) - (\mathrm{AP_1}) = 2$ cm $-$ 1 cm, $(\mathrm{O\Sigma}) = 1$ cm].

Το $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}}$ παριστάνει τη συνισταμένη των $\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$ και η $\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$ που έχει σημείο εφαρμογής το Ο, είναι παράλληλη με τις $\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$ κι έχει φορά τη φορά της $\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$ και μέτρο 200 N (κλίμακα 1 cm $\triangleq$ 200 N).



Σχ. 1.39γ.

1.40 Ανάλυση δυνάμεως σε δύο συνιστώσες που είναι παράλληλες αυτής και έχουν την ίδια φορά.

Έστω ότι θέλομε να αναλύσομε τη δύναμη $\vec{F}$ σε δύο παράλληλες και ομόρροπες αυτής δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, που να διέρχονται από τα σημεία Α και Β (σχ. 1.40α). Ζητούμε δηλαδή να υπολογίσομε τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ πρέπει να είναι τέτοιες, ώστε η συνισταμένη τους να είναι η $\vec{F}$. Επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad |\vec{F}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| \tag{1}$$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{(\Gamma B)}{(A\Gamma)} \tag{2}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

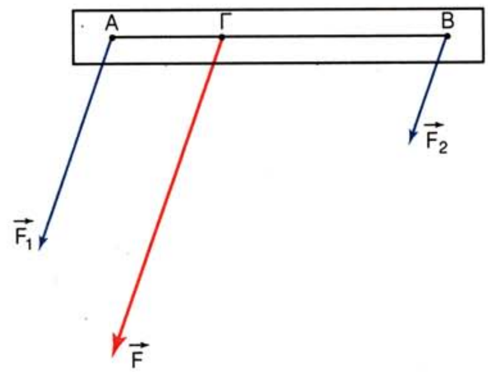
$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2| + |\vec{F}_1|} = \frac{(\Gamma B)}{(A\Gamma) + (\Gamma B)}$$

$$|\vec{F}_1| = \left(|\vec{F}_2| + |\vec{F}_1|\right)\frac{(\Gamma B)}{(AB)} \tag{3}$$

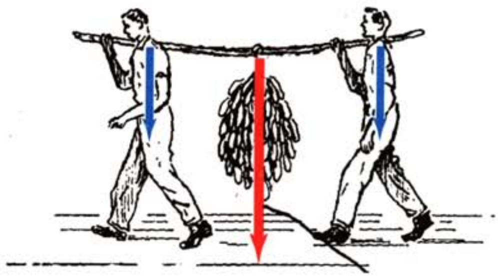
Από τις σχέσεις (1) και (3) βρίσκομε το μέτρο της $\vec{F}_1$, δηλαδή:

$$\boxed{|\vec{F}_1| = |\vec{F}|\frac{(\Gamma B)}{(AB)}} \tag{4}$$

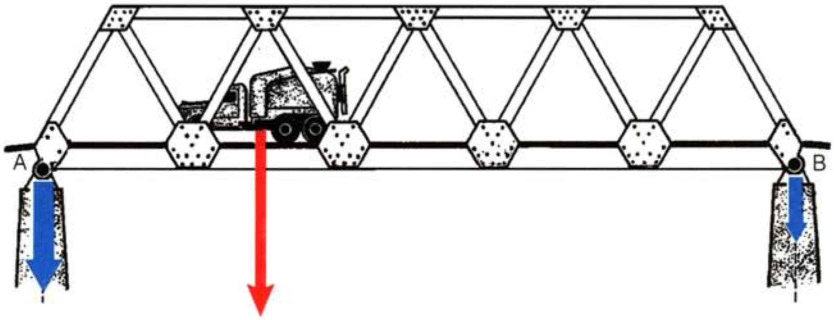
Από τη σχέση (2) προκύπτει:



Σχ. 1.40α.



Σχ. 1.40β.



Σχ. 1.40γ.

$$\frac{|\vec{F}_1|+|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_2|}=\frac{(\Gamma B)+(A\Gamma)}{(A\Gamma)},\quad |\vec{F}_2|=\left(|\vec{F}_1|+|\vec{F}_2|\right)\frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)+(A\Gamma)} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (5) βρίσκομε το μέτρο της $\vec{F}_2$, δηλαδή:

$$\boxed{|\vec{F}_2|=|\vec{F}|\frac{(A\Gamma)}{(AB)}}$$

Σημείωση:

1) Το βάρος του φορτίου αναλύεται σε δύο συνιστώσες παράλληλες: στα βάρη που σηκώνουν οι άνθρωποι (σχ. 1.40β).

2) Καθώς το αυτοκίνητο προχωρεί από τα δεξιά προς τα αριστερά, το δεξιό βάθρο Β δέχεται συνεχώς μικρότερη δύναμη και το αριστερό Α συνεχώς μεγαλύτερη. Όταν το αυτοκίνητο βρίσκεται στη μέση της γέφυρας, το βάρος μοιράζεται εξ ίσου στα δύο βάθρα (σχ. 1.40γ).

1.41 Σύνθεση δύο ομοεπιπέδων αλλά όχι παραλλήλων δυνάμεων.

Έστω ότι σε δύο σημεία Α και Β ενός σώματος ενεργούν δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$

και $\vec{F}_2$, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και οι φορείς τους τέμνονται στο σημείο Γ (σχ. 1.41). Για να υπολογίσομε τη συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, εργαζόμαστε ως εξής:

1) ***Μεταφέρομε*** τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ επάνω στους φορείς τους, ώστε να αποκτήσουν τις θέσεις $\vec{F}_1'$ και $\vec{F}_2'$, δηλαδή να αποκτήσουν το ίδιο σημείο εφαρμογής Γ.

2) ***Υπολογίζομε*** τη συνισταμένη $\vec{\Sigma}'$ των $\vec{F}_1'$ και $\vec{F}_2'$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.

3) ***Μεταθέτομε*** τη $\vec{\Sigma}'$ επάνω στο φορέα της, ώστε να αποκτήσει ως σημείο εφαρμογής της ένα σημείο Δ του σώματος. Έτσι στη θέση αυτή η $\vec{\Sigma}'$, δηλαδή η $\vec{\Sigma}$, είναι η συνισταμένη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Επομένως η συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχει ***τα εξής χαρακτηριστικά:***

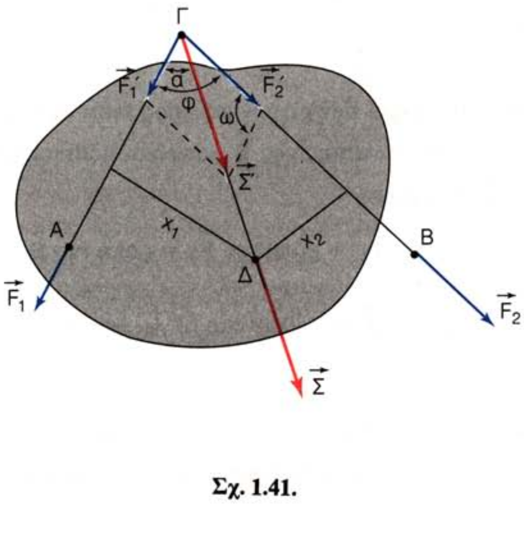
1) Μέτρο, που δίνεται από τη σχέση:

$$|\vec{\Sigma}| = |\vec{\Sigma}'| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \,\text{συνφ}}$$

$$\boxed{|\vec{\Sigma}| = |\vec{\Sigma}'| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \,\text{συνφ}}}$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι φορείς των δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

2) Διεύθυνση, η οποία καθορίζεται από τη σχέση:



Σχ. 1.41.

$$\eta\mu\alpha = \frac{|\vec{F}_2'|}{|\vec{\Sigma}'|}\eta\mu\varphi = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{\Sigma}|}\eta\mu\varphi \qquad (1)$$

όπου α η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ και της δυνάμεως $\vec{F}_1$.

3) Σημείο εφαρμογής ένα από τα σημεία του σώματος, έστω Δ, από το οποίο διέρχεται η διεύθυνση της $\vec{\Sigma}'$, που συμπίπτει με τη διεύθυνση της $\vec{\Sigma}$ και για το οποίο ισχύει υποχρεωτικά η σχέση:

$$|\vec{F}_1|\,x_1 = |\vec{F}_2|x_2 \qquad (2)$$

όπου x_1 και x_2 οι αποστάσεις του σημείου Δ από τους φορείς των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

α) Απόδειξη της σχέσεως (1).

Για το τρίγωνο ΓΣ΄ F_2΄(σχ. 1.41) ισχύει η σχέση:

$$\frac{|\vec{F}_2|}{\eta\mu\alpha} = \frac{|\vec{\Sigma}'|}{\eta\mu\omega} \qquad (3)$$

Επειδή $\omega + \varphi = 180^\circ$ έχομε:

$$\eta\mu\omega = \eta\mu\varphi \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{|\vec{F}_2'|}{\eta\mu\alpha} = \frac{|\vec{\Sigma}'|}{\eta\mu\varphi} \text{ και } \quad \eta\mu\alpha = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{\Sigma}|}\eta\mu\varphi$$

β) Απόδειξη της σχέσεως (2).

Η σχέση (2) προκύπτει ως εξής:

Αν εφαρμόσομε το θεώρημα των ροπών ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο εφαρμογής Δ της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{\Sigma}$, θα έχομε:

$$\text{ροπή της } \vec{F}_1 + \text{ροπή της } \vec{F}_2 = \text{ροπή της } \vec{\Sigma}$$

δηλαδή $\quad |\vec{F}_1|x_1 - |\vec{F}_2|x_2 = |\vec{\Sigma}|0 \text{ και } |\vec{F}_1|x_1 = |\vec{F}_2|x_2$

Παρατήρηση:

Αν σε ένα σώμα ασκούνται περισσότερες από δύο ομοεπίπεδες και όχι παράλληλες δυνάμεις, για να τις συνθέσομε, εργαζόμασθε με τον ίδιο τρόπο που εργαζόμασθε για τη σύνθεση δύο τέτοιων δυνάμεων. Υπολογίζομε τη συνισταμένη δύο δυνάμεων, συνθέτομε τη συνισταμένη τους με την τρίτη δύναμη, ύστερα τη συνισταμένη αυτή με την τέταρτη δύναμη κ.ο.κ., ώσπου να εξαντληθούν όλες οι δυνάμεις.

1.42 Ισορροπία στερεού που μπορεί να κινείται γύρω από ακλόνητο σημείο.

Αν επάνω σε ένα στερεό σώμα, που μπορεί να περιστραφεί προς όλες τις διευθύνσεις γύρω από ακλόνητο σημείο, ενεργούν πολλές δυνάμεις οι οποίες είναι ομοεπίπεδες και επί πλέον το ακλόνητο σημείο βρίσκεται στο επίπεδό τους, τότε η μόνη δυνατή κίνηση του σώματος είναι να περιστραφεί γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το ακλόνητο σημείο.

Στην περίπτωση αυτή η ***αναγκαία και ικανή*** συνθήκη για να ισορροπεί το σώμα είναι η εξής: Το άθροισμα των αλγεβρικών μέτρων των ροπών, ***όλων των δυνάμεων ως προς άξονα, κάθετο στο επίπεδό τους που διέρχεται από το ακλόνητο σημείο πρέπει να είναι μηδέν.***

Σημείωση:

Στη γενικότερη περίπτωση όπου οι δυνάμεις δεν κείνται στο ίδιο επίπεδο, τότε η αναγκαία και ικανή συνθήκη ισορροπίας του σώματος είναι η εξής: ***Το διανυσματικό άθροισμα όλων των ροπών των δυνάμεων ως προς το ακλόνητο σημείο πρέπει να είναι μηδέν.***

1.43 Ισορροπία στερεού που μπορεί να κινείται γύρω από ακλόνητο άξονα.

Αν επάνω σε στερεό σώμα, που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα (όχι όμως και να ολισθαίνει κατά μήκος του άξονα) ενεργούν οπωσδήποτε πολλές δυνάμεις, τότε αναγκαία και ικανή συνθήκη ισορροπίας του είναι η εξής: ***Το άθροισμα των αλγεβρικών μέτρων των ροπών όλων των δυνάμεων ως προς τον ακλόνητο άξονα να είναι μηδέν.***

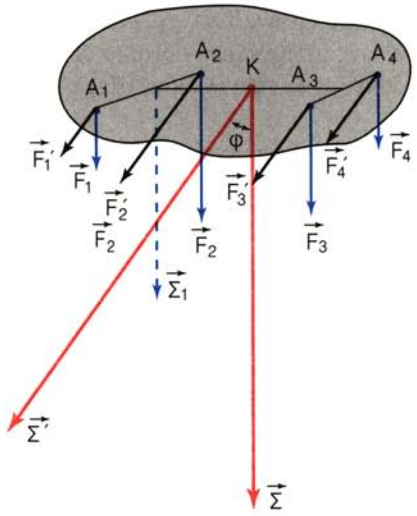
1.44 Σύνθεση πολλών παραλλήλων δυνάμεων.

Αν σε ένα στερεό σώμα ενεργούν πολλές παράλληλες και ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4 ... \vec{F}_\nu$, τότε η συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$ (σχ. 1.44) έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Είναι παράλληλη προς τις συνιστώσες.
2) Είναι ομόρροπη προς τις συνιστώσες.
3) Το μέτρο της είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών:

$$|\vec{\Sigma}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| + |\vec{F}_3| + |\vec{F}_4| + ... + |\vec{F}_\nu|$$

4) Σημείο εφαρμογής της είναι ένα ορισμένο σημείο Κ του σώματος. Για να υπολογίσομε τη συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ πολλών παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4 ... \vec{F}_\nu$, συνθέτομε δύο από αυτές τις δυνάμεις, έστω τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, και υπολογίζομε τη συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}_1$. Έπειτα συνθέτομε τη συνισταμένη $\vec{\Sigma}_1$ με τη δύναμη $\vec{F}_3$ κατά τον ίδιο τρόπο κ.ο.κ.



Σχ. 1.44.

1.45 Θεώρημα του κέντρου παραλλήλων δυνάμεων.

Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ πολλών παραλλήλων δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4 ... \vec{F}_\nu$, (σχ. 1.44) που ενεργούν σε ένα σώμα είναι ένα ορισμένο σημείο Κ του σώματος, το οποίο ονομάζεται ***κέντρο των παραλλήλων αυτών δυνάμεων***. Για το κέντρο των παραλλήλων δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σώμα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα του κέντρου των παραλλήλων δυνάμεων:

Το κέντρο των παραλλήλων δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι ένα ορισμένο σημείο του σώματος αυτού, το οποίο παραμένει το ίδιο, αν όλες οι δυνάμεις στραφούν γύρω από το σημείο εφαρμογής τους, χωρίς όμως να μεταβληθούν τα μέτρα τους και χωρίς να πάψουν να είναι παράλληλες. Επίσης, το κέντρο των παραλλήλων δυνάμεων παραμένει το ίδιο και όταν τα μέτρα των δυνάμεων αυτών πολλαπλασιασθούν με τον ίδιο αριθμό.

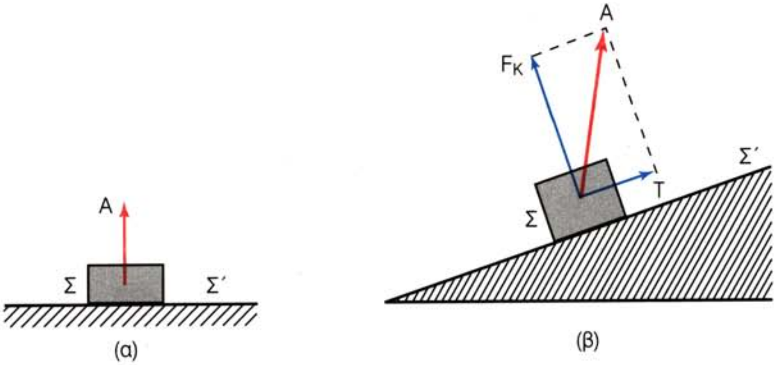
Αν τις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4 ... \vec{F}_\nu$, που έχουν συνισταμένη τη $\vec{\Sigma}$ τις στρέψομε κατά μία οποιαδήποτε γωνία φ, τότε οι δυνάμεις αυτές έρχονται στις θέσεις $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \vec{F}_3', \vec{F}_4' ... \vec{F}_\nu'$, και η συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}'$: 1) Σχηματίζει με τη $\vec{\Sigma}$ γωνία φ, 2) διέρχεται από το Κ από όπου διέρχονταν η $\vec{\Sigma}$ και 3) έχει μέτρο όσο και η $\vec{\Sigma}$. Στην ουσία δηλαδή η $\vec{\Sigma}'$ είναι η $\vec{\Sigma}$ στραμμένη κατά γωνία φ, όσο δηλαδή στράφηκαν οι συνιστώσες της.

Σημείωση:

Το θεώρημα του κέντρου των παραλλήλων δυνάμεων ονομάζεται και θεώρημα του Καντ για τις παράλληλες δυνάμεις.

1.45.1 Τριβή.

Τριβή είναι το φαινόμενο κατά το οποίο όταν δύο σώματα βρίσκονται σε επαφή (σε ηρεμία ή σε κίνηση το ένα ως προς το άλλο) και εξ αιτίας αυτής (δηλ. της επαφής)



Σχ. 1.45α.

ασκεί το ένα στο άλλο δυνάμεις που εμποδίζουν τη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων.

Γενικά, όταν σώμα Σ βρίσκεται σε επαφή με σώμα Σ΄, τότε το Σ΄ ασκεί στο Σ εξ αιτίας της επαφής τους μια δύναμη $\vec{A}$ [σχ. 1.45α(α), (β)]. Βέβαια και το Σ ασκεί στο Σ΄ μία δύναμη $\vec{A}'$ ($\vec{A}' = -\vec{A}$) την οποία εδώ δεν τη σημειώνομε.

Η δύναμη αυτή ($\vec{A}$) σε ορισμένες περιπτώσεις είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής των σωμάτων Σ, Σ΄ [σχ. 1.45α(α)], ενώ σε άλλες πλάγια σε αυτήν [σχ. 1.45α(β)]. Η δύναμη $\vec{A}$ λέγεται συνήθως δύναμη αντιδράσεως.

Η δύναμη $\vec{A}$ (όταν βέβαια είναι πλάγια) αναλύεται σε δύο συνιστώσες τις εξής [σχ. 1.45α, (β)]:

1) Μία κάθετη $\vec{F}_K$ στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων που ονομάζεται κάθετη αντίδραση ή πίεση εδράσεως ή δύναμη στηρίξεως ή συμπιεστική δύναμη (γιατί συμπιέζει τις τριβόμενες επιφάνειες).

2) Μία παράλληλη $\vec{T}$ στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων που ονομάζεται γενικώς δύναμη τριβής.

Σημείωση:

Η δύναμη τριβής ονομάζεται και αντίσταση τριβής, γιατί η κατεύθυνσή της είναι τέτοια, ώστε να αντιστέκεται στη σχετική κίνηση του Σ ως προς το Σ΄.

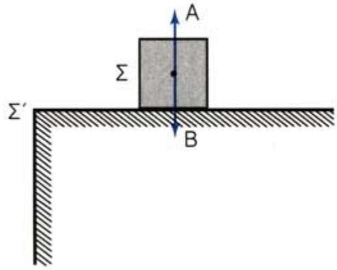
Προσοχή:

1) Όταν η $\vec{A}$ είναι κάθετη [σχ. 1.45α(α)] στην επιφάνεια επαφής των δυο σωμάτων, τότε $\vec{T} = 0$, δηλαδή δεν εμφανίζεται δύναμη τριβής.

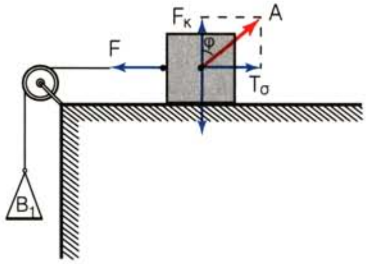
2) Όταν σώμα Σ βρίσκεται σε επαφή με άλλο σώμα Σ΄ και θεωρούμε ότι δεν εμφανίζεται τριβή, τότε η δύναμη αντιδράσεως είναι κάθετη στη επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων.

1.45.2 Στατική τριβή – Οριακή τριβή.

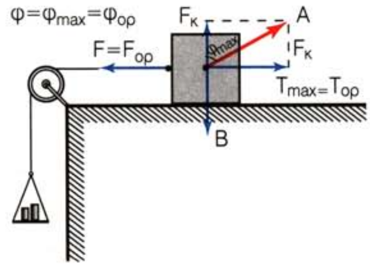
1) Έστω ότι ένα σώμα Σ ισορροπεί επάνω στην οριζόντια επιφάνεια Σ΄ μιας τράπεζας (σχ. 1.45β). Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις:



Σχ. 1.45β.



Σχ. 1.45γ.



Σχ. 1.45δ.

α) Το βάρος του $\vec{B}$ και β) η αντίδραση $\vec{A}$ από την επιφάνεια της τράπεζας. Επειδή το σώμα ισορροπεί, οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{A}$ θα είναι αντίθετες ($\vec{B} = -\vec{A}$). Επομένως η $\vec{A}$ θα είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής των σωμάτων.

2) Συνδέομε το σώμα με ένα νήμα που διέρχεται από τροχαλία και στο άκρο του δένομε ένα δίσκο (σχ. 1.45γ). Όταν στο δίσκο βάλομε ένα μικρό βάρος $\vec{B}_1$ το σώμα δεν μετακινείται. Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ $[|\vec{B}_1| = |\vec{F}|]$ που ασκείται στο σώμα δεν το μετακινεί, συμπεραίνομε ότι η δύναμη $\vec{A}$ έπαψε να είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής του σώματος Σ και της τράπεζας και ότι θα σχηματίζει με τη κάθετη αυτή γωνία φ.

Η δύναμη $\vec{A}$ αναλύεται, στην περίπτωση αυτή, σε δύο συνιστώσες, την $\vec{T}_\sigma$ και την $\vec{F}_K$. Από τις δύο αυτές συνιστώσες η $\vec{T}_\sigma$ έχει διεύθυνση παράλληλη στο επίπεδο επαφής, αντιτίθεται στην έναρξη της κινήσεως του σώματος και ονομάζεται δύναμη στατικής τριβής και το φαινόμενο αντίστοιχα στατική τριβή.

3) Αν συνεχίσομε σταδιακά (βάζοντας στο δίσκο μεγαλύτερα βάρη) την αύξηση της δυνάμεως $\vec{F}$ που τείνει να κινήσει το σώμα (σχ. 1.45δ) θα αυξάνει και η γωνία φ οπότε θα αυξάνεται και η στατική τριβή (T_σ). Όταν η δύναμη $\vec{F}$ λάβει την τιμή $\vec{F}_{o\varrho}$ που μόλις μπορεί να κινήσει το σώμα, τότε η γωνία φ θα λάβει μέγιστη τιμή φ_{max}, οπότε και η δύναμη της στατικής τριβής $\vec{T}_\sigma$ θα λάβει μέγιστη τιμή $\vec{T}_m$ ($\vec{T}_\sigma = \vec{T}_m$).

Προσοχή:

Όταν η δύναμη της στατικής τριβής έχει τη μέγιστη τιμή ($\vec{T}_\sigma = \vec{T}_{max}$), τότε αυτή ονομάζεται δύναμη οριακής τριβής $\vec{T}_{o\varrho}$ ($\vec{T}_{max} = \vec{T}_{o\varrho}$) και το φαινόμενο αντίστοιχα οριακή τριβή.

Γενικότερα ισχύουν τα εξής:

1) Όταν λέμε ότι επάνω στο σώμα Σ ασκείται δύναμη στατικής τριβής από το Σ΄ με το οποίο βρίσκεται σε επαφή, εννοούμε τη δύναμη τριβής που ασκεί το Σ΄ στο Σ, όταν και εφ' όσον επάνω στο Σ ενεργεί μία δύναμη που τείνει να το κινήσει, ενώ αυτό παραμένει ακίνητο ως προς το Σ΄.

2) Η στατική τριβή T_σ έχει διεύθυνση παράλληλη προς την επιφάνεια των δύο σωμάτων επαφής και φορά αντίθετη προς τη δύναμη που τείνει να κινήσει το σώμα Σ ως προς το Σ΄.

3) Η στατική τριβή T_σ που εμφανίζεται μεταξύ δύο ορισμένων επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή δεν έχει ορισμένη τιμή ($0 \leq T_\sigma \leq T_{o\rho}$).

4) Η στατική τριβή εμποδίζει την έναρξη της κινήσεως ενός σώματος ως προς ένα άλλο με το οποίο βρίσκεται σε επαφή.

1.45.3 Τριβή ολισθήσεως.

Δύναμη τριβής ολισθήσεως που ασκείται στο σώμα Σ από το Σ΄ επάνω στο οποίο ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς αυτό, ονομάζεται η δύναμη $\vec{T}_{o\lambda}$ (σχ. 1.45ε) που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Διεύθυνση παράλληλη προς την επιφάνεια επαφής των σωμάτων Σ και Σ΄.

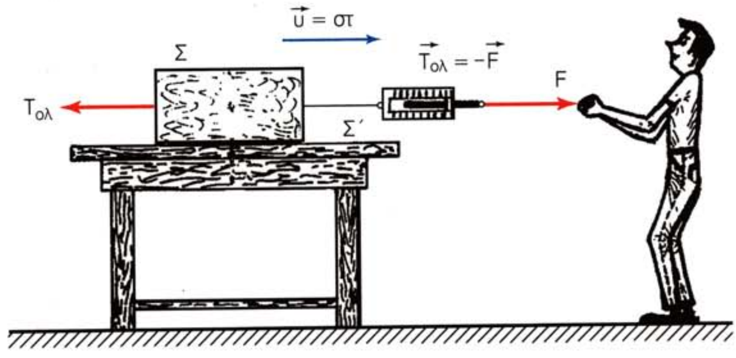
2) Φορά αντίθετη προς τη φορά κινήσεως του Σ ως προς το Σ΄.

3) Μέτρο ίσο με το μέτρο της δυνάμεως $\vec{F}$ που πρέπει να ασκήσομε στο σώμα Σ παράλληλα προς την επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων για να κινηθεί αυτό με σταθερή ταχύτητα ως προς το Σ΄.

Αν το δυναμόμετρο του σχήματος 1.45ε δείχνει F = 10 p όταν το σώμα Σ ολισθαίνει επάνω στο Σ΄ με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτό, τότε είναι:

$$\vec{T}_{o\lambda} = 10\ \text{p}$$

Αν το σώμα Σ ηρεμεί ως προς το Σ΄ και αρχίζομε να το τραβάμε με το δυναμόμετρο, σταδιακά με μεγαλύτερη δύναμη, τότε μόλις επίκειται εκκίνηση του σώματος Σ, το δυναμόμετρο δείχνει δύναμη F΄ = 12 p. Συνεπώς $\vec{T}_{o\rho} = 12$ p. Άρα $\vec{T}_{o\lambda} < \vec{T}_{o\rho}$.



Σχ. 1.45ε.

Γενικά η τριβή ολισθήσεως $T_{ολ}$ είναι μικρότερη από την οριακή τριβή ($T_{ολ}<T_{ορ}$).

Συντελεστές της οριακής τριβής και της τριβής ολισθήσεως.

Βρίσκεται πειραματικά ότι τόσο η οριακή τριβή ($T_{ορ}$) όσο και η τριβή ολισθήσεως ($T_{ολ}$) αυξάνονται σχεδόν ανάλογα με την κάθετη αντίδραση $\vec{F}_K$ που συμπιέζει μεταξύ τους τις δύο επιφάνειες επαφής των σωμάτων.

Συντελεστές οριακής τριβής ($n_{ορ}$) ονομάζεται ο λόγος του μέτρου της οριακής τριβής ($\vec{T}_{ορ}$) προς το μέτρο της κάθετης αντιδράσεως ($\vec{F}_K$) που συμπιέζει μεταξύ τους τις δύο επιφάνειες επαφής (σχ. 1.45δ). Δηλαδή:

$$n_{ορ} = \frac{|\vec{T}_{ορ}|}{|\vec{F}_K|} \qquad (1)$$

Συντελεστές τριβής ολισθήσεως ($n_{ολ}$) ονομάζεται ο λόγος του μέτρου της τριβής ολισθήσεως ($\vec{T}_{ολ}$) προς το μέτρο της κάθετης αντιδράσεως ($\vec{F}_K$) που συμπιέζει μεταξύ τους τις δύο επιφάνειες επαφής (σχ. 1.45στ). Δηλαδή:

$$n_{ολ} = \frac{|\vec{T}_{ολ}|}{|\vec{F}_K|} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$|\vec{T}_{ορ}| = n_{ορ}|\vec{F}_K| \qquad (3)$$

και

$$|\vec{T}_{ολ}| = n_{ολ}|\vec{F}_K| \qquad (4)$$

Προσοχή:

1) Ο συντελεστής της οριακής τριβής είναι λίγο μεγαλύτερος από το συντελεστή της τριβής ολισθήσεως ($n_{ορ} > n_{ολ}$). Συνήθως όμως τους θεωρούμε ίσους μεταξύ τους, οπότε θεωρούμε ίσες μεταξύ τους την οριακή τριβή ($\vec{T}_{ορ}$) και την τριβή ολισθήσεως ($\vec{T}_{ολ}$).

2) Οι συντελεστές τριβής ($n_{ορ}$ και $n_{ολ}$) είναι καθαροί αριθμοί αφού είναι λόγοι δύο μέτρων.

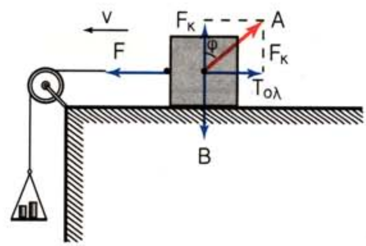
3) Οι συντελεστές τριβής εξαρτώνται από τη φύση των εφαπτομένων επιφανειών των δύο σωμάτων και από το βαθμό λειάνσεως των επιφανειών αυτών.

4) Στην πράξη συνήθως οι συντελεστές τριβής για ένα ζευγάρι επιφανειών είναι σταθεροί.

Παρατήρηση:

Ο συντελεστής της τριβής ολισθήσεως για ταχύτητες μέχρι 5 m/sec είναι ανεξάρτητος της ταχύτητας. Για μεγαλύτερες όμως ταχύτητες ελαττώνεται.

Γωνία στατικής τριβής $\varphi_{max} = \varphi_{ορ}$ (σχ. 1.45δ) ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει η



Σχ. 1.45στ.

αντίδραση $\vec{A}$ με την κάθετη αντίδραση $\vec{F}_K$, όταν η στατική τριβή $T_σ$ λάβει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή όταν $T_σ = T_{max} = T_{ορ}$.

Από το τρίγωνο των δυνάμεων $\vec{F}_K$, $\vec{T}_m$ και $\vec{A}$ (σχ. 1.45δ) προκύπτει:

$$T_{max} = F_K \, εφφ_{max} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) παίρνομε:

$$\boxed{εφφ_{max} = n_{ορ}} \qquad (6)$$

όπου $φ_{max} = φ_{ορ}$ γωνία στατικής τριβής.

Γωνία τριβής ολισθήσεως $φ_{ολ}$ (σχ. 1.45στ) ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει η αντίδραση $\vec{A}$ με την κάθετη αντίδραση $\vec{F}_K$, όταν το σώμα ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα ως προς το άλλο σώμα.

Από το τρίγωνο που σχηματίζουν οι δυνάμεις $\vec{F}_K$, $\vec{T}_{ολ}$ και $\vec{A}$ (σχ. 1.45στ) προκύπτει:

$$T_{ολ} = F_K \, εφφ_{ολ} \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (4) και (7) παίρνομε:

$$\boxed{εφφ_{ολ} = n_{ολ}}$$

όπου $φ_{ολ}$ η γωνία τριβής ολισθήσεως.

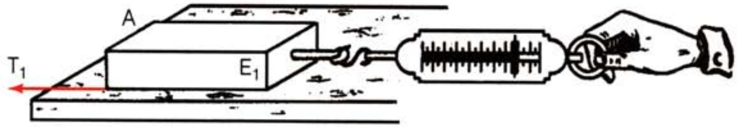
1.45.4 Νόμοι της τριβής ολισθήσεως.

1) Η δύναμη της τριβής ολισθήσεως είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής των δύο σωμάτων.

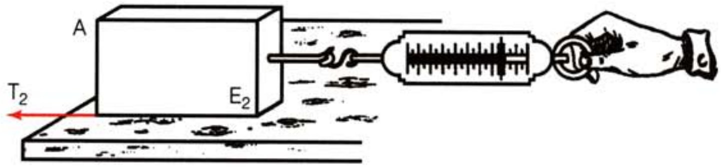
Πειραματική απόδειξη.

Επάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι τοποθετούμε το σώμα Α (σχ. 1.45ζ), που έχει σχήμα παραλληλεπιπέδου, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εφάπτεται με το τραπέζι η πλευρά του E_1. Με ένα δυναμόμετρο σύρομε το σώμα Α, ώστε να ολισθήσει επάνω στο τραπέζι με ταχύτητα σταθερή. Η ένδειξη τότε του δυναμόμετρου μάς δίνει το μέτρο της δυνάμεως της τριβής ολισθήσεως $\vec{T}_1$, την οποία ασκεί το τραπέζι στο σώμα Α. Έστω ότι αυτή είναι $T_1 = 5$ p.

Αν τώρα επάνω στο ίδιο τραπέζι τοποθετήσομε το σώμα Α (σχ. 1.45η), έτσι ώστε



Σχ. 1.45ζ.



Σχ. 1.45η.

να εφάπτεται με το τραπέζι η πλευρά E_2 και έπειτα σύρομε το σώμα με ένα δυναμόμετρο ώστε να ολισθήσει με ταχύτητα σταθερή, ή ένδειξη του δυναμόμετρου θα μας δώσει τότε το μέτρο της δυνάμεως της τριβής ολισθήσεως $\vec{T}_2$, την οποία ασκεί το τραπέζι στο σώμα A.

Διαπιστώνομε τότε ότι η δύναμη της τριβής ολισθήσεως $\vec{T}_2$ είναι ίση με την $\vec{T}_1$ του προηγούμενου παραδείγματος, δηλαδή:

$$T_2 = T_1 = 5 \text{ p}$$

Έτσι αποδεικνύεται ότι η δύναμη της τριβής ολισθήσεως είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας συνεπαφής των δύο σωμάτων.

2) Το μέτρο της δυνάμεως τριβής ολισθήσεως $\vec{T}_{ολ}$ είναι ανάλογο του μέτρου της καθέτου αντιδράσεως $\vec{F}_K$, που συμπιέζει μεταξύ τους τις δύο επιφάνειες των σωμάτων οι οποίες βρίσκονται σε επαφή.

3) Η δύναμη της τριβής ολισθήσεως είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα με την οποία κινείται το ένα σώμα ως προς το άλλο, εφ' όσον η ταχύτητα δεν υπερβαίνει ορισμένο όριο.

Σημείωση:

Συνήθως μέχρι την ταχύτητα 5 m/sec η τριβή ολισθήσεως είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα. Για μεγαλύτερες ταχύτητες, η τριβή ολισθήσεως ελαττώνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα.

4) Η δύναμη τριβής ολισθήσεως εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που τρίβονται, καθώς και από το βαθμό λειάνσεώς τους.

Η μαθηματική διατύπωση των νόμων της τριβής ολισθήσεως είναι:

$$\boxed{\left|\vec{T}_{ολ}\right| = n_{ολ}\left|\vec{F}_K\right|}$$

Παρατήρηση:

Η δύναμη της οριακής τριβής (δηλαδή η οριακή τριβή όπως λέμε εν συντομία) διέπεται από τους ίδιους νόμους που διέπεται και η τριβή ολισθήσεως.

Σχ. 1.45θ.

Η μαθηματική διατύπωση των νόμων της οριακής τριβής είναι:

$$\boxed{\left|\vec{T}_{o\varrho}\right| = n_{o\varrho}\left|\vec{F}_K\right|}$$

1.45.5 Φύση της τριβής (προέλευση της τριβής).

Οι επιφάνειες των σωμάτων όσο και αν φαίνονται λείες, έχουν εσοχές και εξοχές. Γενικά εξαιτίας αυτών των εσοχών και εξοχών το εμβαδόν (Ε) της επιφάνειας επαφής δύο σωμάτων είναι μικρό. Επομένως τα τμήματα των επιφανειών που έρχονται πραγματικά σε επαφή υφίστανται μεγάλες συμπιέσεις ($P = \frac{F_K}{E}$). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα μόρια των τμημάτων των επιφανειών που έρχονται σε επαφή να πλησιάζουν πολύ μεταξύ τους, να αλληλοέλκονται πολύ «δυνατά» και να «κολλάνε». Δηλαδή τα τμήματα των επιφανειών που έρχονται σε επαφή παθαίνουν ένα είδος ***«ψυχράς συγκολλήσεως»***. Κατά συνέπεια, για να κινηθούν σχετικά οι δύο επιφάνειες των σωμάτων που είναι σε επαφή, θα πρέπει πρώτα να σπάσουν αυτές οι «συγκολλήσεις». Αυτό ακριβώς δικαιολογεί την ύπαρξη της τριβής.

Προσοχή:

1) Η τριβή είναι ανεξάρτητη του εμβαδού της επιφάνειας επαφής των δύο σωμάτων. Πώς δικαιολογείται αυτό;

2) Σε ποια αίτια οφείλεται η φθορά των τριβομένων επιφανειών;

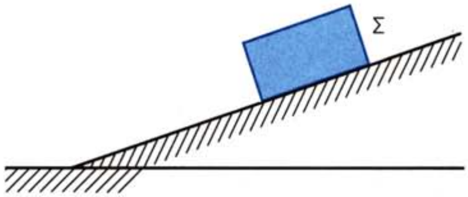
3) Πώς δικαιολογείτε τη χρήση των λιπαντικών;

4) Πώς κινούνται και πώς σταματούν τα αυτοκίνητα οχήματα (σχ. 1.45θ);

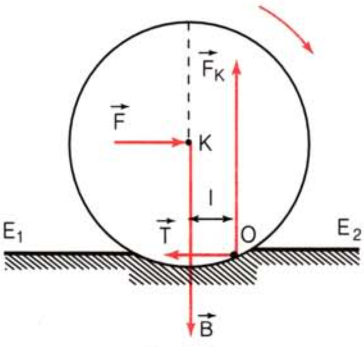
5) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, όταν αυτό ισορροπεί επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (σχ. 1.45ι).

1.45.6 Τριβή κυλίσεως.

Ο κύλινδρος Κ κυλιέται επάνω σε οριζόντιο επίπεδο E_1E_2 (σχ. 1.45ια). Όταν ο κύλινδρος κυλιέται επάνω στο επίπεδο E_1E_2, η επαφή του με αυτό δεν πραγματοποιείται κατά μία γενέτειρά του αλλά διά τμήματος της επιφανείας του (σχ. 1.45ια). Το αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού είναι μία μικρή μετάθεση *l* του στιγμιαίου άξονα περιστροφής Ο του κυλίνδρου. Η μετάθεση αυτή έχει ως συνέπεια η κάθετη συνιστώσα $\vec{F}_K$ της αντιδράσεως του επιπέδου και το βάρος $\vec{B}$ του κυλίνδρου να αποτελούν ζεύγος δυνάμεων το οποίο αντιτίθεται στην κύλιση του κυλίνδρου. Η ροπή $\vec{M}$ αυτού



Σχ. 1.45ι.



Σχ. 1.45ια.

του ζεύγους ονομάζεται ***τριβή κυλίσεως*** και έχει μέτρο το οποίο παρέχεται από τη σχέση:

$$\boxed{M = l \cdot F_K = l \cdot B} \tag{1}$$

Η l καλείται συντελεστής τριβής κυλίσεως, είναι μήκος και εξαρτάται από την πλαστικότητα των υλικών του κυλίνδρου και του επιπέδου.

Αν εφαρμόσομε μία δύναμη $\vec{F}$ στο κέντρο βάρους του κυλίνδρου τέτοια ώστε ο κύλινδρος να κυλιέται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$F - T = 0 \tag{2}$$

$$F_K - B = 0 \tag{3}$$

και

$$F \cdot r - B \cdot l = 0 \tag{4}$$

όπου r είναι η ακτίνα του κυλίνδρου η οποία λαμβάνεται κατά προσέγγιση ίση με την απόσταση του στιγμιαίου άξονα περιστροφής και της δυνάμεως $\vec{F}$.

Από τη σχέση (4) λαμβάνομε τη σχέση:

$$\boxed{F = \frac{l}{r} B = \frac{l}{r} F_K} \tag{5}$$

Από τη σχέση (5) συνάγεται ότι η δύναμη F που απαιτείται για να κινηθεί ο κύλινδρος ισοταχώς, είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας του. Ο λόγος $\frac{l}{r} = \lambda$ καλείται συντελεστής έλξεως και εξαρτάται από την πλαστικότητα των υλικών και την ακτίνα του κυλίνδρου.

Οι τιμές τις οποίες έχει για τα διάφορα ζεύγη υλικών είναι συνήθως της τάξεως των χιλιοστών, ενώ ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως (n) για τα ίδια ζεύγη υλικών έχει τιμές της τάξεων των δεκάτων.

Από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι η δύναμη που απαιτείται για την κίνηση ενός σώματος επάνω σε τροχούς θα είναι κατά εκατοντάδες φορές μικρότερη από εκείνη που απαιτείται για την ολίσθηση του σώματος αυτού.

Σημείωση:

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι η δύναμη έλξεως ενός κυλίνδρου (ή τροχού), δηλαδή η δύναμη που πρέπει να ασκούμε στον άξονα του κυλίνδρου (ή του τροχού) για να κυλίεται ισοταχώς επάνω σε ένα υποστήριγμα.

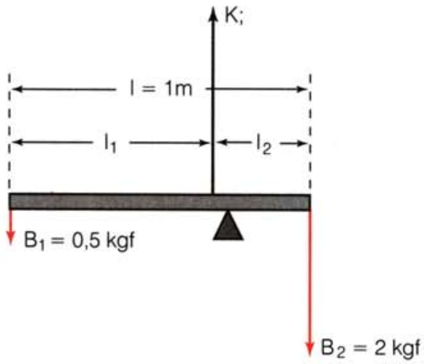
Σημείωση:

Στις ιππήλατες άμαξες χρησιμοποιούνται τροχοί μεγάλης ακτίνας. Πώς δικαιολογείται αυτό;

1.46 Ερωτήσεις στατικής.

1. Τι ονομάζομε φυσικά μεγέθη;
2. Τι ονομάζομε αλγεβρικό μέτρο ενός φυσικού μεγέθους;
3. Τι ονομάζομε μέτρο ενός φυσικού μεγέθους;
4. Ποια φυσικά μεγέθη ονομάζονται μονόμετρα (ή βαθμωτά) και ποια διανυσματικά;
5. Μπορεί ένα βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος να έχει αρνητική τιμή;
6. Τι είναι φυσικός νόμος και τι εκφράζουν οι μαθηματικές εξισώσεις (συναρτήσεις - σχέσεις);
7. Δύο ομάδες αντρών τραβούν ένα σχοινί. Να εξετάσετε αν μπορούν να διατηρούν το σχοινί οριζόντιο, όταν στο μέσο του σχοινιού κρεμάσομε ένα βάρος 10 N.
8. Γιατί η κίνηση στο μονόζυγο είναι ευκολότερη, όταν τα χέρια είναι παράλληλα;
9. Όταν ένα άλογο έλκει ένα κάρο, ασκεί σε αυτό μία δύναμη $\vec{F}$. Σύμφωνα με την αρχή δράσεως - αντιδράσεως και το κάρο ασκεί στο άλογο μια δύναμη $\vec{F'}$. Θα κινηθεί το κάρο; Γιατί;
10. Να εξηγηθεί γιατί, όταν θέλομε να βγάλομε ένα αυτοκίνητο που κόλλησε στη λάσπη, δένομε ένα σχοινί στο αυτοκίνητο και σε ένα δένδρο, έτσι ώστε να είναι τεντωμένο και στη συνέχεια το τραβούμε (εγκάρσια) από το μέσο του.
11. Πότε η ροπή μίας δυνάμεως ως προς άξονα είναι μηδέν;
12. Μπορεί το μέτρο της συνισταμένης δύο δυνάμεων να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μέτρων τους;
13. Αν η ροπή μιας δυνάμεως ως προς κάποιο σημείο είναι μηδέν, θα είναι και η δύναμη μηδέν;
14. Κατά πόσο θα αλλάξει η ροπή μιας δυνάμεως ως προς κάποιο σημείο αν η δύναμη κινηθεί (ολισθήσει) επάνω στο φορέα της;

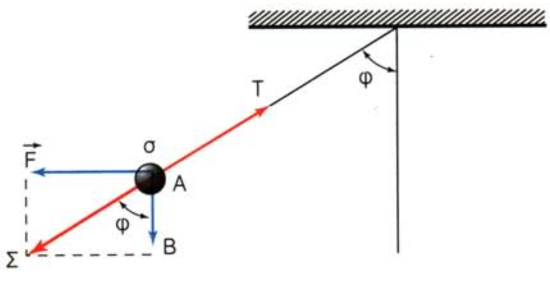
15. Τραβήξτε ή σπρώξτε μία μη συρταρωτή πόρτα από τις λαβές με δύναμη παράλληλη προς το επίπεδο της πόρτας. Γιατί δεν κλείνει η πόρτα;
16. Ένα ζεύγος δυνάμεων μπορούμε να το αντικαταστήσομε από μία δύναμη;
17. Γιατί στα μεγάλα φορτηγά αυτοκίνητα το τιμόνι έχει μεγάλη ακτίνα;
18. Σας δίνουν 10 χρυσές λίρες και σας λένε ότι μία από αυτές είναι ελαφρότερη από τις άλλες (κάλπικη), αλλά δεν ξεχωρίζει αμέσως. Πώς θα μπορέσετε με ένα ζυγό με δίσκους να ξεχωρίσετε την κάλπικη λίρα με τρεις το πολύ ζυγίσεις;
19. Στα άκρα μιας ράβδου (αβαρούς) (σχ. 1.46) μήκους l = 1 m, εξαρτώνται δύο βάρη $|\vec{B}_1|$ = 0,5 kgf και $|\vec{B}_2|$ = 2 kgf. α) Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ράβδος, για να ισορροπεί οριζοντίως; β) Ποια είναι δύναμη που ασκείται από το υποστήριγμα;
20. Επί της περιφέρειας τροχού ακτίνας 0,5 m και κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης, ασκείται δύναμη 3 kgf. Ποια πρόσθετη ροπή πρέπει να ασκηθεί επί του τροχού για να ισορροπεί;
21. Τραπέζι ομογενές, βάρους 8 kgf, στηρίζεται σε τέσσερα πόδια επί οριζοντίου επιπέδου. α) Να σχεδιασθούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται επάνω στο τραπέζι. β) Να υπολογισθούν αυτές. γ) Να σχεδιασθούν οι δυνάμεις τις οποίες ασκεί το τραπέζι επάνω στο επίπεδο όπου στηρίζεται.
22. Ένας γίγαντας έλκει ένα νάνο με σχοινί. Να βρεθεί ποιος ασκεί στον άλλο μεγαλύτερη δύναμη.
23. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι συνθέτομε δύο δυνάμεις;
24. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι αναλύομε μία δύναμη σε δύο άλλες δυνάμεις, των οποίων δίδονται οι διευθύνσεις;
25. Ποια είναι η συνθήκη ισορροπίας υλικού σημείου και ποιες του στερεού σώματος;
26. Τι εννοούμε όταν λέμε ροπή μιας δυνάμεως ως προς το σημείο και τι ως προς άξονα;
27. Τι ονομάζομε ζεύγος δυνάμεων και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του;
28. Ποια είναι η διατύπωση του θεωρήματος των ροπών για δυνάμεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο;



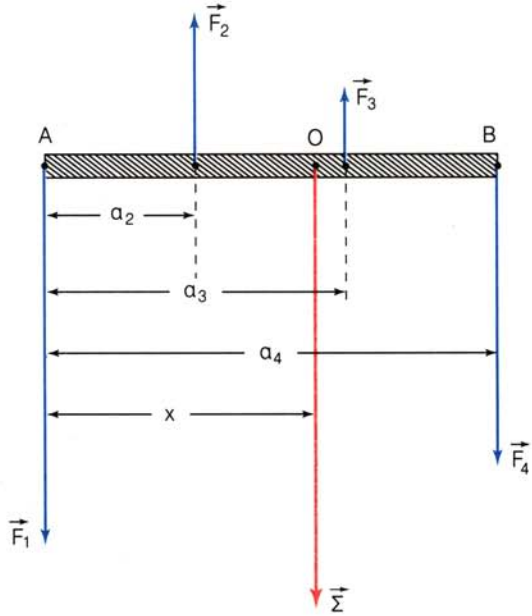
Σχ. 1.46.

1.47 Ασκήσεις στατικής.

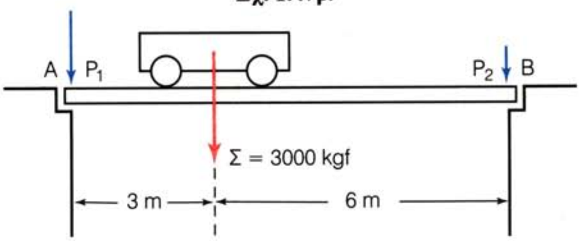
1. Να γίνει η παράσταση της δυνάμεως $|\vec{F}| = 300$ N υπό κλίμακα:
α) 1 cm $\triangleq$ 100 N, β) 1 cm $\triangleq$ 150 N και γ) 1 cm $\triangleq$ 200 N.
2. Έστω, ότι έχομε δύο δυνάμεις $|\vec{F}_1| = 4$ N και $|\vec{F}_2| = 3$ N, οι οποίες ενεργούν στο αυτό σημείο. Να προσδιορισθεί η συνισταμένη τους, όταν:
– Σχηματίζουν γωνία ορθή (90^o).
– Σχηματίζουν γωνία $\varphi = 0^o$.
– Σχηματίζουν γωνία $\varphi = 180^o$.
– Σχηματίζουν γωνία $\varphi = 270^o$.
– Σχηματίζουν γωνία $\varphi = 240^o$.
– Σχηματίζουν γωνία $\varphi = 330^o$.
– Σχηματίζουν γωνία $\varphi = 360^o$.
3. Οι διευθύνσεις των δυνάμεων $|\vec{F}_1| = 15$ N και $|\vec{F}_2| = 10$ N που ενεργούν στο ίδιο σημείο Α σχηματίζουν γωνία $\varphi = 60^o$. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$.
4. Οι διευθύνσεις των δυνάμεων $|\vec{F}_1| = 15$ N και $|\vec{F}_2| = 10$ N που ενεργούν στο ίδιο σημείο Α σχηματίζουν γωνία $\varphi = 120^o$. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$.
5. Να αναλυθεί μια δύναμη $|\vec{\Sigma}| = 10$ N σε δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ των οποίων οι διευθύνσεις να σχηματίζουν γωνία $\alpha = 30^o$ με τη διεύθυνση της $\vec{\Sigma}$ (εννοείται της κάθε μιας).
6. Να αναλυθεί η δύναμη $|\vec{\Sigma}| = 5$ N σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, από τις οποίες η $\vec{F}_1$ να έχει μέτρο $|\vec{F}_1| = 3$ N.
7. Η σφαίρα σ έχει βάρος $|\vec{B}| = 1$ N και ισορροπεί στη θέση Α υπό την επίδραση και της οριζόντιας δυνάμεως $|\vec{F}_1| = 1{,}732$ N. Να υπολογισθεί η γωνία φ και η τάση του νήματος $\vec{T}$ (σχ. 1.47α).
8. Επάνω σε δοκό ΑΒ ασκούνται οι παράλληλες δυνάμεις $|\vec{F}_1| = 100$ N, $|\vec{F}_2| = 40$ N, $|\vec{F}_3| = = 20$ N και $|\vec{F}_4| = 80$ N (σχ. 1.47β). Αν οι αποστάσεις των σημείων ε-



Σχ. 1.47α.



Σχ. 1.47β.



Σχ. 1.47γ.

φαρμογής των δυνάμεων $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$ από το σημείο εφαρμογής της $\vec{F}_1$ είναι αντίστοιχα $\alpha_2 = 0,5$ m, $\alpha_3 = 1$ m και $\alpha_4 = 1{,}5$ m, να βρεθεί η συνισταμένη τους.

9. Ένα όχημα βάρους 3000 kgf σταθμεύει σε μια γέφυρα και απέχει από τα άκρα στηρίξεως αυτής 3 m και 6 m. Να βρεθούν οι δυνάμεις καταπονήσεως των σημείων στηρίξεως της γέφυρας (σχ. 1.47γ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

2.1 Υλικό σημείο – Απόλυτα στερεό σώμα.

2.1.1 Υλικό σημείο.

Ονομάζομε ***υλικό σημείο***, ένα σώμα, του οποίου τις διαστάσεις δεν τις λαμβάνομε υπ' όψη μας, δηλαδή μια ποσότητα ύλης (μάζας) που τη θεωρούμε ότι δεν έχει διαστάσεις (έκταση).

2.1.2 Απόλυτα στερεό σώμα.

Απόλυτα στερεό σώμα ονομάζεται εκείνο το σώμα, το οποίο δεν παραμορφώνεται όταν επάνω του ασκούνται οποιεσδήποτε δυνάμεις.

Το απόλυτο στερεό σώμα θεωρούμε ότι αποτελείται από πολλά υλικά σημεία, των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις δεν μεταβάλλονται, οποιεσδήποτε δυνάμεις και αν επιδράσουν επάνω στο σώμα αυτό. Έτσι το σώμα δεν παραμορφώνεται.

Παρατηρήσεις:

1) Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει απόλυτα στερεό σώμα, γιατί όλα τα σώματα, άλλα λίγο και άλλα περισσότερο, παραμορφώνονται όταν επιδράσουν επάνω τους δυνάμεις. Σε πολλές όμως περιπτώσεις θεωρούμε τα σώματα ως απολύτως στερεά για να απλοποιήσομε και να λύσομε διάφορα προβλήματα.

2) Πολλές φορές θεωρούμε ένα σώμα ως υλικό σημείο, δηλαδή θεωρούμε όλη τη μάζα του σώματος συγκεντρωμένη σε ένα σημείο του.

Για παράδειγμα στην περίπτωση μιας βάρκας, για να λύσομε ορισμένα προβλήματα, τη θεωρούμε ως ένα υλικό σημείο που έχει μάζα όση έχει ολόκληρη η βάρκα και βρίσκεται στο κέντρο βάρους της (ή ορθότερα στο κέντρο της μάζας της).

Σε πολλές περιπτώσεις θεωρούμε ως υλικά σημεία ακόμη και τα ουράνια σώματα.

2.2 Χρονική διάρκεια – Χρονική στιγμή.

2.2.1 Χρονική διάρκεια.

Όταν λέμε ***χρονική διάρκεια*** ενός φαινομένου, εννοούμε το χρόνο μέσα στον οποίο συμβαίνει το φαινόμενο αυτό.

Για παράδειγμα, όταν ένα σώμα ξεκινά από το σημείο Α στις 12:00 και φθάνει στο σημείο Β στις 12:10, τότε ο χρόνος των 10 min που χρειάσθηκε το σώμα για να μεταβεί από το Α στο Β είναι η χρονική διάρκεια του φαινομένου της κινήσεως αυτής του σώματος.

2.2.2 Χρονική στιγμή.

Όταν λέμε ***χρονική στιγμή***, εννοούμε την αρχή ή το τέλος κάποιας χρονικής διάρκειας.

Για παράδειγμα αν θεωρήσομε μια χρονική διάρκεια από τις 12:00 έως τις 12:10, τότε η ώρα 12:00 είναι μία χρονική στιγμή γιατί είναι η αρχή αυτής της χρονικής διάρκειας, ενώ η ώρα 12:10 είναι μια άλλη χρονική στιγμή, γιατί είναι το τέλος αυτής της χρονικής διάρκειας.

Αν t_1 είναι η χρονική στιγμή όπου αρχίζομε να μελετούμε ένα φαινόμενο (π.χ. την κίνηση ενός υλικού σημείου) και t_2 είναι η χρονική στιγμή που σταματούμε να μελετούμε το φαινόμενο αυτό (την κίνηση του υλικού αυτού σημείου), τότε η χρονική διάρκεια t του φαινομένου είναι: $t = (t_2 - t_1) = \Delta t$.

2.3 Κίνηση – Ηρεμία – Σύστημα αναφοράς.

Ένα σώμα Α λέμε ότι κινείται ως προς ένα άλλο σώμα Β, όταν αυτό ***αλλάζει*** θέση ως προς το σώμα Β.

Ένα σώμα Α λέμε ότι ηρεμεί ως προς ένα άλλο σώμα Β, όταν αυτό ***δεν αλλάζει*** θέση ως προς το σώμα Β.

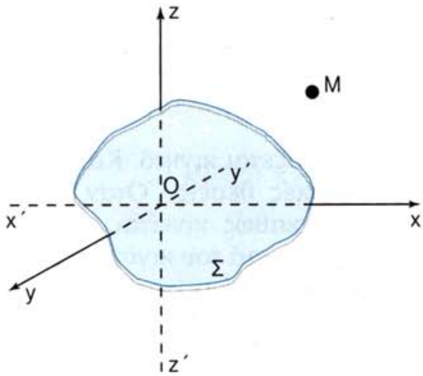
Επομένως, όταν λέμε ότι ένα σώμα κινείται ή ηρεμεί, πρέπει συγχρόνως να λέμε ως προς ποιο σώμα κινείται ή ηρεμεί (σχετική κίνηση).

Λέμε ότι ένα πλοίο κινείται ως προς την προκυμαία, όταν απομακρύνεται από αυτήν, επειδή τότε αλλάζει συνεχώς θέση σχετικά προς αυτήν. Αντίθετα λέμε ότι ένα πλοίο ηρεμεί ως προς την προκυμαία, όταν είναι αγκυροβολημένο στο λιμάνι, επειδή τότε δεν αλλάζει θέση σχετικά ως προς αυτήν.

Ευνόητο είναι ότι ένα σώμα Α μπορεί να ηρεμεί ως προς ένα σώμα Β και ταυτόχρονα να κινείται ως προς ένα άλλο σώμα Γ.

Για έναν επιβάτη (σώμα Α) ο οποίος βρίσκεται καθιστός μέσα σε ένα τρένο (σώμα Β), που κινείται ως προς το κτήριο ενός σταθμού (σώμα Γ) λέμε ότι: 1) Ηρεμεί ως προς το τρένο, γιατί δεν αλλάζει θέση ως προς αυτό και 2) κινείται ως προς το κτήριο του σταθμού, γιατί αλλάζει θέση ως προς αυτό (μαζί με το τρένο).

Απόλυτη κίνηση ή ηρεμία ενός σώματος, δηλαδή κίνηση ή ηρεμία ενός σώ-



Σχ. 2.3.

ματος που δεν αναφέρεται ως προς ένα άλλο σώμα – δηλαδή σε ένα σύστημα αναφοράς – δεν έχει νόημα.

Επομένως κάθε κίνηση και η ηρεμία σώματος είναι σχετική, γιατί κάθε σώμα κινείται ή ηρεμεί σχετικά ως προς ένα άλλο σώμα.

Το σώμα Σ ως προς το οποίο αναφέρεται η κίνηση ή η ηρεμία ενός σώματος Μ ονομάζεται ***σύστημα αναφοράς της κινήσεως ή της ηρεμίας του σώματος Μ.***

Παρατηρήσεις:

1) Στην πράξη πολλές φορές θεωρούμε τη γη ακίνητη.

2) Συνήθως η κίνηση ενός σώματος ως προς τη γη θεωρείται ως ***απόλυτη*** κίνηση.

Ένας συνηθισμένος τρόπος με τον οποίο προσδιορίζομε αν ένα σώμα Μ κινείται ή ηρεμεί ως προς ένα σώμα Σ είναι ο εξής: Θεωρούμε το Σ στερεά και αναπόσπαστα συνδεδεμένο με τη γη, την οποία λαμβάνομε ως ακίνητη (άρα και το Σ ακίνητο). Αν μεταβάλλεται η θέση του Μ σχετικά με το Σ, τότε λέμε ότι το Μ κινείται ως προς το Σ. Αν δεν μεταβάλλεται η θέση του Μ σχετικά με το Σ, τότε λέμε ότι το Μ ηρεμεί ως προς το Σ.

Συγκεκριμένα, επάνω στο σώμα Σ, το οποίο θεωρούμε ότι είναι στερεά και αναπόσπαστα συνδεδεμένο με τη γη παίρνομε ένα (συνήθως) τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxyz που είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένοι με αυτό (σχ. 2.3). Η θέση του σώματος Μ καθορίζεται κάθε χρονική στιγμή ως προς τους άξονες x΄x, y΄y και z΄z, επομένως και ως προς το Σ από τις συντεταγμένες του στο σύστημα αυτό.

Αν έστω και μία από τις συντεταγμένες του σώματος Μ μεταβάλλεται, τότε αυτό αλλάζει θέση σχετικά με το Σ και λέμε ότι αυτό (το Μ) κινείται ως προς το Σ. Αν καμιά από τις συντεταγμένες του Μ δεν μεταβάλλεται, τότε δεν αλλάζει η θέση του Μ σχετικά με το Σ και λέμε ότι αυτό (το Μ) ηρεμεί ως προς το Σ. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα οι κινήσεις όλων των σωμάτων είναι σχετικές, γιατί η γη κινείται γύρω από τον άξονά της και τον ήλιο.

2.4 Τροχιά κινητού – Διάστημα – Μετατόπιση.

2.4.1 Τροχιά κινητού.

Ένα σώμα που κινείται ονομάζεται κινητό. Κάθε κινητό κατά την κίνησή του παίρνει διάφορες διαδοχικές θέσεις. Όταν ενώσομε τις διαδοχικές θέσεις που παίρνει ένα σώμα καθώς κινείται, σχηματίζεται μία γραμμή. Αυτή τη γραμμή την ονομάζομε τροχιά του κινούμενου σώματος.

Ονομάζομε δηλαδή ***τροχιά κινητού*** τη γραμμή που συνδέει κατά τρόπο συνεχή τις διαδοχικές θέσεις από τις οποίες διέρχεται αυτό κατά την κίνησή του.

Σημείωση:

Αν η τροχιά ενός κινητού είναι ευθεία γραμμή, τότε η κίνησή του ονομάζεται ευθύγραμμη. Αν είναι περιφέρεια κύκλου, ονομάζεται κυκλική, ενώ γενικώς αν είναι καμπύλη, ονομάζεται καμπυλόγραμμη.

