ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΙΑ ΠΛΟΙΑΡΧΟΥΣ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΣ ΛΑΛΟΥ

ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ

ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΙΑ ΠΛΟΙΑΡΧΟΥΣ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΣ ΛΑΛΟΥ
Μαθηματικού
Καθηγήτριας ΑΕΝ Ασπροπύργου

ΑΘΗΝΑ
2022

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 2022
ISBN: 978-960-337-187-8

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Το 1952 ο Ευγένιος Ευγενίδης (1882-1954) όρισε με τη διαθήκη του τη σύσταση του Ιδρύματος Ευγενίδου, του οποίου ως μοναδικό σκοπό έταξε «νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν νέων ἑλληνικῆς ὑπηκοότητος ἐν τῷ ἐπιστημονικῷ καὶ τεχνικῷ πεδίῳ». Ο ιδρυτής και χορηγός του Ιδρύματος Ευγενίδου ορθά προέβλεψε ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο της Ελλάδος αποτελεί η άρτια κατάρτιση των Ελλήνων τεχνιτών κατά τα πρότυπα της επαγγελματικής εκπαίδευσης άλλων ευρωπαϊκών χωρών.

Την 23η Φεβρουαρίου του 1956 εγκρίθηκε η σύσταση του κοινωφελούς Ιδρύματος Ευγενίδου, την διοίκηση και διαχείριση του οποίου κατά την ρητή επιθυμία του ιδρυτή του ανέλαβε η αδελφή του Μαριάνθη Σίμου (1895-1981). Τότε ξεκίνησε η υλοποίηση του σκοπού του Ιδρύματος και η εκπλήρωση μίας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου από την Μαριάνθη Σίμου και τους επιστημονικούς συνεργάτες της.

Το έργο της Μαριάνθης Σίμου συνέχισε από το 1981 ο πολύτιμος συνεργάτης και διάδοχος του Ευγενίου Ευγενίδη, Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης (1920-2000). Από το 2000 το έργο του Ιδρύματος Ευγενίδου συνεχίζει ο Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης, ο οποίος υλοποιεί τον σκοπό του Ιδρύματος προσαρμόζοντας το όραμα του ιδρυτή του στις σύγχρονες εξελίξεις.

Μία από τις πρώτες δραστηριότητες του Ιδρύματος Ευγενίδου, ευθύς μετά την ίδρυσή του, υπήρξε η συγγραφή και έκδοση εκπαιδευτικών βιβλίων για τους μαθητές των τεχνικών σχολών, καθώς διαπιστώθηκε ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός τους με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν τα ορθά θεμέλια για την παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό. Καρπός αυτής της δραστηριότητας είναι η Βιβλιοθήκη του Τεχνίτη, η οποία αριθμεί 32 τίτλους, η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού, που περιλαμβάνει 50 τίτλους, η Τεχνική Βιβλιοθήκη με 11 τίτλους και η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού Βοηθού Χημικού με 3 τίτλους. Επιπλέον, από το 1977 μέχρι σήμερα έχουν εκδοθεί 171 τίτλοι για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων και 16 για τους μαθητές των Σχολών Μέσης Τεχνικής και Επαγγελματικής εκπαίδευσης.

Ξεχωριστή σειρά βιβλίων του Ιδρύματος Ευγενίδου αποτελεί η Βιβλιοθήκη του Ναυτικού (1967 έως σήμερα), η οποία είναι το αποτέλεσμα της συνεργασίας του Ιδρύματος Ευγενίδου με την Διεύθυνση Εκπαίδευσης Ναυτικών του Υπουργείου Ναυτιλίας. Η συγγραφή και έκδοση των εκπαιδευτικών βιβλίων για τους σπουδαστές των ναυτικών σχολών ανατέθηκε στο Ίδρυμα Ευγενίδου με την υπ' αριθμ. 61288/5031/9.8.1966 απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και λειτούργησε η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων, η οποία είχε συσταθεί ήδη από το 1958. Η συνεργασία Ιδρύματος Ευγενίδου και Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας ανανεώθηκε και επικαιροποιήθηκε με Υπουργικές Αποφάσεις το 1999 και το 2005, με τις οποίες το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή των εκπαιδευτικών βοηθημάτων για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.). Η ανάθεση της αρμοδιότητας για την έκδοση των διδακτικών βιβλίων για τις Ακαδημίες επαναβεβαιώθηκε με νομοθετική ρύθμιση τον Μάρτιο του 2020 (Ν. 4676).

Στην Βιβλιοθήκη του Ναυτικού περιλαμβάνονται 149 διδακτικά βιβλία ναυτικής εκπαίδευσης, καθώς και σχετικές έρευνες και πρακτικά συνεδρίων. Όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Ναυτικού ανταποκρίνονται στις ανάγκες των σπουδαστών των ΑΕΝ και είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία. Επιπλέον οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων καταβάλλουν κάθε προσπάθεια ώστε τα διδακτικά βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια, να επικαιροποιούνται με βάση τα εκάστοτε αναλυτικά προγράμματα σπουδών των Α.Ε.Ν. και να παραμένουν συμβατά με τις μεταβαλλόμενες διεθνείς απαιτήσεις.

Η διαχρονική συμβολή του Ιδρύματος Ευγενίδου στη Ναυτική Εκπαίδευση επιτυγχάνεται όχι μόνο με την έκδοση των σχετικών εκπαιδευτικών βιβλίων αλλά και με δωρεές στις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού, υποτροφίες σε αξιωματικούς του Λιμενικού Σώματος, εκπόνηση μελετών/ερευνών και διεξαγωγή *συνεδρίων για την ναυτική εκπαίδευση και την ναυτιλία γενικότερα, καθώς και παροχή πρόσβασης σε κορυφαίες ναυτιλιακές βάσεις δεδομένων μέσω της Βιβλιοθήκης του.*

Με την προσφορά των εκδόσεών του στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, αλλά και με την πληθώρα εκδόσεων για Τεχνικούς, το Ίδρυμα Ευγενίδου συνεχίζει να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση της Ελλάδος, υλοποιώντας επί 60 και πλέον χρόνια το όραμα του ιδρυτή του, αείμνηστου ευεργέτη Ευγένιου Ευγενίδη.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ιωάννης Γκόλιας, Καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.
Αχιλλέας Ματσάγγος, Αντιναύαρχος Λ.Σ. (ε.α.).
Γεώργιος Γεωργούλης, Πλοίαρχος Α΄ Ε.Ν., Ε.Δι.Π. Παν/μίου Αιγαίου.
Ελευθέριος Πετρόπουλος, Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Υπ. Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής.
Χρήστος Βαγιωνάκης, Προϊστάμενος Τμήματος Κανονισμών και Εκπαιδευτικών Προγραμμάτων, Υπ. Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής.
Γραμματέας της Επιτροπής, **Ελευθερία Τελειώνη**.

Επιστημονικός Σύμβουλος για το βιβλίο «Μαθηματικά για Πλοιάρχους», **Σοφία Λαμπροπούλου**, Καθηγήτρια ΕΜΠ.

Διατελέσαντα μέλη της Επιτροπής

Πρόεδροι
Α. Παππάς (1955-1983) καθηγητής ΕΜΠ, *Μ. Αγγελόπουλος* (1983-2003) ομ. καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Σταυρόπουλος* ομ. καθηγητής Πανεπ. Πειραιώς (2003-2008), *Ε. Δρης*, Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ (2008-2020)

Λοιπά μέλη
Γ. Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Καλογεράς* (1957-1970) Καθηγητής ΕΜΠ, *Χ. Καβουνίδης* (1955-1984) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, Μ. Αγγελόπουλος (1970-1983), Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, *Σπ. Γουλιέλμος (1958)* Αντιπλοίαρχος, *Ξ. Αντωνιάδης* (1959-1966) Αντιπλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Γ. Τσακίρης* (1967-1969) Πλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ελλ. Σίδερης* (1967-1969) Υποναύαρχος, *Π. Φουστέρης* (1969-1971) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αλ. Μοσχονάς* (1971-1972) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Χρυσανθακόπουλος* (1972-1974) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αθαν. Σωτηρόπουλος* (1974-1977) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Σπαρτιώτης* (1977) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., προσωρινός Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Πουλάκης* (1977-1979) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Λυκούδης* (1979-1981) Πλοίαρχος Λ. Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αναστ. Δημαράκης* (1981-1982) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Τσαντήλας* (1982-1984) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ε. Τζαβέλας* (1984-1986) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Γρηγοράκος* (1986-1988) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Μπαρκατσάς* (1988-1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Παπαναστασίου* (1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Λάμπρου* (1989-1992) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Κοκορέτσας* (1992-1993) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρκάκης* (1993-1994) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Ζουμπούλης* (1994-1995) Πλοίαρχος Λ.Σ., *Φ. Ψαρράς* (1995-1996) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Καλαρώνης* (1996-1998) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Ρεντζεπέρης* (1998-2000) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Στεφανάκης* (2000-2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρίνος* (2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Εξαρχόπουλος* (2001-2003) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μπριλάκης (*2003-2004) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ν. Θεμέλαρος* (2003-2004) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Κουβέλης* (2004-2005) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Δ. Βασιλάκης* (2005-2008) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Πετρόπουλος* (2008-2009) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Ματσάγγος* (2009-2011) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Σέργης* (2011-2012) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Τζαβάρας*, (2004-2013) Αντιναύαρχος Λ.Σ. (Ε.Α.), *Ι. Τεγόπουλος* (1988-2013) Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Θεοφανόπουλος* (2012-2014) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Β. Καλλιπολίτου* (2014-2017) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντρια Ναυτ. Εκπαιδ., *Σ. Μπέλλας* (2017-2018) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Τσελίκης* (2018-2019) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Βουτσινάς*, Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ..

Σύμβουλοι επί των Εκδόσεων
Δ .Γ. Νιάνιας (1956-1965) Καθηγητής ΕΜΠ, *Κ. Αγγ. Μανάφης* (1966-2018), ομ. Καθηγ. Φιλοσ. Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους σπουδαστές των Σχολών Πλοιάρχων των Ακαδημιών του Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.) και αποτελεί διδακτικό εγχειρίδιο των μαθημάτων «Μαθηματικά για Πλοιάρχους Ι» και «Μαθηματικά για Πλοιάρχους ΙΙ», του Α΄ και Β΄ εξαμήνου αντίστοιχα. Η ανάπτυξη και έκταση της ύλης έγινε σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας, όπως αυτό καθορίστηκε στο ΦΕΚ 2321/13.06.2019 – Β΄ τεύχος.

Σκοπός του βιβλίου είναι να αποκτήσουν οι σπουδαστές βασικές γνώσεις Μαθηματικών, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν σε άλλα μαθήματα της σχολής αλλά και στην επαγγελματική τους πορεία αργότερα. Επειδή η κατανόηση και εμπέδωση της ύλης από τους σπουδαστές αποτέλεσε βασική προτεραιότητα κατά τη συγγραφή, δόθηκε μεγαλύτερη βαρύτητα σε εφαρμογές και λιγότερο σε αποδείξεις των θεωρημάτων, χωρίς βέβαια να υπάρξουν κενά ή παραλείψεις στη θεωρία. Έχει επίσης καταβληθεί ιδιαίτερη προσπάθεια σύνδεσης του μαθήματος των Μαθηματικών με άλλα μαθήματα μέσω παραδειγμάτων και εφαρμογών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου που με επέλεξε μετά την προκήρυξη του σχετικού διαγωνισμού για τη συγγραφή του βιβλίου. Ευχαριστώ τα μέλη της Ομάδας Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την άριστη συνεργασία μας και την ιδιαίτερα φιλότιμη προσπάθεια που κατέβαλαν για την πληρέστερη έκδοση του παρόντος εγχειριδίου σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την κα Σοφία Λαμπροπούλου, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π΄. και επιστημονική ελεγκτή του βιβλίου, για το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που επέδειξε και τον άφθονο χρόνο που διέθεσε. Οι εύστοχες παρατηρήσεις και διορθώσεις της συνέβαλαν ουσιαστικά στην αρτιότερη παρουσίαση του υλικού.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους συναδέλφους μου, Γεώργιο Λεοντή – Ναυπηγό Μηχανολόγο Μηχανικό, Αναστάσιο Μπόμπολα – Πλοίαρχο Α΄ και Μαριάνθη Πετράκη – Φυσικό, Επίκουρη Καθηγήτρια ΑΕΝ οι οποίοι με μεγάλη προθυμία παρείχαν συμβουλές και πραγματοποίησαν διορθώσεις, σε παραδείγματα που σχετίζονται με την Ευστάθεια, τη Ναυτιλία και τη Φυσική αντίστοιχα. Η συνεισφορά τους στην ορθότερη παρουσίαση του υλικού ήταν πολύτιμη.

Γνωρίζω ότι η πρώτη αυτή έκδοση του βιβλίου, ενδέχεται να περιέχει λάθη και παραλείψεις. Είναι ιδιαίτερα ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε παρατηρήσεις και σχόλια από τους συναδέλφους που θα διδάξουν το μάθημα, οι οποίες θα συμβάλουν στην βελτίωση του βιβλίου σε επόμενη έκδοσή του.

Παναγιώτα Λάλου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Κεφάλαιο 1: Στοιχεία Άλγεβρας

Κεφάλαιο 2: Γραφήματα

Κεφάλαιο 3: Αναλογία, μεταβολή και παρεμβολή

Κεφάλαιο 4: Γεωμετρία

Κεφάλαιο 5: Επίπεδη τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 6: Μετρήσεις

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Κεφάλαιο 7: Διανύσματα

Κεφάλαιο 8: Σφαιρικά τρίγωνα

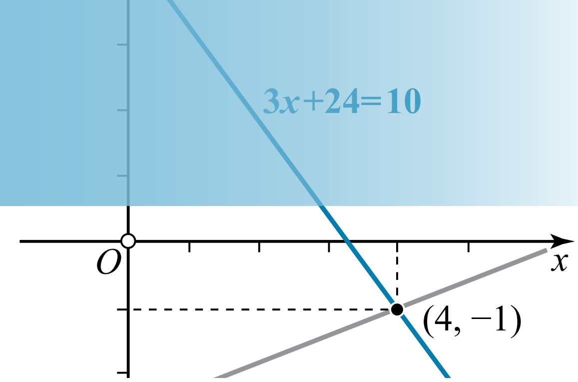
Κεφάλαιο 9: Κωνικές τομές

Κεφάλαιο 10: Στατιστική

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

κεφάλαιο 1

Στοιχεία Άλγεβρας



Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά σε βασικές γνώσεις άλγεβρας, όπως δυνάμεις, ταυτότητες, εξισώσεις $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού και γραμμικά συστήματα. Οι περισσότερες έννοιες είναι ήδη γνωστές από το σχολείο, οπότε γίνεται μια επανάληψη αυτών, δίνοντας έμφαση σε ναυτικές εφαρμογές.

1.1 Αλγεβρικές παραστάσεις

1.1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί

Υπενθυμίζουμε τα σύνολα των αριθμών, με τους αντίστοιχους συμβολισμούς τους:

1) Το σύνολο των ***φυσικών αριθμών***:

$$\mathbb{N}:=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

2) Το σύνολο των ***ακέραιων αριθμών***:

$$\mathbb{Z}:=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

3) Το σύνολο των ***ρητών αριθμών***:

$$\mathbb{Q}:=\left\{\frac{\mu}{\nu}\middle|\ \mu,\nu\ \textit{ακέραιοι με}\ \nu\neq 0\ \textit{και ΜΚΔ}\ (\mu,\nu)=1\right\}$$

Δηλαδή, ***ρητός*** λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος.

4) Το σύνολο των ***άρρητων αριθμών*** $\mathbb{Q}'$ που περιλαμβάνει τους αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν την μορφή κλάσματος, όπως για παράδειγμα:

$$\pi\simeq 3{,}14 \quad e\simeq 2{,}18 \quad \sqrt{2},\sqrt{3}\ \textit{κ.ά.}$$

5) Το σύνολο των ***πραγματικών*** $\mathbb{R}$ αριθμών που αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους. Προφανώς ισχύει: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.

– Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Η δύναμη με βάση έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό α και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό $\nu\geq 1$ συμβολίζεται με α^ν και είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α. Δηλαδή:

$$\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu\ \textit{φορές}}$$

Άρα: $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$, $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$, $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$

Παρατήρηση

Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι όταν η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης είναι άρτιος τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι θετικός αριθμός, ενώ όταν η βάση είναι αρνητικός και ο εκθέτης περιττός, τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός.

Ισχύει: $\alpha^0 := 1, \alpha \neq 1$ ενώ 0^0 δεν ορίζεται.

Επίσης ορίζουμε $\boxed{\alpha^{-\nu} := \dfrac{1}{\alpha^\nu}}$

Ομοίως ορίζουμε δυνάμεις πραγματικού αριθμού με ρητό εκθέτη:

$\boxed{\alpha^{\frac{1}{\nu}} := \sqrt[\nu]{\alpha}}$ με εξαίρεση την περίπτωση $\alpha<0$ και ν άρτιος

Επομένως η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ***ν-οστή ρίζα του α*** είναι ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε: $x^\nu = \alpha$.

Για παράδειγμα: $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$, ενώ $\sqrt{-4}$ δεν ορίζεται, ενώ $\sqrt[3]{27} = 3$ και $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Έτσι, μπορεί κάποιος να ορίσει δυνάμεις με ρητό εκθέτη: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} := \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^\mu$

Για παράδειγμα:

$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^2} = \left((-27)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (-3)^2 = 9 = 3^2 = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 27^{\frac{2}{3}}$$

Ιδιότητες δυνάμεων

1) $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$	2) $\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$	3) $(\alpha \cdot \beta)^\kappa = \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa$
4) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$	5) $(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$	6) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\kappa} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\kappa$

για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς $\kappa, \lambda \neq 0$.

Παράδειγμα 1.1

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{(x^{-4} \cdot y^5 \cdot x)^3}{(x^2)^{-3} \cdot (y^2)^5 \cdot x^2} \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{-5}$ $\quad x, y \neq 0$ $\qquad$ β) $B = \dfrac{3^{10}}{(-2)^{10}} - \dfrac{30^4}{(-15)^4} - \dfrac{8^{-10}}{12^{-10}}$

Λύση

$$\text{α) } A = \frac{(x^{-4} \cdot y^5 \cdot x)^3}{(x^2)^{-3} \cdot (y^2)^5 \cdot x^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-5} = \frac{(x^{-4})^3 \cdot (y^5)^3 \cdot x^3}{x^{-6} \cdot x^2 \cdot y^{10}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^{-12} \cdot y^{15} \cdot x^3}{x^{-6+2} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{x^{-12+3} \cdot y^{15}}{x^{-4} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} =$$

$$= \frac{x^{-9} \cdot y^{15}}{x^{-4} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{x^{-9}}{x^{-4}} \cdot \frac{y^{15}}{y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = x^{-9-(-4)} \cdot y^{15-10} \cdot \frac{x^5}{y^5} = x^{-5} \cdot y^5 \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{1}{x^5} \cdot y^5 \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{y^5}{x^5} \cdot \frac{x^5}{y^5} = 1$$

$$\text{β) } B = \frac{3^{10}}{(-2)^{10}} - \frac{30^4}{(-15)^4} - \frac{8^{-10}}{12^{-10}} = \left(\frac{3}{-2}\right)^{10} - \left(\frac{30}{-15}\right)^4 - \left(\frac{8}{12}\right)^{-10} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-10} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = -\left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\frac{3^4}{2^4} = -\frac{81}{16}$$

1.1.2 Πράξεις αλγεβρικών παραστάσεων

Είναι γνωστό, ότι η επίλυση πολλών προβλημάτων γίνεται με χρήση μεταβλητών και εκφράσεων που περιέχουν αριθμούς και μεταβλητές. Οι μαθηματικές αυτές εκφράσεις λέγονται ***αλγεβρικές παραστάσεις***.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, ονομάζονται ***μονώνυμα***. Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται ***συντελεστής του μονωνύμου***, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται ***κύριο μέρος του μονωνύμου***.

Για παράδειγμα: στο μονώνυμο $-5x^2yz^3$ έχουμε συντελεστή -5 και κύριο μέρος x^2yz^3.

Δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος λέγονται ***όμοια***.

Για παράδειγμα: τα μονώνυμα $-4\alpha^2x$, $\frac{5}{3}\alpha^2x$ και α^2x είναι όμοια.

Το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια ονομάζεται ***πολυώνυμο***. Πολυώνυμα είναι για παράδειγμα τα:

$$3\alpha^3 - 4\beta^2 + 5\alpha\beta,\ 2x^3 - 6xy^4 + x^2y^2 \text{ και } x^4 - 2x^3 - 8x - 9$$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται ***όρος*** του πολυωνύμου.

– Πράξεις με πολυώνυμα

1) ***Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων:***

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα ή όπως λέμε όμοιοι όροι, μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους, όπου προστίθενται οι συντελεστές και παραμένει ίδιο το κύριο μέρος. Η διαδικασία αυτή λέγεται ***αναγωγή ομοίων όρων.*** Έτσι όταν θέλουμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε πολυώνυμα κάνουμε αναγωγή στους όμοιους όρους.

Για παράδειγμα, το άθροισμα και η διαφορά των πολυωνύμων:

$5x^2y - 4x^3 + 6y$ και $x^2y - x^3 - 3y$ υπολογίζονται ως εξής:

$$(5x^2y - 4x^3 + 6y) + (x^2y - x^3 - 3y) = 5x^2y - 4x^3 + 6y + x^2y - x^3 - 3y = 6x^2y - 5x^3 + 3y$$

$$(5x^2y - 4x^3 + 6y) - (x^2y - x^3 - 3y) = 5x^2y - 4x^3 + 6y - x^2y + x^3 + 3y = 4x^2y - 3x^3 + 9y$$

2) ***Πολλαπλασιασμός μονωνύμου επί πολυώνυμο***

Πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο επί μονώνυμο πολλαπλασιάζοντας τους συντελεστές μεταξύ τους και τις μεταβλητές με τις δυνάμεις μεταξύ τους.

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο επί πολυώνυμο εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$

Για παράδειγμα:

α) $2x^2(x^3 - 4xy) = 2x^5 - 8x^3y$

β) $3xy^2(4xy^2 - x - 5y + 1) = 12x^2y^4 - 3x^2y^2 - 15xy^3 + 3xy^2$

3) ***Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου επί πολυώνυμο***

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο επί πολυώνυμο εφαρμόζουμε την διπλή επιμεριστική ιδιότητα:

$$\boldsymbol{(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta}$$

Για παράδειγμα:

$$(6x^2 + 3xy + y^2) \cdot (3x - y) = 18x^3 - 6x^2y + 9x^2y - 3xy^2 + 3xy^2 - y^3 = 18x^3 + 3x^2y - y^3$$

1.1.3 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της, λέγεται ***ταυτότητα***. Παρακάτω βλέπουμε κάποιες απ’ τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ταυτότητες.

1) $\boldsymbol{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$
2) $\boldsymbol{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$
3) $\boldsymbol{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$
4) $\boldsymbol{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$
5) $\boldsymbol{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$
6) $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}$
7) $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$

Παράδειγμα 1.2

Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(x-3y)^2-(2y+3x)(2y-3x)-(3x-y)^2$

β) $(3x-2)^2(x+3)-(x-3)^3$

Λύση

α) $(x-3y)^2-(2y+3x)(2y-3x)-(3x-y)^2=$

$=x^2-6xy+(3y)^2-[(2y)^2-(3x)^2]-[(3x)^2-6xy+y^2]=$

$=x^2-6xy+9y^2-(4y^2-9x^2)-(9x^2-6xy+y^2)=$

$=x^2-6xy+9y^2-4y^2+9x^2-9x^2+6xy-y^2=$

$=x^2+4y^2$

β) $(3x-2)^2(x+3)-(x-3)^3=$

$=[(3x)^2-12x+4](x+3)-(x^2-6x+9)=$

$=(9x^2-12x+4)(x+3)-x^2+6x-9=9x^3+27x^2-12x^2-36x+4x+12-x^2+6x-9=$

$=9x^3+14x^2-26x+3$

1.2 Εξισώσεις

Ένα σημαντικό εργαλείο των μαθηματικών, είναι οι εξισώσεις. Πολλά προβλήματα της Ναυτιλίας, αλλά και προβλήματα πολλών επιστημών και ακόμα προβλήματα της καθημερινής ζωής βρίσκουν λύση επιλύοντας εξισώσεις.

Μια ισότητα δύο παραστάσεων που περιέχει μια μεταβλητή ονομάζεται ***εξίσωση*** με έναν άγνωστο. Η μεταβλητή ονομάζεται ***άγνωστος της εξίσωσης***. Για παράδειγμα:

$$3(x-1)=4x-5 \text{ εξίσωση με άγνωστο το } x$$

Η παράσταση $3(x-1)$ λέγεται ***1ο μέλος*** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $4x-5$ λέγεται ***2ο μέλος*** της εξίσωσης. Κάθε τιμή του αγνώστου που επαληθεύει την ισότητα, ονομάζεται ***λύση*** ή ***ρίζα*** της εξίσωσης. Για παράδειγμα αν βάλουμε στην παραπάνω εξίσωση όπου x τον αριθμό 2:

$$3(2-1)=4\cdot 2-5 \quad \text{ή} \quad 3=3 \text{ (αληθεύει)}$$

Επομένως ο αριθμός 3 είναι ***λύση της εξίσωσης***.

Όταν τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι πολυώνυμα, ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου ονομάζεται ***βαθμός*** της εξίσωσης.

1.2.1 Εξίσωση 1ου βαθμού

Όταν ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι το 1, λέμε ότι έχουμε ***εξίσωση 1ου βαθμού***.

Για παράδειγμα οι εξισώσεις $4x - 3 = 3(2 - x) + 6$ και $\dfrac{2x - 1}{3} = \dfrac{x - 5}{2}$ είναι εξισώσεις 1ου βαθμού.

Κάθε εξίσωση 1ου βαθμού παίρνει τη γενική μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta}$$

Για την επίλυση της παραπάνω διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ τότε η εξίσωση έχει ***μοναδική λύση*** την $\boldsymbol{x = -\dfrac{\beta}{\alpha}}$

2) Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$ τότε η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = -\beta$, οπότε:

   α) Αν $\boldsymbol{\beta \neq 0}$ τότε δεν έχει λύση, δηλαδή είναι ***αδύνατη***

   β) Αν $\boldsymbol{\beta = 0}$ γίνεται $0 \cdot x = 0$, οπότε αληθεύει για κάθε αριθμό, δηλαδή είναι ***αόριστη*** ή ***ταυτότητα***.

Παράδειγμα 1.3

Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{2x - 5}{3} - 2x = 2 - \dfrac{x + 6}{4}$

Λύση

$\dfrac{2x - 5}{3} - 2x = 2 - \dfrac{x + 6}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 \cdot \dfrac{2x - 5}{3} - 12 \cdot 2 \cdot x = 12 \cdot 2 - 12 \cdot \dfrac{x + 6}{4} \Leftrightarrow$ απαλοιφή παρονομαστών

$4(2x - 5) - 24 \cdot x = 24 - 3 \cdot (x + 6) \Leftrightarrow$

$8x - 20 - 24x = 24 - 3x - 18 \Leftrightarrow$ επιμεριστική ιδιότητα

$8x - 24x + 3x = 24 - 18 + 20 \Leftrightarrow$ χωρισμός γνωστών από αγνώστους

$-13x = 26 \Leftrightarrow$ αναγωγή ομοίων όρων

$\dfrac{-13x}{-13} = \dfrac{26}{-13} \Leftrightarrow$ διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου

$x = -2$ (Μοναδική λύση)

Παράδειγμα 1.4

Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{3}{2} - \dfrac{2x - 1}{4} = \dfrac{5 - 2x}{4}$

Λύση

$\dfrac{3}{2} - \dfrac{2x + 1}{4} = \dfrac{5 - 2x}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \dfrac{3}{2} - 4 \cdot \dfrac{2x + 1}{4} = 4 \cdot \dfrac{5 - 2x}{4} \Leftrightarrow$

$2 \cdot 3 - (2x + 1) = 5 - 2x \Leftrightarrow 6 - 2x - 1 = 5 - 2x \Leftrightarrow -2x + 2x = 5 - 6 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ (Αόριστη)

Παράδειγμα 1.5

Να λυθεί η εξίσωση: $3(1 - 2x) - 4(2 - x) = x - 3(x + 2)$

Λύση

$3(1 - 2x) - 4(2 - x) = x - 3(x + 2) \Leftrightarrow 3 - 6x - 8 + 4x = x - 3x - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x + 4x - x + 3x = -6 - 3 + 8 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -1$ (Αδύνατη)

Πρόβλημα 1.1

Ένα πλοίο ταξίδεψε από ένα λιμάνι A σε ένα λιμάνι B με σταθερή ταχύτητα 21 κόμβων (knots). Άφου έμεινε 3 h στο λιμάνι B, επέστρεψε στο λιμάνι A με σταθερή ταχύτητα 24 knots. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 18 h πόση είναι η απόσταση των δύο λιμανιών σε ναυτικά μίλια (ν.μ.);

Λύση

Έστω ότι η ζητούμενη απόσταση είναι x ν.μ.