Παρατήρηση:

Η κίνηση κινητού εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο αναφέρεται, επομένως και η τροχιά του κινητού εξαρτάται από αυτό. Δηλαδή η τροχιά ενός κινητού μπορεί να είναι διαφορετική ως προς διάφορα συστήματα αναφοράς.

Η τροχιά της κινήσεως ενός σημείου του πεδίλου ενός ποδηλάτου είναι κύκλος, όταν η κίνηση αναφέρεται ως προς σύστημα αναφοράς που είναι συνδεδεμένο με το ποδήλατο (όπως αντιλαμβάνεται την κίνηση ο ποδηλάτης), ενώ αυτή είναι μια κυματοειδής γραμμή (έλικα), όταν η κίνηση αναφέρεται ως προς σύστημα αναφοράς που είναι σταθερά συνδεδεμένο με τη γη (όπως αντιλαμβάνεται την κίνηση ένας παρατηρητής που βρίσκεται στη γη).

2.4.2 Διάστημα.

Όταν λέμε ότι ένα κινητό διήνυσε (κάλυψε) ***διάστημα*** S, εννοούμε το συνολικό μήκος της τροχιάς που διήνυσε το κινητό, ανεξάρτητα αν ορισμένα τμήματα της τροχιάς τα κάλυψε μία η περισσότερες φορές ή εμπρός πίσω.

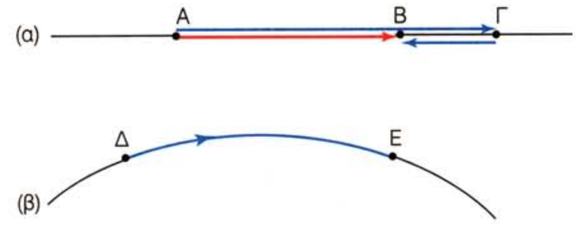
Αν ένα κινητό πηγαίνει από το σημείο Α στο Γ και μετά στο Β [σχ. 2.4α(α)], το διάστημα που διανύει είναι: $S = (ΑΓ) + (ΓΒ)$. Αν ένα κινητό πηγαίνει από το σημείο Δ στο σημείο Ε [σχ. 2.4α(β)], το διάστημα που διανύει είναι ***το μήκος*** του τόξου $\overset{\frown}{ΔΕ}$.

2.4.3 Μετατόπιση.

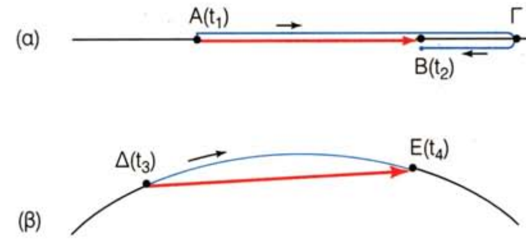
Έστω ότι ένα κινητό τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται σε ένα σημείο Α της τροχιάς του [σχ. 2.4β(α)] και τη χρονική στιγμή t_2 σε ένα σημείο Β. Το κινητό στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ μετατοπίζεται από το σημείο Α στο Β.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ που ορίζεται από την αρχική (Α) και την τελική (Β) θέση του κινητού ονομάζεται ***μετατόπιση*** αυτού κατά τη χρονική διάρκεια Δt.

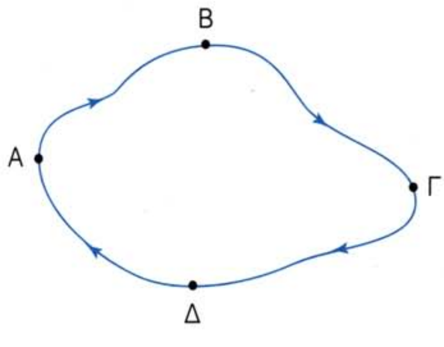
Επίσης, έστω ότι ένα κινητό τη χρονική στιγμή t_3 βρίσκεται σε ένα σημείο



Σχ. 2.4α.



Σχ. 2.4β.



Σχ. 2.4γ.

Δ της τροχιάς του [σχ. 2.4β(β)] και τη χρονική στιγμή t_4 σε ένα σημείο Ε. Το κινητό στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_4 - t_3$ μετατοπίζεται από το σημείο Δ στο Ε. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ που ορίζεται από την αρχική Δ και την τελική Ε θέση του κινητού ονομάζεται μετατόπιση αυτού κατά τη χρονική διάρκεια Δt.

Παρατήρηση:

Αν ένα κινητό διαγράψει την κλειστή τροχιά ΑΒΓΔΑ (σχ. 2.4γ), τότε το διάστημα που διέτρεξε είναι το μήκος της τροχιάς ΑΒΓΔΑ, ενώ η μετατόπισή του είναι μηδέν ($\overrightarrow{AA} = \vec{0}$).

2.5 Μέση και στιγμιαία ταχύτητα κινητού που εκτελεί μία οποιαδήποτε ευθύγραμμη κίνηση.

2.5.1 Μέση ταχύτητα.

Θεωρούμε ένα κινητό Μ (σχ. 2.5) που κινείται επάνω σε άξονα x΄x και έστω ότι αυτό κατά τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται από τη θέση Α και κατά τη χρονική στιγμή t_2 από τη θέση Β.

Το κινητό Μ μέσα στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$ μετατοπίσθηκε κατά $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta S}$. Ορίζομε ως μέση ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\mu$ του κινητού Μ που εκτελεί την παραπάνω κίνηση, μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2, ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Φορέα, το φορέα της μετατοπίσεως του $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta S}$.

2) Φορά, τη φορά της μετατοπίσεως του $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta S}$.

3) Μέτρο, το πηλίκο του μέτρου της μετατοπίσεως του $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Delta S}|$ προς τη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ κατά την οποία έγινε η μετατόπιση.

Σε μαθηματική διατύπωση έχομε:

$$\vec{\upsilon}_\mu = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta S}}{\Delta t}, \quad \boxed{|\vec{\upsilon}_\mu| = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{\Delta t} = \frac{|\overrightarrow{\Delta S}|}{\Delta t}}, \quad \boxed{\overline{\upsilon}_\mu = \frac{\overline{\Delta S}}{\Delta t}}$$

(τα $\overline{\Delta S}$ και $\overline{\upsilon}_\mu$ μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά, αλλά πάντοτε ομόσημα).

2.5.2 Στιγμιαία ταχύτητα.

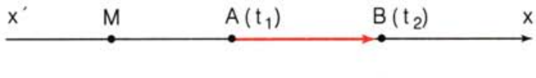
Ονομάζομε ***στιγμιαία ταχύτητα*** του κινητού Μ που εκτελεί την παραπάνω κίνηση (σχ. 2.5) στο σημείο Α της τροχιάς του κατά τη χρονική στιγμή t_1, ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\upsilon}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Σημείο εφαρμογής τη θέση Α, που κατέχει το κινητό Μ τη χρονική στιγμή t_1.

2) Φορέα, το φορέα της μετατοπίσεως του $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta S}$.

3) Φορά, τη φορά της μετατοπίσεως του $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta S}$.

4) Μέτρο, το πηλίκο του μέτρου της μετατοπίσεως του $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Delta S}|$ προς τη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$, κατά την οποία έγινε η μετατόπιση αυτή, με τη βασική προϋπόθεση ότι η χρονική διάρκεια $t_2 - t_1$ είναι πάρα πολύ μικρή, δηλαδή $(t_2 - t_1) = \Delta t \to 0$.



Σχ. 2.5.

Σε μαθηματική διατύπωση και με την προϋπόθεση ότι το $(t_2 - t_1)$ είναι πολύ μικρό $[(t_2 - t_1) \to 0]$, έχομε:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\overrightarrow{AB}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta S}}{t_2 - t_1}}\ (t_2 - t_1) \to 0 \qquad (1)$$

$$\boxed{|\vec{\upsilon}| = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{t_2 - t_1} = \frac{|\overrightarrow{\Delta S}|}{t_2 - t_1}}\ (t_2 - t_1) \to 0 \qquad (2)$$

$$\boxed{\overline{\upsilon} = \frac{\overline{AB}}{t_2 - t_1} = \frac{\overline{\Delta S}}{t_2 - t_1}}\ (t_2 - t_1) \to 0 \qquad (3)$$

(Τα $\overline{\Delta S}$ και $\overline{\upsilon}$ μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά αλλά πάντοτε ομόσημα).

Σημείωση:

Οι σχέσεις (1), (2) και (3) διατυπώνονται και ως εξής:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\overrightarrow{\Delta S}}{\Delta t}}, \quad \boxed{|\vec{\upsilon}| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{|\overrightarrow{AB}|}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{|\overrightarrow{\Delta S}|}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\overline{\upsilon} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\overline{\Delta S}}{\Delta t}}$$

2.6 Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ονομάζεται η κίνηση ενός κινητού, όταν:

1) Κινείται επάνω σε ευθεία γραμμή (δηλ. η τροχιά του είναι ευθεία γραμμή).
2) Κινείται συνεχώς προς την ίδια φορά.
3) Σε ίσους χρόνους μετατοπίζεται κατά ίσες μετατοπίσεις.

2.6.1 Στιγμιαία ταχύτητα κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η στιγμιαία ταχύτητα κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι συνεχώς σταθερή κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο, αφού:

α) Η τροχιά του είναι συνεχώς μια συγκεκριμένη ευθεία.
β) Κινείται συνεχώς προς την ίδια φορά.
γ) Σε ίσους χρόνους μετατοπίζεται κατά ίσες μετατοπίσεις.

Παρατηρήσεις:

1) Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η έννοια της μετατοπίσεως συμπίπτει με την έννοια του διαστήματος.

2) Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι σε όλα τα σημεία της τροχιάς του ίση με τη μέση ταχύτητά του.

Προσοχή:

Με βάση όλα τα παραπάνω, μπορούμε να δώσομε και τον εξής ορισμό της ευθύγραμμης ομαλής κινήσεως:

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ονομάζεται η κίνηση κινητού, όταν αυτό κινείται με ταχύτητα σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά.

Σημείωση:

Αν μας πούνε ότι ένα κινητό κινείται με σταθερή ταχύτητα (κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο), αυτό θα σημαίνει ότι το κινητό εκτελεί κίνηση ευθύγραμμη ομαλή.

2.6.2 Ταχύτητα της κινήσεως.

Το κινητό Μ (σχ. 2.6α) εκτελεί κίνηση ευθύγραμμη ομαλή και τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση Α, τη δε χρονική στιγμή t_2 στη θέση Β.

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του κινητού Μ που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση δίνεται (ορίζεται) από τη σχέση:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{S} - \vec{S}_o}{t_2 - t_1} \qquad (1)$$

όπου Ο το σημείο εκκινήσεως (σχ. 2.6α).

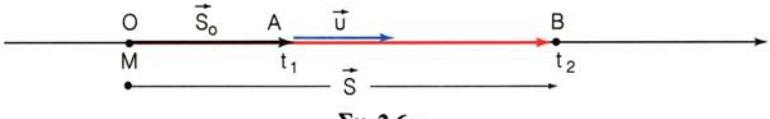
Επειδή $(t_2 - t_1) > 0$, από τη σχέση (1) προκύπτουν:

$$|\vec{\upsilon}| = \frac{|\overrightarrow{OB}| - |\overrightarrow{OA}|}{t_2 - t_1} = \frac{|\vec{S}| - |\vec{S}| - |\vec{S}_o|}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{\bar{\upsilon} = \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{t_2 - t_1} = \frac{\bar{S} - \bar{S}_o}{t_2 - t_1}} \qquad (2)$$

όπου $\bar{\upsilon}$ η αλγεβρική τιμή της $\vec{\upsilon}$ και $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, $\bar{S}$, $\bar{S}_o$ οι αλγεβρικές τιμές των $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\vec{S}$, $\vec{S}_o$ αντιστοίχως.

Συνήθως θεωρούμε ότι το κινητό στη χρονική στιγμή μηδέν ($t_1 = 0$) βρίσκεται στο Ο (σχ. 2.6β), οπότε



Σχ. 2.6α.

Σχ. 2.6β.

$$\vec{\upsilon}=\frac{\overrightarrow{OB}}{t_2-0} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}=\frac{\overrightarrow{OB}}{t_2}=\frac{\vec{S}}{t_2}$$

Συμβολίζομε $t_2 = t$ και έχομε:

$$\vec{\upsilon}=\frac{\overrightarrow{OB}}{t}=\frac{\vec{S}}{t}, \qquad |\vec{\upsilon}|=\frac{|\overrightarrow{OB}|}{t}=\frac{|\vec{S}|}{t}, \qquad \boxed{\bar{\upsilon}=\frac{\bar{S}}{t}} \qquad (3)$$

όπου $\bar{\upsilon}$ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κινητού και $\overline{OB}=\bar{S}$ αλγεβρική τιμή της μετατοπίσεως κατά την οποία μετατοπίσθηκε το κινητό μέσα σε χρόνο (χρονική διάρκεια) t.

2.6.3 Εξίσωση του διαστήματος (της θέσεως) ως προς το χρόνο.

Από την εξίσωση (3) προκύπτει: $\boxed{\bar{S}=\bar{\upsilon}\cdot t}$

όπου $\bar{S}$ η αλγεβρική τιμή της μετατοπίσεως του κινητού μέσα σε χρόνο t και $\bar{\upsilon}$ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κινητού. Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση του διαστήματος ως προς το χρόνο.

2.6.4 Διαγράμματα $\upsilon = f(t)$ και $S = f(t)$.

1) Διάγραμμα ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο [$\upsilon = f(t)$]. Επειδή η ταχύτητα υ είναι σταθερή, η γραφική παράσταση της $\upsilon = f(t)$ θα είναι ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων (σχ. 2.6γ).

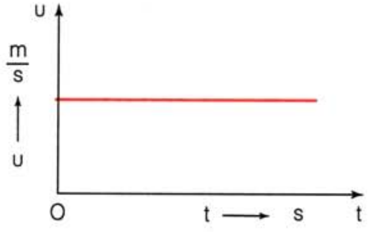
2) Διάγραμμα θέσεως σε συνάρτηση με το χρόνο [$S = f(t)$].

Έχομε τη σχέση $S = \upsilon \cdot t$. Η σχέση αυτή είναι εξίσωση πρώτου βαθμού και χωρίς σταθερό όρο στο δεύτερο μέλος της. Επομένως η γραφική της παράσταση θα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6δ (ευθεία γραμμή ΟΕ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων).

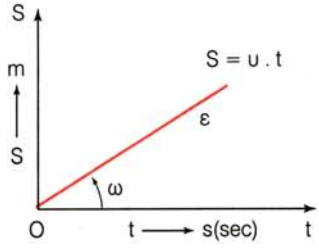
Παρατήρηση:

Ο συντελεστής διευθύνσεως λ της ΟΕ είναι: $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$. Επομένως ισχύει η σχέση $\upsilon = \varepsilon\varphi\omega$ (αφού η εξίσωση της ΟΕ είναι: $S = \upsilon \cdot t$).

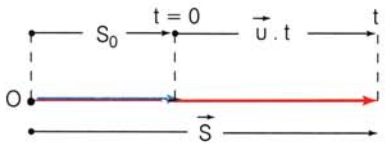
Αν το κινητό κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είχε μετατοπισθεί κατά τη μετα-



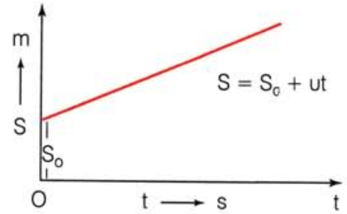
Σχ. 2.6γ.



Σχ. 2.6δ.



Σχ. 2.6ε.



Σχ. 2.6στ.

τόπιση $\vec{S}_o$, τότε η συνολική μετατόπιση του $\vec{S}$ από το σημείο O στο χρόνο t θα είναι:

$$\vec{S} = \vec{S}_o + \vec{\upsilon} \cdot t \quad \text{και} \quad \boxed{\bar{S} = \bar{S}_o + \bar{\upsilon}\, t} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) είναι εξίσωση πρώτου βαθμού με σταθερό όρο και επομένως η γραφική της παράσταση θα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6στ.

2.6.5 Νόμοι της ευθύγραμμης ομαλής κινήσεως.

Ως ανακεφαλαίωση όλων των παραπάνω διατυπώνομε τους νόμους της ευθύγραμμης ομαλής κινήσεως:

1) Η ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μένει σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά ($\vec{\upsilon}$ = σταθερή).

2) Η μετατόπιση του κινητού είναι ανάλογη με το χρόνο που χρειάσθηκε για να την εκτελέσει ($\bar{S} = \bar{\upsilon} \cdot t$).

2.6.6 Μονάδα ταχύτητας.

Η εξίσωση ορισμού της ταχύτητας είναι: $\upsilon = \frac{S}{t}$.

Μονάδα μετρήσεως του διαστήματος (μετατοπίσεως) στο S.I. (Διεθνές Σύστημα) είναι το 1 m και του χρόνου το 1 s. Άρα η μονάδα μετρήσεως της ταχύτητας στο S.I. είναι:

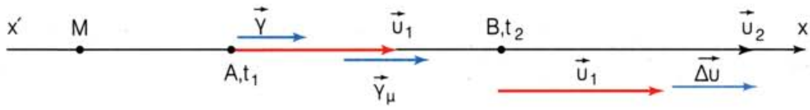
$$\upsilon = \frac{S}{t} = \frac{1\,m}{1\,s} = 1\frac{m}{s}, \text{ δηλαδή } \upsilon = 1\frac{m}{s} = 1\,m \cdot s^{-1}$$

Σημείωση:
Η απόδοση με λόγια είναι: ένα μέτρο ανά δευτερόλεπτο.

2.7 Επιτάχυνση στην ευθύγραμμη κίνηση.

2.7.1 Μέση επιτάχυνση κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση.

Έστω ότι κινητό M κινείται ευθύγραμμα επάνω στον άξονα x΄x με φορά



Σχ. 2.7α.

από το x´ προς το x κατά τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται από το Α και έχει ταχύτητα $\vec{υ}_1$, ενώ κατά τη χρονική στιγμή t_2 διέρχεται από το Β και έχει ταχύτητα $\vec{υ}_2$ (σχ. 2.7α).

Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή $\overrightarrow{Δυ}$ της ταχύτητας του κινητού Μ κατά τη μετατόπισή του από το Α στο Β είναι $\overrightarrow{Δυ} = \vec{υ}_2 - \vec{υ}_1$ και έγινε σε χρόνο $(t_2 - t_1) = Δt$.

Ονομάζομε ***μέση επιτάχυνση*** $\vec{\gamma}_μ$ του κινητού Μ που εκτελεί αυτήν την ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\gamma}_μ$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Φορέα, το φορέα της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{Δυ}$.

2) Φορά, τη φορά της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{Δυ}$.

3) Μέτρο, το πηλίκο του μέτρου της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{Δυ}$ προς τη χρονική διάρκεια $Δt = t_2 - t_1$ κατά την οποία έγινε η μεταβολή αυτή της ταχύτητας.

4) Αλγεβρικό μέτρο, το πηλίκο του αλγεβρικού μέτρου της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{Δυ}$ προς τη χρονική διάρκεια $Δt = (t_2 - t_1)$ κατά την οποία έγινε η μεταβολή αυτή της ταχύτητας.

Σε μαθηματική διατύπωση έχομε:

$$\vec{\gamma}_μ = \frac{\vec{υ}_2 - \vec{υ}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{Δυ}}{Δt},\ |\vec{\gamma}_μ| = \frac{|\overrightarrow{Δυ}|}{Δt},\ \bar{\gamma}_μ = \frac{\overline{Δυ}}{Δt}$$

2.7.2 Στιγμιαία επιτάχυνση κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση.

Ονομάζομε ***στιγμιαία επιτάχυνση*** του κινητού Μ, που εκτελεί την παραπάνω κίνηση (σχ. 2.7α) στο σημείο Α της τροχιάς του κατά τη χρονική στιγμή t_1, ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\gamma}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Σημείο εφαρμογής τη θέση Α που έχει το κινητό Μ τη χρονική στιγμή t_1.

2) Φορέα, το φορέα της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{Δυ} = \vec{υ}_2 - \vec{υ}_1$.

3) Φορά, τη φορά της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{Δυ}$.

4) Μέτρο, το πηλίκο του μέτρου της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{Δυ}$ προς το χρόνο κατά τον οποίο έγινε η μεταβολή αυτή, με τη ***βασική προϋπόθεση*** ότι η χρονική διάρκεια $t_2 - t_1$ είναι παρά πολύ μικρή, δηλαδή $(t_2 - t_1) = Δt \to 0$.

5) Αλγεβρικό μέτρο, το πηλίκο του αλγεβρικού μέτρου της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ προς το χρόνο κατά τον οποίο έγινε η μεταβολή αυτή, με τη ***βασική προϋπόθεση*** ότι η χρονική διάρκεια $(t_2 - t_1)$ είναι πάρα πολύ μικρή, δηλαδή $(t_2 - t_1) = \Delta t \to 0$.

Σε μαθηματική διατύπωση έχομε:

$$\vec{\gamma} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon}}{\Delta t}, \quad |\vec{\gamma}| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{|\overrightarrow{\Delta\upsilon}|}{\Delta t}, \quad \boxed{\bar{\gamma} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\overline{\Delta\upsilon}}{\Delta t}}$$

Σημείωση:

Συνήθως γράφομε:

$$\vec{\gamma} = \frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon}}{\Delta t}, \quad |\vec{\gamma}| = \frac{|\overrightarrow{\Delta\upsilon}|}{\Delta t}, \quad \boxed{\bar{\gamma} = \frac{\overline{\Delta\upsilon}}{\Delta t}}$$

όπου εννοούμε ότι: $\Delta t = t_2 - t_1$ πολύ μικρό, δηλαδή $\Delta t = (t_2 - t_1) \to 0$.

Προσοχή:

Διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

1) Όταν το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$ (σχ. 2.7β) και το διάνυσμα της μεταβολής της $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ που πραγματοποιείται σε ελάχιστο χρόνο $(\Delta t \to 0)$ είναι ομόρροπα, τότε:

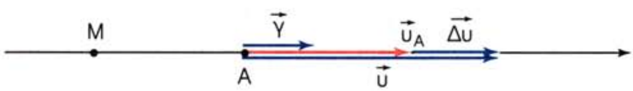
– Το μέτρο της ταχύτητας του κινητού, αυξάνει:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_A + \overrightarrow{\Delta\upsilon} \Rightarrow |\vec{\upsilon}_A| + |\overrightarrow{\Delta\upsilon}|$$

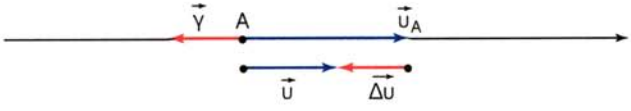
– Επειδή το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ της επιταχύνσεως είναι ομόρροπο του διανύσματος $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$, είναι ομόρροπο και με το $\vec{\upsilon}_A$.

Επομένως, όταν τα διανύσματα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$, της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ και της επιταχύνσεως $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα, τότε το μέτρο της ταχύτητας του κινητού αυξάνει και την κίνηση αυτήν την ονομάζομε ***ευθύγραμμη επιταχυνόμενη***.

2) Όταν το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$ (σχ. 2.7γ) και το διάνυσμα της μεταβολής της $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ που πραγματοποιείται σε πολύ μικρό χρόνο $(\Delta t \to 0)$ είναι



Σχ. 2.7β.



Σχ. 2.7γ.

αντίρροπα, τότε:

– Το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_A - \overrightarrow{\Delta\upsilon} \Rightarrow |\vec{\upsilon}_A| - |\overrightarrow{\Delta\upsilon}|$$

– Επειδή το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ της επιταχύνσεως είναι ομόρροπο του διανύσματος $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$, είναι αντίρροπο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$.

Επομένως, όταν τα διανύσματα της $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ και της $\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$, τότε το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται και την κίνηση την ονομάζομε ***ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη***. Στην περίπτωση αυτή η $\vec{\gamma}$ ονομάζεται επιβράδυνση ή αρνητική επιτάχυνση.

2.8 Κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη.

Κίνηση ευθύγραμμη και ***ομαλά επιταχυνόμενη*** ονομάζεται η κίνηση ενός κινητού, όταν η επιτάχυνσή του είναι:

1) Σταθερή, κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο.

2) Ομόρροπη με την ταχύτητά του.

Επομένως, τα χαρακτηριστικά στοιχεία μιας ευθύγραμμης και ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως ενός κινητού είναι τα εξής:

1) Η τροχιά του είναι ευθεία, γιατί η διεύθυνση της επιταχύνσεώς του είναι σταθερή, δηλαδή είναι ευθεία.

2) Η ταχύτητά του αυξάνει (κατά απόλυτη τιμή), γιατί η φορά της επιταχύνσεώς του είναι η ίδια με τη φορά της ταχύτητας.

3) Το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνει κατά το ίδιο ποσό σε ίσους χρόνους γιατί το μέτρο της επιταχύνσεώς του είναι σταθερό.

2.8.1 Υπολογισμός της ταχύτητας στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

1) Κινητό Μ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά επιταχυνόμενο επάνω στον άξονα x΄x (σχ. 2.8α) με φορά από το x΄ προς το x και με επιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Έστω ότι το κινητό κατά τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται από το σημείο Α και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$. Κατά τη χρονική στιγμή t_2 διέρχεται από το σημείο Β και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.

Επειδή το κινητό Μ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά επιταχυνόμενο, δηλαδή με σταθερή επιτάχυνση, ***η μέση και η στιγμιαία επιτάχυνση αυτού θα έχουν την ίδια τιμή***, επομένως:

Σχ. 2.8α.

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t} \quad (1)$$

όπου t ο χρόνος που χρειάσθηκε το κινητό για να μεταβεί από το σημείο Α της τροχιάς του στο σημείο Β, δηλαδή $t = t_2 - t_1$, υ_1 το αλγεβρικό μέτρο της ταχύτητας του κινητού στην αρχή του χρόνου t, δηλαδή κατά τη χρονική στιγμή t_1 και υ_2 το ***αλγεβρικό μέτρο*** της ταχύτητας του κινητού στο τέλος του χρόνου t, δηλαδή κατά τη χρονική στιγμή t_2.

Αν λύσομε τη εξίσωση (1) ως προς υ_2, θα έχομε:

$$\boxed{\upsilon_2 = \upsilon_1 + \gamma \cdot t} \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι η εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα διάφορη του μηδενός ($\upsilon_1 \neq 0$).

Παρατήρηση:

Συνήθως η αρχική ταχύτητα υ_1 παριστάνεται με υ_o και η τελική υ_2 με υ. Τότε η (2) γράφεται:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o + \gamma \cdot t} \quad (3)$$

Αν το κινητό στην αρχή του χρόνου t, δηλαδή τη χρονική στιγμή t_1, είχε ταχύτητα $\upsilon_o = 0$ (δηλαδή αν ξεκινούσε από το σημείο Α), τότε η εξίσωση (3) θα γινόταν:

$$\boxed{\upsilon = \gamma \cdot t} \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι η εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ($\upsilon_o = 0$).

2.8.2 Υπολογισμός της μετατοπίσεως στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Η μετατόπιση $\vec{S}$ ενός κινητού, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ και με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ μέσα σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{S = \upsilon_o t + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2} \quad (1)$$

όπου S το αλγεβρικό μέτρο της μετατοπίσεως $\vec{S}$, υ_o το αλγεβρικό μέτρο της αρχικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_o$ και γ το αλγεβρικό μέτρο της επιταχύνσεως $\vec{\gamma}$.

Η σχέση (1) είναι η εξίσωση της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως με αρχική ταχύτητα υ_o από την οποία υπολογίζομε τη μετατόπιση S του κινητού κατά την οποία μετατοπίσθηκε σε χρόνο t.

Αν το κινητό Μ δεν έχει αρχική ταχύτητα ($\upsilon_o = 0$), τότε η εξίσωση της ευθύγραμμης και ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεώς του είναι:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2} \qquad (2)$$

2.8.3 Νόμοι της ευθύγραμμης και ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως.

Στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ισχύουν οι εξής νόμοι:

1) Η επιτάχυνση ($\vec{\gamma}$) είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κινήσεως ($\vec{\gamma}$ = σταθερό).

2) Η ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$) είναι ανάλογη του χρόνου (t) μέσα στον οποίο κινήθηκε το κινητό ($\upsilon = \gamma \cdot t$).

3) Η μετατόπιση ($\vec{S}$) είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του χρόνου (t) στον οποίο πραγματοποιήθηκε: $\left(S = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2 \right)$.

Μονάδα επιταχύνσεως.

Σύστημα S.I. (Διεθνές Σύστημα).

Η εξίσωση ορισμού της επιταχύνσεως είναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} \qquad (1)$$

Αν θέσομε στην (1) $\upsilon_2 - \upsilon_1 = \upsilon$ και $t_2 - t_1 = t$, τότε έχομε $\boxed{\gamma = \frac{\upsilon}{t}}$.

Μονάδα μετρήσεως της ταχύτητας στο S.I. είναι το 1 m/s, ενώ του χρόνου το 1 s. Άρα η μονάδα μετρήσεως της επιταχύνσεως στο S.I. είναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{1\,m/s}{1\,s} = 1\frac{m}{s^2}, \text{ δηλαδή } \gamma = 1\frac{m}{s^2} \qquad (2)$$

Η έκφραση αυτή (2) δηλώνει ότι η ταχύτητα του κινητού μεταβάλλεται ***κατά 1 m/s σε κάθε s*** γι' αυτό και η πιο σωστή απόδοση με λόγια είναι: ***μέτρα ανά δευτερόλεπτο στο κάθε δευτερόλεπτο*** και όχι ***μέτρα ανά τετράγωνο δευτερολέπτου.***

2.8.4 Μέση ταχύτητα κινητού στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Έστω ότι κινητό Μ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά επιταχυνόμενο και κατά τη χρονική στιγμή t_o έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$, ενώ κατά τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ (σχ. 2.8β). Στην περίπτωση αυτή η ***μέση ταχύτητα*** $\vec{\upsilon}_\mu$ του κινητού κατά το χρονικό διάστημα $t_1 - t_o$ είναι:

Σχ. 2.8β.

$$\bar{\upsilon}_\mu = \frac{\bar{\upsilon}_o + \bar{\upsilon}_1}{2}$$

Δηλαδή, η μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}_\mu$ κινητού στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι ίση με το ημιάθροισμα της αρχικής $\bar{\upsilon}_o$ και τελικής $\bar{\upsilon}_1$ ταχύτητάς του.

Σημείωση:

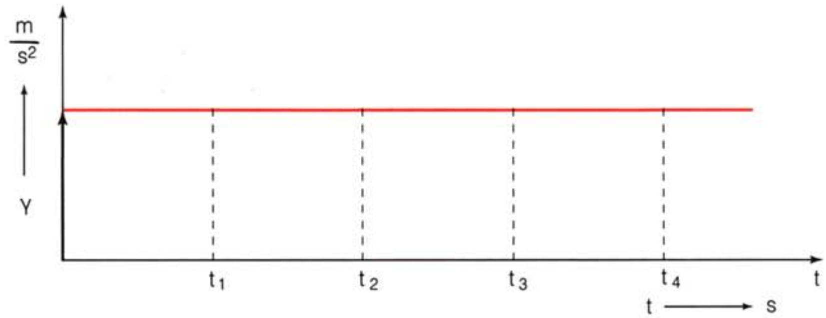
Αν η αρχική ταχύτητα του κινητού είναι μηδέν ($\upsilon_o = 0$) τότε η μέση ταχύτητά του είναι:

$$\bar{\upsilon}_\mu = \frac{\bar{\upsilon}_1}{2}$$

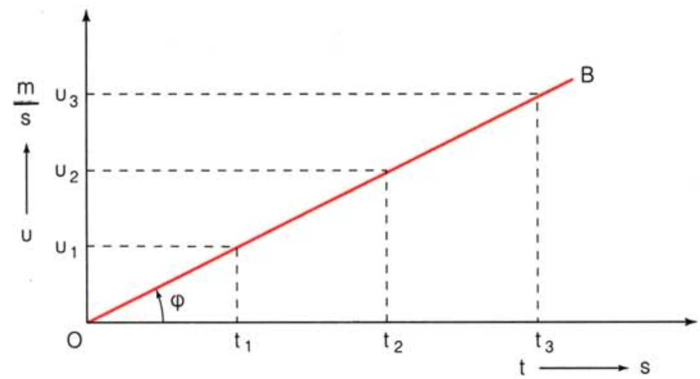
2.8.5 Γραφική παράσταση της σχέσεως μεταξύ επιταχύνσεως και χρόνου.

Η επιτάχυνση κινητού στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι η ίδια ($\vec{\gamma}$ = σταθερή) σε κάθε χρονική στιγμή της κινήσεως.

Γι' αυτό η γραφική παράσταση της σχέσεως μεταξύ της επιταχύνσεως και του χρόνου είναι μία ευθεία γραμμή, παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων (σχ. 2.8γ).



Σχ. 2.8γ.



Σχ. 2.8δ.

2.8.6 Γραφική παράσταση της σχέσεως μεταξύ ταχύτητας και χρόνου στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Η σχέση ταχύτητας και χρόνου $υ = γ \cdot t$ είναι εξίσωση πρώτου βαθμού χωρίς σταθερό όρο. Γι' αυτό η γραφική παράστασή της είναι μία ευθεία γραμμή (σχ. 2.8δ) η οποία διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

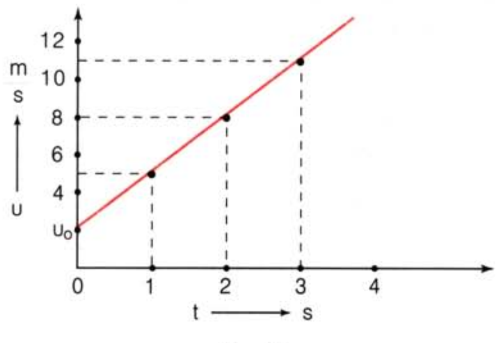
Παρατήρηση:
Για το συντελεστή διευθύνσεως λ της ευθείας ΟΒ ισχύει η σχέση: $λ = εφφ$ (σχ. 2.8δ). Επομένως, για την επιτάχυνση θα ισχύει: $εφφ = γ$ (αφού η εξίσωση της ΟΒ είναι: $υ = γ \cdot t$).

2.8.7 Η γραφική παράσταση της σχέσεως μεταξύ ταχύτητας και χρόνου στην ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα ($υ = υ_o + γ \cdot t$) φαίνεται στο σχήμα 2.8ε.

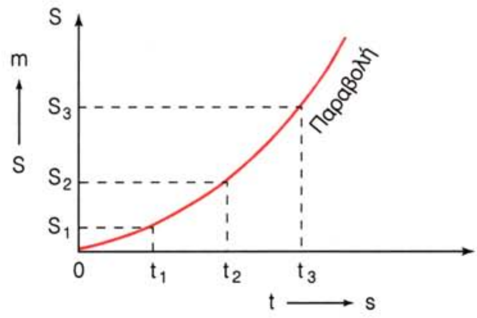
2.8.8 Γραφική παράσταση της σχέσεως μεταξύ μετατοπίσεως και χρόνου.

Η σχέση μετατοπίσεως και χρόνου είναι: $S = \frac{1}{2} γ \cdot t^2$.

Η γραφική παράσταση της σχέσεως αυτής είναι παραβολή (σχ. 2.8στ) που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων (σημείο Ο).



Σχ. 2.8ε.



Σχ. 2.8στ.

2.9 Κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη.

Κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά ***επιβραδυνόμενη*** ονομάζεται η κίνηση ενός κινητού, όταν η επιτάχυνσή του είναι:

1) Σταθερή κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο ($\vec{\gamma} = \text{σταθ.}$)

2) Αντίρροπη της ταχύτητάς του ($\vec{\gamma} \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}$).

Επομένως, τα χαρακτηριστικά στοιχεία μιας ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κινήσεως ενός κινητού (σχ. 2.9α) είναι τα εξής:

1) Η τροχιά της είναι ευθεία, γιατί η διεύθυνση της επιβραδύνσεως του κινητού είναι σταθερή, δηλαδή είναι ευθεία.

2) Η ταχύτητα του κινητού ελαττώνεται ($\upsilon_2 < \upsilon_1$), γιατί η φορά της επιβραδύνσεώς του είναι αντίθετη της φοράς της ταχύτητάς του.

3) Το μέτρο της ταχύτητας του κινητού ελαττώνεται κατά το ίδιο ποσό σε ίσους χρόνους, γιατί το μέτρο της επιβραδύνσεώς του είναι σταθερό.

Προσοχή:

Η επιτάχυνση κινητού που είναι αντίρροπη της ταχύτητάς του ονομάζεται και επιβράδυνση αυτού.

2.9.1 Εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο.

Έστω ότι το κινητό Κ κινείται επάνω στον άξονα x΄x με κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη και τη χρονική στιγμή t_1 που διέρχεται από το Α έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ενώ τη χρονική στιγμή t_2 που διέρχεται από το Β έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ (σχ. 2.9β).

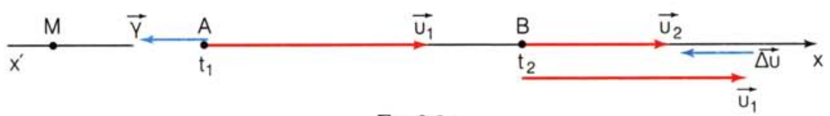
Επειδή το κινητό Κ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά επιβραδυνόμενο, δηλαδή με σταθερή επιβράδυνση, η μέση και η στιγμιαία επιβράδυνσή του θα έχουν την ίδια τιμή, επομένως έχομε τη σχέση:

$$\boxed{\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1}} \tag{1}$$

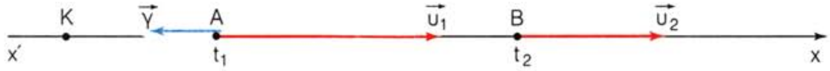
όπου γ, υ_2, υ_1 τα αλγεβρικά μέτρα των $\vec{\gamma}$, $\vec{\upsilon}_2$, $\vec{\upsilon}_1$ αντίστοιχα.

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \gamma\,(t_2 - t_1) \tag{2}$$



Σχ. 2.9α.



Σχ. 2.9β.

Αν θεωρήσομε $t_1 = 0$, δηλαδή ότι η χρονική στιγμή t_1 είναι η αρχή μετρήσεως του χρόνου και θέσομε $t_2 = t$, $\upsilon_1 = \upsilon_o$ και $\upsilon_2 = \upsilon$, τότε από τη (2) προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o + \gamma \cdot t} \tag{3}$$

Η εξίσωση (3) είναι η εξίσωση της ταχύτητας ως προς το χρόνο. Με αυτήν μπορούμε να υπολογίσομε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ που θα έχει το κινητό τη χρονική στιγμή t, δηλαδή στο τέλος του χρόνου (της χρονικής διάρκειας) που χρειάσθηκε το κινητό, για να κινηθεί από τη θέση Α στη θέση Β (έχομε θέσει $\upsilon_1 = \upsilon_o$, $\upsilon_2 = \upsilon$ και $t_2 - t_1 = t$).

Προσοχή:

Κατά την εφαρμογή της σχέσεως (3) χρειάζεται προσοχή. Το $\vec{\gamma}$ έχει αλγεβρική τιμή ετερόσημη της αλγεβρικής τιμής της $\vec{\upsilon}_o$.

Σημείωση:

1) Συνήθως η επιβράδυνση δίνεται ως αρνητική επιτάχυνση. Για παράδειγμα, όταν λέμε ότι η επιτάχυνση ενός κινητού είναι $\gamma = -8\ m/s^2$, εννοούμε ότι το κινητό εκτελεί κίνηση επιβραδυνόμενη.

2) Αν μας πούνε ότι η επιτάχυνση του κινητού είναι $-8\ m/s^2$, στη σχέση (3) θα βάλομε $\gamma = -8\ m/s^2$.

3) Αν μας πούνε ότι η επιβράδυνση του κινητού είναι $\gamma = 8\ m/s^2$, στη σχέση (3) θα βάλομε:$\gamma = -8\ m/s^2$.

Παρατήρηση:

Πολλές φορές συναντούμε τη σχέση:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o - \gamma \cdot t} \tag{4}$$

Κατά την εφαρμογή της σχέσεως (4), στη θέση του γ θα βάζομε το μέτρο της επιταχύνσεως.

Για παράδειγμα, αν μας πούνε ότι η επιτάχυνση του κινητού είναι $-8\ m/s^2$ στη θέση του γ θα βάλομε $\gamma = 8\ m/s^2$.

Αν μας πούνε ότι η επιβράδυνση του κινητού είναι $8\ m/s^2$ στη θέση του γ θα βάλομε $\gamma = 8\ m/s^2$.

2.9.2 Υπολογισμός της μετατοπίσεως.

Η μετατόπιση ενός κινητού Μ που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση επάνω σε άξονα με επιβράδυνση $\vec{\gamma}$ και αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ μέσα σε χρόνο t υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\boxed{S = \upsilon_o \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2} \tag{5}$$

Σημείωση:

Και εδώ χρειάζεται προσοχή. Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ και η επιβράδυνση $\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπες, πράγμα που σημαίνει ότι οι υ_o και γ είναι ετερόσημες.

Παρατήρηση:

Συνήθως συναντούμε τη σχέση :

$$\boxed{S = \upsilon_o . t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2} \qquad (6)$$

Κατά την εφαρμογή της σχέσεως (6), το γ συμβολίζει το μέτρο της επιταχύνσεως.

2.9.3 Μέση ταχύτητα στην ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Αν σε ένα κινητό που εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση κατά τη χρονική στιγμή t_o η ταχύτητά του είναι $\overline{\upsilon}_o$ και κατά τη χρονική στιγμή t_1 είναι $\overline{\upsilon}_1$ (σχ. 2.9γ), τότε η μέση ταχύτητα του κινητού κατά το χρονικό διάστημα $t_1 - t_o$ είναι:

$$\overline{\upsilon}_\mu = \frac{\overline{\upsilon}_o + \overline{\upsilon}_1}{2}$$

Σημείωση:

Αν ένα κινητό που κινείται με κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη και με αρχική ταχύτητα $\overline{\upsilon}_o$ σταματήσει αφού κινηθεί επί χρόνο t, τότε η μέση ταχύτητα του κινητού κατά τη διάρκεια του χρόνου t θα είναι:

$$\overline{\upsilon}_\mu = \frac{\overline{\upsilon}_o + 0}{2} \text{ και } \overline{\upsilon}_\mu = \frac{\overline{\upsilon}_o}{2}$$

2.9.4 Διάρκεια κινήσεως (μέγιστος χρόνος κινήσεως) στην ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της ταχύτητας κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με την πάροδο του χρόνου συνεχώς ελαττώνεται. Επομένως το μέτρο της ταχύτητας του κινητού γίνεται μηδέν μετά από ορισμένο χρόνο και αυτό σταματά.

Το χρόνο κατά τον οποίο διαρκεί η κίνηση, δηλαδή το χρόνο που απαιτείται για να γίνει το μέτρο της ταχύτητας μηδέν, τον ονομάζομε μέγιστο χρόνο της κινήσεως και τον υπολογίζομε ως εξής:

Γνωρίζομε ότι στην ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύει η εξίσωση:

Σχ. 2.9γ.

$$\upsilon = \upsilon_o - \gamma \cdot t \qquad (1)$$

όπου υ η ταχύτητα του κινητού στο τέλος του χρόνου t, υ_o η αρχική ταχύτητα του κινητού, δηλαδή η ταχύτητα του κινητού στην αρχή του χρόνου t και γ η επιβράδυνση του κινητού.

Αν στην εξίσωση (1) θέσομε υ = 0, τότε θα έχομε το μέγιστο χρόνο της κινήσεως του κινητού:

$$0 = \upsilon_o - \gamma \cdot t_\mu$$

$$\boxed{t_\mu = \frac{\upsilon_o}{\gamma}} \text{ (τύπος του μέγιστου χρόνου κινήσεως)} \qquad (2)$$

2.9.5 Ολική μετατόπιση (μέγιστη μετατόπιση) στην ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Έστω ότι το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_o, επιβράδυνση γ, και η κίνησή του διαρκεί επί χρόνο t_μ.

Για να υπολογίσομε τη μετατόπιση κατά την οποία θα μετατοπισθεί το κινητό σε όλη τη διάρκεια της κινήσεώς του, δηλαδή ώσπου να σταματήσει, σκεπτόμαστε ως εξής.

Για κάθε ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύουν οι εξισώσεις:

$$S = \upsilon_o \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$\upsilon = \upsilon_o - \gamma \cdot t \qquad (2)$$

Αν στις εξισώσεις (1) και (2) θέσομε $t = t_\mu$ και υ = 0, θα έχομε:

$$S_\mu = \upsilon_o \cdot t_\mu - \frac{1}{2}\gamma \cdot t_\mu^2 \qquad (3)$$

$$0 = \upsilon_o - \gamma \cdot t_\mu \qquad (4)$$

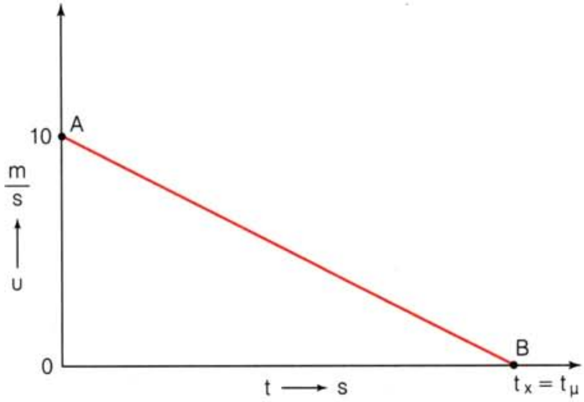
Λύνομε την (4) ως προς t_μ και έχομε:

$$t_\mu = \frac{\upsilon_o}{\gamma} \qquad (5)$$

Από τις (3) και (5) λαμβάνομε:

$$S_\mu = \upsilon_o \cdot \frac{\upsilon_o}{\gamma} - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{\upsilon_o^2}{\gamma^2}, \quad S_\mu = \frac{\upsilon_o^2}{\gamma} - \frac{\upsilon_o^2}{2\gamma} = \frac{2 \cdot \upsilon_o^2}{2\gamma} - \frac{\upsilon_o^2}{2\gamma}$$

$$\boxed{S_\mu = \frac{\upsilon_o^2}{2\gamma}} \text{ (τύπος της μέγιστης μετατοπίσεως)} \qquad (6)$$



Σχ. 2.9δ.

Η εξίσωση (6) δίνει τη μετατόπιση S_μ του κινητού ώσπου να σταματήσει (δηλαδή τη μέγιστη μετατόπιση) εφ' όσον κινηθεί με αρχική ταχύτητα υ_o και με σταθερή επιβράδυνση γ.

2.9.6 Γραφική παράσταση της σχέσεως ταχύτητας και χρόνου στην ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η σχέση ταχύτητας - χρόνου είναι: $\boxed{\upsilon = \upsilon_o - \gamma t}$.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ. 2.9δ) παριστάνει τη γραφική παράσταση της σχέσεως ταχύτητας-χρόνου, μιας ευθύγραμμης και ομαλά επιβραδυνόμενης κινήσεως με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 10$ m/s.

Παρατήρηση:
Κατά τη χρονική στιγμή t_x, η ταχύτητα του κινητού μηδενίζεται, δηλαδή το κινητό σταματά. Ο χρόνος t_x είναι ο μέγιστος χρόνος κινήσεως του κινητού, δηλαδή $t_x = t_\mu$.

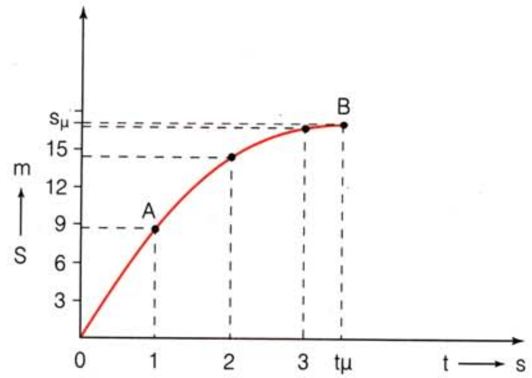
2.9.7 Γραφική παράσταση της σχέσεως μετατοπίσεως και χρόνου στην ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η σχέση μετατοπίσεως - χρόνου είναι:

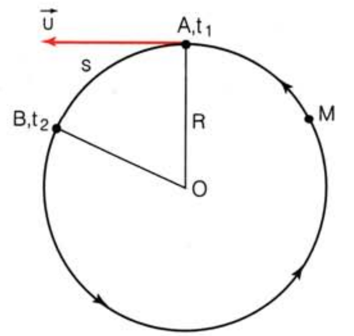
$$S = \upsilon_o \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

Η γραφική παράσταση της σχέσεως αυτής είναι καμπύλη γραμμή (παραβολή).

Το τμήμα της καμπύλης ΟΑΒ (σχ. 2.9ε) είναι η γραφική παράσταση της σχέσεως μετατοπίσεως - χρόνου μιας επιβραδυνόμενης κινήσεως με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 10$ m/s και επιβράδυνση $\gamma = 3$ m/s^2.



Σχ. 2.9ε.



Σχ. 2.10α.

Παρατήρηση:

Η μετατόπιση του κινητού ώσπου να σταματήσει είναι 16,7 m και σταμάτησε μετά από χρόνο 3,3 s.

Επομένως: $S_{\mu} = 16{,}7$ m και $t_{\mu} = 3{,}3$ s.

2.10 Ομαλή κυκλική κίνηση.

Λέμε ότι ένα κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, όταν:

1) Κινείται επάνω σε περιφέρεια κύκλου και συνέχεια προς την αυτή φορά.

2) Διατρέχει ίσα τόξα σε ίσους χρόνους.

2.10.1 Γραμμική ταχύτητα (ή απλά ταχύτητα).

Έστω ότι ένα κινητό M (σχ. 2.10α) κινείται με ομαλή κυκλική κίνηση και βρίσκεται στη θέση A της τροχιάς του κατά τη χρονική στιγμή t_1 και στο σημείο B κατά τη χρονική στιγμή t_2.

Ορίζομε ως γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του κινητού M στο σημείο A της τροχιάς του και τη χρονική στιγμή t_1 ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\upsilon}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Σημείο εφαρμογής το σημείο A.

2) Διεύθυνση, τη διεύθυνση που έχει η εφαπτομένη της περιφέρειας στο σημείο A.

3) Φορά, τη φορά της κινήσεως.

4) Μέτρο ίσο με το πηλίκο του μήκους του τόξου $\widehat{AB}$ προς το χρόνο $(t_2 - t_1)$ κατά το οποίο το διατρέχει, με την προϋπόθεση ότι ο χρόνος $(t_2 - t_1)$ είναι πολύ μικρός $[(t_2 - t_1) = \Delta t \to 0]$.

Δηλαδή: $\boxed{|\vec{\upsilon}| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \dfrac{\widehat{AB}}{\Delta t}}$

Επειδή από τον ορισμό της ομαλής κυκλικής κινήσεως το κινητό Μ, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση θα διανύει ίσα τόξα σε ίσους χρόνους, γι' αυτό η ***γραμμική του ταχύτητα θα έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία της τροχιάς του*** (σχ. 2.10β).

Επομένως, για την ομαλή κυκλική κίνηση ενός κινητού Μ (σχ. 2.10β) ισχύουν οι σχέσεις:

$$|\vec{\upsilon}_A| = |\vec{\upsilon}_B| = |\vec{\upsilon}_\Gamma| = \frac{\widehat{AB}}{t_2 - t_1} = \frac{\widehat{B\Gamma}}{t_3 - t_2} = \frac{\widehat{\Gamma\Delta}}{t_4 - t_3} = \frac{S}{t} = \upsilon$$

$$\boxed{\upsilon = \frac{S}{t}}$$

όπου γενικά υ το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κινητού, Μ και S το μήκος ενός τόξου που το έτρεξε το κινητό Μ μέσα σε χρόνο t.

Προσοχή:

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνομε τα εξής:

1) Όταν ένα κινητό Μ κινείται με κίνηση ομαλή κυκλική, τότε η γραμμική ταχύτητά του είναι εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της τροχιάς του και έχει φορά, τη φορά της κινήσεώς του.

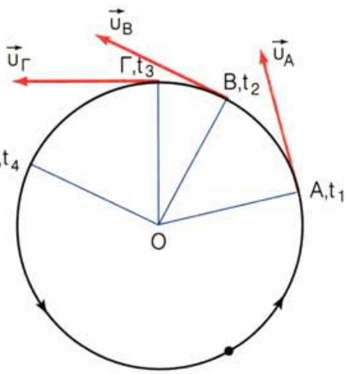
2) Όταν ένα κινητό Μ κινείται με κίνηση ομαλή κυκλική, τότε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητάς του παραμένει σταθερό (το ίδιο) σε όλη τη διάρκεια της κινήσεώς του.

3) Για να υπολογίσομε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ ενός κινητού Μ που εκτελεί κίνηση ομαλή κυκλική, διαιρούμε το μήκος S ενός τόξου της περιφέρειάς του διά του χρόνου t που χρειάστηκε για να το διανύσει:

$$\boxed{\upsilon = \frac{S}{t}} \qquad (1)$$

4) Από τη σχέση (1) προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{S = \upsilon \cdot t} \qquad (2)$$



Σχ. 2.10β.

Η σχέση (2) είναι η εξίσωση για το διάστημα σε συνάρτηση με το χρόνο της ομαλής κυκλική κινήσεως, γιατί μας προσδιορίζει τη θέση του κινητού Μ για κάθε χρονική στιγμή t. Γενικότερα μας δίνει το μήκος S του τόξου της τροχιάς το οποίο γράφει το κινητό με γραμμική ταχύτητα μέτρου υ μέσα σε χρόνο t ($t = t_2 - t_1$).

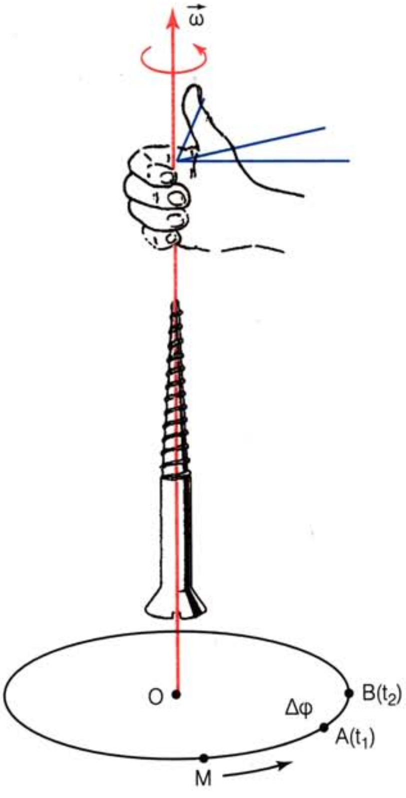
2.10.2 Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ στην κυκλική ομαλή κίνηση.

Έστω ότι το κινητό Μ κινείται με κίνηση κυκλική ομαλή και κατά τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση Α, ενώ κατά τη χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στη θέση Β και η επίκεντρη γωνία του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι η $\Delta\varphi$ (σχ. 2.10γ).

Ονομάζομε ***γωνιακή ταχύτητα*** του κινητού Μ στη θέση Α και τη χρονική στιγμή t_1 το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\omega}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Σημείο εφαρμογής το κέντρο Ο της περιφέρειας, την οποία διαγράφει το κινητό Μ.

2) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της περιφέρειας που διαγράφει το κινητό Μ.



Σχ. 2.10γ.

3) Φορά, τη φορά που προχωράει δεξιόστροφη βίδα όταν περιστρέφεται όπως περιστρέφεται το κινητό.

4) Μέτρο ίσο με το πηλίκο της επίκεντρης γωνίας Δφ του τόξου $\widehat{AB}$ προς το χρόνο $(t_2 - t_1) = \Delta t$ που χρειάσθηκε το κινητό για να διανύσει το τόξο $\widehat{AB}$, ***με την προϋπόθεση ότι ο χρόνος $\Delta t = (t_2 - t_1)$*** είναι πολύ μικρός $[\Delta t = (t_2 - t_1) \to 0]$. Δηλαδή:

$$|\vec{\omega}| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{1}$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση επειδή το κινητό σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσα τόξα (επομένως και επίκεντρες γωνίες ίσες) το όριο της σχέσεως (1) είναι σταθερό. Συγκεκριμένα:

$$|\vec{\omega}| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi}{t}, \quad \boxed{|\vec{\omega}| = \frac{\varphi}{t}} \tag{2}$$

όπου φ η επίκεντρη γωνία, η οποία αντιστοιχεί σε ένα τόξο S, το οποίο διαγράφει το κινητό μέσα σε χρόνο t.

Προσοχή:

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνομε τα εξής:

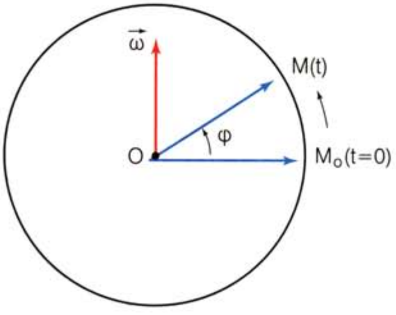
1) Όταν ένα κινητό Μ κινείται με κίνηση ομαλή κυκλική, τότε η γωνιακή του ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι σε όλα τα σημεία της τροχιάς του η ίδια, δηλαδή το κινητό κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και ισχύει η σχέση (2).

2) Όταν ένα κινητό Μ κινείται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, τότε το κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

3) Από τη σχέση (2) προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{\varphi = |\vec{\omega}| \cdot t} \tag{3}$$

Με τη σχέση (3) προσδιορίζομε τη γωνία φ την οποία διαγράφει η επιβατική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του κινητού Μ που κινείται με γωνιακή ταχύτητα της οποίας το μέτρο είναι $|\vec{\omega}|$, μέσα στο χρόνο t (σχ. 2.10δ).



Σχ. 2.10δ.

Σημείωση:

Η εκάστοτε επιβατική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ προσδιορίζει την αντίστοιχη θέση του κινητού γι' αυτό ονομάζεται και διάνυσμα θέσεως.

2.10.3 Περίοδος και συχνότητα ομαλής κυκλικής κινήσεως.

Η ομαλή κυκλική κίνηση είναι περιοδική κίνηση.

Περίοδος (T) μιας ομαλής κυκλικής κινήσεως λέγεται ο χρόνος που χρειάζεται το κινητό για να εκτελέσει μία ολόκληρη περιστροφή (περιφορά).

Συχνότητα (ν) ομαλής κυκλικής κινήσεως λέγεται ο αριθμός των περιστροφών (περιφορών) που εκτελεί το κινητό στη μονάδα του χρόνου.

Μονάδα συχνότητας είναι για όλα τα συστήματα ο κύκλος ανά s (c/s ή Hz), δηλαδή μια στροφή κατά δευτερόλεπτο.

Πολλαπλάσια της μονάδας αυτής είναι το kHz και το MHz:

1 kHz = 1000 c/s = 1000 Hz

1MHz = 1000 kHz

Σχέσεις μεταξύ των μεγεθών: ν, T, υ, ω.

1) Από τον ορισμό της περιόδου (T) και της συχνότητας (ν) εύκολα προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

2) Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ (ορισμός γωνιακής ταχύτητας)} \qquad (1)$$

$$\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ (ορισμός γραμμικής ταχύτητας)} \qquad (2)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{r} \text{ (r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς)} \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνομε τη σχέση:

$$\upsilon = \frac{\Delta\varphi \cdot r}{\Delta t} \qquad (4)$$

Από τις (1) και (4) προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{\upsilon = \omega \cdot r}$$

3) Ισχύει η σχέση:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Μέσα σε χρόνο μιας περιόδου T, δηλαδή $\Delta t = T$, το κινητό γράφει μία περιστροφή, δηλαδή $\Delta\varphi = 2\pi$.

Επομένως έχομε:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}, \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

4) Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ και } T = \frac{1}{\nu}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

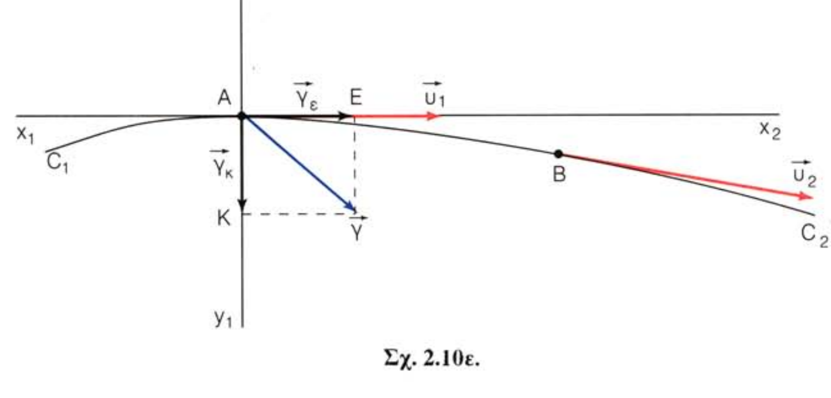
2.10.4 Μονάδα γωνιακής ταχύτητας.

Από τη σχέση $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ προκύπτει ότι η μονάδα γωνιακής ταχύτητας είναι το 1 rad/s. Η μονάδα αυτή γράφεται και $1\,s^{-1}$, γιατί το rad είναι μέγεθος αδιάστατο.

2.10.5 Επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση.

Έστω ότι ένα κινητό κινείται σε τροχιά $C_1 C_2$ (σχ. 2.10ε) με φορά από το C_1 προς το C_2 και ότι κατά τη χρονική στιγμή t_1 οπότε βρίσκεται στο Α έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ενώ κατά τη χρονική στιγμή t_2, οπότε βρίσκεται στο Β έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ [($t_2 - t_1$ = πολύ μικρό, δηλαδή $(t_2 - t_1) \to 0$)]. Έστω ακόμη ότι η επιτάχυνση που έχει το κινητό στο Α είναι η $\vec{\gamma}$.

Από το σημείο Α γράφομε δύο ευθείες: τη x_1x_2, εφαπτομένη της τροχιάς στο σημείο Α (αυτή συμπίπτει με τη διεύθυνση της $\vec{\upsilon}_1$) και τη y_1y_2 κάθετη



Σχ. 2.10ε.

στην εφαπτομένη της τροχιάς στο σημείο Α (δηλαδή κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$). Από το τέλος του διανύσματος $\vec{\gamma}$ γράφομε:

1) Μία παράλληλη προς την ευθεία y_1y_2. Αυτή τέμνει την x_1x_2 έστω στο σημείο Ε.

2) Μία παράλληλη προς την ευθεία x_1x_2. Αυτή τέμνει την y_1y_2 έστω στο σημείο Κ.

Τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AK}$ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες του διανύσματος $\vec{\gamma}$. Η διανυσματική συνιστώσα $\overrightarrow{AE}$ που έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς στο σημείο Α (δηλαδή τη διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$) ονομάζεται επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{\gamma}_\varepsilon$ του κινητού στο σημείο Α και έχει μέτρο το πηλίκο της διαφοράς των μέτρων των δύο ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ διά του πολύ μικρού χρόνου $(t_2 - t_1) = \Delta t \rightarrow 0$, δηλαδή: $\boxed{\gamma_\varepsilon = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\Delta t}}$.

Η διανυσματική συνιστώσα $\overrightarrow{AK}$ που έχει τη διεύθυνση της κάθετης στην εφαπτομένη της τροχιάς στο σημείο Α (δηλαδή είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$) ονομάζεται κεντρομόλος $\vec{\gamma}_\kappa$ επιτάχυνση του κινητού στο σημείο Α και έχει φορά από το Α προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο Α και μέτρο το πηλίκο του τετραγώνου του μέτρου της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ διά του μέτρου της ακτίνας καμπυλότητας (R) της τροχιάς στο σημείο Α. Δηλαδή:

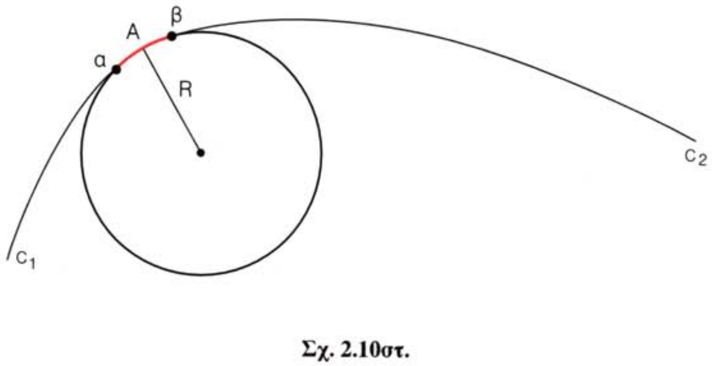
$$\boxed{\gamma_\kappa = \frac{\upsilon_1^2}{R}}$$

Σημείωση:

Για να προσδιορίσομε την ακτίνα καμπυλότητας σε ένα σημείο, Α, μιας καμπύλης, π.χ. της C_1C_2 (σχ. 2.10στ) εργαζόμασθε ως εξής:

1) Ορίζομε εκατέρωθεν του Α δύο σημεία α και β που είναι πολύ κοντά σε αυτό.

2) Γράφομε την περιφέρεια που διέρχεται από τα σημεία α, Α, β. Η ακτίνα R της περιφέρειας που γράψαμε είναι η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης C_1C_2 στο σημείο Α.



Σχ. 2.10στ.

2.10.6 Επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση.

Έστω ότι το κινητό Μ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε τροχιά που έχει ακτίνα R (σχ. 2.10ζ).

Όταν βρίσκεται στη θέση Α έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ και όταν βρίσκεται στη θέση Β έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$.

Οι δύο ταχύτητες $\vec{\upsilon}_A$ και $\vec{\upsilon}_B$ έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά διαφορετική διεύθυνση, είναι επομένως διαφορετικές (υπενθυμίζεται ότι η γραμμική ταχύτητα είναι εφαπτόμενη της τροχιάς σε κάθε θέση του κινητού). Ώστε η γραμμική ταχύτητα του κινητού Μ που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση μεταβάλλεται από το Α στο Β και η μεταβολή αυτή είναι: $\overrightarrow{\Delta\upsilon} = \vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A$ (σχ. 2.10ζ).

Όταν η ταχύτητα ενός κινητού μεταβάλλεται (είτε κατά το μέτρο, είτε κατά τη διεύθυνση είτε κατά τη φορά) το κινητό αυτό έχει επιτάχυνση. Επομένως το κινητό Μ που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει επιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$ γιατί μεταβάλλεται η διεύθυνση της ταχύτητάς του. Η επιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$ (σχ. 2.10ζ) του κινητού Μ, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε ένα σημείο Α της τροχιάς του είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

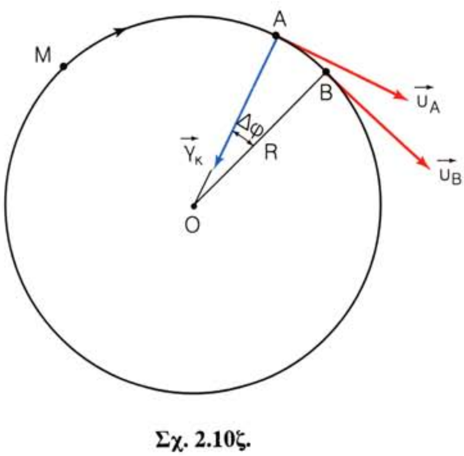
1) Σημείο εφαρμογής, το σημείο Α της τροχιάς του.

2) Διεύθυνση, τη διεύθυνση της ακτίνας ΑΟ (δηλ. η διεύθυνση της $\vec{\gamma}_\kappa$ είναι κάθετη επάνω στη διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$).

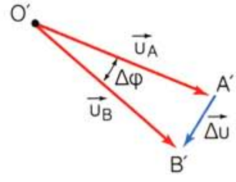
3) Φορά, τη φορά από το σημείο Α προς το κέντρο του κύκλου.

4) Μέτρο ίσο με το πηλίκο του τετραγώνου του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του κινητού διά του μήκους της ακτίνας R της περιφέρειας. Δηλαδή:

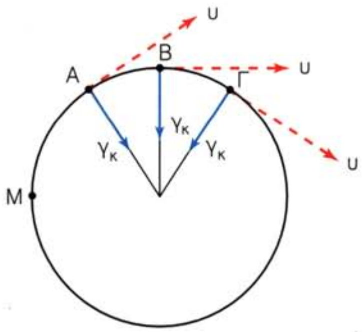
$$|\vec{\gamma}_\kappa| = \frac{|\vec{\upsilon}_A|^2}{R}$$



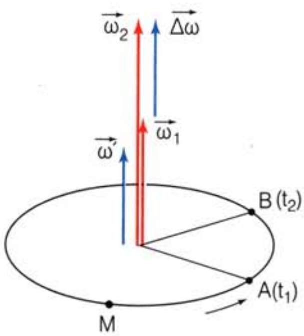
Σχ. 2.10ζ.



Σχ. 2.10η.



Σχ. 2.10θ.



Σχ. 2.10ι.

Σημείωση:

Η επιτάχυνση κινητού που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει σε όλα τα σημεία της τροχιάς του φορά από το κινητό προς το κέντρο της περιφέρειας (σχ. 2.10θ). Γι' αυτό την επιτάχυνση αυτή την ονομάζομε κεντρομόλο επιτάχυνση.

Προσοχή:

Ένα κινητό που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει ***μόνο*** κεντρομόλο επιτάχυνση, γιατί μεταβάλλεται ***μόνο*** η διεύθυνση της γραμμικής του ταχύτητας.

Δηλαδή στην ομαλή κυκλική κίνηση ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{|\vec{\gamma}_\kappa| = \sigma\tau\alpha\theta \quad \vec{\gamma}_{\varepsilon\pi} = \vec{0}}$$

2.10.7 Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$.

Έστω ότι το κινητό Μ εκτελεί κίνηση κυκλική (όχι όμως και ομαλή) και τη χρονική στιγμή t_1 οπότε βρίσκεται στη θέση Α έχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_1$, ενώ τη χρονική στιγμή t_2 οπότε βρίσκεται στη θέση Β έχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_2$ (σχ. 2.10ι).

Δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα του κινητού Μ μέσα σε χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1$ μεταβάλλεται κατά $\overrightarrow{\Delta\omega}$.

Ονομάζομε ***γωνιακή επιτάχυνση*** $\vec{\omega}'$ του κινητού Μ που εκτελεί κίνηση κυκλική (όχι όμως και ομαλή) τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία βρίσκεται στη θέση Α, ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Διεύθυνση και φορά, τη διεύθυνση και τη φορά της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\overrightarrow{\Delta\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$.

2) Μέτρο, το πηλίκο του μέτρου της μεταβολής $\overrightarrow{\Delta\omega}$ της γωνιακής ταχύτητας προς το χρόνο Δt, μέσα στον οποίο γίνεται αυτή η μεταβολή με την προϋπόθεση ότι ο χρόνος $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι πολύ μικρός:

$$|\vec{\omega}'| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega}|}{\Delta t}$$

Σημείωση:

Όταν ένα κινητό Μ εκτελεί κυκλική και ομαλή κίνηση η γωνιακή του επιτάχυνση είναι ίση με μηδέν ($\vec{\omega}' = 0$), γιατί η γωνιακή του ταχύτητα $\vec{\omega}$ σε όλα τα σημεία της τροχιάς του είναι η ίδια:

$$\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 = \overrightarrow{\Delta\omega} = 0 \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\Delta\omega} = 0 \Rightarrow \vec{\omega}' = 0$$

Μονάδα γωνιακής επιταχύνσεως $\vec{\omega}'$.

Έχομε: $\omega' = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{1\,\text{rad/s}}{1\,\text{s}} = 1\,\text{rad/s}^2 = 1\,\text{s}^{-2}$

Επομένως η μονάδα γωνιακής επιταχύνσεως είναι: 1 s^{-2}

Γενικές παρατηρήσεις:

Στην ομαλή κυκλική κίνηση κινητού ισχύουν τα εξής:

1) Η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του κινητού:
- Είναι κάθετη στην ακτίνα σε κάθε σημείο της τροχιάς του.
- Έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία της τροχιάς του.

2) Το κινητό έχει μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία έχει:
- Σε όλα τα σημεία της τροχιάς του το ίδιο μέτρο.
- Φορά από αυτό (το κινητό) προς το κέντρο της περιφέρειας που διαγράφει.

3) Η γωνιακή του ταχύτητα $\vec{\omega}$ σε κάθε σημείο της τροχιάς του έχει το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά ($\vec{\omega}$ = σταθ.).

4) Το κινητό διαγράφει (διανύει) σε ίσους χρόνους ίσα τόξα.

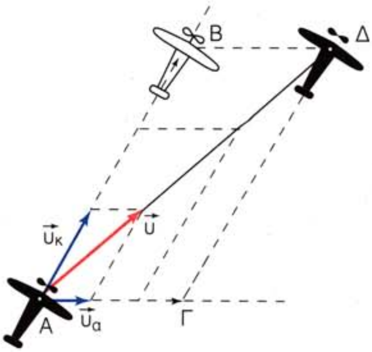
5) Η επιβατική του ακτίνα (το διάνυσμα θέσεώς του) σε ίσους χρόνους γράφει ίσες γωνίες.

6) Η επιβατική ακτίνα έχει σταθερό μέτρο.

2.11 Αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεως. Συνιστάμενη (ή σύνθετη κίνηση) δύο ή περισσοτέρων κινήσεων.

Η αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων είναι εμπειρική και ορίζει ότι: ***Αν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα πολλές κινήσεις, τότε κάθε κίνηση από αυτές δεν τροποποιείται από τις άλλες.***

Σύμφωνα με την αρχή αυτή ισχύουν τα ακόλουθα. Αν ένα κινητό κατά τη διάρκεια χρόνου t εκτελεί συγχρόνως δύο ή περισσότερες κινήσεις, τότε το κινητό κατά τη διάρκεια του χρόνου t εκτελεί μία κίνηση, της οποίας το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα που τελικά θα προέκυπτε αν το κινητό εκτελούσε καθεμιά από τις κινήσεις αυτές διαδοχικά και την καθεμιά στον ίδιο χρόνο t. Την κίνηση αυτή την ονομάζομε συνισταμένη των κινήσεων που εκτελεί συγχρόνως το κινητό και τις κινήσεις αυτές τις ονομάζομε συνιστώσες της κινήσεως αυτής.



Σχ. 2. 11α.

Μπορούμε επομένως να μελετήσομε τη συνισταμένη κίνηση κινητού που εκτελεί συγχρόνως δύο ή περισσότερες κινήσεις, αν θεωρήσομε ότι το κινητό εκτελεί τις κινήσεις αυτές διαδοχικά και μελετήσομε την καθεμιά χωριστά.

Έστω ότι ο κινητήρας αεροπλάνου (σχ. 2.11α) προσδίδει σε αυτό σταθερή ταχύτητας $\vec{υ}_κ$, ενώ ταυτόχρονα ο άνεμος το παρασύρει με σταθερή ταχύτητα $\vec{υ}_α$. Δηλαδή το αεροπλάνο εκτελεί ταυτόχρονα δύο κινήσεις, μία με ταχύτητα $\vec{υ}_κ$ και μία με ταχύτητα $\vec{υ}_α$ (ή αλλιώς εκτελεί σύνθετη κίνηση).

Αν το αεροπλάνο εκτελούσε μόνο την κίνηση με ταχύτητα $\vec{υ}_κ$ (δηλ. αν δε παρασυρόταν από τον αέρα, $\vec{υ}_α = 0$), θα ερχόταν, μετά από χρόνο t, από τη θέση Α έστω στη θέση Β.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{υ}_κ \cdot t$$

Αν τώρα το αεροπλάνο από τη θέση Β εκτελούσε μόνο την κίνηση με ταχύτητα $\vec{υ}_α$ (αν δηλαδή ο κινητήρας του δεν λειτουργούσε) θα ερχόταν, μετά από χρόνο t, από τη θέση Β έστω στη θέση Δ.

$$\overrightarrow{BΔ} = \vec{υ}_α \cdot t$$

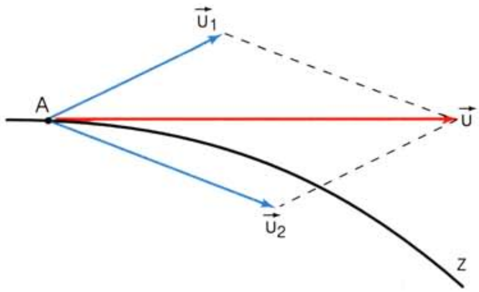
Όταν το αεροπλάνο εκτελεί ταυτόχρονα και τις δύο κινήσεις, δηλαδή εκτελεί τη σύνθετη κίνηση, μετά από χρόνο t έρχεται από τη θέση Α στη θέση Δ, δηλαδή στη θέση που θα ερχόταν αν εκτελούσε διαδοχικά τις κινήσεις αυτές, την καθεμιά σε χρόνο t $\overrightarrow{AΔ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BΔ}$.

Προσοχή:

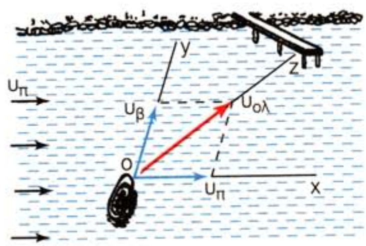
Γενικά μπορούμε να υπολογίζομε το αποτέλεσμα της συνισταμένης κινήσεως που εκτελεί ένα κινητό, αν υπολογίζομε το απότέλεσμα της καθεμιάς από τις συνιστώσες κινήσεις της, θεωρώντας ότι οι κινήσεις αυτές γίνονται διαδοχικά.

2.11.1 Ταχύτητα κινητού που εκτελεί συγχρόνως δύο κινήσεις (δηλ. ταχύτητα κινητού που εκτελεί τη συνισταμένη κίνηση των δύο αυτών κινήσεων).

Έστω ότι κινητό που εκτελεί συγχρόνως δύο κινήσεις, βρίσκεται κατά τη



Σχ. 2.11β.



Σχ. 2.11γ.

χρονική στιγμή t στη θέση A της τροχιάς του Z (σχ. 2.11β). Έστω επίσης ότι το κινητό κατά την ίδια χρονική στιγμή t, αν εκτελούσε μόνο τη μία κίνηση, θα είχε ταχύτητα $\vec{υ}_1$ και αν εκτελούσε μόνο την άλλη κίνηση θα είχε ταχύτητα $\vec{υ}_2$.

Τότε η ταχύτητα $\vec{υ}$ του κινητού, που εκτελεί συγχρόνως τις δύο αυτές κινήσεις, κατά τη χρονική στιγμή t και στη θέση A είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$.

Δηλαδή: $\boxed{\vec{υ} = \vec{υ}_1 + \vec{υ}_2}$

Σημείωση:

1) Η ταχύτητα $\vec{υ}$ είναι εφαπτομένη της τροχιάς Z στο σημείο A.

2) Η ταχύτητα $\vec{υ}$ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που έχει ως δύο προσκείμενες πλευρές τις $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$.

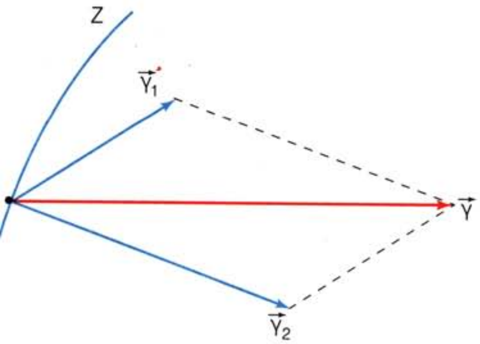
Έστω ότι στην περίπτωση της βενζινάκατου (σχ. 2.11γ) που διασχίζει έναν ποταμό, ο κινητήρας της προσδίδει σ' αυτή σταθερή ταχύτητα $\vec{υ}_β$, ενώ το νερό κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{υ}_π$.

Αν το νερό ήταν ακίνητο, τότε η βενζινάκατος θα εκτελούσε μόνο την κίνηση κατά τη διεύθυνση Oy και θα είχε ταχύτητα $\vec{υ}_β$. Αν ο κινητήρας της βενζινακάτου δε λειτουργούσε, τότε αυτή θα εκτελούσε μόνο την κίνηση κατά τη διεύθυνση Ox και θα είχε ταχύτητα $\vec{υ}_π$.

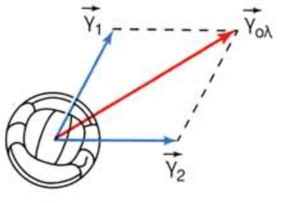
Εφ' όσον το νερό κινείται και ο κινητήρας λειτουργεί τότε η βενζινάκατος εκτελεί συγχρόνως και τις δύο αυτές κινήσεις με ταχύτητα $\vec{υ}_{ολ}$, που είναι η συνισταμένη των $\vec{υ}_β$ και $\vec{υ}_π$ ($\vec{υ}_{ολ} = \vec{υ}_β + \vec{υ}_π$) και κατά τη διεύθυνση OZ.

2.11.2 Επιτάχυνση κινητού που εκτελεί συγχρόνως δύο κινήσεις (δηλαδή επιτάχυνση κινητού που εκτελεί τη συνισταμένη κίνηση των δύο αυτών κινήσεων).

Έστω ότι κινητό που εκτελεί συγχρόνως δύο κινήσεις, κατά τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση A της τροχιάς του Z (σχ. 2.11δ). Έστω επίσης ότι το



Σχ. 2.11δ.



Σχ. 2.11ε.

κινητό κατά την ίδια χρονική στιγμή t, αν εκτελούσε μόνο τη μία κίνηση, θα είχε επιτάχυνση $\vec{\gamma}_1$, ενώ αν εκτελούσε μόνο την άλλη κίνηση, θα είχε επιτάχυνση $\vec{\gamma}_2$.

Η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ του κινητού, που εκτελεί συγχρόνως τις δύο αυτές κινήσεις, κατά τη χρονική στιγμή t και στη θέση Α είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο επιταχύνσεων $\vec{\gamma}_1$ και $\vec{\gamma}_2$.

Δηλαδή: $$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$$

Έστω ότι τη μπάλα Α (σχ. 2.11ε) τη λακτίζουν ταυτόχρονα δύο παίκτες. Αν ο ένας παίκτης προσδίδει στη μπάλα επιτάχυνση $\vec{\gamma}_1$ και ο άλλος $\vec{\gamma}_2$, τότε η πραγματική επιτάχυνση $\vec{\gamma}_{ολ}$ της μπάλας θα είναι η συνισταμένη των $\vec{\gamma}_1$ και $\vec{\gamma}_2$, δηλαδή:

$$\vec{\gamma}_{ολ} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$$

Σημείωση:

Η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που έχει ως δύο προσκείμενες πλευρές τις $\vec{\gamma}_1$ και $\vec{\gamma}_2$.

2.12 Σχετική κίνηση – Σχετική ταχύτητα.

Έχομε αναφέρει ότι ένα σώμα Α κινείται ως προς ένα άλλο Β όταν αλλάζει θέση ως προς το Β.

Επομένως, η κίνηση ενός σώματος Α εξαρτάται ως προς ποιο σώμα αναφέρεται και μπορεί να είναι διαφορετική αν αναφέρεται ως προς διαφορετικά σώματα.

Για παράδειγμα, το πέδιλο για τον ποδηλάτη εκτελεί κυκλική κίνηση, ενώ το πέδιλο για παρατηρητή ιστάμενο στο έδαφος διαγράφει μία κυματοειδή γραμμή.

Επειδή λοιπόν κάθε κίνηση είναι σχετική (αφού αναφέρεται ως προς συγκεκριμένο σώμα ή σύστημα), γι' αυτό πολλές φορές η μελέτη των στοιχείων μιας κινήσεως γίνεται με βάση τη «σχετικότητα» αυτή και κυρίως με την έννοια της σχετικής ταχύτητας.

Έστω δύο κινητά Α και Β (σχ. 2.12α), τα οποία έχουν αντίστοιχα ταχύτητες $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \vec{\upsilon}_1$ και $\overrightarrow{\text{ΒΔ}} = \vec{\upsilon}_2$ ως προς το αυτό σύστημα αναφοράς (π.χ. ως προς τη γη).

Γενικά τη σχετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\sigma$ του κινητού Β ως προς το Α την υπολογίζομε προσθέτοντας διανυσματικά την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ του Β με την αντίθετη ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ του Α, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\upsilon}_\sigma = \vec{\upsilon}_2 + (-\vec{\upsilon}_1)}$$

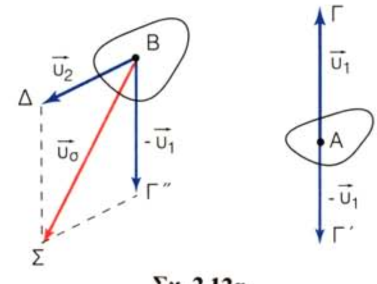
Για παράδειγμα αναφέρομε τα πιο κάτω:
Δύο οχήματα Β και Α κινούνται όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12β.
Η σχετική ταχύτητα του $\vec{\upsilon}_\sigma$ του Β ως προς το Α είναι:

$$\vec{\upsilon}_\sigma = \vec{\upsilon}_2 + (-\vec{\upsilon}_1)\,,\ \bar{\upsilon}_\sigma = \bar{\upsilon}_2 + (-\bar{\upsilon}_1)\,,\ \bar{\upsilon}_\sigma = 13\ \text{m/s} + (-20\ \text{m/s}) = -7\ \text{m/s}$$

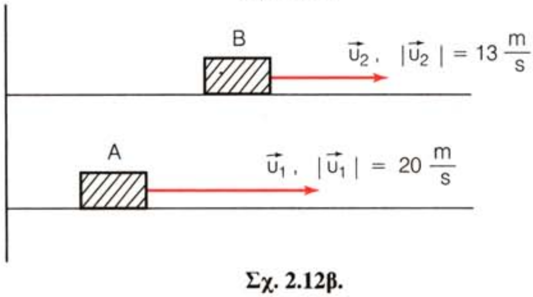
Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι, αν και το όχημα Α και το όχημα Β κινούνται προς τα δεξιά, το Β θα κινείται προς τα αριστερά ως προς το όχημα Α με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\sigma$ που έχει μέτρο 7 m/s.

2.13 Μεταφορική κίνηση στερεού σώματος.

Ένα στερεό σώμα αποτελείται από πολλά υλικά σημεία, δηλαδή από



Σχ. 2.12α.



Σχ. 2.12β.

πολλές στοιχειώδεις μάζες.

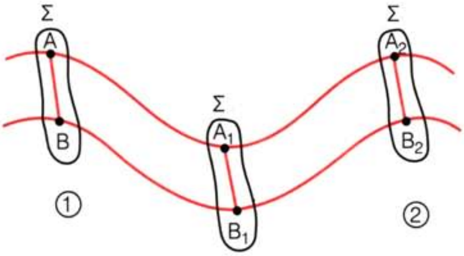
Λέμε ότι ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, όταν όλα του τα υλικά σημεία σε κάθε χρονική στιγμή της κινήσεώς του έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και την ίδια επιτάχυνση $\vec{\gamma}$.

Έστω ότι σώμα Σ μετακινείται από τη θέση 1 στη θέση 2 με κίνηση μεταφορική (σχ. 2.13α).

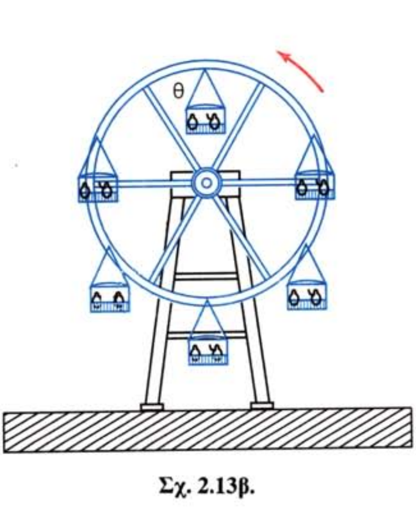
Παρατηρούμε ότι σε οποιαδήποτε θέση και να βρίσκεται το σώμα κατά τη μετακίνηση αυτή, ένα οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα του ΑΒ παραμένει παράλληλο προς την αρχική του θέση ($AB \| A_1B_1 \| A_2B_2$). Αυτό συμβαίνει, γιατί σε κάθε στιγμή της μεταφορικής κινήσεως του σώματος Σ όλα τα υλικά σημεία του έχουν ίδιες ταχύτητες και ίδιες επιταχύνσεις.

Από τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξομε στην εξής διατύπωση: ***Ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, όταν κάθε ευθύγραμμο τμήμα του παραμένει κατά την κίνηση αυτή παράλληλο προς την αρχική του θέση.***

Οι θαλαμίσκοι του «γιγαντιαίου τροχού» (σχ. 2.13β) εκτελούν μεταφορική κίνηση. Ο τροχός μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα. Στην περιφέρειά του είναι κρεμασμένοι οι θαλαμίσκοι. Όταν περιστρέφεται ο τροχός, οι θαλαμίσκοι παραμένουν διαρκώς παράλληλοι προς τους εαυτούς τους, εκτελούν



Σχ. 2.13α.



Σχ. 2.13β.

επομένως καθαρά μεταφορική κίνηση.

Προσοχή:

Όταν ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, τότε όλα του τα υλικά σημεία εκτελούν κάθε στιγμή της μεταφορικής κινήσεώς του την ίδια κίνηση, που εκτελεί το σώμα.

Επομένως, για να μελετήσομε τη μεταφορική κίνηση ενός σώματος, ***αρκεί να μελετήσομε την κίνηση ενός σημείου του, στο οποίο θεωρούμε συγκεντρωμένη όλη τη μάζα του σώματος.***

Γενικά, κατά τη μελέτη της μεταφορικής κινήσεως σώματος που έχει μάζα m θεωρούμε το σώμα ως ένα υλικό σημείο μάζας m και εφαρμόζομε όλους τους νόμους της δυναμικής του υλικού σημείου. Συνήθως ως υλικό σημείο μάζας m θεωρούμε το κέντρο βάρους του σώματος.

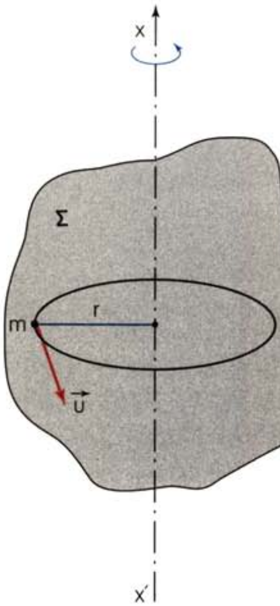
2.14 Περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα.

2.14.1 Περιστροφική κίνηση υλικού σημείου γύρω από σταθερό άξονα.

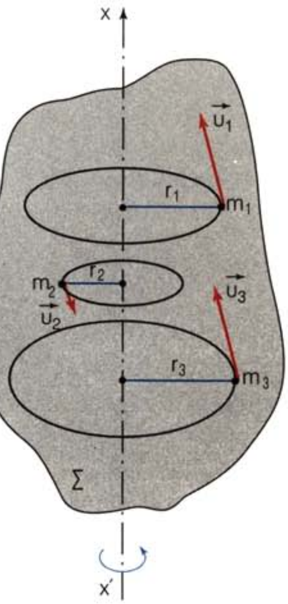
Ένα υλικό σημείο m εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από ένα σταθερό άξονα (x΄x), όταν γράφει κυκλική τροχιά που το κέντρο της βρίσκεται επάνω στον άξονα (x΄x) και το επίπεδό της είναι κάθετο σε αυτόν (σχ. 2.14α).

Σημείωση:

Για σημείο που εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα ισχύουν όλοι οι νόμοι και ο ορισμοί της κυκλικής κινήσεως.



Σχ. 2.14α.



Σχ. 2.14β.

2.14.2 Περιστροφική κίνηση στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα.

Ένα στερεό σώμα Σ εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα (x΄x), όταν κάθε του σημείο εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα αυτόν (x΄x), δηλαδή όταν όλα τα σημεία του γράφουν ομόρροπες κυκλικές τροχιές, που τα κέντρα τους βρίσκονται επάνω στον άξονα x΄x και τα επίπεδά τους είναι κάθετα σε αυτόν (σχ. 2.14β).

Τα χαρακτηριστικά της περιστροφικής κινήσεως στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα είναι τα εξής:

1) Σε κάθε χρονική στιγμή, όλα τα υλικά σημεία του περιστρεφόμενου σώ-ματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, διότι σε χρόνο Δt υφίστανται όλα την ίδια γωνιακή μετατόπιση Δφ (αφού δηλ. σε χρόνο Δt όλα τα υλικά σημεία του σώματος γράφουν τόξα τα οποία αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες με κέντρα τα σημεία του άξονα).

2) Όλα τα υλικά σημεία του περιστρεφόμενου σώματος έχουν την ίδια συ-χνότητα και την ίδια περίοδο περιστροφής, αφού όλα έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

3) Οι γραμμικές ταχύτητες των διαφόρων σημείων του περιστρεφόμενου στερεού είναι ανάλογες των αποστάσεων αυτών από τον άξονα περιστροφής.

Ένα σημείο που απέχει r από τον άξονα θα έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon = \omega \cdot r$. Επομένως, η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου του στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι, τόσο μεγαλύτερη, όσο το σημείο αυτό βρίσκεται μακρύτερα από τον άξονα περιστροφής.

Σημείωση:

1) Όταν λέμε γωνιακή $\vec{\omega}$ και γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$ κατά τη χρονική στιγμή t ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, εννοούμε τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$ που έχει κατά τη χρονική στιγμή t ένα οποιοδήποτε σημείο του σώματος.

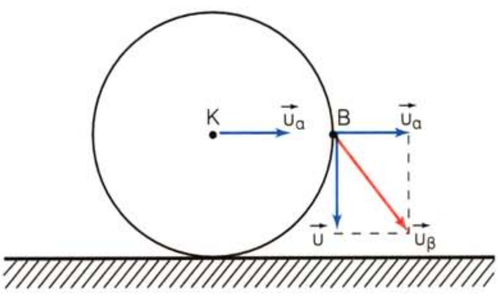
2) Όταν λέμε συχνότητα και περίοδο ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, εννοούμε την περίοδο και τη συχνότητα με την οποία περιστρέφεται ένα οποιοδήποτε σημείο του σώματος αυτού γύρω από τον άξονα αυτόν.

2.15 Σύνθετη (τυχαία) κίνηση στερεού σώματος.

Όταν ένα σώμα εκτελεί μία σύνθετη (τυχαία) κίνηση, όσο πολύπλοκη και να είναι, μπορούμε να τη θεωρήσομε ως απότέλεσμα δύο κινήσεων που εκτελεί το σώμα ταυτόχρονα: μιας μεταφορικής κινήσεως ολόκληρου του σώματος και μιας περιστροφικής.

Ο τροχός ενός αυτοκινήτου (σχ. 2.15) που κυλά στο έδαφος εκτελεί μία σύνθετη κίνηση, που μπορεί να θεωρηθεί ότι αναλύεται σε δύο κινήσεις:

1) Μία μεταφορική ολόκληρου του τροχού (με ταχύτητα όση είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου $\vec{\upsilon}_\alpha$ και 2) μία περιστροφική του τροχού γύρω από τον άξονά του.



Σχ. 2.15.

Το σημείο Β του τροχού στην πραγματικότητα έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως το γεωμετρικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων: Της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_\alpha$ που θα είναι η ταχύτητα της μεταφορικής του κινήσεως (δηλαδή η ταχύτητα της μεταφορικής κινήσεως ολόκληρου του τροχού, ακριβέστερα του άξονά του) και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ ($\upsilon = \omega$ R) που θα είναι η γραμμική ταχύ-τητα της περιστροφικής του κινήσεως γύρω από τον άξονα του τροχού (ω = η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ολόκληρου του τροχού γύρω από τον άξονα, R = η ακτίνα του τροχού).

2.16 Εφαρμογές της κυκλικής κινήσεως. (Μετάδοση περιστροφικής κινήσεως).

Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να μεταδώσομε μία περιστροφική κίνηση από έναν άξονα σε άλλον. Για τη μετάδοση της περιστροφικής κινήσεως από έναν άξονα σε άλλον και για την αύξηση ή ελάττωση του αριθμού των στροφών ανά πρώτο λεπτό χρησιμοποιούμε τροχαλίες, οδοντωτούς τροχούς κλπ.

Οι κυριότεροι τρόποι μεταδόσεως περιστροφικής κινήσεως είναι οι εξής:

α) Ιμαντοκίνηση.

β) Αλυσοκίνηση.

γ) Οδοντοκίνηση.

Παρατηρήσεις:

1) Κινούμενος άξονας ονομάζεται ο άξονας στον οποίο μεταδίδεται η περιστροφική κίνηση, ενώ ο άλλος καλείται κινητήριος άξονας.

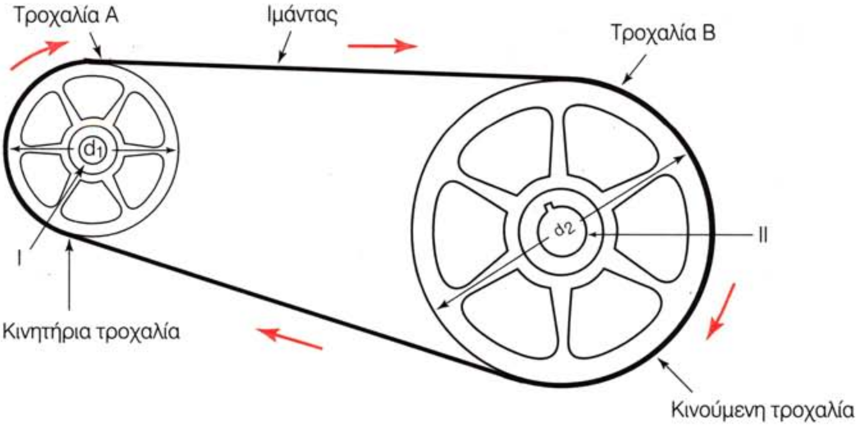
2) Σχέση μεταδόσεως i της κινήσεως ονομάζεται ο λόγος

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = i} \qquad (1)$$

όπου n_2 είναι η περιστροφική ταχύτητα του κινούμενου άξονα και n_1 είναι η περιστροφική ταχύτητα του κινητού άξονα.

Όταν λέμε περιστροφική ταχύτητα άξονα, στην πράξη εννοούμε τον αριθμό των στροφών του ανά λεπτό.

3) Συνήθως, με τη μετάδοση της περιστροφικής κινήσεως επιζητείται και μείωση των στροφών ανά λεπτό στον κινούμενο άξονα. Ευνόητο είναι ότι στην περίπτωση μειώσεως των στροφών ο λόγος (1) είναι μικρότερος της μονάδας.



Σχ. 2.16α.

α) Ιμαντοκίνηση.

Απλή ιμαντοκίνηση (ή απλή μετάδοση κινήσεως με τροχαλίες και ιμάντα).

Έχομε δύο ***παράλληλους*** άξονες Ι και ΙΙ και θέλομε να μεταβιβασθεί η περιστροφική κίνηση του άξονα Ι στον άξονα ΙΙ. Αυτό μπορούμε να το επιτύχομε και με τον εξής τρόπο:

1) Εξοπλίζομε τον καθένα με μία τροχαλία.

2) Περιβάλλομε τις δύο τροχαλίες με έναν ατέρμονα ιμάντα, ο οποίος φροντίζομε να είναι καλά τεντωμένος (σχ. 2.16α).

Το τέντωμα του ιμάντα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε η «πρόσφυσή» του στις επιφάνειες των τροχαλιών να είναι όσο γίνεται καλύτερη για να αποφεύγεται η ολίσθηση του ιμάντα επάνω στις τροχαλίες.

Όταν περιστρέφεται ο άξονας Ι, περιστρέφεται και η τροχαλία Α, οπότε κινείται και ο ιμάντας.

Η ταχύτητα υ_λ κάθε σημείου του ιμάντα ισούται με την περιφερειακή ταχύτητα υ_A της τροχαλίας Α ($\upsilon_\lambda = \upsilon_A$).

Αφού ο ιμάντας περιβάλλει και την τροχαλία Β, την αναγκάζει να περιστρέφεται με περιφερειακή ταχύτητα υ_B ίση με την ταχύτητα υ_λ κάθε σημείου του ιμάντα ($\upsilon_\lambda = \upsilon_B$).

Επομένως έχομε: $\upsilon_\lambda = \upsilon_A$, $\upsilon_\lambda = \upsilon_B$

και $$\boxed{\upsilon_A = \upsilon_B} \qquad (1)$$

Με άλλα λόγια η τροχαλία Β αναγκάζεται από τον ιμάντα να περιστρέφεται έτσι, ώστε η περιφερειακή της ταχύτητα να είναι ίση με την περιφερειακή ταχύτητα της τροχαλίας Α.

Αν n_1 είναι ο αριθμός των στροφών ανά λεπτό του άξονα Ι, επομένως και της τροχαλίας Α, θα έχομε:

$$\upsilon_A = \frac{\pi \cdot d_1 \cdot n_1}{60} \qquad (2)$$

όπου d_1 η διάμετρος της τροχαλίας Α.

Ο αριθμός των στροφών στο λεπτό της τροχαλίας Β (n_2), επομένως και του άξονα ΙΙ, θα είναι τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\upsilon_B = \frac{\pi \cdot d_2 \cdot n_2}{60} \qquad (3)$$

όπου d_2 η διάμετρος της τροχαλίας Β.

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\frac{\pi \cdot d_1 \cdot n_1}{60} = \frac{\pi \cdot d_2 \cdot n_2}{60}$$

και

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}} \qquad (4)$$

Η σχέση (4) μας λέγει ότι οι αριθμοί των στροφών των τροχαλιών σε ίσους χρόνους είναι αντιστρόφως ανάλογοι προς τις διαμέτρους τους. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος της τροχαλίας Β, τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός των στροφών που εκτελεί αυτή μέσα σε ένα λεπτό.

Προσοχή:

Στην πράξη ο αριθμός των στροφών ανά λεπτό της τροχαλίας Β είναι μικρότερος από τον αριθμό (n_2) που υπολογίζεται από τη σχέση (4), εξαιτίας ολισθήσεων του ιμάντα στις τροχαλίες.

β) Αλυσοκίνηση (απλή).

Η αλυσοκίνηση διαφέρει από την ιμαντοκίνηση στα εξής σημεία:

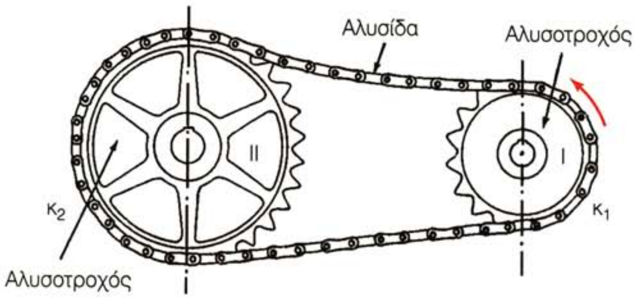
1) Αντί για τροχαλίες χρησιμοποιούνται αλυσοτροχοί.

2) Αντί για ιμάντα χρησιμοποιείται ατέρμονη αλυσίδα (σχ. 2.16β).

Στην αλυσοκίνηση ισχύουν επίσης οι σχέσεις:

$$\boxed{i = \frac{n_1}{n_2}} \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}}$$

όπου d_1 η αρχική διάμετρος του αλυσοτροχού Ι και d_2 η αρχική διάμετρος του αλυσοτροχού ΙΙ.



Σχ. 2.16β.

γ) Οδοντοκίνηση (απλή μετάδοση κινήσεως με οδοντωτούς τροχούς) (σχ. 2.16γ).

Στην οδοντοκίνηση δεν υπάρχουν τροχαλίες, αλυσοτροχοί, ιμάντες ή αλυσίδες. Τη θέση τους παίρνουν οδοντωτοί τροχοί (γρανάζια). Οι οδοντωτοί τροχοί είναι τροχοί, οι οποίοι έχουν οδόντες (δόντια) στην περιφέρειά τους.

Ο κάθε άξονας αντί για τροχαλία ή αλυσοτροχό φέρει έναν οδοντωτό τροχό.

Η μετάδοση της κινήσεως από τον ένα άξονα στον άλλο επιτυγχάνεται με τους οδοντωτούς τροχούς διά της άμεσης εμπλοκής των οδόντων του ενός τροχού με τους οδόντες του άλλου.

Ο οδοντωτός τροχός, ο οποίος δίνει την κίνηση, λέγεται κινητήριος τροχός, ενώ ο άλλος που λαμβάνει την κίνηση λέγεται κινούμενος. Οι δύο μαζί αποτελούν ζεύγος οδοντωτών τροχών.

Στην απλή οδοντοκίνηση ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}} \qquad (1)$$

επειδή οι οδοντωτοί τροχοί έχουν ίσες περιφερειακές ταχύτητες.

Επίσης στους οδοντωτούς τροχούς ισχύουν οι σχέσεις:

$$\pi \cdot d_1 = Z_1 \cdot t_1 \qquad (2)$$

και

$$\pi \cdot d_2 = Z_2 \cdot t_2 \qquad (3)$$

όπου d_1 και d_2 οι αρχικοί διάμετροι των οδοντωτών τροχών (I) και (II) αντιστοίχως, Z_1 και Z_2 οι αριθμοί των οδόντων των τροχών (I) και (II) αντιστοίχως και t_1, t_2 βήματα οδοντώσεως των τροχών (I) και (II) αντιστοίχως.

Από τις σχέσεις (2) και (3) λαμβάνομε:

$$\frac{\pi \cdot d_2}{\pi \cdot d_1} = \frac{Z_2 t_2}{Z_1 t_1}$$

και επειδή $t_2 = t_1$, έχομε:

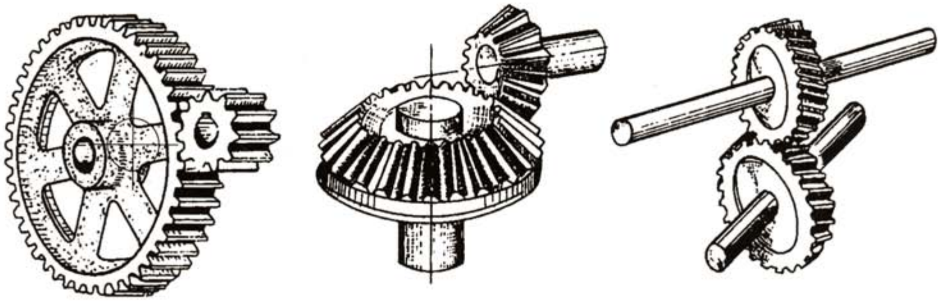
$$\boxed{\frac{d_2}{d_1} = \frac{Z_2}{Z_1}} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) προκύπτει:

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{Z_2}} \qquad (5)$$

όπου n_1 ο αριθμός στροφών ανά πρώτο λεπτό του τροχού I, n_2 ο αριθμός στροφών ανά πρώτο λεπτό του τροχού II, Z_1 ο αριθμός των οδόντων του τροχού I και Z_2 ο αριθμός των οδόντων του τροχού II.

Η σχέση (5) μας λέγει ότι: Οι αριθμοί στροφών ανά λεπτό των τροχών είναι αντιστρόφως ανάλογοι των αριθμών τω οδόντων τους.



(α) (β) (γ)

Σχ. 2.16γ.

Βέβαια και στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση μεταδόσεως $\boxed{i = \frac{n_2}{n_1}}$

Προσοχή:

Οι οδοντοκινήσεις διακρίνονται ως εξής:

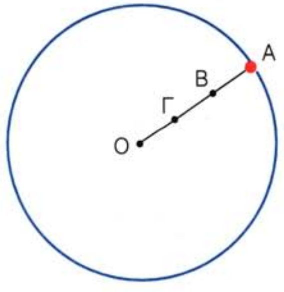
1) Με παράλληλους οδοντωτούς τροχούς, όταν δηλαδή οι δύο άξονες είναι παράλληλοι [σχ. 2.16γ(α)].

2) Με κωνικούς τροχούς, όταν οι δύο άξονες διασταυρώνονται κάθετα [σχ. 2.16γ(β)].

3) Με ελικοειδείς οδοντωτούς τροχούς που επιτρέπουν μετάδοση περιστροφικής κινήσεως σε άξονες που δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο [σχ. 2.16γ(γ)].

2.17 Ερωτήσεις κινηματικής.

1. Τι ονομάζομε σύστημα αναφοράς;
2. Γιατί πρέπει, όταν μελετούμε μία κίνηση να ορίζομε πρώτα το σύστημα αναφοράς;
3. Τι ονομάζομε μετατόπιση και τι διάστημα ενός κινητού;
4. Τι ονομάζομε χρονική στιγμή και τι χρονική διάρκεια ή χρονικό διάστημα;
5. Τι ονομάζομε αρχική ταχύτητα ενός σώματος;
6. Μπορεί να αλλάζει η διεύθυνση της ταχύτητας ενός σώματος ενώ το μέτρο της επιταχύνσεώς του παραμένει σταθερό;
7. Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $υ = 2$ m/s σε κυκλική τροχιά. Έχει επιτάχυνση;
8. Το σώμα Α (σχ. 2.17) είναι δεμένο στην άκρη σχοινιού και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Ποιο από τα σημεία Α, Β, Γ του σχοινιού έχει τη μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα και ποιο τη μικρότερη γωνιακή ταχύτητα;
9. Δύο άνθρωποι βρίσκονται σε δύο αυτοκίνητα που κινούνται στον ίδιο δρόμο, με ταχύτητες $υ_1 = 60$ km/h και $υ_2 = 40$ km/h. Ποια ταχύτητα θα αντιλαμβάνεται ο καθένας για τον άλλο; 1) Αν κινούνται κατά την ίδια φορά και 2) αν κινούνται αντίθετα;
10. Δύο όμοιες σφαίρες βάλλονται από το ίδιο ύψος οριζόντια, με διαφορετική ταχύτητα η κάθε μία. Ποια θα φθάσει πρώτη στο έδαφος;
11. Ένας επιβάτης τρένου, που κινείται με ταχύτητα υ, βλέπει από το παράθυρο απέναντι του συνέχεια ένα πουλί. Ποια είναι η πραγματική ταχύτητα του πουλιού;

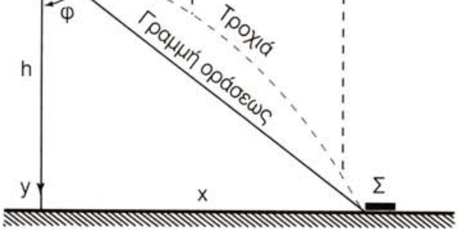


Σχ. 2.17.

2.18 Ασκήσεις κινηματικής.

1. Δύο χρονομετρητές που βρίσκονται στο πεντηκοστό και το εκατοστό μέτρο από την αφετηρία, χρονομετρούν ένα δρομέα και βρίσκουν, αντιστοίχως, χρόνους 7 sec και 13 sec. Ποια είναι η μέση ταχύτητα του δρομέα: 1) Στα πρώτα 50 m, 2) στα δεύτερα 50 m και 3) στην ολική διαδρομή;
2. Μοτοσικλετιστής της τροχαίας καταδιώκει Ι.Χ. αυτοκίνητο. Ο μοτοσικλετιστής τρέχει με ταχύτητα $\upsilon_\mu = 60$ m/s ενώ το Ι.Χ. με ταχύτητα $\upsilon_{αυ.} = 50$ m/s. Τη στιγμή που άρχισε η καταδίωξη το Ι.Χ. προπορευόταν του μοτοσικλετιστή κατά 200 m. Να βρεθούν : 1) Μετά πόσο χρόνο ο μοτοσικλετιστής θα φθάσει το Ι.Χ. και 2) πόσο διάστημα θα έχει διανύσει ο μοτοσικλετιστής όταν θα φθάσει το Ι.Χ.;
3. Σώμα κινείται συνέχεια με κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη επί χρόνο t = 45 s και με επιτάχυνση $\gamma = 2$ m/s^2. Αν υποθέσομε, ότι το σώμα είχε αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 10$ m/s και στο τέλος του χρόνου t απέκτησε ταχύτητα $\upsilon_\tau =$ 18 m/s, να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος.
4. Σώμα κινείται συνέχεια με κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη επί χρόνο t = 4 s και επιτάχυνση $\gamma = 2$ m/s^2. Αν υποθέσομε ότι το κινητό ξεκινά από την ηρεμία ($\upsilon_o = 0$) και στο τέλος του χρόνου t αποκτά ταχύτητα $\upsilon_\tau = 8$ m/s να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του κινητού.
5. Κινητό που κινείται με ευθύγραμμη και ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση έχει αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 5$ m/s και τελική $\upsilon = 85$ m/s. Η μεταβολή αυτή της ταχύτητας του κινητού έγινε σε χρόνο t = 5 s. Με πόση επιτάχυνση (γ) κινήθηκε το κινητό;
6. Πόσο διάστημα $\vec{S}$ διατρέχει κινητό που κινείται με ευθύγραμμη και ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, όταν η επιτάχυνσή του είναι $\gamma = 2$ m/s^2 και η αρχική του ταχύτητα, $\upsilon_o = 3$ m/s; Στην περίπτωση όπου ξεκινά από την ηρεμία, ποιο είναι το διάστημα $\vec{S}'$ που διατρέχει σε χρόνο t = 5 s;
7. Σώμα κινείται με κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη επί χρόνο t και με επιβράδυνση $\gamma = 2$ m/s^2. Αν το σώμα στην αρχή του χρόνου t είχε αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 20$ m/s και στο τέλος του χρόνου t απέκτησε ταχύτητα $\upsilon_\tau = 12$ m, να υπολογισθεί η μέση ταχύτητα του σώματος.
8. Κινητό κινείται με ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, μέχρις ότου σταματήσει, και με επιβράδυνση $\gamma = 2$ m/s^2. Αν το κινητό είχε αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 20$ m/s, να υπολογισθεί η μέση ταχύτητα του κινητού.

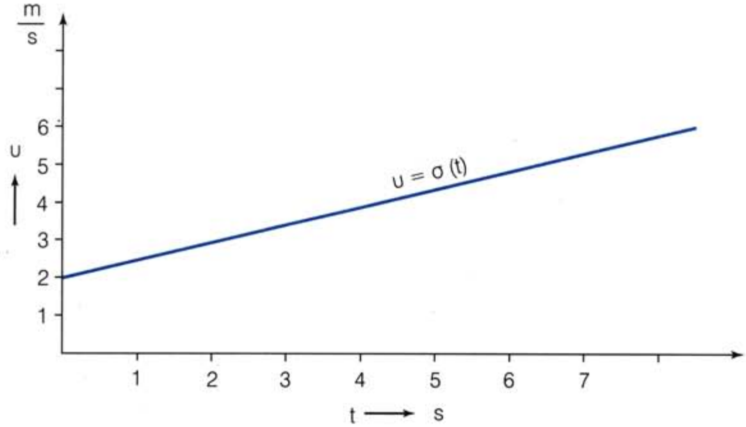
9. Η επιβράδυνση κινητού που κινείται με ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση είναι $\gamma = 200\ cm/s^2$. Τη στιγμή όπου άρχισε η επιβράδυνση, το κινητό είχε ταχύτητα $\upsilon_o = 80\ m/s$. Πόσο διάστημα S διέτρεξε σε χρόνο $t = 20\ s$ από τη στιγμή κατά την οποία άρχισε η επιβράδυνση και πόση είναι η ταχύτητα υ στο τέλος του εικοστού δευτερολέπτου;
10. Η επιβράδυνση κινητού που κινείται με ευθύγραμμη και ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση είναι $\gamma = 200\ m/s^2$. Τη στιγμή κατά την οποία άρχισε η επιβράδυνση το κινητό είχε ταχύτητα $\upsilon_o = 80\ m/s$. Πόσο χρόνο t_μ θα κινηθεί το κινητό αυτό και πόσο διάστημα S_μ θα διατρέξει ώσπου να σταματήσει;
11. Ένα υλικό σημείο κινείται με κίνηση ομαλή κυκλική. Αν η γραμμική ταχύτητα του σημείου είναι $\upsilon = 4\ m/s$ και η ακτίνα της περιφέρειας (του κύκλου) $R = 1\ m$, να υπολογισθούν: 1) Η γωνιακή ταχύτητα ω του υλικού σημείου, 2) η κεντρομόλος επιτάχυνσή του γ_κ, 3) η περίοδος T της κινήσεώς του και 4) η συχνότητα ν της περιφοράς.
12. Πόση είναι η συχνότητα ν της περιστροφής των τροχών ενός αυτοκινήτου ακτίνας $R = 40\ cm$, όταν το αυτοκίνητο σε χρόνο $t = 15\ m$ διατρέχει απόσταση $S = 10\ km$; Επίσης να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα υ της κεφαλής ενός μικρού καρφιού, που έχει κολλήσει στον τροχό, και να συγκριθεί με την ταχύτητα του αυτοκινήτου.
13. Πλοίο διέρχεται διά του πορθμού του Ευρίπου. Όταν το πλοίο κατεβαίνει, η ταχύτητά του σχετικά με την παραλία είναι 9 m/s, ενώ όταν ανεβαίνει είναι 3 m/s. Να υπολογισθούν η ταχύτητα του πλοίου υ_M που του δίνει η μηχανή του και η ταχύτητα με την οποία κινείται το νερό.
14. Πόση θα είναι η ταχύτητα υ με την οποία θα φθάσει στο έδαφος ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα από ύψος $h = 10\ m$ σε έναν τόπο όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 9{,}8\ m/s^2$;
15. Ένα σώμα που εκσφενδονίζεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 80\ m/s$ σε πόσο ύψος h θα φθάσει σε χρόνο $t = 3\ s$;
16. Ένα σώμα εκσφενδονίζεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 80\ m/s$. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος h_μ στο οποίο θα φθάσει το σώμα και σε πόσο χρόνο t_μ θα διανύσει το διάστημα αυτό;
17. Πολεμικό αεροσκάφος πετά οριζόντια σε ύψος $h = 2000\ m$ με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_o = 50\ m/s$ (σχ. 2.18α). Υπό ποια γωνία φ πρέπει να δει ο πιλότος το στόχο τη



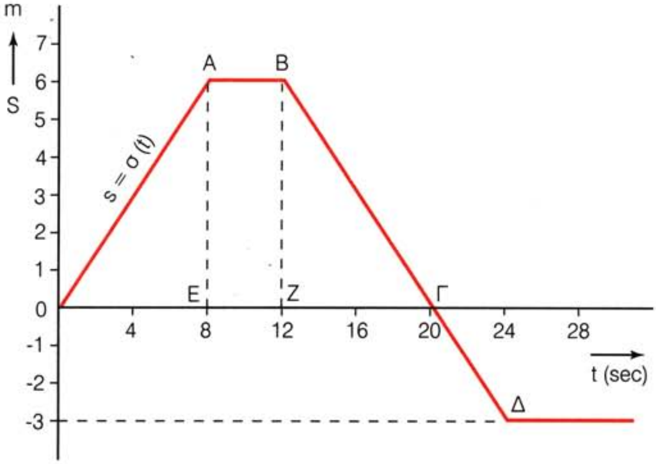
Σχ. 2.18α.

στιγμή όπου ρίχνει τη βόμβα, για να τον πετύχει;

18. Σε μια ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση η γραφική παράσταση της ταχύτητας υ = σ (t) φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 2.18β. Με βάση το διάγραμμα αυτό να υπολογισθεί στο τέλος του 6ου δευτερολέπτου: 1) Η επιτάχυνση της κινήσεως, 2) το διάστημα που διανύθηκε και 3) η αρχική ταχύτητα.
19. Η γραφική παράσταση του διαστήματος S = σ (t) ενός ευθύγραμμα κινούμενου κινητού δίνεται από το διάγραμμα του σχήματος 2.18γ. Με βάση το διάγραμμα αυτό ζητείται να βρεθεί: 1) Η ταχύτητα κατά το χρονικό διάστημα από 0 s μέχρι 8 s, 2) η στιγμιαία ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή t = 10 s, 3) η γραφική παράσταση της ταχύτητας υ = σ (t), 4) το συνολικό διανυθέν διάστημα σε χρόνο t = 20 s, 5) η θέση του κινητού (από την αρχή των αξόνων) σε t = 24 s.
20. Ο χρόνος αντιδράσεως οδηγού αυτοκινήτου είναι 0,7 sec. Αν η επιβράδυνση



Σχ. 2.18β.



Σχ. 2.18γ.

είναι 10 m/sec^2, να υπολογισθεί το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή κατά την οποία ο οδηγός αντελήφθη τον κίνδυνο, μέχρις ότου σταματήσει: 1) Όταν η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι 40 km/h και 2) όταν είναι 80 km/h.

Σημείωση:
Χρόνος αντιδράσεως είναι ο χρόνος, ο οποίος παρέχεται μεταξύ της στιγμή όπου αντιλαμβάνεται ο οδηγός τον κίνδυνο και της στιγμής, κατά την οποία πιέζει το ποδόπληκτρο πέδης (πεντάλ φρένου).

21. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού και ποια του δείκτη των δευτερολέπτων;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

3.1 Νόμοι κινήσεως του Νεύτωνα.

3.1.1 Πρώτος νόμος του Νεύτωνα (ή αξίωμα της αδράνειας).

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ορίζει τα εξής:

Ένα σώμα θα ηρεμεί ή θα κινείται με κίνηση ευθύγραμμη ομαλή, αν δεν επιδράσει επάνω του καμιά δύναμη.

Σημείωση:

Όταν εκσφενδονίσομε μία σφαίρα επάνω σε οριζόντιο έδαφος, αυτή, αφού διανύσει ένα ορισμένο διάστημα, θα σταματήσει. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα; Ναι – όχι και γιατί;

3.1.2 Γνώσεις στηρίξεως.

α) Αδράνεια.

Όλα τα σώματα έχουν την ιδιότητα να αντιστέκονται (να παρουσιάζουν ένα είδος αντιστάσεως), σε κάθε μεταβολή της κινητικής καταστάσεώς τους. Την ιδιότητα αυτή των σωμάτων την ονομάζομε αδράνεια των σωμάτων (ή αδράνεια της ύλης). Με άλλα λόγια αδράνεια των σωμάτων ονομάζομε την ιδιότητα την οποία έχουν όλα τα σώματα να εμφανίζουν την τάση να διατηρούν σταθερή την ταχύτητά τους ($\vec{\upsilon}$ = σταθερή ή $\vec{\upsilon} = 0$).

β) Εκδήλωση της αδράνειας.

Η αδράνεια εκδηλώνεται ως μία αντίσταση, αλλά βέβαια αυτή στην πραγματικότητα δεν είναι δύναμη (όπως εμείς έχομε ορίσει την έννοια των δυνάμεων).

Όταν λέμε ότι τα σώματα παρουσιάζουν αντίσταση στη μεταβολή της ταχύτητάς τους, εννοούμε την τάση που τα διακρίνει να διατηρούν σταθερή την ταχύτητα που έχουν. Η αδράνεια της ύλης (η νωχέλειά της, η αντίστασή της) εκδηλώνεται εμφανέστερα, όσο περισσότερο απότομα μεταβάλομε την κινητική της κατάσταση.

Για παράδειγμα με τη βοήθεια νήματος μπορούμε να ανυψώσομε δεμένη με αυτό σφαίρα, εφ' όσον την τραβήξομε σχετικά αργά. Αν όμως επιχειρήσομε να την ανυψώσομε απότομα υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να σπάσει το νήμα.

γ) Αδρανειακή μάζα.

Αν σε ένα σώμα επιδράσουν ξεχωριστά οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ...\vec{F}_\nu$ και αυτές προσδώσουν στο σώμα επιταχύνσεις $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3, ... \vec{\gamma}_\nu$ αντίστοιχα, τότε διαπιστώνομε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{\gamma}_1|} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{\gamma}_2|} = \frac{|\vec{F}_3|}{|\vec{\gamma}_3|} = \cdots = \frac{|\vec{F}_\nu|}{|\vec{\gamma}_\nu|} = \text{σταθ} = m_\alpha$$

Δηλαδή ο λόγος του μέτρου μιας δυνάμεως $\vec{F}$ που ασκείται σε ένα σώμα προς το μέτρο της επιταχύνσεως $\vec{\gamma}$ που του προσδίδει είναι σταθερός για το σώμα αυτό.

Ο σταθερός αυτός λόγος είναι χαρακτηριστικός για κάθε σώμα και ονομάζεται ***αδρανειακή μάζα*** $\boldsymbol{m_a}$ του σώματος.

Παρατήρηση:
Η αδρανειακή μάζα ενός σώματος παρέχει ένα μέτρο της αδράνειάς του (όσο μεγαλύτερη είναι η αδρανειακή μάζα ενός σώματος τόσο μεγαλύτερη αδράνεια παρουσιάζει το σώμα αυτό).