Το πλοίο ταξίδεψε από το λιμάνι στο λιμάνι με ταχύτητα 21 knots. Θυμίζουμε ότι 1 knot = 1 ν.μ./h. Άρα:

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 21 = \frac{x}{t} \Leftrightarrow t = \frac{x}{21}\text{ h}$$

Δηλαδή ο χρόνος για να πάει από το λιμάνι A στο λιμάνι B ήταν $\frac{x}{21}$ h. Ομοίως ο χρόνος για να πάει από το λιμάνι B στο λιμάνι A ήταν $\frac{x}{24}$ h. Ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{21} + 3 + \frac{x}{24}$. Ο χρόνος αυτός δίνεται 18 h. Επομένως:

$$\frac{x}{21} + 3 + \frac{x}{24} = 18 \Leftrightarrow \qquad (\text{ΕΚΠ}=168)$$

$$168 \cdot \frac{x}{21} + 168 \cdot 3 + 168 \cdot \frac{x}{24} = 168 \cdot 18 \Leftrightarrow 8x + 504 + 7x = 3024 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x + 7x = 3024 - 504 \Leftrightarrow 15x = 2520 \Leftrightarrow x = \frac{2520}{15} = 168$$

Άρα η απόσταση των δύο λιμανιών είναι 168 ν.μ.

1.2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Μια εξίσωση με έναν άγνωστο, στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2, λέγεται ***εξίσωση 2ου βαθμού*** ή ***δευτεροβάθμια εξίσωση***.

Για παράδειγμα $x^2 = 16$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - x - 12 = 0$, $(x-2)\cdot x = 3$ είναι εξισώσεις 2ου βαθμού. Κάθε εξίσωση 2ου βαθμού παίρνει τη γενική μορφή:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0$$

Στα παραπάνω παραδείγματα $x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \quad \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -16$

$$x^2 + 5x = 0 \quad \alpha = 1,\ \beta = 5,\ \gamma = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad \alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -12$$

$$(x-2)\cdot x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = -3$$

Για την επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Γενική μορφή: Επίλυση με τύπο

Θα επιλύσουμε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ *με* $\alpha \neq 0$, *με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου»:*

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ με το γράμμα Δ έχουμε:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (1)$$

Οπότε για να επιλύσουμε ως προς x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta > 0$: τότε ορίζεται η $\sqrt{\Delta}$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$ ή πιο συνοπτικά:

$$\boldsymbol{x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}} \qquad (\textit{δύο άνισες ρίζες})$$

β) Αν $\Delta = 0$: $(1) \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=-\frac{\beta}{2\alpha}}$ (*μία ρίζα διπλή*)

γ) Αν $\Delta < 0$: Η (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, εφόσον $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\geq 0$, ενώ $\frac{\Delta}{4\alpha^2}<0$

Η αλγεβρική παράσταση $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$ από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης, ονομάζεται ***διακρίνουσα*** αυτής.

Ο τρόπος επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης συνοψίζεται στον πίνακα 1.1:

Πίνακας 1.1

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
$\Delta > 0$	΄Εχει 2 ρίζες άνισες: $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	΄Εχει 1 ρίζα (διπλή): $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Παράδειγμα 1.6

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5x^2 - 4x - 1 = 0$ β) $36x^2 - 12x + 1 = 0$

γ) $2x^2 + 4x + 3 = 0$ δ) $(3x-1)^2 - (4-x)^2 = x^2 + 9$

Λύση

α) Είναι $\alpha = 5, \beta = -4$ και $\gamma = -1$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 5\cdot(-1) = 36 > 0$$

Οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\cdot 5}=\frac{4+6}{10}=1 \text{ και } x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\cdot 5}=\frac{4-6}{10}=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}$$

β) Είναι $\alpha = 36, \beta = -12$ και $\gamma = 1$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1 = 144 - 144 = 0$$

Οπότε έχει μια διπλή ρίζα την $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 36} = \frac{1}{6}$

γ) Είναι $\alpha = 2, \beta = 4$ και $\gamma = 3$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8 < 0.$$

Επομένως, η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

δ) $(3x-1)^2 - (4-x)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - (16 - 8x + x^2) = x^2 + 9 \Leftrightarrow$
$9x^2 - 6x + 1 - 16 + 8x - x^2 - x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 2x - 24 = 0$

Είναι $\alpha = 7, \beta = 2$ και $\gamma = -24$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 7(-24) = 676 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{676}}{2 \cdot 7} = \frac{-2 + 26}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7},$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{676}}{2 \cdot 7} = \frac{-2 - 26}{14} = \frac{-28}{14} = -2$$

2) Ελλιπείς μορφές: $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$

Η επίλυση στις περιπτώσεις αυτές γίνεται με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$\kappa \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \lambda = 0$$

α) Μορφή: $\alpha x^2 + \beta x = 0$ ($\gamma = 0$)

Για παράδειγμα,

$$2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \text{ (βγάζω κοινό παράγοντα το } x)$$

$$x \cdot (2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{5}{2}$$

β) Μορφή: $\alpha x^2 + \gamma = 0$ ($\beta = 0$)

Για παράδειγμα,

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-3) \cdot (2x+3) = 0 \Leftrightarrow \text{ (διαφορά τετραγώνων)}$$

$$2x - 3 = 0 \text{ ή } 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = \frac{3}{-2}$$

Πρόβλημα 1.2

Η πισίνα ενός κρουαζιερόπλοιου σχήματος ορθογωνίου έχει εμβαδόν 135 m^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις της πισίνας, αν είναι γνωστό ότι το μήκος της είναι μεγαλύτερο του πλάτους της κατά 6 m (σχ. 1.1).

Λύση

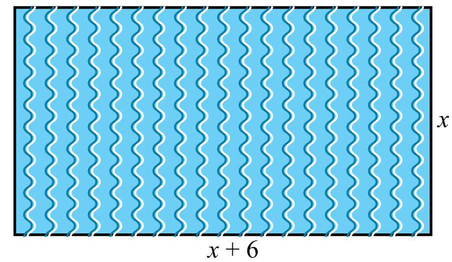
Έστω ότι το πλάτος της πισίνας είναι x. Τότε το μήκος της θα είναι $x + 6$. Το εμβαδόν δίνεται 135 m^2, επομένως ισχύει:

$$(x + 6) \cdot x = 135 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 135 = 0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha = 1, \beta = 6$ και $\gamma = -135$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-135) = 576 > 0$



Σχ. 1.1

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις άνισες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 24}{2} = 9 \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = -15 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Άρα το πλάτος της πισίνας είναι 9 m και το μήκος είναι 9 + 6 = 15 m

1.3 Γραμμικά συστήματα

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, λέγεται ***γραμμική εξίσωση*** και παριστάνει ευθεία γραμμή (σχ. 1.2).

Ειδικές περιπτώσεις

1) Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = c$ $\left(c = \frac{\gamma}{\beta}\right)$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$.

Για παράδειγμα η εξίσωση $y = 2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τον $y'y$ στο σημείο (0,2) (σχ. 1.3).

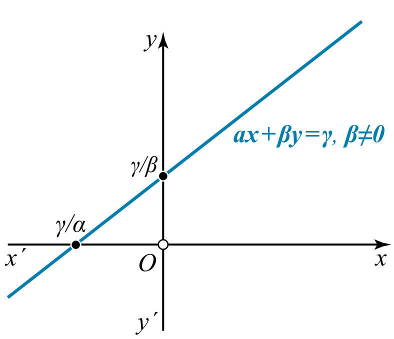
2) Αν $\boldsymbol{\beta = 0}$, τότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $x = c$ $\left(c = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$.

Για παράδειγμα η εξίσωση $x = 2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$ που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο (2,0) (σχ. 1.4).

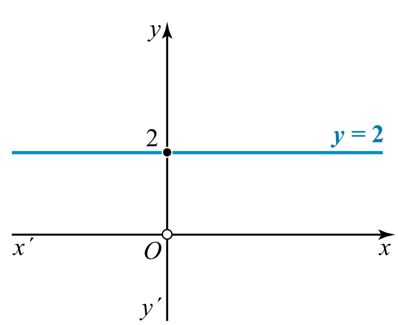
– Γραμμικό σύστημα 2 × 2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με 2 αγνώστους, τότε λέμε ότι έχουμε ένα ***γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους*** ή πιο σύντομα ένα ***γραμμικό σύστημα 2 × 2***.

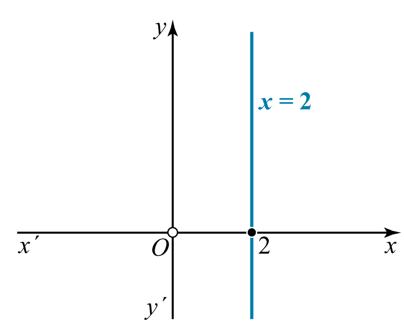
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$



Σχ. 1.2



Σχ. 1.3



Σχ. 1.4

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται ***λύση του συστήματος***.

Για παράδειγμα η λύση του συστήματος: $\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ είναι το ζεύγος (x, y)=(4, –1) διότι:

1) Στην $x - 3y = 7$ για x= 4 και y= –1 έχουμε $4 - 3 \cdot (-1) = 7$ (αληθεύει) και

2) στην $3x + 2y = 10$ για x = 4 και y = –1 έχουμε $3 \cdot 4 + 2\,(-1) = 10$ (αληθεύει)

1) ***Γραφική αναπαράσταση***

Οι 2 εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν 2 ευθείες. Η λύση (4, –1) του συστήματος, επαληθεύει συγχρόνως και τις 2 εξισώσεις, επομένως βρίσκεται πάνω και στις 2 ευθείες. Άρα το (4, –1) είναι το ***σημείο τομής των 2 ευθειών*** (σχ. 1.5). (Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. κεφ. 2).

2) ***Πλήθος λύσεων γραμμικού συστήματος 2×2 (διερεύνηση)***

Οι 2 εξισώσεις παριστάνουν 2 ευθείες, οι οποίες μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν. Ειδικότερα:

α) Όταν οι ευθείες του συστήματος τέμνονται, το σύστημα έχει ***μοναδική λύση***, η οποία είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των 2 ευθειών.

β) Όταν οι ευθείες είναι παράλληλες, το σύστημα είναι ***αδύνατο***.

γ) Όταν οι ευθείες ταυτίζονται το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι ***αόριστο***.

Για παράδειγμα το (Σ): $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$ είναι αδύνατο, διότι αν πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση με το 2, το (Σ) γίνεται ισοδύναμα: $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$

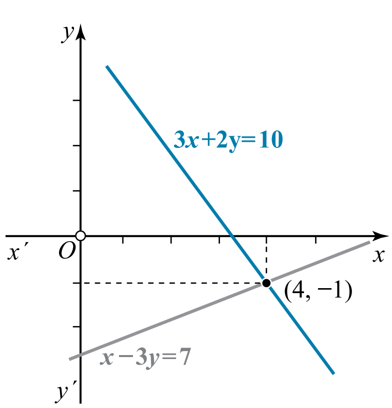
Οι δύο ευθείες του συστήματος είναι παράλληλες (σχ. 1.6).

Το σύστημα: (Σ): $\begin{cases} y=2x-1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή: $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$

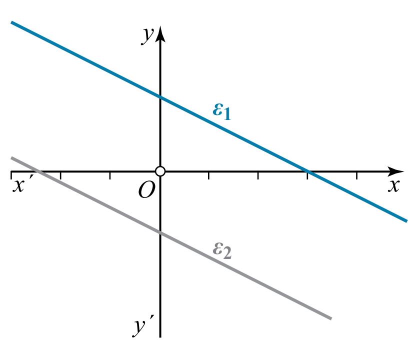
Και επομένως έχει άπειρες λύσεις (αόριστο), αφού οι 2 ευθείες ταυτίζονται (σχ. 1.7).

1.4 Αλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων

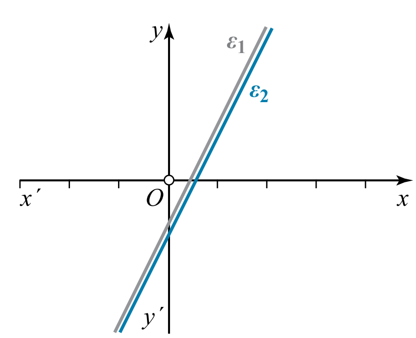
Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων ονομάζονται ***ισοδύναμα***. Δύο ισοδύναμα συστήματα σχετίζονται με την εφαρμογή των παρακάτω ***γραμμοπράξεων***,



Σχ. 1.5



Σχ. 1.6



Σχ. 1.7

τις οποίες χρησιμοποιούμε για να δώσουμε απλούστερη μορφή στο σύστημα.

1) Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων.

2) Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.

3) Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης πολλαπλασιασμένης με έναν αριθμό στα αντίστοιχα μέλη μίας άλλης εξίσωσης.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε δύο από τις μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος 2×2, την μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

1) Μέθοδος της αντικατάστασης

Την προτιμάμε στα συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

α) ***Βήμα 1.*** Λύνουμε ως προς έναν άγνωστο τη μία απ' τις δύο εξισώσεις του συστήματος (εφαρμογή γραμμοπράξεων).

β) ***Βήμα 2.*** Αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος, οπότε προκύπτει μια εξίσωση ενός άγνωστου, που μπορούμε να λύσουμε.

γ) ***Βήμα 3.*** Τη λύση που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση του βήματος 1, οπότε βρίσκουμε και τον δεύτερο άγνωστο.

Παράδειγμα 1.7

$$\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 3(3y+7)+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 9y+21+2y=10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 9y+2y=10-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 11y=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3(-1)+7 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$$

Άρα $(x, y) = (4, -1)$

2) Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

α) ***Βήμα 1***. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της μίας ή και των δύο εξισώσεων με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι συντελεστές ενός εκ των αγνώστων να γίνουν αντίθετοι αριθμοί, (εφαρμογή γραμμοπράξεων).

β) ***Βήμα 2.*** Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνουμε.

γ) ***Βήμα 3.*** Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία απ' τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα 1.8

Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=8-\dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{y+1}{2}=9-\dfrac{x-1}{3} \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} -3x+9y=-21 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$

$-3x + 3x + 9y + 2y = -21 + 10 \Leftrightarrow 11y = -11y \Leftrightarrow y = -1$

$x - 3y = 7 \Leftrightarrow x - 3(-1) = 7 \Leftrightarrow x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 4$

Άρα: $(x, y) = (4, -1)$

β) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=8-\dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{y+1}{2}=9-\dfrac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot\dfrac{x+1}{2}=2\cdot 8-2\cdot\dfrac{y-1}{2} \\ 6\cdot\dfrac{y+1}{2}=6\cdot 9-6\cdot\dfrac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=16-(y-1) \\ 3(y+1)=54-2(x-1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+1=16-y+1 \\ 3y+3=54-2x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=54+2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \left| \begin{matrix} (-2) \\ \end{matrix} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-32 \\ 2x+3y=53 \end{cases}$

$-2y + 3y = -32 + 53 \Leftrightarrow y = 21$

$x + y = 16 \Leftrightarrow x + 21 = 16 \Leftrightarrow x = -5$ Άρα: $(x, y) = (-5, 21)$

Παρατηρήσεις

1) Αν κατά τη διαδικασία επίλυσης προκύψει εξίσωση της μορφής: $\mathbf{0x + 0y = \alpha}$ όπου $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, τότε το σύστημα είναι ***αδύνατο***.

2) Αν κατά τη διαδικασία επίλυσης προκύψει εξίσωση της μορφής: $\mathbf{0x + 0y = 0}$, τότε το σύστημα είναι ***αόριστο***.

Παράδειγμα 1.9

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} y+1=3x \\ 3y-5x=2(2x-1) \end{cases}$

Λύση

$\begin{cases} y+1=3x \\ 3y-5x=2(2x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ 3y-5x=4x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ -9x+3y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ -9x+3y=-2 \end{cases} \left| \begin{matrix} (-3) \\ \end{matrix} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 9x-3y=-3 \\ -9x+3y=-2 \end{cases}$ Άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**

$0x+0y=-5$

Παράδειγμα 1.10

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3(1-2y) \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3(1-2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3-6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \Bigg| (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+6y=-2 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \qquad \text{Άρα το σύστημα είναι } \textbf{αόριστο}.$$

$$\overline{0x+0y=0}$$

$x - 3y = 1 \Rightarrow x = 3y + 1$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $(x, y) = (3y+1, y)$

1.5 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Στις καθημερινές μας δραστηριότητες, συχνά χρειάζεται να κάνουμε μετρήσεις διαφόρων μεγεθών με όργανα. Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους είναι αδύνατον να πραγματοποιηθεί με απόλυτη ακρίβεια. Όταν κάνουμε μια μέτρηση με ένα όργανο, η τιμή του μεγέθους που βρίσκουμε, δεν είναι η *πραγματική τιμή*, αλλά είναι μια *προσεγγιστική τιμή*. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό, όταν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Η απόκλιση του αποτελέσματος της μέτρησης από την πραγματική τιμή καλείται ***σφάλμα***. Τα σφάλματα μπορεί να οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων μέτρησης, λάθη του παρατηρητή ή σε ασταθείς εξωτερικούς παράγοντες.

Έστω $\hat{x}$ η προσεγγιστική τιμή και x η πραγματική τιμή ενός μεγέθους. Ονομάζουμε ***απόλυτο σφάλμα***, την απόλυτη τιμή της διαφοράς αυτών των αριθμών. Δηλαδή το απόλυτο σφάλμα Δx είναι:

$$\boldsymbol{\Delta x = |\hat{x} - x|}$$

Μερικές φορές η τιμή του απόλυτου σφάλματος δεν μας δίνει σαφή εικόνα ως προς το αν το σφάλμα είναι σημαντικό. Δηλαδή είναι δυνατόν η ίδια ακριβώς τιμή απόλυτου σφάλματος, σε μια μέτρηση να δείχνει μικρό σφάλμα, ενώ σε μια άλλη μεγάλο. Για παράδειγμα, ένας σπουδαστής μέτρησε το μήκος του θρανίου του. Το πραγματικό μήκος ήταν 80 cm και η μέτρηση του σπουδαστή ήταν 75 cm. Δηλαδή απόλυτο σφάλμα: 80 – 75 = 5 cm. Ένας άλλος σπουδαστής μέτρησε την περίμετρο του πίνακα. Το πραγματικό μήκος ήταν 6,4 m ή 640 cm και η μέτρηση 645 cm. Δηλαδή, το ίδιο απόλυτο σφάλμα. Είναι προφανές όμως ότι το σφάλμα 5 cm σε πραγματική τιμή 80 cm θεωρείται σημαντικότερο σφάλμα απ' ό,τι σε πραγματική τιμή 640 cm. Έτσι, ορίζουμε το σχετικό σφάλμα, το οποίο μας δείχνει το ποσοστό σφάλματος επί της ακριβούς τιμής. Ονομάζουμε ***σχετικό σφάλμα*** τον λόγο του απόλυτου σφάλματος προς το απόλυτο της πραγματικής τιμής:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|}}$$

Το σχετικό σφάλμα δεν έχει μονάδα μέτρησης, είναι καθαρός αριθμός. Εάν υπολογίσουμε τα σχετικά σφάλματα των μετρήσεων των δύο σπουδαστών:

1η μέτρηση: $x = 80$ cm, $\Delta x = 5$ cm

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{5}{80} = 0{,}0625 \ \text{ ή } \ 6{,}25\%$$

2η μέτρηση: $x = 640$ cm, $\Delta x = 5$ cm

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{5}{640} = 0{,}0078125 \ \text{ ή } 0{,}78125\%$$

Βλέπουμε πόσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό σφάλματος της μέτρησης του πρώτου σπουδαστή.

Παράδειγμα 1.11

Να βρεθεί το απόλυτο και σχετικό σφάλμα στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x = 3{,}141592$ και $\hat{x} = 3{,}14$

β) $x = 1.000.000$ και $\hat{x} = 999.998$

γ) $x = 0{,}000026$ και $\hat{x} = 0{,}000021$

Λύση

α) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |3{,}14 - 3{,}141592| = 0{,}001592$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0{,}001592}{3{,}141592} = 0{,}000507 \text{ ή } 0{,}0507\%$$

β) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |999.998 - 1.000.000| = 2$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0{,}000002}{1.000.000} = 0{,}000002 \text{ ή } 0{,}0002\%$$

γ) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |0{,}000021 - 0{,}000026| = 0{,}000005$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0{,}000005}{0{,}000026} = 0{,}19230769 \text{ ή } 19{,}230769\%$$

– Κανόνες μετάδοσης σφαλμάτων

Εκτός από τα φυσικά μεγέθη που μετριούνται με χρήση κάποιου οργάνου, υπάρχουν και τα μεγέθη που υπολογίζονται εμμέσως, μέσω κάποιας σχέσης. Δηλαδή ο παρατηρητής μετράει 2 ή περισσότερα μεγέθη με όργανα μέτρησης και στη συνέχεια υπολογίζει την τιμή ενός άλλου μεγέθους που εξαρτάται από αυτά, με μαθηματικούς υπολογισμούς. Παρακάτω θα δούμε, πώς υπολογίζεται το σφάλμα στο μέγεθος αυτό, αν είναι γνωστά τα σφάλματα των μετρούμενων μεγεθών, ανάλογα με τη μαθηματική σχέση υπολογισμού.

1) ***Αθροίσματα και διαφορές:*** Αν $\boldsymbol{x = A \pm B}$, τότε σφάλμα: $\Delta x = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$

2) ***Γινόμενα και πηλίκα:*** $\boldsymbol{x = A \cdot B}$ ή $\boldsymbol{x = \frac{A}{B}}$ τότε, σχετικό σφάλμα: $\frac{\Delta x}{x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$ οπότε σφάλμα: $\Delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot x$

3) ***Μετρούμενη ποσότητα επί σταθερό αριθμό:*** $\boldsymbol{x = \lambda \cdot A}$ τότε σφάλμα: $\Delta x = \lambda \cdot \Delta A$ και σχετικό σφάλμα $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A}$

4) ***Σφάλμα δύναμης μετρούμενης ποσότητας:*** $\boldsymbol{x = A^n}$ τότε, σχετικό σφάλμα: $\frac{\Delta x}{x} = n \cdot \frac{\Delta A}{A}$ οπότε σφάλμα: $\Delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot x$

Πρόβλημα 1.3

Σε μία δεξαμενή νερού κυβικού σχήματος, μετρήθηκε η ακμή της. Αν το σφάλμα της μέτρησης ήταν 3 cm και η πραγματική τιμή της ακμής είναι 1,2 m, να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

Λύση

3 cm = 0,03 m

Ο υπολογισμός του όγκου γίνεται από τον τύπο $V = \alpha^3$. Άρα σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 3 \cdot \frac{0{,}03}{1{,}2} = 0{,}075 \text{ ή } 7{,}5\%$$

Η πραγματική τιμή του όγκου είναι $V = (1{,}2\,\text{m})^3 = 1{,}728\,\text{m}^3$

Άρα το σφάλμα στη μέτρηση του όγκου είναι: $\Delta V = \frac{\Delta V}{V} \cdot V = 0{,}075 \cdot 1{,}728 = 0{,}1296\,\text{m}^3$ ή 129,6 lt.

Στο παράδειγμα αυτό, βλέπουμε ότι ένα σφάλμα μέτρησης 3 cm στο μήκος, επιφέρει σφάλμα 129,6 lt στον όγκο της δεξαμενής!

Πρόβλημα 1.4

Η ελεύθερη επιφάνεια μίας δεξαμενής έρματος πλοίου έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το μήκος μετρήθηκε 15,3 m, ενώ η αληθινή τιμή του είναι 15,1 m και το πλάτος 10,7 m, με αληθινή τιμή 10,3 m. Ποιο είναι το σχετικό σφάλμα στη μέτρηση του μήκους και του πλάτους και ποιο το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του εμβαδού;

Λύση

Σχετικό σφάλμα στη μέτρηση μήκους: $\frac{\Delta A}{A} = \frac{0{,}2}{15{,}1} \cong 0{,}0132$

Σχετικό σφάλμα στη μέτρηση πλάτους: $\frac{\Delta B}{B} = \frac{0{,}4}{10{,}3} \cong 0{,}0388$

Άρα το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του εμβαδού $E = A \cdot B$:

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}0132^2 + 0{,}038^2} = \sqrt{0{,}00017424 + 0{,}001444} = \sqrt{0{,}00161824} \cong 0{,}040227 \text{ ή } 4{,}0227\%$$

1.6 Συμμιγείς αριθμοί

Συμμιγής λέγεται οποιοσδήποτε αριθμός αποτελείται από δύο ή περισσότερους ακεραίους, οι οποίοι αναφέρονται στο ίδιο φυσικό μέγεθος, και των οποίων οι μονάδες μέτρησης είναι πολλαπλάσια ή υποδιαιρέσεις της ίδιας αρχικής μονάδας μέτρησης. Μερικά μεγέθη που εκφράζονται με συμμιγείς αριθμούς είναι το βάρος, ο χρόνος, το μήκος, οι γωνίες.

Για παράδειγμα:

2 κιλά 300 γραμμάρια

5 ημέρες 6 ώρες 40 λεπτά 16 δευτερόλεπτα

10 μέτρα 5 δέκατα 7 εκατοστά

1.6.1 Συμμιγείς με μονάδες μέτρησης χρόνου

Τα μικρά χρονικά διαστήματα τα μετρούμε με την ***ώρα (h)*** και τις υποδιαιρέσεις της, το ***λεπτό (min)*** και το ***δευτερόλεπτο (s)***.

1 h = 60 min = 3600 s

1 min = 60 s

Για μεγάλες χρονικές διάρκειες χρησιμοποιούμε την ***ημέρα*** και τα πολλαπλάσιά της, τον ***μήνα*** και το ***έτος***.

1 ημέρα = 24 h
1 μήνας = 30 ημέρες
1 έτος = 12 μήνες = 360 ημέρες

Πρόβλημα 1.5

Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι του Πειραιά στις 21:45:00. Αν η απόσταση Πειραιάς – Χανιά είναι 150 ν.μ. και το πλοίο ταξιδεύει με ταχύτητα 20 knots, τι ώρα θα φτάσει στα Χανιά;

Λύση

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 20 = \frac{150}{t} \Leftrightarrow t = \frac{150}{20} \Leftrightarrow t = 7{,}5 \text{ h}$$

7,5 h = 7 h + 0,5 h = 7 h (0,5 · 60) min =7h 30 min

$$\begin{array}{rll} & 21\text{ h} & 45\text{ min} \\ + & 7\text{ h} & 30\text{ min} \\ \hline & 28\text{ h} & 75\text{ min} \\ & 29\text{ h} & 15\text{ min} \end{array}$$

Επειδή 29>24 το πλοίο θα φτάσει την επόμενη ημέρα. Αφαιρώ 29 – 24 = 5h (κάνω την αφαίρεση επειδή αλλάζει ημέρα). Άρα φτάνει στο λιμάνι των Χανίων: 05:15:00 την επόμενη ημέρα.

Πρόβλημα 1.6

Ένα πλοίο ξεκινάει στις 10 Νοεμβρίου 22:50:00 από ένα σημείο Α και πλέει με ταχύτητα 15 knots για 400 ν.μ. έως ένα σημείο Β. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

Λύση

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 15 = \frac{400}{t} \Leftrightarrow t = \frac{400}{15} \Leftrightarrow t = 26{,}667 \text{ h}$$

t = 26,667 h = 26 h + 0,667 h= 26 h (0,667 · 60) min = 26 h 40,02 min =
= 26 h 40 min + 0,02 min = 26 h 40 min (0,02 · 60) s = 26 h 40min 1,2 s
ή 26 h 40 min 1 s (στρογγυλοποιήσαμε τα δευτερόλεπτα)

$$\begin{array}{rlll} & 22\text{ h} & 50\text{ min} & 0\text{ s} \\ + & 26\text{ h} & 40\text{ min} & 1\text{ s} \\ \hline & 48\text{ h} & 90\text{min} & 1\text{ s} \end{array}$$

ή

49 h 30min 1 s

Αφαιρώ 49 – 48 = 1 h (αφαιρώ δύο 24ωρα). Άρα άφιξη: 12 Νοεμβρίου 1:30:01

Πρόβλημα 1.7

Ένα πλοίο ξεκίνησε από το λιμάνι Α στις 21:45:00 και έφτασε στο λιμάνι Β στις 6:10:00 το επόμενο πρωινό, πλέοντας με μέση ταχύτητα 18 knots. Πόση είναι η απόσταση των 2 λιμανιών σε ν.μ.;

Λύση

6 h + 24 h = 30 h (Προσθέτουμε 24 ώρες γιατί αλλάζει ημέρα)

$$\left.\begin{array}{r} 30\,\text{h}\;10\,\text{min}\;0\,\text{s} \\ -21\,\text{h}\;45\,\text{min}\;0\,\text{s} \\ \hline \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 29\,\text{h}\;70\,\text{min}\;\;0\,\text{s} \\ -21\,\text{h}\;\;45\,\text{min}\;0\,\text{s} \\ \hline 8\text{h}\;\;25\,\text{min}\;\;\;0\,\text{s} \end{array}\right\}$$

$$8\text{ h } 25\text{ min} = 8\text{ h} + \frac{25}{60}\text{ h} = 8\text{ h} + 0{,}417\text{ h} = 8{,}417\text{ h}$$

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 18 = \frac{x}{8{,}417} \Leftrightarrow x = 18 \cdot 8{,}147 \Leftrightarrow x = 146{,}646\text{ h}$$

1.6.2 Συμμιγείς με μονάδες μέτρησης γωνιών

Το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε ***μοίρες*** και στις υποδιαιρέσεις της, ***πρώτα λεπτά*** και ***δεύτερα λεπτά***.

1 μοίρα: 1°
1 πρώτο λεπτό: $1'$
1 δεύτερο λεπτό: $1''$
Ισχύει: $1^{\circ} = 60' = 3600''$ και $1' = 60''$

Παράδειγμα 1.12

Να μετατραπεί η γωνία $36{,}14^{\circ}$ σε συμμιγή αριθμό.

Λύση

$$36{,}14^{\circ} = 36^{\circ} + 0{,}14^{\circ} = 36^{\circ}\,(0{,}14 \cdot 60)' = 36^{\circ}\;8{,}4' = 36^{\circ}\;8' + 0{,}4' =$$
$$= 36^{\circ}\;8'\;(0{,}4 \cdot 60)'' = 36^{\circ}\;8'\;24''$$

Παράδειγμα 1.13

Να μετατραπεί η γωνία $16^{\circ}\;38'\;46''$ σε μοίρες.

Λύση

$$16^{\circ}38'46'' = 16^{\circ}38' + \left(\frac{46}{60}\right)' = 16^{\circ}38' + 0{,}767' = 16^{\circ}38{,}767' =$$

$$= 16^{\circ} + \left(\frac{38{,}767}{60}\right)^{\circ} = 16^{\circ} + 0{,}646^{\circ} = 16{,}646^{\circ}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $A = 3 \cdot (7^2 - 6 \cdot 2^3)^{2022} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left[(-2)^4 - 17\right]^{10}$

β) $B = \frac{10^4}{(-5)^4} + \frac{28^5}{14^5} - \frac{(-24)^3}{8^3}$

γ) $\Gamma = (-2)^3 \cdot 3 - (-2)^5 : 4 + (-4)^2 : (-2) + 5$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $\dfrac{(-3)^4 \cdot (3^2)^3 \cdot 2^3 \cdot 2^7}{(-5)^4 \cdot \left[(-5)^3\right]^2}$ 2) $\dfrac{(2^3 \cdot 2^{-2})^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^2}{(3^3)^{-3} \cdot 3^3}$ 3) $\left(\dfrac{x}{y^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)^{-1} \cdot (x^2 \cdot y^{-1})^{-1}$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(5x-2y)^2 + 3 \cdot (x-y)^2 - (3x+4y)^2$

β) $2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2 - (2\alpha + \beta) \cdot (2\alpha - \beta) - 3 \cdot (3\alpha - 2\beta)^2$

γ) $(x-3)^3 - x(x+2)(x-2) - 3(2x+3)^2$

4. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(x+y)^3 = x(x-3y)^2 + y(y-3x)^2$ β) $2(2x-1)^3 - (x-2)(4x+1)^2 = 27x$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{1-x}{4} - \dfrac{3x-2}{3} = \dfrac{2x+5}{6}$ β) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{x-4}{2} = x - \dfrac{13}{6}$

γ) $\dfrac{3}{7}(x-1) = 2(x-1) - \dfrac{5(x+3)}{14}$ δ) $\dfrac{3x-5}{2} - \dfrac{4x-2}{5} = \dfrac{3(x-2)}{10} + \dfrac{x-23}{2}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3(5+2x) - 2(x-1) = 18 + 2(3+2x)$ β) $4(x-1) - 2(x-2) = 3 - x - 3(1-x)$

γ) $x - \dfrac{2x-7}{4} + \dfrac{1-x}{2} = 0$ δ) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{2(x-3)}{5} = \dfrac{x+17}{10}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 = 16$ β) $2x^2 = 10x$ γ) $9y^2 - 49 = 0$

δ) $x^2 + 8x = 0$ ε) $3\omega^2 + 12 = 0$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ β) $5x^2 - 14x - 3 = 0$ γ) $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0$

δ) $36x^2 + 12x + 1 = 0$ ε) $y^2 - y - 2 = 0$ στ) $x^2 - 2x + 7 = 0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(3-2x)^2 + 20 = (5-x)(x+5)$ β) $(2x-3)^2 - (x-1)(x-4) = 9x$

γ) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2(x+2)}{5} = \dfrac{7(x-2)}{10}$ δ) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{(\omega-1)(\omega+1)}{2} = \dfrac{2-\omega}{3} - \dfrac{(\omega-4)^2}{6}$

10. Ένα πλοίο Α ξεκινάει από το λιμάνι των Χανίων με προορισμό τον Πειραιά και πλέει με μέση ταχύτητα 16 knots. Ένα άλλο πλοίο Β ξεκινάει μετά από 2 ώρες από τα Χανιά προς την ίδια κατεύθυνση με μέση ταχύτητα 24 knots. Σε πόσο χρόνο το πλοίο Β θα φτάσει το Α;

11. Ένα επιβατικό πλοίο έχει συνολικά 30 δίκλινες και τρίκλινες καμπίνες. Πόσες είναι οι δίκλινες και πόσες οι τρίκλινες καμπίνες, αν ο συνολικός αριθμός κρεβατιών είναι 68;

12. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

13. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x-3(y-2x)=-8y \\ 4(2x-3y)-15(x+y)=3-25y \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3(x+y)-5(y-x)=14 \\ 3(x+y)-2(x-y)=7 \end{cases}$

14. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3} \\ 3x-2y=11 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 11x+2(y-x)=\dfrac{12x+1}{2} \\ 6x+4y=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{2}=1 \\ x-4y=8 \end{cases}$

15. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}+3+x \\ -5(x+1)=6(y+1) \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}=4-\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{2x-4}{2}+\dfrac{2(3y-1)}{3}=\dfrac{13}{3} \\ \dfrac{2x+y}{6}-\dfrac{x+2y}{2}=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{3x-2y}{6}=\dfrac{4y}{3} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{2y-x+2}{6} \end{cases}$ ε) $\begin{cases} \dfrac{7x+y}{3}-\dfrac{y-1}{2}=x+3 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{9y-1}{4}=-x+1 \end{cases}$

16. Σε μία δεξαμενή νερού σχήματος κύβου, μετρήθηκε η ακμή της. Αν το σφάλμα της μέτρησης ήταν 18 cm και η πραγματική τιμή της ακμής είναι 1,6 m, να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

17. Το μήκος της ακτίνας ενός κύκλου μετρήθηκε 0,8 m. Αν το πραγματικό μήκος της ακτίνας είναι 0,86 m, να βρεθεί το σφάλμα και το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του μήκους και του εμβαδού του. (Μήκος κύκλου: l = 2πr και εμβαδόν κύκλου Ε = πr^2).

18. Μια δεξαμενή καυσίμων έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις: μήκος = 1,25 m, πλάτος = 1,82 m και ύψος = 2,2 m. Ο μηχανικός αποφάσισε να μετρήσει μόνος του τις διαστάσεις, ώστε να μπορεί να ελέγξει την προμήθεια στα καύσιμα. Οι μετρήσεις του μηχανικού ήταν: μήκος = 1,26 m, πλάτος = 1,85 m και ύψος = 2,24 m. Να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

19. Ένα πλοίο ξεκινάει στις 6 Απριλίου 19:50:00 από το λιμάνι Ηρακλείου και πλέει με ταχύτητα 18 knots για 337 ν.μ. έως την Καβάλα. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

20. Η απόσταση Πειραιάς – Γιβραλτάρ είναι 1500 ν.μ. Ένα πλοίο ξεκινάει 6 Σεπτεμβρίου 20:45:35 από το λιμάνι του Πειραιά και πλέει με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης στο Γιβραλτάρ. (***Σημείωση:*** Η ώρα στο Γιβραλτάρ είναι μια ώρα πίσω σε σχέση με τον Πειραιά).

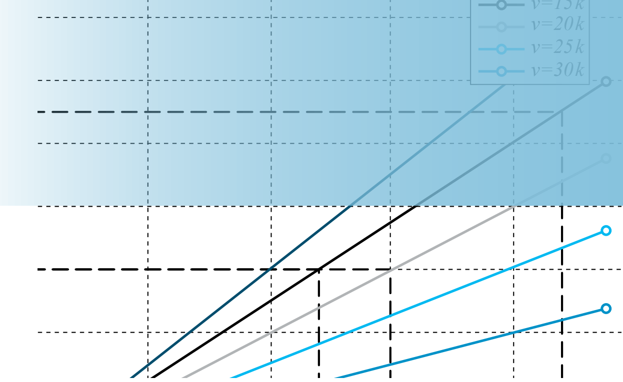
21. Πλοίο κινείται με ταχύτητα 10 knots. Να υπολογιστεί η απόσταση που διανύει από τις 22:30:00 έως τις 5:10:00 του επόμενου πρωινού.

22. Να μετατραπούν οι γωνίες σε συμμιγή αριθμό:

α) $50{,}42^{\circ}$ β) $13{,}085^{\circ}$ γ) $105{,}521^{\circ}$

23. Να μετατραπούν οι παρακάτω γωνίες σε μοίρες:

α) $16^{\circ}\,38'\,46''$ β) $43^{\circ}\,9'\,15''$ γ) $38^{\circ}\,42'\,18''$



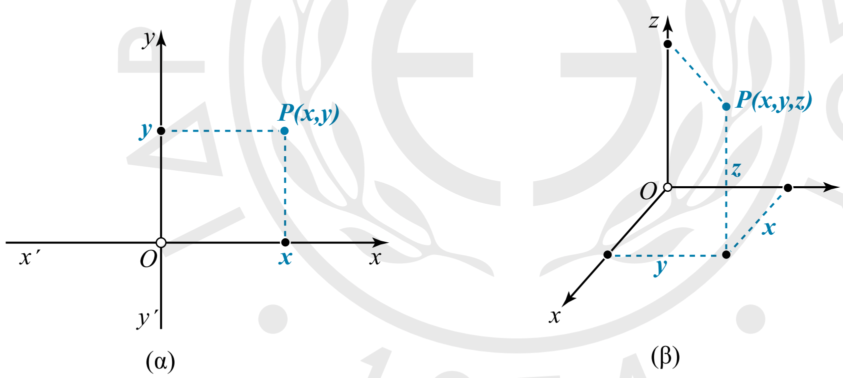
κεφάλαιο 2

Γραφήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τον σχεδιασμό γραφημάτων και τη χρήση αυτών για τον υπολογισμό τιμών μεγεθών. Η γραφική αναπαράσταση δεδομένων χρησιμοποιείται σε όλες τις εφαρμοσμένες επιστήμες, καθώς παρέχει μια εύκολη, εποπτική παρουσίαση της μεταβολής ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο. Στη Ναυτιλία, χρησιμοποιούμε πολύ συχνά γραφήματα δεδομένων πλοίου, ώστε να εξάγουμε την τιμή μιας μεταβλητής ποσότητας, που εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης.

2.1 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

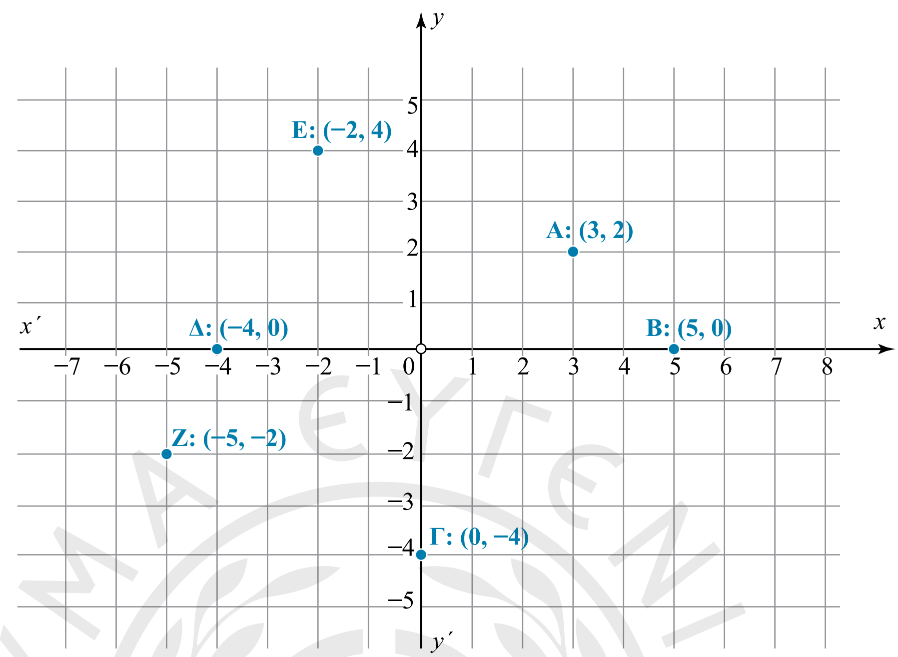
Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο ή στον χώρο. Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο καθορίζεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x,y) [σχ. 2.1(α)], ενώ στον χώρο από μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) [σχ. 2.1(β)]. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.



Σχ. 2.1

Στο επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες *x΄x* και *y΄y* ίδιας κλίμακας. Ο οριζόντιος άξονας *x΄x* έχει φορά προς τα δεξιά και ο κατακόρυφος *y΄y* προς τα πάνω, ενώ το μηδέν σε κάθε άξονα είναι στο σημείο τομής ***O***, το οποίο ονομάζεται ***αρχή των αξόνων***. Οι δύο άξονες αποτελούν ένα ***ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο*** ή αλλιώς ***καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο***, το οποίο συμβολίζεται ***Oxy***. Το σύστημα λέγεται ***ορθοκανονικό*** διότι είναι ***ορθογώνιο*** και ***κανονικό***. Ορθογώνιο είναι επειδή οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους, και κανονικό επειδή έχουν ίδια κλίμακα. Εάν οι άξονες δεν έχουν ίδια κλίμακα, τότε λέμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Η θέση ενός σημείου *P* στο καρτεσιανό επίπεδο καθορίζεται μοναδικά από ένα ***ζεύγος αριθμών (x,y)***. Για να προσδιορίσουμε τους αριθμούς αυτούς φέρνουμε από το *P* τις καθέτους στους δύο άξονες. Ο αριθμός ***x*** που αντιστοιχεί στο σημείο που τέμνει η μία κάθετος τον άξονα *x΄x* λέγεται ***τετμημένη του σημείου P*** και ο αριθμός *y* που αντιστοιχεί στο σημείο που τέμνει η άλλη κάθετος τον *y΄y,* λέγεται ***τεταγμένη του σημείου P***. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται ***συντεταγμένες του σημείου P***. Ο οριζόντιος άξονας *x΄x* λέγεται ***άξονας των τετμημένων***, ενώ ο *y΄y* λέγεται ***άξονας των τεταγμένων***. ΄Ενα σημείο P που έχει τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται $\boldsymbol{P(x,y)}$. Στο σχήμα 2.2 απεικονίζεται ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, όπου μπορούμε να δούμε τις συντεταγμένες διάφορων σημείων.



Σχ. 2.2

Παρατηρούμε ότι τα σημεία που είναι πάνω στον άξονα $x΄x$ έχουν τεταγμένη μηδέν και τα σημεία που είναι πάνω στον $y΄y$ έχουν τετμημένη μηδέν.

Βλέπουμε λοιπόν ότι σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Ισχύει και το αντίστροφο: σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) αντιστοιχεί μοναδικό σημείο στο επίπεδο, που έχει συντεταγμένες το ζεύγος αυτό.

Για να βρούμε το σημείο που αντιστοιχεί σε δοσμένο ζεύγος (x,y), σχεδιάζουμε την κάθετη ευθεία στον $x΄x$ στο x και την κάθετη ευθεία στον $y΄y$ στο y. Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (x,y). Για παράδειγμα το σημείο του επιπέδου που έχει συντεταγμένες $(–3,5)$, είναι το σημείο τομής της κάθετης ευθείας στον $x΄x$ στο $–3$ και της κάθετης ευθείας στον $y΄y$ στο 5 (σχ. 2.3).

Οι δύο άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 τμήματα τα οποία ονομάζουμε ***τεταρτημόρια***. Στο σχήμα 2.4 βλέπουμε το πρόσημο των συντεταγμένων, σε κάθε τεταρτημόριο.

2.2 Σχεδιασμός γραφημάτων από δεδομένα

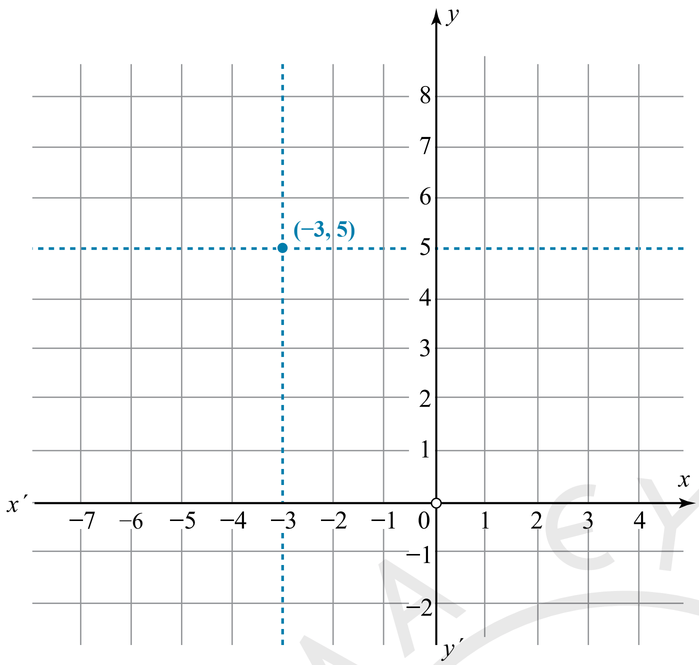
Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον σχεδιασμό γραφήματος δύο αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών x,y, από γνωστές τιμές τους, οι οποίες έχουν προκύψει από μετρήσεις. Αν σε ένα σύστημα αξόνων σημειώσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη των «αντίστοιχων τιμών» των μεγεθών x, y, και τα ενώσουμε μεταξύ τους, η γραμμή που σχηματίζεται ονομάζεται ***γράφημα***. Η χάραξη γραφημάτων (ή γραφικών παραστάσεων) είναι μια πολύ σημαντική εργασία, καθώς το γράφημα:

1) Αποτελεί μια οπτική παρουσίαση της σχέσης μεταξύ των δύο μετρούμενων μεγεθών.

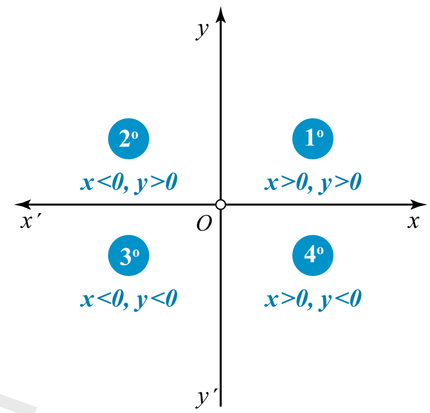
2) Παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού άλλων «ενδιάμεσων τιμών».

Για τον σωστό σχεδιασμό του γραφήματος $y=f(x)$, του μεγέθους y ως συνάρτηση του μεγέθους x, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1) ***Χαράσσουμε τους άξονες*** και αναγράφουμε το μέγεθος που παριστά ο καθένας. Το



Σχ. 2.3



Σχ. 2.4

μέγεθος δηλώνεται είτε με λέξη είτε με το σύμβολο (μεταβλητή). Θα πρέπει επίσης να συμπεριλαμβάνονται (σε παρένθεση) και οι αντίστοιχες μονάδες μέτρησης της μεταβλητής. Κατά συνθήκη, το y (η εξαρτημένη μεταβλητή) θα πρέπει να σχεδιάζεται κατά μήκος του κάθετου άξονα, και το x (η ανεξάρτητη μεταβλητή) θα πρέπει να ορίζεται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα.

2) ***Επιλέγουμε κατάλληλη κλίμακα*** για κάθε άξονα (βαθμονόμηση άξονα). Η κλίμακα επιλέγεται κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να είναι εύκολο να σχεδιάζονται τα δεδομένα και να διαβάζονται. ΄Ετσι:

α) Με βάση τις τιμές των μεταβλητών, επιλέγουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή κάθε άξονα, καθώς και το ***«βήμα»*** κάθε άξονα.

β) Χρησιμοποιούμε ως «βήμα» πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του 1, του 2 και του 5. Άλλες επιλογές (όπως 3) κάνουν τη σχεδίαση και την ανάγνωση των δεδομένων πολύ δύσκολη.

γ) Δεν είναι απαραίτητο η αρχή των αξόνων να είναι το σημείο (0,0).

δ) Δεν είναι απαραίτητο οι άξονες να έχουν την ίδια κλίμακα.

3) ***Εισάγουμε τα σημεία δεδομένων στο γράφημα.*** ΄Ετσι:

α) Δεν χαράσσουμε διακεκομμένες γραμμές στις συντεταγμένες των σημείων.

β) Δεν αναγράφουμε στους άξονες τις συντεταγμένες των σημείων.

4) ***Σχεδιάζουμε μια απλή ομαλή καμπύλη*** διά μέσου των σημείων δεδομένων. Η καμπύλη δεν θα περάσει απαραίτητα από όλα τα σημεία, αλλά θα πρέπει να περάσει όσο γίνεται πιο κοντά σε όλα τα σημεία**.**

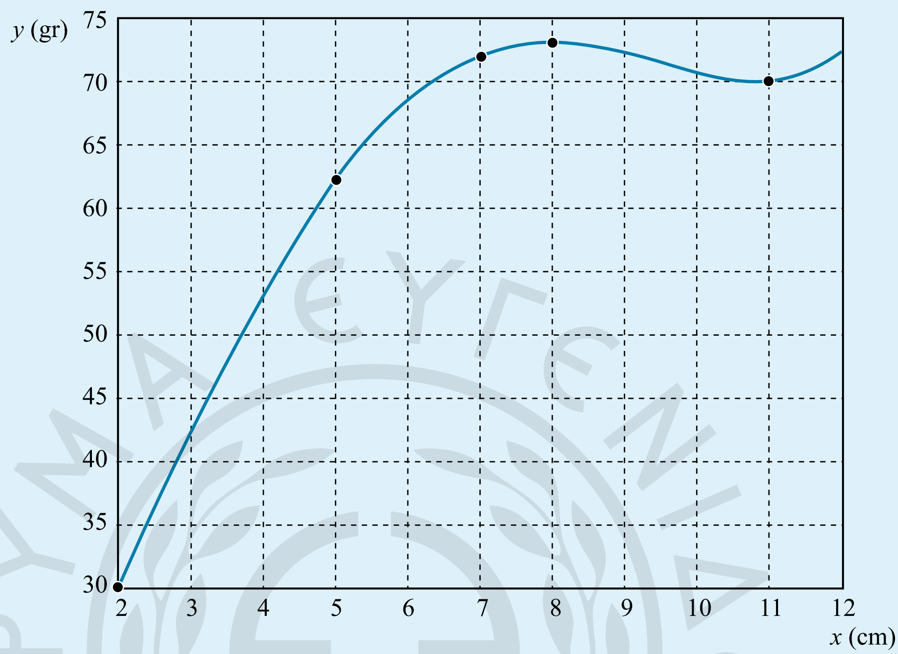
Παράδειγμα 2.1

Να γίνει το γράφημα $y=f(x)$ για τον παράπλευρο πίνακα τιμών.

x (cm)	***y*** (gr)
2	30
5	62
7	72
8	73
11	70

Λύση

Η μεταβλητή x που θα τοποθετηθεί στον οριζόντιο άξονα έχει ελάχιστη τιμή 2 και μέγιστη 11. Επομένως θα βάλουμε στον οριζόντιο άξονα τιμές από 2 έως 11 (τουλάχιστον) και το βήμα θα είναι 1. Η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 30 έως 73. Επομένως η αρίθμηση στον κατακόρυφο άξονα ξεκινάει από το 30, και θα χρησιμοποιήσουμε βήμα 5 (λόγω μεγάλου εύρους τιμών). Σημειώνουμε τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών που προκύπτουν από τον πίνακα, και τα ενώνουμε με μια ομαλή καμπύλη (σχ. 2.5).



Σχ. 2.5

Παράδειγμα 2.2

Να σχεδιαστεί το γράφημα της απόστασης *x*, σε ν.μ., που διανύει ένα πλοίο ως συνάρτηση του χρόνου *t*, σε h, για χρονική διάρκεια ενός 24ώρου και για συγκεκριμένες ταχύτητες $v_1 = 10$ knots, $v_2 = 15$ knots, $v_3 = 20$ knots, $v_4 = 25$ knots, $v_5 = 30$ knots. Στη συνέχεια, μέσω των γραφημάτων να απαντηθούν οι ερωτήσεις:

α) Αν ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα 25 knots, πόση απόσταση θα διανύσει σε 12 h;

β) Αν ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα 20 knots, σε πόση ώρα θα διανύσει 300 ν.μ.;

γ) Με ποια ταχύτητα πρέπει να πλεύσει ένα πλοίο, ώστε να διανύσει 550 ν.μ. σε 22 h;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του πλοίου δίνεται από τον τύπο:

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow x = v \cdot t$$

Όπως θα αναφερθεί και στα παρακάτω, δύο μεγέθη x και y που συνδέονται με σχέση της μορφής $y = \alpha \cdot x$ όπου α σταθερός αριθμός, λέγονται ανάλογα και το γράφημά τους είναι μια ευθεία γραμμή. Επομένως από τη σχέση $x = v \cdot t$ συμπεραίνουμε ότι το γράφημα που θα σχεδιάσουμε για τον χρόνο t και την απόσταση x που διανύει το πλοίο θα είναι μια ευθεία. Και επομένως για να τη σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε δύο σημεία. Έτσι, έχουμε τους παρακάτω 5 πίνακες τιμών για τις 5 διαφορετικές ταχύτητες:

v = 10 knots $x = 10 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	240

v = 15 knots $x = 15 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	360

v = 20 knots $x = 20 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	480

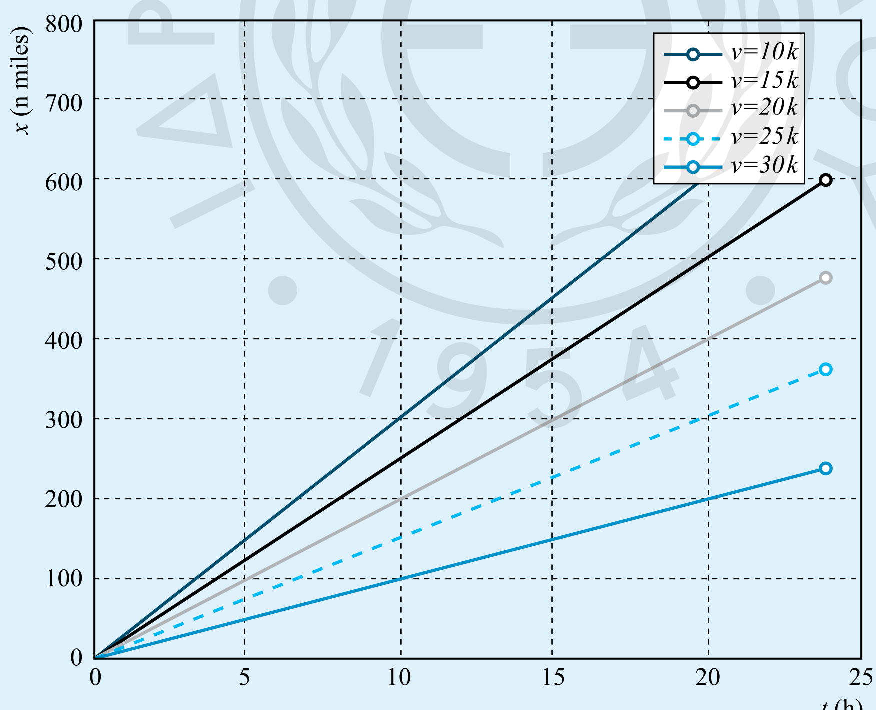
v = 25 knots $x = 25 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	600

v = 30 knots $x = 30 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	720

Στη συνέχεια θα παραστήσουμε γραφικά τις 5 ευθείες. Στον οριζόντιο άξονα θα τοποθετηθεί ο χρόνος t. Οι τιμές που θα βάλουμε είναι από 0 έως 24 h, οπότε θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το βήμα 5. Η απόσταση x που θα μπει στον κατακόρυφο άξονα έχει τιμές από 0 έως 720. Επομένως ένα κατάλληλο βήμα είναι 100 (σχ. 2.6)

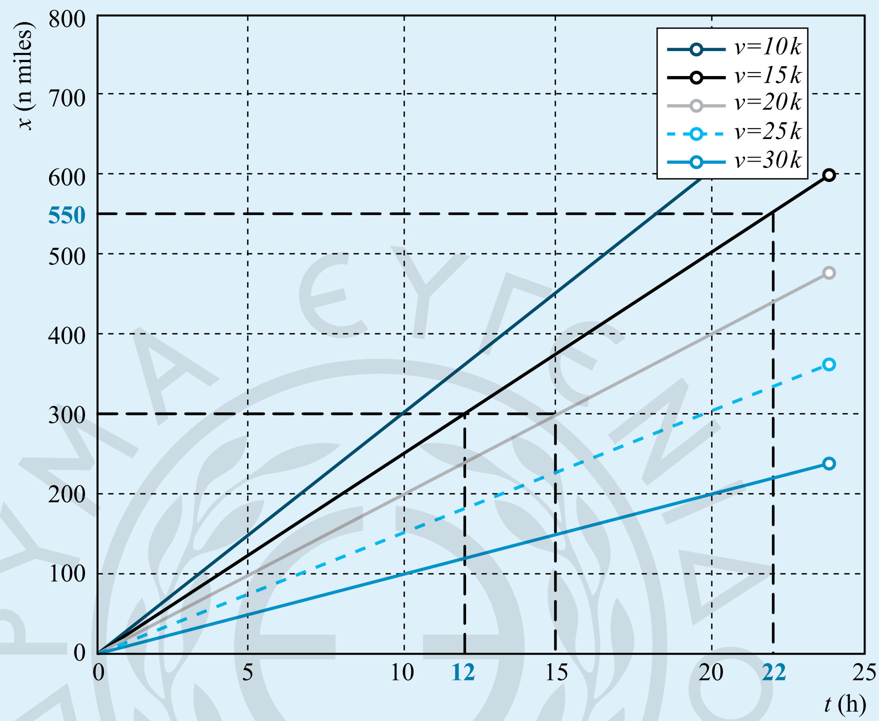


Σχ. 2.6

α) Από το γράφημα βλέπουμε ότι για t=12 h η αντίστοιχη τεταγμένη του σημείου του γραφήματος (v =25 knots) είναι 300. Άρα όταν το πλοίο κινείται με ταχύτητα 25 knots, σε 12 h θα διανύσει 300 ν.μ. (σχ. 2.7).