δ) Βαρυτική μάζα.
Αν $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, ... \vec{B}_\nu$ είναι τα βάρη ενός σώματος σε διάφορους τόπους, $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, ... \vec{g}_\nu$ οι βαρυντικές επιταχύνσεις (οι επιταχύνσεις της βαρύτητας) αντίστοιχα, τότε ισχύουν:

$$\frac{|\vec{B}_1|}{|\vec{g}_1|} = \frac{|\vec{B}_2|}{|\vec{g}_2|} = \frac{|\vec{B}_3|}{|\vec{g}_3|} = \cdots = \frac{|\vec{B}_\nu|}{|\vec{g}_\nu|} = \text{σταθ} = m_\beta$$

Αυτόν το λόγο (m_β) τον ονομάζομε ***βαρυτική μάζα*** του σώματος. Η βαρυτική μάζα (m_β) ενός σώματος ***θεωρείται*** ίση με την αδρανειακή του μάζα m_α:

$$\boxed{m_\alpha = m_\beta}$$

Για το χαρακτηρισμό της αδρανειακής και βαρυτικής μάζας ενός σώματος χρησιμοποιείται αδιακρίτως ο όρος ***μάζα*** του σώματος (m).

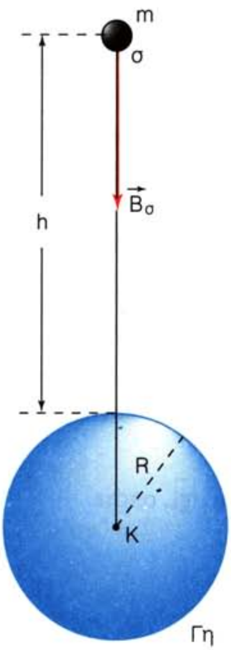
3.1.3 Βοηθητικές γνώσεις.

α) Βάρος υλικού σημείου.
Βάρος υλικού σημείου ονομάζεται η δύναμη $\vec{B}_\sigma$, με την οποία η γη έλκει το υλικό σημείο. Το βάρος $\vec{B}_\sigma$ ενός υλικού σημείου αφού είναι δύναμη είναι ένα διανυσματικό μέγεθος. Αυτό έχει τα εξής χαρακτηριστικά (3.1α):

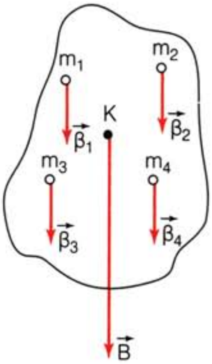
1) Σημείο εφαρμογής, το υλικό σημείο.
2) Διεύθυνση, την κατακόρυφο του τόπου στο οποίο βρίσκεται.
3) Φορά, τη φορά από το υλικό σημείο προς το κέντρο της γης.
4) Μέτρο, που δίνεται από τη σχέση (2):

$$\boxed{\vec{B}_\sigma = m_\sigma \vec{g}_h} \ (1) \qquad \boxed{|\vec{B}| = m_\sigma |\vec{g}_h|} \qquad (2)$$

όπου $\vec{g}_h$ η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ύψος h από την επιφάνεια της γης στο οποίο



Σχ. 3.1α.



Σχ. 3.1β.

Σχ. 3.1γ.

βρίσκεται το υλικό σημείο.

β) Βάρος ενός σώματος.

Κάθε σώμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μεγάλο αριθμό υλικών σημείων. Κάθε ένα από τα υλικά σημεία έχει μάζα m_i και βάρος $\vec{\beta}_i$. Η ολική μάζα του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των μαζών των υλικών αυτών σημείων. Το βάρος $\vec{B}$ του σώματος είναι η συνισταμένη των βαρών $\vec{\beta}_i$. Δηλαδή: Βάρος ενός σώματος είναι η δύναμη με την οποία η γη έλκει το σώμα αυτό. Τα βάρη $\vec{\beta}_i$ είναι δυνάμεις παράλληλες. Η συνισταμένη των $\vec{\beta}_i$, που είναι το βάρος $\vec{B}$ του σώματος, στην πράξη δεχόμασθε ότι διέρχεται πάντα από ένα ορισμένο σημείο Κ.

Το σημείο αυτό λέγεται κέντρο βάρους του σώματος (σχ. 3.1β).

Προσοχή:

1) ***Πολλές φορές θα συναντήσομε τον όρο κέντρο μάζας σώματος. Αυτό είναι ένα σημείο το οποίο στην πράξη συμπίπτει με το κέντρο βάρους το σώματος.***

2) Η θέση του κέντρου βάρους ενός σώματος είναι δυνατόν να βρίσκεται και έξω από την ύλη του σώματος. Το κέντρο βάρους για παράδειγμα ενός ομογενούς δακτυλίου (σχ. 3.1γ) είναι το κέντρο του κύκλου. Δηλαδή βρίσκεται έξω από την ύλη του δακτυλίου.

3) Για το βάρος $\vec{B}$ ενός σώματος που έχει μάζα m και βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο τόπο ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\vec{B} = m \cdot \vec{g}_h}$$

όπου $\vec{g}_h$ η επιτάχυνση της βαρύτητας του σώματος όταν βρίσκεται σε ύψος h, από την επιφάνεια της γης του τόπου αυτού.

Σημείωση:

1) Η επιτάχυνση της βαρύτητας δεν έχει την ίδια τιμή σε όλους τους τόπους.

– Σε γεωγραφικό πλάτος 45^o, $g = 9{,}81\ m/s^2$.

– Σε γεωγραφικό πλάτος 90^o, $g = 9{,}83\ m/s^2$.

2) Η $\vec{g}$ ενός σώματος ελαττώνεται στον ίδιο τόπο όσο ανέρχεται αυτό επάνω από την επιφάνεια της γης.

Στην πράξη η $\vec{g}$ λαμβάνεται ίση με $10\ m/s^2$ ($g = 10\ m/s^2$).

γ) Μέτρηση της μάζας.

Αν πάρομε δύο σώματα που έχουν μάζες m_1 και m_2 και βάρη $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ (στον ίδιο τόπο), τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{B}_1 = m_1\vec{g} \text{ και } \vec{B}_2 = m_2\vec{g},\ |\vec{B}_1| = m_1|\vec{g}| \text{ και } |\vec{B}_2| = m_2|\vec{g}|, \text{ οπότε}$$

$$\boxed{\frac{|\vec{B}_1|}{|\vec{B}_2|} = \frac{m_1}{m_2}} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) εκφράζει το εξής: Ο λόγος των βαρών δύο σωμάτων στον ίδιο τόπο είναι ίσος με το λόγο των μαζών των σωμάτων αυτών.

Με βάση τη σχέση (1) μπορούμε να μετρήσομε μία μάζα, να βρούμε δηλαδή το λόγο της προς μία άλλη (που θα αποτελεί τη μονάδα) από το λόγο των δύο βαρών.

Επομένως, με βάση την ισότητα (1) μπορούμε να μετρούμε τη μάζα ενός σώματος με ένα ζυγό, που στην πραγματικότητα μετρά το βάρος των σωμάτων.

Παρατηρήσεις:

1) Η μάζα ενός σώματος είναι μονόμετρο μέγεθος (και πάντα θετικό).

2) Η μάζα έχει την προσθετική ιδιότητα, δηλαδή η μάζα m_Σ ενός σώματος Σ το οποίο αποτελείται από άλλα σώματα σ_1, σ_2, σ_3,...σ_ν που έχουν μάζα m_1, m_2, m_3,...m_ν αντίστοιχα, ισούται με το άθροισμα των μαζών των σωμάτων αυτών: $m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_\nu$.

3) Η μάζα ενός σώματος διατηρείται σταθερή σε οποιοδήποτε τόπο και ύψος και αν βρεθεί το σώμα.

δ) Σχέση μάζας - αδράνειας.

Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος, τόσο μεγαλύτερη αδράνεια παρουσιάζει. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος, τόσο περισσότερο το σώμα «αντιστέκεται» στο να επιταχυνθεί. Επομένως η μάζα ενός σώματος είναι ένα ποσοτικό μέτρο της αδράνειας του σώματος.

Επειδή η μάζα ενός σώματος χαρακτηρίζει το ποσό της ύλης του σώματος και συγκεκριμένα συμβαδίζει με αυτό, κατά επέκταση θεωρούμε το ποσό της ύλης ενός σώματος ότι είναι ένα ποσοτικό μέτρο της αδράνειας του σώματος.

ε) Μονάδα μάζας.

Η μονάδα μάζας στο S.I. είναι το kilogram (χιλιόγραμμο, kg). Το χιλιόγραμμο ορίζεται ως η μάζα ενός κομματιού κράματος λευκοχρύσου - ιριδίου που φυλάσσεται στο Γραφείο Μέτρων και Σταθμών στην πόλη Sevres κοντά στο Παρίσι.

3.1.4 Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (ή θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής).

Διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

1) Ειδική περίπτωση. [α) Διατύπωση νόμου και β) Διερεύνηση της εξισώσεως $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$].

2) Γενική περίπτωση (θα την εξετάσομε στην παράγραφο 3.8).

α) Διατύπωση του νόμου.

Στην περίπτωση αυτή ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής ορίζει τα εξής:

Όταν ένα σώμα έχει επιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τότε οπωσδήποτε επάνω στο σώμα ενεργεί μία δύναμη $\vec{F}$, η οποία του προκαλεί την επιτάχυνση $\vec{\gamma}$.

Η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ που αποκτά ένα σώμα, όταν σε αυτό ενεργεί μία δύναμη $\vec{F}$ έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Φορέα, το φορέα της δυνάμεως $\vec{F}$ που την προκαλεί.

2) Φορά, τη φορά της δυνάμεως $\vec{F}$.

3) Μέτρο, ίσο με το πηλίκο του μέτρου της δυνάμεως $\vec{F}$ προς τη μάζα (m) του σώματος.

Μαθηματικά τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (1) \qquad \bar{\gamma} = \frac{\bar{F}}{m} \quad \text{και} \quad |\vec{\gamma}| = \frac{|\vec{F}|}{m} \quad (m>0) \qquad (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}} \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) ονομάζεται θεμελιώδης εξίσωση της Μηχανικής.

Σημείωση:

1) Αίτιο είναι η δύναμη, ενώ αποτέλεσμα η επιτάχυνση.

2) Τα $\bar{\gamma}$ και $\bar{F}$ είναι ομόσημα.

Ακριβής ορισμός του Newton.

Έχομε:

$$F = m \cdot \gamma \qquad (4)$$

Η μονάδα μάζας στο S.I. είναι 1 kg και η μονάδα επιταχύνσεως είναι $1\ m \cdot s^{-2}$.

Από την (4) λαμβάνομε:

$$F = m \cdot \gamma = 1\,kg \cdot 1\,m/s^2 = 1\,kg\,m/s^2 = 1\,N$$

Επομένως καταλήγομε στην εξής διατύπωση: ***Ένα newton είναι η δύναμη***

που δίνει επιτάχυνση 1 $m \cdot s^{-2}$ σε ένα σώμα μάζας ενός χιλιογράμμου (1 kg).

β) Διερεύνηση της εξισώσεως $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ (συμπεράσματα που προκύπτουν από την εξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$).

1) Όταν ένα σώμα έχει επιτάχυνση, τότε οπωσδήποτε επάνω στο σώμα ενεργεί μία δύναμη.

Έχομε τη σχέση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$. Αν η $\vec{\gamma}$ είναι διαφορετική από το μηδέν ($\vec{\gamma} \neq 0$), τότε και η $\vec{F}$ είναι διαφορετική από το μηδέν, επειδή η m είναι διαφορετική από το μηδέν ($m \neq 0$).

2) Αν η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ενεργούν επάνω σε ένα σώμα είναι μηδέν, τότε και η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν.

Έχομε τη σχέση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$.

Αν $\vec{F} = 0$, τότε $0 = m \cdot \vec{\gamma}$.

Και επειδή η $m \neq 0$, έχομε $\vec{\gamma} = 0$.

3) Αν σε ένα σώμα ενεργεί μία δύναμη που διατηρείται συνέχεια σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, τότε το σώμα αυτό αποκτά επιτάχυνση, που θα είναι συνέχεια σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά.

Ισχύει η σχέση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$.

Αν η $\vec{F}$ είναι σταθερή, τότε έχομε σταθ. $= m \cdot \vec{\gamma}$.

Επειδή η m είναι σταθερή, έχομε: σταθ. = σταθ. $\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma}$ = σταθερή.

Παρατήρηση:

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν σε ένα υλικό σημείο ενεργεί συνέχεια μία δύναμη σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά τότε αυτό θα εκτελεί συνέχεια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (βέβαια ισχύει και το αντίστροφο).

4) Αν ένα σώμα κινείται με επιτάχυνση που διατηρείται συνέχεια σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, τότε στο σώμα ενεργεί κάποια δύναμη που διατηρείται συνέχεια σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά.

Ισχύει η σχέση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$.

Αν $\vec{\gamma}$ = σταθ., τότε $\vec{F} = m \cdot$ σταθ.

Επειδή η m είναι σταθερή έχομε: $\vec{F}$ = (σταθερή)·(σταθερή), άρα $\vec{F}$ = σταθερή.

5) Η επιτάχυνση $(\vec{\gamma})$, που αποκτά ένα σώμα εξ αιτίας της επιδράσεως σε αυτό μιας δυνάμεως $(\vec{F})$, είναι ανάλογη προς τη δύναμη αυτή (σχέση δυνάμεως-επιταχύνσεως).

Αν σε ένα σώμα που έχει μάζα m ασκηθούν ξεχωριστά δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, τότε το σώμα αποκτά επιταχύνσεις $\vec{\gamma}_1$ και $\vec{\gamma}_2$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$|\vec{F}_1| = m \cdot |\vec{\gamma}_1| \quad (1) \quad \text{και} \quad |\vec{F}_2| = m \cdot |\vec{\gamma}_2| \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\boxed{\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{|\vec{\gamma}_1|}{|\vec{\gamma}_2|}} \qquad (3)$$

Παρατήρηση:

Το συμπέρασμα αυτό (η σχέση 3) είναι στην ουσία ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα.

6) Οι επιταχύνσεις που αποκτούν διάφορα σώματα όταν επιδράσει σε αυτά μία δύναμη $(\vec{F})$, είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις μάζες των σωμάτων.

Αν μία δύναμη $\vec{F}$ επιδράσει διαδοχικά σε δύο σώματα που έχουν μάζες m_1 και m_2, τότε τα σώματα αυτά αποκτούν επιταχύνσεις $\vec{\gamma}_1$ και $\vec{\gamma}_2$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$|\vec{F}_1| = m_1 \cdot |\vec{\gamma}_1| \text{ (1) και } |\vec{F}_2| = m_2 \cdot |\vec{\gamma}_2| \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχομε: $m_1 \cdot |\vec{\gamma}_1| = m_2 \cdot |\vec{\gamma}_2|$ και $\boxed{\dfrac{|\vec{\gamma}_1|}{|\vec{\gamma}_2|} = \dfrac{m_2}{m_1}}$

7) Αν η δύναμη που ενεργεί σε ένα σώμα με μάζα m είναι μόνο η έλξη της γης, δηλαδή το βάρος $\vec{B}$ του σώματος, τότε το σώμα πέφτοντας ελεύθερα αποκτά επιτάχυνση $\vec{g}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση: $\vec{B} = m \cdot \vec{g}$.

Ισχύει η σχέση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ (1)

Αν $\vec{F} = \vec{B}$ και $\vec{\gamma} = \vec{g}$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{B} = m \cdot \vec{g}}$$

3.1.5 Τρίτος νόμος του Νεύτωνα [(δράσεως - αντιδράσεως) (βλ. σελ. 18].

3.2 Ορμή υλικού σημείου και θεώρημα διατηρήσεώς της.

3.2.1 Ορμή υλικού σημείου.

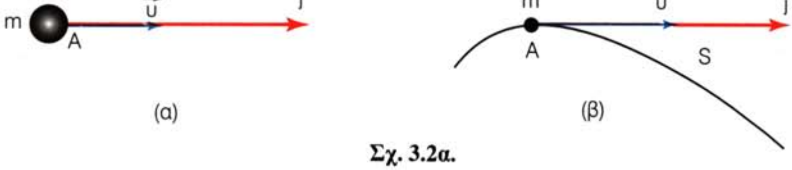
Ορμή υλικού σημείου μάζας m [σχ. 3.2α(α) και 3.2α(β)] όταν βρίσκεται στη θέση Α της τροχιάς του και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ονομάζεται ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{j}$, το οποίο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Σημείο εφαρμογής, το υλικό σημείο.

2) Φορέα, το φορέα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του υλικού σημείου.

3) Φορά, τη φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του υλικού σημείου.

4) Μέτρο, το γινόμενο του μέτρου της μάζας m του υλικού σημείου επί το μέτρο της ταχύτητάς του.



Σχ. 3.2α.

Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{j}=m\cdot\vec{\upsilon}} \quad \boxed{\bar{j}=m\cdot\bar{\upsilon}} \quad \text{και} \quad \boxed{|\vec{j}|=m\cdot|\vec{\upsilon}|}$$

(Τα $\bar{j}$ και $\bar{\upsilon}$ είναι ομόσημα).

Προσοχή:

Οι πιο πάνω τύποι για την ορμή ισχύουν, αν το $|\vec{\upsilon}| << c_o$ (δηλαδή αν η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός στο κενό).

3.2.2 Θεώρημα διατηρήσεως της ορμής υλικού σημείου.

Για ένα υλικό σημείο που κινείται ισχύει το θεώρημα διατηρήσεως της ορμής υλικού σημείου, το οποίο ορίζει τα εξής:

Όταν σε ένα υλικό σημείο που κινείται δεν επιδρά καμιά δύναμη (ή αν επιδρούν δυνάμεις η συνισταμένη τους είναι μηδέν), τότε η ορμή του υλικού σημείου δεν μεταβάλλεται, δηλαδή διατηρείται σταθερή.

Αν τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση Α και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ (σχ. 3.2β), τη δε χρονική στιγμή t_2 βρεθεί στη θέση Β και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$, τότε η ορμή του μεταβλήθηκε, γιατί μεταβλήθηκε η ταχύτητά του.

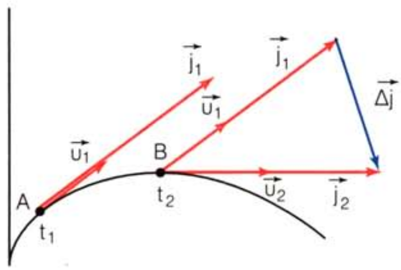
Η μεταβολή της ορμής $\overrightarrow{\Delta j}$ του υλικού σημείου που έγινε μέσα σε χρόνο $(t_2 - t_1) = \Delta t$ είναι:

$$\overrightarrow{\Delta j} = \vec{j}_2 - \vec{j}_1 = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)$$

$$\overrightarrow{\Delta j} = m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) \qquad (1)$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (1) με το χρόνο $(t_2 - t_1) = \Delta t$ μέσα στον οποίο έγινε η μεταβολή $\overrightarrow{\Delta j}$ της ορμής και έχομε:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta j}}{\Delta t} = m\frac{(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)}{\Delta t} \qquad (2)$$



Σχ. 3.2β.

Αν υποθέσομε ότι ο χρόνος Δt είναι πολύ μικρός ($t_2 - t_1 = \Delta t \to 0$), τότε ισχύει η σχέση:

$$\vec{\gamma} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} \qquad (3)$$

όπου $\vec{\gamma}$ είναι η επιτάχυνση του υλικού σημείου.

Ισχύει όμως και η σχέση:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma} \qquad (4)$$

όπου $\vec{F}$ η δύναμη που ασκήθηκε στο υλικό σημείο επί χρόνο Δt ($\Delta t \to 0$) και η οποία προκάλεσε τη μεταβολή της ταχύτητας του υλικού σημείου ($\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$).

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχομε:

$$\vec{F} = m \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta j}}{\Delta t}} \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\Delta j} = 0 \ (\Delta t > 0)} \qquad (7)$$

Η σχέση (7) εκφράζει το θεώρημα διατηρήσεως της ορμής υλικού σημείου: Αν η συνισταμένη $\vec{F}$ των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα υλικό σημείο είναι μηδέν, τότε η μεταβολή της ορμής του θα είναι μηδέν ή με άλλα λόγια αν η συνισταμένη $\vec{F}$ των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα υλικό σημείο είναι μηδέν, η ορμή του υλικού σημείου διατηρείται σταθερή.

3.3 Ορμή στερεού σώματος, το οποίο εκτελεί μεταφορική κίνηση και θεώρημα διατηρήσεώς της.

3.3.1 Ορμή στερεού σώματος.

Ορμή στερεού σώματος, το οποίο εκτελεί μεταφορική κίνηση τη χρονική στιγμή t, ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των ορμών που έχουν οι στοιχειώδεις μάζες (τα υλικά σημεία) από τις οποίες αποτελείται το σώμα.

$$\vec{j}_{\Sigma} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 + ... + \vec{j}_\nu \text{ ή } \vec{j}_{\Sigma} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + m_3\vec{\upsilon}_3 + ... + m_\nu\vec{\upsilon}_\nu \ (1)$$

όπου m_1, m_2, $m_3 ... m_\nu$ οι μάζες των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται το σώμα και $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_3 ... \vec{\upsilon}_\nu$ οι ταχύτητές τους τη χρονική στιγμή t.

Επειδή το στερεό σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, ισχύει η σχέση:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_3 = ... = \vec{\upsilon}_\nu = \vec{\upsilon} \qquad (2)$$

όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η σχέση (3):

$$\vec{j}_\Sigma = m_1\upsilon + m_2\upsilon + m_3\upsilon + ... + m_\nu\vec{\upsilon}$$

$$\vec{j}_\Sigma = (m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_\nu)\vec{\upsilon} \qquad (3)$$

Επίσης ισχύει:

$$m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_\nu = m \text{ η μάζα του σώματος} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) λαμβάνομε:

$$\boxed{\vec{j}_\Sigma = m \cdot \vec{\upsilon}} \qquad (5)$$

Η σχέση (5) μας λέει ότι η ορμή την οποία έχει τη χρονική στιγμή t ένα στερεό σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητα την οποία έχει τη χρονική αυτή στιγμή.

3.3.2 Θεώρημα διατηρήσεως της ορμής στερεού σώματος που εκτελεί μετα-φορική κίνηση.

Το θεώρημα διατηρήσεως της ορμής στερεού σώματος που εκτελεί μεταφορική κίνηση ορίζει τα εξής:

Αν σε ένα σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση δεν ασκείται καμιά δύναμη ή αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι μηδέν, τότε η ορμή του σώματος δεν μεταβάλλεται, δηλαδή παραμένει (διατηρείται) σταθερή ($\vec{j}_\Sigma$ = σταθ.).

Για το σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση ισχύει η σχέση:

$$\vec{F} = m_\sigma \cdot \vec{\gamma}_\sigma \qquad (1)$$

όπου $\vec{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και η οποία του προσδίδει επιτάχυνση $\vec{\gamma}_\sigma$ και m_σ η ολική μάζα του σώματος.

Επίσης ισχύει η σχέση:

$$\vec{\gamma}_\sigma = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} \qquad (2)$$

όπου ($\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$) η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος που την προκάλεσε η δύναμη $\vec{F}$, όταν επέδρασε στο σώμα επί χρόνο Δt με την προϋπόθεση ότι αυτός είναι πολύ μικρός ($\Delta t \to 0$).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\vec{F} = m_\sigma \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} \qquad (3)$$

Επίσης έχομε:

$$\overrightarrow{\Delta j} = m_\sigma (\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta j}}{\Delta t}} \; (\Delta t \neq 0) \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\Delta j} = 0}$$

Δηλαδή αν καμιά δύναμη δεν ασκείται σε ένα σώμα ή αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι μηδέν, τότε η μεταβολή της ορμής του σώματος είναι μηδέν, ή με άλλα λόγια, αν καμιά δύναμη δεν ασκείται σε ένα σώμα ή αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι μηδέν, τότε η ορμή του σώματος διατηρείται (παραμένει) σταθερή.

3.4 Σύστημα σωμάτων – Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις – Απομονωμένο σύστημα.

3.4.1 Σύστημα σωμάτων.

Σύστημα σωμάτων ονομάζομε δύο ή περισσότερα σώματα που τα εξετάζομε ως ένα σύνολο.

Οι επιβάτες ενός λεωφορείου και το λεωφορείο, αν εξετάζονται ως ένα σύνολο, αποτελούν ένα σύστημα σωμάτων. Τα σώματα του συστήματος αυτού είναι οι επιβάτες και το λεωφορείο. Αν από τα βαγόνια Α, Β, Γ, Δ, Ε, μιας αμαξοστοιχίας εξετάζομε ως ένα σύνολο τα βαγόνια Γ και Δ τότε λέμε ότι τα δύο βαγόνια Γ και Δ αποτελούν ένα σύστημα σωμάτων.

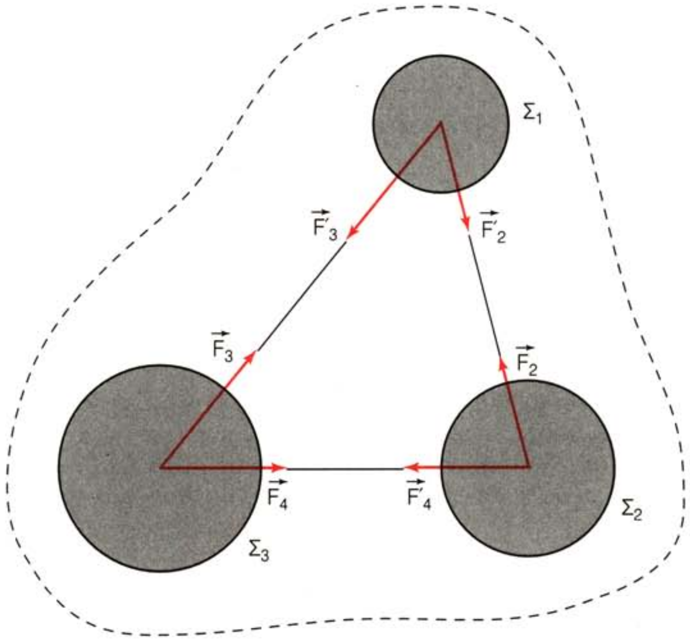
3.4.2 Εσωτερικές δυνάμεις.

Εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων ονομάζομε τις δυνάμεις που ασκούν μεταξύ τους τα σώματα που αποτελούν το σύστημα.

Οι εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων εμφανίζονται ανά δύο και έχουν συνισταμένη μηδέν. Αυτό συμβαίνει γιατί η μία δύναμη είναι η δράση ενός από τα σώματα του συστήματος σε ένα άλλο σώμα και η άλλη η αντίδραση του άλλου σώματος του συστήματος επάνω σε αυτό.

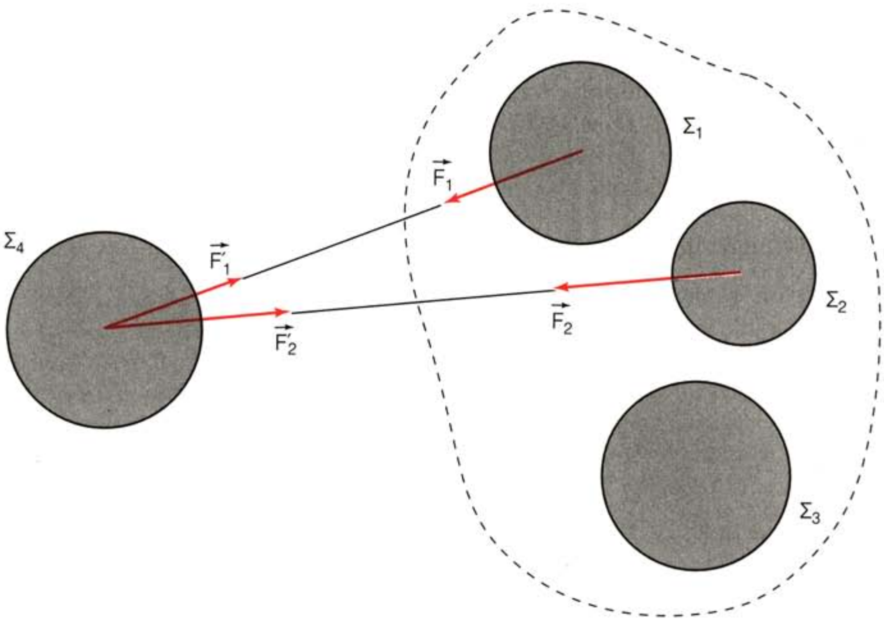
Έστω ότι οι σφαίρες Σ_1, Σ_2, Σ_3, αποτελούν ένα σύστημα (σχ. 3.4α). Αν η Σ_1 ασκεί στις σφαίρες Σ_2, Σ_3 τις δυνάμεις $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$, τότε και οι σφαίρες Σ_2, Σ_3 θα ασκούν ταυτόχρονα στην Σ_1 τις δυνάμεις $\vec{F}'_2$ και $\vec{F}'_3$ οι οποίες είναι: $\vec{F}'_2 = -\vec{F}_2$ και $\vec{F}'_3 = -\vec{F}_3$.

Αν η σφαίρα Σ_2 ασκεί στη σφαίρα Σ_3 τη δύναμη $\vec{F}_4$, τότε και η Σ_3 θα ασκεί



Σ_1
$\vec{F}'_3$
$\vec{F}'_2$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_4$
$\vec{F}'_4$
Σ_2
Σ_3

Σχ. 3.4α.



Σ_1
$\vec{F}_1$
Σ_4
$\vec{F}'_1$
Σ_2
$\vec{F}'_2$
$\vec{F}_2$
Σ_3

Σχ. 3.4β.

ταυτόχρονα στην Σ_2 τη δύναμη $\vec{F}'_4$ που είναι: $\vec{F}'_4 = -\vec{F}_4$.

Ευνόητο είναι ότι οι δυνάμεις $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}'_2$, $\vec{F}'_3$, $\vec{F}_4$ και $\vec{F}'_4$ είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος που αποτελείται από τις σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3, γιατί καθεμία από τις $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}'_2$, $\vec{F}'_3$, $\vec{F}_4$ και $\vec{F}'_4$ ασκείται σε μία από τις σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3 και μόνο από αυτές.

Παρατηρήσεις:

1) Οι εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος δεν επηρεάζουν την κινητική κατάσταση του συστήματος ως σύνολο.

Αυτό συμβαίνει γιατί οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται ανά ζεύγη και είναι αντίθετες μεταξύ τους.

2) Οι εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων επηρεάζουν την κινητική κατάσταση των επιμέρους σωμάτων του συστήματος, γιατί αν μεταβληθεί η κινητική κατάσταση ενός σώματος του συστήματος εξ αιτίας μιας εσωτερικής δυνάμεως $\vec{F}_1$, θα μεταβληθεί ταυτόχρονα και η κινητική κατάσταση ενός άλλου σώματος του συστήματος στο οποίο θα επιδράσει η αντίδραση της $\vec{F}_1$.

3) Γενικώς η κινητική κατάσταση του κέντρου βάρους ενός συστήματος σωμάτων δεν επηρεάζεται από τις εσωτερικές δυνάμεις του.

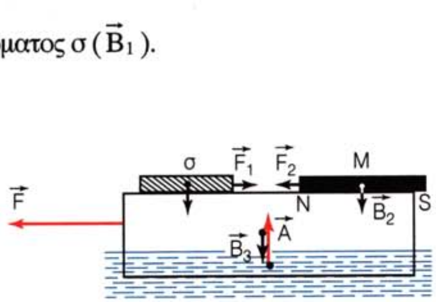
3.4.3 Εξωτερικές δυνάμεις.

Εξωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων ονομάζομε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος αυτού από άλλα σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα. Έστω ότι οι τρεις σφαίρες Σ_1, Σ_2, Σ_3 (σχ. 3.4β) αποτελούν ένα σύστημα και ότι μία τέταρτη σφαίρα Σ_4 δεν ανήκει στο σύστημα αυτό.

Αν η Σ_4 ασκεί στις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, τότε λέμε ότι οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι εξωτερικές δυνάμεις για το σύστημα των Σ_1, Σ_2, Σ_3. Έστω πάλι ότι ο μαγνήτης Μ (σχ. 3.4γ), το σιδερένιο σώμα σ και ο πλωτήρας αποτελούν ένα σύστημα Σ και ότι σύρομε τον πλωτήρα με μία δύναμη $\vec{F}$.

Οι εξωτερικές δυνάμεις για το σύστημα Σ (μαγνήτης Μ – σώμα σ – πλωτήρας) είναι:

1) Το βάρος του σώματος σ ($\vec{B}_1$).



Σχ. 3.4γ.

2) Το βάρος του μαγνήτη Μ ($\vec{B}_2$).

3) Το βάρος του πλωτήρα ($\vec{B}_3$).

4) Η άνωση $\vec{A}$.

5) Η δύναμη $\vec{F}$ με την οποία σύραμε τον πλωτήρα.

3.4.4 Απομονωμένο σύστημα.

΄Ενα σύστημα σωμάτων το ονομάζομε απομονωμένο, αν δεν ασκείται σε αυτό καμιά εξωτερική δύναμη, ή αν ασκούνται σε αυτό εξωτερικές δυνάμεις η συνισταμένη τους είναι μηδέν. Το απομονωμένο σύστημα το ονομάζομε και αποκλεισμένο ή και μεμονωμένο.

3.5 Κέντρο βάρους ενός συστήματος σωμάτων και η κίνησή του.

3.5.1 Κέντρο βάρους ενός συστήματος σωμάτων.

Κέντρο βάρους ενός συστήματος σωμάτων ονομάζομε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των βαρών των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.

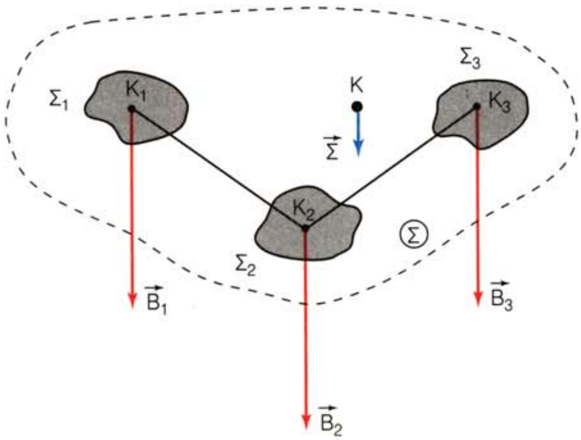
Για να προσδιορίσομε το κέντρο βάρους ενός συστήματος πρέπει:

1) Να προσδιορίσομε τα βάρη των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.

2) Να προσδιορίσομε τα κέντρα βάρους των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.

3) Να προσδιορίσομε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των βαρών των σωμάτων του συστήματος.

΄Εστω ότι τα σώματα Σ_1, Σ_2, Σ_3 (σχ. 3.5α) που αποτελούν ένα σύστημα Σ έχουν βάρη $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ και τα κέντρα βάρους τους είναι τα K_1, K_2, K_3 αντιστοίχως. Τότε το κέντρο βάρους του συστήματος Σ είναι το Κ, γιατί αυτό είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ των βαρών $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ $(\vec{\Sigma} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3)$.



Σχ. 3.5α.

Προσοχή:

Το κέντρο βάρους ενός συστήματος είναι μαθηματικό σημείο. Όμως για να λύσομε ορισμένα προβλήματα, θεωρούμε πολλές φορές το κέντρο βάρους ενός συστήματος ως ένα υλικό σημείο που έχει μάζα όση είναι ολόκληρη η μάζα του συστήματος.

Παρατηρήσεις:

1) Το κέντρο βάρους (κ.β.) συστήματος σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο μάζας (κ.μ.) του για ομογενή πεδία βαρύτητας.

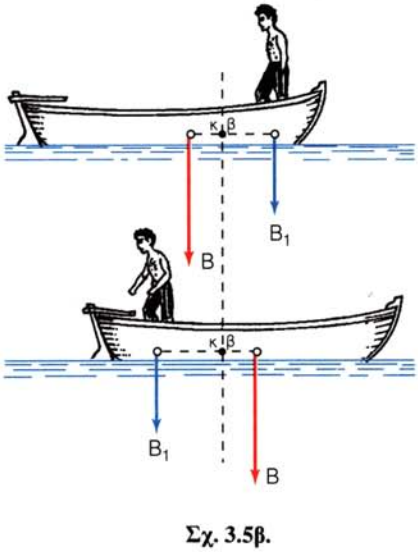
2) Στην πράξη όταν θα μας λένε κέντρο μάζας ενός συστήματος εμείς θα εννοούμε το κέντρο βάρους του.

3.5.2 Κίνηση του κέντρου βάρους συστήματος σωμάτων.

Σε κάθε σύστημα σωμάτων μπορεί να ασκούνται εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις. Οι εσωτερικές ασκούνται πάντοτε ανά δύο (δράση - αντίδραση) και είναι ανά δύο αντίθετες. Έτσι, η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων θα είναι πάντα ίση με μηδέν. Για να κινηθεί λοιπόν το κ.β. ενός συστήματος, πρέπει να μην είναι μηδέν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα. Αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε σύστημα είναι μηδέν τότε μπορεί να κινείται ένα σώμα του συστήματος ως προς τα άλλα σώματά του, αλλά το κ.β. του συστήματος θα μένει ακίνητο.

Όταν κινηθεί ο άνθρωπος επάνω στη βάρκα (σχ. 3.5β), τότε κινείται και η βάρκα αντίθετα, αλλά το κ.β. του συστήματος μένει ακίνητο. Συμβαίνει αυτό γιατί στο σύστημα ***άνθρωπος - βάρκα*** η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι μηδέν.

Αποδεικνύεται ότι, αν ένα σύστημα σωμάτων εκτελεί μεταφορική κίνηση, τότε για το κέντρο βάρους του ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχ. 3.5β.

Το κέντρο βάρους ενός συστήματος σωμάτων κινείται σαν ένα υλικό σημείο το οποίο έχει μάζα ($m_Σ$) ίση με το άθροισμα των μαζών των σωμάτων που το αποτελούν και που δέχεται δύναμη $\vec{F}_{εξ}$ ίση με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες ασκούνται στο σύστημα.

Επομένως ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\vec{F}_{εξ} = m_Σ \, \vec{γ}_{κ.β.}} \qquad (1)$$

όπου $m_Σ$ η μάζα του συστήματος, δηλαδή το άθροισμα των μαζών όλων των σωμάτων από τα οποία αποτελείται το σύστημα και $\vec{γ}_{κ.β.}$ η επιτάχυνση του κ.β. του συστήματος.

3.6 Ορμή του κέντρου βάρους συστήματος που εκτελεί μεταφορική κίνηση και θεώρημα διατηρήσεως της ορμή του.

Όταν λέμε ορμή του κέντρου βάρους ενός συστήματος σωμάτων που εκτελεί μεταφορική κίνηση εννοούμε την ορμή ενός υλικού σημείου που κατέχει τη θέση του κέντρου βάρους του συστήματος και έχει μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{j}_{κ.β.} = m_Σ \vec{υ}_{κ.β.}}$$

όπου $\vec{j}_{κ.β.}$ η ορμή του κ.β. του συστήματος όταν αυτό εκτελεί μεταφορική κίνηση, $\vec{υ}_{κ.β.}$ η ταχύτητα του κ.β. και $m_Σ$ η ολική μάζα του συστήματος.

Για την ορμή του κέντρου βάρους συστήματος ισχύει το εξής θεώρημα διατηρήσεως της ορμής του:

Αν σε ένα σύστημα που εκτελεί μεταφορική κίνηση δεν ασκείται καμιά εξωτερική δύναμη ή αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι μηδέν, τότε η ορμή του κ.β. του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Για το κέντρο βάρους ενός συστήματος που εκτελεί μεταφορική κίνηση ισχύει η σχέση:

$$\vec{F}_{εξ} = m_Σ \, \vec{γ}_{κ.β.} \qquad (1)$$

όπου $\vec{F}_{εξ}$ η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα και η οποία προσδίδει στο κ.β. του επιτάχυνση $\vec{γ}_{κ.β.}$ και $m_Σ$ η ολική μάζα του συστήματος.

Επίσης ισχύει η σχέση:

$$\vec{γ}_{κβ} = \frac{\vec{υ}_2 - \vec{υ}_1}{Δt}, \; (Δt \to 0) \qquad (2)$$

όπου $(\vec{υ}_2 - \vec{υ}_1)$ η μεταβολή της ταχύτητας του κέντρου βάρους που την προκάλεσε η δύναμη $\vec{F}_{εξ}$ όταν επέδρασε στο σώμα επί χρόνο Δt (Δt = πολύ μικρός).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\vec{F}_{εξ} = m_Σ \frac{\vec{υ}_2 - \vec{υ}_1}{Δt} \quad (3)$$

Επίσης έχομε:

$$\vec{Δj} = m_Σ (\vec{υ}_2 - \vec{υ}_1) \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4), προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F}_{εξ} = \frac{\vec{Δj}_{κ.β.}}{Δt}} \; (Δt \neq 0) \quad (5)$$

Από τη σχέση (5) συνάγεται:

$$\boxed{\vec{F}_{εξ} = 0 \Rightarrow \vec{Δj}_{κ.β.} = 0} \quad (6)$$

Η σχέση (6) ισοδυναμεί με τα εξής:

Αν σε ένα σύστημα σωμάτων που εκτελεί μεταφορική κίνηση δεν ασκείται καμιά εξωτερική δύναμη ή αν ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε η μεταβολή της ορμής του κ.β. είναι μηδέν, ή με άλλα λόγια αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα είναι μηδέν, τότε η ορμή του κ.β. του συστήματος διατηρείται σταθερή.

3.7 Ορμή συστήματος σωμάτων και θεώρημα διατηρήσεως της ορμής του. Ανάκρουση.

3.7.1 Ορμή συστήματος σωμάτων.

Ορμή $\vec{j}_Σ$ ενός συστήματος σωμάτων κατά τη χρονική στιγμή t ονομάζομε το διανυσματικό (γεωμετρικό) άθροισμα των ορμών $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3 ... \vec{j}_ν$ που έχουν τα σώματα του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{j}_Σ = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 + ... + \vec{j}_ν} \quad ή \quad \boxed{\vec{j}_Σ = m_1\vec{υ}_1 + m_2\vec{υ}_2 + m_3\vec{υ}_3 + ... + m_ν\vec{υ}_ν}$$

όπου $\vec{j}_Σ$ η ορμή του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t, $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3 ... \vec{j}_ν$ οι ορμές των σωμάτων του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t, $\vec{υ}_1, \vec{υ}_2, \vec{υ}_3 ... \vec{υ}_ν$ οι ταχύτητες των σωμάτων κατά τη χρονική στιγμή t και m_1, m_2, m_3, ... $m_ν$ οι μάζες των σωμάτων του συστήματος.

Προσοχή:

Αποδεικνύεται ότι η ορμή $\vec{j}_Σ$ ενός συστήματος σωμάτων κατά τη χρονική στιγμή t ισούται με την ορμή $\vec{j}_{\kappa.\beta}$ που έχει κατά την ίδια χρονική στιγμή t το κέντρο βάρους του συστήματος, αν αυτό θεωρηθεί ως υλικό σημείο με μάζα ίση προς τη μάζα ολόκληρου του συστήματος, δηλαδή:

$$\vec{j_\Sigma} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + m_3\vec{\upsilon}_3 + ... + m_\nu\vec{\upsilon}_\nu =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_\nu)\vec{\upsilon}_{\kappa.\beta.} = \vec{j}_{\kappa.\beta.}$$

$$\boxed{\vec{j_\Sigma} = \vec{j}_{\kappa.\beta.}}$$

όπου $\vec{\upsilon}_{\kappa.\beta.}$ η ταχύτητα που έχει το κέντρο βάρους του συστήματος κατά τη χρονική στιγμή t.

Επομένως ότι ισχύει για την ορμή ($\vec{j}_{\kappa.\beta.}$) του κέντρου βάρους ενός συστήματος σωμάτων, ισχύει και για την ορμή $\vec{j_\Sigma}$ ολόκληρου του συστήματος.

3.7.2 Θεώρημα διατηρήσεως της ορμής συστήματος σωμάτων.

Επειδή η ορμή $\vec{j_\Sigma}$ ενός συστήματος σωμάτων σε κάθε χρονική στιγμή t είναι ίση με την ορμή που έχει το κέντρο βάρους του συστήματος, μπορούμε να γράψομε:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{j}_{\kappa.\beta.}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{j}_\Sigma}{\Delta t} \quad \text{και} \quad \boxed{\vec{F} = \frac{\Delta\vec{j}_\Sigma}{\Delta t}} \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{j}_\Sigma = 0} \; (\Delta t \neq 0, \Delta t \to 0) \qquad (2)$$

Η σχέση (2) εκφράζει το θεώρημα διατηρήσεως της ορμής για ένα σύστημα σωμάτων, το οποίο ορίζει τα εξής:

Αν καμιά εξωτερική δύναμη δεν ασκείται σε ένα σύστημα σωμάτων ή αν ασκούνται σε αυτό εξωτερικές δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη είναι μηδέν, τότε η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι μηδέν, ή με άλλα λόγια αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, τότε η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

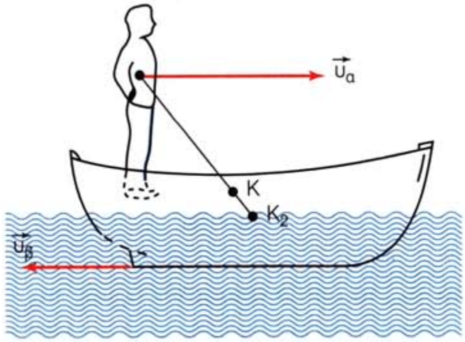
Σημείωση:

Αν λάβομε υπ' όψη μας τον ορισμό του απομονωμένου συστήματος, δηλαδή του συστήματος στο οποίο δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις αλλά μόνο εσωτερικές, μπορούμε το θεώρημα αυτό να το διατυπώσομε και ως εξής:

Η ορμή απομονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή.

Έστω ότι η βάρκα και ο άνθρωπος του σχήματος 3.7α αποτελούν απομονωμένο σύστημα. Τότε:

1) Όταν ο άνθρωπος παραμένει ακίνητος, ακίνητη παραμένει και η βάρκα. Έχομε:



Σχ. 3.7α.

– Ορμή ανθρώπου: $m_α\, 0 = 0$.

– Ορμή βάρκας: $m_β\, 0 = 0$.

– Ορμή του συστήματος: $m_α \cdot 0\ + m_β\, 0 = 0$.

2) Όταν ο άνθρωπος κινείται με ταχύτητα $\vec{υ}_α$, η βάρκα κινείται με ταχύτητα $\vec{υ}_β$ και έχομε:

– Ορμή ανθρώπου: $m_α \cdot \vec{υ}_α$.

– Ορμή βάρκας: $m_β \cdot \vec{υ}_β$.

– Ορμή συστήματος (άνθρωπος + βάρκα): $m_α \cdot \vec{υ}_α + m_β \cdot \vec{υ}_β$.

Επειδή θεωρήσαμε το σύστημα άνθρωπος - βάρκα ότι αποτελούν απομονωμένο σύστημα έχομε:

$$0 + 0 = m_α \cdot \vec{υ}_α\ + m_β \cdot \vec{υ}_β\ = 0$$

Κατά συνέπεια, μπορούμε να υπολογίσομε την ταχύτητα της βάρκας $\vec{υ}_β$, γνωρίζοντας την ταχύτητα κινήσεως του ανθρώπου $υ_α$ καθώς και τις μάζες $m_α$, $m_β$:

$$υ_β = -\frac{m_α}{m_β} υ_α$$

(Το – σημαίνει ότι η βάρκα κινείται αντίθετα προς τον άνθρωπο).

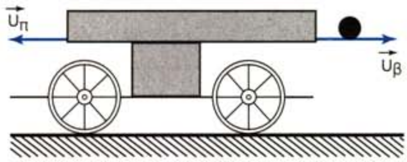
3.7.3 Ανάκρουση.

Όταν λέμε ανάκρουση εννοούμε την κίνηση του όπλου όταν εκσφενδονίζει το βλήμα, που είναι βέβαια αντίθετη προς την κίνηση του βλήματος.

Η ανάκρουση δικαιολογείται ως εξής: Το πυροβόλο και το βλήμα το θεωρούμε απομονωμένο σύστημα. Πριν από την εκπυρσοκρότηση, το άθροισμα των ορμών του πυροβόλου και του βλήματος είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$m_π \cdot 0 +\ m_β \cdot 0 =0 \qquad (1)$$

Όταν γίνεται η εκπυρσοκρότηση, τα αέρια καύσεως ασκούν δυνάμεις και στο πυροβόλο και στο βλήμα. Οι δυνάμεις αυτές δίνουν στο βλήμα ταχύτητα



Σχ. 3.7β.

$\vec{\upsilon}_\beta$ και στο πυροβόλο $\vec{\upsilon}_\pi$, τα οποία αποκτούν ορμές $m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta$ και $m_\pi \cdot \vec{\upsilon}_\pi$ αντίστοιχα (σχ. 3.7β). Το άθροισμα των ορμών του πυροβόλου και του βλήματος μετά την πυροδότηση είναι:

$$\vec{j}_\Sigma = m_\pi \vec{\upsilon}_\pi + m_\beta \vec{\upsilon}_\beta \qquad (2)$$

Επειδή οι δυνάμεις των αερίων που δημιουργήθηκαν από την ανάφλεξη της εκρηκτικής ύλης είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα πυροβόλο - βλήμα πρέπει η ορμή του συστήματος πριν από την εκπυρσοκρότηση (σχέση 1) να είναι ίδια με την ορμή του συστήματος ύστερα από την εκπυρσοκρότηση (σχέση 2). Δηλαδή:

$$m_\pi \cdot 0 + m_\beta \cdot 0 = m_\pi \cdot \vec{\upsilon}_\pi + m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) παίρνομε:

$$\boxed{\vec{\upsilon}_\pi = -\frac{m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta}{m_\pi}} \qquad (4)$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι:

1) Η φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_\pi$ του πυροβόλου είναι αντίθετη της φοράς της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_\beta$ του βλήματος, δηλαδή το πυροβόλο θα κινηθεί προς τα πίσω, ενώ το βλήμα θα κινηθεί προς τα εμπρός.

2) Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\pi$ του πυροβόλου είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του m_π.

3.8 Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της Μηχανικής (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα).

Η αρχική διατύπωση από το Νεύτωνα του θεμελιώδους νόμου της Μηχανικής είναι η εξής: Το πηλίκο της μεταβολής ($\overrightarrow{\Delta j}$) της ορμής ενός σώματος προς το χρόνο (Δt), κατά τον οποίο λαμβάνει χώρα η μεταβολή αυτή ισούται με τη συνισταμένη δύναμη ($\vec{F}$) που ενήργησε στο σώμα και έχει (η $\overrightarrow{\Delta j}$) τη διεύθυνση και τη φορά της.

Σημείωση:

Ο χρόνος Δt θεωρείται πολύ μικρός ($\Delta t \to 0$).

Η διατύπωση αυτή είναι η γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμους της Μηχανικής και μαθηματικά αποδίδεται από την εξίσωση:

$$\vec{F} = \frac{\vec{j}_2 - \vec{j}_1}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta j}}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \boxed{\vec{F} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\overrightarrow{\Delta j}}{\Delta t}} \qquad (1)$$

όπου $\overrightarrow{\Delta j}$ είναι η μεταβολή της ορμής του σώματος που πραγματοποιείται στο χρονικό διάστημα Δt και $\vec{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων που την προκαλούν.

Από την εξίσωση (1) μπορούμε να καταλήξομε στη γνωστή μας εξίσωση:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}} \qquad (2)$$

Αν σε ένα σώμα (σχ. 3.8) που έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και ως εκ τούτου ορμή $\vec{j}_1 = m \cdot \vec{\upsilon}_1$ επιδράσει μία δύναμη $\vec{F}$ κατά την κατεύθυνσή της για ορισμένο χρόνο Δt, η ταχύτητα του σώματος θα αυξηθεί σε $\vec{\upsilon}_2$ και αντίστοιχα η ορμή του θα γίνει $\vec{j}_2 = m \cdot \vec{\upsilon}_2$. Σύμφωνα με την εξίσωση (1) έχομε:

$$\vec{F} = \frac{m \cdot \vec{\upsilon}_2 - m \cdot \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} = \frac{m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)}{\Delta t} \qquad (3)$$

Αλλά το πηλίκο $\dfrac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$ παριστάνει την επιτάχυνση $\vec{\gamma}$, του σώματος δηλαδή,

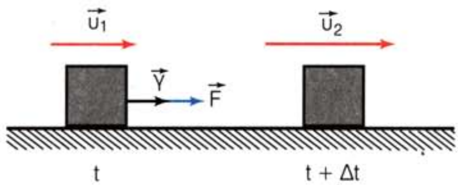
$$\frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} = \vec{\gamma} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

Προσοχή:

Η σχέση (2) εφαρμόζεται (ισχύει), όταν η μάζα αδράνειας (η αδρανειακή μάζα) του σώματος μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, δηλαδή δεν μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η ταχύτητα του σώματος. Αυτό συμβαίνει όταν οι ταχύτητες του σώματος είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Επειδή οι συνηθισμένες ταχύτητες των σωμάτων είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός (c_o) στο κενό γι' αυτό θεωρούμε στην πράξη τη μάζα των



Σχ. 3.8.

σωμάτων σταθερή, οπότε στην πράξη ισχύει η (2).

Η σχέση (1) ισχύει και όταν η μάζα του σώματος μεταβάλλεται, όπως συμβαίνει όταν οι ταχύτητές του πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Δηλαδή η εξίσωση (1) είναι γενικότερη της (2) [(με άλλα λόγια η (2) εμπεριέχεται στην (1)].

3.8.1 Σχέση μάζας και ταχύτητας ενός σώματος.

Ένα από τα συμπεράσματα της θεωρίας της σχετικότητας είναι και το εξής: ***Η μάζα ενός σώματος εξαρτάται από την ταχύτητά του. Δηλαδή, όταν το σώμα έχει ορισμένη ταχύτητα, τότε έχει και ορισμένη μάζα. Αν αλλάξει η ταχύτητα του σώματος, θα αλλάξει και η μάζα του.***

Η σχέση μεταξύ της μάζας ενός σώματος και της ταχύτητάς του είναι εξής:

$$\boxed{m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c_o^2}}}} \qquad (1)$$

όπου m η μάζα που έχει το σώμα, όταν έχει ταχύτητα υ, m_o η μάζα που έχει το σώμα, όταν η ταχύτητά του είναι μηδέν (η μάζα m_o λέγεται και μάζα ηρεμίας του σώματος) και c_o η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Από τη σχέση (1) προκύπτουν τα εξής:

1) Όσο αυξάνει η ταχύτητα υ του σώματος, τόσο αυξάνει και η μάζα m του σώματος.

Λέγοντας ότι αυξάνει η μάζα ενός σώματος όταν αυξάνει η ταχύτητά του, δεν εννοούμε ότι αυξάνει η ύλη του σώματος, αλλά ότι αυξάνει το πηλίκο $\frac{F}{\gamma} = m$ (δηλ. ότι αυξάνει η αδρανειακή μάζα του σώματος).

2) Κανένα υλικό σώμα δεν μπορεί να αποκτήσει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός (c_o), γιατί όταν η ταχύτητα του σώματος γίνει ίση με την ταχύτητα του φωτός (c_o), τότε η μάζα m του σώματος γίνεται άπειρη.

3.9 Ροπή αδράνειας.

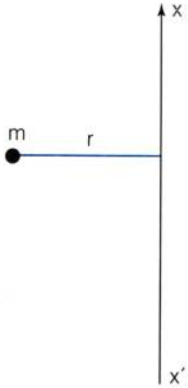
3.9.1 Ροπή αδράνειας υλικού σημείου ως προς άξονα.

Ροπή αδράνειας (Θ_σ) ενός υλικού σημείου με μάζα m (σχ. 3.9α) ως προς έναν άξονα x΄x, από τον οποίο απέχει απόσταση r, ονομάζεται το γινόμενο της μάζας επί το τετράγωνο της αποστάσεως r. Δηλαδή:

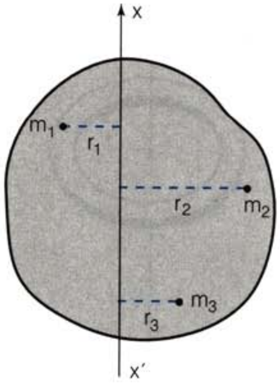
$$\boxed{\Theta_\sigma = m\, r^2} \qquad (1)$$

Προσοχή:

Όταν μιλάμε για ροπή αδράνειας, πρέπει οπωσδήποτε να ορίζομε και τον άξονα ως προς τον οποίο αναφέρεται.



Σχ. 3.9α.



Σχ. 3.9β.

3.9.2 Ροπή αδράνειας σώματος ως προς άξονα.

Ροπή αδράνειας (Θ_Σ) ενός σώματος ως προς έναν άξονα x΄x (σχ. 3.9β) ονομάζεται το άθροισμα των ροπών της αδράνειας όλων των στοιχειωδών μαζών του σώματος ως προς τον άξονα x΄x. Δηλαδή:

$$\boxed{\Theta_\Sigma = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots} \qquad (2)$$

όπου r_1, r_2, r_3 είναι οι αποστάσεις των στοιχειωδών μαζών m_1, m_2, m_3... από τον άξονα x΄x αντιστοίχως.

Παρατήρηση:

Από τη σχέση ορισμού (2) της ροπής αδράνειας Θ_Σ ενός σώματος ως προς τον άξονα x΄x συμπεραίνομε ότι αυτή εξαρτάται:

1) Από τη μάζα του σώματος (m). Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας του σώματος αυτού.

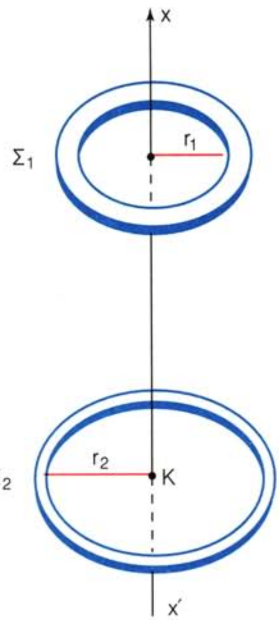
2) Από την κατανομή της μάζας του σώματος ως προς τον άξονα x΄x. Όσο πιο μακριά από τον άξονα x΄x βρίσκονται οι στοιχειώδεις μάζες του σώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας του Θ_Σ ως προς τον άξονα αυτόν.

Σημείωση:

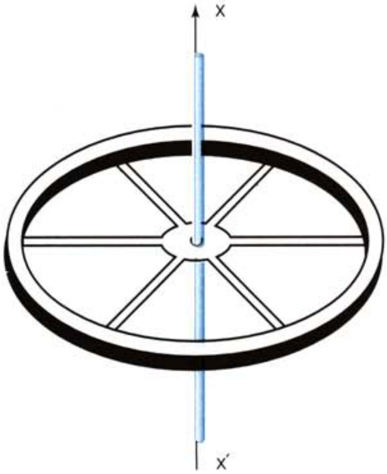
Η εξάρτηση της Θ_Σ από την κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα x΄x είναι μεγάλη. Γιατί η Θ_Σ εξαρτάται από τα τετράγωνα των αποστάσεων (r^2) των στοιχειωδών μαζών από τον άξονα x΄x:

Οι δύο στεφάνες Σ_1 και Σ_2 (σχ. 3.9γ) έχουν ίσες μάζες, αλλά η ροπή αδράνειας Θ_2 της Σ_2 ως προς τον άξονα x΄x είναι μεγαλύτερη από τη ροπή αδράνειας Θ_1 της Σ_1 ($\Theta_2 > \Theta_1$) ως προς τον x΄x, γιατί οι αποστάσεις των στοιχειωδών μαζών της Σ_2 από τον άξονα x΄x είναι μεγαλύτερες από τις αποστάσεις των στοιχειωδών μαζών της Σ_1 από το ίδιο άξονα x΄x ($r_2 > r_1$).

Επίσης, η ροπή αδράνειας του τροχού του σχήματος 3.9δ ως προς τον άξονα x΄x είναι μεγάλη, γιατί η μάζα του είναι κατανεμημένη μακριά από τον άξονα x΄x.



Σχ. 3.9γ.



Σχ. 3.9δ.

3.9.3 Μονάδα ροπής αδράνειας.

Η μονάδα μάζας στο σύστημα S.I. είναι το 1 kg και η μονάδα μήκους το 1 m. Άρα 1 μονάδα ροπής αδράνειας στο σύστημα S.I. είναι:

$$\Theta = m \cdot r^2 = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m}^2 = 1\ \text{kgm}^2$$

Όταν λέμε για παράδειγμα ότι ένα σώμα έχει ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα 5 kgm^2, εννοούμε ότι η ροπή του αυτή είναι πέντε φορές πιο μεγάλη από τη ροπή αδράνειας μιας στεφάνης πολύ μικρού πάχους, που έχει μάζα 1 kg και ακτίνα 1 m ως προς ένα άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της.

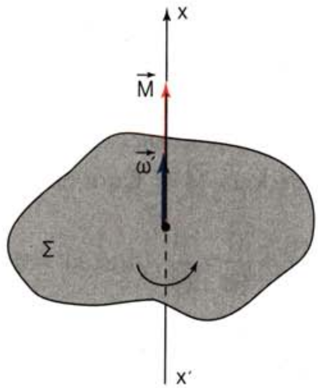
3.10 Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κινήσεως.

Αν σε ένα σώμα Σ (σχ. 3.10) που μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα x´x ασκείται μια ροπή $\vec{M}$ ως προς αυτόν τον άξονα, τότε το σώμα θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα x´x με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}'} \qquad (1)$$

όπου Θ είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής x´x.

Η εξίσωση (1) ονομάζεται θεμελιώδης εξίσωση της στροφικής κινήσεως.



Σχ. 3.10.

Από την εξίσωση (1) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\boxed{\vec{\omega}' = \frac{\vec{M}}{\Theta}} \qquad (2)$$

και

$$\boxed{\overline{\omega}' = \frac{\overline{M}}{\Theta}} \qquad (3)$$

Προσοχή:

Οι σχέσεις (2) και (3) εκφράζουν το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κινήσεως, ο οποίος ορίζει τα εξής: Αν σε ένα σώμα που μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα x′x ασκείται ροπή $\vec{M}$ ως προς αυτόν τότε για τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$ περί τον άξονα αυτό, την οποία του προσδίδει η ροπή $\vec{M}$ ισχύουν:

1) Η $\vec{\omega}'$ έχει διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και τη φορά της ροπής $\vec{M}$ (επομένως έχει το ίδιο πρόσημο με τη ροπή, δηλαδή $\overline{\omega}'$ και $\overline{M}$ ομόσημα).