β) Στον κατακόρυφο άξονα βρίσκουμε την τιμή 300. Από το γράφημα (v=20 knots) βλέπουμε ότι η αντίστοιχη τετμημένη του σημείου της ευθείας που αντιστοιχεί σε ταχύτητα 20 knots είναι 15. Άρα όταν ένα πλοίο πλέει με 20 knots θα διανύσει 300 ν.μ. σε 15 h (σχ. 2.7).

γ) Φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα στο t=22 και στον κατακόρυφο στο x=550. Το σημείο με συντεταγμένες (22, 550) βλέπουμε ότι βρίσκεται πάνω στην ευθεία ταχύτητας 25 knots (σχ. 2.7).



Σχ. 2.7

2.3 Γραφήματα βασικών συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, όπως ***ευθεία***, ***παραβολή***, ***υπερβολή***, $\boldsymbol{y=x^3}$, $\boldsymbol{y=a\sqrt{x}}$, ***λογαριθμική*** και ***εκθετική***. (Οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων θα παρουσιαστούν στο κεφάλαιο 5).

1) $\boldsymbol{y = a \cdot x + \beta}$

Η γραφική παράσταση της $y=\alpha x+\beta$ είναι ***ευθεία γραμμή***. Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ λέγεται ***κλίση της ευθείας*** ή ***συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας***. Για τον υπολογισμό της κλίσης χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες δύο σημείων Α($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1$) και Β($\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2$) (σχ. 2.8).

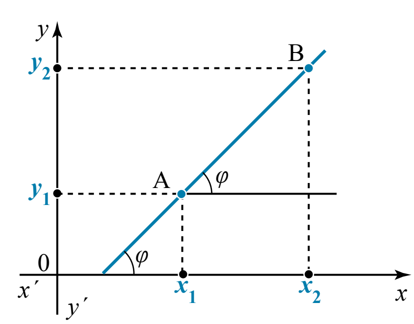
$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Αν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, δηλαδή αν οι άξονες έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, τότε ισχύει:

$$\boldsymbol{\alpha = \varepsilon\varphi\varphi}$$

όπου: φ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον ημιάξονα Ox, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9.

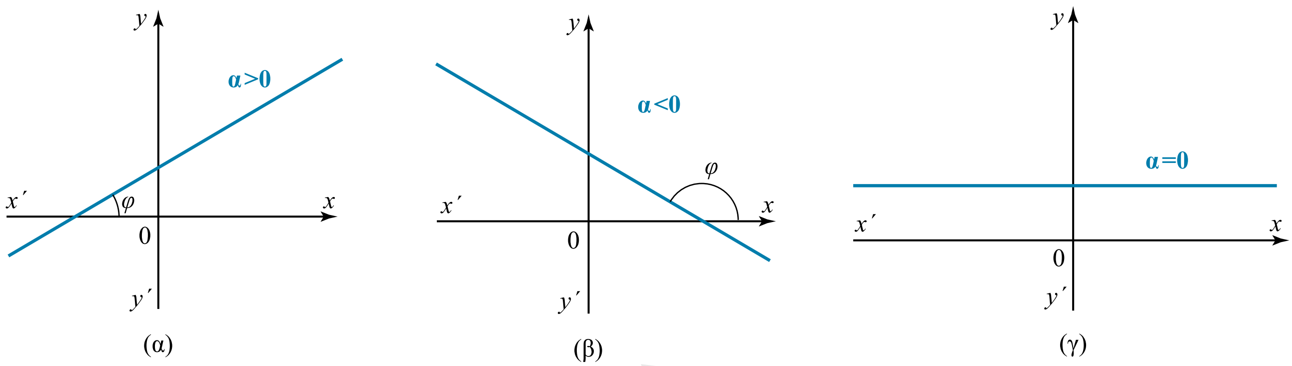
α) Αν $\alpha>0$ τότε $0^o < \varphi < 90^o$ [σχ. 2.9(α)]



Σχ. 2.8

β) Αν $\alpha<0$ τότε $90^{o} < \varphi < 180^{o}$ [σχ. 2.9(β)]

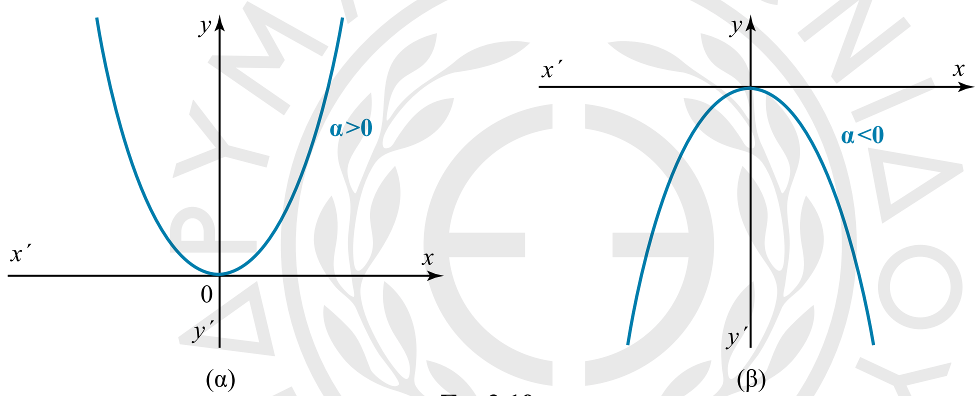
γ) Αν $\alpha=0$ τότε $\varphi=0^{o}$, που σημαίνει ότι η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ [σχ. 2.9(γ)]



Σχ. 2.9

2) $\boldsymbol{y = a \cdot x^2}$

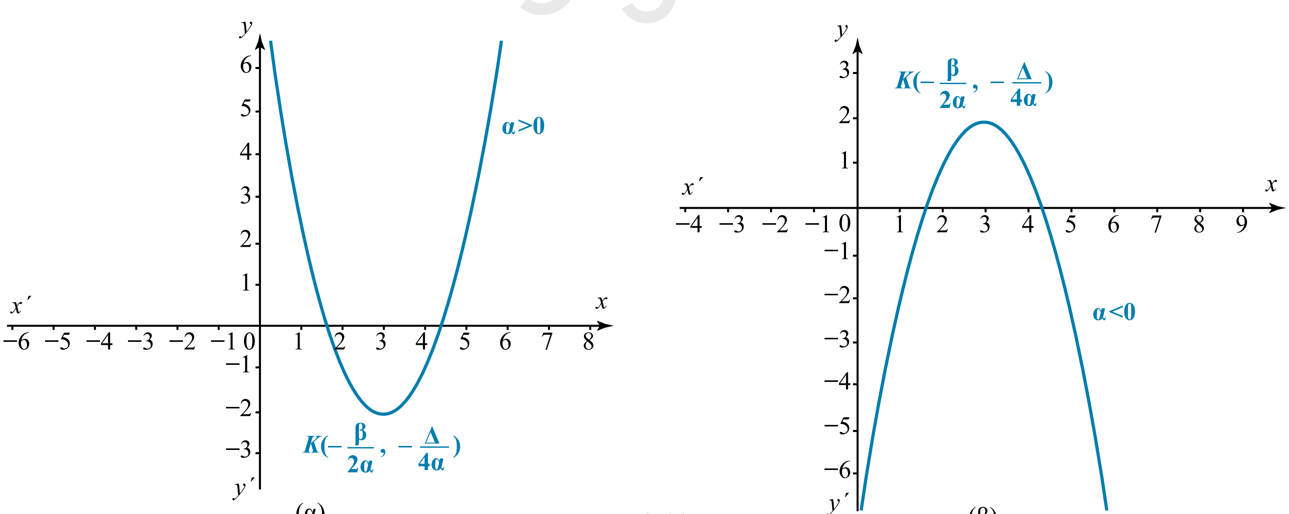
Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $y = a \cdot x^2$ ονομάζεται ***παραβολή*** (σχ. 2.10).



Σχ. 2.10

Γενική περίπτωση: $\boldsymbol{y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0}$

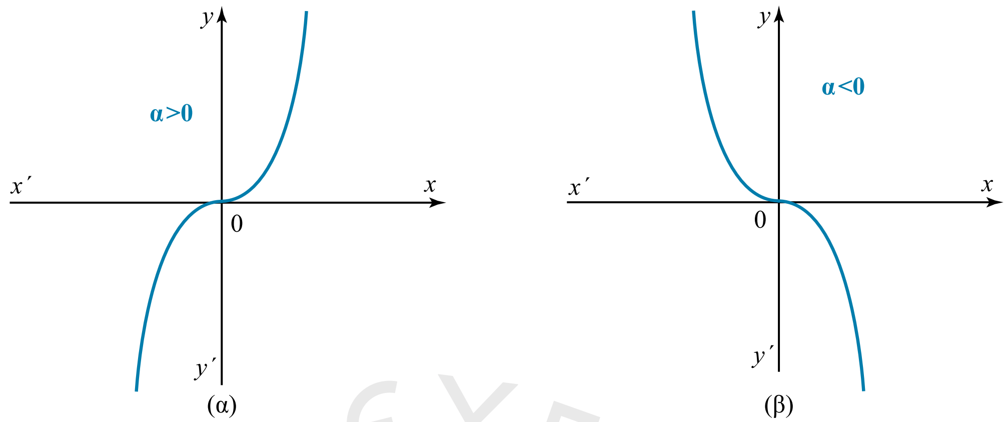
Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\boldsymbol{y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ είναι επίσης ***παραβολή***, η οποία έχει την κορυφή της στο σημείο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$ [σχ. 2.11(α),(β)].



Σχ. 2.11

3) $\boldsymbol{y = a \cdot x^3}$

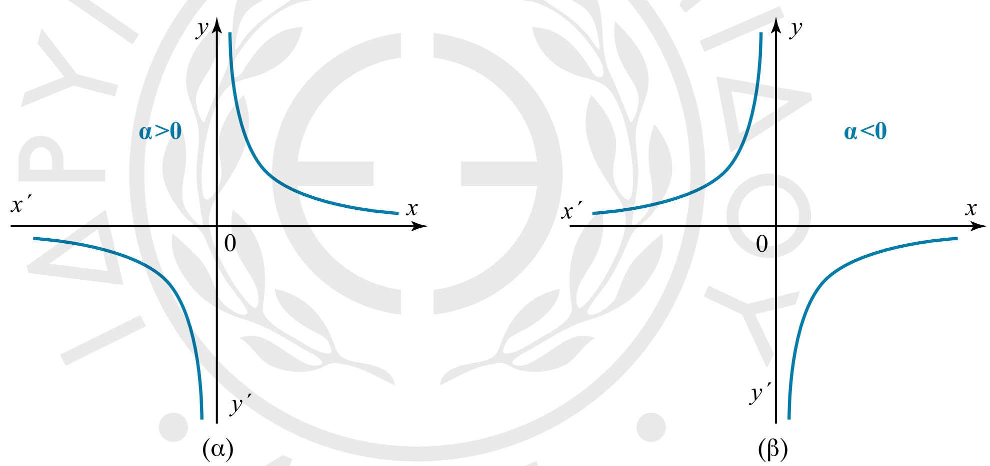
Το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{y} = \alpha \cdot x^3$ εικονίζεται στο σχήμα 2.12.



Σχ. 2.12

4) $\boldsymbol{y = \frac{a}{x}}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$

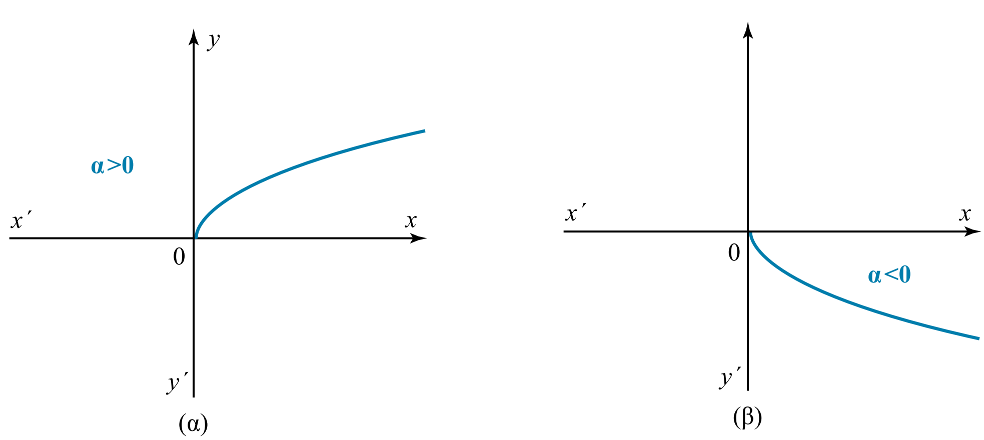
Το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x}}$ λέγεται ***υπερβολή*** (σχ. 2.13).



Σχ. 2.13

5) $\boldsymbol{y = a\sqrt{x}}$

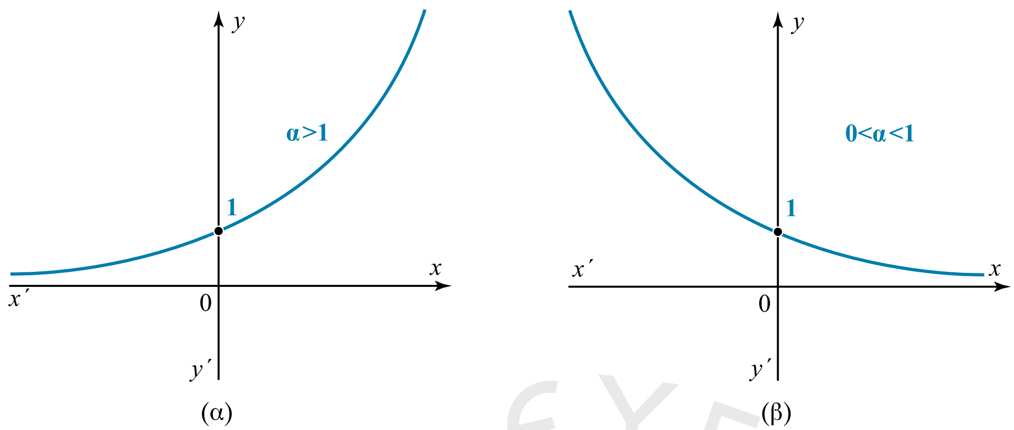
Το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{y = a\sqrt{x}}$ εικονίζεται στο σχήμα 2.14.



Σχ. 2.14

6) *Εκθετική συνάρτηση:* $\boldsymbol{y = a^x}$, $0 < \boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$

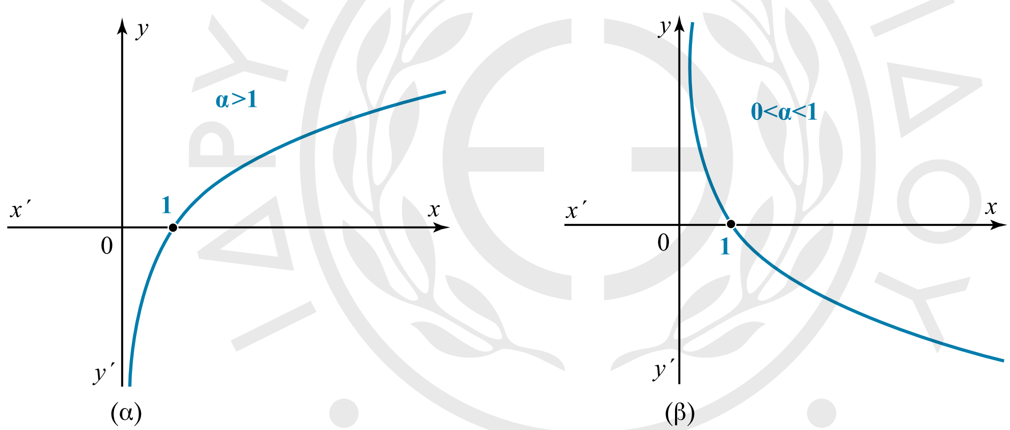
Το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{y = a^x}$, $0 < \boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$ εικονίζεται στο σχήμα 2.15.



Σχ. 2.15

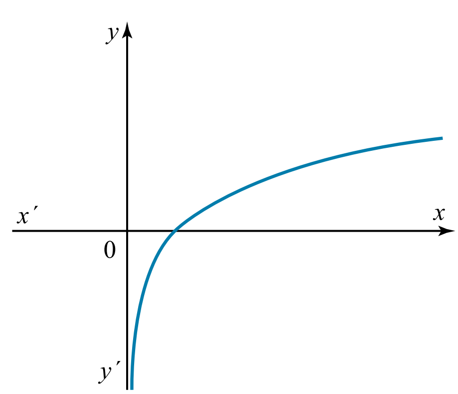
7) $\boldsymbol{y = \log_a x}$, $\mathbf{0 < \boldsymbol{a} \neq 1}$

Το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{y = \log_a x}$, $\mathbf{0 < \boldsymbol{a} \neq 1}$ εικονίζεται στο σχήμα 2.16.



Σχ. 2.16

Ειδικά όταν $\boldsymbol{a = e}$ η συνάρτηση $\boldsymbol{y = \ln x}$ έχει το γράφημα που εικονίζεται στο σχήμα 2.17.



Σχ. 2.17

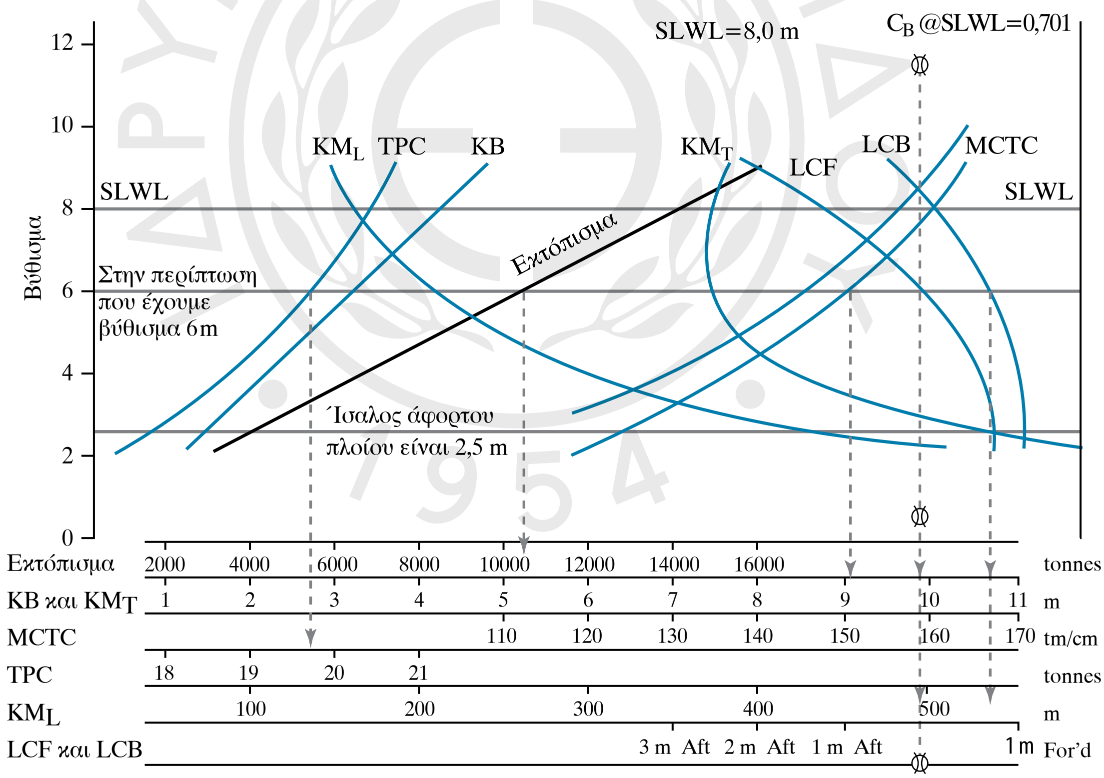
2.4 Μελέτη γραφημάτων δεδομένων πλοίου

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε κάποια γραφήματα που χρησιμοποιούνται στη ναυπηγία, όπως υδροστατικές καμπύλες, καμπύλες ευστάθειας. Τα γραφήματα αυτά αποτελούν τη γεωμετρική ταυτότητα ενός πλοίου, και παρέχουν τα απαραίτητα στοιχεία για τον υπολογισμό ισορροπίας του στις διάφορες καταστάσεις φόρτωσης.

2.4.1 Υδροστατικό διάγραμμα πλοίου

Το υδροστατικό διάγραμμα ενός πλοίου αποτελείται από ένα σύνολο καμπυλών που μας δίνουν πληροφορίες για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλοίου, συναρτήσει του μέσου βυθίσματος. Στο σχήμα 2.18 βλέπουμε ένα τυπικό υδροστατικό διάγραμμα πλοίου, όπου ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο βύθισμα, και ο οριζόντιος στα υδροστατικά στοιχεία του. Κάποια από τα μεγέθη που αναπαριστούν οι καμπύλες είναι:

1) Το εκτόπισμα *Δ* (Displacement).
2) Θέση κέντρου άντωσης KB.
3) Κατακόρυφη θέση διαμήκους μετακέντρου KML.
4) Τόνοι ανά εκατοστό βύθισης TPc.
5) Εγκάρσιο μετακεντρικό ύψος KMt.
6) Διαμήκες μετακεντρικό ύψος MTc.
7) Διαμήκης θέση κέντρου άντωσης LCB.



LCB Διάμηκης θέση κέντρου όγκου
LCF Διαμήκης θέση κέντρου πλευστότητας
KMT Εγκάρσια θέση μετακεντρικού ύψους
KML Διαμήκης θέση μετακεντρικού ύψους
aft Προς την πρύμνη (πρύμνηθεν)
MCT (MCTC) Ροπή για μεταβολή της διαγωγής κατά 1 cm
TPC Αυξηση του εκτοπίσματος σε τόνους για βύθιση κατά 1cm
KB Κατακόρυφη θέση κέντρου όγκου
SLWL Ίσαλος θερινής φόρτωσης
for Προς την πλώρη (πρώραθεν)

Σχ. 2.18
Υδροστατικές καμπύλες πλοίου

2.4.2 Καμπύλες ευστάθειας

Το κριτήριο ευστάθειας ενός πλοίου είναι η παραγόμενη ροπή $\Delta \cdot \boldsymbol{GZ}$, όπου Δ το εκτόπισμα και ***GZ*** ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς. Για κάθε πλοίο ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς, είναι συνάρτηση του εκτοπίσματος Δ, της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ και της θέσης του κέντρου βάρους KG.

$$GZ = f\,(\Delta, \varphi, \mathrm{KG})$$

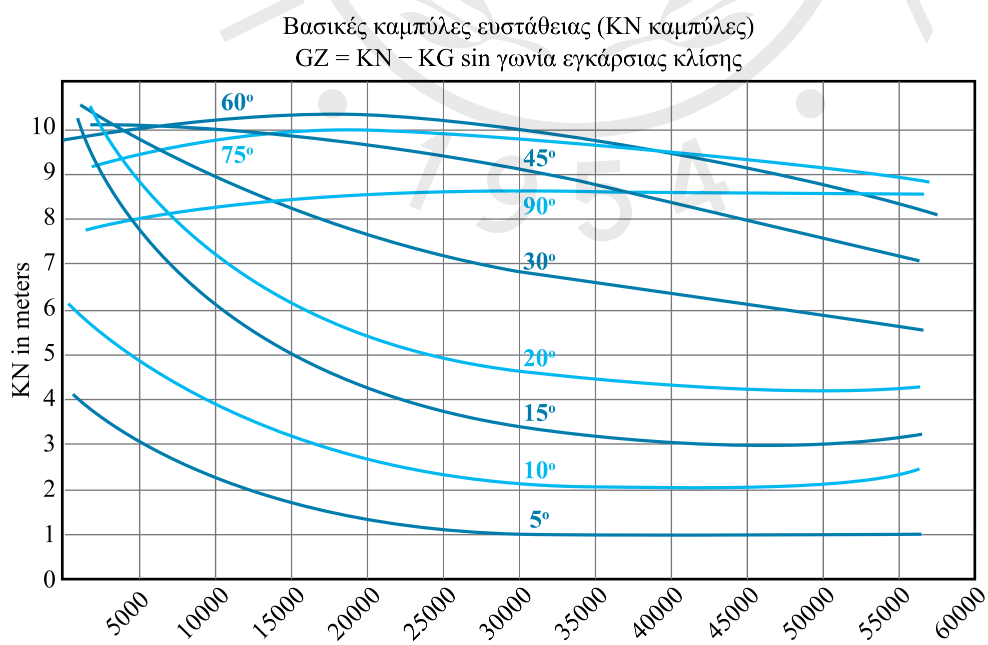
Επειδή το κέντρο βάρους θεωρείται σταθερό, μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του μοχλοβραχίονα επαναφοράς, για διάφορα εκτοπίσματα και για διάφορες γωνίες κλίσης. Αν μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του μοχλοβραχίονα για ένα συγκεκριμένο εκτόπισμα και μια συγκεκριμένη κλίση, μπορεί να υπολογιστεί και η παραγόμενη ροπή, η οποία ή θα επαναφέρει το πλοίο στην αρχική θέση ή θα προκαλέσει ακόμη μεγαλύτερη κλίση και τελικά ανατροπή. Στη συνέχεια, θα δούμε δύο γραφήματα που παριστάνουν τη μεταβολή του μοχλοβραχίονα συναρτήσει του εκτοπίσματος και της γωνίας κλίσης.

1) Παραμετρικές καμπύλες ευστάθειας πλοίου (γραφική απεικόνιση του GZ συναρτήσει του εκτοπίσματος Δ)

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, στο οποίο ο οριζόντιος άξονας είναι το εκτόπισμα *Δ* και ο κατακόρυφος άξονας είναι ο μοχλοβραχίονας *GZ*. Το γράφημα σχεδιάζεται για μια συγκεκριμένη τιμή του *KG* – θέση κέντρου βάρους.

Έστω ότι το πλοίο έχει συγκεκριμένο εκτόπισμα. Για να βρούμε μέσω του γραφήματος τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς, φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα στο σημείο που αντιστοιχεί το εκτόπισμα αυτό. Η κάθετη τέμνει σε ένα σημείο κάθε καμπύλη που αντιστοιχεί σε κάθε γωνία κλίσης. Η τεταγμένη των σημείων αυτών είναι η τιμή του μοχλοβραχίονα για τη συγκεκριμένη γωνία.

Στο σχήμα 2.19 ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το εκτόπισμα Δ σε t και ο κατακόρυφος τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς, αν θεωρήσουμε θέση κέντρου βάρους *KG*=0 m, ο οποίος για τη θέση αυτή (KG=0) συμβολίζεται ***KN***. Για να βρουμε την τιμή του μοχλοβρα-



Σχ. 2.19

Μοχλοβραχίονας επαναφοράς KN σε m*, συναρτήσει του εκτοπίσματος Δ σε* t*.*
Για τη χάραξη των καμπυλών θεωρήθηκε θέση κέντρου βάρους KG=0 m

χίονα επαναφοράς *GZ,* για συγκεκριμένη τιμή του *KG*, βρίσκουμε από το γράφημα την τιμή του *ΚΝ* (για *KG*=0), και υπολογίζουμε τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς *GZ* αντικαθιστώντας στον τύπο:

$$GZ = KN - KG \cdot ημφ$$

όπου: $φ$ η γωνία εγκάρσιας κλίσης.

Παράδειγμα 2.3

Να υπολογιστεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς όταν το εκτόπισμα του πλοίου είναι 30.000 t και *KG* =10 m, για διάφορες γωνίες εγκάρσιας κλίσης, χρησιμοποιώντας το γράφημα του σχήματος 2.19

Λύση

Βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα την τιμή του εκτοπίσματος 30.000 και φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Η κάθετος τέμνει κάθε καμπύλη σε ένα σημείο. Από το σημείο αυτό φέρνουμε κάθετη προς τον κατακόρυφο άξονα. Η τιμή που βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα είναι η τιμή του *KN* για την αντίστοιχη γωνία.

α) Για $φ=5^o$: KN = 1 m και GZ = KN – KG · ημφ = 1 – 10 · ημ5° = 1 – 10 · 0,087 = 0,13

β) Για $φ=10^o$: KN = 2,1 m και GZ = KN – KG · ημφ = 2,1 – 10 · ημ10° =
= 2,1 – 10 · 0,174 = 0,36

γ) Για $φ=15^o$: KN = 3,45 m και GZ = KN – KG · ημφ = 3,45 – 10 · ημ15° =
= 3,45 – 10 · 0,259 = 0,86

δ) Για $φ=20^o$: KN = 4,65 m και GZ = KN – KG · ημφ = 4,65 – 10 · ημ20° =
= 4,65 – 10 · 0,342 = 1,23

ε) Για $φ=30^o$: KN = 6,85 m και GZ = KN – KG · ημφ =6,85 – 10 · ημ30° =
= 6,85 – 10 · 0,5 = = 1,85

στ) Για $φ=45^o$: KN = 9,1 m και GZ = KN – KG · ημφ= 9,1 – 10 · ημ45° =
= 9,1 – 10 · 0,707= = 2,03

ζ) Για $φ=60^o$: KN = 10 m και GZ = KN – KG · ημφ= 10 – 10 · ημ60° =
=10 – 10 · 0,866=1,34

η) Για $φ=75^o$: KN = 9,8 m και GZ = KN – KG · ημφ= 9,8 – 10 · ημ75° =
= 9,8 – 10 · 0,966= 0,14

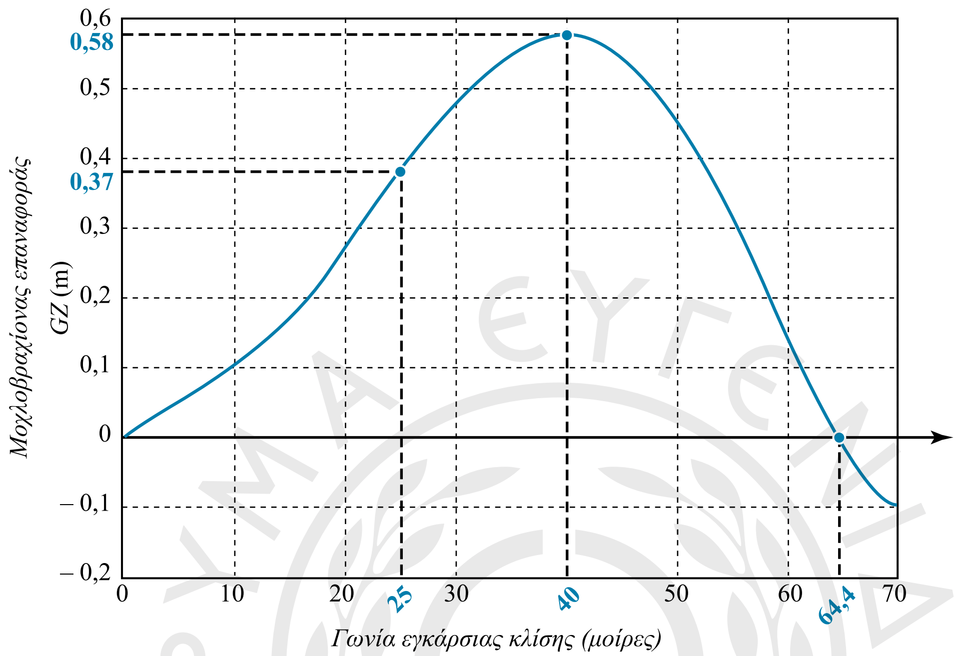
θ) Για $φ=90^o$: KN = 8,6 m και GZ = KN – KG · ημφ= 8,6 – 10 · ημ90° =
= 8,6 – 10 · 1= –1,4

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται και στον παρακάτω πίνακα:

$φ$	*KN*	ημ$φ$	*GZ*
5°	1	0,087	0,13
10°	2,1	0,174	0,36
15°	3,45	0,259	0,86
20°	4,65	0,342	1,23
30°	6,85	0,5	1,85
45°	9,1	0,707	2,03
60°	10	0,866	1,34
75°	9,8	0,966	0,14
90°	8,6	1	–1,4

2) Καμπύλη στατικής ευστάθειας

Η καμπύλη στατικής ευστάθειας περιγράφει γραφικά τη μεταβολή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς ως συνάρτηση της γωνίας εγκάρσιας κλίσης *φ* (σχ. 2.20). Η αναπαράσταση αφορά σε συγκεκριμένη κατάσταση φόρτωσης, δηλαδή συγκεκριμένο εκτόπισμα και θέση κέντρου βάρους.



Σχ. 2.20

Μοχλοβραχίονας επαναφοράς συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης

Παράδειγμα 2.4

Με βάση το σχήμα 2.20 να βρεθούν:

α) Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για κλίση $\varphi = 25^o$.

β) Η γωνία για την οποία μεγιστοποιείται ο *GZ* και η μέγιστη τιμή του *GZ*.

γ) Η περιοχή θετικής ευστάθειας, όπου: ο *GZ* έχει θετική τιμή.

δ) Η γωνία μηδενικής ευστάθειας, όπου: ο GZ αποκτά μηδενική τιμή.

Λύση

α) Βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα την γωνία $\varphi = 25^o$ και φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Από το σημείο που τέμνει η κάθετος την καμπύλη, φέρνουμε κάθετη προς τον κατακόρυφο άξονα. Η τιμή που βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα είναι η τιμή του *GZ*. Άρα $GZ = 0{,}37$ m.

β) Ο μέγιστος μοχλοβραχίονας εμφανίζεται εκεί που η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστο. Από το ψηλότερο σημείο φέρνουμε κάθετη στο οριζόντιο άξονα, και βρίσκουμε ότι η γωνία που μεγιστοποιείται ο *GZ* είναι $\varphi = 40^o$. Στη συνέχεια φέρνουμε κάθετη στον κατακόρυφο άξονα και βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς είναι $GZ = 0{,}58$ m.

γ) Η περιοχή θετικής ευστάθειας φτάνει μέχρι το σημείο που η καμπύλη τέμνει τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή από 0^o έως $64{,}4^o$. Για κλίση μεγαλύτερη από $64{,}4^\circ$, έχουμε αρνητική ευστάθεια, δηλαδη μη επαναφορά στην αρχική θέση και ανατροπή του πλοίου.

δ) Η γωνία μηδενικής ευστάθειας είναι η τιμή που τέμνει η καμπύλη τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή $\varphi=64{,}4^o$.

2.5 Γραφική επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Στο κεφάλαιο 1 είδαμε την έννοια της γραμμικής εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x + \beta y = \gamma}$. Όπως αναφέρθηκε, η γραμμική εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή. Επίσης ασχοληθήκαμε με την επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{cases} a_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ a_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

Κάθε εξίσωση παριστάνει μία ευθεία. Η λύση (x,y) του συστήματος επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις. Κατά συνέπεια, εάν σχεδιάσουμε την κάθε ευθεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων, το σημείο με συντεταγμένες την λύση του συστήματος θα πρέπει να βρίσκεται πάνω και στις δύο ευθείες εφόσον επαληθεύει τις εξισώσεις τους, και άρα είναι το σημείο τομής τους. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.

Παράδειγμα 2.5

Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

Λύση

Γράφουμε κάθε μία απ’ τις εξισώσεις στην μορφή $\boldsymbol{y = a \cdot x + \beta}$:

$$x + 2y = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad 2x - 3y = -1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Κατασκευάζουμε για κάθε μια ευθεία τον πίνακα τιμών της. Για να σχεδιαστεί μια ευθεία, αρκούν 2 σημεία:

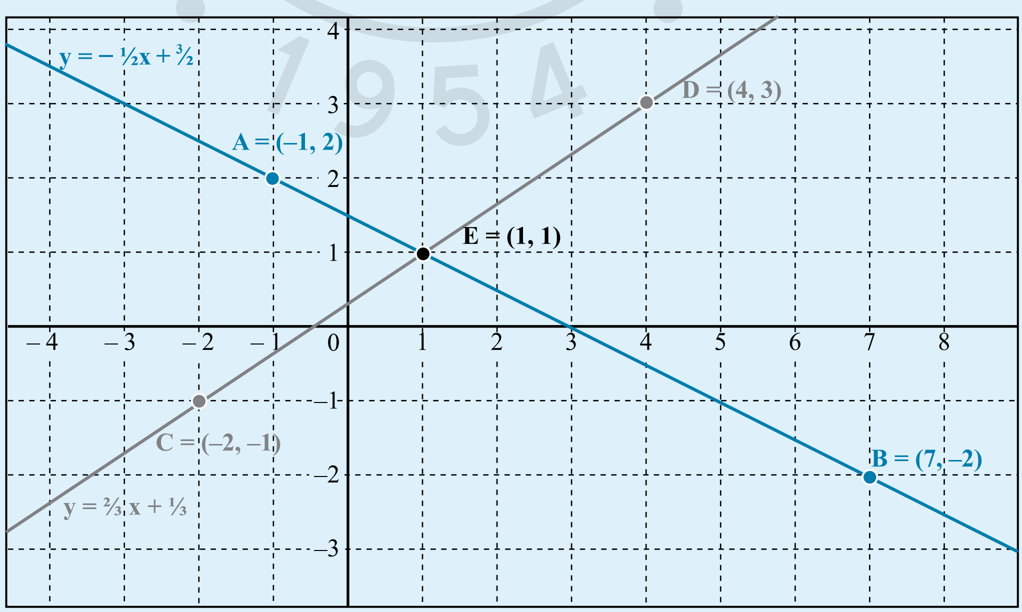
$\varepsilon_1 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

x	–1	7
y	2	–2

$\varepsilon_2 : y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

x	–2	4
y	–1	3

Κατασκευάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος. Άρα η λύση είναι $(x,y)=(1,1)$ (σχ. 2.21).



Σχ. 2.21

Ασκήσεις

1. Να δοθεί γράφημα y=f(x) για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	*y*
200	30
500	62
760	82
850	70
1100	60

2. Να δοθεί γράφημα y=f(x) όπου x: εκτόπισμα σε και y βύθισμα σε m για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Εκτόπισμα x	*Βύθισμα* y (*m*)
21.800	5,00
20.892	4,80
19.951	4,60
19.023	4,40
18.192	4,20
16.268	4,00

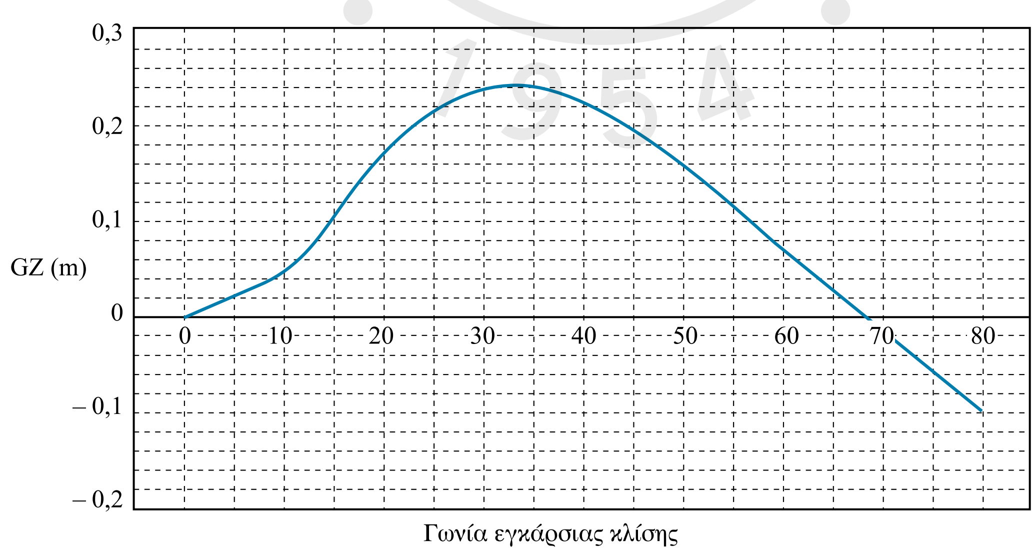
3. Στο σχήμα 2.22 φαίνεται η καμπύλη στατικής ευστάθειας ενός πλοίου Να βρεθούν:

α) Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για κλίση $\varphi = 25^o$.

β) Η γωνία για την οποία μεγιστοποιείται ο *GZ* και η μέγιστη τιμή του *GZ*.

γ) Η περιοχή θετικής ευστάθειας.

δ) Η γωνία μηδενικής ευστάθειας, όπου ο GZ αποκτά μηδενική τιμή.



Σχ. 2.22

4. Να υπολογιστεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς όταν το εκτόπισμα του πλοίου είναι

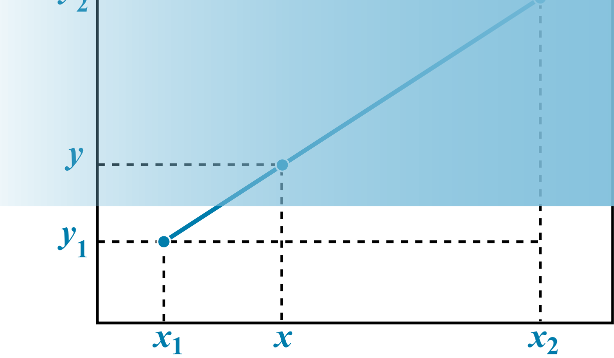
25.000 και $KG = 11\ m$, για διάφορες γωνίες εγκάρσιας κλίσης, χρησιμοποιώντας το γράφημα του σχήματος 2.19

5. Να γίνει η γραφική επίλυση των παρακάτω γραμμικών συστημάτων:

α) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

6. Να γίνει η γραφική επίλυση των παρακάτω συστημάτων:

α) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} y = x(x-3) \\ y = -x^2 + 5x - 24 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$



κεφάλαιο **3**

Αναλογία, μεταβολή και παρεμβολή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν οι έννοιες αναλογία, ανάλογα ποσά, κλίμακες, αντιστρόφως ανάλογα ποσά και γραμμική παρεμβολή, δίνοντας έμφαση σε εφαρμογές τους σε προβλήματα σχετικά με την Ναυτιλία.

3.1 Αναλογίες

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, λέγεται το πηλίκο των μέτρων τους.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$$

Για να συγκρίνουμε δύο μεγέθη σχηματίζουμε τον λόγο-κλάσμα, που έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.

Παράδειγμα 3.1

Από τους 112 πρωτοετείς της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού οι 84 είναι σπουδαστές και οι 28 σπουδάστριες. Ο λόγος σπουδαστών-σπουδαστριών είναι:

$$\frac{\textit{Αριθμός σπουδαστών}}{\textit{Αριθμός σπουδαστριών}} = \frac{84}{28} = \frac{3}{1} = 3$$

Άρα ο λόγος αριθμός σπουδαστών προς αριθμός σπουδαστριών είναι 3:1 = 3. Δηλαδή, οι άντρες σπουδαστές είναι τριπλάσιοι από τις γυναίκες.

Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων. Δηλαδή, η παρακάτω ισότητα είναι μια αναλογία:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Στην αναλογία αυτή, οι όροι β και γ ονομάζονται ***μέσοι*** όροι, ενώ οι α και δ ονομάζονται ***άκροι*** όροι.

Ιδιότητες αναλογιών:

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

4) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$

5) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta \pm \alpha} = \frac{\gamma}{\delta \pm \gamma}$

6) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots = \frac{\kappa}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \gamma + \ldots + \kappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda} = \frac{\alpha}{\beta}$

Παράδειγμα 3.2

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+4}{3} = \frac{6-x}{7}$

Λύση

Εφαρμόζουμε την $1^{η}$ ιδιότητα αναλογιών:

$$\frac{x+4}{3} = \frac{6-x}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot (x+4) = 3 \cdot (6-x) \Leftrightarrow 7x + 28 = 18 - 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x + 3x = 18 - 28 \Leftrightarrow 10x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{-10}{10} \Leftrightarrow x = -1$$

3.2 Κλίμακες

Κλίμακα ονομάζουμε τον λόγο της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου.

$$\textbf{κλίμακα} = \frac{\textbf{απόσταση στο σχέδιο}}{\textbf{πραγματική απόσταση}}$$

Η κλίμακα χρησιμοποιείται κυρίως στην κατασκευή χαρτών. Για παράδειγμα, όταν σε έναν χάρτη η κλίμακα είναι 1:1.000.000, αυτό σημαίνει ότι απόσταση 1cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 1.000.000 cm ή 10.000 m ή 10 km.

Όταν η κλίμακα είναι μικρότερη του 1, όπως συμβαίνει πάντα στους χάρτες τότε έχουμε σμίκρυνση. Όταν η κλίμακα είναι μεγαλύτερη του 1, τότε έχουμε μεγέθυνση.

Πρόβλημα 3.1

Η απόσταση δύο πόλεων σε χάρτη κλίμακας 1:10.000.000 είναι 3,8 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο πόλεων;

Λύση

Έστω x η πραγματική απόσταση. Αφού η κλίμακα είναι 1:10.000.000, ο λόγος της απόστασης στον χάρτη προς την πραγματική απόσταση θα πρέπει να είναι ίσος με 1/10.000.000. Άρα:

$$\frac{3{,}8}{x} = \frac{1}{10.000.000} \Leftrightarrow x \cdot 1 = 3{,}8 \cdot 10.000.000 \Leftrightarrow x = 38.000.000$$

Άρα η πραγματική απόσταση είναι:

$x = 38.000.000$ cm $= (38.000.000:100)$ m $= 380.000$ m $= (380.000:1000)$ km $= 380$ km.

Πρόβλημα 3.2

Ένας σπουδαστής, θέλει να σχεδιάσει την κάτοψη ενός πλοίου ολικού μήκους 262 m. Πόσο πρέπει να κάνει το μήκος του πλοίου στο σχέδιο αν η κλίμακα είναι 1:400;

Λύση

Έστω x το μήκος στο σχέδιο. Τότε:

$$\frac{x}{262} = \frac{1}{400} \Leftrightarrow 400 \cdot x = 262 \Leftrightarrow x = \frac{262}{400} \Leftrightarrow x = 0{,}655$$

Άρα 0,655 m ή 65,5 cm

3.3 Ανάλογα ποσά

Δύο ποσά λέγονται ***ανάλογα*** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

Στον παρακάτω πίνακα (πίν. 3.1) φαίνεται το βάρος του λαδιού που περιέχει μια δεξαμενή πλοίου και το ύψος στάθμης του λαδιού στον καταμετρικό σωλήνα.

Πίνακας 3.1

Βάρος λαδιού σε MT	21,36	42,72	53,4	64,08	74,76	85,44
Ύψος στάθμης σε m	1	2	2,5	3	3,5	4

Προφανώς, όσο αυξάνεται το ύψος στον καταμετρικό σωλήνα, τόσο αυξάνεται και η ποσότητα λαδιού στην δεξαμενή και άρα και το βάρος του. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των αντίστοιχων τιμών τους βρίσκουμε ότι τα δύο μεγέθη είναι ανάλογα, δηλαδή έχουμε:

$$\frac{21{,}36}{1} = \frac{42{,}72}{2} = \frac{53{,}4}{2{,}5} = \frac{64{,}08}{3} = \frac{74{,}76}{3{,}5} = \frac{85{,}44}{4} = 21{,}36$$

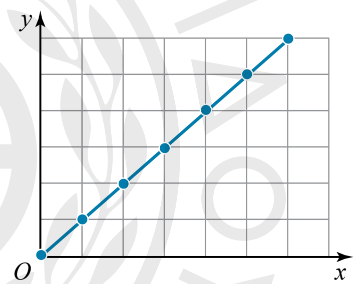
Βλέπουμε ότι όλοι οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι μεταξύ τους. Γενικά ισχύει:

Αν δύο μεγέθη x και y είναι ανάλογα τότε ο λόγος των τιμών του ενός προς τις αντίστοιχες τιμές του άλλου είναι σταθερός. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\frac{y}{x} = \alpha \ \text{ή} \ y = \alpha \cdot x}$$

Το πηλίκο α ονομάζεται ***συντελεστής αναλογίας***.

Εάν σε ένα καρτεσιανό επίπεδο (σχ. 3.1) παραστήσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y) δυο ανάλογων ποσών, τότε τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μία ***ευθεία που διέρχεται από την αρχή O (0,0) των αξόνων***.



Σχ. 3.1

Πρόβλημα 3.3

Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε 2 h και 15 min διανύει 54 ν.μ.. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει 90 ν.μ.;

Λύση

$$2\,h\ 15\,min = 2\,h + \left(\frac{15}{60}\right) h = 2{,}25\,h$$

Εφόσον η ταχύτητα του πλοίου είναι σταθερή, η απόσταση που διανύει το πλοίο και ο χρόνος είναι μεγέθη ανάλογα. Επομένως οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι μεταξύ τους. Οπότε:

$$\frac{54}{2{,}25} = \frac{90}{x} \Leftrightarrow 54 \cdot x = 2{,}25 \cdot 90 \Leftrightarrow 54 \cdot x = 202{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{202{,}5}{54} \Leftrightarrow x = 3{,}75\ \text{h}$$

$$3{,}75\ \text{h} = 3\ \text{h} + 0{,}75\ \text{h} = 3\ \text{h}\ (0{,}75 \cdot 60)\ \text{min} = 3\ \text{h}\ 45\ \text{min}$$

Πρόβλημα 3.4

Μια ορθογωνική δεξαμενή πλοίου ύψους 5m περιέχει πετρέλαιο βάρους 91,2 MT και το ύψος της στάθμης του πετρελαίου φτάνει στα 3,8 m. Πόσο είναι το βάρος του πετρελαίου που μπορούμε να προσθέσουμε, ώστε η δεξαμενή να είναι πλήρης;

Λύση

Εφόσον η δεξαμενή είναι ορθογωνική, το βάρος του πετρελαίου και το ύψος της στάθμης είναι μεγέθη ανάλογα. Έστω x το συνολικό βάρος πετρελαίου που χωράει στη δεξαμενή. Επομένως:

$$\frac{91{,}2}{3{,}8} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow 91{,}2 \cdot 5 = 3{,}8 \cdot x \Leftrightarrow 456 = 3{,}8 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{456}{3{,}8} \Leftrightarrow x = 120 \text{ MT}$$

Άρα χωράει ακόμα $120 - 91{,}2 = 28{,}8$ *MT*.

3.4 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δύο ποσά λέγονται ***αντιστρόφως ανάλογα*** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό διαιρούνται οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

Στον πίνακα 3.2 παρουσιάζεται η ταχύτητα ενός πλοίου και ο χρόνος που διάνυσε την απόσταση από το λιμάνι του Πειραιά στο λιμάνι Χανίων.

Πίνακας 3.2

Ταχύτητα σε knots	15	20	25	30
Χρόνος σε h	10	7,5	6	5

Προφανώς όταν διπλασιάζεται η ταχύτητα του πλοίου μειώνεται στο μισό ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το πλοίο μια συγκεκριμένη απόσταση. Επομένως, τα μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα. Αν υπολογίσουμε τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών, έχουμε:

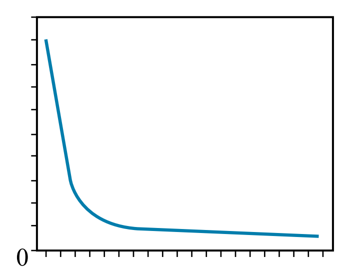
$$15 \cdot 10 = 150, \quad 20 \cdot 7{,}5 = 150, \quad 25 \cdot 6 = 150, \quad 30 \cdot 5 = 150$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι όλα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα. Γενικά ισχύει:

Αν δύο ποσά x και y είναι ***αντιστρόφως ανάλογα***, τότε το ***γινόμενο*** των αντίστοιχων τιμών τους είναι ***σταθερό***. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{y \cdot x = a} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{y = \frac{a}{x}}$$

Εάν σε ένα καρτεσιανό επίπεδο (σχ. 3.2) παραστήσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y) δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών, τότε τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μιά ***καμπύλη***, η οποία είναι ***υπερβολή***.



Σχ. 3.2

Πρόβλημα 3.5

Ένα πλοίο ξεκινάει απ' το λιμάνι της Ραφήνας, κινείται με ταχύτητα 14 knots και φτάνει στο λιμάνι της Σαντορίνης μετά από 8 ώρες και 30 λεπτά. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του πλοίου για να πραγματοποιήσει την ίδια διαδρομή σε 7 ώρες;

Λύση

8 ώρες 30 λεπτά = 8,5 ώρες

Η ταχύτητα του πλοίου και ο χρόνος που διανύεται μια συγκεκριμένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Επομένως, αν x η ζητούμενη ταχύτητα του πλοίου έχουμε:

$$7 \cdot x = 8{,}5 \cdot 14 \Leftrightarrow 7 \cdot x = 119 \Leftrightarrow x = \frac{119}{7} \Leftrightarrow x = 17 \text{ knots}$$

Πρόβλημα 3.6

Το γεμάτο αμπάρι ενός πλοίου αδειάζει σε 30 h όταν δουλεύουν 8 εργάτες. Σε πόσες ώρες θα αδειάσουν το ίδιο αμπάρι 12 εργάτες;

Λύση

Ο αριθμός εργατών και οι ώρες εργασίας, ώστε να ολοκληρωθεί ένα έργο είναι μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα. Επομένως αν x είναι οι ζητούμενες ώρες:

$$12 \cdot x = 8 \cdot 30 \Leftrightarrow 12 \cdot x = 240 \Leftrightarrow x = \frac{240}{12} \Leftrightarrow x = 10 \text{ h}$$

Πρόβλημα 3.7

Ένα κρουαζιερόπλοιο αναχωρεί από το λιμάνι της Πάρου στις 17:10 και κινούμενο με σταθερή ταχύτητα 15 knots φτάνει στο λιμάνι της Σύρου στις 18:45. Τι ώρα θα έφτανε στο λιμάνι της Σύρου εάν έπλεε με ταχύτητα 18 knots;

Λύση

Η ώρα 17:10 = 17 h 10 min και 18:45 = 18 h 45 min

$$\begin{array}{r} 18 \text{ h } 45 \text{ min} \\ -\ 17 \text{ h } 10 \text{ min} \\ \hline 1 \text{ h } 35 \text{ min} \end{array}$$

Επομένως, η διάρκεια της μετάβασης είναι:

$$1 \text{ h } 35 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{35}{60} \text{ h} = 1 \text{ h} + 0{,}583 \text{ h} = 1{,}583 \text{ h}$$

Η ταχύτητα του πλοίου και ο χρόνος που διανύεται μια συγκεκριμένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Επομένως, αν x ο χρόνος για να φτάσει στο λιμάνι της Σύρου:

$$1{,}583 \cdot 15 = x \cdot 18 \Leftrightarrow 23{,}745 = 18 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{23{,}745}{18} \Leftrightarrow x = 1{,}319 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} 1{,}319 \text{ h} &= 1 \text{ h} + 0{,}319 \text{ h} = 1 \text{ h } (0{,}319 \cdot 60) \text{ min} = 1 \text{ h } 19{,}14 \text{ min} = 1 \text{ h } (19 + 0{,}14) \text{ min} = \\ &= 1 \text{ h } 19 \text{ min } (0{,}14 \cdot 60) \text{ s} = 1 \text{ h } 19 \text{ min } 8{,}4 \text{ s} \end{aligned}$$

Στρογγυλοποιώντας τα s στη μονάδα: 1 *h* 19 min 8 s. Άρα:

$$\begin{array}{r} 17 \text{ h } 10 \text{ min } 0 \text{ s} \\ +\ 1 \text{ h } 19 \text{ min } 8 \text{ s} \\ \hline 18 \text{ h } 29 \text{ min } 8 \text{ s} \end{array}$$

Άρα άφιξη στο λιμάνι της Σύρου στις 18:29:08.

3.5 Η έννοια της γραμμικής παρεμβολής

Πολλές φορές σε πρακτικές εφαρμογές είναι γνωστές οι αντίστοιχες τιμές (x_i, y_i) δύο μεγεθών x, y, χωρίς να είναι γνωστή η συνάρτηση που συνδέει τα δύο μεγέθη. Έχουμε δηλαδή έναν πίνακα τιμών, με κάποιες αντίστοιχες τιμές του x (ανεξάρτητη μεταβλητή) και του y (εξαρτημένη μεταβλητή). Τι γίνεται όμως αν χρειαζόμαστε την τιμή του μεγέθους y για κάποια τιμή του x που δεν υπάρχει στον πίνακα;

Η διαδικασία κατά την οποία, γνωρίζοντας τις τιμές y_1, y_2, ..., y_k της εξαρτημένης μεταβλητής y, που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές x_1, x_2, ..., x_k της ανεξάρτητης μεταβλητής x, *προσεγγίζουμε* τις τιμές της y για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που βρίσκονται ***ενδιάμεσα*** στις δεδομένες τιμές x_1, x_2, ..., x_k ονομάζεται ***παρεμβολή***.

Η διαδικασία αυτή λέγεται παρεμβολή γιατί προσπαθεί να παρεμβάλει νέες τιμές, ανάμεσα στις υπάρχουσες.