2) Η $\vec{\omega}'$ έχει μέτρο, ίσο με το πηλίκο του μέτρου της $\vec{M}$ διά της ροπής αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα x′x περιστροφής του. Δηλαδή:

$$\boxed{|\vec{\omega}'| = \frac{|\vec{M}|}{\Theta}}$$

Γενικές παρατηρήσεις (διερεύνηση της εξισώσεως 2).

1) Από την εξίσωση (2) προκύπτει:

$$\Theta = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{\omega}'|} \qquad (4)$$

Από τη σχέση (4) συμπεραίνομε ότι: ***Η ροπή αδράνειας Θ ενός σώματος ως προς άξονα x΄x είναι το πηλίκο του μέτρου της ροπής $\vec{M}$ που ενεργεί στο σώμα ως προς τον άξονα x΄x διά του μέτρου της γωνιακής επιταχύνσεως $\vec{\omega}'$ την οποία αποκτά το σώμα εξ αιτίας της ροπής αυτής.***

2) Αν στην εξίσωση (2) θέσομε $\vec{M} = 0$ και $\Theta \neq 0$, θα έχομε:

$$\vec{\omega}' = \frac{\vec{M}}{\Theta} = \frac{0}{\Theta}, \text{ άρα } \vec{\omega}' = 0$$

Δηλαδή: ***Αν σε ένα σώμα, που μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα, δεν ασκείται καμιά ροπή ($\vec{M} = 0$) ως προς αυτόν τον άξονα ή αν η συνισταμένη ροπή των ροπών που τυχόν ασκούνται στο σώμα αυτό είναι μηδέν, τότε το σώμα ή δεν θα περιστρέφεται ή αν περιστρέφεται θα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (αφού η γωνιακή επιτάχυνση του $\vec{\omega}'$ θα είναι μηδέν).***

3) Αν στην εξίσωση (2) θέσομε: $\vec{\omega}' = 0$ και $\Theta \neq 0$, τότε θα έχομε:

$$\vec{\omega}' = \frac{\vec{M}}{\Theta}, \quad 0 = \frac{\vec{M}}{\Theta}, \text{ άρα } \vec{M} = 0$$

Δηλαδή: ***Αν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}' = 0$) ή δεν περιστρέφεται, τότε δεν ασκείται σε αυτό καμιά ροπή ως προς τον άξονα αυτόν ή και αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι μηδέν.***

4) Αν στην εξίσωση (2) θέσομε $\vec{M}$ = σταθερό, τότε προκύπτει και $\vec{\omega}'$ = σταθερό.

΄Εχομε: $$\boxed{\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}'}$$

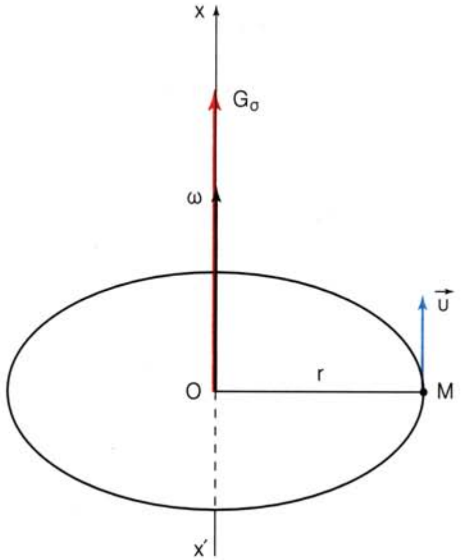
Επειδή $\vec{M}$ = σταθερό και Θ = σταθερό, είναι $\vec{\omega}'$ = σταθερό.

Δηλαδή: ***Αν σε ένα σώμα, που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα, η ροπή που ασκείται σε αυτό ως προς τον άξονα αυτόν είναι συνεχώς σταθερή ($\vec{M}$ = σταθερό), τότε το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ($\vec{\omega}'$ = σταθερό).***

3.11 Στροφορμή υλικού σημείου και στερεού σώματος ως προς άξονα.

3.11.1 Στροφορμή υλικού σημείου ως προς άξονα x΄x.

Αν ένα υλικό σημείο γράφει κυκλική τροχιά που το κέντρο της βρίσκεται επάνω στον άξονα x΄x (σχ. 3.11α) και το επίπεδό της είναι κάθετο στον άξονα αυτό, τότε στροφορμή $\vec{G}_\sigma$ του υλικού αυτού σημείου ως προς τον άξονα x΄x κατά τη χρονική στιγμή t που βρίσκεται στη θέση Α, ονομάζομε ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:



Σχ. 3.11α.

1) Φορέα, τον άξονα x΄x, που είναι και ο φορέας της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$.

2) Φορά, τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα δεξιόστροφου κοχλία, που είναι και η φορά της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$.

3) Μέτρο, το γινόμενο:

$$\boxed{\left|\vec{G}_\sigma\right| = m \cdot \upsilon \cdot r} \qquad (1)$$

όπου m η μάζα του υλικού σημείου, r η ακτίνα της περιφέρειας που διαγράφει και υ το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας που έχει κατά τη χρονική στιγμή t.

Επειδή ισχύει η σχέση $\upsilon = \omega \cdot r$, η σχέση (1) δίδει:

$$\boxed{\left|\vec{G}_\sigma\right| = m \cdot r^2 \cdot \left|\vec{\omega}\right|}$$

Παρατηρήσεις:

1) Οι $\vec{G}_\sigma$ και $\vec{\omega}$ έχουν τον ίδιο φορέα, επομένως ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\overline{G}_\sigma = m \cdot r^2 \overline{\omega}}$$

2) Οι $\overline{G}_\sigma$ και $\overline{\omega}$ είναι ομόσημες αφού οι $\vec{G}_\Sigma$ και $\vec{\omega}$ είναι ομόρροπες.

3.11.2 Στροφορμή στερεού σώματος ως προς άξονα x΄x.

Όταν ένα σώμα εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από έναν άξονα x΄x (σχ. 3.11β) ονομάζομε στροφορμή του σώματος $\vec{G}_\Sigma$ ως προς τον άξονα x΄x κατά τη χρονική στιγμή t το γεωμετρικό (διανυσματικό) άθροισμα των στροφορμών που έχουν τη στιγμή αυτή όλα τα υλικά σημεία του σώματος ως προς τον άξονα αυτόν.

Για να προσδιορίσομε τη στροφορμή ενός στερεού σώματος Σ, εργαζόμαστε ως εξής:

1) Χωρίζομε το σώμα Σ (σχ. 3.11β) σε στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2, m_3, ...

2) Προσδιορίζομε τη στροφορμή κάθε μιας στοιχειώδους μάζας ως προς τον άξονα x΄x κατά τη χρονική στιγμή t, και έστω ότι αυτές είναι: $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$, ...

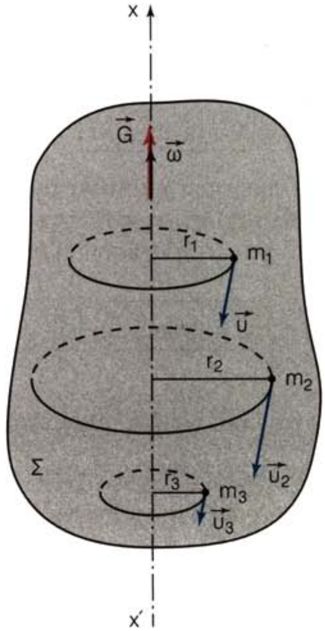
3) Αθροίζομε τις $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$, και βρίσκομε:

$$\boxed{\vec{G}_\Sigma = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + ...} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) μας δίνει τη στροφορμή του στερεού σώματος ως προς τον άξονα x΄x κατά τη χρονική στιγμή t.

Η στροφορμή $\vec{G}_\Sigma$ ενός σώματος ως προς έναν άξονα x΄x (σχ. 3.11β) όταν περιστρέφεται γύρω από αυτόν είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, το οποίο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Φορέα, το φορέα του άξονα, που είναι και ο φορέας της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$.



Σχ. 3.11β.

2) Φορά, τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα δεξιόστροφου κοχλία που είναι και η φορά της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$.

3) Μέτρο, το γινόμενο του μέτρου $|\vec{\omega}|$ της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$ επί τη ροπή αδράνειας Θ του σώματος αυτού ως προς τον άξονα περιστροφής x΄x.

Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{G}_\Sigma = \Theta \cdot \vec{\omega}} \;(2) \qquad \overline{G}_\Sigma = \Theta \cdot \overline{\omega} \quad \text{και} \quad \boxed{|\vec{G}_\Sigma| = \Theta \cdot |\vec{\omega}|} \;(3)$$

Απόδειξη των σχέσεων (2) και (3).

1) Χωρίζομε το σώμα στις στοιχειώδεις μάζες του m_1, m_2, m_3 ... (σχ. 3.11β).

2) Προσδιορίζομε τις στροφορμές των στοιχειωδών μαζών του σώματος ως προς τον άξονα x΄x κατά τη χρονική στιγμή t. Έστω ότι αυτές είναι:

$$\vec{G}_1 = m_1 r_1^2 \vec{\omega}_1 \qquad (4)$$

$$\vec{G}_2 = m_2 r_2^2 \vec{\omega}_2 \qquad (5)$$

$$\vec{G}_3 = m_3 r_3^2 \vec{\omega}_3 \qquad (6)$$

όπου $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ είναι οι γωνιακές ταχύτητες των στοιχειωδών μαζών κατά τη χρονική στιγμή t.

Επειδή το σώμα εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα x΄x, όλα τα σημεία του σε κάθε στιγμή θα έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

Επομένως έχομε:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = \ldots \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (7), (4), (5), (6) έχομε:

$$\vec{G}_1 = m_1 r_1^2 \vec{\omega} \;(8),\; \vec{G}_2 = m_2 r_2^2 \vec{\omega} \;(9),\; \vec{G}_3 = m_3 r_3^2 \vec{\omega} \qquad (10)$$

Ως στροφορμή του στερεού σώματος ως προς τον άξονα x΄x κατά τη χρονική στιγμή t ορίσαμε το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών του.

Επομένως έχομε:

$$\vec{G}_\Sigma = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \ldots \qquad (11)$$

Από τις σχέσεις (8), (9), (10), (11) προκύπτει:

$$\vec{G}_\Sigma = \left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^3 + \ldots\right)\vec{\omega} \qquad (12)$$

Το άθροισμα που είναι μέσα στην παρένθεση, είναι η ροπή αδράνειας (Θ) του σώματος ως προς τον άξονα x΄x. Δηλαδή:

$$\Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots \qquad (13)$$

Από τις σχέσεις (12) και (13) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{G}_\Sigma = \Theta \cdot \vec{\omega}} \quad \text{και} \quad \boxed{|\vec{G}_\Sigma| = \Theta \cdot |\vec{\omega}|}$$

Σημείωση:

Δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι οι $\vec{G}_\Sigma$ και $\vec{\omega}$ είναι ομόρροπες.

3.11.3 Μονάδα στροφορμής.

Μονάδα ροπής αδράνειας στο σύστημα S.I. είναι το $1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ και μονάδα γωνιακής ταχύτητας είναι το 1 rad/sec. Επομένως η μονάδα της στροφορμής στο S.I. είναι:

$$G = \Theta \cdot \omega = 1\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 1\,\text{rad/s} = \frac{1\,\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

(Αφού το ακτίνιο είναι καθαρός αριθμός).

3.12 Γενικότερη μορφή (διατύπωση) της θεμελιώδους εξισώσεως της στροφικής κινήσεως.

Γνωρίζομε ότι:

$$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}' \qquad (1)$$

$$\vec{G} = \Theta \cdot \vec{\omega} \qquad (2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2), οι μεταβολές $\overrightarrow{\Delta G}$ και $\overrightarrow{\Delta \omega}$ συνδέονται με τη σχέση:

$$\overrightarrow{\Delta G} = \Theta \cdot \overrightarrow{\Delta \omega} \qquad (3)$$

Αν διαιρέσομε και τα δύο μέλη της (3) με το χρόνο $(t_2 – t_1)$ που εξασκήθηκε η $\vec{M}$ και προκάλεσε τη $\overrightarrow{\Delta \omega}$ θα έχομε:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta G}}{(t_2 - t_1)} = \Theta \cdot \frac{\overrightarrow{\Delta \omega}}{(t_2 - t_1)} \qquad (4)$$

Το πηλίκο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\overrightarrow{\Delta \omega}$ διά του χρόνου $(t_2 - t_1)$, όταν αυτός είναι πολύ μικρός $(t_2 - t_1 = \Delta t \to 0)$, μας δίνει τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\omega}'$ που προσέδωσε η ροπή $\vec{M}$ στο σώμα.

Δηλαδή:

$$\vec{\omega}' = \frac{\overrightarrow{\Delta \omega}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta \omega}}{\Delta t} \ (\Delta t = \text{πάρα πολύ μικρός}) \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχομε:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta G}}{\Delta t} = \Theta \cdot \vec{\omega}' \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (1) και (6) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\overrightarrow{\Delta G}}{\Delta t}} \ (7) \quad \text{και} \quad |\vec{M}| = \frac{|\overrightarrow{\Delta G}|}{\Delta t} \ (\Delta t\text{: πάρα πολύ μικρός}) \qquad (8)$$

Η εξίσωση (7), η οποία είναι η γενικότερη διατύπωση της θεμελιώδους εξισώσεως της στροφικής κινήσεως, εκφράζει τα εξής:

1) Αν σε ένα σώμα που μπορεί να περιστραφεί γύρω από έναν άξονα, ασκηθεί ροπή, τότε η ροπή θα προκαλέσει μεταβολή της στροφορμής του σώματος.

2) Το πηλίκο του μέτρου της μεταβολής της στροφορμής $\overrightarrow{\Delta G}$ ενός σώματος την οποία προκαλεί μία ροπή $\vec{M}$, όταν επιδράσει επάνω σε αυτό επί χρόνο Δt (που είναι πολύ μικρός) διά του χρόνου αυτού είναι ίσο με το μέτρο της ροπής $\vec{M}$.

3.13 Θεώρημα διατηρήσεως της στροφορμής σώματος (ή συστήματος σωμάτων).

Γνωρίζομε ότι ισχύει η σχέση:

$$\vec{M} = \frac{\overrightarrow{\Delta G}}{\Delta t} \ (\Delta t \to 0) \qquad (1)$$

όπου $\overrightarrow{\Delta G}$ είναι η μεταβολή που υφίσταται η στροφορμή ενός σώματος (ή συστήματος σωμάτων), όταν επάνω του επιδράσει επί χρόνο Δt (που είναι πολύ μικρός) μία ροπή $\vec{M}$.

Η εξίσωση (1) εκφράζει την αρχή διατηρήσεως της στροφορμής, η οποία ορίζει τα εξής: ***Αν σε ένα σώμα (ή σύστημα σωμάτων) που μπορεί να περιστραφεί γύρω από έναν άξονα (x΄x) δεν ασκείται καμιά ροπή ως προς τον άξονα αυτόν τότε η στροφορμή του σώματος (ή του συστήματος σωμάτων) ως προς τον ίδιο άξονα (x΄x) παραμένει σταθερή.***

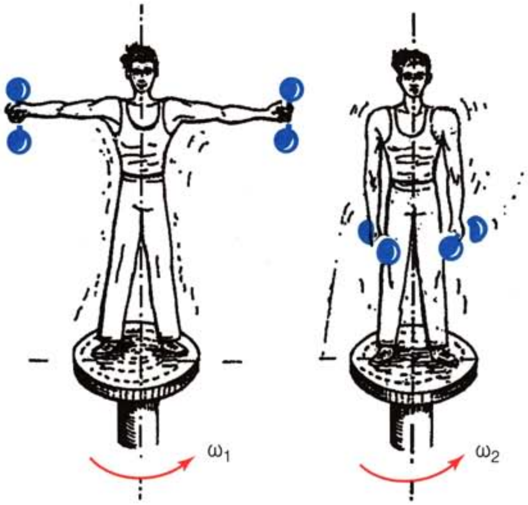
Πραγματικά, αν $\vec{M} = \vec{0}$, τότε επειδή $\Delta t \neq 0$, από την εξίσωση (1) προκύπτει: $\overrightarrow{\Delta G} = \vec{0}$.

Αλλά $\overrightarrow{\Delta G} = \vec{0}$ σημαίνει ότι η στροφορμή $\vec{G}$ του σώματος (ή του συστήματος σωμάτων) παραμένει σταθερή.

΄Ενας άνθρωπος κάθεται σε ελαφρύ τραπέζι το οποίο υποθέτομε ότι περιστρέφεται χωρίς τριβές, με γωνιακή ταχύτητα ω_1 [σχ. 3.13(α)]. Ο άνθρωπος έχει τεντωμένα τα χέρια του και κρατά δύο βάρη. Για τη θέση αυτή των χεριών του έχει μία ροπή αδράνειας Θ_1. Αν ο άνθρωπος φέρει τα χέρια του επάνω στο σώμα του [σχ. 3.13(β)], θα παρατηρήσομε ότι θα περιστρέφεται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα ω_2.

Αυτό εξηγείται ως εξής: Επάνω στον άνθρωπο δεν εξασκείται καμία εξωτερική ροπή (υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν ούτε τριβές).

Με βάση το παραπάνω θεώρημα ισχύουν οι σχέσεις:



Σχ. 3.13.

$$\vec{G}_{EK} = \vec{G}_{συμπ} \quad και \quad Θ_1 \cdot ω_1 = Θ_2 \cdot ω_2 \qquad (2)$$

όπου $\vec{G}_{EK}$ η στροφορμή του ανθρώπου όταν έχει τα χέρια του σε έκταση και $\vec{G}_{συμπ}$ η στροφορμή του όταν έχει τα χέρια του σε σύμπτυξη.

Επειδή ισχύει: $Θ1>Θ2$ από τη σχέση (2) έχομε $ω_2>ω_1$.

3.14 Έργο.

3.14.1 Ορισμός.

Λέμε ότι μία δύναμη παράγει έργο όταν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της, με την προϋπόθεση όμως ότι οι διευθύνσεις της δυνάμεως και της μετατοπίσεως του σημείου εφαρμογής της δεν είναι κάθετες μεταξύ τους.

Όταν το σημείο εφαρμογής Α μιας δυνάμεως $\vec{F}$ σταθερής (κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο) μετατοπίζεται κατά $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 3.14α) και κατά τέτοιο τρόπο που το διάνυσμα της δυνάμεως $\vec{F}$ να σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα της μετατοπίσεως $\overrightarrow{AB}$, τότε ορίζομε ***ως*** έργο W το οποίο παράγει η δύναμη $\vec{F}$ το γινόμενο:

$$\boxed{W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| συνφ} \qquad (1)$$

Προσοχή:

1) Η σχέση (1) εκφράζει το γενικό ορισμό του έργου δυνάμεως.

2) Αν $φ = 90^o$ ή $φ = 270^o$ τότε $W = 0$ (2)

Σχ. 3.14α.

Σχ. 3.14β.

3.14.2 Έργο σταθερής δυνάμεως της οποίας το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται κατά την κατεύθυνσή της.

Όταν ένα σώμα Σ (σχ. 3.14β) υφίσταται μία μετατόπιση $\overrightarrow{AB} = \vec{S}$ ενώ επί του σώματος ασκείται μία δύναμη $\vec{F}$ που έχει σταθερό μέτρο, διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και τη φορά της μετατοπίσεως $\overrightarrow{AB}$ ($\vec{F}$ και $\overrightarrow{AB}$ ομόρροπα) τότε ορίζομε *ως* έργο W το οποίο παράγει η δύναμη $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $\overrightarrow{AB}$ το γινόμενο:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \qquad (1)$$

Παρατήρηση:

Έχομε τη γενική σχέση του έργου: $W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{συνφ}$ (2)

Όταν τα διανύσματα $\vec{F}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι ομόρροπα τότε η γωνία φ είναι μηδεν, επομένως: συνφ = συν0 = 1 (3)

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{συνφ} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{συν}0 = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot 1$$

$$\boxed{W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} \qquad (4)$$

Προσοχή:

Από τις (2) και (4) που είναι σχέσεις ορισμού του έργου δυνάμεως προκύπτουν:

1) Όταν το σημείο εφαρμογής μιας δυνάμεως μετατοπίζεται τότε έργο παράγει μόνο η συνιστώσα της δυνάμεως που η διεύθυνσή της συμπίπτει με τη διεύθυνση της μετατοπίσεως του σημείου εφαρμογής της.

2) Το έργο μιας δυνάμεως είναι μονσόμετρο (βαθμωτό) μέγεθος.

3.14.3 Περιπτώσεις ανάλογα της τιμής φ.

1) Αν η γωνία φ είναι μικρότερη από 90° (φ<90°), τότε το συνημίτονο της φ είναι θετικό και επομένως το έργο της δυνάμεως είναι θετικό (σχ. 3.14γ).

Το θετικό έργο μιας δυνάμεως το ονομάζομε και κινητήριο έργο, γιατί στην περίπτωση αυτήν η δύναμη όχι μόνο δεν αντιστέκεται στη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της (του σώματος), αλλά και συμβάλλει στη μετατόπιση αυτή.

$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot συνφ, \text{ αν } συνφ > 0 \text{ τότε } W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot συνφ > 0$$

2) Αν η γωνία φ είναι μεγαλύτερη από 90° και μικρότερη από 180° (90°<φ<180°), τότε το συνημίτονο της φ είναι αρνητικό, επομένως και το έργο της δυνάμεως θα είναι αρνητικό (σχ. 3.14δ). Το αρνητικό έργο μίας δυνάμεως το ονομάζομε και ανθιστάμενο έργο, γιατί η δύναμη αντιστέκεται στη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της.

$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot συνφ, \text{ αν } συνφ < 0 \text{ τότε } W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot συνφ < 0$$

3) Αν η γωνία φ είναι ίση με 90° (φ = 90°), τότε το συνημίτονο της φ είναι μηδέν (συν 90° = 0) και το έργο της δυνάμεως είναι μηδέν (σχ. 3.14ε).

$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot συνφ, \text{ αν } συνφ = 0 \text{ τότε } W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot 0 = 0 \qquad (1)$$

Σχ. 3.14γ.

Σχ. 3.14δ.

Σχ. 3.14ε.

3.14.4 Έργο της συνισταμένης δυνάμεων.

Το έργο της συνισταμένης δυνάμεων ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των συνιστωσών της.

Θα αποδείξομε την πρόταση για δύο δυνάμεις $\overrightarrow{AB} = \vec{F}_1$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{F}_2$ οι οποίες εφαρμόζουν στο σημείο Α και έχουν ως συνισταμένη την $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}$ (σχ. 3.14στ).

Αν το Α μετατοπισθεί κατά $\overrightarrow{AA_1} = \vec{S}$, ενώ οι δυνάμεις διατηρούνται σταθερές (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά), θα έχομε:

Έργο της $\vec{F}$:

$$W = \overline{A\Delta_1} \cdot |\vec{S}| \tag{1}$$

όπου $\overline{A\Delta_1}$ το αλγεβρικό μέτρο της διανυσματικής προβολής της $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}$ πάνω στη μετατόπιση $\overrightarrow{AA_1}$ και $|\vec{S}|$ το μέτρο της μετατοπίσεως $\vec{S} = \overrightarrow{AA_1}$.

Τα έργα των συνιστωσών είναι:

Έργο της $\vec{F}_1$:

$$W_1 = \overline{AB_1} \cdot |\vec{S}| \tag{2}$$

Έργο της $\vec{F}_2$:

$$W_2 = \overline{A\Gamma_1} \cdot |\vec{S}| \tag{3}$$

όπου $\overline{AB_1}, \overline{A\Gamma_1}$ τα αλγεβρικά μέτρα των διανυσματικών προβολών των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ πάνω στη μετατόπιση $\overrightarrow{AA_1} = \vec{S}$.

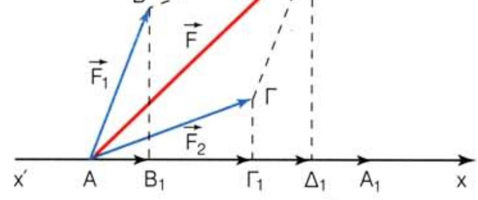
Ισχύει επίσης η σχέση:

$$\overline{A\Delta_1} = \overline{AB_1} + \overline{A\Gamma_1} \tag{4}$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$W = \overline{A\Delta_1} \cdot |\vec{S}| = (\overline{AB_1} + \overline{A\Gamma_1}) \cdot |\vec{S}| = \overline{AB_1} \cdot |\vec{S}| + \overline{A\Gamma_1} \cdot |\vec{S}|$$

$$\boxed{W = W_1 + W_2}$$



Σχ. 3.14στ.

Παρατήρηση:

Η πρόταση (θεώρημα) αυτή ισχύει και για δυνάμεις μη σταθερές και για οποιαδήποτε μετατόπιση (γιατί για πάρα πολύ μικρές, απειροελάχιστες, μετακινήσεις μπορούμε τις δυνάμεις να τις θεωρούμε ως σταθερές και τις μετακινήσεις ως ευθύγραμμες).

3.14.5 Τρόποι υπολογισμού του έργου, όταν στο σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις.

Όταν πολλές δυνάμεις ασκούνται σε ένα σώμα, για να υπολογίσομε το ολικό έργο τους χρησιμοποιούμε συνήθως τους εξής δύο ισοδύναμους τρόπους:

1) Υπολογίζομε το έργο που παράγει κάθε μία δύναμη ξεχωριστά και κατόπιν λογαριάζομε το αλγεβρικό άθροισμα των έργων αυτών.

2) Προσδιορίζομε το διανυσματικό άθροισμα (συνισταμένη) των δυνάμεων και κατόπιν βρίσκομε το έργο που παράγει η συνισταμένη τους.

3.14.6 Έργο δυνάμεως $\vec{F}$ όταν ισχύουν τα εξής:

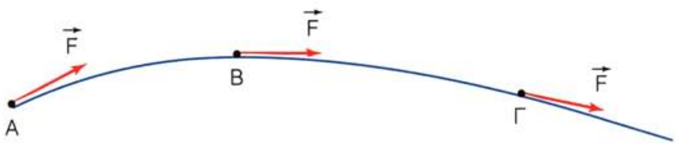
1) Το σημείο εφαρμογής της εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση.

2) Το μέτρο της παραμένει σταθερό.

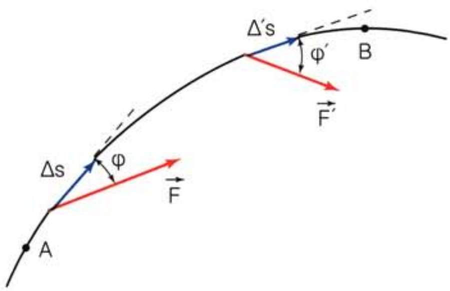
3) Η διεύθυνσή της είναι συνεχώς εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της τροχιάς του σημείου εφαρμογής της.

Στην περίπτωση αυτή το μέτρο του έργου της δυνάμεως $\vec{F}$ ισούται με το γινόμενο του μέτρου της επί το μήκος της καμπυλόγραμμης διαδρομής ΑΒΓ (σχ. 3.14ζ) που γράφει το σημείο εφαρμογής της : $W = |\vec{F}| \cdot (AB\Gamma)$.

Το αλγεβρικό μέτρο του έργου της $\vec{F}$ είναι θετικό ή αρνητικό εφ' όσον αντίστοιχα η φορά της κινήσεως του σημείου εφαρμογής συμπίπτει ή όχι με τη φορά της δυνάμεως $\vec{F}$.



Σχ. 3.14ζ.



Σχ. 3.14η.

3.14.7 Γενική περίπτωση υπολογισμού έργου.

΄Εστω ότι μία δύναμη $\vec{F}$ μεταβάλλεται συνέχεια κατά μέτρο και διεύθυνση, ενώ το σημείο εφαρμογής της διαγράφει μία τυχαία καμπύλη (σχ. 3.14η).

Αν χωρίσομε την καμπύλη διαδρομή σε στοιχειώδη τμήματα (πολύ μικρά), ώστε κάθε ένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί ως ευθύγραμμο και η δύναμη στο καθένα ως σταθερή, τότε σε κάθε ένα στοιχειώδες τμήμα θα αντιστοιχεί ένα στοιχειώδες έργο:

$$\Delta W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{\Delta S}|\,\text{συνφ}$$

Επομένως, το ολικό έργο κατά μήκος τόξου $\widehat{AB}$ θα είναι το άθροισμα των στοιχειωδών έργων, τα οποία αντιστοιχούν σε όλα τα στοιχειώδη τμήματα της καμπύλης από τα οποία αποτελείται το τόξο $\widehat{AB}$. Δηλαδή:

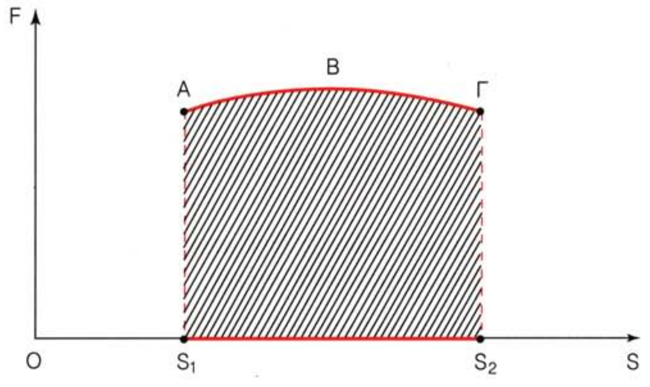
$$\boxed{W_{AB} = \Sigma_A^B |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{\Delta S}| \cdot \text{συνφ}}$$

3.14.8 Γραφική παράσταση έργου δυνάμεως, της οποίας μεταβάλλεται το μέτρο.

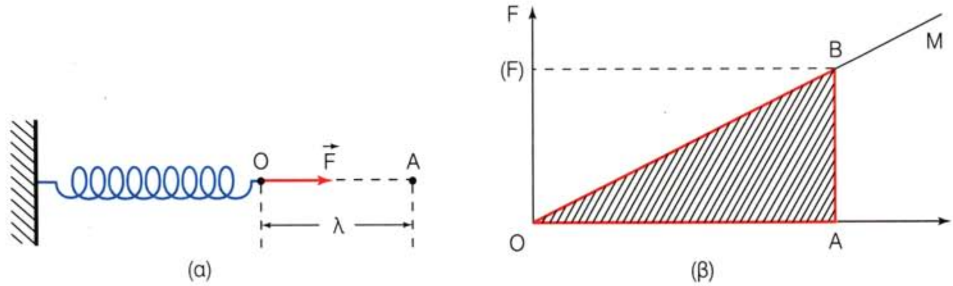
΄Εστω ότι μιας δυνάμεως $\vec{F}$, που έχει σταθερή διεύθυνση και φορά, μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της κατά την κατεύθυνσή της και το μέτρο της συνέχεια μεταβάλλεται. ΄Εστω επίσης ότι η τιμή της δυνάμεως (F) και η τιμή της της μετατοπίσεως (S) του σημείου εφαρμογής της συσχετίζονται με τη συνάρτηση:

$$F = f(S)$$

Αποδεικνύεται ότι το έργο W της δυνάμεως $\vec{F}$, όταν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της κατά τη μετατόπιση $\overrightarrow{S_1S_2}$, αριθμητικά είναι ίσο με το εμβαδόν Ε της επιφάνειας (S_1ABS_2) (σχ. 3.14θ) που ορίζεται μεταξύ της καμπύ-



Σχ. 3.14θ.



Σχ. 3.14ι.

λης ΑΒΓ [γραφική παράσταση της $F = f(S)$], του άξονα των μετατοπίσεων $\overrightarrow{OS}$ και των καθέτων προς τον άξονα αυτόν, που άγονται από τα σημεία του, (S_1) και (S_2). Δηλαδή: W = E της $(S_1 AB\Gamma S_2)$.

Εφαρμογή.

Επιμηκύνομε το ελατήριο του σχήματος 3.14ι(α) κατά ΟΑ = λ. Το μέτρο F της δυνάμεως $\vec{F}$ με την οποία τραβούμε το ελατήριο για να το επιμηκύνομε κατά ΟΑ = λ δεν παραμένει σταθερό. Η δύναμη η οποία προκαλεί επιμήκυνση λ ενός ελατηρίου είναι ανάλογη της επιμηκύνσεως, δηλαδή:

$$\boxed{F = K \cdot \lambda \text{ (νόμος του Hooke)}} \tag{1}$$

όπου Κ μία σταθερά η οποία εξαρτάται από τη φύση του υλικού του ελατηρίου και τα γεωμετρικά του στοιχεία.

Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $F = K \cdot \lambda$ είναι η ευθεία ΟΜ [σχ. 3.14ι(β)].

Το έργο W της δυνάμεως $\vec{F}$ κατά την επιμήκυνση (ΟΑ) ισούται με το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΒ.

Έχομε:

$$W = E = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (OA) \tag{2}$$

$$(AB) = F = K \cdot \lambda = K \cdot (OA) \tag{3}$$

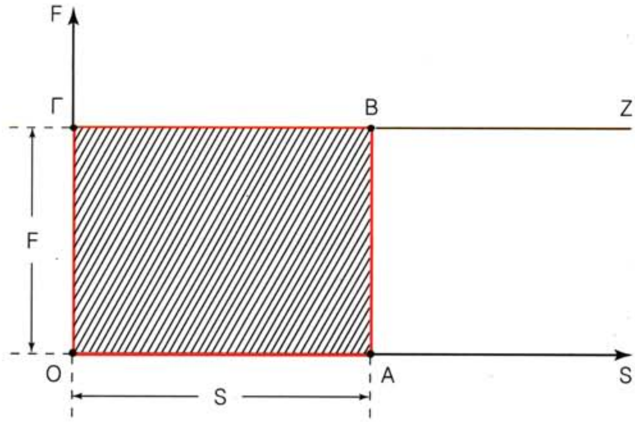
όπου F είναι το μέτρο της δυνάμεως, όταν η επιμήκυνση είναι ΟΑ.

Από τις (2) και (3) λαμβάνομε:

$$W = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (OA) \cdot (OA) \quad \text{και} \quad W = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (OA)^2 = \frac{1}{2} K \cdot \lambda^2$$

3.14.9 Γραφική παράσταση έργου σταθερής δυνάμεως $\vec{F}$ που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά την κατεύθυνσή της.

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $F = f(S)$ (1) είναι μια σταθερή συνάρτηση, δηλαδή στις διάφορες τιμές της μετατοπίσεως $\vec{S}$ αντιστοιχεί πάντα η αυτή τιμή της $\vec{F}$.



Σχ. 3.14ια.

Η γραφική παράσταση της (1) είναι η ευθεία ΓΖ (σχ. 3.14ια). Το έργο W που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $\overrightarrow{OA}$ είναι:

$$W = F \,.\, S = (O\Gamma)\cdot(OA) = E$$

όπου Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ.

3.15 Ισχύς.

3.15.1 Ισχύς δυνάμεως.

Ονομάζομε ισχύ P μιας δυνάμεως, η οποία παράγει ίσα έργα σε ίσους χρόνους το πηλίκο του έργου W που παράγει μέσα σε χρόνο t διά του χρόνου t. Δηλαδή:

$$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

3.15.2 Ισχύς μηχανής.

Όταν λέμε ισχύς μηχανής εννοούμε την ισχύ των δυνάμεων που αναπτύσσει η μηχανή αυτή.

Η ισχύς P μιας μηχανής είναι σημαντικό χαρακτηριστικό της, γιατί αν γνωρίζομε την ισχύ της, μπορούμε να υπολογίσομε το έργο W που μπορεί η μηχανή αυτή να παραγάγει ή να καταναλώσει σε χρόνο t:

$$P = \frac{W}{t} \quad \text{και} \quad \boxed{W = P.\,t}$$

Σημείωση:

Η ισχύς μιας μηχανής είναι μονόμετρο μέγεθος και παρέχει το ρυθμό με τον οποίο η μηχανή παράγει ή καταναλώνει έργο.

3.15.3 Μέση ισχύς – Στιγμιαία ισχύς.

Αν η μηχανή δεν παράγει ή δεν καταναλώνει ίσα ποσά έργου σε ίσους χρόνους, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες μέση ισχύς μηχανής και στιγμιαία ισχύς μηχανής.

α) Μέση ισχύς.

Μέση ισχύς $\overline{P}$ μηχανής στη χρονική διάρκεια $t_2 - t_1$ ονομάζομε το πηλίκο:

$$\boxed{\overline{P} = \frac{W}{t_2 - t_1}}$$

όπου W το έργο που παράγει ή καταναλώνει η μηχανή στη χρονική διάρκεια $(t_2 - t_1)$.

β) Στιγμιαία ισχύς P μηχανής κατά τη χρονική στιγμή t_1.

Έστω ότι η μηχανή παράγει ή καταναλώνει έργο ΔW στη χρονική διάρκεια $(t_2 - t_1)$. Ονομάζομε στιγμιαία ισχύ P της μηχανής αυτής κατά τη χρονική στιγμή t_1 το πηλίκο:

$$P = \frac{\Delta W}{(t_2 - t_1)}$$

με ***τη βασική προϋπόθεση*** ότι η χρονική διάρκεια $t_2 - t_1 = \Delta t$ $(\Delta t \to 0)$ είναι πολύ μικρή, ώστε η χρονική στιγμή t_2 να είναι πολύ κοντά στη χρονική στιγμή t_1. Δηλαδή:

$$\boxed{P = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

3.16 Ενέργεια.

Γενικά ονομάζομε ***ενέργεια*** ενός σώματος την ικανότητα του σώματος να παράγει (δηλ. να «αποδίδει») έργο. Γι' αυτό λέμε ότι ένα σώμα έχει ενέργεια, όταν έχει την ικανότητα να παράγει έργο.

Η ενέργεια ενός σώματος αυξάνει, όταν αυτό «απορροφά» έργο και ελαττώνεται όταν «αποδίδει» έργο. Επομένως μετρώντας το έργο το οποίο απορροφάται ή το έργο το οποίο αποδίδεται από ένα σώμα, μπορούμε να προσδιορίζομε τις μεταβολές της ενέργειάς του.

Η ενέργεια εκδηλώνεται με διάφορες μορφές, π.χ. μηχανική, ηλεκτρική κλπ. Εμείς στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσομε τη μηχανική ενέργεια.

Διακρίνομε δύο μορφές μηχανικής ενέργειας:

α) Την κινητική ενέργεια.

β) Τη δυναμική ενέργεια.

3.16.1 Κινητική ενέργεια και θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

α) Κινητική ενέργεια.

Κινητική ενέργεια E_K ενός σώματος ονομάζομε την ενέργεια την οποία έχει αυτό λόγω της ταχύτητάς του, δηλαδή την ενέργεια που οφείλεται στην κίνησή του.

Η ύπαρξη κινητικής ενέργειας φαίνεται από το ότι, όταν ένα σώμα που κινείται προσκρούει επάνω σε ένα άλλο σώμα, μπορεί να το μετατοπίσει και επομένως να παραγάγει έργο.

Το νερό χειμάρρου μπορεί να κινήσει μύλο. Κινούμενο βλήμα όπλου μπορεί να τρυπήσει ορισμένου πάχους τοίχωμα, αν προσκρούσει σε αυτό.

Η κινητική ενέργεια E_K σώματος που έχει μάζα m τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |\vec{\upsilon}|^2} \qquad (1)$$

όπου $|\vec{\upsilon}|$ το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$.

Ο τύπος (1) εκφράζει ***το έργο*** το οποίο πρέπει να «προσλάβει» («απορροφήσει») το σώμα για να αποκτήσει από την ηρεμία την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Επίσης εκφράζει το έργο που μπορεί να αποδώσει το σώμα χάνοντας τελείως την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Προσοχή.

1) Η κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητάς του (σχέση 1). Επομένως είναι ανεξάρτητη από τη διεύθυνση και τη φορά της ταχύτητάς του.

2) Η κινητική ενέργεια E_K ενός σώματος είναι μονόμετρο μέγεθος.

3) Η κινητική ενέργεια E_K είναι μέγεθος που έχει την προσθετική ιδιότητα. Δηλαδή ένα σύστημα σωμάτων που κινούνται, έστω και με διαφορετικές ταχύτητες, έχει κινητική ενέργεια, η οποία είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωμάτων του συστήματος.

4) Από τη σχέση (1) εύκολα συνάγεται ότι αν το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ ενός σώματος παραμένει σταθερό και η κινητική του ενέργεια παραμένει σταθερή.

Μέτρηση της κινητικής ενέργειας.

Για να αποκτήσει ένα σώμα μια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, πρέπει να ενεργήσει επάνω σε αυτό μία δύναμη, η οποία, αφού το επιταχύνει, θα του δώσει την ταχύτητα αυτή.

Η δύναμη όμως που ενήργησε στο σώμα και του έδωσε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ παρήγαγε κάποιο έργο W. Το έργο αυτό το «απορρόφησε» το σώμα και είναι ίσο με την κινητική ενέργεια E_K του σώματος τη στιγμή που έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, δηλαδή $W = E_K$. Επομένως για να μετρήσομε την κινητική ενέργεια E_K ενός σώματος τη στιγμή που έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, αρκεί να μετρήσομε το έργο που παρήγαγε η δύναμη εκείνη η οποία επέδρασε στο σώμα ώσπου να του προσδώσει την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Επίσης την κινητική ενέργεια E_K σώματος σε δεδομένη στιγμή που έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μπορούμε να τη μετρήσομε, αν βρούμε το έργο W που μπορεί να αποδώσει το σώμα χάνοντας τελείως την ταχύτητά του.

β) Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Για να μεταβληθεί η κινητική ενέργεια ενός σώματος πρέπει επάνω του να ασκείται δύναμη η οποία θα παράγει ή θα καταναλίσκει έργο.

Κάθε μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος συνδέεται άμεσα με το έργο της δυνάμεως που επέδρασε στο σώμα και η οποία προκάλεσε τη μεταβολή αυτή.

Ισχύει το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας το οποίο ορίζει τα εξής:

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔE_K ενός σώματος που έγινε μέσα στη χρονική διάρκεια $t_2 - t_1$ ισούται με το έργο W της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκήθηκαν πάνω στο σώμα κατά τη χρονική αυτή διάρκεια $t_2 - t_1$ και η οποία προκάλεσε τη μεταβολή ΔE_K.

Δηλαδή:

$$\boxed{\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = W}$$

όπου E_{K_1} η κινητική ενέργεια που έχει το σώμα τη χρονική στιγμή t_1, E_{K_2} η κινητική ενέργεια που έχει το σώμα τη χρονική στιγμή t_2, W το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκήθηκαν επάνω στο σώμα κατά τη χρονική διάρκεια $t_2 - t_1$ και η οποία προκάλεσε τη μεταβολή ΔE_K.

Προσοχή.

1) Αν το έργο W της συνισταμένης των δυνάμεων είναι θετικό, τότε η κινητική ενέργεια του σώματος αυξάνεται κατά W. Δηλαδή το έργο W «αποθηκεύεται» στο σώμα ως κέρδος κινητικής ενέργειας.

2) Αν το έργο W της συνισταμένης των δυνάμεων είναι αρνητικό, τότε η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται κατά W. Δηλαδή το σώμα αποδίδει έργο «επί ζημία» της κινητικής του ενέργειας.

Παρατήρηση:

Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχει γενική ισχύ, δηλαδή ισχύει για οποιεσδήποτε κινήσεις ενός σώματος και για οποιεσδήποτε δυνάμεις ασκούνται επάνω του.

3.16.2 Κινητική ενέργεια σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα.

Έστω ότι ένα σώμα Σ που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα x΄x, έχει μάζα m και κατά τη χρονική στιγμή t έχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (σχ. 3.16α).

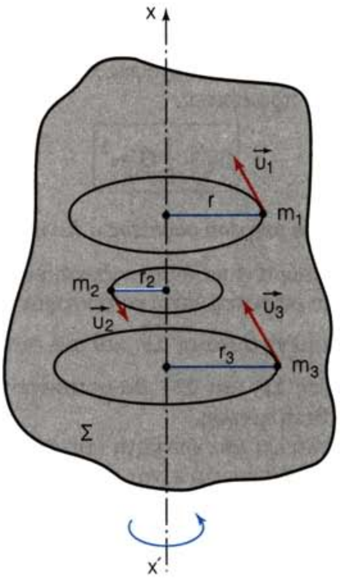
Η κινητική ενέργεια E_K που έχει το σώμα Σ κατά τη χρονική στιγμή t, δηλαδή όταν έχει γωνιακή ταχύτητα ω, δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2} \qquad (1)$$

όπου Θ η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Απόδειξη της εξισώσεως $E_K = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

Χωρίζομε το σώμα Σ σε στοιχειώδεις μάζες (υλικά σημεία) m_1, m_2, m_3, ... (σχ. 3.16α). Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ κατά τη χρονική στιγμή t ισούται με το



Σχ. 3.16α.

άθροισμα των κινητικών ενεργειών που έχουν οι στοιχειώδεις μάζες του κατά τη χρονική αυτή στιγμή t:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \upsilon_3^2} \quad (1)$$

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\upsilon_1 = \omega_1 . r_1, \quad \upsilon_2 = \omega_2 . r_2 \quad \text{και} \quad \upsilon_3 = \omega_3 . r_3 \quad (2)$$

όπου ω_1, ω_2, ω_3 οι γωνιακές ταχύτητες των στοιχειωδών μαζών m_1, m_2, m_3 τη χρονική στιγμή t και r_1, r_2, r_3 οι ακτίνες των περιφερειών που γράφουν οι στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2, m_3.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχομε:

$$E_K = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \omega_2^2 \cdot r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \omega_3^2 \cdot r_3^2 + ... \quad (3)$$

Επειδή το σώμα Σ εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα, όλες οι στοιχειώδεις μάζες του σε κάθε χρονική στιγμή έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, που είναι και η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος.

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχομε:

$$E_K = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3^2 + ...$$

$$E_K = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + ...) \quad (5)$$

Η παράσταση: $\Theta = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + ...$ (6) παρέχει τη ροπή αδράνειας Θ τους σώματος Σ ως προς τον άξονα περιστροφής x΄x.

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2}$$

3.16.3 Σύνθετη (τυχαία) κίνηση στερεού σώματος – Κινητική του ενέργεια.

Έστω ότι σε ένα στερεό σώμα ασκούνται ν δυνάμεις. Αν αναγάγομε τις δυνάμεις αυτές στο κέντρο βάρους του σώματος, τότε το σύστημα των δυνάμεων θα είναι γενικά ισοδύναμο με μία συνισταμένη δύναμη $\overrightarrow{\Sigma F}$ και μία συνισταμένη ροπή $\overrightarrow{\Sigma M}$.

Το σώμα υπό την επίδραση $\overrightarrow{\Sigma F}$ και $\overrightarrow{\Sigma M}$ θα μετακινείται και θα περιστρέφεται, επομένως θα εκτελεί μία σύνθετη κίνηση.

Γενικά όταν ένα σώμα εκτελεί μία σύνθετη (τυχαία) κίνηση, όσο πολύπλοκη και να είναι, μπορούμε να τη θεωρήσομε ότι είναι αποτέλεσμα δύο κινήσεων που εκτελεί το σώμα ταυτόχρονα: Μιας μεταφορικής κινήσεως ολόκληρου του σώματος και μιας περιστροφικής του σώματος γύρω από έναν άξονα.

Επομένως, κάθε σύνθετη κίνηση ενός σώματος μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα δύο κινήσεων, μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής.

Όταν ένα σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση, η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα 1) της κινητικής ενέργειας του W_{K_1} ***εξ αιτίας της μεταφορικής κινήσεως του και 2) της κινητικής ενέργειας του*** W_{K_2} ***εξ αιτίας της περιστροφικής κινήσεώς του.***

Αν υ είναι η ταχύτητα του κέντρου βάρους του σώματος κατά τη μεταφορική κίνηση, τότε η κινητική του ενέργεια εξ αιτίας της μεταφορικής κινήσεως του θα είναι:

$$\boxed{W_{K_1} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2}$$

Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους του και Θ_K η ροπή αδράνειας του ως προς τον ίδιο άξονα, τότε η κινητική του ενέργεια εξ αιτίας της περιστροφικής κινήσεως του θα είναι:

$$\boxed{W_{K_2} = \frac{1}{2}\Theta_K \cdot \omega^2}$$

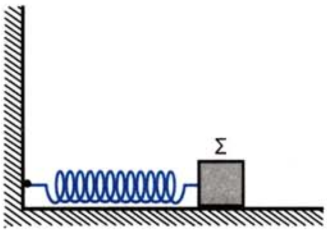
Επομένως, η κινητική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί σύνθετη κίνηση είναι:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2}\Theta_K \cdot \omega^2}$$

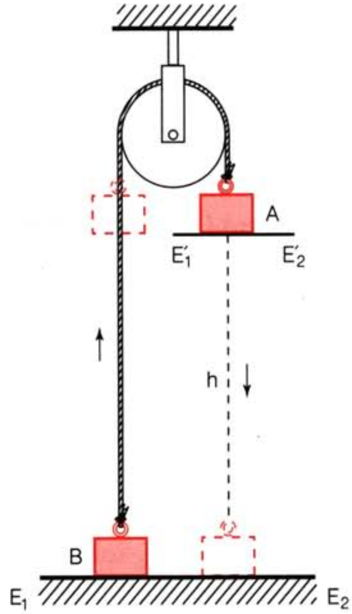
3.16.4 Δυναμική ενέργεια.

Δυναμική ενέργεια ενός σώματος ονομάζεται η ενέργεια την οποία έχει το σώμα λόγω της καταστάσεώς του (παραμορφωμένο σώμα, αέριο υπό πίεση) ή της θέσεώς του.

Ένα συσπειρωμένο ελατήριο (σχ. 3.16β) λέμε ότι έχει δυναμική ενέργεια γιατί μπορεί να εκτινάξει το σώμα Σ, δηλαδή το συσπειρωμένο (παραμορφωμένο) ελατή-



Σχ. 3.16β.



Σχ. 3.16γ.

ριο μπορεί (έχει την ικανότητα) να παραγάγει έργο.

Όταν σώμα Α βρίσκεται επάνω σε οριζόντιο επίπεδο $E_1΄E_2΄$ (σχ. 3.16γ) λέμε ότι έχει δυναμική ενέργεια ως προς το οριζόντιο επίπεδο E_1E_2, γιατί το σώμα Α μπορεί να παραγάγει έργο.

Πραγματικά, το σώμα Α μπορεί (έχει την ικανότητα) να ανυψώσει το σώμα Β, αν αποσύρομε το υποστήριγμά του $E_1΄\,E_2΄$, οπότε και παράγει έργο.

Σημείωση:

Η δυναμική ενέργεια του συσπειρωμένου ελατηρίου είναι η ενέργεια που οφείλεται στην κατάσταση (δηλ. στη συσπείρωση) του ελατηρίου. Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος που βρίσκεται σε κάποιο ύψος πάνω από ένα οριζόντιο επίπεδο είναι η ενέργεια που οφείλεται στη θέση του σώματος αυτού ως προς το επίπεδο αυτό.

Μέτρηση της δυναμικής ενέργειας.

Για να βρεθεί ένα σώμα σε μία θέση ή κατάσταση καταναλώνει (απορροφά-εναποθηκεύει) ένα έργο που παρήγαγε η δύναμη, η οποία έφερε το σώμα στη θέση ή στην κατάσταση που βρίσκεται. Αυτό το έργο που “απορροφά” ένα σώμα, για να βρεθεί σε μία θέση ή μία κατάσταση, είναι ίσο με τη δυναμική του ενέργεια, δηλαδή είναι ίσο με το έργο που το ίδιο το σώμα μπορεί να “αποδώσει” κατά την επάνοδό του στην προηγούμενη θέση ή κατάστασή του.

Επομένως, για να μετρήσομε τη δυναμική ενέργεια ενός σώματος, αρκεί να μετρήσομε το έργο που παρήγαγε η δύναμη εκείνη που επέδρασε στο σώμα (και το οποίο απορροφήθηκε από αυτό) για να βρεθεί στη θέση ή στην κατάσταση στην οποία βρίσκεται.

Για να υπολογίσομε για παράδειγμα τη δυναμική ενέργεια που έχει ένα ελατήριο το οποίο είναι τεντωμένο κατά l, βρίσκομε το έργο που παρήγαγε μία δύναμη, που χρειάσθηκε να ασκηθεί επάνω στο ελατήριο για να επιμηκυνθεί αυτό κατά l.

Το έργο αυτό είναι: $W = \frac{1}{2}Kl^2$. Άρα η δυναμική ενέργεια του τεντωμένου ελατηρίου κατά l είναι: $E_\delta = \frac{1}{2}Kl^2$.

Σημείωση:

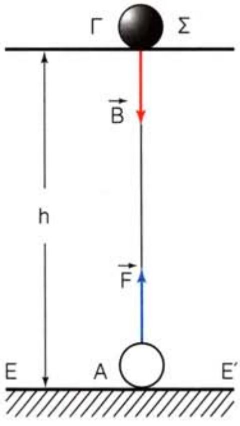
Βέβαια, το τεντωμένο κατά l ελατήριο είναι ικανό, συσπειρωμένο, να αποδώσει έργο: $W = \frac{1}{2}Kl^2$, το οποίο είναι ίσο με τη δυναμική ενέργεια που είχε το ελατήριο, όταν ήταν τεντωμένο κατά l.

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσομε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν ήταν τεντωμένο κατά l μετρώντας το έργο $W_l = \frac{1}{2}Kl^2$ το οποίο αποδίδει κατά τη συσπείρωσή του. ***Δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι το έργο που "απορροφά" το ελατήριο όταν επιμηκύνεται κατά l είναι ίσο με το έργο που αποδίδει, όταν συσπειρώνεται κατά l.***

Για να υπολογίσομε τη δυναμική ενέργεια που έχει ένα σώμα Σ με βάρος $\vec{B}$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο ΕΕ΄, όταν βρίσκεται στη θέση Γ (σχ. 3.16δ), (σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο ΕΕ΄), σκεπτόμαστε ως εξής: Το έργο που παράγει μία δύναμη $\vec{F}$, για να φέρει το σώμα από τη θέση Α του οριζόντιου επιπέδου ΕΕ΄ στη θέση Γ, είναι $W = |\vec{F}| \cdot h = |\vec{B}| \cdot h$.

Άρα η δυναμική ενέργεια του σώματος όταν βρίσκεται στη θέση Γ ως προς το επίπεδο ΕΕ΄ είναι:

$$\boxed{E_\Delta = B \cdot h} \qquad (1)$$



Σχ. 3.16δ.

Προσοχή:

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος αναφέρεται ως προς ένα οριζόντιο επίπεδο ή ως προς μία κατάστασή του. Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος, η οποία οφείλεται στη βαρύτητα (ενέργεια θέσεως), μετρείται ως προς ένα οριζόντιο επίπεδο (επίπεδο αναφοράς) στο οποίο δεχόμαστε ότι το σώμα έχει δυναμική ενέργεια μηδέν. Το επίπεδο αναφοράς το ορίζομε αυθαίρετα. Ο τύπος $E_\Delta = B \cdot h$ (1) παρέχει τη δυναμική ενέργεια σώματος βάρους $\vec{B}$, όταν απέχει κατά h από το οριζόντιο επίπεδο ΕΕ΄, το οποίο ορίσαμε ως επίπεδο αναφοράς.

Στην ουσία ο τύπος (1) παρέχει το έργο του βάρους $\vec{B}$ του σώματος όταν αυτό μετακινείται από τη θέση του Γ στο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο δεχόμαστε ότι το σώμα έχει $E_\Delta = 0$. Το έργο αυτό είναι θετικό ή αρνητικό εφ' όσον αντίστοιχα το σώμα βρίσκεται επάνω ($h>0$) ή κάτω ($h<0$) από το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς (όπου $E_\Delta = 0$). Το επίπεδο αναφοράς το ορίζομε (το επιλέγομε) αυθαίρετα, γιατί στα διάφορα φυσικά φαινόμενα δεν μας ενδιαφέρουν οι τιμές της δυναμικής ενέργειας, αλλά μόνο οι μεταβολές της.

Σημείωση:

$E_\Delta<0$, δηλαδή δυναμική ενέργεια ενός σώματος αρνητική σημαίνει, απλά, ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι μικρότερη από εκείνη που έχει όταν βρίσκεται στο επίπεδο αναφοράς, το οποίο θεωρήσαμε ως αφετηρία των μετρήσεών μας.

Ένα σώμα μάζας 8 kg βρίσκεται μέσα σε ένα πηγάδι βάθους 10 m. Πόση είναι η δυναμική του ενέργεια ως προς το στόμιο του πηγαδιού;

3.16.5 Θεώρημα διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας.

Ένα σώμα είναι δυνατόν να έχει συγχρόνως δυναμική ενέργεια (λόγω της θέσεώς του ή λόγω της καταστάσεώς του) και κινητική ενέργεια (λόγω της ταχύτητάς του).

Γενικά, η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μπορεί να μετατρέπεται σε κινητική και αντίστροφα η κινητική ενέργειά του μπορεί να μετατρέπεται σε δυναμική.

Αν μηχανική ενέργεια ενός σώματος (ή συστήματος σωμάτων) ονομάσομε το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειάς του, τότε ισχύει το θεώρημα διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας, το οποίο ορίζει τα εξής:

Αν σε ένα σύστημα σωμάτων δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη και στο σύστημα αυτό συμβαίνουν μετατροπές της δυναμικής ενέργειας των σωμάτων του σε κινητική και αντίστροφα, τότε η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος (δηλ. το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειάς του) παραμένει (διατηρείται) σταθερή, εφ' όσον δεν συμβαίνει μετατροπή αυτής σε άλλη μορφή ενέργειας (π.χ. θερμότητας, ο όρος θερμότητα δεν είναι εύστοχος αλλά συνηθίζεται).

Προσοχή:

Ένα σύστημα σωμάτων ονομάζεται μηχανικά μονωμένο ή απομονωμένο όταν επάνω σε αυτό δεν ασκείται εξωτερική δύναμη. Γι' αυτό το θεώρημα διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας διατυπώνεται και ως εξής:

Η συνολική (ολική) μηχανική ενέργεια ενός μηχανικά μονωμένου συστήματος διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια που συμβαίνουν οποιεσδήποτε μετατροπές της δυναμικής ενέργειας των σωμάτων του σε κινητική ενέργεια και αντίστροφα, εφ' όσον δεν συμβαίνει μετατροπή της μηχανικής του ενέργειας σε οποιαδήποτε άλλη μορφή ενέργειας.

3.16.6 Μονάδα έργου στο S.I.

Η σχέση του έργου είναι:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot συνφ \qquad (1)$$

Αν θέσομε στη σχέση (1) $φ = 0^o$, προκύπτει:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot συν0^o \qquad (2)$$

Επειδή είναι $συν0^o = 1$, η σχέση (2) γίνεται:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \qquad (3)$$

Μονάδα δυνάμεως στο S.I. είναι το 1 N και μονάδα μετατοπίσεως είναι το 1 m.

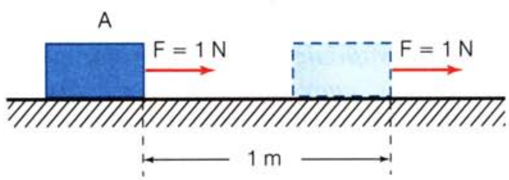
Θέτοντας στη σχέση (3) $|\vec{F}| = 1\,N$ και $|\vec{S}| = 1\,m$, ορίζομε τη μονάδα έργου στο S.I. την οποία ονομάζομε 1 joule:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| = 1\,N \cdot 1\,m = 1\,j$$

Επομένως, το 1 joule είναι το έργο που παράγεται από δύναμη ενός N, της οποίας το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται κατά ένα μέτρο και κατά την κατεύθυνσή της.

Παραδείγματα:

1) Σύρομε ένα σώμα Α με δύναμη $\vec{F}$ που έχει μέτρο $|\vec{F}| = 1\,N$ (σχ. 3.16ε) και το μετατοπίζομε κατά 1 m στη κατεύθυνση που το έλκομε. Το έργο της



Σχ. 3.16ε.

δυνάμεως $\vec{F}$ είναι W = 1 j.

Δηλαδή:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 1\,N \cdot 1\,m \cdot \sigma\upsilon\nu 0^o = 1\,N \cdot 1\,m \cdot 1 = 1\,N \cdot m = 1\,j$$

2) Σώμα έχει μάζα 1 kg. Η γη το έλκει με δύναμη 9,81 N. Έστω ότι πέφτει κατά 1 m. Το βάρος του παράγει έργο W = 9,81 j.

Δηλαδή:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = |\vec{B}| \cdot |\vec{S}| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 9{,}81\,N \cdot 1\,m \cdot \sigma\upsilon\nu 0^o = 9{,}81\,N \cdot m = 9{,}81\,j$$

Μονάδα ενέργειας στο S.I.

Από όλα τα προηγούμενα προκύπτει ότι γενικά η ενέργεια και το έργο έχουν τις ίδιες μονάδες μετρήσεως.

Σημείωση:

Η μονάδα κινητικής ενέργειας στο S.I. μπορεί να προσδιορισθεί και από την εξίσωση:

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Η μάζα m μετρείται σε kg ενώ η ταχύτητα υ σε m/s. Παραλείποντας τον αριθμητικό πολλαπλασιαστή $\frac{1}{2}$ στην εξίσωση (1), βρίσκομε ότι η κινητική ενέργεια μετρείται σε joule :

$$1\,kg \left(1 \cdot \frac{m}{s}\right)^2 = 1\,kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = 1\,joule = 1\,j$$

$$\left(1\,kg \cdot \frac{1\,m^2}{s^2} = \frac{1\,N \cdot s^2}{m} \cdot 1 \frac{m^2}{s^2} = 1 \cdot Nm = 1\,j\right)$$

3.16.7 Μονάδα ισχύος στο S.I.

Η σχέση ορισμού της ισχύος είναι: $P = \frac{W}{t}$.

Μονάδα έργου στο S.I. είναι το joule και μονάδα χρόνου είναι το 1 s.

Άρα μονάδα ισχύος στο S.I. είναι:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1\,joule}{1\,s} = 1\,Watt\,(W)$$

Όταν λέμε ότι μία μηχανή έχει ισχύ 1 Watt, εννοούμε ότι η μηχανή αυτή παράγει έργο 1 joule μέσα σε χρόνο 1 s.

Το ένα κιλοβάττ (1 kilowatt ή 1 kW) και το 1 μεγαβάττ (Megawatt ή 1 MW) είναι πολλαπλάσια του Watt:

$$1\ kW = 10^3\ W \text{ και } 1\ MW = 10^6\ W$$

Σημείωση:

Στην πράξη χρησιμοποιούνται και οι εξής μονάδες:

1) Ο ατμοΐππος (ή ίππος), που συμβολίζεται με 1 CV ή με1 PS: 1 PS=736 W.

2) Ο αγγλικός ίππος που συμβολίζεται με 1 HP: 1 HP =746 W.

3.16.8 Μονάδες έργου ως παράγωγες των μονάδων ισχύος (μεγάλες μονάδες έργου).

Κιλοβατώρα (1 kWh).

Αν θεωρήσομε P = 1 kW και t = 1 h, από τη σχέση W = P t λαμβάνομε:

$$W = P\,t = 1\ kW\ 1\ h = 1\ kW\,h = 1 \text{ κιλοβατώρα}$$

Όταν λέμε έργο ενός κιλοβατωρίου εννοούμε το έργο που παράγει μια μηχανή ισχύος ενός κιλοβάττ (P = 1 kW) σε μια ώρα (t = 1 h).

Προσοχή:

Αν μια μηχανή ισχύος 1 kW λειτουργήσει συνεχώς μια ώρα θα παράγει έργο 1 kWh.

Αν η ίδια μηχανή (ισχύος 1 kW) λειτουργήσει μισή ώρα, σταματήσει για παράδειγμα δύο ημέρες και επαναλειτουργήσει μισή ώρα, τότε το συνολικό έργο που θα παράγει θα είναι πάλι 1 kWh.

Δηλαδή το έργο που παράγει μία μηχανή μέσα σε χρόνο t είναι το ίδιο είτε λειτουργεί συνεχώς για χρόνο t είτε διακεκομμένα κατά χρονικά διαστήματα t_1, t_2, t_3, με την προϋπόθεση βέβαια ότι: $t_1+t_2+t_3=t$.

3.17 Ερωτήσεις δυναμικής – Έργου.

1. Να εξηγήσετε γιατί όταν οι πλανόδιοι θαυματοποιοί σπάζουν με δυνατά κτυπήματα μία πολύ μεγάλη πέτρα επάνω στο σώμα ενός ανθρώπου, ο άνθρωπος δεν παθαίνει τίποτα.
2. Γιατί πρέπει να κοιτάζομε στη φορά που κινείται ένα όχημα, όταν θέλομε να κατέβουμε, ενώ αυτό κινείται;
3. Ένα λεωφορείο κτυπά στο πίσω μέρος σταματημένο λεωφορείο. Να εξηγήσετε πώς θα κινηθούν οι επιβάτες των δύο λεωφορείων.
4. Επάνω σε ένα σώμα ασκείται μία δύναμη. Πότε θα αποκτήσει το σώμα μεγαλύτερη επιτάχυνση; Όταν ηρεμεί ή όταν κινείται με μικρή ταχύτητα;
5. Μπορούμε να βρούμε τη μάζα ενός σώματος, χωρίς να το ζυγίσομε;
6. Όταν αυξάνεται η μάζα, με την αύξηση της ταχύτητας, αυξάνονται τα μόρια του σώματος;
7. Πότε λέμε ότι ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, πότε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και πότε ομαλή κυκλική;

8. Ποια είναι η κινητική κατάσταση ενός υλικού σημείου, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι ίση με μηδέν;
9. Είναι δυνατόν να κινήσομε ένα καροτσάκι σε οριζόντιο δρόμο, όταν βρισκόμαστε πάνω σε αυτό;
10. Δύο όμοια αυτοκίνητα πέφτουν με την ίδια ταχύτητα, το ένα σε ένα σωρό άχυρα και το άλλο σε ένα βράχο. Ποιο θα καταστραφεί περισσότερο και γιατί;
11. Γιατί δεν μπορούμε να ανυψώσομε τον εαυτό μας τραβώντας τον προς τα επάνω με τα χέρια μας, ενώ τον ανυψώνομε με αναπήδηση ως προς το έδαφος;
12. Γιατί ο άνθρωπος που βρίσκεται βυθισμένος μέσα στη θάλασσα όσο και αν τραβά τα μαλλιά του προς τα επάνω δεν ανέρχεται;
13. Μπορούμε να κινήσομε ένα ιστιοφόρο στέλνοντας αέρα στα πανιά του από φιάλη που βρίσκεται επάνω στο ιστιοφόρο; Υπάρχει τρόπος να κινηθεί έτσι το ιστιοφόρο;
14. Αφού μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις αλλάζουν την κινητική κατάσταση του κ.β. ενός σώματος, πώς η δύναμη των φρένων σταματά το αυτοκίνητο;
15. Ένα πουλί βρίσκεται επάνω σε ένα κλουβί, κρεμασμένο στην άκρη ενός δυναμόμετρου. Ποια θα είναι η ένδειξη του δυναμομέτρου, τη στιγμή που το πουλί πετάει από το κλουβί;
16. Αν υποθέσομε ότι η γη ψύχεται και συστέλλεται, θα μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της;
17. Πώς μπορούμε να ξεχωρίσομε ένα αυγό βρασμένο από ένα άβραστο;
18. Ένας χορευτής πάγου περιστρέφεται περί τον άξονά του (κατακόρυφος άξονας) με τα χέρια του στην ανάταση. Αν φέρει τα χέρια του στην έκταση, θα αυξηθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστοφής του ή θα ελαττωθεί;
19. Τα πόδια ασκούν δύναμη στο σώμα μας και όταν τα λυγίζομε να καθίσομε και όταν τα τεντώνομε να σηκωθούμε. Πότε το έργο αυτής της δυνάμεως είναι παραγόμενο και πότε καταναλισκόμενο;
20. Δορυφόρος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Αν υποτεθεί ότι κινείται σε μεγάλη απόσταση από το κέντρο της Γης, χρειάζεται να του προσφέρομε συνεχώς ενέργεια για να συνεχίζει την κίνησή του αυτή;
21. Ένας άνθρωπος μεταφέρει ένα δέμα βάρους 8 kgf από το ισόγειο ενός κτηρίου στον 7ο όροφο και στη συνέχεια στον 3ο. Μετά από λίγη ώρα μεταφέρει από το ισόγειο απ' ευθείας στον 3ο όροφο ένα άλλο δέμα επίσης βάρους 8 kgf. Συγκρίνατε το έργο του βάρους στη πρώτη περίπτωση με το έργο του βάρους στη δεύτερη περίπτωση. Πότε κουράζεται περισσότερο; Στην πρώτη περίπτωση ή στη δεύτερη και γιατί;
22. Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος είναι 10 Joule και η κινητική του 15 Joule. Πόση είναι η μηχανική του ενέργεια;
23. Ένα ηλεκτροκίνητο αυτοκινητάκι παράγει έργο 150 Joule σε 100 sec. Ένα άλλο παράγει έργο 60 Joule σε 40 sec. Ποιο έχει μεγαλύτερη ισχύ;
24. Μία σφαίρα αφήνεται να πέσει στο έδαφος από ύψος 8 m. Στην αρχή έχει μόνο δυναμική ενέργεια ίση με 7 Joule. Πόση θα είναι η μηχανική της ενέργεια όταν φθάνει στο μισό του ύψους και πόση τη στιγμή όπου αγγίζει το έδαφος;
25. Ένας άνθρωπος οδηγεί μία βάρκα αντίθετα προς το ρεύμα ενός ποταμού. Η βάρκα ηρεμεί ως προς την ακτή. Παράγει έργο ο άνθρωπος;

26 Όταν ανεβάζομε ένα σώμα σε ορισμένο ύψος, το έργο που καταναλώνομε εξαρτάται από το πόσο γρήγορα το ανεβάζομε;

27. Παράγει έργο η μηχανή αυτοκινήτου, όταν αυτό κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα;

28. Ποιο είναι το έργο που παράγεται από την κεντρομόλο δύναμη για μία πλήρη περιστροφή ενός σώματος;

29. Να εξηγήσετε γιατί ένα αυτοκίνητο, όταν σταματά και ξεκινά πολλές φορές, ξοδεύει περισσότερα καύσιμα παρά αν κινείται χωρίς στάσεις.

30. Όταν βαδίζομε οριζόντια, το βάρος μας δεν παράγει έργο. Να εξηγήσετε γιατί κουραζόμαστε;

31. Τι έγινε η ενέργεια ενός ανελκυστήρα που κινήθηκε από την κορυφή ενός κτηρίου και σταμάτησε στο ισόγειο;

32. Υπάρχει περίπτωση να μετατοπίζεται ένα σώμα επάνω στο οποίο ασκείται μία δύναμη, και η δύναμη αυτή να μην παράγει έργο;

33. Γιατί είναι πιο κουραστικός ο ανηφορικός δρόμος από τον οριζόντιο;

3.18 Ασκήσεις δυναμικής – Έργου.

1. Σε κινητό, του οποίου η μάζα είναι m=200 g, ασκείται δύναμη $\vec{F}$, που του προσδίδει επιτάχυνση $|\vec{\gamma}| = 3\,m/s^2$. Πόση είναι αυτή η δύναμη;
2. Όταν σε ένα κινητό ασκείται σταθερά δύναμη $|\vec{F}| = 2\,N$, τότε αποκτά επιτάχυνση $|\vec{\gamma}| = 0{,}5\,m/s^2$. Πόση είναι η μάζα m του κινητού αυτού;
3. Σώμα με μάζα m=200 g εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r=3 m και με γωνιακή ταχύτητα ω=0,5 rad/s. Ποια είναι η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\gamma_K}$ και η κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}_K$ του σώματος;
4. Σώμα βρίσκεται επάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Έλκομε το σώμα με ένα σχοινί που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\varphi=60^o$. Το σώμα σύρεται (ολισθαίνει) επάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Η δύναμη που ασκούμε με το σχοινί στο σώμα είναι, $|\vec{F}| = 6\,N$ Πόσο είναι το έργο Α της δυνάμεως $\vec{F}$, όταν μετατοπίσει το σώμα επάνω στο οριζόντιο επίπεδο για απόσταση $|\vec{S}| = 8\,m$;
5. Μηχανή μέσα σε χρόνο t=8s ανεβάζει βάρος $|\vec{B}| = 150\,kgf$ σε ύψος h=12 m. Ποια είναι η ισχύς της μηχανής;
6. Η ισχύς ενός ηλεκτρικού κινητήρα είναι N=60 W. Πόσο θα κοστίσει ο κινητήρας αυτός, όταν εργασθεί επί χρόνο t=5 h, αν η μία κιλοβατώρα (kWh) κοστίζει 20 δραχμές;
7. Κινητήρας έχει ισχύ p=200 hp. Πόση ενέργεια Α θα παράγει σε κιλοβατώρες αν εργασθεί δύο ώρες;
8. Το σημείο εφαρμογής μίας δυνάμεως $|\vec{F}| = 10\,N$ γράφει τόξο καμπύλης μήκους 60 cm. Πόσο έργο Α παράγει η δύναμη $\vec{F}$, αν αυτή παραμένει συνέχεια εφαπτόμενη του τόξου αυτού;

9. Σώμα που έχει μάζα m=3 kg και βρίσκεται ακίνητο σε ύψος h=80 m αρχίζει να πέφτει. Ποια είναι η δυναμική και ποια η κινητική του ενέργεια, όταν φτάνει σε ύψος h_1=20 m από την επιφάνεια του εδάφους;
10. Πόση είναι η δυναμική ενέργεια ελατηρίου όταν έχει επιμηκυνθεί κατά x= 5 mm; Η κατευθύνουσα δύναμη του ελατηρίου είναι D=70 N/m.
11. Μηχανή ανυψώνει σώμα που έχει βάρος $|\vec{B}| = 250\,N$ με ταχύτητα υ=2 m/s. Να βρεθεί η ισχύς P της μηχανής.
12. Ρόδα με ακτίνα r=0,5 m έχει κατανεμημένη τη μάζα της στην περιφέρειά της. Πόση είναι η ροπή αδράνειάς της ως προς έναν άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό της και διέρχεται από το κέντρο της, αν η μάζα της είναι m=50 kg;
13. Πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια $E_{ολ}$ κυλίνδρου που κυλά επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, όταν ο άξονάς του μεταφέρεται με ταχύτητα υ=10 m/s και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω=80 rad/s; Η ροπή αδρόνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι θ=100 kgm^2 και η μάζα του κυλίνδρου είναι m=200 kg.
14. Ράβδος στρέφεται γύρω από τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα ω=20 rad/sec. Ποια είναι η κινητική της ενέργεια, E_K και, η στροφορμή της $\vec{G}$, αν η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονά της είναι Θ=125 $kg.m^2$;
15. Ένα ποδήλατο μάζας 60 kg και ένα αυτοκίνητο μάζας 1600 kg κινούνται με την ίδια ταχύτητα (20 km/h). Να συγκριθούν οι ορμές τους.
16. Η ταχύτητα ενός σώματος μάζας 0,2 kg είναι 19 m/s και σε χρόνο Δt=2 s διπλασιάζεται. Το σώμα κινείται ευθύγραμμα. 1) Πόση είναι η μεταβολή της ορμής του σώματος; 2) Υπολογίστε τη δύναμη που προκάλεσε τη μεταβολή της ορμής θεωρώντας ότι είχε σταθερό μέτρο.
17. Σε σώμα μάζας 20 kg δρα δύναμη 110 N. Το σώμα βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και λόγω της δυνάμεως αποκτά ταχύτητα μέτρου υ μετά από χρόνο t=6 s. Να βρεθεί: 1) Το μέτρο της επιταχύνσεως του σώματος. 2) Η ταχύτητά του (τελική) μετά από χρόνο t=5 s και 3) το μέτρο της τελικής ορμής του.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ (Ή ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ)

4.1 Ελαστικές δυνάμεις, έννοια του μηχανικού κύματος.

Η δομή των ελαστικών σωμάτων είναι τέτοια ώστε αν τα σώματα παραμορφωθούν από την επίδραση δυνάμεως, οι παραμορφώσεις τους θα είναι ***παροδικές***. Δηλαδή αν μία δύναμη προκαλέσει κάποια παραμόρφωση σε ένα ελαστικό σώμα, τότε μόλις σταματήσει να επιδρά πάνω του η δύναμη αυτή, το σώμα επανακτά (ξαναβρίσκει) τον αρχικό του όγκο και σχήμα. Αυτό οφείλεται στην ανάπτυξη δυνάμεων μεταξύ των δομικών λίθων του σώματος (δηλαδή των μορίων, των ατόμων και των ιόντων του) που τείνουν να το επαναφέρουν στην αρχική του κατάσταση. Τις δυνάμεις αυτές τις ονομάζομε ***ελαστικές δυνάμεις***.

Στα ελαστικά σώματα κάθε διαταραχή της θέσεως ισορροπίας ενός σημείου τους διαδίδεται, εξ αιτίας της αναπτύξεως των ελαστικών δυνάμεων, από σημείου σε σημείο του σώματος. Επί πλέον, αν το σώμα είναι ομογενές και ισότροπο, η διαταραχή θα διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα προς όλες τις κατευθύνσεις.

Γενικά, όταν λέμε μηχανικό κύμα εννοούμε κάθε διαταραχή (κίνηση) η οποία διαδίδεται από σημείου σε σημείο ενός ελαστικού μέσου εξ αιτίας των ελαστικών δυνάμεων.

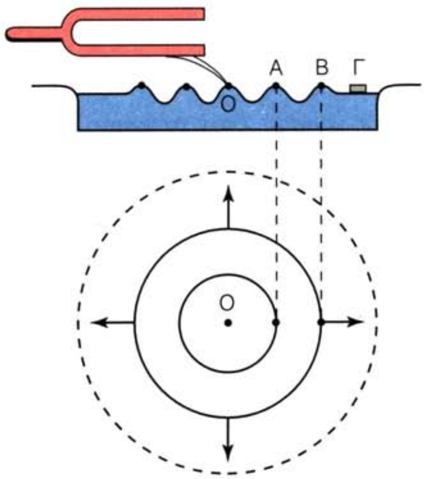
4.2 Πειράματα παρακολουθήσεως της διαδόσεως μιας διαταραχής.

1) Η λεκάνη που φαίνεται στο σχήμα 4.2α περιέχει λίγο νερό. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού της λεκάνης συμπεριφέρεται σαν ελαστική μεμβράνη. Τοποθετούμε στην επιφάνεια του νερού μικρά κομμάτια φελλού. Ταράζομε την ήρεμη επιφάνεια του νερού σε ένα σημείο Ο με τη βοήθεια ενός διαπασών (ή ρίχνοντας στο σημείο Ο σταγόνες νερού με σταγονόμετρο). Παρατηρούμε τότε ότι η διαταραχή που δημιουργούμε στο σημείο Ο διαδίδεται στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού με τη μορφή ομο-

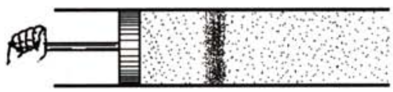
κέντρων κύκλων, που έχουν ως κέντρο το σημείο Ο. Παρατηρούμε ακόμη ότι οι φελλοί κινούνται, όμως δεν αρχίζουν όλοι συγχρόνως την κίνησή τους, αλλά πρώτα αρχίζει να κινείται ο Α, ύστερα ο Β κ.ο.κ. Από αυτό συμπεραίνομε ότι η αρχική διαταραχή διαδίδεται με κάποια ταχύτητα, αφού χρειάζεται κάποιο χρόνο για να διαδοθεί σε ορισμένη απόσταση. Η διάδοση αυτή της διαταραχής είναι ένα μηχανικό κύμα.

2) Μέσα σε κύλινδρο, που στο ένα του άκρο υπάρχει έμβολο, έχομε βάλει αέριο (σχ. 4.2β). Αν μετακινήσομε απότομα το έμβολο, δημιουργείται μέσα στο αέριο μία περιοχή αυξημένης και μία περιοχή ελαττωμένης πυκνότητας (πιέσεως), που διαδίδεται μέσα στο αέριο με κάποια ταχύτητα.

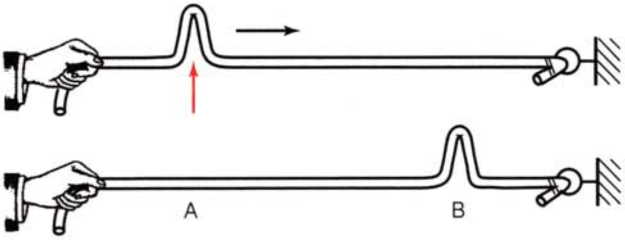
3) Στερεώνομε το ένα άκρο ενός σχοινιού, ενώ το άλλο το κρατούμε με το χέρι μας. Αν κινήσομε το άκρο αυτό απότομα προς τα επάνω, δημιουργείται μία διαταραχή, η οποία διαδίδεται κατά μήκος του σχοινιού προς τα δεξιά. Στο σχήμα 4.2γ παρουσιάζονται δύο διαδοχικές εικόνες (δύο στιγμιότυπα), από τις οποίες προκύπτει ότι η διαταραχή, η οποία δημιουργήθηκε στο άκρο του σχοινιού διαδίδεται κατά μήκος του χωρίς να μεταβληθεί το σχήμα της. Από το ίδιο σχήμα προκύπτει ότι η διαταραχή στο σημείο Β θα είναι όμοια με τη διαταραχή στο σημείο Α, με τη διαφορά ότι διαδόθηκε λίγο χρόνο αργότερα. Παρατηρούμε δηλαδή ότι κατά τη διάδοση της διαταραχής όλα τα σημεία του σχοινιού εκτελούν διαδοχικά την ίδια ακριβώς κίνηση.



Σχ. 4.2α.



Σχ. 4.2β.



Σχ. 4.2γ.

4.3 Κατά τη διάδοση των κυμάτων δεν γίνεται μεταφορά ύλης.

Χαρακτηριστικό είναι ότι κατά τη διάδοση των μηχανικών – όπως και όλων – των κυμάτων δεν γίνεται μεταφορά ύλης, αλλά μόνο η ταλάντωση ενός υλικού σημείου του μέσου μεταδίδεται στο επόμενο κ.ο.κ. Δηλαδή τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου (σώματος) ταλαντώνονται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους και οι ταλαντώσεις αυτές μεταδίδονται από το ένα στο άλλο. ***Επομένως, κατά τη διάδοση ενός μηχανικού κύματος μέσα σε ελαστικό μέσο δεν μεταφέρεται ύλη, αλλά μόνο ενέργεια από σημείο σε σημείο του σώματος.*** Η ενέργεια αυτή είναι η κινητική και η δυναμική ενέργεια των υλικών σημείων που ταλαντώνονται. Την ενέργεια αυτήν την «προσφέρει» η πηγή των κυμάτων στα υλικά σημεία του ελαστικού σώματος που είναι κοντά σε αυτήν (γειτονεύουν με αυτήν).

Το ότι δεν γίνεται μεταφορά ύλης κατά τη διάδοση ενός κύματος, μπορούμε να το διαπιστώσομε, αν ρίξομε μικρά κομμάτια φελλού στην επιφάνεια νερού και μετά δημιουργήσομε ένα κύμα, ρίχνοντας κατακόρυφα στο νερό ένα σφαιρίδιο. Θα παρατηρήσομε τότε ότι τα κομμάτια του φελλού δεν μετακινούνται, αλλά ταλαντεύονται γύρω από μία θέση.

4.4 Γνώσεις στηρίξεως.

- Περιοδική κίνηση ονομάζεται η κίνηση ενός κινητού, όταν το κινητό λαμβάνει (αποκτά) την ίδια θέση και την ίδια ταχύτητα (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά) ανά ίσα χρονικά διαστήματα.
- Ταλάντωση ονομάζεται η κίνηση ενός κινητού, όταν: α) Είναι περιοδική και β) το κινητό μετακινείται επάνω σε κάποια γραμμή εκατέρωθεν (δεξιά-αριστερά) μιας ορισμένης θέσεως που θεωρείται ως θέση ισορροπίας αυτού.
- Στροφική ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση της οποίας η τροχιά είναι τόξο περιφέρειας κύκλου.
- Γραμμική ταλάντωση ονομάζεται η κίνηση ενός κινητού όταν: α) Είναι περιοδική, β) το κινητό μετακινείται εκατέρωθεν (δεξιά-αριστερά) μιας ορισμένης θέσεως που θεωρείται ως θέση ισορροπίας αυτού και γ) η τροχιά του είναι ευθεία. Με άλλα λόγια, γραμμική ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση, της οποίας η τροχιά είναι ευθεία.
- Περίοδος Τ μιας περιοδικής κινήσεως κινητού ονομάζεται ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή όπου το κινητό διέρχεται από ένα σημείο της τροχιάς του μέχρι τη στιγμή της αμέσως επόμενης επανόδου του στο ίδιο σημείο, αλλά και με την ίδια ταχύτητα (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά).
- Συχνότητα ν μιας περιοδικής κινήσεως κινητού ονομάζεται ο αριθμός που εκφράζει πόσες φορές το κινητό στη μονάδα του χρόνου παίρνει (αποκτά) την ίδια θέση και με την ίδια ταχύτητα (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά). Επομένως, η συχνότητα μιας περιοδικής κινήσεως εκφράζει τον αριθμό των πλήρων επαναλήψεων του φαινομένου, που συντελούνται στη μονάδα του χρόνου. Από τους ορισμούς των Τ

και ν προκύπτει η σχέση: $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$.

– Πλάτος μιας γραμμικής ταλαντώσεως ονομάζεται η απόσταση μιας ακραίας θέσεως του σώματος που εκτελεί την ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του (η μεγαλύτερη απομάκρυνσή του όπως λέμε).

4.5 Απλή αρμονική ταλάντωση (ή απλή αρμονική κίνηση).

Το κινητό Μ κινείται περιοδικά μεταξύ δύο θέσεων Α και Β (σχ. 4.5α) που έχουν απόσταση $2x_o$.

Το σημείο 0, μέσο του ΑΒ, λαμβάνεται ως το σημείο αναφοράς της κινήσεως του κινητού Μ, είναι το κέντρο της ταλαντώσεως του κινητού και θεωρείται ως το σημείο ισορροπίας του.

Όταν η απομάκρυνση x του κινητού Μ από το 0 δίδεται από την εξίσωση

$$\boxed{x = x_o\ \eta\mu\,(\omega t + \varphi)}$$

λέμε ότι η κίνηση του Μ είναι ***γραμμική αρμονική ταλάντωση*** (ή απλή αρμονική κίνηση). Δηλαδή γραμμική αρμονική ταλάντωση ονομάζομε μία ευθύγραμμη κίνηση που έχει ως χρονική εξίσωση την εξής σχέση:

$$\boxed{x = x_o\ \eta\mu\,(\omega t + \varphi)} \qquad (1)$$

όπου x η απόσταση (η απομάκρυνση) της θέσεως του κινητού Μ από το σημείο 0 μετά από χρόνο t από τη στιγμή που αρχίσαμε να τη μετρούμε [το x μπορεί να λαμβάνει τιμές από $(-x_o)$ έως και $(+x_o)$], x_o το πλάτος της ταλαντώσεως, δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή της απομακρύνσεως του Μ από το 0 [το x_o λαμβάνεται πάντοτε ως θετικό και συγκεκριμένα $|-x_o| = |+x_o| = x_o$], $(\omega t + \varphi)$ η φάση της κινήσεως του Μ και ω η κυκλική συχνότητα της ταλαντώσεως.

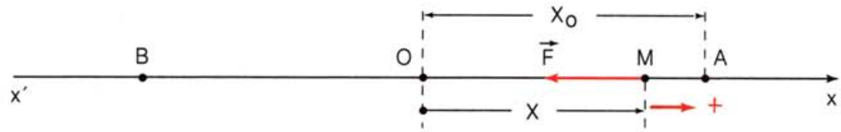
Παρατηρήσεις:

1) Για t = 0 έχομε: $(\omega t + \varphi) = \omega \cdot 0 + \varphi = \varphi$, δηλαδή για t = 0 η φάση της ταλαντώσεως είναι φ. Η φ ονομάζεται αρχική φάση της ταλαντώσεως.

Επομένως για t = 0 από την εξίσωση (1) προκύπτει η εξίσωση:

$$\boxed{x_\varphi = x_o\ \eta\mu\varphi} \qquad (2)$$

Η σχέση (2) σημαίνει ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 0 η απομάκρυνση του Μ δεν είναι μηδέν, δηλαδή τη χρονική στιγμή όπου αρχίζομε να μετρούμε το



Σχ. 4.5α.

χρόνο, το Μ έχει ήδη μία απομάκρυνση (τη x_{φ}).

2) Αν η αρχική φάση είναι μηδέν ($\varphi = 0$), τότε έχομε:

$$x = x_o\,(\eta\mu\omega t + \varphi) = x_o\,(\,\eta\mu\omega t + 0)$$

$$\boxed{x = x_o\ \eta\mu\omega t} \qquad (3)$$

3) Για την κυκλική συχνότητα (ω) της ταλαντώσεως ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu} \qquad (4)$$

και

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (1), (4) και (5) λαμβάνομε:

$$\boxed{x = x_o\ \eta\mu\,(2\pi\nu t + \varphi)} \quad \text{και} \quad \boxed{x = x_o\ \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} + \varphi\right)} \quad (\varphi \neq 0)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) και (5) προκύπτουν:

$$\boxed{x = x_o\ \eta\mu\,(2\pi\nu t)} \quad \text{και} \quad \boxed{x = x_o\ \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right)} \quad (\varphi \neq 0)$$

Προσοχή:

Τονίζομε ότι το x στη σχέση (3) δεν παριστάνει το συνολικό διάστημα το οποίο διανύει το κινητό Μ μέσα σε χρόνο t, αλλά την απομάκρυνσή του μετά από χρόνο t από τη στιγμή εκκινήσεώς του από τη θέση ισορροπίας.

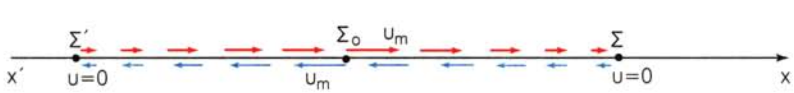
Ταχύτητα σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Όταν ένα σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (σχ. 4.5β) παρατηρούνται τα εξής:

1) Όταν το κινητό βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του Σ_o (κέντρο της ταλαντώσεως), τότε το μέτρο της ταχύτητάς του λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή. Δηλαδή, όταν η απομάκρυνση του κινητού είναι μηδέν ($x = 0$), τότε το μέτρο της ταχύτητάς του παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή (υ_m).

2) Όταν το κινητό βρίσκεται στις θέσεις Σ και Σ΄ (ακραίες θέσεις), τότε το μέτρο της ταχύτητάς του γίνεται μηδέν. Δηλαδή, όταν η απομάκρυνση του κινητού έχει το μεγαλύτερο μέτρο της (x_o) τότε η ταχύτητά του γίνεται μηδέν ($\upsilon = 0$).

3) Για τις ενδιάμεσες απομακρύνσεις συμβαίνει το εξής: Όσο αυξάνονται



Σχ. 4.5β.

τα μέτρα των απομακρύνσεων του κινητού, ελαττώνονται ανάλογα τα μέτρα των αντιστοίχων ταχυτήτων του.

Συγκεκριμένα, στην απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση και η ταχύτητα του κινητού παρουσιάζουν διαφορά φάσεως 90^o:

$$\boxed{x = x_o \, \eta\mu\omega t}$$

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o \eta\mu\,(\omega t + 90^o)}$$

$$(\upsilon_o = \upsilon_{max})$$

4.5.1 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Απλός αρμονικός ταλαντωτής είναι, για παράδειγμα, υλικό σημείο στο άκρο ελατηρίου, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο ακλόνητα. Θεωρούμε ότι το ελατήριο δεν έχει μάζα και το υλικό σημείο δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα.

Αν τραβήξομε το υλικό σημείο και στη συνέχεια το αφήσομε ελεύθερο, τότε αυτό θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, διότι το ελατήριο ασκεί στο υλικό σημείο σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιά του –εκτός από το κέντρο της ταλαντώσεώς του– δύναμη, η οποία τείνει να το επαναφέρει στο κέντρο της ταλαντώσεώς του.

Το υλικό σημείο σε κάθε σημείο της τροχιάς του, εκτός από το κέντρο της ταλαντώσεώς του, έχει δυναμική ενέργεια (E_Δ).

Επίσης, το υλικό σημείο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε οποιαδήποτε θέση της τροχιάς του, εκτός των ακραίων, έχει και κινητική ενέργεια (E_κ).

Η ολική μηχανική ενέργεια ($E_{o\lambda}$) την οποία έχει ένα υλικό σημείο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε οποιαδήποτε θέση της τροχιάς του είναι ίση με το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας που έχει στη θέση αυτή. Επίσης, το υλικό σημείο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχει σε όλες τις θέσεις της τροχιάς του την ίδια ολική μηχανική ενέργεια (γιατί θεωρούμε ότι κατά την ταλάντωση γίνεται μόνο μετατροπή της δυναμικής του ενέργειας σε κινητική ενέργεια και αντίστροφα).

Δηλαδή για κάθε θέση του υλικού σημείου ισχύει η σχέση:

$$\boxed{E_{o\lambda} = E_\Delta + E_K} \qquad (1)$$

Εύρεση της ολικής μηχανικής ενέργειας ($E_{o\lambda, x_o}$) του υλικού σημείου όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του: Στις ακραίες θέσεις η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι ίση με μηδέν, συνεπώς η κινητική του ενέργεια στις θέσεις αυτές είναι μηδέν. Επομένως έχομε:

$$E_{K,x_o} = 0 \qquad (2)$$

Ισχύει η σχέση:

$$E_{ολ,x_o} = E_{Δ,x_o} + E_{K,x_o} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) λαμβάνομε:

$$\boxed{E_{ολx_o} = E_{Δ,x_o}} \quad (4)$$

Η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου στις ακραίες θέσεις είναι:

$$E_{Δ,x_o} = \frac{1}{2}Ox_o^2 \quad και \quad \boxed{E_{Δ,x_o} = \frac{1}{2}m\,ω^2x_o^2} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (1), (3), (4) και (5) προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{E_{ολ,x_o} = \frac{1}{2}m\,ω^2x_o^2} \quad (6)$$

Εύρεση της ολικής μηχανικής ενέργειας του υλικού σημείου όταν βρίσκεται στο κέντρο της ταλαντώσεώς του. Η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου όταν βρίσκεται στο κέντρο ταλαντώσεως, σημείο O (x = 0) είναι μηδέν:

$$\boxed{E_{Δ,o} = 0} \quad (7)$$

Η ολική μηχανική ενέργεια $E_{ολ,o}$ του υλικού σημείου όταν βρίσκεται στο κέντρο ταλαντώσεώς του σημείο O (x = 0) είναι:

$$E_{ολ,o} = E_{Δ,o} + E_{K,o} \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) λαμβάνομε:

$$E_{ολ,o} = 0 + E_{K,o}$$

$$\boxed{E_{ολ,o} = E_{K,o}} \quad (9)$$

Η $E_{K,o}$ είναι:

$$\boxed{E_{K,o} = \frac{1}{2}m\,υ_{max}^2 = \frac{1}{2}m\,ω^2x_o^2} \quad (10)$$

Από τις σχέσεις (10) και (9) λαμβάνομε:

$$\boxed{E_{ολ,o} = \frac{1}{2}m\,ω^2x_o^2} \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (6) και (11) συνάγεται ότι: ***η ολική μηχανική ενέργεια ενός υλικού σημείου σε οποιαδήποτε θέση της τροχιάς του είναι:***

$$\boxed{E_{ολ} = \frac{1}{2} m\,\omega^2 x_o^2} \qquad (12)$$

Προσοχή:

Ισχύει η σχέση:

$$\omega = 2\pi\nu \qquad (13)$$

Από τις σχέσεις (12) και (13) προκύπτει η σχέση:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} m\,(2\pi\nu)^2\, x_o^2$$

και

$$\boxed{E_{ολ} = 2\, m\, \pi^2\, \nu^2\, x_o^2} \qquad (14)$$

Από τη σχέση (15) συνάγονται:

1) Η ολική μηχανική ενέργεια ενός υλικού σημείου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με μία ορισμένη (συγκεκριμένη) συχνότητα ν είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους της ταλαντώσεως (x_o^2).

2) Η ολική μηχανική ενέργεια ενός υλικού σημείου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ένα ορισμένο (συγκεκριμένο) πλάτος x_o είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της συχνότητα της ταλαντώσεως του ν^2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΑ

5.1 Πηγή κυμάτων.

Ένα κύμα προϋποθέτει κάποια πηγή παραγωγής του, δηλαδή μία εξωτερική αιτία, η οποία θα προκαλέσει σε ορισμένα υλικά σημεία (σωμάτια) του ελαστικού μέσου ταλάντωση (διατάραξη της ισορροπίας) και η οποία (αιτία) θα προσφέρει σε αυτά την ενέργεια της ταλαντώσεώς τους. Ευνόητο είναι ότι τα σωμάτια αυτά γειτνιάζουν με την πηγή. Η πιο πάνω ταλάντωση διαδίδεται σε όλα τα άλλα σωμάτια του ελαστικού σώματος από τα γειτονικά τους εξ αιτίας των ελαστικών συνδέσμων που υπάρχουν μεταξύ τους.

5.2 Απλά αρμονικά κύματα (ή ημιτονοειδή).

Αν η διαταραχή που διαδίδεται είναι απλή αρμονική ταλάντωση, τότε το κύμα ονομάζεται ***απλό αρμονικό.***

Με άλλα λόγια:

Αρμονικά ή ημιτονοειδή κύματα ονομάζονται τα κύματα στα οποία όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση.

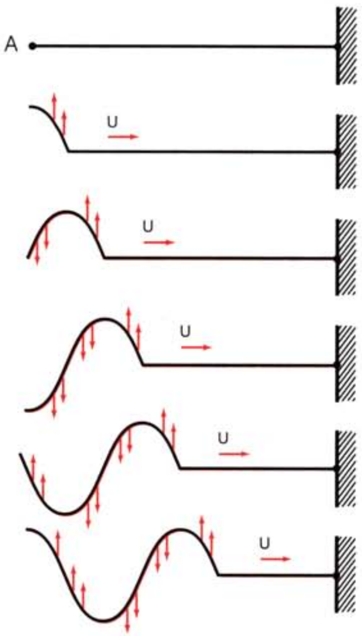
Αν το άκρο Α του τεντωμένου σχοινιού τεθεί σε αρμονική ταλάντωση, θα δημιουργηθεί ένα αρμονικό κύμα που θα διαδίδεται στο σχοινί με κάποια ταχύτητα (σχ. 5.2α).

Αν στην επιφάνεια υγρού που ηρεμεί ρίξομε σφαιρίδια σε κατάλληλα ίσα χρονικά διαστήματα, τότε δημιουργείται στην επιφάνεια του υγρού ένα περίπου αρμονικό κύμα (σχ. 5.2β).

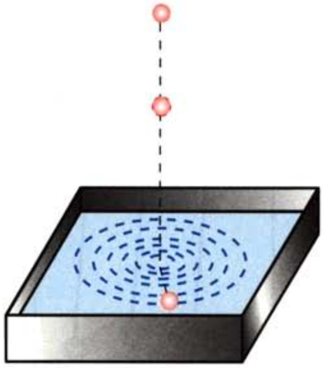
Αν αναγκάσομε το έμβολο του κυλίνδρου που περιέχει αέριο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, τα μόρια του αερίου θα εκτελούν ταλάντωση του ίδιου πλάτους και της ίδιας διευθύνσεως. Δημιουργούνται έτσι μέσα στο αέριο περιοχές αυξημένης πιέσεως (πυκνώματα) και περιοχές ελαττωμένης πιέσεως (αραιώματα) που θα διαδίδονται στο αέριο με ορισμένη ταχύτητα (σχ. 5.2γ).

Παρατήρηση:

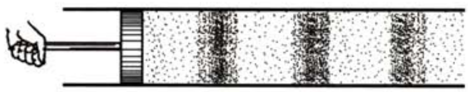
Στη συνέχεια θα εξετάσομε ορισμένες περιπτώσεις αρμονικών κυμάτων, που είναι οι πιο συνηθισμένες και οι πιο απλές.



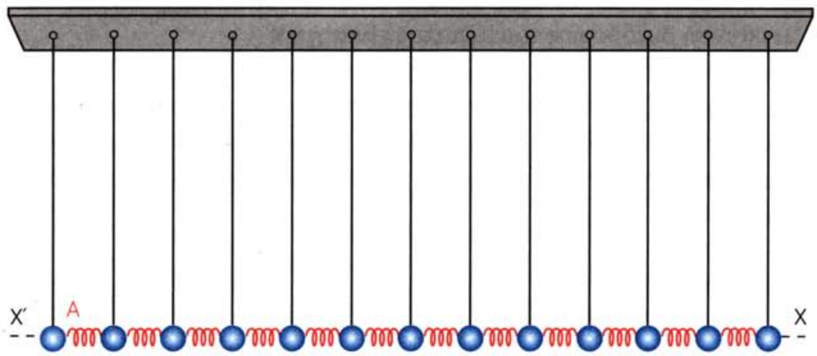
Σχ. 5.2α.



Σχ. 5.2β.



Σχ. 5.2γ.



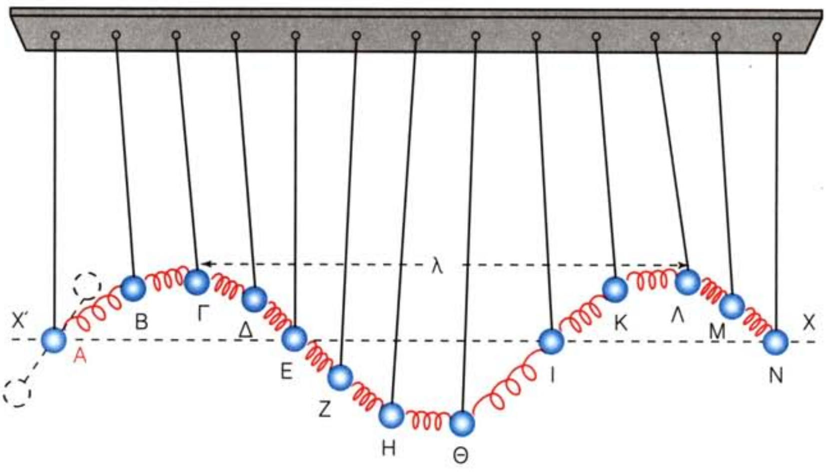
Σχ. 5.3α.

5.3 Εγκάρσια κύματα.

Όταν οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου γίνονται σε διεύθυνση κάθετη προς τη διεύθυνση κατά την οποία διαδίδονται τα κύματα, τότε τα κύματα λέγονται ***εγκάρσια.***

Για να κατανοήσομε το μηχανισμό με τον οποίο δημιουργούνται και διαδίδονται τα εγκάρσια κύματα, παραθέτομε τα πιο κάτω:

Στο σχήμα 5.3α θεωρούμε τις σφαίρες σαν μεγάλα σωμάτια (π.χ. μόρια) ε-



Σχ. 5.3β.

νός ελαστικού μέσου. Τα ελατήρια εξασφαλίζουν τις ελαστικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωματίων του ελαστικού σώματος.

Εκτρέπομε (σχ. 5.3β) το εκκρεμές Α (το πρώτο σωμάτιο) κατά οριζόντια διεύθυνση, δηλαδή κάθετα της x΄x και το αφήνομε ελεύθερο να ταλαντωθεί.

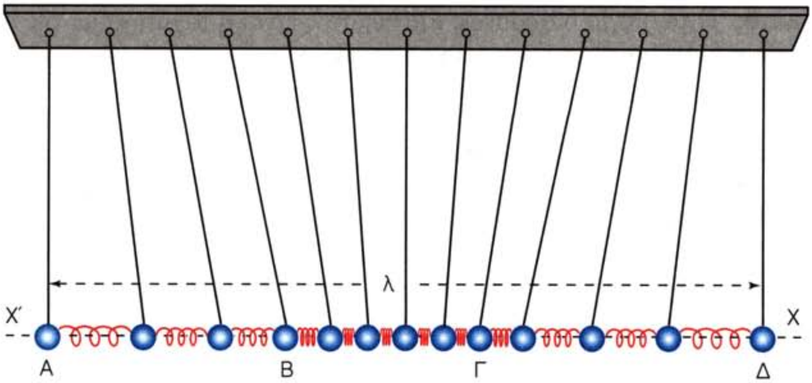
Η διεύθυνση διαδόσεως του κύματος είναι η x΄x.

Παρατηρούμε ότι και οι υπόλοιπες σφαίρες (σωμάτια) με κάποια καθυστέρηση (λόγω αδράνειας) ταλαντώνονται κάθετα της x΄x και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που ταλαντώνεται η Α. Δηλαδή έχομε ένα εγκάρσιο ελαστικό κύμα. Επίσης παρατηρούμε ότι δημιουργούνται «όρη» ΑΒΓΔΕ, ΙΚΛΜΝ και «κοιλιές» ΕΖΗΘΙ.

5.4 Διαμήκη κύματα.

Όταν οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου γίνονται κατά την ίδια διεύθυνση, κατά την οποία διαδίδονται τα κύματα, τότε τα κύματα λέγονται ***διαμήκη***. Για να κατανοήσομε το μηχανισμό της δημιουργίας και διαδόσεως των διαμήκων κυμάτων παραθέτομε τα πιο κάτω:

Στο σχήμα 5.3α της προηγούμενης παραγράφου εκτρέπομε το εκκρεμές Α (το πρώτο σωμάτιο) κατά τη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος (δηλ. κατά τη διεύθυνση x΄x) και το αφήνομε ελεύθερο να ταλαντωθεί (σχ. 5.4). Παρατηρούμε ότι και οι υπόλοιπες σφαίρες (σωμάτια) με κάποια καθυστέρηση (λόγω αδράνειας) ταλαντώνονται κατά τη διεύθυνση x΄x και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που ταλαντώνεται η σφαίρα Α. Δηλαδή έχομε ένα διάμηκες κύμα. Επίσης, παρατηρούμε ότι δημιουργούνται πυκνώματα ΒΓ και αραιώματα ΑΒ, ΓΔ.



Σχ. 5.4.

5.5 Ταχύτητα διαδόσεως κύματος.

Ταχύτητα διαδόσεως κύματος ονομάζομε το πηλίκο του διαστήματος S στο οποίο διαδίδεται το κύμα μέσα σε χρόνο t διά του χρόνου αυτού:

$$\boxed{\upsilon = \frac{S}{t}}$$

Προσοχή:

Για την ταχύτητα διαδόσεως κύματος ισχύουν τα εξής:

1) Εντός ομογενούς και ισότροπου σώματος η ταχύτητα αυτή είναι σταθερή και ανεξάρτητη της διευθύνσεως διαδόσεως του κύματος.

(Ομογενές σώμα είναι αυτό που σε όλη την έκτασή του έχει σταθερή πυκνότητα. Ισότροπο σώμα είναι αυτό που παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες ανεξάρτητα από τη διεύθυνση.)

2) Εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου διαδόσεως του κύματος. Δηλαδή είναι διαφορετική στα διάφορα μέσα.

Παρατήρηση:

Σε απλές περιπτώσεις που εμείς εξετάζομε εδώ η ταχύτητα του σώματος είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα του κύματος. Δύο κύματα με διαφορετικές συχνότητες μπορεί να διαδίδονται στο ίδιο μέσο με την ίδια ταχύτητα.

5.5.1 Ωκύτητα.

Κατά τη διάδοση αρμονικού κύματος, τα σωμάτια του μέσου στο οποίο διαδίδεται εκτελούν ταλαντώσεις. Η ταχύτητα της ταλαντώσεως ενός τυχαίου σωματίου του μέσου περί τη μέση θέση ισορροπίας του ονομάζεται ***ωκύτητα*** του σωματίου αυτού.

Τονίζομε ότι δεν πρέπει να συγχέεται η ωκύτητα με την ταχύτητα διαδόσεως του κύματος. Η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η διαταραχή από σωμάτιο σε σωμάτιο, ενώ ωκύτητα είναι η ταχύτητα ταλαντώσεως ενός σωματίου περί τη μέση θέση ισορροπίας του.

5.6 Χαρακτηριστικά στοιχεία κύματος.

α) Περίοδος κύματος.

Κατά τη διάδοση αρμονικού κύματος τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου εκτελούν αρμονικές ταλαντώσεις. Οι ταλαντώσεις αυτές έχουν μία συγκεκριμένη περίοδο T. ***Περίοδο*** ενός αρμονικού ***κύματος*** ονομάζομε την περίοδο των ταλαντώσεων T που εκτελούν τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου κατά τη διάδοση του κύματος.

Προσοχή:

Η περίοδος ενός κύματος είναι ίση με την περίοδο της πηγής του κύματος.

β) Συχνότητα κύματος.

Συχνότητα κύματος ονομάζομε τη συχνότητα των ταλαντώσεων ν που εκτελούν τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου κατά τη διάδοση του κύματος.

Προσοχή:

Η συχνότητα ενός κύματος είναι ίση με τη συχνότητα της πηγής του κύματος.

Παρατήρηση:

Η περίοδος T ενός κύματος και η συχνότητά του συνδέονται με τη γνωστή μας σχέση:

$$T = \frac{1}{\nu}$$

γ) Πλάτος κύματος.

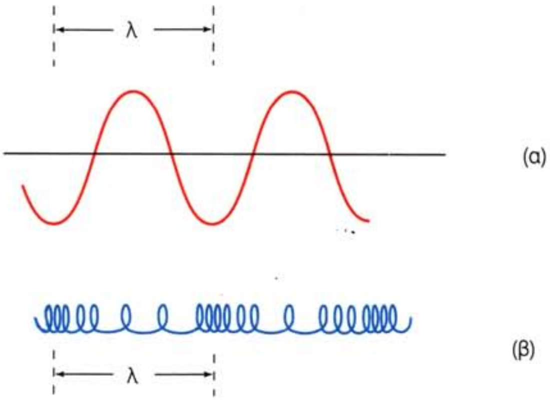
Πλάτος x_o ενός κύματος ονομάζομε το πλάτος των ταλαντώσεων που εκτελούν τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου κατά τη διάδοση του κύματος.

Συνοπτικά: Περίοδο T, συχνότητα ν και πλάτος x_o ενός αρμονικού κύματος, ονομάζομε τα αντίστοιχα μεγέθη των ταλαντώσεων που εκτελούν τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου κατά τη διάδοση του κύματος.

δ) Μήκος κύματος.

Θεωρούμε μία σειρά υλικών σημείων ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που αρχικά ισορροπούν επάνω σε μία ευθεία γραμμή. Θέτομε σε γραμμική αρμονική ταλάντωση ένα σωμάτιο του ελαστικού σώματος και έστω η περίοδος της ταλαντώσεως αυτής ότι είναι T. Επειδή τα σωμάτια κάθε σώματος έχουν αδράνεια, γι' αυτό πάντοτε μεσολαβεί κάποιος χρόνος μέχρι να αρχίσει να ταλαντώνεται το αμέσως επόμενο γειτονικό σωμάτιο με αυτό που ταλαντώνεται.

Επομένως η ταλάντωση η οποία δημιουργείται σε ένα σημείο του ελαστι-



Σχ. 5.6.

κού σώματος για να φθάσει σε ένα άλλο σημείο του σώματος χρειάζεται ορισμένο χρόνο.

Μήκος κύματος λ ονομάζεται η απόσταση στην οποία διαδίδεται η ταλάντωση σε χρόνο που είναι ίσος με την περίοδο Τ της ταλαντώσεως αυτής.

Με άλλα λόγια, μήκος κύματος λ ονομάζεται η απόσταση στην οποία διαδίδεται το κύμα αυτό σε χρόνο μιας περιόδου Τ.

Προσοχή:

Στα εγκάρσια κύματα το μήκος κύματος λ είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλάδων [ή δύο διαδοχικών ορέων (σχ. 5.6(α)], ενώ στα διαμήκη είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πυκνωμάτων [ή αραιωμάτων (σχ. 5.6(β)].

5.7 Θεμελιώδης εξίσωση των κυμάτων.

Από τον ορισμό της ταχύτητας διαδόσεως ενός κύματος έχομε:

$$c = \frac{S}{t} \qquad (1)$$

Αν πάρομε χρόνο t ίσο με μία περίοδο, δηλαδή t = T (2), τότε με βάση τον ορισμό του μήκους κύματος λ, το διάστημα S όπου μεταδίδεται το κύμα στο χρόνο Τ είναι:

$$S = \lambda \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$c = \frac{S}{t} = \frac{\lambda}{t}, \ \boxed{c = \frac{\lambda}{T}} \qquad (4)$$

Ισχύει η σχέση:

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) λαμβάνομε:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{\frac{1}{\nu}} = \lambda \cdot \nu$$

$$\boxed{c = \lambda \cdot \nu} \text{ (θεμελιώδης εξίσωση των κυμάτων)} \qquad (6)$$

Προσοχή:

1) Η εξίσωση (6) είναι γενική και ισχύει για οποιοδήποτε κύμα, μηχανικό ή όχι.

2) Από την εξίσωση (6) προκύπτει ότι για ορισμένη ταχύτητα διαδόσεως ενός κύματος c, το μήκος του λ είναι τόσο μικρότερο, όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητά του (σχέση αντίστροφης αναλογίας).

5.8 Εξίσωση του αρμονικού κύματος.

Θα βρούμε την εξίσωση του αρμονικού κύματος, δηλαδή την εξίσωση με την οποία θα ορίζεται η απομάκρυνση κάθε σημείου Α του ελαστικού μέσου σε κάθε χρονική στιγμή. Είναι φανερό ότι η απομάκρυνση αυτή θα εξαρτάται τόσο από τη θέση του σημείου όσο και από το χρόνο.

Θεωρούμε ότι το αρμονικό κύμα διαδίδεται σε μία ευθεία προς τα δεξιά (σχ. 5.8α). Ας θεωρήσομε τώρα ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα σημείο Ο του ελαστικού μέσου διεγείρεται, ώστε να αρχίσει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (σχ. 5.8α). Είναι φανερό ότι η απομάκρυνση του σημείου Ο θα δίνεται από την εξίσωση της απλής αρμονικής ταλαντώσεως, δηλαδή:

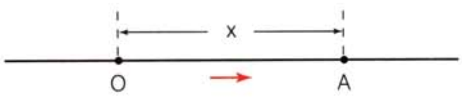
$$\boxed{\xi = \xi_o \,\eta\mu\omega t} \qquad (1)$$

όπου ξ η απομάκρυνση και ξ_o το πλάτος της ταλαντώσεως.

Για να βρούμε την απομάκρυνση ενός τυχαίου σημείου Α του ελαστικού μέσου δεξιά από το Ο, πρέπει να σκεφθούμε ότι το κύμα για να φθάσει από το Ο στο Α χρειάζεται ένα χρόνο $t_o = \frac{x}{\upsilon}$, όπου x η απόσταση του Α από το Ο.

Άρα η απομάκρυνση του σημείου Α κάποια χρονική στιγμή t θα είναι ίση με την απομάκρυνση του σημείου Ο πριν από χρόνο $t_o = \frac{x}{\upsilon}$.

Αν λοιπόν θέλομε η εξίσωση (1) να δίνει την απομάκρυνση κάθε σημείου, θα



Σχ. 5.8α.

πρέπει να τη γράψομε ως εξής:

$$\xi = \xi_o \ \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι για x= 0 η (2) μας δίνει την απομάκρυνση του σημείου Ο: $\xi = \xi_o$ ημωt. Από την εξίσωση (2) θα έχομε:

$$\xi = \xi_o \ \eta\mu \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$

$$\xi = \xi_o \ \eta\mu \ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\upsilon \cdot T}\right)$$

Και επειδή $\upsilon \cdot T = \lambda$, θα έχομε:

$$\boxed{\xi = \xi_o \ \eta\mu \ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \text{ (εξίσωση του αρμονικού κύματος)} \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) ισχύει για κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά. Αν το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά, η εξίσωση θα είναι:

$$\boxed{\xi = \xi_o \ \eta\mu \ 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)} \qquad (4)$$

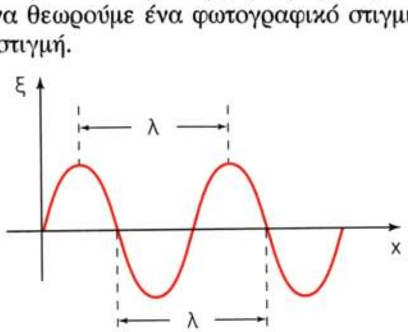
Γραφική παράσταση της εξισώσεως του αρμονικού κύματος.

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών (t και x). Άρα, δεν είναι δυνατόν να γίνει γραφική παράσταση της εξισώσεως (3). Αν όμως θεωρήσομε διαδοχικά σταθερή τη μία από τις δύο μεταβλητές, μπορούμε να αποδώσομε τη μεταβολή της απομακρύνσεως ξ σε συνάρτηση με την άλλη μεταβλητή. Έτσι θα έχομε:

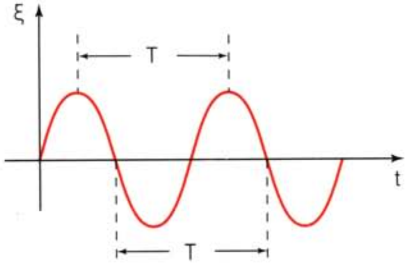
1) t= σταθ. Η εξίσωση (3) γράφεται:

$$\xi = \xi_o \ \eta\mu 2\pi\left(\sigma\tau\alpha\theta. - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (5)$$

Η εξίσωση αυτή είναι ημιτονοειδής. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.8β και είναι σαν να θεωρούμε ένα φωτογραφικό στιγμιότυπο του κύματος κάποια ορισμένη χρονική στιγμή.



Σχ. 5.8β.



Σχ. 5.8γ.

2) x = σταθ. Η εξίσωση (3) γράφεται:

$$\xi = \xi_o \ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \sigma\tau\alpha\theta.\right) \qquad (6)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6) είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου. Άρα είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλαντώσεως, που εκτελεί το ορισμένο σημείο Α του ελαστικού μέσου που απέχει από το Ο κατά x. Η απομάκρυνση είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.8γ.

5.9 Μεταφορά ενέργειας με κύμα (ή διάδοση ενέργειας με κύμα).

Θεωρούμε χάριν απλότητας ότι η πηγή των αρμονικών κυμάτων είναι ένα υλικό σημείο, το οποίο εκτελεί αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις.

Επομένως η μηχανική ενέργεια της ταλαντώσεως του υλικού σημείου (δηλ. της πηγής) διατηρείται σταθερή.

Αν η πηγή βρίσκεται εντός ομογενούς και ισότροπου ελαστικού μέσου, τότε δημιουργούνται εντός του μέσου αυτού αρμονικές ταλαντώσεις, οι οποίες διαδίδονται με ταχύτητα υ (δηλ. δημιουργούνται εντός του μέσου αυτού αρμονικά κύματα τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα υ). Προφανώς την ενέργεια ταλαντώσεως των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου την παρέχει η πηγή. Δηλαδή η πηγή ***εκπέμπει*** ενέργεια στο ελαστικό μέσο που την περιβάλλει, η οποία παρέχεται σε αυτήν για παράδειγμα από κάποιον κινητήρα.

Σημείωση:

Υπενθυμίζομε ότι η ολική μηχανική ενέργεια ενός υλικού σημείου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε οποιαδήποτε θέση της τροχιάς του δίδεται από τη σχέση:

$$\boxed{E_{o\lambda} = 2\, m\, \pi^2 \nu^2 x_o^2} \ (\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\rho.\ 4.5.1)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΗΧΟΣ (ΗΧΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ)

6.1 Έννοια του ήχου – Ηχητικές πηγές.

Ηχητικά κύματα ονομάζονται τα μηχανικά κύματα που έχουν συχνότητα τέτοια ώστε να γίνονται αντιληπτά από το ανθρώπινο αυτί.

Τα όρια συχνοτήτων των μηχανικών κυμάτων που γίνονται αντιληπτά από το ανθρώπινο αυτί είναι από 16 Hz – 20.000 Hz. Η περιοχή αυτή των συχνοτήτων (16 – 20.000 Hz) ονομάζεται ***ακουστική*** ή ακουστή περιοχή συχνοτήτων και εξαρτάται από το αυτί του παρατηρητή.

Η πιο μεγάλη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (20.000 Hz) ελαττώνεται με την ηλικία του.

Όταν τα ηχητικά κύματα φθάσουν στο τύμπανο του ανθρώπινου αυτιού το αναγκάζουν να κάνει ταλαντώσεις. Έτσι δημιουργείται στον άνθρωπο το αίσθημα του ήχου. ***Όταν λέμε ήχο εννοούμε ένα κύμα, το οποίο μπορεί να προκαλέσει το αίσθημα του ήχου.***

Ηχητικές πηγές. Ο ήχος παράγεται πάντοτε από την ταλάντωση ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων εντός ελαστικού μέσου. Αν για παράδειγμα θέσομε σε ταλάντωση ένα διαπασών, αντιλαμβανόμαστε ήχο. Μόλις ακινητοποιήσομε το διαπασών, παύει αμέσως η ηχητική αίσθηση.

Τα σώματα τα οποία παράγουν ήχους τα ονομάζομε ***ηχητικές πηγές.***

6.2 Διάδοση του ήχου.

Ο ήχος διαδίδεται μόνο μέσα από υλικά σώματα, δηλαδή στο κενό ο ήχος δεν διαδίδεται.

Μέσα στον κώδωνα αεραντλίας στερεώνεται κατάλληλα ηλεκτρικό κουδούνι Κ (σχ. 6.3). Αν συνδέσομε τον κουδούνι Κ με ηλεκτρική πηγή, αυτό θα αρχίσει να ηχεί και θα ακούμε το σχετικό ήχο. Κατόπιν αρχίζομε να αφαιρούμε τον αέρα από τον κώδωνα, οπότε ο ήχος ακούγεται όλο και πιο ασθενής, για να πάψει τελικά να ακούγεται, όταν η πίεση του αέρα στον κώδωνα ελαττωθεί πολύ (δηλ. δημιουργηθεί μέσα στον κώδωνα σχεδόν κενό). Αν στη συνέχεια εισαγάγομε σιγά σιγά αέρα στον κώδωνα, ο ήχος αρχίζει εκ νέου να ακούγεται ζωηρός.

Έστω ότι είμαστε βυθισμένοι μέσα στο νερό και κρατάμε δύο πέτρες. Όταν κτυπάμε τις πέτρες, τότε ακούμε τον ήχο που παράγεται.

Αν στο άκρο μιας ξύλινης σανίδας τοποθετήσομε ένα ρολόι και στο άλλο εφαρμόσομε το αυτί μας, τότε θα ακούσομε τους κτύπους του ρολογιού.

Προσοχή:

Μέσα στα αέρια και στα υγρά σχηματίζονται μόνο διαμήκη κύματα, ενώ μέσα στα στερεά σχηματίζονται διαμήκη ή εγκάρσια κύματα. Άρα:

1) Μέσα στα αέρια και τα υγρά ο ήχος διαδίδεται με διαμήκη κύματα.

2) Μέσα στα στερεά ο ήχος διαδίδεται με διαμήκη ή και με εγκάρσια κύματα.

6.3 Ταχύτητα του ήχου.

α) Ταχύτητα του ήχου στα αέρια.

Η ταχύτητα διαδόσεως του ήχου μέσα σε ένα αέριο εξαρτάται από τη θερμοκρασία του αερίου.

Αν υ_o είναι η ταχύτητα του ήχου σε ένα αέριο όταν η θερμοκρασία του είναι 0^oC και υ η ταχύτητα του ήχου όταν η θερμοκρασία του αερίου είναι θ (σε βαθμούς Κελσίου, ^oC), τότε ισχύει η σχέση:

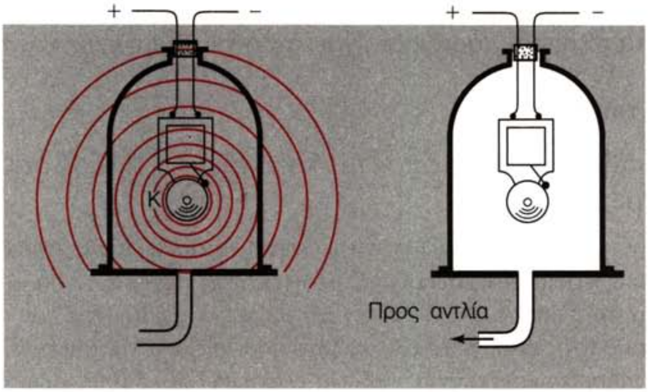
$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o \cdot \sqrt{1+\alpha\theta}} \qquad (1)$$

όπου υ_o και υ σε m/s, θ σε ^oC και $\alpha = \frac{1}{273} K^{-1}$ (α είναι ο θερμικός συντελεστής όγκου με σταθερή πίεση, ο ίδιος για όλα τα αέρια).

Προσοχή:

Από τη σχέση (1) συνάγεται:

1) Η ταχύτητα του ήχου είναι ανεξάρτητη της πιέσεως του αερίου μέσα στο οποίο διαδίδεται.