Όταν έχουμε 2 σημεία στο επίπεδο, ο πιο απλός τρόπος να τα ενώσουμε είναι με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ενώνοντας όλα τα διαδοχικά σημεία, σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή, η οποία προσεγγίζει την άγνωστη καμπύλη που συνδέει όλα τα σημεία. Θεωρώντας ότι δύο γνωστά σημεία έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) η ***γραμμική παρεμβολή*** βασίζεται στην παραδοχή ότι τα σημεία αυτά ενώνονται με μία ευθεία (σχ. 3.3). ΄Εστω ένα τυχαίο σημείο (x, y όπου x) μεταξύ των x_1 και x_2. Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημείο (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

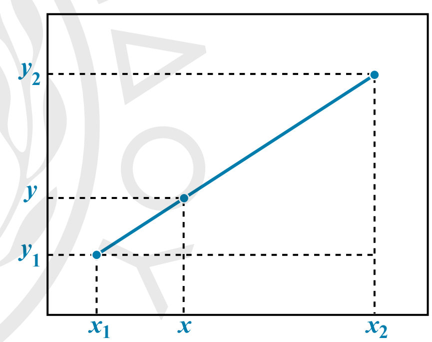
Επειδή τα σημεία (x_1, y_1) (x, y) και (x_2, y_2) είναι συνευθειακά, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3, προκύπτει ότι η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x, y) είναι πάλι λ:

$$\lambda = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Άρα:
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

΄Η από την ιδιότητα των αναλογιών:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad (1)$$



Σχ. 3.3

Λύνοντας ως προς y παίρνουμε την παρακάτω σχέση της ***γραμμικής παρεμβολής***:

$$\boxed{y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)} \qquad (2)$$

Αντίστροφη παρεμβολή ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία, με γνωστές τις τιμές $y_1, y_2, ..., y_k$ της εξαρτημένης μεταβλητής y, που αντιστοιχούν σε τιμές $x_1, x_2, ..., x_k$ της ανεξάρτητης μεταβλητής x, προσεγγίζουμε τις τιμές της x για τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y που βρίσκονται ***ενδιάμεσα*** στις δεδομένες τιμές $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Λύνοντας τη σχέση (1) ως προς x παίρνουμε τον τύπο της αντίστροφης παρεμβολής:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot (y - y_1) \qquad (3)$$

3.6 Εφαρμογές της γραμμικής παρεμβολής στην Ναυτιλία

Η γραμμική παρεμβολή είναι μία διαδικασία που χρησιμοποιείται συχνά στη Ναυτιλία, και ειδικότερα στην αντιμετώπιση προβλημάτων ευστάθειας. Στα συνηθισμένα προβλήματα ευστάθειας, γίνεται χρήση πινάκων όπως οι πίνακες υδροστατικών στοιχείων και οι πίνακες μοχλοβραχιόνων επαναφοράς. Συχνά, η τιμή που χρειαζόμαστε δεν υπάρχει στον πίνακα, αλλά είναι ενδιάμεση δύο τιμών του πίνακα. Τότε θα «προσεγγίσουμε» την τιμή με την διαδικασία της γραμμικής παρεμβολής.

Πρόβλημα 3.8

Σε έναν πίνακα υδροστατικών στοιχείων ενός φορτηγού πλοίου, έχουμε τις παρακάτω τιμές (πίν. 3.3) για το εκτόπισμα και το βύθισμα. Ποιο είναι, κατά προσέγγιση, το βύθισμα που θα έχουμε εάν το εκτόπισμα είναι 27.100 MT;

Πίνακας 3.3*

Εκτόπισμα σε θαλασσινό νερό (MT)	*Βύθισμα (m)*
29.391	6,60
28.432	6,40
27.480	6,20
26.535	6,00
25.576	5,8

Λύση

Η τιμή 27.100 είναι ανάμεσα στις τιμές 26.535 και 27.480. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή, όπου θα θεωρήσουμε: $x_1 = 26.535$, $x_2 = 27.480$, $y_1 = 6$ και $y_2 = 6{,}2$, έχουμε:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-6}{6{,}2-6} = \frac{27.100-26.535}{27.480-26.535} = \frac{y-6}{0{,}2} = \frac{565}{945} \Leftrightarrow$$

$$945 \cdot (y-6) = 0{,}2 \cdot 565 \Leftrightarrow 945 \cdot y - 5.670 = 113 \Leftrightarrow 945 \cdot y = 5.783 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5.783}{945} \Leftrightarrow y = 6{,}12 \text{ m}$$

Πρόβλημα 3.9

Στον πίνακα 3.4 έχουμε τον ειδικό όγκο αερίου και πώς επηρεάζεται απ' την θερμοκρασία. Να βρεθεί ο ειδικός όγκος του αερίου για θερμοκρασία $T = 385^{o}$C.

Πίνακας 3.4

Θερμοκρασία (^{o}C)	*Ειδικός όγκος (m^3/kgr)*
300	0,05138
350	0,05842
400	0,06477

Λύση

Η τιμή 385 βρίσκεται ανάμεσα στις 350 και 400. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή με $x_1 = 350$, $x_2 = 400$, $y_1 = 0{,}05842$ και $y_2 = 0{,}06477$. ΄Εχουμε:

---

* *Πηγή: «Ευστάθεια – Κοπώσεις, Ι. Κολλινιάτη, Β΄ έκδοση, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2016*

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Leftrightarrow\frac{y-0{,}05842}{0{,}06477-0{,}05842}=\frac{385-350}{400-350}\Leftrightarrow\frac{y-0{,}05842}{0{,}00635}=\frac{35}{50}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50\,(y-0{,}05842)=0{,}22225\Leftrightarrow 50y-2{,}921=0{,}22225\Leftrightarrow 50y=3{,}14325\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3{,}14325}{50}=0{,}062865\ \mathrm{m^3/kgr}$$

Πρόβλημα 3.10

Ο πίνακας 3.5 δίνει τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς (GZ) ενός πλοίου για θέση του κέντρου βάρους του KG = 10,67 m. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για το πλοίο σε γωνία 30°, όταν το εκτόπισμα του είναι 33.000 ΜΤ.

Πίνακας 3.5*

Μοχλοβραχίονες επαναφοράς (GZ) πλοίου Α

Εκτόπισμα (MT)	*Βύθισμα (m)*	*Μοχλοβραχίονας επαναφοράς (GZ) σε m για KG = 10,67 στις αντίστοιχες γωνίες*						
		0º	*15º*	*30º*	*45º*	*60º*	*75º*	*90º*
12.000	2,85	0,000	3,03	3,36	2,48	1,40	–0,04	–1,79
16.000	3,74	0,000	2,15	2,87	2,45	1,55	–0,02	–1,80
20.000	4,61	0,000	1,54	2,47	2,38	1,54	–0,05	–1,81
24.000	5,47	0,000	1,10	2,14	2,28	1,40	–0,11	–1,81
28.000	6,31	0,000	0,82	1,87	2,11	1,21	–0,22	–1,82
32.000	7,15	0,000	0,62	1,64	1,90	1,00	–0,36	–1,82
36.000	7,98	0,000	0,50	1,45	1,66	0,88	–0,49	–1,84
40.000	8,80	0,000	0,43	1,27	1,39	0,56	–0,63	–1,86
44.000	9,61	0,000	0,39	1,08	1,11	0,33	–0,75	–1,87
48.000	10,42	0,000	0,38	0,90	0,81	0,10	–0,88	–1,88
52.000	11,21	0,000	0,39	0,70	0,49	–0,14	–1,00	–1,90
56.000	11,99	0,000	0,40	0,50	0,18	–0,38	–1,10	–1,91

Λύση

Η τιμή 33.000 βρίσκεται ανάμεσα στις 32.000 και 36.000. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή με x_1=32.000, x_2 = 36.000, y_1=1,64 *και* y_2=1,45 *για γωνία* 30°. Έχουμε

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Leftrightarrow\frac{y-1{,}64}{1{,}45-1{,}64}=\frac{33.000-32.000}{36.000-32.000}\Leftrightarrow\frac{y-1{,}64}{-0{,}019}=\frac{1.000}{4.000}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{y-1{,}64}{-0{,}19}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4(y-1{,}64)=-0{,}19\Leftrightarrow 4y-6{,}56=-0{,}19\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y=6{,}56-0{,}19\Leftrightarrow 4y=6{,}37\Leftrightarrow y=\frac{6{,}37}{4}=1{,}593$$

Άρα GZ = 1,593 m

* *Πηγή: «Ευστάθεια – Κοπώσεις, Ι. Κολλινιάτη, Β΄ έκδοση, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2016*

Πρόβλημα 3.11

Στον πίνακα 3.5 έχουμε τις τιμές του εκτοπίσματος και του βυθίσματος ενός πλοίου. Για βύθισμα 6 m να υπολογιστεί το εκτόπισμα.

Λύση

Έστω x το εκτόπισμα και y το βύθισμα. Η τιμή $y = 6$ m βρίσκεται μεταξύ των τιμών 5,47 και 6,31. Θα κάνουμε αντίστροφη γραμμική παρεμβολή με $x_1 = 24.000$, $x_2 = 28.000$, $y_1 = 5{,}47$ και $y_2 = 6{,}31$.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{6-5{,}47}{6{,}31-5{,}47} = \frac{x-24.000}{28.000-24.000} \Leftrightarrow \frac{0{,}53}{0{,}84} = \frac{x-24.000}{4.000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}84(x-24.000) = 2.120 \Leftrightarrow 0{,}84x - 20.160 = 2120 \Leftrightarrow 0{,}84x = 20.160 + 2.120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}84x = 22.280 \Leftrightarrow x = \frac{22.280}{0{,}84} \Leftrightarrow x = 26.523{,}81 \text{ MT}$$

Ασκήσεις

1. Η κάτοψη ενός πλοίου έχει σχεδιαστεί με κλίμακα 1:250. Ποιο είναι το πραγματικό μήκος του πλοίου αν το μήκος του στο σχέδιο είναι 0,8 m;
2. Η απόσταση Αθήνα – Βόλος είναι 168,3 km. Πόση θα είναι η απόσταση αυτή σε χάρτη κλίμακας 1:1.000.000;
3. Η απόσταση Ρόδος – Ρέθυμνο είναι 358 ν.μ. Πόση θα είναι η απόσταση αυτή σε χάρτη κλίμακας 1:1.500.000; (Δίνεται ότι 1 ναυτικό μίλι=1852 m).
4. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κλίμακα	*Απόσταση στον χάρτη*	*Πραγματική απόσταση*
1:100.000		8 km
1:2.000.000	2,6 cm	
1:500.000	47 cm	
	18 cm	36 km

5. Σε έναν πίνακα υδροστατικών στοιχείων ενός φορτηγού πλοίου, έχουμε τις παρακάτω τιμές για το εκτόπισμα και το βύθισμα. Ποιο είναι το βύθισμα που θα έχουμε αν το εκτόπισμα είναι 21.220 *MT*;

Εκτόπισμα σε θαλασσινό νερό (MT)	*Βύθισμα (m)*
21.827	5,00
20.892	4,80
19.951	4,60
19.023	4,40
18.192	4,20
16.268	4,00

6. Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε 3 h και 45 min διανύει 75 ν.μ.. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει 110 ν.μ.;

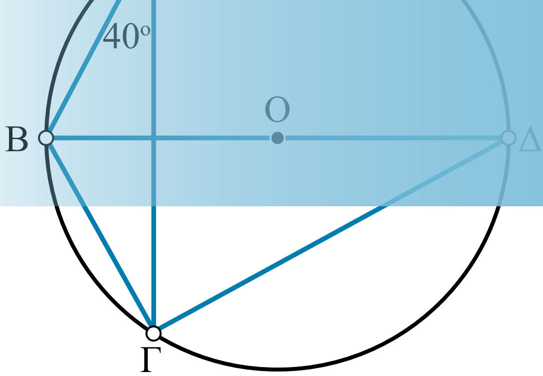
7. Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α στις 14:20 και φτάνει στο λιμάνι Β στις 19:46, πλέοντας με σταθερή ταχύτητα 15 knots. Ποια θα έπρεπε να είναι η ταχύτητα πλεύσης, ώστε το πλοίο να φτάσει στο λιμάνι Β νωρίτερα, στις 19:00;

8. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για πλοίο Α, σε γωνία 60°, όταν το εκτόπισμά του είναι 47.000 MT, αν ο πίνακας με τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς είναι ο πίνακας 3.5.

9. Στον πίνακα 3.6 έχουμε τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς KN για κέντρο βάρους KG=0, σε σχέση με το βύθισμα και τη γωνία κλίσης. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας GZ, όταν το κέντρο βάρους είναι KG = 8 m, για βύθισμα 11,15 m και γωνία φ = 60°. Δίνεται ότι: GZ = KN – KG · ημφ

Πίνακας 3.6

Βύθισμα σε (m)	**Μοχλοβραχίονας επαναφοράς KN σε m για KG = 0, για διάφορες γωνίες κλίσης**								
	5°	**10°**	**12°**	**20°**	**30°**	**40°**	**50°**	**60°**	**75°**
10.00	1.218	2.448	2.943	4.958	7.500	9.369	10.610	11.210	11.169
10.20	1.213	2.438	2.931	4.937	7.442	9.309	10.560	11.166	11.144
10.40	1.209	2.429	2.920	4.919	7.383	9.250	10.509	11.120	11.118
10.60	1.205	2.421	2.911	4.902	7.323	9.192	10.457	11.074	11.092
10.80	1.201	2.414	2.903	4.887	7.264	9.134	10.404	11.027	11.066
11.00	1.199	2.408	2.895	4.874	7.204	9.077	10.349	10.980	11.040
11.20	1.196	2.403	2.889	4.863	7.145	9.019	10.293	10.933	11.014
11.40	1.194	2.399	2.884	4.854	7.087	8.961	10.236	10.885	10.988
11.60	1.193	2.396	2.880	4.846	7.030	8.901	10.177	10.837	10.961
11.80	1.191	2.393	2.877	4.838	6.976	8.840	10.117	10.788	10.935
12.00	1.190	2.391	2.875	4.829	6.924	8.778	10.056	10.739	10.909
12.20	1.190	2.390	2.873	4.818	6.875	8.714	9.994	10.689	10.883
12.40	1.190	2.390	2.872	4.804	6.828	8.650	9.930	10.639	10.856
12.60	1.190	2.390	2.872	4.787	6.782	8.586	9.866	10.587	10.830
12.80	1.190	2.390	2.873	4.768	6.738	8.521	9.801	10.535	10.803
13.00	1.191	2.392	2.874	4.746	6.696	8.456	9.735	10.482	10.776
13.20	1.192	2.393	2.876	4.722	6.655	8.390	9.668	10.428	10.749



κεφάλαιο 4

Γεωμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη επανάληψη βασικών ορισμών και θεωρημάτων της Γεωμετρίας, τους οποίους οι σπουδαστές έχουν διδαχθεί στο σχολείο. Στα περισσότερα θεωρήματα παραλείπεται η απόδειξη, καθώς ο σκοπός της επανάληψης είναι η σωστή εφαρμογή αυτών και όχι η θεωρητική τους προσέγγιση.

4.1 Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινάει με πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες όπως ***σημείο***, ***ευθεία*** και ***επίπεδο***, τις οποίες αντιλαμβανόμαστε από την εμπειρία μας και δεχόμαστε χωρίς περαιτέρω διευκρινήσεις.

Ένα σημείο στο επίπεδο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα. Για παράδειγμα σημείο Α.

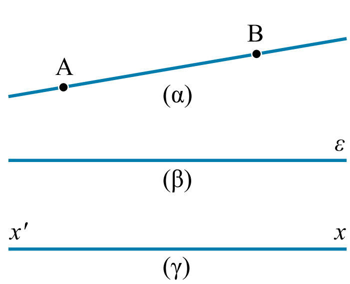
Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β ονομάζεται ***ευθεία ΑΒ*** [σχ. 4.1(α)]. Επίσης η ευθεία συμβολίζεται και με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα ***ευθεία ε*** [σχ. 4.1(β)] ή με δύο μικρά γράμματα, για παράδειγμα ***ευθεία x΄x*** [σχ. 4.1(γ)].

Θεωρούμε μια ευθεία *x΄x* και ένα σημείο Α πάνω στην ευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Το σημείο Α χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε *Αx* και *Αx΄*. Το καθένα από αυτά το ονομάζουμε ***ημιευθεία*** με ***αρχή*** το σημείο Α. Η ευθεία *x΄x* ονομάζεται φορέας της ημιευθείας *Αx*. Δύο ημιευθείες που έχουν μόνο κοινό σημείο την κοινή αρχή τους και έχουν κοινό φορέα λέγονται ***αντικείμενες***. Για παράδειγμα, οι ημιευθείες *Αx* και *Αy* του σχήματος 4.3 είναι αντικείμενες, όπως είναι προφανώς και οι ημιευθείες *Αx* και *Αx΄* του σχήματος 4.2.

Θεωρούμε ευθεία ε και δύο διαφορετικά σημεία Α, Β πάνω σε αυτή. ***Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ*** ή ***ΒΑ*** (σχ. 4.4) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους. Τα σημεία Α και Β λέγονται ***άκρα*** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ε λέγεται ***φορέας του ευθύγραμμου τμήματος***.

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***ίσα***, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.

Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται ***μονάδα μήκους***. Έτσι, αν χρησιμοποιούμε ως μονάδα μήκους το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και αν για το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ ισχύει ΓΔ=λΑΒ, ο αριθμός λ λέγεται ***μήκος*** του ευθύγραμμου



Σχ. 4.1

Σχ. 4.2

Σχ. 4.3

Σχ. 4.4

τμήματος ΓΔ, αλλά και απόσταση των σημείων Γ και Δ. Στη πράξη, για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα μέτρησης. Αυτή η μονάδα είναι το ***μέτρο (m)*** και οι υποδιαιρέσεις της. (Οι μονάδες μέτρησης μήκους θα μελετηθούν διεξοδικά στο κεφ. 6.)

Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ συμβολίζεται (ΑΒ) ή πιο απλά ΑΒ. Δηλαδή με το σύμβολο **ΑΒ** εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, αλλά και το μήκος αυτού. Στο βιβλίο αυτό θα αναφερόμαστε στο μήκος του ΑΒ γράφοντας απλά ΑΒ.

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται το εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο ώστε ΑΜ=ΜΒ (σχ. 4.5).

Σχ. 4.5

– Είδη γωνιών

Θεωρούμε δύο ημιευθείες *Ox* και *Oy* με κοινή αρχή Ο. Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2. Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται ***γωνία*** (σχ. 4.6).

Η μικρότερη ονομάζεται ***κυρτή γωνία*** και η μεγαλύτερη ***μη κυρτή γωνία***.

Το σημείο Ο λέγεται ***κορυφή*** της γωνίας και οι ημιευθείες *Ox* και *Oy* ***πλευρές*** της γωνίας.

1) Συμβολισμός γωνίας

Η γωνία του σχήματος 4.7 μπορεί να συμβολιστεί με τους εξής τρόπους:

α) Γωνία $\hat{\omega}$

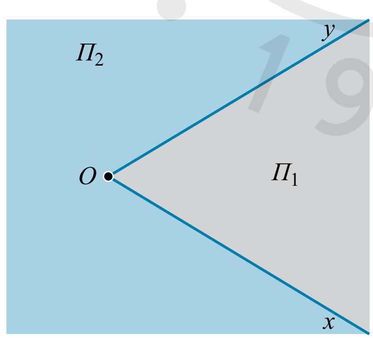
β) Γωνία $x\hat{O}y$

γ) Γωνία $A\hat{O}B$ (το μεσαίο γράμμα είναι η κορυφή της γωνίας)

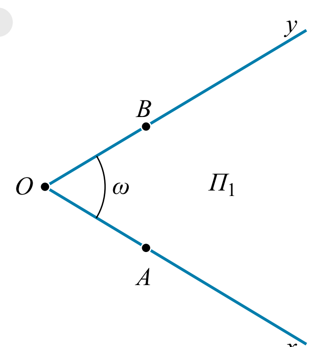
δ) Γωνία $\hat{O}$

Αν οι ημιευθείες *Ox* και *Oy* ταυτίζονται, η κυρτή γωνία λέγεται ***μηδενική γωνία*** [σχ. 4.8(α)] και η μη κυρτή ***πλήρης γωνία*** [σχ. 4.8(β)]. Αν οι ημιευθείες *Ox*, *Oy* είναι αντικείμενες, τότε κάθε μία από τις δύο γωνίες (κυρτή και μη κυρτή) λέγεται ***ευθεία γωνία*** [σχ. 4.8(γ)].

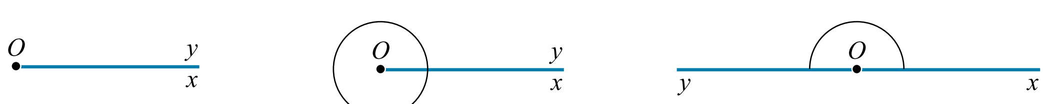
Σε κάθε γωνία αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό που ονομάζεται ***μέτρο*** της γωνίας. Ως μο-



Σχ. 4.6



Σχ. 4.7



(α) (β) (γ)

Σχ. 4.8

(α) Μηδενική γωνία, (β) πλήρης γωνία και (γ) ευθεία γωνία

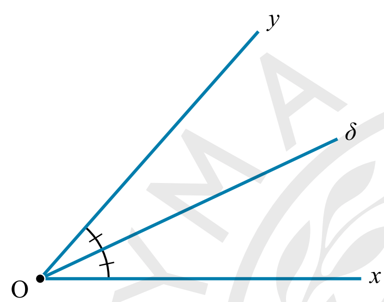
νάδα μέτρησης χρησιμοποιούμε συνήθως τη ***μοίρα*** και τις υποδιαιρέσεις της, την οποία είδαμε και στο κεφάλαιο 1. Η πλήρης γωνία έχει μέτρο 360^o, η ευθεία γωνία 180^o και η μηδενική 0^o. Δύο γωνίες που έχουν ίσα μέτρα, λέγονται ***ίσες***.

2) Διχοτόμος γωνίας

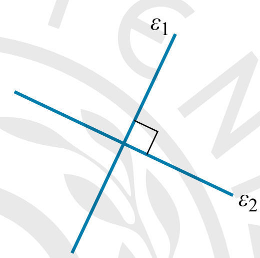
Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία Οδ, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y$ (σχ. 4.9).

3) Είδη γωνιών

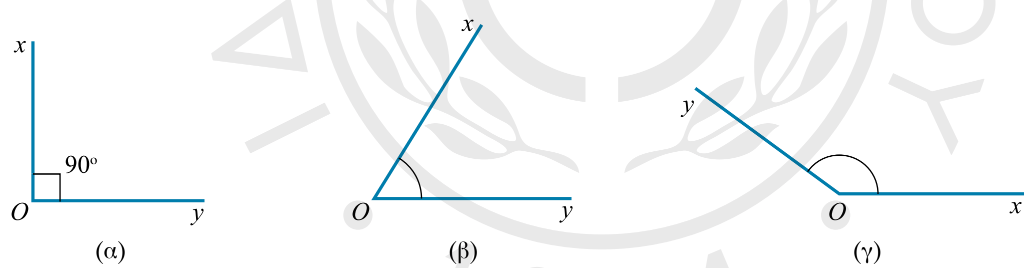
Η γωνία που έχει μέτρο 90^o ονομάζεται ***ορθή γωνία***. Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ***ευθείες κάθετες*** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ. 4.10). Η ορθή γωνία συμβολίζεται $\llcorner$. Δηλαδή αν η γωνία $\hat{\omega}$ είναι ορθή γράφουμε $\hat{\omega} = 90^o$ ή $\hat{\omega} = \llcorner$ [σχ. 4.11(α)].



Σχ. 4.9



Σχ. 4.10



Σχ. 4.11
Είδη γωνιών:
(α) Ορθή γωνία, (β) οξεία γωνία και (γ) αμβλεία γωνία

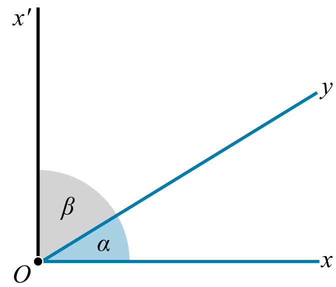
Μια κυρτή γωνία θα λέγεται ***οξεία*** αν είναι μικρότερη από την ορθή γωνία (σχ. 4.11), δηλαδή έχει μέτρο μικρότερο από 90^o [σχ. 4.11(β)]. Μια κυρτή γωνία θα λέγεται ***αμβλεία*** αν είναι μεγαλύτερη από την ορθή γωνία [σχ. 4.11(γ)]. Τότε έχει μέτρο στο διάστημα $(90^o, 180^o)$.

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται όλα τα είδη γωνιών που έχουμε δει μέχρι τώρα.

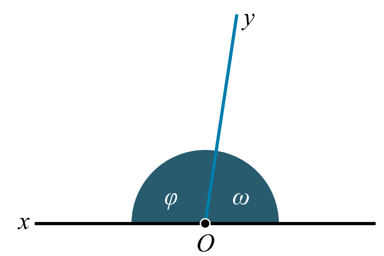
Πίνακας 4.1

Μηδενική	*Οξεία*	*Ορθή*	*Αμβλεία*	*Ευθεία*	*Αμβλεία*	*Πλήρης*
$\hat{\omega} = 0^o$	$\hat{\omega} < 90^o$	$\hat{\omega} = 90^o$	$90^o < \hat{\omega} < 180^o$	$\hat{\omega} = 180^o$	$180^o < \hat{\omega} < 360^o$	$\hat{\omega} = 360^o$

Δύο γωνίες λέγονται ***συμπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα 90° (μια ορθή γωνία). Για παράδειγμα οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ του σχήματος 4.12 είναι συμπληρωματικές. Δύο γωνίες λέγονται ***παραπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα 180° (δηλ. μια ευθεία γωνία). Στο σχήμα 4.13 οι $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ είναι παραπληρωματικές.



Σχ. 4.12



Σχ. 4.13

Δύο κυρτές γωνίες λέγονται ***κατά κορυφήν*** αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης (σχ. 4.14)

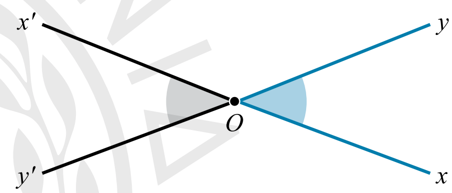
Θεώρημα 4.1: Οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.14 είναι:

$$x\hat{O}y = x'\hat{O}y'$$

Αλλά και $x'\hat{O}y = x'\hat{O}y$

Πράγματι αυτό ισχύει εφόσον δύο κατά κορυφήν γωνίες είναι παραπληρωματικές της ίδιας γωνίας.



Σχ. 4.14

Παράδειγμα 4.1

Η παραπληρωματική μιας γωνίας είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής της. Να υπολογιστεί η γωνία.

Λύση

Έστω $\hat{\omega}$ η ζητούμενη γωνία. Η παραπληρωματική της είναι: $180^\circ - \hat{\omega}$ και η συμπληρωματική της: $90^\circ - \hat{\omega}$. Άρα ισχύει:

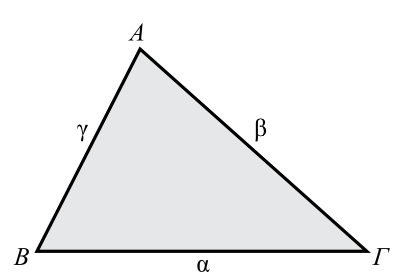
$$180^\circ - \hat{\omega} = 3 \cdot (90^\circ - \hat{\omega}) \Leftrightarrow 180^\circ - \hat{\omega} = 270^\circ - 3\hat{\omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\hat{\omega} - \hat{\omega} = 270^\circ - 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\omega} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 45^\circ$$

4.2. Στοιχεία και είδη τριγώνων

1) Κύρια στοιχεία τριγώνου

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι 3 γωνίες του και οι 3 πλευρές του. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.15. Οι πλευρές του τριγώνου συμβολίζονται: ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ή για ευκολία α, β, γ. Οι γωνίες του συμβολίζονται: $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.



Σχ. 4.15

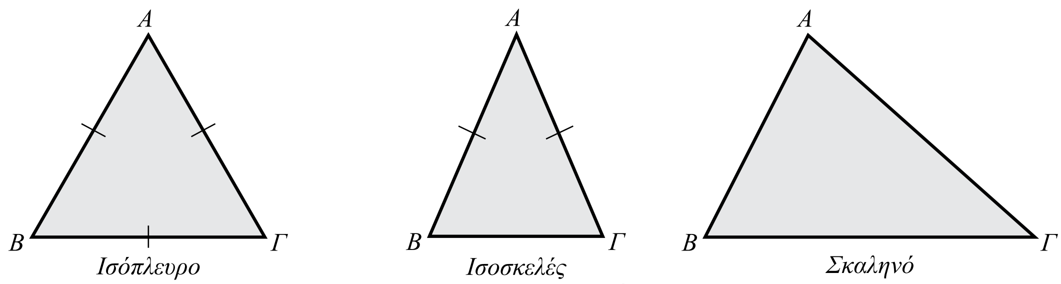
2) Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, διακρίνουμε 3 είδη τριγώνου (σχ. 4.16):

α) ***Ισόπλευρο***, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) ***Ισοσκελές***, όταν έχει 2 πλευρές ίσες. Η πλευρά που είναι άνιση με τις άλλες δύο, λέγεται ***βάση*** του ισοσκελούς τριγώνου.

γ) ***Σκαληνό***, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.