Σχ. 6.3.

2) Η ταχύτητα του ηχητικού κύματος είναι ανεξάρτητη της συχνότητας και του πλάτους του.

Σημείωση:

Με τη βοήθεια της σχέσεως (1) μπορούμε να υπολογίσομε την ταχύτητα του ήχου σε ένα αέριο, σε οποιαδήποτε θερμοκρασία του.

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι στους $0^{o}C$: $\upsilon_o = 331$ m/s ενώ στους 16 ^{o}C: $\upsilon_{16} = 340$ m/s.

β) Ταχύτητα του ήχου στα υγρά.

Η ταχύτητα του ήχου στα υγρά είναι γενικά μεγαλύτερη από την ταχύτητα του στα αέρια. Για παράδειγμα στο νερό είναι 1500 m/s.

γ) Ταχύτητα του ήχου στα στερεά.

Η ταχύτητα του ήχου στα στερεά είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητά του στα υγρά. Για παράδειγμα στο χάλυβα είναι 5000 m/s ενώ στον ορείχαλκο είναι 3500 m/s.

6.4 Σφαιρικά κύματα – Ισοφασικές επιφάνειες – Επίπεδα κύματα.

6.4.1 Σφαιρικά κύματα.

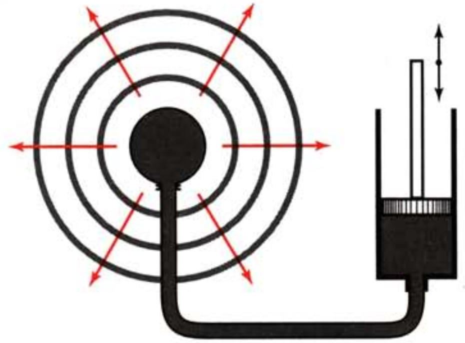
Αν ένα υλικό σημείο Ο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και περιβάλλεται από ένα ελαστικό μέσο, τότε το σημείο αυτό είναι πηγή αρμονικών κυμάτων. Τα κύματα αυτά ξεκινώντας από το σημείο Ο διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις μέσα στο ελαστικό μέσο, γιατί το σημείο Ο όπως και κάθε σημείο του μέσου, περιβάλλεται από πολλά γειτονικά.

Αν το ελαστικό μέσο είναι ομογενές (δηλ. έχει την ίδια πυκνότητα σε όλη την έκτασή του) και ισότροπο (δηλ. έχει τις ίδιες ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις), η ταχύτητα διαδόσεως c των κυμάτων θα είναι η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις.

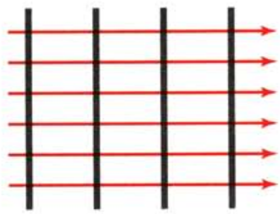
Συνεπώς κατά τη διάρκεια ορισμένου χρόνου t η διάδοση της ταλαντώσεως του Ο (δηλ. το κύμα) φθάνει σε όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε απόσταση $\boxed{R = c \cdot t}$ από το Ο, δηλαδή στα σημεία που βρίσκονται επάνω σε μία σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R.

Η ακτίνα $R = c \cdot t$ της σφαιρικής επιφάνειας μεγαλώνει συνέχεια, επομένως προκύπτουν (σχηματίζονται) πολλές ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες. Με άλλα λόγια, το κύμα διαδίδεται υπό μορφή ομοκέντρων σφαιρικών επιφανειών με κέντρο το Ο. Τα κύματα τα οποία διαδίδονται με μορφή ομοκέντρων σφαιρικών επιφανειών ονομάζονται ***σφαιρικά κύματα*** και υπάγονται στην κατηγορία των κυμάτων χώρου.

Για καλύτερη κατανόηση των παραπάνω, αναφέρομε το πείραμα του σχήματος 6.4α. Ανυψώνοντας και κατεβάζοντας περιοδικά το έμβολο, αναγκάζομε την ελαστική σφαίρα να διαστέλλεται και να συστέλλεται περιοδικά, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται γύρω της διαδοχικά σφαιρικά πυκνώματα και αραιώματα. Αυτά τα πυκνώματα και τα αραιώματα διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις και αποτελούν τα σφαιρικά κύματα.



Σχ. 6.4α.



Σχ. 6.4β.

Προσοχή:

1) Κάθε σφαιρική επιφάνεια ονομάζεται ***επιφάνεια του κύματος*** (ή ***μέτωπο του κύματος***).

2) Όλα τα σημεία που βρίσκονται επάνω στην ίδια επιφάνεια κύματος (δηλαδή επάνω στην ίδια σφαιρική επιφάνεια) έχουν την ίδια φάση, γιατί έχουν αρχίσει την ίδια χρονική στιγμή την κίνησή τους. Με άλλα λόγια, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που απέχουν την ίδια απόσταση από το Ο θα έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια φάση.

6.4.2 Ισοφασικές επιφάνειες.

Επειδή όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται επάνω στην ίδια επιφάνεια κύματος έχουν την ίδια φάση, γι' αυτό οι επιφάνειες κύματος ονομάζονται και ***ισοφασικές επιφάνειες***.

Η απόσταση μεταξύ δύο ισοφασικών επιφανειών κύματος που τα σημεία τους ταλαντώνονται με διαφορά φάσεως 2π είναι ίση με το μήκος του κύματος λ.

6.4.3 Επίπεδα κύματα.

Σε μεγάλη απόσταση από την πηγή των κυμάτων ένα μικρό μέρος της σφαιρικής επιφάνειας των κυμάτων μπορούμε να το θεωρήσομε ως επίπεδο (σχ. 6.4β). Σε αυτήν την περίπτωση τα κύματα στην απόσταση που τα θεωρήσαμε είναι επίπεδα κύματα.

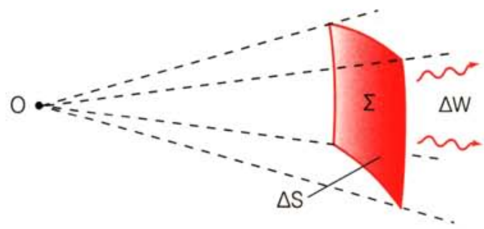
Παρατηρήσεις:

1) Οι ακτίνες των σφαιρικών επιφανειών κύματος ονομάζονται ακτίνες διαδόσεως του κύματος.

2) Οι ευθείες οι οποίες είναι κάθετες στις ισοφασικές επιφάνειες ενός επίπεδου κύματος ονομάζονται ακτίνες διαδόσεώς του.

Στα σφαιρικά κύματα οι ακτίνες διαδόσεως συνιστούν ***αποκλίνουσα δέσμη*** (σχ. 6.4α). Στα επίπεδα κύματα οι ακτίνες διαδόσεως συνιστούν ***παράλληλη δέσμη*** (σχ. 6.4β).

3) Είναι φανερό ότι και στα σφαιρικά και στα επίπεδα κύματα οι ακτίνες είναι ευθείες γραμμές, το κύμα δηλαδή διαδίδεται ευθύγραμμα.



Σχ. 6.5.

6.5 Ένταση του ήχου (ένταση ηχητικού κύματος).

Διά του ηχητικού κύματος, όπως και με κάθε κύμα, μεταφέρεται ενέργεια.

Η ***ένταση Ι ενός ηχητικού κύματος*** σε ένα σημείο Σ του μέσου διαδόσεώς του, ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t}} \qquad (1)$$

όπου ΔW η ενέργεια που διέρχεται σε χρόνο Δt από τη στοιχειώδη επιφάνεια ΔS που έχει τεθεί στο σημείο Σ κάθετα στην ακτίνα διαδόσεώς του κύματος (σχ. 6.5).

Προσοχή:

Το πηλίκο $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ είναι η ισχύς του κύματος, οπότε η (1) γράφεται:

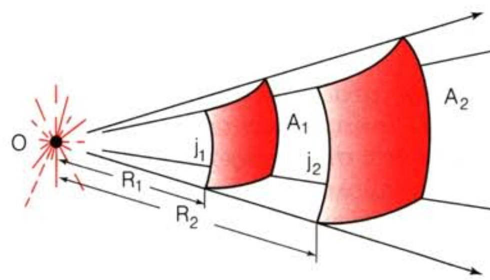
$$\boxed{I = \frac{P}{\Delta t}}$$

Μονάδα της Ι στο S.I. είναι το $1\dfrac{W}{m^2}$.

$$\left(I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\Delta S} = \frac{1J}{1s} \cdot \frac{1}{1\,m^2} = 1\,\text{Watt} \cdot \frac{1}{m^2} = 1\frac{W}{m^2} \right)$$

6.6 Μεταβολή της εντάσεως μετά της αποστάσεως.

Υποθέτομε ότι το σημείο Ο (σχ. 6.6) είναι πηγή παραγωγής ηχητικών κυμάτων και ότι W είναι η ενέργεια που μεταδίδεται από την πηγή Ο προς όλες



Σχ. 6.6.

τις κατευθύνσεις. Η ενέργεια W θα διέλθει σε χρόνο Δt από την επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R_1. Επομένως η ένταση ηχητικού κύματος σε απόσταση R_1 από την πηγή θα είναι:

$$I_1 = \frac{W}{(4\pi R_1^2) \cdot \Delta t} \tag{1}$$

Με τον ίδιο συλλογισμό συμπεραίνομε ότι η ένταση του κύματος σε απόσταση R_2 από την πηγή θα είναι:

$$I_2 = \frac{W}{(4\pi R_2^2) \cdot \Delta t} \tag{2}$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) και λαμβάνομε:

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}} \tag{3}$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η ένταση ενός σφαιρικού ηχητικού κύματος μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα προς το τετράγωνο της αποστάσεως από την πηγή παραγωγής του.

Σημείωση:

Τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κατά τη διάδοση του ηχητικού κύματος δεν έχομε μετατροπή της ενέργειάς του σε άλλες μορφές ενέργειες.

Στην πραγματικότητα, όταν ένα κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο, η ενέργειά του μετατρέπεται, κατά ένα μέρος, σε ενέργεια άλλης μορφής, συνήθως σε θερμότητα γιατί (το μέσο θερμαίνεται).

Εδώ χρησιμοποιούμε καταχρηστικώς τον όρο θερμότητα γιατί συνηθίζεται ευρέως η χρήση του. Όπως όμως θα μάθομε σε μεγαλύτερη τάξη, ο εύστοχος όρος είναι ***εσωτερική ενέργεια.***

6.7 Είδη ήχων – Ανάλυση περιοδικής ταλαντώσεως.

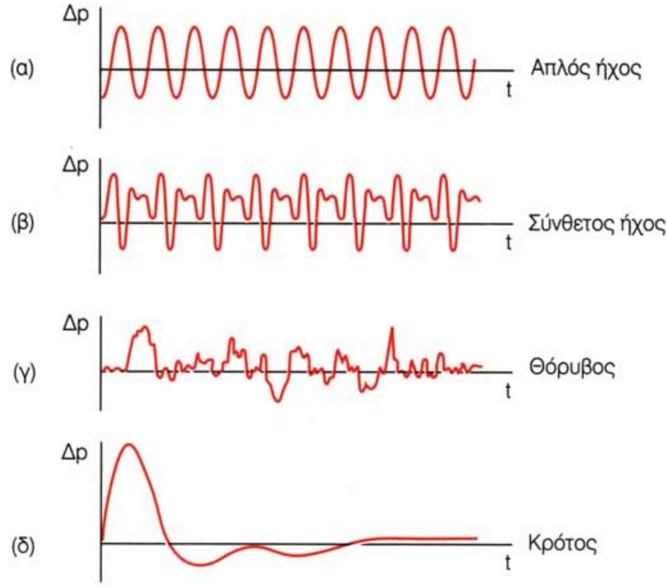
6.7.1 Είδη ήχων.

Τα ηχητικά κύματα μεταβάλλουν την πίεση του μέσου το οποίο περιβάλλει το αυτί.

Οι μεταβολές αυτές της πιέσεως μεταδίδονται στη μεμβράνη (στο τύμπανο) του αυτιού, η οποία εξ αιτίας αυτών των μεταβολών εκτελεί ανάλογες κινήσεις και δημιουργείται έτσι στον άνθρωπο το αίσθημα του ήχου. Ανάλογα με τη μορφή που έχει η μεταβολή της πιέσεως της μεμβράνης του αυτιού μας, διακρίνομε τους ήχους σε διάφορα είδη:

α) Απλός ήχος ή ***τόνος*** [σχ. 6.7(α)].

Απλός ήχος ονομάζεται ο ήχος που παράγεται όταν η μεταβολή της πιέσε-



Σχ. 6.7.

ως Δp που δέχεται το τύμπανο του αυτιού μας είναι απλή αρμονική (ημιτονοειδής). Βέβαια ο απλός ήχος έχει μία ορισμένη συχνότητα. Ο ήχος που παράγεται από ένα διαπασών είναι απλός ήχος.

β) Σύνθετος ήχος ή ***φθόγγος*** [σχ. 6.7(β)].

Σύνθετος ήχος ονομάζεται ο ήχος που παράγεται όταν η μεταβολή της πιέσεως Δp που δέχεται το τύμπανο του αυτιού μας είναι περιοδική, αλλά όχι ημιτονοειδής. Σύνθετοι ήχοι παράγονται από μουσικά όργανα.

γ) Θόρυβος [σχ. 6.7(γ)].

Θόρυβος ονομάζεται ο ήχος που παράγεται όταν η μεταβολή της πιέσεως Δp που δέχεται το τύμπανο του αυτιού μας δεν είναι περιοδική. Δηλαδή θόρυβος ονομάζεται ο ήχος που παράγεται όταν η μεταβολή της πιέσεως Δp που δέχεται το τύμπανο του αυτιού μας είναι μία ακανόνιστη μεταβολή. Θόρυβος για παράδειγμα παράγεται κατά τη συγκέντρωση πολλών ανθρώπων.

δ) Κρότος [σχ. 6.7(δ)].

Κρότος ονομάζεται ο ήχος που παράγεται όταν η μεταβολή της πιέσεως Δp που δέχεται το τύμπανο του αυτιού μας είναι μια απότομη και συνήθως μεγάλη μεταβολή (δηλ. η Δp είναι μεγάλη αλλά μικρής διάρκειας). Κρότος για παράδειγμα παράγεται όταν συμβαίνει κάποια έκρηξη.

6.7.2 Ανάλυση περιοδικής ταλαντώσεως.

Αν αναλύσομε μία περιοδική ταλάντωση, θα λάβομε μια σειρά αρμονικών ταλαντώσεων, των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας ορισμένης συχνότητας.

Η ταλάντωση της μικρότερης συχνότητας ν καλείται θεμελιώδης (ή πρώτη) αρμονική. Η αρμονική που έχει συχνότητα 2ν λέγεται δεύτερη αρμονική. Η αρμονική που έχει συχνότητα 3ν λέγεται τρίτη αρμονική κ.ο.κ.

Τα πιο πάνω βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή για παράδειγμα στην Ακουστική κατά τη σύνθεση απλών ήχων, με αποτέλεσμα τη δημιουργία συνθέτων ήχων, και αντίστροφα στην ανάλυση ενός σύνθετου ήχου από την οποία προκύπτουν πολλοί απλοί ήχοι.

Σημείωση:

Το διαπασών παράγει ήχο που μπορεί να θεωρηθεί τόνος (απλός). Η συχνότητα του ήχου είναι σημειωμένη επάνω στο στέλεχός του.

6.8 Χαρακτηριστικά γνωρίσματα του ήχου.

Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του ήχου διακρίνονται σε αντικειμενικά και υποκειμενικά.

6.8.1 Αντικειμενικά γνωρίσματα του ήχου.

Τα αντικειμενικά γνωρίσματα του ήχου είναι τα εξής:

α) Συχνότητα του ήχου.

Συχνότητα του ήχου ονομάζεται η συχνότητα του ηχητικού κύματος. Επομένως, η συχνότητα ενός ήχου είναι ίση με τη συχνότητα ταλαντώσεως της πηγής από την οποία παράγεται.

β) Ένταση του ήχου.

Ένταση του ήχου σε ένα σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται, ονομάζεται η ένταση του αντίστοιχου ηχητικού κύματος στο σημείο αυτό.

Υπενθυμίζομε ότι η ένταση του ήχου μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα προς το τετράγωνο της αποστάσεως από την ηχογόνο πηγή.

6.8.2 Υποκειμενικά γνωρίσματα του ήχου.

Ο ήχος προκαλεί ορισμένα αισθήματα. Τα αισθήματα αυτά χαρακτηρίζονται από τρία υποκειμενικά γνωρίσματα τα οποία είναι:

α) Ύψος.

Ύψος ένος ήχου ονομάζομε εκείνο το υποκειμενικό γνώρισμά του, το οποίο μας επιτρέπει να κρίνομε αν είναι οξύς (υψηλός) ή βαρύς (χαμηλός).

Το ύψος ενός ήχου εξαρτάται από τη συχνότητά του.

Όσο η συχνότητα ενός ήχου είναι μεγαλύτερη, τόσο ο ήχος είναι οξύτερος.

Όταν ακούσομε διαδοχικά δύο ήχους με διαφορετικές γνωστές συχνότητες, θα διαπιστώσομε ότι ο ήχος με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι οξύτερος (πιο διαπεραστικός) από τον άλλο. Η γυναικεία φωνή είναι οξύτερη (λεπτότερη) από την ανδρική, γιατί η συχνότητα της πρώτης είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα της δεύτερης.

β) Ακουστότητα (ή ένταση ηχοαισθήματος ή απλά ηχοαίσθημα).

Ακουστότητα (ή ένταση ηχοαισθήματος ή απλά ηχοαίσθημα) ενός ήχου ονομάζομε εκείνο το υποκείμενικό γνώρισμά του, το οποίο μας επιτρέπει να τον χαρακτηρίζομε ως ασθενή ή ισχυρό.

Η ακουστότητα ενός ήχου ***ορισμένης συχνότητας*** (σταθερής συχνότητας) για τον ίδιο παρατηρητή εξαρτάται από την ***έντασή του*** (η οποία ως είπαμε είναι ένα από τα αντικειμενικά γνωρίσματά του). Όταν ακούσομε διαδοχικά δύο ήχους με την ίδια συχνότητα και διαφορετική ένταση, θα αντιληφθούμε ότι οι ήχοι αυτοί έχουν το ίδιο ύψος αλλά ο ένας ακούγεται πιο δυνατά από τον άλλο, δηλαδή έχουν διαφορετική ακουστότητα.

Όσο η ένταση ενός ήχου σταθερής συχνότητας είναι μεγαλύτερη, τόσο η ακουστότητά του είναι μεγαλύτερη.

Όσο ισχυρότερα (δυνατότερα) κτυπάμε ένα διαπασών, τόση μεγαλύτερη θα είναι η ακουστότητα των ήχων που παράγει.

Σημείωση:

1) Οι ήχοι που παράγονται από ένα διαπασών έχουν την ίδια συχνότητα, αλλά όσο ισχυρότερα κτυπήματα δέχεται αυτό τόσο μεγαλύτερη ένταση έχουν οι παραγόμενοι ήχοι.

2) Δεν πρέπει να συγχέομε την ένταση του ήχου με την ακουστότητα. Η ένταση ενός ήχου είναι ανεξάρτητη από τον παρατηρητή που ακούει τον ήχο, ενώ η ακουστότητα του ίδιου ήχου διαφέρει από παρατηρητή σε παρατηρητή.

Προσοχή:

Τονίζομε ότι: 1) Η ακουστότητα ενός ήχου για τον ίδιο παρατηρητή εξαρτάται όχι μόνο από την έντασή του, αλλά και από τη συχνότητά του και 2) από δύο ήχους οι οποίοι έχουν την ίδια συχνότητα, εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη ένταση έχει και τη μεγαλύτερη ακουστότητα (βέβαια για τον ίδιο παρατηρητή).

γ) Χροιά.

Χροιά ενός σύνθετου ήχου ονομάζεται εκείνο το υποκειμενικό του γνώρισμα, το οποίο μας επιτρέπει να τον διακρίνομε από ένα άλλο σύνθετο ήχο που έχει με αυτόν το ίδιο ύψος, την ίδια συχνότητα, αλλά οι δύο αυτοί ήχοι έχουν ***διαφορετικούς αρμονικούς***.

Συγκεκριμένα η χροιά ενός σύνθετου ήχου εξαρτάται από τις εντάσεις και το πλήθος των ανωτέρων αρμονικών του.

Σημείωση:

1) Υπενθυμίζομε ότι το ύψος σύνθετου ήχου εξαρτάται από τη συχνότητα του θεμελιώδους ήχου του, γιατί αυτή είναι και η συχνότητα της σύνθετης ταλαντώσεως.

2) Ο απλός ήχος είναι ένας ήχος που έχει μία μόνο συχνότητα, δηλαδή δεν αναλύ-

εται σε αρμονικούς (δεν έχει αρμονικούς). Επομένως, οι απλοί ήχοι δεν έχουν χροιά, γι' αυτό δεν είναι ούτε ευχάριστοι ούτε δυσάρεστοι.

Παρατήρηση:

Το πλήθος και οι εντάσεις των αρμονικών ενός σύνθετου ήχου που παράγει ένα μουσικό όργανο χαρακτηρίζουν το όργανο αυτό.

Δύο μουσικά όργανα μπορεί να εκπέμπουν σύνθετους ήχους των οποίων οι θεμελιώδεις ήχοι να έχουν την ίδια συχνότητα αλλά οι αρμονικοί του ήχου που προέρχεται από το ένα όργανο να διαφέρουν από τους αρμονικούς του ήχου που προέρχεται από το άλλο όργανο. Επομένως, οι σύνθετοι ήχοι που προέρχονται από διαφορετικά μουσικά όργανα έχουν διαφορετική χροιά. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η χροιά ενός σύνθετου ήχου είναι εκείνο το υποκειμενικό του γνώρισμα, το οποίο μας επιτρέπει να διακρίνομε την πηγή του από τις πηγές άλλων συνθέτων ήχων που έχουν με αυτόν το ίδιο ύψος και την ίδια ακουστικότητα.

Προσοχή:

Τονίζομε ότι η χροιά ενός ήχου: α) εξαρτάται από το πλήθος των αρμονικών του και τις εντάσεις τους και β) χαρακτηρίζει την πηγή προελεύσεώς του.

6.9 Κατώφλι ακουστότητας – Όριο πόνου.

Ένας ήχος ορισμένης συχνότητας για να γίνει ακουστός, πρέπει να έχει επαρκή ένταση.

Κατώφλι ακουστότητας ενός ήχου που έχει μία συγκεκριμένη συχνότητα ονομάζεται η ελάχιστη ένταση την οποία πρέπει να έχει ο ήχος για να γίνεται μόλις ακουστός.

Όριο πόνου ενός ήχου που έχει μια συγκεκριμένη συχνότητα ονομάζεται η ένταση του ήχου, που είναι τόσο ισχυρή ώστε να προκαλείται πόνος στο αισθητήριο της ακοής.

Προσοχή:

1) Αν δύο ήχοι έχουν την ίδια συχνότητα αλλά διαφορετικές εντάσεις, τότε έχουν και διαφορετικές ακουστότητες.

Αν δύο ήχοι έχουν ίσες εντάσεις αλλά διαφορετικές συχνότητες, τότε έχουν πάλι διαφορετικές ακουστότητες.

Δηλαδή η ακουστότητα ενός ήχου εξαρτάται και από τη συχνότητά του και από την έντασή του.

2) Είναι δυνατόν δύο απλοί ήχοι διαφορετικών εντάσεων και διαφορετικών συχνοτήτων να προκαλούν το ίδιο ηχοαίσθημα (να έχουν την ίδια ακουστότητα).

Για παράδειγμα δύο ήχοι οι οποίοι έχουν συχνότητες 200 Hz και 2000 Hz και εντάσεις 10^{-14} W/cm^2 και 10^{-16} W/cm^2 αντίστοιχα, μόλις γίνονται αντιληπτοί από το αυτί. Βρίσκονται, όπως λέμε, και οι δύο στο κατώφλι ακουστότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΥΠΕΡΗΧΟΙ – ΥΠΕΡΗΧΗΤΙΚΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

7.1 Υπέρηχοι.

Υπέρηχοι ονομάζονται τα ηχητικά κύματα που έχουν συχνότητα μεγαλύτερη από 20.000 Hz.

Υπόηχοι ονομάζονται τα ηχητικά κύματα, που έχουν συχνότητα μικρότερη από 16 Hz.

7.1.1 Παραγωγή υπερήχων.

α) Παραγωγή υπερήχων με τη μέθοδο της ηλεκτροσυστολής.

Οι συσκευές παραγωγής υπερήχων στηρίζονται κυρίως στην ***ηλεκτροσυστολή***, δηλαδή στο φαινόμενο κατά το οποίο ένα πλακίδιο χαλαζία όταν βρεθεί εντός εναλλασσόμενου ηλεκτρικού πεδίου υψηλής συχνότητας συστέλλεται και διαστέλλεται έτσι ώστε να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Το πλάτος της ταλαντώσεως αυτής γίνεται μέγιστο στην περίπτωση του συντονισμού, όταν δηλαδή η συχνότητα του εναλλασσόμενου πεδίου είναι ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα του πλακιδίου. Οι ταλαντώσεις αυτές που είναι υψηλής συχνότητας διαδίδονται στον αέρα (ή και εντός υγρών) και αποτελούν τους υπέρηχους. Η ιδιοσυχνότητα του πλακιδίου μπορεί, αναλόγως του πάχους του, να φθάσει μέχρι και την περιοχή των ραδιοφωνικών συχνοτήτων.

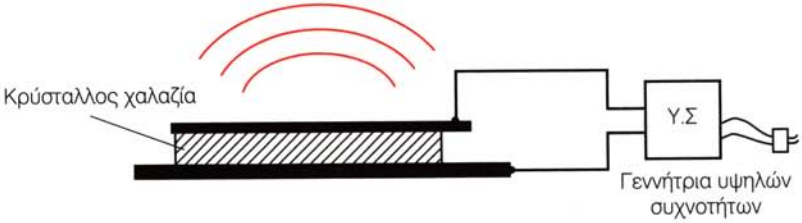
Παρατηρήσεις:

1) Ευνόητο είναι ότι ένα πλακίδιο ενός ορισμένου πάχους παράγει υπέρηχο μίας ορισμένης συχνότητας.

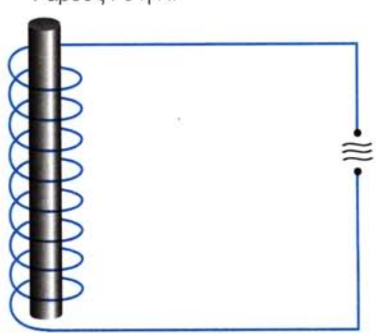
2) Εκτός από το χαλαζία, χρησιμοποιούνται σήμερα και άλλα υλικά, όπως ειδικά κεραμικά υλικά που περιέχουν τιτάνιο.

Σημείωση:

Συνήθως, μικρές μεταλλικές πλάκες προσαρμόζονται στον κρύσταλλο της υπερηχητικής συσκευής (σχ. 7.1α) οι οποίες πάλλονται με το ρυθμό της εναλλασσόμενης τάσεως (η οποία δημιουργεί το εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο). Συνεπώς οι μετατοπίσεις των μεταλλικών πλακών παράγουν όμοιες δονήσεις στο μέσο που βρίσκεται η συσκευή (όπως π.χ. αέρας, νερό, λάδι).



Σχ. 7.1α.



Σχ. 7.1β.

β) Παραγωγή υπερήχων με τη μέθοδο της μαγνητοσυστολής.

Τα σιδηρομαγνητικά σώματα όταν τεθούν μέσα σε μαγνητικό πεδίο μεταβάλλουν ελαφρώς τις διαστάσεις τους (φαινόμενο μαγνητοσυστολής). Αυτά τα σώματα εξ αιτίας της μαγνητοσυστολής όταν βρίσκονται μέσα σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο μεταβάλλουν τις διαστάσεις τους στο ρυθμό του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου.

Ένα σωληνοειδές (πηνίο) περιελίσσεται γύρω από μία ράβδο από Fe ή Ni (σχ. 7.1β). Όταν εφαρμόσομε στο σωληνοειδές εναλλασσόμενη τάση υψηλής συχνότητας, η ράβδος μαγνητίζεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να παρατηρούνται μικρές μεταβολές στο μήκος της σε ταυτοχρονισμό με τις μεταβολές της τάσεως. Οι δονήσεις που προκαλούνται με τον τρόπο αυτό στη ράβδο, και οι οποίες είναι υψηλής συχνότητας, διαδίδονται στο υλικό μέσο που την περιβάλλει και αποτελούν τους υπερήχους.

7.1.2 Ιδιότητες των υπερήχων.

Θα αναφέρομε ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες των υπερήχων.

1) Οι υπέρηχοι διαδίδονται μέσα στα διάφορα υλικά όπως και οι ακουστοί ήχοι.

2) Τα κύματα των υπερήχων (οι υπέρηχοι) μεταφέρουν περισσότερη ισχύ από τους συνηθισμένους ήχους, γιατί έχουν υψηλότερη συχνότητα.

3) Οι υπέρηχοι όταν διαδίδονται μέσα στον αέρα υφίστανται μεγάλη α-

πορρόφηση και εξ αιτίας αυτού μέσα στον αέρα έχουν μικρή εμβέλεια. Αντίθετα, όταν οι υπέρηχοι διαδίδονται σε ορισμένα μέσα και κυρίως στα υγρά υφίστανται μικρή απορρόφηση και γι' αυτό έχουν μεγάλη εμβέλεια σε αυτά (στο νερό έχουν πολύ μεγάλη εμβέλεια).

4) Οι υπέρηχοι μπορούν να σχηματίζουν στενές κατευθυνόμενες δέσμες ηχητικών ακτίνων. Επομένως με υπέρηχους μπορεί να μεταφερθεί ηχητική ενέργεια σε μεγάλες αποστάσεις.

5) Οι υπέρηχοι μπορούν σχετικά εύκολα να «εστιάζονται». Επομένως μεταφέρουν μεγάλη ισχύ σε μικρούς χώρους.

6) Μεταξύ πυκνωμάτων και αραιωμάτων ενός υπερήχου είναι εύκολο να δημιουργηθούν μεγάλες διαφορές πιέσεως εξ αιτίας της μεγάλης συχνότητάς του και του μικρού μήκους κύματος αυτού.

7.1.3 Εφαρμογές υπερήχων.

α) Εφαρμογές στη βιομηχανία.

1) Για την αναζήτηση εσωτερικών ρωγμών σε μεταλλικά εξαρτήματα χρησιμοποιούμε συσκευή (που ονομάζεται ανακλασκόπιο ή ανακλασιοσκόπιο) η οποία διοχετεύει υπερηχητικά κύματα κατά συρμούς στα προς μελέτη μεταλλικά εξαρτήματα. Τα κύματα αυτά ανακλώνται στην εσωτερική ρωγμή, γιατί συναντούν μέσο με διαφορετική πυκνότητα, και επιστρέφουν φυσικά σε μικρότερο χρόνο από εκείνα που θα ανακλασθούν στην εξωτερική επιφάνεια του υλικού. Γνωρίζοντας την ταχύτητα διαδόσεως του ήχου στο μέσο που εξετάζεται και μετρώντας το χρόνο ανακλάσεως της ηχητικής δέσμης μέσα στο υλικό, υπολογίζομε το βάθος όπου βρίσκεται η ρωγμή μέσα στο υλικό, καθώς και την έκτασή της.

Κατά παρόμοιο τρόπο είναι δυνατόν να ανιχνεύσομε ρωγμές στα ελαστικά των αυτοκινήτων.

2) Οι υπέρηχοι δημιουργούν λεπτότατα γαλακτώματα με την ανάμειξη δύο υγρών, τα οποία κανονικά αναμιγνύονται δύσκολα. Ως παράδειγμα αναφέρονται τα κράματα σιδήρου και μολύβδου, αλουμινίου και καδμίου, νερού και λαδιού κ.ά. Έτσι δημιουργούνται νέοι τύποι κραμάτων μετάλλων και μειγμάτων, εξαιρετικά πολυτίμων για τη βιομηχανία.

3) Οι υπέρηχοι μπορούν να προκαλέσουν θραύση γυάλινων σωλήνων και ράβδων αν με κατάλληλη διάταξη συγκεντρωθεί επάνω τους η ενέργεια την οποία μεταφέρουν.

4) Οι υπέρηχοι χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ανώτατης ποιότητας γυαλιού καθώς και για τη βελτίωση της ποιότητας διαφόρων υλικών, γιατί απομακρύνουν τα αέρια, τα οποία περιέχονται μέσα σε ένα υγρό ή σε ένα μείγμα.

β) Εφαρμογές υπερήχων στη χημεία.

1) Δέσμη υπερήχων σε μερικά είδη χημικών αντιδράσεων ενεργεί ως κα-

ταλύτης και τις επιταχύνει.

2) Οι υπέρηχοι, μπορούν να διασπάσουν μακρές αλυσίδες πολυμερισμένων μορίων.

3) Το γάλα μπορεί να παστεριωθεί με επίδραση υπερηχητικής δέσμης υψηλής ισχύος σε χρόνο μερικών δευτερολέπτων.

γ) Εφαρμογές υπερήχων στη βιολογία.

1) Οι υπέρηχοι προκαλούν διαμελισμό των κυττάρων των μονοκυττάρων οργανισμών και των αιμοσφαιρίων.

2) Σε πολυκύτταρους οργανισμούς (ψάρια κ.ά.) οι υπέρηχοι προκαλούν το θάνατο ή προσωρινή παράλυση.

δ) Εφαρμογές στην ιατρική.

Σε μερικές χειρουργικές επεμβάσεις, οι δέσμες υπερήχων μπορούν να αντικαταστήσουν το νυστέρι και μάλιστα να εκτελέσουν το ίδιο έργο ταχύτερα και κατά τρόπο ανώδυνο και τελείως ακίνδυνο για τον ασθενή. Χαρακτηριστικά αναφέρεται η επίδραση υπερηχητικής δέσμης στο νεφρό για τη θραύση πέτρας που υπάρχει σε αυτόν. Επίσης με υπέρηχους γίνεται ο έλεγχος ορισμένων τραυματικών αλλοιώσεων στον εγκέφαλο, διαφόρων καρδιακών παθήσεων, διαγιγνώσκεται το φύλο και γενικά ελέγχεται η πορεία αναπτύξεως του εμβρύου κατά την κύηση κλπ.

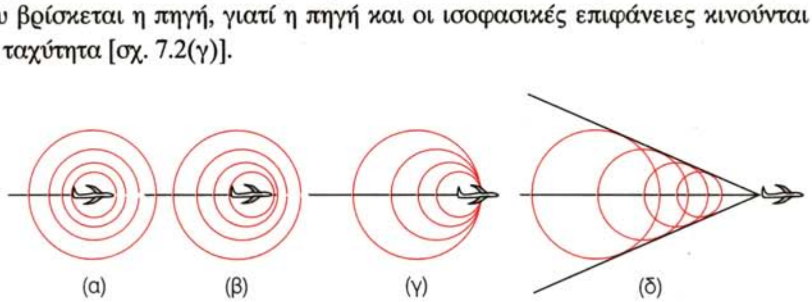
7.2 Υπερηχητικές ταχύτητες.

Υπερηχητικές ταχύτητες ονομάζονται οι ταχύτητες που είναι μεγαλύτερες από την ταχύτητα του ήχου στον αέρα (340 m/s).

Όταν μία ακίνητη πηγή εκπέμπει κύματα μέσα σε ομογενές και ισότροπο μέσο, π.χ. πηγή ήχων στον αέρα, τα κύματα θα είναι σφαιρικά και τα μέτωπα κύματος (ισοφασικές επιφάνειες) συγκεντρικές σφαίρες [σχ. 7.2(α)].

Αν όμως η πηγή αρχίσει να κινείται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου, τα σφαιρικά κύματα δεν θα έχουν πια το ίδιο κέντρο. Θα παρατηρείται δηλαδή πύκνωση των μετωπικών επιφανειών κατά τη φορά που κινείται η πηγή [σχ. 7.2(β)].

Ας θεωρήσομε τώρα ότι η πηγή κινείται με ταχύτητα ακριβώς ίση με την ταχύτητα του ήχου. Τότε, οι ισοφασικές επιφάνειες θα πρέπει να εφάπτονται όλες με τη θέση όπου βρίσκεται η πηγή, γιατί η πηγή και οι ισοφασικές επιφάνειες κινούνται με την ίδια ταχύτητα [σχ. 7.2(γ)].



Σχ. 7.2.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξηθεί πάρα πολύ η πίεση του αέρα (επομένως και η πυκνότητά του) ακριβώς μπροστά από την πηγή. Έτσι η πηγή θα κινείται συνέχεια σε περιοχή υψηλής πιέσεως. Η περιοχή αυτή ονομάζεται ***κύμα κρούσεως*** ή ***κρουστικό κύμα.***

Για να κινηθεί λοιπόν ένα σώμα, π.χ. ένα αεροπλάνο, με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου, πρέπει να υπερνικήσει μία πρόσθετη αντίσταση που οφείλεται ακριβώς στην αυξημένη πίεση.

Σημείωση:

Η μεγάλη δυσκολία για την πορεία του αεροπλάνου παρουσιάζεται όταν η ταχύτητά του έχει τιμή παραπλήσια της ταχύτητας του ήχου. Τότε το κύμα κρούσεως εμφανίζεται σαν ένα τείχος το οποίο πρόκειται το αεροπλάνο να διαπεράσει (φράγμα του ήχου).

Τέλος, αν η ταχύτητα του αεροπλάνου ξεπεράσει την ταχύτητα του ήχου [σχ. 7.2(δ)], τότε τα ηχητικά κύματα μένουν πίσω από αυτό. Το κρουστικό κύμα τώρα θα είναι μία κωνική επιφάνεια με κορυφή το αεροπλάνο και θα ασκεί μία ανασταλτική δράση στην κίνηση του αεροπλάνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΑΝΑΚΛΑΣΗ – ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΗΧΟΥ – ΗΧΩ – ΜΕΤΗΧΗΣΗ – ΖΩΝΕΣ ΣΙΓΗΣ

8.1 Βοηθητικές γνώσεις.

8.1.1 Ανάκλαση και διάθλαση των κυμάτων.

Έστω ότι ένα κύμα το οποίο διαδίδεται εντός του μέσου Ι προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια ΑΒ (σχ. 8.1) η οποία διαχωρίζει το μέσο Ι από άλλο διαφορετικό μέσο ΙΙ [το κύμα πορεύεται με διαφορετική ταχύτητα στα δύο μέσα ($\upsilon_1 \neq \upsilon_2$)].

Τότε το προσπίπτον κύμα υφίσταται δύο μεταβολές:

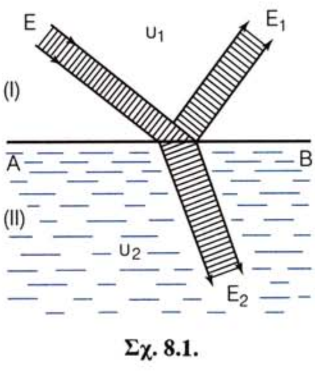
1) Ένα μέρος του κύματος επιστρέφει στο μέσο Ι και διαδίδεται σε αυτό κατά διεύθυνση διάφορη της αρχικής (δηλ. όπως λέμε ανακλάται).

2) Το υπόλοιπο μέρος του κύματος που προσέπεσε στη διαχωριστική επιφάνεια ΑΒ εισχωρεί στο μέσο ΙΙ, εντός του οποίου διαδίδεται κατά διεύθυνση διάφορη της αρχικής (δηλ. όπως λέμε διαθλάται).

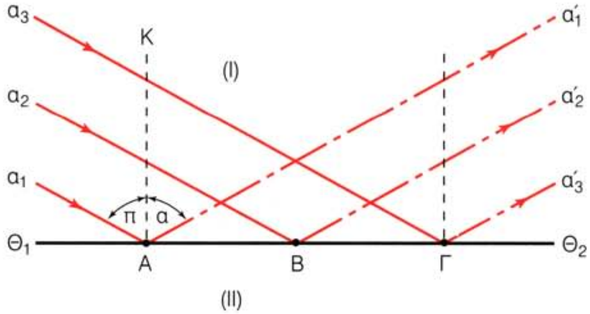
Με άλλα λόγια, όταν το κύμα προσπίπτει στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια ΑΒ, τότε γενικά υφίσταται δύο μεταβολές:

1) Ένα τμήμα E_1 της όλης ενέργειάς του (Ε) επιστρέφει στο μέσο Ι κατά διεύθυνση διάφορη της αρχικής (δηλ. όπως λέμε ανακλάται).

2) Το υπόλοιπο τμήμα (E_2) της όλης ενέργειάς του (Ε) εισχωρεί στο μέσο ΙΙ, εντός του οποίου διαδίδεται κατά διεύθυνση διάφορη της αρχικής (δηλ. όπως λέμε διαθλάται).



Σχ. 8.1.



Σχ. 8.2α.

8.2 Ανάκλαση ήχου (ηχητικού κύματος).

Οι $α_1$, $α_2$, $α_3$ έστω ότι είναι ακτίνες ενός ηχητικού κύματος, το οποίο πορεύεται στο μέσο Ι (σχ. 8.2α). Γενικά, όταν αυτές προσπέσουν σε επιφάνεια $θ_1θ_2$ η οποία διαχωρίζει το μέσο Ι από ένα άλλο μέσο ΙΙ, τότε οι διευθύνσεις τους αλλάζουν και οι νέες τους διευθύνσεις $α_1'$, $α_2'$, $α_3'$, στο ίδιο μέσο (Ι) είναι καθορισμένες. Το φαινόμενο ονομάζεται ***ανάκλαση του ήχου.***

Η γωνία $\widehat{π}$ που σχηματίζεται από την προσπίπτουσα ακτίνα $α_1$Α και την κάθετη ΑΚ στο σημείο Α της $θ_1θ_2$ ονομάζεται γωνία προσπτώσεως.

Η γωνία $\widehat{α}$ που σχηματίζεται από την ίδια ευθεία ΑΚ και από την ανακλώμενη ακτίνα Α$α_1'$, ονομάζεται ***γωνία ανακλάσεως***.

Το επίπεδο το οποίο ορίζεται από τις $α_1$Α και ΑΚ ονομάζεται ***επίπεδο προσπτώσεως.***

8.2.1 Νόμοι της ανακλάσεως.

1) Η προσπίπτουσα $α_1$Α και η ανακλώμενη Α$α_1'$ακτίνα βρίσκονται στο αυτό επίπεδο με την κάθετη ΑΚ στην ανακλώσα επιφάνεια $θ_1θ_2$ στο σημείο προσπτώσεως (Α).

2) Η γωνία προσπτώσεως είναι ίση με τη γωνία ανακλάσεως.

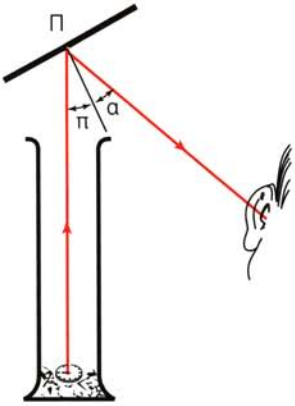
$$\boxed{\widehat{π} = \widehat{α}}$$

Σημείωση:

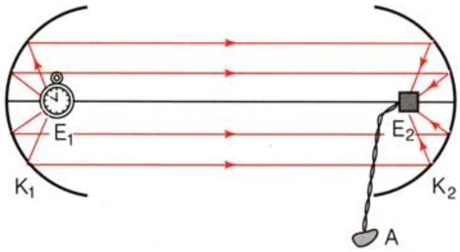
Γενικά, αν η διαχωριστική επιφάνεια των δύο ελαστικών μέσων είναι καμπύλη, τότε το φαινόμενο της ανακλάσεως επιτελείται σαν το κύμα να προσέπιπτε επί της επίπεδης επιφάνειας, η οποία εφάπτεται της διαχωριστικής καμπύλης επιφάνειας στο σημείο προσπτώσεως.

Πειράματα.

Στον πυθμένα κυλινδρικού δοχείου τοποθετούμε λίγο βαμβάκι και επάνω σε αυτό ένα ρολόι χεριού (σχ. 8.2β). Αν στο στόμιο του δοχείου φέρομε μία επίπεδη πλάκα Π ακούμε ευκρινώς τους κτύπους του ρολογιού, μόνο αν φέ-



Σχ. 8.2β.



Σχ. 8.2γ.

ρομε το αυτί μας σε ορισμένη θέση και, συγκεκριμένα, σε εκείνη, όπου η γωνία ανακλάσεως $\hat{\alpha}$ είναι ίση με τη γωνία προσπτώσεως $\hat{\pi}$.

Παίρνομε δύο κάτοπτρα K_1 και K_2 με κοινό κύριο άξονα και ακουστική συσκευή Α (σχ. 8.2γ).

Στην κύρια εστία E_1 του κατόπτρου K_1 τοποθετούμε ένα ρολόι. Τότε διαπιστώνομε ότι μόνο στην περιοχή της κύριας εστίας E_2 του άλλου κατόπτρου K_2 ακούγονται ευκρινώς οι κτύποι του ρολογιού.

8.3 Διάθλαση ήχου (ηχητικού κύματος).

Διάθλαση ηχητικού κύματος (ήχου) ονομάζεται το φαινόμενο εκείνο, κατά το οποίο, όταν αυτό προσπίπτει πλάγια σε επιφάνεια η οποία διαχωρίζει δύο μέσα (1 και 2), τότε αυτό εισέρχεται εντός του δεύτερου μέσου ($1 \rightarrow 2$) και ταυτόχρονα αλλάζει διεύθυνση [σχ. 8.3α(α)].

Παρατηρήσεις:

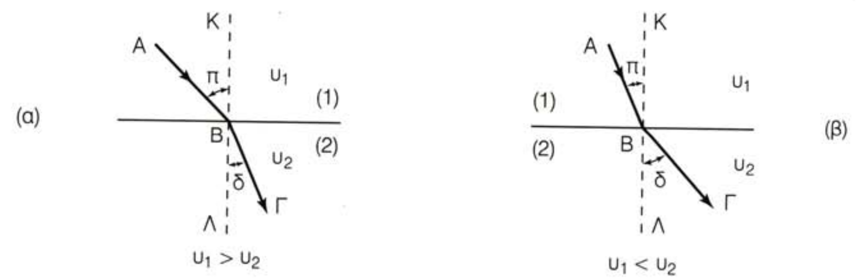
1) Διάθλαση του ήχου γίνεται μόνο όταν οι ταχύτητές του στα δύο μέσα είναι διαφορετικές ($\upsilon_1 \neq \upsilon_2$).

2) Μία ακτίνα ηχητικού κύματος όπως είναι η ΑΒ έστω ότι διαθλάται κατά τη ΒΓ. Η ΒΓ μπορεί να πλησιάζει την κάθετη ΚΛ στο σημείο προσπτώσεως Β [σχ. 8.3α(α)] ή να απομακρύνεται [σχ. 8.3α(β)]. Η γωνία $\widehat{AB K} = \hat{\pi}$ καλείται γωνία προσπτώσεως, ενώ η γωνία $\widehat{\Lambda B \Gamma} = \delta$ καλείται γωνία διαθλάσεως.

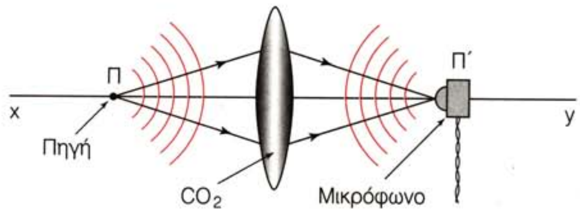
8.3.1 Νόμοι της διαθλάσεως.

1) Η προσπίπτουσα ακτίνα ΑΒ και η διαθλώμενη ΒΓ κείνται στο ίδιο επίπεδο με την κάθετη ΚΒΛ στη διαχωριστική (θλαστική) επιφάνεια.

2) Ο λόγος του ημιτόνου της γωνίας προσπτώσεως προς το ημίτονο της γωνίας διαθλάσεως είναι σταθερός και ίσος με το λόγο της ταχύτητας υ_1 διαδόσεως του κύματος στο πρώτο μέσο προς την ταχύτητα υ_2 διαδόσεως αυτού στο δεύτερο μέσο. Δηλαδή:



Σχ. 8.3α.



Σχ. 8.3β.

$$\boxed{\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}} \qquad (1)$$

Ο λόγος $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=n_2^1$ (2) καλείται σχετικός δείκτης διαθλάσεως του δεύτερου μέσου ως προς το πρώτο, δηλαδή του μέσου στο οποίο μεταβαίνει το κύμα ως προς το μέσο από το οποίο προέρχεται.

Από τις (1 και (2) προκύπτει:

$$\boxed{\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=n_2^1}$$

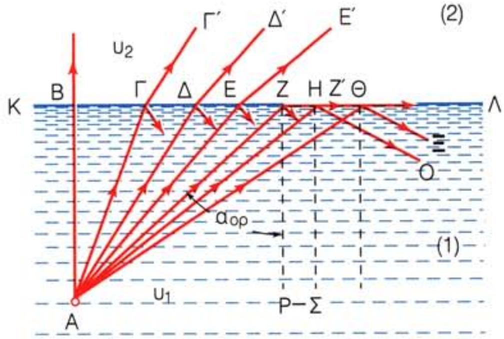
Προσοχή:

Όταν $\upsilon_1 > \upsilon_2$, τότε $\pi > \delta$ [σχ. 8.3α(α)] και η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει προς την κάθετη. Αντίθετα, όταν $\upsilon_1 < \upsilon_2$, τότε $\pi < \delta$ [σχ. 8.3α (β)] και η διαθλώμενη ακτίνα απομακρύνεται της κάθετης.

Πείραμα:

Τη διάθλαση του ήχου μπορούμε να τη διαπιστώσομε και με το εξής πείραμα:

Ειδικός σάκος από ελαστική μεμβράνη που έχει διαμορφωθεί σε σχήμα συγκλίνοντος φακού περιέχει διοξείδιο του άνθρακα (σχ. 8.3β). Η ταχύτητα του ήχου εντός του διοξειδίου του άνθρακα είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου εντός του αέρα. Σε ένα σημείο του άξονα συμμετρίας xy του φακού τοποθετείται ηχητική πηγή Π, η οποία έχει μικρές διαστάσεις. Από το άλλο μέρος του φακού μετακινούμε κατά μήκος του άξονα xy ένα μικρόφωνο. Παρατηρούμε ότι οι διερχόμενες μέσα από το φακό ηχητικές ακτίνες



Σχ. 8.4.

αφού υποστούν διάθλαση κατά την είσοδο και έξοδό τους από το φακό, συγκεντρώνονται γύρω από ένα σημείο Π΄ του άξονα xy.

8.4 Ορική γωνία. Ολική ανάκλαση ήχου.

Οι ηχητικές ακτίνες που προέρχονται από την ηχητική πηγή Α (σχ. 8.4) προσπίπτουν με διαφορετικές διευθύνσεις επάνω στη διαχωριστική επιφάνεια ΚΛ δύο διαφορετικών μέσων (1 και 2).

Αν η ταχύτητα $υ_1$ του ήχου στο μέσο 1 είναι μικρότερη από τη ταχύτητα $υ_2$ στο μέσο 2 ($υ_1<υ_2$), τότε η ακτίνα που κάθε φορά διαθλάται απομακρύνεται από την κάθετη (σχ. 8.4). ΄Ετσι όταν μεγαλώνει η γωνία της προσπτώσεως μεγαλώνει και η γωνία της διαθλάσεως, με αποτέλεσμα οι ακτίνες ΓΓ΄, ΔΔ΄, ΕΕ΄ κλπ. να πλησιάζουν όλο και περισσότερο τη διαχωρίζουσα επιφάνεια ΚΛ. Τελικά η διαθλώμενη ΖΖ΄ της προσπίπτουσας ΑΖ θα έχει διεύθυνση παράλληλη με τη διαχωρίζουσα επιφάνεια ΚΛ. Σε αυτήν την περίπτωση η γωνία προσπτώσεως ΑΖΡ είναι αυτή στην οποία αντιστοιχεί γωνία διαθλάσεως 90^o και την ονομάζομε ***ορική γωνία*** για τα δύο μέσα.

΄Εχομε, λοιπόν, τον ακόλουθο ορισμό:

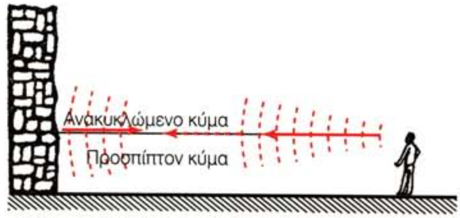
΄Οταν ο ήχος διαθλάται και περνά από ένα μέσο σε ένα άλλο, στο οποίο έχει μεγαλύτερη ταχύτητα, η γωνία της προσπτώσεως, που σε αυτήν αντιστοιχεί γωνία διαθλάσεως 90^o, λέγεται ορική γωνία για τα δύο αυτά μέσα.

Για τις ηχητικές ακτίνες ΑΗ, ΑΘ κλπ. η γωνία προσπτώσεως είναι μεγαλύτερη από την ορική. Οι ακτίνες αυτές υφίστανται μόνο ανάκλαση και ξαναγυρίζουν στο μέσο 1. Το φαινόμενο αυτό το ονομάζομε ***ολική ανάκλαση*** του ήχου, μπορεί δε να συμβεί μόνο όταν οι ηχητικές ακτίνες πορεύονται από ένα μέσο σε ένα άλλο, στο οποίο ο ήχος έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από εκείνη που είχε στο πρώτο μέσο.

8.5 Ηχώ – Μετήχηση.

8.5.1 Ηχώ.

Ο χρόνος που διαρκεί (διατηρείται) στο αυτί του ανθρώπου το αίσθημα α-



Σχ. 8.5.

πό έναν ήχο είναι 0,1 s μετά την παύση του ηχητικού ερεθίσματος που το προκαλεί (ακουστικό μεταίσθημα). Επομένως, αν φθάσουν στο αυτί δύο ήχοι, ο ένας κατόπιν του άλλου με διαφορά χρόνου αφίξεως μικρότερη του 0,1 s, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ένα μόνο ήχο και όχι δύο. Με άλλα λόγια, ο χρόνος 0,1 s είναι ο μικρότερος δυνατός ο οποίος πρέπει να μεσολαβήσει μεταξύ δύο ηχητικών εντυπώσεων, για να καταγραφούν αυτές από το αυτί ως ξεχωριστές.

Ένας άνθρωπος παράγει ήχο μικρής διάρκειας που προσπίπτει ***κάθετα*** επάνω σε εμπόδιο μεγάλων διαστάσεων (τοίχο, βράχο κλπ.) το οποίο βρίσκεται μπροστά από αυτόν (σχ. 8.5). Τα ηχητικά κύματα που παράγονται από τον άνθρωπο όταν προσπέσουν στο εμπόδιο ανακλώνται κατά τη διεύθυνση προσπτώσεως και επιστρέφουν σε αυτόν.

Αν η απόσταση του ανθρώπου από το εμπόδιο είναι l, τότε η διαδρομή την οποία εκτελεί ο ήχος από τον άνθρωπο στο εμπόδιο και στη συνέχεια, αφού ανακλασθεί στο εμπόδιο, ξανά στον άνθρωπο είναι $2\,l$. Αν η διαδρομή αυτή ($2\,l$) διαρκεί τουλάχιστον 0,1 s, ο άνθρωπος ακούει ξεχωριστά τους δύο ήχους (τον απ' ευθείας και τον εξ ανακλάσεως). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***ηχώ***.

Δηλαδή ηχώ ονομάζεται το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο ακούμε έναν απ' ευθείας ήχο χωριστά από τον εξ ανακλάσεώς του, αν ο δεύτερος (ο εξ ανακλάσεως) φθάνει στο αυτί αργότερα από τον πρώτο τουλάχιστον κατά 0,1 s.

Αν λάβομε υπόψη μας ότι ο ήχος, σε συνηθισμένες συνθήκες, μέσα στον αέρα διατρέχει διάστημα 340 m σε ένα δευτερόλεπτο, η ηχώ είναι δυνατή αν το l είναι μεγαλύτερο των 17 m.

Πράγματι: $2\,l = \upsilon \cdot t,\ l = \dfrac{\upsilon \cdot t}{2} = \dfrac{340\ m \cdot s^{-1} \cdot 0{,}1\,s}{2} = 17\ m$

Σημείωση:

Σε μερικές περιπτώσεις όπου ο ήχος ανακλάται διαδοχικά σε διάφορα εμπόδια, τα οποία βρίσκονται σε ***ορισμένες*** αποστάσεις από τον παρατηρητή (την πηγή), τότε αυτός ακούει τον ίδιο ήχο πολλές φορές. Το φαινόμενο αυτό καλείται ***πολλαπλή ηχώ***.

8.5.2 Μετήχηση.

Αν η απόσταση του παρατηρητή από το εμπόδιο είναι μικρότερη από 17 m, τότε ο ανακλασθείς ήχος φθάνει στον παρατηρητή πριν τελειώσει η εντύπωση του απ' ευθείας ήχου. Έτσι ο ανακλασθείς ήχος προκαλεί παράταση και ενίσχυση του απ' ευθείας ήχου. Το φαινόμενο αυτό καλείται ***μετήχηση***.

Ένας ακροατής που βρίσκεται μέσα σε μία μεγάλη αίθουσα δέχεται τον ήχο, τον οποίο παράγει μία ηχητική πηγή κατά τους εξής δύο τρόπους: 1) Με απ' ευθείας διάδοση του ήχου και 2) με ανάκλαση τού απ' ευθείας διαδιδόμενου ήχου επάνω στην οροφή, στους τοίχους κλπ.

Για να έχει η αίθουσα καλή ακουστική πρέπει ο ανακλασθείς ήχος, όταν φθάνει στον ακροατή, να ενισχύει τον απ' ευθείας ήχο και να μην συμπίπτει με τον επόμενο ήχο. Δηλαδή η διάρκεια της μετηχήσεως πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

Οι αίθουσες για να έχουν καλή ακουστική διαμορφώνονται έτσι ώστε να αποφεύγονται οι πολλές ανακλάσεις των ήχων των πηγών (περιορισμός της διάρκειας της μετηχήσεώς τους) και επί πλέον οι ανακλώμενοι ήχοι να φθάνουν με ίση ένταση σε όλες τις θέσεις των ακροατών. Τέτοιες αίθουσες είναι οι παραβολικές στις οποίες οι μουσικοί, οι ηθοποιοί κλπ. βρίσκονται στην περιοχή της εστίας τους.

Στις συνηθισμένες αίθουσες καλής ακουστικής οι εσωτερικές επιφάνειές τους είναι καλυμμένες με υλικά τα οποία απορροφούν σημαντικό μέρος των ήχων και έτσι αποφεύγονται οι ανακλάσεις τους, επομένως και οι μετηχήσεις. Τέτοια υλικά είναι πορώδη σώματα (όπως υφάσματα, τάπητες κ.ά.). Στους πόρους των πορώδων σωμάτων εγκλωβίζονται τα ηχητικά κύματα και η ενέργειά τους τελικά μετατρέπεται κυρίως σε εσωτερική ενέργεια (ή όπως λέμε στην πράξη σε θερμότητα).

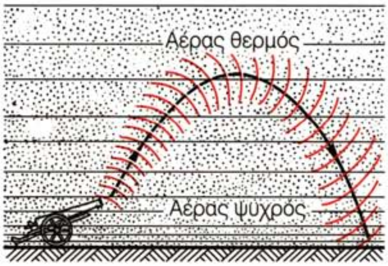
8.6 Ατμοσφαιρική διάθλαση του ήχου. Ζώνες σιγής.

Επειδή η ταχύτητα του ήχου σε ένα μέσο εξαρτάται από τη θερμοκρασία του, γι' αυτό, αν η θερμοκρασία του μέσου δεν είναι η ίδια σε όλη την έκτασή του, τότε ο ήχος διαδίδεται μέσα σε αυτό με διαφορετικές ταχύτητες. Επομένως, τα ηχητικά κύματα υφίστανται διάθλαση και όταν διαδίδονται σε ένα μέσο που δεν έχει την ίδια θερμοκρασία σε όλη την έκτασή του.

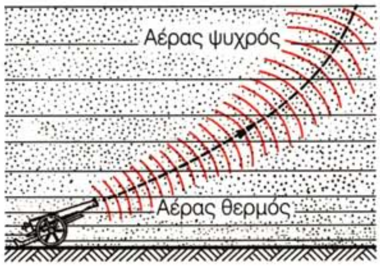
Η ατμόσφαιρα αποτελείται από στρώματα αέρα, τα οποία έχουν διαφορετική θερμοκρασία. Συνεπώς, ο ήχος έχει διαφορετικές ταχύτητες στα διάφορα στρώματα της ατμόσφαιρας. Επομένως, όταν ο ήχος διέρχεται από ένα στρώμα αέρα σε άλλο στρώμα που έχει διαφορετική θερμοκρασία, τότε διαθλάται.

Σε μερικές περιπτώσεις (κυρίως κατά τη νύκτα) τα στρώματα του αέρα που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια του εδάφους είναι ψυχρότερα από τα στρώματα που βρίσκονται επάνω από αυτά (όσο πιο ψηλά τόσο θερμότερα είναι).

Τότε μία ηχητική ακτίνα (σχ. 8.6α) που διευθύνεται πλάγια προς τα επάνω, εισέρχεται διαδοχικά από ψυχρότερα σε θερμότερα στρώματα αέρα, δηλαδή εισέρχεται σε στρώματα εντός των οποίων η ταχύτητα του ήχου γίνεται διαδοχικά μεγαλύτερη. Γι' αυτό σε κάθε διαδοχική διάθλασή της η ηχητική ακτίνα απομακρύνεται από την κάθετη και υφίσταται καμπύλωση. Η καμπύλωση της ηχητικής ακτίνας μπορεί να γίνει τόσο μεγάλη, ώστε να υποστεί ολική ανάκλαση σε ένα στρώμα αέρα, οπότε η ηχητική ακτίνα επανέρχεται στην επιφάνεια του εδάφους.



Σχ. 8.6α.



Σχ. 8.6β.

Στο φαινόμενο αυτό, της ολικής ανακλάσεως του ήχου στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, οφείλεται το γεγονός ότι σε μερικές περιπτώσεις ισχυρών εκρήξεων ο ήχος ακούγεται σε τόπους που βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση από την πηγή του, ενώ δεν ακούγεται σε άλλους τόπους που είναι σε πιο μικρή απόσταση και οι οποίοι λέμε ότι αποτελούν τις ***ζώνες σιγής***.