Σχ. 4.16

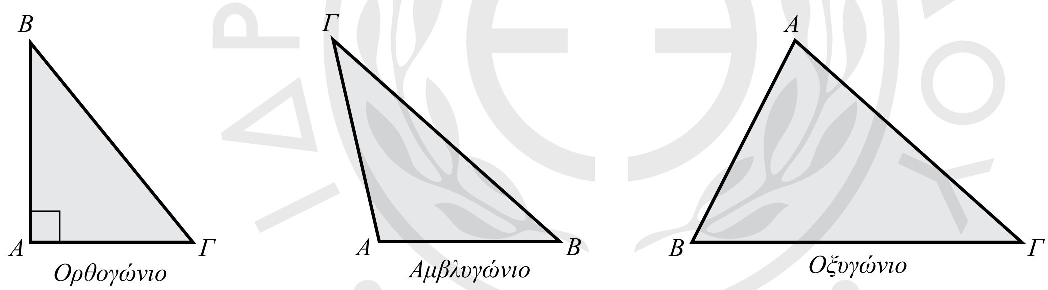
3) Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

Ανάλογα με το είδος των γωνιών του τριγώνου διακρίνουμε τα εξής 3 είδη (σχ. 4.17):

α) ***Ορθογώνιο***, όταν έχει μια ορθή γωνία. Στο ορθογώνιο τρίγωνο, η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται ***υποτείνουσα***, ενώ οι άλλες δύο πλευρές λέγονται ***κάθετες πλευρές***.

β) ***Αμβλυγώνιο***, όταν έχει μια γωνία αμβλεία.

γ) ***Οξυγώνιο***, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.

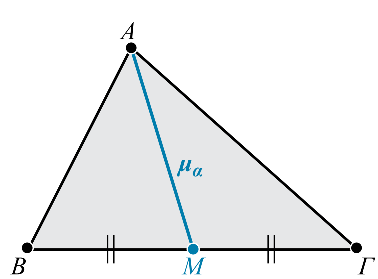


Σχ. 4.17

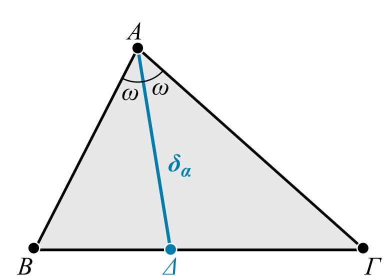
4) Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχήμα 4.18 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\mu_\alpha}$**.** Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

Διχοτόμος τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας του, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχήμα 4.19 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ εί-



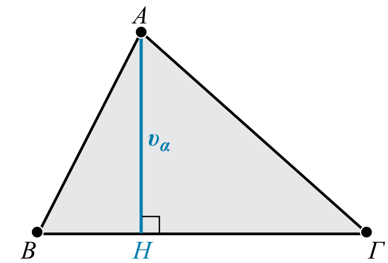
Σχ. 4.18



Σχ. 4.19

ναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\delta_\alpha}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.

Ύψος τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει μια κορυφή με την ευθεία της απέναντι πλευράς και είναι κάθετο προς αυτήν Στο σχήμα 4.20 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ είναι το ύψος που φέρεται από την κορυφή Α και συμβολίζεται με υ_α. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με υ_β και υ_γ.



Σχ. 4.20

4.3 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία

Δύο διαφορετικές ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι τέμνονται ή δεν θα έχουν κανένα κοινό σημείο (σχ. 4.21).
Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται ***παράλληλες ευθείες***. Δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τις συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$.

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, και ευθεία δ που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα (σχ. 4.22). Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες. Οι τέσσερεις έχουν κορυφή το σημείο Α και οι άλλες τέσσερεις το σημείο Β. Για τις γωνίες αυτές, ανάλογα με τη θέση τους, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ονομασίες:

1) Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ λέγονται ***«εντός»*** και όλες οι άλλες***«εκτός»***.

2) Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας δ λέγονται ***«επί τα αυτά μέρη»***, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της δ λέγονται ***«εναλλάξ»***.

Με συνδυασμό των δύο χαρακτηρισμών, για κάθε ζευγάρι γωνιών (μία γωνία με κορυφή το Α και η άλλη με κορυφή το Β) προκύπτει μια ονομασία που δείχνει τις θέσεις τους σε σχέση με τις παράλληλες ευθείες, αλλά και σε σχέση με την τέμνουσα δ. Έτσι:

1) Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_4$ είναι ***εντός εναλλάξ***.

2) Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_3$ είναι ***εντός και επί τα αυτά***.

3) Οι γωνίες $\hat{A}_4$ και $\hat{B}_4$ είναι ***εντός εκτός και επί τα αυτά***.

Από τις 8 γωνίες που σχηματίζονται οι 4 είναι οξείες και οι 4 αμβλείες. Αποδεικνύεται ότι όλες οι οξείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και όλες οι αμβλείες είναι επίσης ίσες. Μια οξεία γωνία και μία αμβλεία είναι παραπληρωματικές. Επομένως, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

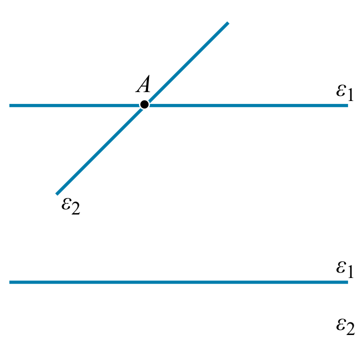
Θεώρημα 4.2: Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν:

1) τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες,

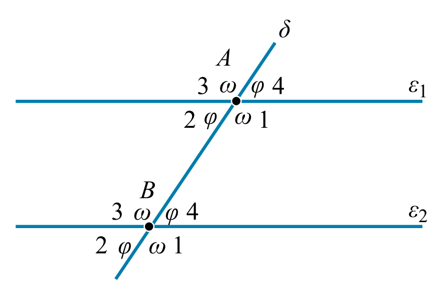
2) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,

3) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Θεώρημα 4.3: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°.



Σχ. 4.21



Σχ. 4.22

Απόδειξη

Στο σχήμα 4.23 θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Από μία κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε:

$\hat{B} = B\hat{A}x = \omega$ ως εντός εναλλάξ των ΒΓ // xy που τέμνονται από την ΑΒ.

$\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}y = \varphi$ ως εντός εναλλάξ των ΒΓ // xy που τέμνονται από την ΑΓ. Η $x\hat{A}y$ είναι ευθεία γωνία, άρα:

$$\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$$

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω πορίσματα:

Πόρισμα 4.1: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.24 ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^o - \hat{\Gamma} \qquad (1)$$

$$\hat{\Gamma} + \hat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 180^o - \hat{\Gamma} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{\varphi}$, δηλαδή η εξωτερική γωνία $A\hat{\Gamma}x = \varphi$ ισούται με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών $\hat{A}$, $\hat{B}$.

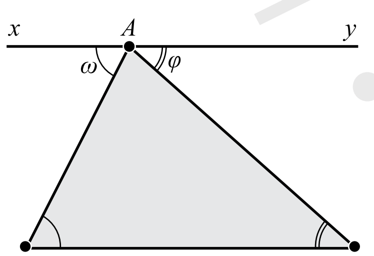
Πόρισμα 4.2: Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

Απόδειξη

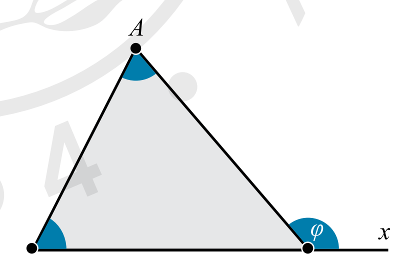
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$. Ισχύει

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o.$$

Άρα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές.



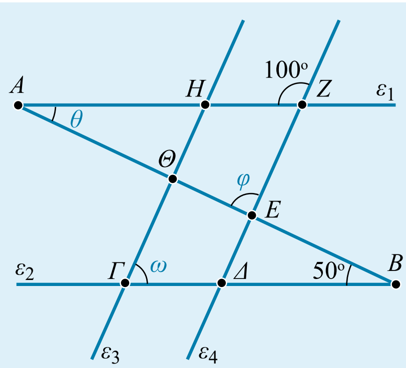
Σχ. 4.23



Σχ. 4.24

Παράδειγμα 4.2

Αν για τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 του σχήματος 4.25 ισχύει: ε_1 // ε_2 και. ε_3 // ε_4, να υπολογιστούν οι γωνίες θ, ω, φ.



Σχ. 4.25

Λύση

$\hat{\theta} = 50^o$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε_1 // ε_2 που τέμνονται από την ΑΒ.

$\Gamma\hat{\Delta}Z = 120^o$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά των ε_1 // ε_2 που τέμνονται από την ε_4.

$\hat{\omega} + \Gamma\hat{\Delta}Z = 180^o \Leftrightarrow \hat{\omega} + 120^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^o$ ως εντός κι επί τα αυτά των $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$ που τέμνονται από την ε_2.

$E\hat{Z}H + 120^o = 180^o \Leftrightarrow E\hat{Z}H = 60^o$

Στο τρίγωνο ΑΕΖ: $\hat{\theta} + \hat{\varphi} + E\hat{Z}H = 180^o \Leftrightarrow 50^o + \hat{\varphi} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 70^o$

4.4 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

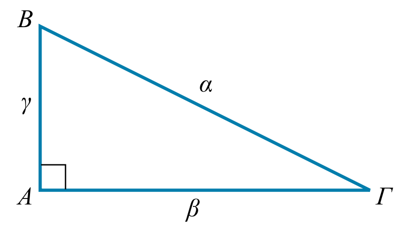
Θεώρημα 4.4: (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

Δηλαδή, στο τρίγωνο του σχήματος 4.26 έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \text{ ή}$$

$$\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$



Σχ. 4.26

Πρόβλημα 4.1

Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο. Το 1^o πλοίο πλέει με ταχύτητα 20 knots με κατεύθυνση προς Βορρά και το 2^o πλοίο με ταχύτητα 16 knots με κατεύθυνση προς Δύση. Ποια θα είναι η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 3 ώρες;

Λύση

Αν μετά από 3 ώρες το 1^o πλοίο βρίσκεται στο σημείο Α και το 2^o στο σημείο Β, τότε όπως φαίνεται στο σχήμα 4.27 το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο με $A\hat{O}B = 90^o$

Τα μήκη των πλευρών ΟΑ και ΟΒ είναι:

$OA = 20 \cdot 3 = 60$ ν.μ.

$OB = 16 \cdot 3 = 48$ ν.μ.

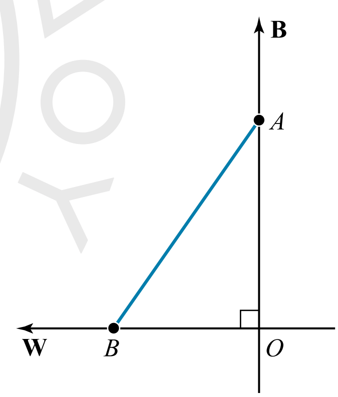
Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΟΒ έχουμε:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow$

$AB^2 = 60^2 + 48^2 \Leftrightarrow$

$AB^2 = 5904 \Leftrightarrow$

$AB = \sqrt{5904} = 76{,}837$ ν.μ.



Σχ. 4.27

Θεώρημα 4.5: (Αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος)

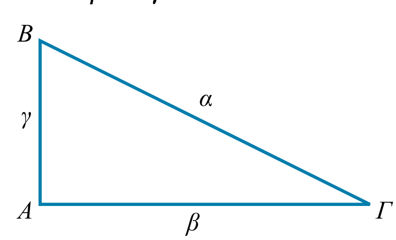
Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Δηλαδή, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.28 ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^o$.

Για παράδειγμα ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 12$, $\beta = 13$ και $\gamma = 5$ είναι ορθογώνιο, διότι:

$$\left.\begin{array}{l} \beta^2 = 13^2 = 169 \\ \alpha^2 + \gamma^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2$$

Άρα $\hat{B} = 90^o$



Σχ. 4.28

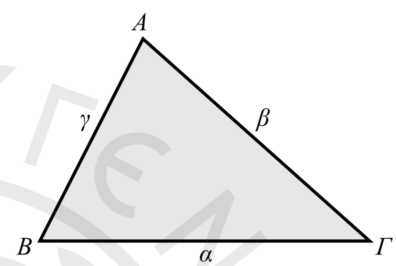
4.5 Ισότητα τριγώνων

Η γωνία ενός τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται ***περιεχόμενη γωνία*** των πλευρών αυτών. ΄Ετσι, στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.29 η γωνία $\hat{A}$, λέγεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών β και γ. Οι γωνίες που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται ***προσκείμενες γωνίες*** της πλευράς αυτής. Δηλαδή οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ λέγονται ***προσκείμενες γωνίες*** στη πλευρά α.

Δύο τρίγωνα λέγονται ***ίσα*** όταν με κατάλληλη μετατόπιση του ενός προς το άλλο ταυτίζονται. Συνεπώς:

Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, και αντιστρόφως, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Όμως, για να αποδειχθεί ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, δεν είναι απαραίτητο να αποδειχθεί ότι όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες τους είναι μία προς μία ίσες. Υπάρχουν κάποιες προτάσεις – κανόνες με τις οποίες εξασφαλίζεται η ισότητα δύο τριγώνων με την απόδειξη ισότητας τριών μόνο κατάλληλων κύριων στοιχείων. Οι προτάσεις αυτές ονομάζονται ***κριτήρια ισότητας τριγώνων***.



Σχ. 4.29

– 1ο Κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 4.30 έχουν:

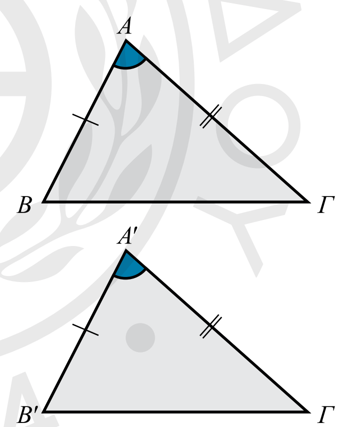
ΑΒ = Α΄Β΄

ΑΓ΄ = Α΄Γ΄

$\hat{A} = \hat{A}'$

Άρα είναι ίσα.

> *Σχόλιο:* Η συντομογραφία Π-Γ-Π σημαίνει: Πλευρά – Γωνία – Πλευρά.



Σχ. 4.30

– 2ο Κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

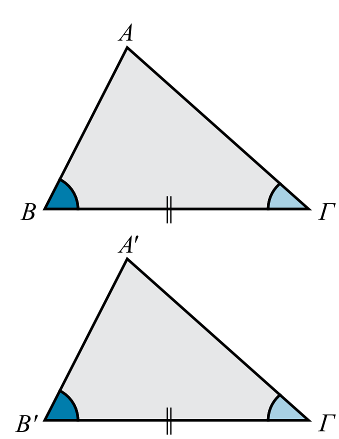
Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 4.31 έχουν:

ΒΓ = Β΄Γ΄

$\hat{B} = \hat{B}'$

$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Άρα είναι ίσα.

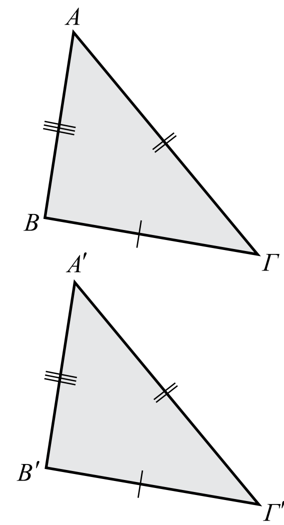


Σχ. 4.31

– 3ο Κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 4.32 έχουν:
ΒΓ = Β΄Γ΄
ΑΒ= Α΄Β΄
ΑΓ = Α΄Γ΄
Άρα είναι ίσα.



Σχ. 4.32

Θεώρημα 4.6: Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο:
1) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
2) Η διχοτόμος προς τη βάση είναι διάμεσος και ύψος.

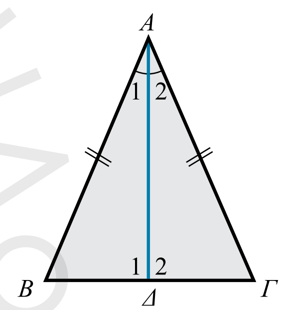
Απόδειξη

1) ΄Εστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ. 4.33). Φέρνουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:
ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση
ΑΔ κοινή και
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$
Άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$΄. Δηλαδή οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.

2) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν ΒΔ=ΔΓ. Επομένως η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου. Επίσης θα έχουν $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Ισχύει:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 90^o$$

Επομένως το ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου.



Σχ. 4.33

Θεώρημα 4.7: Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο του σχήματος 4.33 και έστω οτι η ΑΔ είναι διάμεσος.
Τότε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:
ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση,
ΑΔ κοινή και
ΒΔ = ΔΓ επειδή ΑΔ είναι διάμεσος.
Άρα από κριτήριο Π-Π-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος. Επίσης, θα έχουν:
$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ Ισχύει:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 90^o$$

Επομένως το ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου.

– Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση, την ορθή, τα προηγούμενα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων απλοποιούνται.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Κριτήριο Π-Π-Π).

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οποιαδήποτε πλευρά και μία οξεία γωνία ίση, τότε θα είναι ίσα. Πράγματι, επειδή είναι ορθογώνια θα έχουν μαζί με την ορθή 2 ίσες γωνίες. Οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o. Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Κριτήριο Γ-Π–Γ).

Με βάση τα παραπάνω διατυπώνουμε τα παρακάτω κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

1) δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή

2) μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Θεώρημα 4.8: Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Απόδειξη

Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και έστω *Oz* η διχοτόμος της (σχ. 4.34).

Έστω Α τυχαίο σημείο της *Oz.* Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, θα δείξουμε ότι:

ΑΒ = ΑΓ.

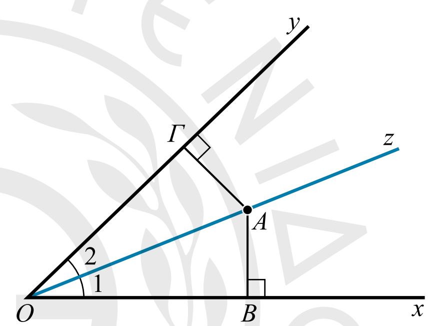
Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ έχουν:

$\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o$ (ορθογώνια)

ΟΑ κοινή

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ αφού *Oz* διχοτόμος.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και ΑΒ=ΑΓ.

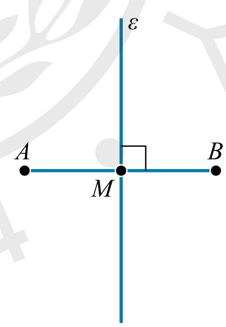


Σχ. 4.34

4.6 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται ***μεσοκάθετος*** του ΑΒ (σχ. 4.35).

Θεώρημα 4.9: Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



Σχ. 4.35

Απόδειξη

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που το τέμνει στο σημείο Μ (σχ. 4.36). Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ.

Τα τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ έχουν:

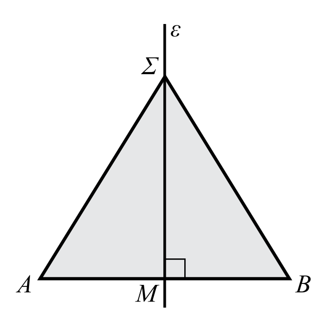
$\Sigma\hat{M}A = \Sigma\hat{M}B = 90^o$ (ορθογώνια)

ΣΜ κοινή και

ΑΜ = ΜΒ, αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και ΣΑ=ΣΒ

> ***Σχόλιο:*** Ισχύει και το αντίστροφο της Θεώρημα 4.9: Καθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, είναι σημείο της μεσοκαθέτου του (προφανές, αφού σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο).



Σχ. 4.36

4.7 Ομοιότητα τριγώνων

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, λέγονται ***όμοια***.

Ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών δύο πολυγώνων λέγεται ***λόγος ομοιότητας*** αυτών και συμβολίζεται με **λ**. Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με $\approx$.

Αν έχουμε δύο όμοια πολύγωνα, τότε το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.

Για τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ του σχήματος 4.37 ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'} = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad \hat{A}' = \hat{A},\ \hat{B}' = \hat{B},\ \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma},\ \hat{\Delta}' = \hat{\Delta},$$

Επομένως τα τετράπλευρα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \dfrac{2}{3}$

Στην ειδική περίπτωση των τριγώνων, η ομοιότητά τους μπορεί να τεκμηριωθεί απλούστερα. Παρακάτω έχουμε τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων:

–Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

1ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

2ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

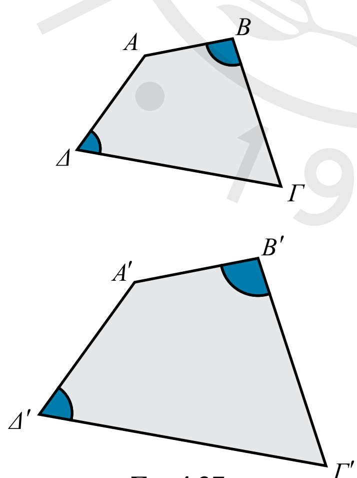
3ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες τότε είναι όμοια.

΄Ετσι για τα τρίγωνα του σχήματος 4.38 έχουμε:

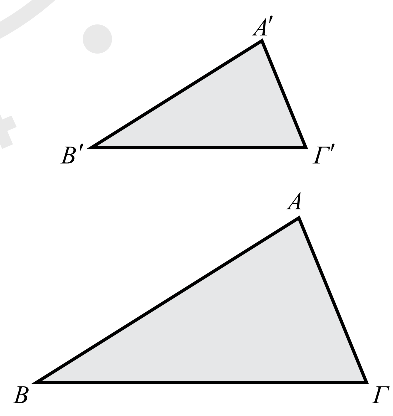
1) Αν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ τότε: $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$ (1ο κριτήριο)

2) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ τότε: $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$ (2ο κριτήριο)

3) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ τότε: $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$ (3ο κριτήριο)



Σχ. 4.37



Σχ. 4.38

Παράδειγμα 4.3

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, φέρνουμε το ύψος ΑΔ (σχ. 4.39). Να υπολογιστούν τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ αν γνωρίζουμε ότι ΒΓ=13 cm και ΑΒ=5 cm.

Λύση

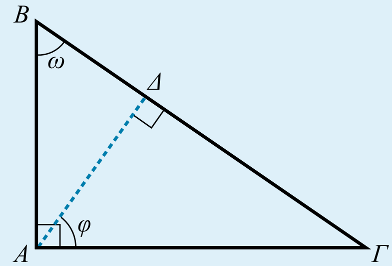
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ έχουν:

$\hat{A} = A\hat{\Delta}B = 90^o$ και $\hat{B}$ κοινή.

Άρα έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε από 1° κριτήριο είναι όμοια. Επομένως θα έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους είναι ίσοι. (Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες). Άρα ισχύει:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{13} = \frac{B\Delta}{5} \Leftrightarrow B\Delta = \frac{25}{13}\ \text{cm}$$

$$\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}\ \text{cm}$$



Σχ. 4.39

Πρόβλημα 4.2

Ένας φαροφύλακας ύψους 1,8 m θέλει να υπολογίσει το ύψος του φάρου. Για να το πετύχει αυτό μέτρησε την ίδια χρονική στιγμή το μήκος της σκιάς του και της σκιάς του φάρου. Πόσο ύψος έχει ο φάρος αν η σκιά του φαροφύλακα έχει μήκος 3,6m και η σκιά του φάρου 18 m;

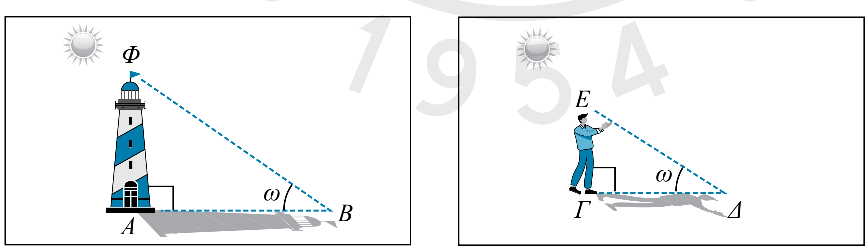
Λύση

Τα τρίγωνα ΦΑΒ και ΕΓΔ του σχήματος 4.40 είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες:

$\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^o$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{\Phi A}{E\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{\Phi A}{1{,}8} = \frac{18}{3{,}6} \Leftrightarrow 3{,}6 \cdot \Phi A = 32{,}4 \Leftrightarrow \Phi A = 9\ \text{m}$$



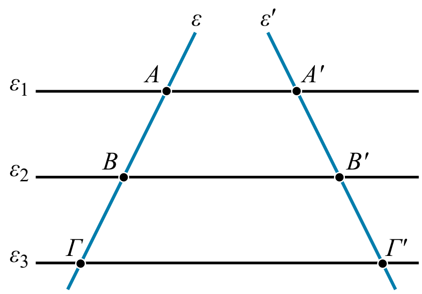
Σχ. 4.40

4.8 Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών

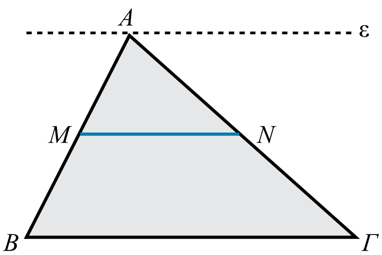
Θεώρημα 4.10: Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Δηλαδή, αν στο σχήμα 4.41 οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι παράλληλες και τέμνουν την ευθεία ε σε σημεία Α, Β και Γ και ορίζουν σε αυτήν ίσα τμήματα, δηλαδή ΑΒ=ΒΓ, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ε΄, δηλαδή θα ισχύει: Α΄Β΄ = Β΄Γ΄.

Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.42, φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία ε // ΒΓ και από το μέσο Μ της ΑΒ φέρουμε ΜΝ // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ, ΒΓ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Άρα ΑΝ = ΝΓ.



Σχ. 4.41



Σχ. 4.42

Επομένως οδηγηθήκαμε στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.11: Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

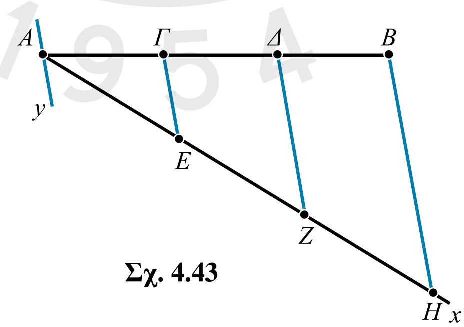
Πόρισμα 4.3: (Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ίσα τμήματα)

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ. 4.43) σε 3 ίσα τμήματα, χωρίς να μετρήσουμε με τον χάρακα το μήκος.

Λύση

Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx. Στην Αx παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ. Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αy παράλληλες προς τη ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.10 θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. ΄Ετσι διαιρέθηκε το ΑΒ σε 3 ίσα τμήματα: ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.

Σχόλιο: Στην παράγραφο 4.12 αυτού του κεφαλαίου, θα ασχοληθούμε με γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Εκεί θα δούμε πώς σχεδιάζεται μια ευθεία παράλληλη προς δοσμένη ευθεία.

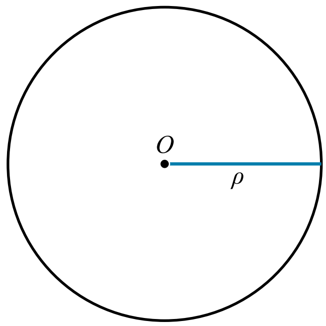


Σχ. 4.43

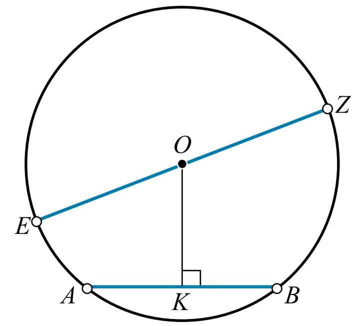
4.9 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

Θεωρούμε σταθερό σημείο Ο του επιπέδου. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν την ίδια απόσταση ρ από το σημείο Ο ονομάζεται ***κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ,*** και συμβολίζεται (Ο, ϱ) (σχ. 4.44)

΄Εστω δύο σημεία Α και Β του κύκλου (σχ. 4.45). Τα Α και Β χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται ***τόξο*** του κύκλου με άκρα Α και Β και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$.



Σχ. 4.44



Σχ. 4.45

Ειδικά, το τόξο του κύκλου που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου, λέγεται ***ακτίνιο*** ή ***rad***. Άρα ένα τόξο α *rad* κύκλου ακτίνας ϱ, έχει μήκος:

$$\boxed{l = \alpha \cdot \varrho}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ορίζεται από τα άκρα Α,Β ενός τόξου λέγεται ***χορδή*** του τόξου. Μία χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται ***διάμετρος*** του κύκλου. Η διάμετρος είναι η διπλάσια της ακτίνας. Χωρίζει το κύκλο σε δύο ίσα μέρη καθένα από τα οποία λέγεται ***ημικύκλιο***. Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται ***αντιδιαμετρικά*** σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα ΕΖ (σχ. 4.45) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία Ε, Ζ είναι αντιδιαμετρικά σημεία

4.9.1 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

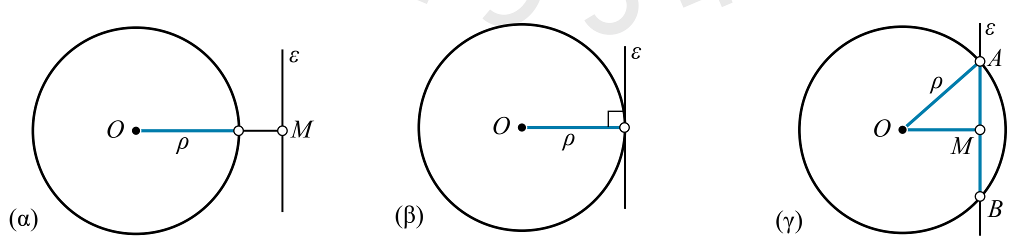
Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, ϱ) μία ευθεία ε και την απόσταση $\delta = OM$ του κέντρου Ο από την ε.