Σε μερικές περιπτώσεις (είναι και οι πιο συνηθισμένες) όπου τα στρώματα του αέρα τα οποία βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια τους εδάφους είναι θερμότερα από τα στρώματα που βρίσκονται επάνω από αυτά (όσο πιο ψηλά βρίσκονται τόσο πιο ψυχρότερα είναι), τότε συμβαίνουν τα εξής:

Μία ηχητική ακτίνα (σχ. 8.6β) η οποία διευθύνεται πλάγια προς τα επάνω εισέρχεται διαδοχικά από θερμότερα σε ψυχρότερα στρώματα αέρα, δηλαδή εισέρχεται σε στρώματα εντός των οποίων η ταχύτητα του ήχου γίνεται διαδοχικά μικρότερη.

Γι' αυτό σε κάθε διαδοχική διάθλασή της η ηχητική ακτίνα πλησιάζει στην κάθετη και επομένως υφίσταται καμπύλωση προς τα επάνω. Έτσι ένας ισχυρός ήχος μπορεί να μην γίνεται ακουστός σε σχετικά μικρές αποστάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΗΧΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ – ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

9.1 Συμβολή ηχητικών κυμάτων.

Όταν στο σημείο Μ (σχ. 9.1α) ενός ελαστικού μέσου φθάνουν συγχρόνως δύο ηχητικά κύματα, τα οποία προέρχονται από ***δύο όμοιες*** ηχητικές πηγές Α και Β, τότε το σημείο Μ εκτελεί μία συγκεκριμένη ταλάντωση.

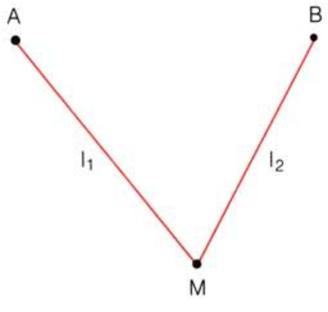
Η ταλάντωση αυτή (του Μ) προκύπτει από τη σύνθεση (διανυσματική άθροιση) δύο ταλαντώσεων, δηλαδή είναι η συνισταμένη δύο ταλαντώσεων:

1) Της ταλαντώσεως την οποία θα προκαλούσε στο Μ η άφιξη σε αυτό του ηχητικού κύματος που προέρχεται από την πηγή Α αν έφθανε μόνο του αυτό στο Μ.

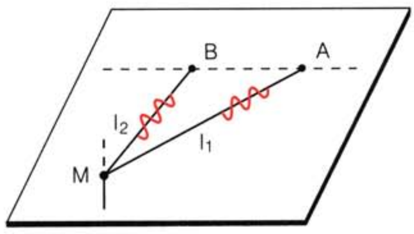
2) Της ταλαντώσεως την οποία θα προκαλούσε στο Μ η άφιξη σε αυτό του ηχητικού κύματος που προέρχεται από την πηγή Β, αν έφθανε μόνο του αυτό στο Μ.

Η σύνθεση των ταλαντώσεων (σχ. 9.1β) στις οποίες υποβάλλονται τα διάφορα σημεία ενός ελαστικού μέσου μέσα στο οποίο διαδίδονται ηχητικά κύματα ονομάζεται ***συμβολή των ηχητικών κυμάτων***. Τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από τη συμβολή των ηχητικών κυμάτων ονομάζονται ***φαινόμενα συμβολής των ήχων.***

Όταν δύο ταλαντώσεις που φθάνουν συγχρόνως σε ένα σημείο ελαστικού



Σχ. 9.1α.



Σχ. 9.1β.

μέσου έχουν την ίδια διεύθυνση, δηλαδή είναι συγγραμμικές, ***τότε η διανυσματική τους άθροιση ανάγεται σε αλγεβρική.***

Το αποτέλεσμα της συμβολής των ηχητικών κυμάτων που παράγονται από τις πηγές Α και Β στο σημείο Μ εξαρτάται από τη διαφορά φάσεων με τις οποίες θα φτάσουν τα κύματα αυτά στο Μ. Αν υποθέσομε ότι τα ηχητικά κύματα όταν ξεκίνησαν από το Α και Β είχαν την ίδια φάση, η διαφορά φάσεων που θα έχουν στο Μ θα οφείλεται στη διαφορά δρόμου ΑΜ – ΒΜ = $l_1 - l_2$ (σχ. 9.1α και 9.1β).

Συγκεκριμένα:

1) Όσον αφορά σημεία, για τα οποία η διαφορά δρόμου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος των δύο ηχητικών κυμάτων (αυτά έχουν το ίδιο μήκος), συμβαίνει το ηχητικό κύμα που προκύπτει από τη συμβολή τους να έχει τη μέγιστη ενίσχυση (το πλάτος του να είναι ίσο με το άθροισμα του πλάτους αυτών):

$$l_1 - l_2 = 2\kappa \cdot \frac{\lambda}{2} (\kappa = 0,1,2,3,....) \text{ (μέγιστη ενίσχυση)}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες της ταλαντώσεως του Μ είναι ομόρροπες, εφ' όσον τα ηχητικά κύματα φθάνουν στο Μ με διαφορά των φάσεών τους ίση με $2\kappa\pi$.

Σημείωση:

Αν επί πλέον συμβαίνει τα δύο κύματα (οι ταλαντώσεις) να έχουν ίσα πλάτη, τότε το ηχητικό κύμα που προκύπτει από τη συμβολή τους έχει πλάτος το διπλάσιο του πλάτους του ενός κύματος.

2) Όσον αφορά σημεία, για τα οποία η διαφορά δρόμου είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος των δύο ηχητικών κυμάτων, συμβαίνει το ηχητικό κύμα που προκύπτει από τη συμβολή τους να έχει τη μέγιστη εξασθένιση (το πλάτος του να είναι ίσο με τη διαφορά του πλάτους αυτών):

$$l_1 - l_2 = (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ (μέγιστη εξασθένιση)}$$

Τούτο ισχύει γιατί στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες της ταλαντώσεως του Μ είναι αντίρροπες, εφ' όσον τα κύματα φθάνουν στο Μ με διαφορά των φάσεών τους ίση με $2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

Σημείωση:

Αν επί πλέον συμβαίνει τα δύο κύματα (οι ταλαντώσεις) να έχουν ίσα πλάτη, τότε το αποτέλεσμα της συμβολής είναι το Μ να ***μην*** ταλαντώνεται (δηλαδή στο Μ το ένα κύμα ***αναιρεί*** το άλλο–πλήρης απόσβεση των ήχων).

3) Στα άλλα σημεία του υλικού μέσου συμβαίνει ενίσχυση ή εξασθένιση

του ήχου ανάλογα με τις τιμές της διαφοράς l_1–l_2 των αποστάσεών τους από τις πηγές Α και Β.

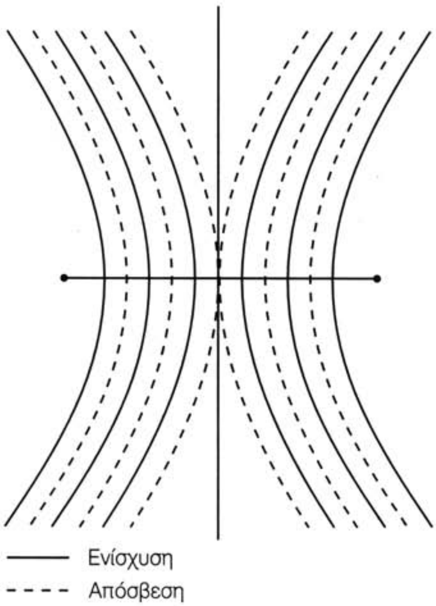
Παρατήρηση:

Είναι φανερό ότι, εκτός από τα σημεία στα οποία έχομε πλήρη ενίσχυση ή πλήρη απόσβεση, θα υπάρχουν και άλλα σημεία στα οποία δεν θα έχομε ούτε πλήρη απόσβεση ούτε πλήρη ενίσχυση, αλλά κάτι ενδιάμεσο.

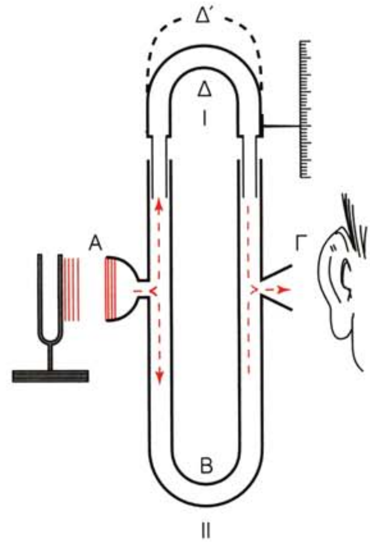
Τα σημεία στα οποία παρατηρείται (συμβαίνει) πλήρης απόσβεση και πλήρης ενίσχυση παρέχουν εικόνα ισοσκελών υπερβολών (σχ. 9.1γ). Οι υπερβολές αυτές λέγονται ***κροσσοί συμβολής***. Στα σημεία της μεσοκάθετης του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ παρατηρείται πλήρης ενίσχυση.

Φαινόμενα συμβολής ηχητικών κυμάτων μπορούν σχετικά εύκολα να παραχθούν με τη βοήθεια του σωλήνα **König** (σχ. 9.1δ). Ο σωλήνας αυτός αποτελείται από δύο σωλήνες σε σχήμα U. Ο ένας από τους δύο μπορεί να μπαίνει μέσα στον άλλο κατά επιθυμητό μήκος. Μπροστά στο άνοιγμα Α παράγονται ηχητικά κύματα (ήχος), π.χ. από διαπασών.

Τα κύματα αυτά φθάνουν στον παρατηρητή Γ από δύο δρόμους, από τον ΑΔΓ και από τον ΑΒΓ, συμβάλλουν δε στο σημείο Γ. Επειδή τα κύματα αυτά παράγονται από την ίδια πηγή, μπορούμε να θεωρήσομε ότι προέρχονται από δυο σύμφωνες πηγές οι οποίες βρίσκονται στο Α, (δύο πηγές Π_1 και Π_2 ονομάζονται σύμφωνες όταν παράγουν κύματα με την ίδια συχνότητα, το ίδιο πλάτος και την ίδια φάση).



Σχ. 9.1γ.



Σχ. 9.1δ.

Μετακινώντας το σωλήνα Δ διαπιστώνομε τα εξής:

1) Όταν η διαφορά των δύο δρόμων ΑΔΓ και ΑΒΓ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, τότε το αποτέλεσμα της συμβολής στο Γ είναι η μέγιστη ενίσχυση του ήχου ($\alpha_\Sigma = 2 \cdot \alpha$, όπου α το πλάτος του ήχου που παράγεται από το διαπασών στο σημείο Α, και α_Σ το πλάτος του ήχου που προκύπτει από τη συμβολή στο σημείο Γ).

2) Όταν η διαφορά των δρόμων ΑΔΓ και ΑΒΓ είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος τότε το αποτέλεσμα της συμβολής στο Γ είναι η απόσβεση του ήχου.

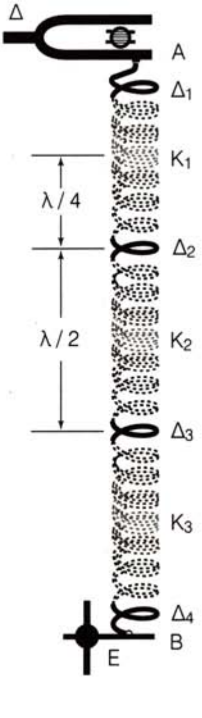
Σημείωση:

Το μήκος της διαδρομής ΑΔΓ στο σωλήνα König είναι μεταβλητό. Επομένως μπορούμε να πετύχομε πολλές διαφορές δρόμων ΑΒΓ–ΑΔΓ. Σε κάθε διαφορά δρόμων διαπιστώνομε στο Γ ήχο από συμβολή, του οποίου το πλάτος έχει μία τιμή μεταξύ 0-2α.

9.2 Στάσιμα κύματα.

9.2.1 Γενικές γνώσεις.

Η μία άκρη Α σπειροειδούς ελατηρίου (σχ. 9.2α) στερεώνεται σε ένα παλλόμενο διαπασών Δ, ενώ η άλλη άκρη του Β είναι στερεωμένη σε ανένδοτο εμπόδιο Ε.



Σχ. 9.2α.

Όταν το διαπασών εκτελεί αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις, τότε στο ελατήριο διαδίδονται διαμήκη κύματα που προχωρούν από το Α στο Β. Στο ανένδοτο εμπόδιο Ε τα κύματα αυτά ανακλώνται και διαδίδονται από την άκρη Β προς την άκρη Α του ελατηρίου. Έτσι σε κάθε σπείρα του ελατηρίου φθάνουν συνεχώς τα προσπίπτοντα και τα ανακλώμενα κύματα όπου και συμβάλλουν. Δηλαδή κάθε μία σπείρα υποβάλλεται συγχρόνως σε δύο ταλαντώσεις της ίδιας διευθύνσεως (του κύματος), του ίδιου πλάτους, της ίδιας συχνότητας, του ίδιου μήκους αλλά αντίθετης φοράς.

Αν εξετάσομε τα αποτελέσματα της συμβολής των πιο πάνω κυμάτων σε κάθε σπείρα του ελατηρίου, θα διαπιστώσομε τα εξής:

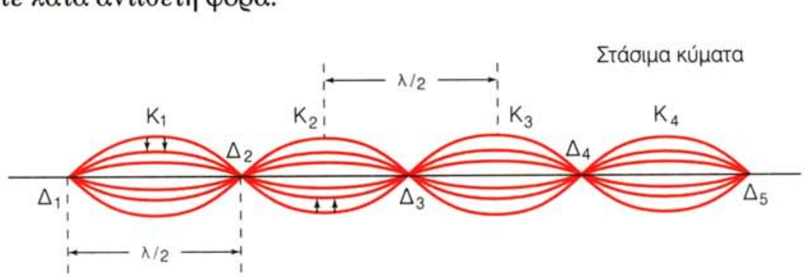
1) Ορισμένες σπείρες του ελατηρίου (Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4) παραμένουν συνέχεια τελείως ακίνητες, δηλαδή στις σπείρες αυτές διαπιστώνομε δεσμούς κινήσεως. Με άλλα λόγια διαπιστώνομε πλήρη και συνεχή ακινησία των σπειρών αυτών (Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4). Τούτο συμβαίνει γιατί σε κάθε μία από τις σπείρες αυτές (Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4) οι ταλαντώσεις που έρχονται από το Α και αυτές που έρχονται από το Β βρίσκονται σε αντίθεση φάσεως και συμβάλλουν (αυτές που έρχονται από το Α και αυτές που έρχονται από το Β έχουν ίσα πλάτη, ίσες συχνότητες και αντίθετες φορές).

2) Ορισμένες σπείρες του ελατηρίου (K_1, K_2, K_3) ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, δηλαδή στις σπείρες αυτές διαπιστώνομε κοιλίες κινήσεως. Αυτό συμβαίνει γιατί σε κάθε μία από τις σπείρες αυτές (K_1, K_2, K_3) οι ταλαντώσεις που έρχονται από το Α και αυτές που έρχονται από το Β βρίσκονται σε συμφωνία φάσεως και συμβάλλουν (αυτές που έρχονται από το Α και αυτές που έρχονται από το Β έχουν ίσα πλάτη, ίσες συχνότητες και ίδιες φορές).

3) Εκτός των σπειρών, οι οποίες αποτελούν τους δεσμούς, όλες οι άλλες σπείρες του ελατηρίου εκτελούν διαμήκεις αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας. Το πλάτος των ταλαντώσεων των σπειρών συνεχώς αυξάνει όσο οι σπείρες βρίσκονται πλησιέστερα στις κοιλίες, όπου το πλάτος είναι μέγιστο.

4) Οι σπείρες που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών κινούνται πάντοτε κατά την ίδια φορά (σχ. 9.2β).

5) Οι σπείρες που βρίσκονται δεξιά και αριστερά ενός δεσμού κινούνται πάντοτε κατά αντίθετη φορά.



Σχ. 9.2β.

6) Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή δύο διαδοχικών κοιλιών είναι σταθερή και ίση με το μισό μήκος κύματος (σχ. 9.2β).

7) Στις θέσεις K_1, K_2, K_3 όπου υπάρχουν κοιλίες κινήσεως των σπειρών, υπάρχουν δεσμοί της πυκνότητας των σπειρών. Δηλαδή γύρω και κοντά σε μία σπείρα που αποτελεί κοιλία κινήσεως η πυκνότητα των σπειρών παραμένει αμετάβλητη.

8) Στις θέσεις Δ_1, Δ_2, Δ_3 Δ_4 όπου υπάρχουν δεσμοί κινήσεως των σπειρών, υπάρχουν κοιλίες της πυκνότητας των σπειρών. Δηλαδή γύρω και κοντά σε κάθε σπείρα που αποτελεί δεσμό κινήσεως, η πυκνότητα των σπειρών μεταβάλλεται περιοδικώς με μέγιστο πλάτος και συχνότητα ίση με τη συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν.

Προσοχή:

1) Το σύνολο των ταλαντώσεων τις οποίες εκτελούν οι σπείρες του ελατηρίου του σχήματος 9.2α ονομάζεται ***στάσιμο διάμηκες κύμα.***

Γενικότερα, στάσιμο διάμηκες κύμα ονομάζομε το σύνολο των ταλαντώσεων των σωματιδίων ενός οποιουδήποτε ελαστικού μέσου, όταν αυτές έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά στοιχεία με τις ταλαντώσεις των σπειρών του ελατηρίου του σχήματος 9.2α, δηλαδή είναι της ίδιας μορφής και κατανομής στο ελαστικό μέσο με τις ταλαντώσεις των σπειρών του ελατηρίου του σχήματος.

2) Δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι το στάσιμο κύμα, είναι το αποτέλεσμα της συμβολής δύο ***ομοίων*** κυμάτων, τα οποία διαδίδονται ***κατά αντίθετες φορές***.

Παρατήρηση:

Όσα αναφέρομε στην παράγραφο αυτή για τα στάσιμα διαμήκη κύματα ισχύουν ανάλογα και για τα στάσιμα εγκάρσια κύματα.

9.2.2 Διαφορές στάσιμου και τρέχοντος κύματος.

1) Στο τρέχον κύμα έχομε μετάδοση ενέργειας από ένα στοιχειώδες σωμάτιο του μέσου διαδόσεως στο άλλο. Στο στάσιμο κύμα δεν έχομε μετάδοση ενέργειας.

Στο στάσιμο κύμα η ενέργεια που δίνει η πηγή παραγωγής του μοιράζεται στα διάφορα σημεία του μέσου. Στη συνέχεια κάθε σημείο διατηρεί κατά μέσο όρο την ενέργεια που απέκτησε.

2) Στο τρέχον κύμα δύο σημεία του μέσου διαδόσεως θα έχουν (γενικά) διαφορετική φάση. Στο στάσιμο κύμα δύο σημεία του μέσου ή θα έχουν την ίδια φάση ή θα έχουν αντίθετη φάση.

3) Στο τρέχον κύμα όλα τα σημεία του μέσου εκτελούν ταλάντωση με το ίδιο πλάτος. Στο στάσιμο κύμα το πλάτος της ταλαντώσεως των διαφόρων σημείων παίρνει τιμές από μηδέν μέχρι 2α (α: το πλάτος των κυμάτων που συμβάλλουν).

4) Στο τρέχον κύμα τα διάφορα σημεία του μέσου διαδόσεως διέρχονται (γενικά) από τη θέση ισορροπίας τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Στο

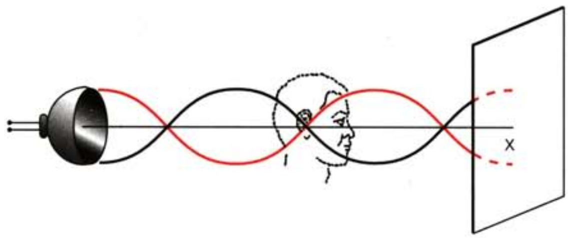
στάσιμο κύμα όλα τα σημεία του μέσου διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους.

9.2.3 Στάσιμα ηχητικά κύματα.

Προφανώς όσα έχομε αναφέρει για τα στάσιμα κύματα ισχύουν και για τα στάσιμα ηχητικά κύματα (διαμήκη και εγκάρσια). Στην περίπτωση διαδόσεως δύο ήχων της αυτής διευθύνσεως, της ίδιας συχνότητας, του ίδιου πλάτους αλλά αντίθετης φοράς δημιουργούνται στάσιμα ηχητικά κύματα εξ αιτίας της συμβολής τους.

Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσομε εύκολα με τη διάταξη του σχήματος 9.2γ.

Ο ήχος που παράγεται από το μεγάφωνο, όταν συναντήσει το στερεό τοίχωμα, ανακλάται. Το κύμα που έρχεται από το τοίχωμα (εξ ανακλάσεως) συμβάλλει με το κύμα που έρχεται από το μεγάφωνο και παράγονται στάσιμα κύματα. Όταν μετακινήσομε το αυτί μας κατά μήκος της ευθείας x, βρίσκομε ότι σε ορισμένα σημεία ο ήχος ακούγεται εντονότατος ενώ σε άλλα δεν ακούγεται καθόλου (απόσβεση).



Σχ. 9.2γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

10.1 Γενικές γνώσεις.

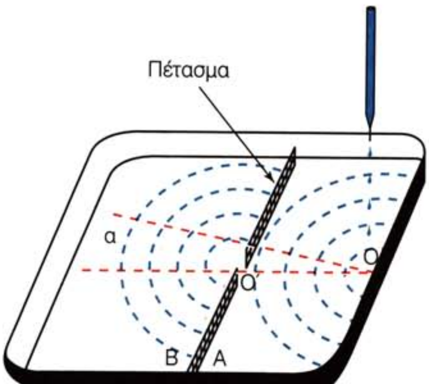
Μέσα σε μία λεκάνη που περιέχει νερό τοποθετούμε ένα πέτασμα με το οποίο απομονώνομε δύο περιοχές Α και Β (σχ. 10.1α). Το πέτασμα φέρει μία μικρή οπή Ο΄.

Στην περιοχή Α δημιουργούμε κύματα, για παράδειγμα με την πτώση μικρών σταγόνων νερού, τις οποίες ρίχνομε με σταθερό ρυθμό (συχνότητα). Το σημείο Ο, της πτώσεως των σταγόνων γίνεται κέντρο παραγωγής κυκλικών κυμάτων, τα οποία αρχίζουν να διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού (σχ. 10.1α).

Καθώς τα κύματα φθάνουν στην οπή Ο΄, θα περίμενε κάποιος να δει να εισδύουν διά της οπής στην περιοχή Β εκείνα μόνο τα κύματα που περιέχονται στο εσωτερικό της γωνίας α με κορυφή το σημείο Ο (σχ. 10.1α).

Το πείραμα όμως δείχνει ότι στη περιοχή Β διαδίδονται κυκλικά κύματα, τα οποία έχουν μήκος κύματος ίσο με το μήκος κύματος των κυμάτων που παράγονται στη περιοχή Α και τα οποία έχουν κέντρο το Ο΄.

Δηλαδή το πείραμα δείχνει ότι το κύμα που διαδίδεται στην περιοχή Α



Σχ. 10.1α.

διαδίδεται και σε όλη την περιοχή Β πίσω από το πέτασμα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***περίθλαση***.

Σημείωση:

Τα κύματα που έρχονται από την οπή Ο΄ τα ονομάζομε **περιθλώμενα**. Τα κύματα αυτά έχουν τις ιδιότητες που έχουν τα κύματα που εκπέμπονται από το Ο και υπακούουν στους ίδιους νόμους.

Προσοχή:

Το φαινόμενο της περιθλάσεως είναι εμφανές στις περιπτώσεις όπου οι οπές (ή σχισμές) έχουν εύρος (άνοιγμα) της τάξεως του μήκους κύματος των κυμάτων (και μικρότερο) που προσπίπτουν επάνω τους (ώστε να μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία). Αν οι διάμετροι των οπών είναι πολύ μεγαλύτερες του μήκους κύματος, οι οπές δεν μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία. Στις περιπτώσεις αυτές γίνονται περιθλάσεις, αλλά το τελικό αποτέλεσμα είναι το κύμα να ακολουθεί το νόμο της ευθύγραμμης διαδόσεως (σχ. 10.1β).

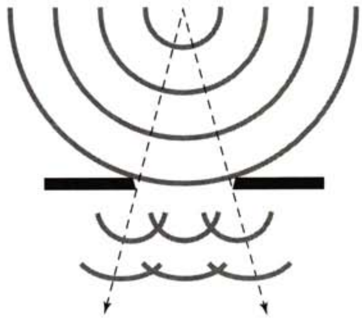
Παρατήρηση:

Το φαινόμενο της περιθλάσεως παρατηρείται και όταν τα κύματα προσπίπτουν σε αντικείμενα που οι διαστάσεις τους είναι μικρότερες του μήκους κύματος των κυμάτων αυτών. Δηλαδή όταν κύματα προσπίπτουν σε αντικείμενα που οι διαστάσεις τους είναι μικρότερες από το μήκος κύματος τους τότε τα κύματα αυτά διαδίδονται και πίσω από τα αντικείμενα αυτά.

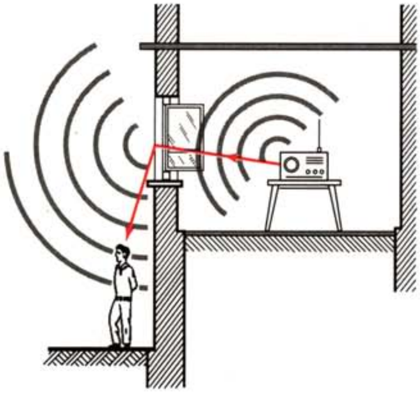
Όταν κύματα προσπίπτουν σε αντικείμενο που οι διαστάσεις του είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος των κυμάτων αυτών, τότε πίσω από το αντικείμενο σχηματίζεται σκιά.

Σημείωση:

Γενικά, όταν τα κύματα προσπίπτουν επάνω σε οπή ή αντικείμενο που έχει διαστάσεις πολύ μεγάλες σχετικά με το μήκος κύματος των κυμάτων αυτών, τότε πίσω από την οπή ή το αντικείμενο τα κύματα διαδίδονται ευθύγραμμα (δεν υφίστανται περίθλαση). Αντιθέτως, όταν οι διαστάσεις της οπής ή του αντικειμένου είναι της τάξεως του μήκους κύματος των κυμάτων, τότε αυτά



Σχ. 10.1β.



Σχ. 10.2.

περιθλώνται και πίσω από την οπή ή το αντικείμενο παρατηρούνται αποκλίσεις από την ευθύγραμμη διάδοση των κυμάτων (φαινόμενο περιθλάσεως).

Προσοχή:

Συνήθως δίνεται ο εξής ορισμός: ***Περίθλαση κύματος*** ονομάζεται το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο το κύμα όταν πέσει σε μία οπή ή σε ένα αντικείμενο διαστάσεων μικροτέρων του μήκους κύματός του, τότε το κύμα παρουσιάζει αποκλίσεις από την ευθύγραμμη διάδοσή του.

10.2 Περίθλαση του ήχου.

Το μήκος κύματος των ηχητικών κυμάτων που διαδίδονται μέσα στον αέρα είναι μεταξύ λίγων εκατοστομέτρων και 10 cm. Για την ομιλία και τη μουσική το μήκος κύματος των ηχητικών κυμάτων είναι συνήθως μεταξύ 30 cm και 3 m.

Τα ανοίγματα και τα αντικείμενα (πόρτες, παράθυρα, στύλοι έπιπλα κ.ά.) που στην καθημερινή ζωή συναντούν τα ηχητικά κύματα κατά τη διάδοσή τους έχουν συνήθως διαστάσεις της τάξεως 30 cm έως 3 m.

Μεταξύ της ηχητικής πηγής και του παρατηρητή μπορεί να παρεμβάλλεται ένα εμπόδιο, το οποίο δεν αφήνει τον ήχο να διαδοθεί διά μέσου αυτού (ηχητικός μονωτής). Αν όμως το εμπόδιο φέρει οπή της οποίας οι διαστάσεις είναι της τάξεως 30 cm έως 3 m τότε ο παρατηρητής που βρίσκεται πίσω από το εμπόδιο ακούει τον ήχο, αν και δεν βρίσκεται επάνω στην ηχητική ακτίνα, η οποία διέρχεται από την οπή. Αυτό οφείλεται στη περίθλαση που υφίστανται τα ηχητικά κύματα στην οπή (σχ. 10.2).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ – ΑΝΤΗΧΕΙΑ

11.1 Γενικά.

Ονομάζομε ***συντονισμό*** το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο ένα σύστημα ***(ταλαντωτής)*** που έχει ιδιοσυχνότητα ν_o ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, όταν διεγερθεί από εξωτερική αιτία ***(διεγέρτη)***, η οποία έχει συχνότητα ν ίση με την ιδιοσυχνότητά του, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση: $\boxed{\nu = \nu_o}$. Το φαινόμενο του συντονισμού παρατηρείται και στην ακουστική, οπότε ονομάζεται και ***συνήχηση***.

Παίρνομε δύο όμοια διαπασών Α και Β, δηλαδή δύο διαπασών που έχουν ίσες ιδιοσυχνότητες $\nu_A = \nu_B$ (σχ. 11.1). Διεγείρομε το Α κτυπώντας το ελαφρά με ένα σφυράκι και το πλησιάζομε στο Β. Τότε το Β εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα ν_A, η οποία είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του ν_B ($\nu_A = \nu_B$), δηλαδή έχομε κατάσταση συντονισμού.

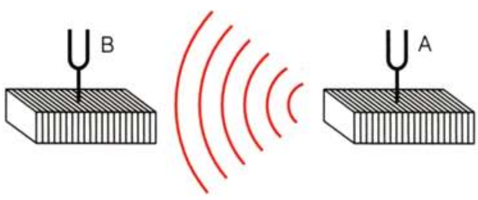
Διαπιστώνομε στην περίπτωση αυτή ότι: α) Το Β ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος και β) το Β εκπέμπει ήχο πολύ ισχυρότερο από εκείνον που εκπέμπει το Α. Ενώ αν πλησιάσομε στο Β ένα άλλο διαπασών Γ με ιδιοσυχνότητα ν_Γ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση: $\nu_\Gamma \neq \nu_B$.

Τότε διαπιστώνομε ότι το Β ταλαντώνεται με πολύ μικρότερο πλάτος του πλάτους της προηγούμενης περιπτώσεως.

(Εννοείται ότι το κτύπημα του Α και το κτύπημα του Γ είναι ισοδύναμα).

Προσοχή:

Τονίζομε και εδώ ότι το φαινόμενο του συντονισμού δύο συστημάτων προ-



Σχ. 11.1.

ϋποθέτει την ύπαρξη συζεύξεως μεταξύ τους. Στο παραπάνω παράδειγμα των δύο διαπασών, τη σύζευξη την επιτελεί ο αέρας, διά του οποίου μεταβιβάζεται η ενέργεια από το A στο B.

Όταν το διαπασών A παράγει ήχο αυτό ταλαντώνεται. Αυτός ο ήχος, δηλαδή τα ηχητικά κύματα που παράγονται από το A, διαδίδονται στον αέρα και μεταφέρουν ενέργεια. Ένα μέρος των κυμάτων αυτών φθάνουν στο διαπασών B, του προσδίδουν ενέργεια και αυτό (το B) εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Παρατήρηση:

Δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι:

1) Κατά το συντονισμό λαμβάνει χώρα μεταβίβαση της μεγαλύτερης δυνατής ποσότητας ενέργειας από το διεγέρτη στον ταλαντωτή.

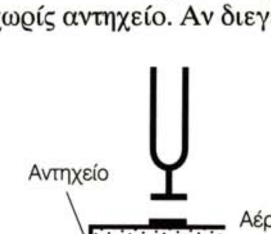
2) Στην κατάσταση του συντονισμού παρατηρείται ενίσχυση του εκπεμπόμενου ήχου, δηλαδή ο ήχος τον οποίο εκπέμπει ο ταλαντωτής είναι εντονότερος (ισχυρότερος) από τον ήχο που εκπέμπει ο διεγέρτης.

11.2 Αντηχεία (ηχεία).

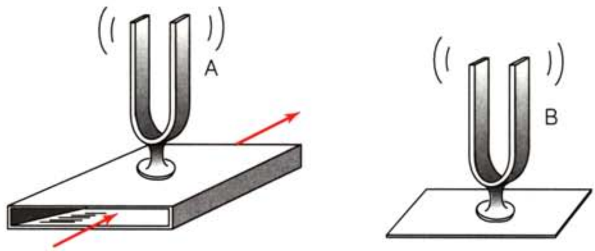
Αντηχεία ονομάζονται κοιλότητες καταλλήλων διαστάσεων, μέσα στις οποίες εγκλωβίζεται αέρια μάζα, η οποία μπορεί να ταλαντώνεται σε μία ορισμένη συχνότητα. Όταν η αέρια μάζα που είναι εγκλωβισμένη μέσα στο αντηχείο βρίσκεται σε συντονισμό με ένα εξωτερικό αίτιο (διεγέρτη) ο ήχος ενισχύεται. Με άλλα λόγια τα αντηχεία είναι κοιλότητες με αέρα καταλλήλων διαστάσεων για να ενισχύουν τον ήχο μιας ορισμένης συχνότητας.

Όταν κτυπήσομε με ένα ελαστικό σφυράκι το ένα σκέλος του διαπασών (σχ. 11.2α), θα ακούσομε έναν ασθενή ήχο. Όταν αμέσως μετά τοποθετήσομε το διαπασών που πάλλεται σε ξύλινο δοχείο θα ακούσομε ισχυρό ήχο. Αυτό εξηγείται ως εξής: Το διαπασών που πάλλεται διεγείρει τον αέρα του δοχείου έτσι ώστε να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση σε συντονισμό με τον ήχο του διαπασών. Δηλαδή ο αέρας πάλλεται με συχνότητα ίση προς τη συχνότητα του διαπασών. Επειδή κατά το συντονισμό το πλάτος της ταλαντώσεως είναι μέγιστο, ο παραγόμενος ήχος είναι ισχυρός.

Ας θεωρήσομε δύο όμοια διαπασών (σχ. 11.2β), ένα διαπασών A με αντηχείο και ένα διαπασών B χωρίς αντηχείο. Αν διεγείρομε τα διαπασών την ίδια



Σχ. 11.2α.



Σχ. 11.2β.

στιγμή και με ίσα κτυπήματα θα παρατηρήσομε τα ακόλουθα.

1) Το διαπασών Α με το αντηχείο θα δώσει ήχο που η έντασή του θα είναι μεγαλύτερη από την ένταση του ήχου που θα δώσει το Β.

Η εξήγηση είναι η εξής: Στο διαπασών Α με το αντηχείο έχομε συντονισμό, διότι η συχνότητα του διαπασών είναι ίση με μία από τις ιδιοσυχνότητες του αντηχείου. Άρα, θα ενισχύεται ο ήχος που εκπέμπει το διαπασών Α (στην πραγματικότητα ακούγεται ο ήχος από το αντηχείο). Αντίθετα στο διαπασών Β που δεν έχει αντηχείο δεν παρατηρείται συντονισμός, άρα ούτε ενίσχυση.

2) Το διαπασών Α θα σταματήσει πιο γρήγορα από το Β. Η εξήγηση είναι η εξής:

Και στα δύο διαπασών δώσαμε ίσα ποσά ενέργειας κατά τη διέγερσή τους. Συνεπώς το καθένα από αυτά μέχρις ότου σταματήσει να πάλλεται θα εκπέμπει το ίδιο ποσό ενέργειας. Το Α εκπέμπει ήχο που έχει μεγαλύτερη ένταση από τη ένταση του ήχου που εκπέμπει το Β. Επομένως το Α θα εκπέμπει το ίδιο ποσό ενέργειας με το Β, αλλά σε λιγότερο χρόνο. Άρα το Α θα σταματήσει πιο γρήγορα από το Β.

Παρατηρήσεις:

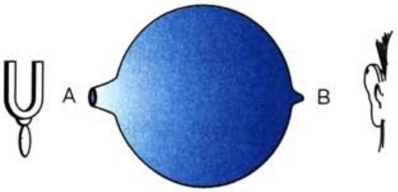
1) Υπάρχουν και αντηχεία που είναι κατάλληλα διαμορφωμένα ώστε να ενισχύουν πολλές συχνότητες. Τα αντηχεία των διαφόρων μουσικών οργάνων (π.χ. κιθάρα, βιολί κλπ.) είναι έτσι διαμορφωμένα ώστε να ενισχύουν πολλές συχνότητες, γιατί τα όργανα αυτά δίνουν σύνθετο ήχο.

2) Η ανθρώπινη φωνή παράγεται από τις παλμικές κινήσεις των φωνητικών χορδών. Αυτή ενισχύεται από τη στοματική και ρινική κοιλότητα που λειτουργούν σαν ένα μεταβλητό αντηχείο. Οι κινήσεις της γλώσσας αλλάζουν το σχήμα του αντηχείου της στοματικής κοιλότητας και έτσι ενισχύονται όλοι οι ήχοι της ανθρώπινης φωνής.

11.2.1 Αντηχεία Helmholtz.

Στην ακουστική χρησιμοποιούνται ειδικά αντηχεία τα οποία ονομάζονται αντηχεία Helmholtz. Αυτά είναι συνήθως σφαιρικά δοχεία γεμάτα αέρα που έχουν ένα μικρό άνοιγμα (Α) για την είσοδο των κυμάτων και ένα άλλο (Β) που προσαρμόζεται στο αυτί (σχ. 11.2γ).

Κάθε αντηχείο Helmholtz διεγείρεται σε συντονισμό από μία μόνο συγκε-



Σχ. 11.2γ.

κριμένη συχνότητα, η οποία είναι ίση με την ιδιοσυχνότητά του. Επομένως, ένα αντηχείο Helmholtz ενισχύει ήχο μόνο μιας συγκεκριμένης συχνότητας. Αν στο σημείο Α ενός αντηχείου Helmholtz φθάσει ένας σύνθετος ήχος θα ενισχυθεί μόνο ο ήχος του σύνθετου ήχου, που έχει συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητα του αντηχείου.

Σημείωση:

Η απόσβεση των ταλαντώσεων εντός των κοιλοτήτων των αντηχείων Helmholtz είναι μικρές και συνεπώς στα αντηχεία αυτά παρατηρείται οξύτατος συντονισμός.

11.3 Ερωτήσεις κυματικής – ακουστικής.

1. Ποια φαινόμενα λέγονται περιοδικά;
2. Τι ονομάζεται πλάτος και τι περίοδος σε μία ταλάντωση;
3. Τι παθαίνει το πλάτος στην ελεύθερη ταλάντωση με την πάροδο του χρόνου; Αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερό και γιατί;
4. Πότε ένα παλλόμενο σύστημα εκτελεί ελεύθερη και πότε εξαναγκασμένη ταλάντωση;
5. Σε ποια ταλάντωση παρατηρείται το φαινόμενο του συντονισμού; Πότε στην ταλάντωση αυτή έχομε συντονισμό και ποιο είναι το αποτέλεσμά του;
6. Τι ονομάζεται κύμα ελαστικότητας;
7. Τι μεταφέρει το κύμα, ενέργεια ή ύλη;
8. Τι ονομάζεται περίοδος, τι πλάτος και τι μήκος ενός κύματος;
9. Ποια κύματα λέγονται εγκάρσια και ποια διαμήκη;
10. Σε ποια σώματα σχηματίζονται εγκάρσια και σε ποια διαμήκη κύματα;
11. Γιατί όταν ένα κύμα αλλάζει μέσο διαδόσεως δεν αλλάζει η συχνότητά του;
12. Πότε ένα κύμα παθαίνει ανάκλαση και πότε διάθλαση;
13. Τι είναι και πώς παράγονται τα ηχητικά κύματα;
14. Τι ονομάζομε ήχο και ποια είναι τα όρια των ακουστών ήχων;
15. Από τι εξαρτάται η ταχύτητα διαδόσεως του ήχου;
16. Ποιοι διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα στον αέρα; Οι υπέρηχοι ή οι υπόηχοι;
17. Γιατί παρουσιάζεται πιο συχνά το φαινόμενο της περιθλάσεως στην ακουστική;
18. Σε μία αίθουσα υπάρχουν δύο μεγάφωνα. Σε ορισμένα σημεία της αίθουσας δεν ακούγονται ήχοι από τα μεγάφωνα. Πώς εξηγείται το φαινόμενο;
19. Ποια είναι τα υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου και από πού εξαρτάται το κάθε ένα από αυτά;
20. Ποια είναι τα αντικειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου;

21. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι το κατώφλι ακουστότητας ήχου συχνότητας 1000 Hz είναι 10^{-16} w/sec^2;
22. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι το όριο πόνου μίας συχνότητας 1000 Hz είναι 10^{-3} w/cm^2;
23. Με ποια συχνότητα πρέπει να διεγείρεται ένα σύστημα ώστε να έχομε κατάσταση συντονισμού;
24. Τι εννοούμε όταν λέμε ηχώ και τι μετήχηση;
25. Τι εννοούμε όταν λέμε φράγμα του ήχου;
26. Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη ή εγκάρσια;
27. Γιατί οι υπέρηχοι μεταφέρουν περισσότερη ενέργεια από τους συνηθισμένους ήχους;

11.4 Ασκήσεις ακουστικής.

1. Για να μετρήσομε το βάθος μιας θάλασσας, στέλνομε με μία ειδική συσκευή (sonar) ηχητικό σήμα προς τα κάτω και μετράμε το χρόνο που απαιτείται για να επιστρέψει το σήμα στο πλοίο. Εάν ο χρόνος αυτός είναι $t = 0{,}25$ s και η ταχύτητα του ήχου στο νερό είναι $υ = 1500$ m/s πόσο είναι το βάθος της θάλασσας στο σημείο που βρίσκεται το πλοίο;
2. Σε μία σεισμική δόνηση βρέθηκε η απόσταση της εστίας από το σεισμογράφο ίση με 36 km. Αν η ταχύτητα των διαμήκων κυμάτων είναι 6 km/s και των εγκαρσίων 4 km/s να βρεθεί η χρονική διαφορά στην άφιξη των δύο κυμάτων.
3. Τα όρια των ακουστικών συχνοτήτων είναι 16 Hz και 20.000 Hz. Να βρείτε τα αντίστοιχα μήκη κύματος.

Σημείωση:

Η ταχύτητα του ήχου στην πράξη λαμβάνεται μέσα στον αέρα ίση με 340 m/s και εντός του νερού 1450 m/s.

4. Πόσο είναι εντός του ύδατος το μήκος κύματος ήχου συχνότητας 440 Hz;
5. Πυροβόλο, ευθυτενούς τροχιάς το οποίο απέχει από το στόχο 1,2 km, βάλλει εναντίου αυτού βλήμα με ταχύτητα, 0,6km/sec. Παρατηρητής ευρισκόμενος σε ένα σημείο της ευθείας η οποία ενώνει το πυροβόλο με το στόχο, ακούει ταυτοχρόνως τους κρότους τους παραγόμενους κατά την εκπυρσοκρότηση του πυροβόλου και την πρόσκρουση του βλήματος επάνω στο στόχο. Να προσδιορισθεί η θέση του παρατηρητή.
6. Αερόστατο βρίσκεται ακίνητο σε ύψος 1 km από την επιφάνεια λίμνης βάθους 200 m. Στο αερόστατο βρίσκεται πηγή συχνότητας 500 Hz και ένα ευαίσθητο ακουστικό. Η πηγή εκπέμπει σήμα μακράς διάρκειας και με το ακουστικό διαπιστώνεται ηχώ μετά από χρόνους t_1 και t_2. Να βρείτε τα t_1 και t_2.
7. Αεροπλάνο το οποίο κινείται οριζοντίως με ταχύτητα 270 km/h, εκπέμπει κάποια στιγμή ηχητικό σήμα του οποίου συλλαμβάνει την ηχώ μετά 4 sec. Σε πόσο ύψος πετάει το αεροπλάνο;

ΣΥΝΟΨΗ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ

1) Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.).

Σήμερα όλες οι χώρες χρησιμοποιούν το ίδιο σύστημα μονάδων το οποίο ονομάζεται «Διεθνές Σύστημα Μονάδων» S.I. (International System of Units) ή M.K.S.A.

Θεμελιώδη μεγέθη του S.I. (ή M.K.S.A.) είναι: το μήκος, η μάζα, ο χρόνος, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, η θερμοκρασία, η ένταση φωτεινής πηγής και η «χημική» ποσότητα.

2) Θεμελιώδεις μονάδες του S.I.

1) Το μέτρο (m). Είναι η μονάδα με την οποία μετρούμε το μήκος (την απόσταση).

2) Το χιλιόγραμμο (kg ή kgr). Είναι η μονάδα μάζας.

3) Το δευτερόλεπτο (s ή sec). Είναι η μονάδα χρόνου.

4) Το Ampere (A). Είναι η μονάδα της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος.

5) Ο βαθμός Kelvin (^{o}K). Είναι η μονάδα με την οποία μετρούμε τη θερμοκρασία.

6) Η Gandela (Gd). Είναι η μονάδα με την οποία μετρούμε την ένταση μιας φωτεινής πηγής.

7) Το mol (ή mole). Είναι η μονάδα «χημικής ποσότητας».

3) Μονάδες μήκους.

Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια του μέτρου:

1 χιλιόμετρο: $1\ km = 10^3\ m$

1 δεκατόμετρο: $1\ dm = 10^{-1}\ m$

1 εκατοστόμετρο: $1\ cm = 10^{-2}\ m$

1 χιλιοστόμετρο: $1\ mm = 10^{-3}\ m$

Στην πράξη χρησιμοποιούνται και οι εξής μονάδες:

1 ίντσα: in=2,54 cm

1 πόδι: 1 ft=12 in

1 υάρδα: 1 yd=3 ft

Σημείωση:

Στη ναυτιλία χρησιμοποιείται ως μονάδα μήκους το ναυτικό μίλι:

1 ναυτικό μίλι =1853 m

4) Μονάδες μάζας(m).

Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια του χιλιογράμμου (kg):

1 τόνος: $1\ t = 10^3\ kg$

1 γραμμάριο: $1\ g = 10^{-3}\ kg$

1 χιλιοστόγραμμο: $1\ mgr = 10^{-6}\ kg$

Στην πράξη χρησιμοποιούνται και οι εξής μονάδες:

1 ουγγιά: 1 oz=28,35 g

1 λίμπρα: 1 lb=453,6 g

Προσοχή:

Γενικά σε όλους τους υπολογισμούς ενδείκνυται η μετατροπή όλων των μεγεθών σε μονάδες του ***Διεθνούς Συστήματος Μονάδων.***

5) Μονάδες ταχύτητας (υ).

Στο S.I. ως μονάδα ταχύτητας λαμβάνεται το $1\frac{m}{sec}$, δηλαδή το ***μέτρο ανά δευτερόλεπτο.***

$$υ = \frac{s}{t} = \frac{1\,m}{1\,sec} = 1\frac{m}{sec}$$

Στην πράξη χρησιμοποιούνται και οι εξής μονάδες:
1 εκατοστόμετρο ανά δευτερόλεπτο: 1 cm/sec
1 χιλιόμετρο ανά ώρα: 1 km/h
1 κόμβος = ένα ναυτικό μίλι ανά ώρα =1853 m/h

6) Μονάδα επιταχύνσεως (γ).

Στο S.I. ως μονάδα επιταχύνσεως λαμβάνεται το $1\frac{m}{sec^2}$ $1\frac{m/sec}{sec} = 1\frac{m}{sec^2}$.

Η έκφραση $1\frac{m/sec}{sec}$ δηλώνει ότι η ταχύτητα του κινητού μεταβάλλεται ***κατά*** $\boldsymbol{1\frac{m}{sec}}$ σε κάθε sec γι' αυτό και η πιο σωστή απόδοση με λόγια είναι ***μέτρα ανά δευτερόλεπτο σε κάθε δευτερόλεπτο*** και όχι ***μέτρα ανά τετράγωνο δευτερολέπτου.***

$$γ = \frac{Δυ}{Δt} = \frac{1\,m/sec}{1\,sec} = 1\frac{m}{sec^2} = 1\,msec^{-2}$$

7) Μονάδες γωνιακής ταχύτητας (ω).

Στο S.I. ως μονάδα γωνιακής ταχύτητας λαμβάνεται το $1\frac{rad}{sec}$ (ένα ακτίνιο ανά δευτερόλεπτο):

$$ω = \frac{φ}{t},\ ω = \frac{1\,rad}{1\,sec} = 1\frac{rad}{sec}$$

Στην πράξη χρησιμοποιείται και η μονάδα $1\frac{μοίρα}{sec}$ (μία μοίρα ανά δευτερόλεπτο).

Προσοχή:

Η μονάδα $1\frac{μοίρα}{sec}$ δεν χρησιμοποιείται σε τύπους όπου συνδέονται μήκη με γωνίες. Για παράδειγμα στον τύπο $υ=ω\cdot R$ για να υπολογίσομε την υ πρέπει να εκφράσομε την ω σε $\frac{rad}{sec}$ και ποτέ σε $\frac{μοίρες}{sec}$.

$υ = ω \cdot R = 1\frac{rad}{sec}1\,m = 1\frac{m}{sec}$, σωστό

$υ = ω \cdot R = 1\frac{μοίρα}{sec}$ 1 m, λάθος, γιατί αυτό δεν εκφράζει ταχύτητα.

8) Μονάδα γωνιακής επιταχύνσεως (ω΄).

Στο S.I. ως μονάδα γωνιακής επιταχύνσεως λαμβάνεται το $1\frac{rad/sec}{sec} = 1\frac{rad}{sec^2}$.

$$\omega' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1\,\text{rad/sec}}{1\,\text{sec}} = 1\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}$$

9) Μονάδα περιόδου (Τ).

Σε όλα τα συστήματα μετρήσεων η μονάδα μετρήσεως της περιόδου ενός περιοδικού φαινομένου είναι το sec.

10) Μονάδες συχνότητας (ν).

Επειδή στο S.I. η μονάδα της περιόδου είναι το 1 sec, η μονάδα της συχνότητας στο S.I. θα είναι το 1 sec^{-1}:

$$\nu = \frac{1}{T} = 1 \cdot \frac{1}{\text{sec}} = 1\,\text{sec}^{-1}$$

Η μονάδα 1 sec^{-1} συνήθως ονομάζεται 1 στροφή ανά sec.

Επίσης η 1 sec^{-1} καλείται και 1 κύκλος ανά δευτερόλεπτο (1 c/sec).

Χρησιμοποιούνται ευρύτατα και τα πολλαπλάσιά της:

1 χιλιόκυκλος ανά δευτερόλεπτο: 1 kc/sec=10^3 c/sec

1 μεγάκυκλος ανά δευτερόλεπτο: 1 Mc/sec=10^6 c/sec

Προσοχή:

Στην κυματική χρησιμοποιούνται κυρίως οι εξής εκφράσεις:

1 Hertz (1 χερτζ=1 Hz): 1 Hz=1 c/sec

1 kHz (1 κιλοχέρτζ)=10^3 Hz=10^3 c/sec, 1 kHz=1 kc/sec

1 MHz (μεγαχέρτζ)=10^6 Hz=10^6 c/sec, 1 MHz=1 Mc/sec

Παρατήρηση:

Καταχρηστικώς (δηλ. λανθασμένα) οι μονάδες c/sec, kc/sec και Mc/sec εκφράζονται κύκλος (c), χιλιόκυκλος (kc) και μεγάκυκλος (Mc). Εμείς βέβαια όταν θα ακούμε για παράδειγμα 50 c ή 60 kc ή 70 Mc θα καταλαβαίνομε ότι πρόκειται για 50 c/sec, 60 kc/sec και 70 Mc/sec.

11) Μονάδες δυνάμεως.

Μονάδα δυνάμεως στο S.I. είναι το ένα Νιούτον (Newton).

Σύμβολο: 1 N ή 1 Nt.

Δύναμη ενός Νιούτον (1 N ή 1 Nt) είναι η δύναμη που αν επιδράσει σε σώμα μάζας 1 kg θα προσδώσει σε αυτό επιτάχυνση ένα μέτρο ανά δευτερόλεπτο στο κάθε δευτερόλεπτο.

Προκύπτει με εφαρμογή της θεμελιώδους εξισώσεως της δυναμικής: $F=m \cdot \gamma$,

$$F = 1\,\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 1\,\text{N}$$

$$1\,\text{N} = 1\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

Στην πράξη χρησιμοποιούνται και οι εξής μονάδες:

Το χιλιόγραμμο δυνάμεως, (1 kgf), και ισχύει η αντιστοιχία:

$$1\,\text{kgf}=9{,}81\,\text{N} \quad ή \quad 1\,\text{N} = \frac{1}{9{,}81}\,\text{kgf}$$

Πολλές φορές το χιλιόγραμμο δυνάμεως ονομάζεται και χιλιόγραμμο βάρους ή κιλοπόντ (1kp). Το κιλοπόντ ορίζεται ως η δύναμη εκείνη, με την οποία η γη έλκει το ***πρότυπο χιλιόγραμμο*** μάζας σε τόπο που έχει γεωγραφικό πλάτος 45^o και στο ύψος της επιφάνειας της θάλασσας.

Επίσης στην πράξη χρησιμοποιείται ως μονάδα δυνάμεως και το γραμμάριο βάρους, το οποίο ονομάζεται και pont.

$$1\ \text{pont} = 10^{-3}\ \text{kp} = 10^{-3}\ \text{kgf}$$

Για τη μέτρηση μεγάλων δυνάμεων χρησιμοποιείται ο τόνος δυνάμεως ή μεγαπόντ $=10^3\ \text{kp} = 10^3\ \text{kgf}$.

Παρατήρηση:

Όταν λέμε ότι ένα σώμα έχει βάρος ένα χιλιόγραμμο (ένα κιλοπόντ) εννοούμε ότι έχει μάζα ένα χιλιόγραμμο. Τονίζομε ότι το χιλιόγραμμο μάζας είναι μονάδα μετρήσεως που ανήκει στο S.I., ενώ το χιλιόγραμμο βάρους (δυνάμεως) δεν είναι μονάδα του S.I.

12) Μονάδα ροπής.

Στο S.I. μονάδα δυνάμεως είναι το 1 N και μονάδα μήκους το 1 m. Επομένως για τη ροπή προκύπτει:

$$M = F \cdot d, M = 1\,N \cdot 1\,m = 1\,Nm$$

Σημείωση:

Εδώ το 1 Nm δεν είναι 1 joule, δηλαδή δεν εκφράζει έργο.

13) Μονάδα ροπής αδράνειας.

Αν υποθέσομε ότι έχομε μία στεφάνη πολύ μικρού πάχους, που η μάζα της m έχει μοιρασθεί (κατανεμηθεί) ομοιόμορφα σε αυτήν, τότε η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και που είναι κάθετος στο επίπεδό της θα είναι $\theta = m \cdot \upsilon^2$ όπου r είναι η ακτίνα της στεφάνης.

Η μονάδα μάζας στο S.I. είναι το kg και η μονάδα αποστάσεως το 1 m. Άρα η μονάδα ροπής αδράνειας στο S.I. είναι:

$$\theta = m \cdot \upsilon^2 = 1\ kg \cdot 1\ m^2 = 1\ kgm^2$$

14) Μονάδα ορμής.

Στο S.I. ως μονάδα ορμής λαμβάνεται το $j = 1\frac{kg \cdot m}{sec}$.

Μονάδα μάζας στο S.I είναι το kg και μονάδα ταχύτητας το $1\frac{m}{sec}$. Επομένως έχομε:

$$j = m \cdot \upsilon = 1\,kg \cdot 1\frac{m}{sec} = 1\frac{kg \cdot m}{sec}$$

15) Μονάδα στροφορμής.

Στο S.I. ως μονάδα στροφορμής λαμβάνεται το $G = 1\frac{kg \cdot m^2}{sec}$.

Έχομε τη σχέση: $G = m \cdot \upsilon \cdot r$. Οι μονάδες των μεγεθών m,υ,r στο S.I. είναι αντίστοίχως 1 kg, 1 m/sec και 1 m. Επομένως έχομε:

$$G = m \cdot \upsilon \cdot r = 1\,kg \cdot 1\frac{m}{sec} \cdot 1\,m = 1\frac{kg \cdot m^2}{sec}$$

16) Μονάδα ακουστότητας.

Ως μονάδα ακουστότητας έχει οριστεί το 1 Phon. Την κλίμακα ακουστότητας σε μονάδες Phon την ορίζομε με βάση τη σχέση:

$$A = 10\ \log\frac{J}{J_o}$$

Όπου A η ακουστική την οποία προκαλεί ήχος που έχει ένταση J και συχνότητα 1000 Hz και J_o η ελάχιστη ένταση του ήχου που έχει συχνότητα 1000 Hz.

Προσοχή:

Η συχνότητα των 1000 Hz λαμβάνεται ως πρότυπη συχνότητα. Η J_o είναι ίση με 10^{-16} W/cm^2, $J_o = 10^{-16}$ W/cm^2), είναι δηλαδή το κατώφλι ακουστότητας που αντιστοιχεί σε ήχο που έχει συχνότητα 1000 Hz.

Παρατηρήσεις:

Ο ήχος συχνότητας 1000 Hz όταν έχει ένταση 10^{-16} W/cm^2 (κατώφλι ακουστότητας), προκαλεί ακουστότητα μηδέν Phon:

$$A = 10\log\frac{J}{J_o} = 10\ \log\frac{10^{-13}\,W/cm^2}{10^{-16}\,W/cm^2} = 10\ \log \cdot 1 = 0\,Phon$$

Ο ήχος συχνότητας 1000 Hz, όταν έχει ένταση 10^{-3} W/cm^2 (όριο πόνου), προκαλεί ακουστότητα 130 Phon.

$$A = 10\log\frac{J}{J_o} = 10\ \log\frac{10^{-3}W/cm^2}{10^{-16}W/cm^2} = 10\ \log \cdot 10^{13} = 10 \cdot 13 = 130\,Phon$$

Ο ήχος συχνότητας 1000 Hz του οποίου η ένταση είναι δεκαπλάσια της εντάσεως του κατωφλίου του προκαλεί ακουστότητα 10 Phon:

$$A = 10\ \log\frac{J}{J_o} = 10\log\frac{10\,J_o}{J_o} = 10\ \log \cdot 10 = 10 \cdot 1 = 10\,Phon$$

Αν στη σχέση (1) θέσομε A=1, θα έχομε:

$$1 = 10\ \log\frac{J}{J_o}, \log\frac{J}{J_o} = 0{,}1, \frac{J}{J_o} = 1{,}259 \quad \text{και} \quad J = 1{,}1259\ J_o$$

Επομένως ακουστότητα ενός Phon είναι η ακουστότητα την οποία προκαλεί ο ήχος ο οποίος έχει συχνότητα 1000 Hz και του οποίου η ένταση είναι 1,259 φορές μεγαλύτερη από την ένταση του κατωφλίου ακουστότητάς του.

Προσοχή:

Η ακουστότητα σε Phon, για άλλες τιμές συχνότητας, ορίζεται με σύγκριση προς ήχο της πρότυπης συχνότητας των 1000 Hz ο οποίος όμως δημιουργεί την ίδια ακουστότητα που δημιουργεί ο ελεγχόμενος ήχος.

Έστω ότι έχομε έναν ήχο συχνότητας $\nu \neq 1000$ Hz και εντάσεως J, και ζητούμε την ακουστότητα του A_ν σε Phon.

Παράγομε ήχο συχνότητας 1000 Hz (πρότυπη συχνότητα) και τέτοιας εντάσεως ώστε αυτός να προκαλεί ακουστότητα A που είναι η ίδια με την A_ν.

Η A_ν την οποία ζητούμε είναι: A_ν=A Phon.

17) Μονάδα μετρήσεως της εντάσεως του ήχου (decibel).

Τελευταία, αντί της μονάδας Phon χρησιμοποιούμε το db, το οποίο είναι μονάδα μετρήσεως εντάσεως ήχου και ορίζεται με την εξής σχέση:

$$N = 10 \log \frac{J_1}{J_2} \text{ db}$$

όπου $J_2 = 10^{-12}$ w/m^2 (αυτή λαμβάνεται ως ακουστική σταθμή) και N η ένταση του ήχου σε db που έχει ένταση J_1 w/m^2.

Ο ήχος που έχει ένταση $J_1 = 10^{-12}$ w/m^2 έχει ένταση σε decibel 0 (N = 0)

$$N = 10 \ \log \frac{J_1}{J_2} = 10 \log \frac{10^{-12} \text{w/m}^2}{10^{-12} \text{w/m}^2} = 10 \ \log \cdot 1 = 10 \cdot 0 = 0 \text{ db}$$

Ο ήχος που έχει ένταση J_1 δεκαπλάσια της εντάσεως 10^{-12} w/m^2 ($J_1 = 10\ J_2$) έχει ένταση σε decibel 10 db:

$$N = 10 \log \frac{J_1}{J_2} = 10 \log \frac{10 \cdot 10^{-12} \text{w/m}^2}{10^{-12} \text{w/m}^2} = 10 \log \cdot 10 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ db}$$

Προσοχή:

Ο ήχος που έχει ένταση ένα decibel (1db) έχει ένταση σε w/m^2:

$$J_1 = 1{,}259 \cdot 10^{-12} \text{ w/m}^2 \ (J_1 = 1{,}259 \cdot J_2){:}\ 1 = 10 \log \frac{J_1}{J_2}, \log \frac{J_1}{J_2} = 0{,}1 \ \text{ και } J_1 = 1{,}259 \cdot J_2$$

Επομένως, ένταση ήχου ενός decibel (1db) είναι η ένταση του ήχου σε w/m^2 που είναι 1,259 φορές μεγαλύτερη από την ένταση 10^{-12} w/m^2, δηλαδή:

$$1 \text{ db Z } 1{,}259 \cdot 10^{-12} \text{ w/m}^2$$

Παρατήρηση:

Αν έχομε έναν ήχο συχνότητας 1000 Hz, τότε η ακουστότητά του σε Phon συμπίπτει αριθμητικά με την έντασή του εκφρασμένη σε decibel. Τονίζομε ότι αυτό ισχύει μόνο για ήχους συχνότητας 1000 Hz.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Στατική των στερεών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
Κινηματική των στερεών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
Δυναμική των στερεών

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Μηχανικά κύματα (ή ελαστικά κύματα)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Εγκάρσια και διαμήκη κύματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Ήχος (ηχητικά κύματα)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Υπέρηχοι – Υπερηχητικές ταχύτητες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

Ανάκλαση – Διάθλαση ήχου – Ηχώ – Μετήχηση – Ζώνες σιγής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

Συμβολή ηχητικών κυμάτων – Στάσιμα κύματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ

Περίθλαση κυμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

Συντονισμός στην ακουστική – Αντηχεία