Αν $\boldsymbol{\delta > \varrho}$, η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εξωτερική του κύκλου*** [σχ. 4.46(α)]

Αν $\boldsymbol{\delta = \varrho}$, η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο Μ. Τότε η ευθεία λέγεται ***εφαπτομένη*** του κύκλου στο σημείο Μ, ή λέμε ότι εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Μ [σχ. 4.46(β)]. Το κοινό σημείο Μ λέγεται ***σημείο επαφής***. Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Αν $\boldsymbol{\delta < \varrho}$, η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία Α και Β, η ευθεία λέγεται ***τέμνουσα*** του κύκλου ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα Α και Β [σχ. 4.46(γ)].



Σχ. 4.46

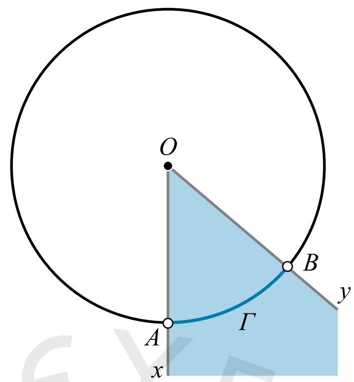
4.9.2 Μέτρο τόξου

Μία γωνία λέγεται ***επίκεντρη*** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου. Για παράδειγμα, στο σχήμα 4.47 η $x\hat{O}y$ είναι μία επίκεντρη γωνία.

Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της επίκεντρης γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Ως ***μέτρο του τόξου*** ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, επομένως ο κύκλος θεωρείται τόξο μέτρου 360^{o}.

Το ημικύκλιο είναι τόξο μέτρου 180^{o}.



Σχ. 4.47

4.9.3 Εγγεγραμμένη γωνία

Μια γωνία $\boldsymbol{x\hat{A}y}$ που η κορυφή της Α είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, λέγεται ***εγγεγραμμένη*** γωνία του κύκλου (σχ. 4.48)

Το $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$.

Θεώρημα 4.12: Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Δηλαδή στο σχήμα 4.49:

$$\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{B\hat{O}\Gamma}}{2}$$

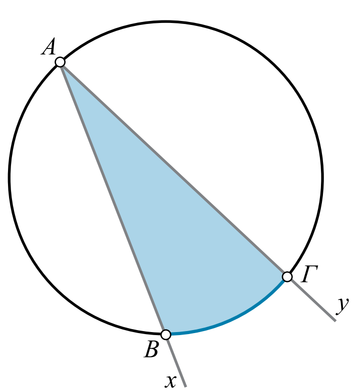
Επειδή γνωρίζουμε οτι η επίκεντρη γωνία έχει ίδιο μέτρο με το αντίστοιχο τόξο της, προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω πορίσματα.

Πορίσματα:

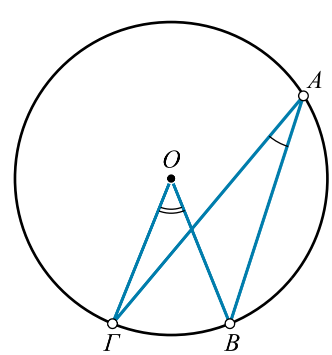
1) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

Δηλαδή στο σχήμα 4.49:

$$\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}}{2}$$



Σχ. 4.48

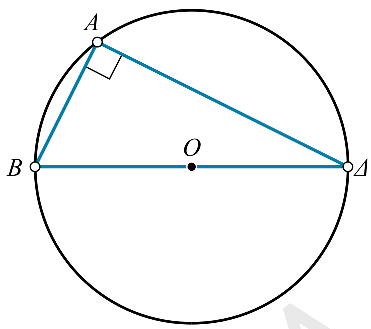


Σχ. 4.49

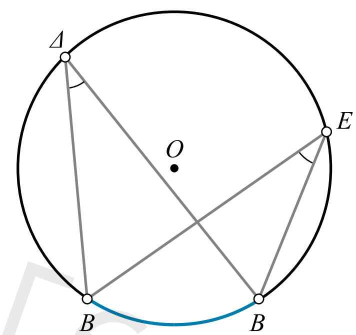
2) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Δηλαδή στο σχήμα 4.50

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta}}{2} = 90^{o}$$

3) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα. Δηλαδή στο σχήμα 4.51 $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



Σχ. 4.50



Σχ. 4.51

Παράδειγμα 4.4

Στο σχήμα 4.52 η ΒΔ είναι διάμετρος και $\hat{A} = 40^o$. Να βρεθούν:
α) Οι γωνίες του τριγώνου ΒΓΔ.
β) Το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Λύση

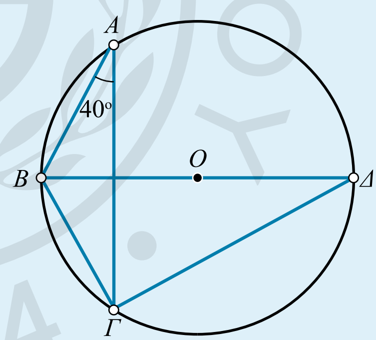
α) $\hat{\Delta} = \hat{A} = 40^o$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Gamma}$.

Η $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, δηλαδή:

$$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{BA}\Delta}}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

Στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει:

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma + 90^o + 40^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 50^o$$



Σχ. 4.52

β) Η $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Άρα:

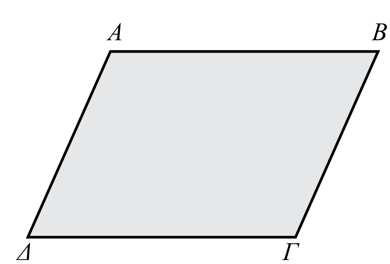
$$\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2} \Leftrightarrow 50^{\circ} = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 100^{\circ}$$

4.10 Τετράπλευρα

4.10.1 Παραλληλόγραμμο – Ιδιότητες παραλληλογράμμου

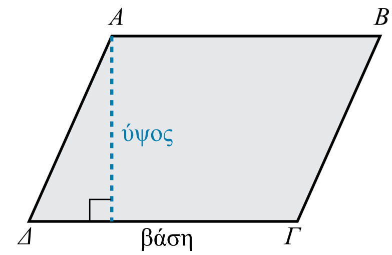
Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.53 το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν ΑΒ//ΔΓ και ΑΔ//ΒΓ



Σχ. 4.53

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ***ύψος*** του παραλληλογράμμου, ενώ οι συγκεκριμένες απέναντι πλευρές του λέγονται ***βάσεις*** ως προς το ύψος αυτό (σχ. 4.54).



Σχ. 4.54

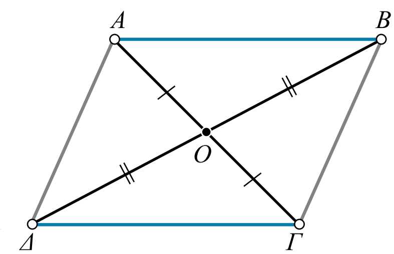
– Ιδιότητες παραλληλογράμμου

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Δηλαδή στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος 4.55: ΑΒ=ΔΓ και ΑΔ=ΒΓ

2) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$.

3) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται ΑΟ = ΟΓ και ΒΟ = ΟΔ (σχ. 4.55).



Σχ. 4.55

4.10.2 Ειδικά παραλληλόγραμμα

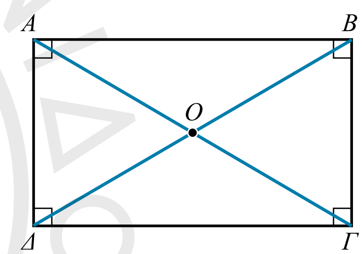
– Ορθογώνιο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Επειδή σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, τελικά προκύπτει οτι το ορθογώνιο έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

Ιδιότητα ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες. Στο σχήμα 4.56: ΑΓ = ΒΔ.



Σχ. 4.56

– Ρόμβος

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (σχ. 4.57).

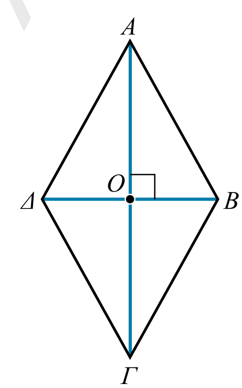
Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

Εκτός απ' τις κοινές ιδιότητες που ισχύουν σε κάθε παραλληλόγραμμο, στο ρόμβο ισχύουν επιπλέον οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες ρόμβου

1) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

2) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.



Σχ. 4.57

– Τετράγωνο

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος (σχ. 4.58).

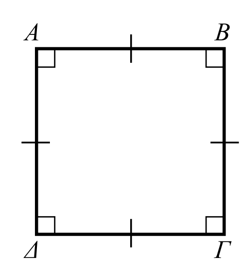
Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

Ιδιότητες τετραγώνου

1) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

2) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.

3) Οι διαγώνιοί του είναι ***ίσες***, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



Σχ. 4.58

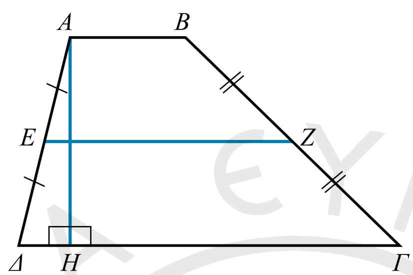
4.10.3 Τραπέζιο

Τραπέζιο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου ονομάζονται ***βάσεις*** του τραπεζίου (οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ του σχ. 4.59).

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου και έχει τα άκρα του στους φορείς αυτών λέγεται ***ύψος*** του τραπεζίου. Δηλαδή στο σχήμα 4.59 το ΑΗ ύψος του τραπεζίου.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται ***διάμεσος*** του τραπεζίου (σχ. 4.59).



Σχ. 4.59

Θεώρημα 4.13: Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή στο τραπέζιο του σχήματος 4.59 ισχύει:

$$\mathrm{EZ} /\!/ \mathrm{AB} /\!/ \Delta\Gamma \text{ και } \boxed{\mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{AB}+\Gamma\Delta}{2}}$$

– *Ισοσκελές τραπέζιο*

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

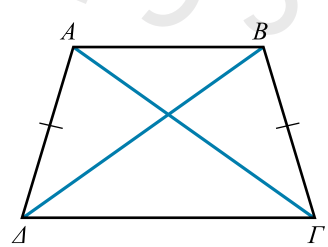
Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

1) Οι προσκείμενες γωνίες σε κάθε βάση του είναι ίσες.

2) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.60 έχουμε: $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$

$$\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{B}\Delta.$$



Σχ. 4.60

Παράδειγμα 4.5

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) όπου ΑΒ=ΑΔ. Από τη κορυφή Β φέρνουμε ΒΕ//ΑΔ (Ε σημείο της ΔΓ)

1) Να αποδειχθεί ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$

2) Αν επιπλέον $\hat{\mathrm{A}} = 120^{\circ}$ να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΔΒΓ.

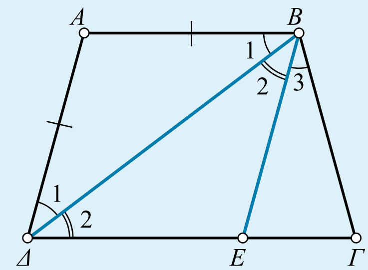
Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΔΒ (σχ. 4.61) είναι ισοσκελές αφού ΑΒ=ΑΔ. Άρα οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες, δηλαδή:

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1)$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2 \quad (2)$$

ως εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ



Σχ. 4.61

Από (1) και (2): $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, δηλαδή δείξαμε οτι η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$

β) $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$ ως εντός κι επί τα αυτά των ΑΒ//ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα: $\hat{\Delta} = 180^o - \hat{A} = 180^o - 120^o = 60^o$. Επειδή ΒΔ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$, είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 30^o$, $\hat{B} = \hat{A} = 120^o$ ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = 30^o$. Άρα: $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{B}_1 = 120^o - 30^o = 90^o$. Τέλος $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^o$ ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου.

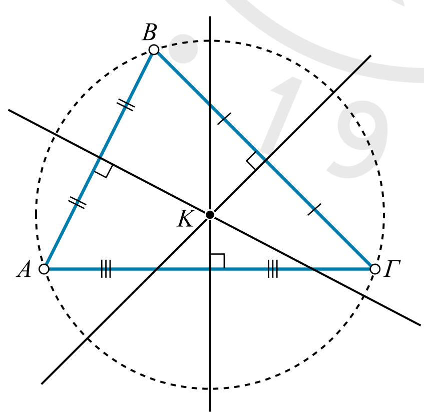
4.11 Αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου

1) Περίκεντρο

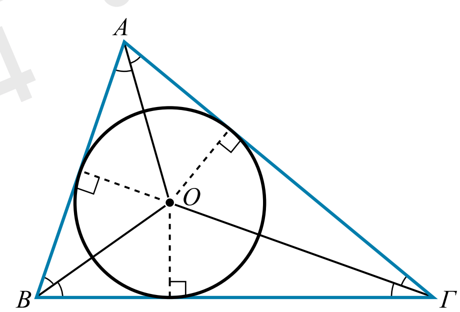
Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τριών πλευρών ενός τριγώνου λέγεται ***περίκεντρο***. Το περίκεντρο είναι το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***περιγεγραμμένος κύκλος*** του τριγώνου (σχ. 4.62).

2)΄Εγκεντρο

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται ***έγκεντρο***. Το έγκεντρο είναι το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***εγγεγραμμένος κύκλος*** του τριγώνου (σχ. 4.63).



Σχ. 4.62



Σχ. 4.63

3) Βαρύκεντρο

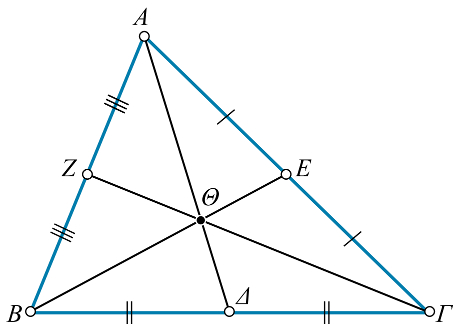
Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που ονομάζεται ***βαρύκεντρο***.

Θεώρημα 4.14: Η απόσταση του βαρύκεντρου από κάθε κορυφή του τριγώνου είναι ίση με τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου. Δηλαδή στο σχήμα 4.64 ισχύει:

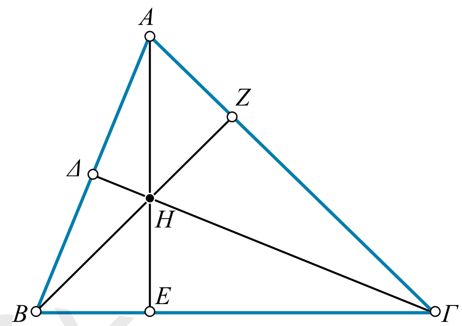
$$A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta \text{ και άρα } \Theta\Delta = \frac{1}{3} A\Delta$$

4) Ορθόκεντρο

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται ***ορθόκεντρο του τριγώνου***. Στο σχήμα 4.65 το Η είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 4.64



Σχ. 4.65

4.12 Γεωμετρικές κατασκευές

Με τον όρο ***γεωμετρική κατασκευή*** εννοούμε την κατασκευή ενός σχήματος χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα γεωμετρικα όργανα, τα οποία είναι ο ***κανόνας*** και ο ***διαβήτης***. Ο κανόνας είναι χάρακας χωρίς υποδιαιρέσεις. Δηλαδή τον χρησιμοποιούμε για να σχεδιάσουμε μια ευθεία, αλλά δεν μπορούμε να μετρήσουμε μήκη.

Θα ξεκινήσουμε με την κατασκευή της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος, στην οποία στηρίζονται οι περισσότερες απ' τις υπόλοιπες γεωμετρικές κατασκευές.

1) Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος

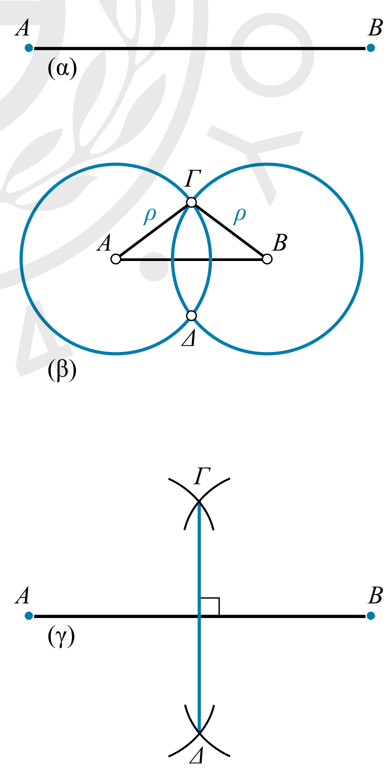
Για την κατασκευή οποιασδήποτε ευθείας, άρα και της μεσοκαθέτου χρειαζόμαστε δύο σημεία της. Επειδή γνωρίζουμε ότι τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν απ' τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, αρκεί να βρούμε 2 τέτοια σημεία.

α) Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

β) Με κέντρα τα Α και Β, αντίστοιχα, σχεδιάζουμε κύκλους με ακτίνα μεγαλύτερη απ' το μισό του ΑΒ.

γ) Τα σημεία **Γ** και **Δ**, στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι ορίζουν την ευθεία που είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ**, εφόσον τα **Γ** και **Δ**, ισαπέχουν από τα **Α** και **Β**, αφού είναι ΑΓ=ΓΒ=ΑΔ=ΔΒ=ρ. Επομένως με τον κανόνα σχεδιάζω την ευθεία που διέρχεται από τα Γ, Δ (σχ. 4.66).

> ***Σχόλιο:*** Με την κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος βρίσκουμε συγχρόνως και το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.



Σχ. 4.66

2) Κατασκευή καθέτου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής

Έστω ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός αυτής.

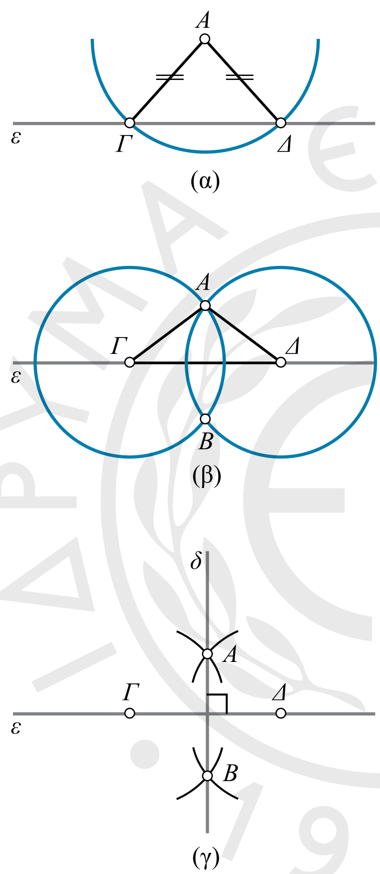
α) Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα τέτοια, ώστε ο κύκλος να τέμνει την ευθεία.

β) Αν Γ, Δ τα σημεία τομής του κύκλου με την ε, σχεδιάζουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος ΓΔ, η οποία διέρχεται από το Α. Δηλαδή χαράσσω κύκλους με κέντρα τα σημεία Γ και Δ και ακτίνα ίση με ΓΑ.

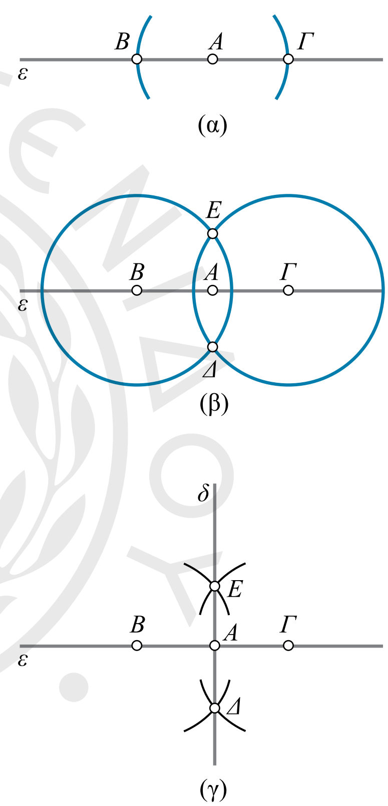
γ) Με τον κανόνα ενώνω τα σημεία τομής Α και Β των κύκλων (σχ. 4.67).

3) Κατασκευή καθέτου προς ευθεία σε δοσμένο σημείο αυτής

Έστω ευθεία *ε* και ένα σημείο Α της *ε*. Με κέντρο το Α και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την *ε* στα σημεία Β και Γ. Τότε το Α είναι μέσο του τμήματος ΒΓ και επομένως η ζητούμενη κάθετος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. Άρα συνεχίζω όπως στην κατασκευή 1 (σχ. 4.68).



Σχ. 4.67



Σχ. 4.68

4) Κατασκευή διχοτόμου γωνίας

Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε τη διχοτόμο της $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ (σχ. 4.69).

α) Με τον διαβήτη σχεδιάζουμε τόξο με κέντρο το Α και με τυχαία ακτίνα, το οποίο τέμνει τις πλευρές *ΑΒ* και *ΑΓ* στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα.

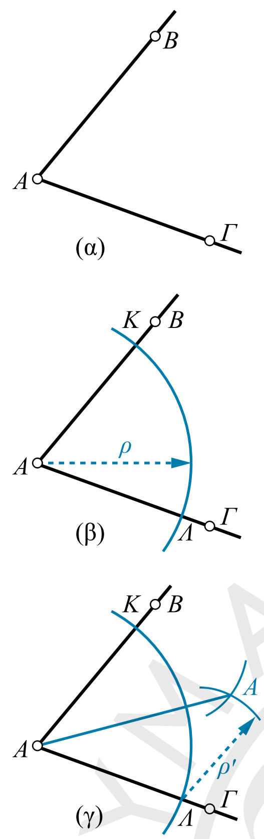
β) Με κέντρα τα σημεία Κ και Λ και σχεδιάζουμε τόξα τα οποία τέμνονται στο σημείο Δ.

γ) Με τον κανόνα σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ το οποίο διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

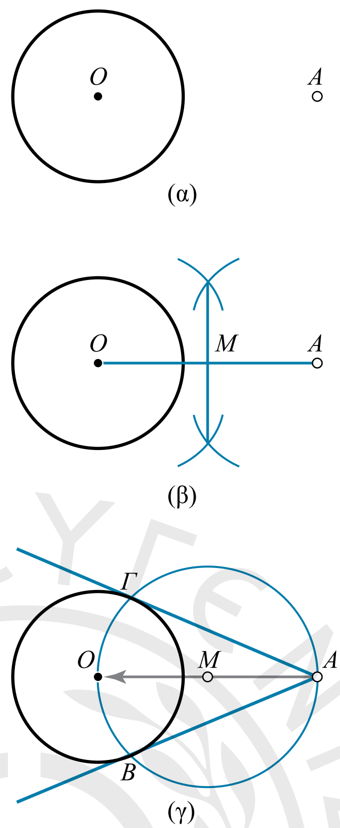
Εξήγηση: *Πράγματι η ευθεία ΑΔ, ως μεσοκάθετος της χορδής ΚΛ του κύκλου, θα είναι ύψος και διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΛ. Άρα θα είναι και διχοτόμος αυτού.*

5) Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου

α) Δίνεται κύκλος (Ο, *ρ*) και σημείο Α εκτός αυτού.



Σχ. 4.69



Σχ. 4.70

β) Ενώνω το σημείο Α με το κέντρο Ο του κύκλου και κατασκευάζω την μεσοκάθετη του ΟΑ (κατασκευή 1) ΄Ετσι βρίσκω το μέσο Μ του ΟΑ.

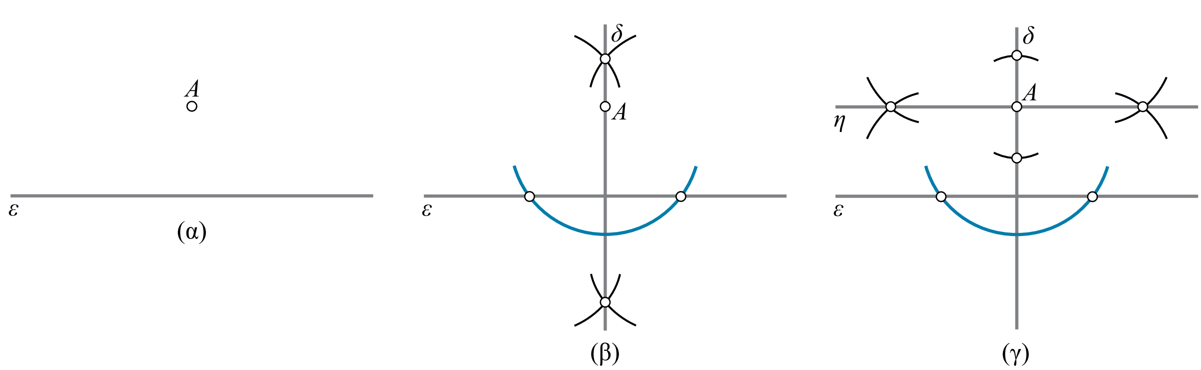
γ) Με κέντρο το Μ και ακτίνα ίση με ΟΜ κατασκευάζω κύκλο, που τέμνει τον αρχικό κύκλο στα σημεία Γ και Β. Οι ευθείες ΑΓ και ΑΒ εφάπτονται στον κύκλο (σχ. 4.70).

Εξήγηση: *Τα σημεία Β και Γ είναι σημεία του κύκλου* (Ο, ϱ) *αφού είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Επίσης, οι γωνίες* $\mathrm{A\hat{B}O}$ *και* $\mathrm{A\hat{\Gamma}O}$ *είναι ορθές ως εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Μ, ΟΜ) που βαίνουν σε ημικύκλιο. Άρα οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ είναι κάθετες στην ακτίνα του κύκλου στο σημείο επαφής, οπότε είναι εφαπτομένες του* (Ο, ϱ).

6) Κατασκευή παράλληλης ευθείας από σημείο Α προς δοσμένη ευθεία ε.

α) Κατασκευάζουμε την κάθετη ευθεία δ στην ε από το σημείο Α (κατασκευή 2).

β) Στη συνέχεια κατασκευάζουμε την ευθεία η κάθετη στην δ στο σημείο Α, όπως περιγράψαμε (κατασκευή 3). Η η είναι παράλληλη στην ε (σχ. 4.71).



Σχ. 4.71

Ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 40^{o}$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε ΒΔ = ΒΓ

α) Να υπολογιστούν οι γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{A}$

2. Αν ΑΔ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{o}$) και ΔΕ//ΑΒ να δειχθεί ότι:

α) Το Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΓ

β) $A\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$

3. Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο. Το 1^{o} πλοίο πλέει με ταχύτητα 25 knots με κατεύθυνση προς Βορρά και το 2^{o} πλοίο με ταχύτητα 20 knots με κατεύθυνση προς Ανατολή. Ποια θα είναι η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 2 ώρες;

4. Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο. Το 1^{o} πλοίο πλέει με ταχύτητα 18 knots με κατεύθυνση προς Δ και το 2^{o} πλοίο πλέει με κατεύθυνση προς Ν. Μετά από 2 ώρες η απόσταση των δύο πλοίων είναι 80 *ν.μ.* Να βρεθεί η ταχύτητα του δεύτερου πλοίου.

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^{o}$, φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν ΔΒ=4 *cm* και ΔΓ= 9 *cm*, να βρεθεί το ύψος ΑΔ.

6. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες παραλληλογράμμου.

7. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες του ορθογωνίου.

8. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες του ρόμβου.

9. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 50^{o}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 120^{o}$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ.

11. Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε 5 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

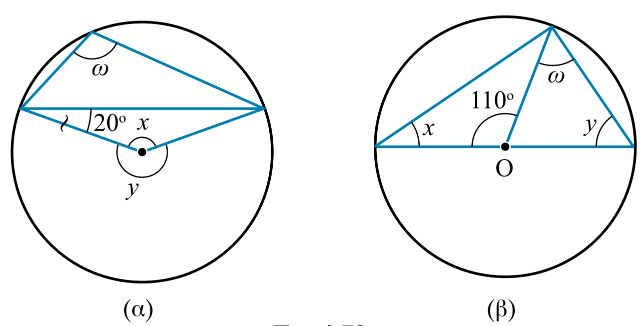
12. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ = 6, ΒΓ = 4 και $\hat{\Gamma} = 60^{o}$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

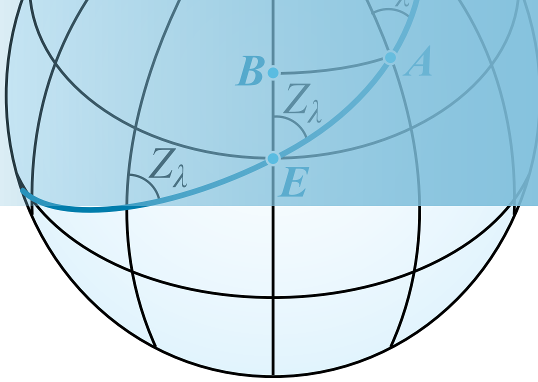
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα

13. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ //ΓΔ και ΒΔ = ΒΓ. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^{o}$ και $A\hat{\Delta}B = 25^{o}$, να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ.

14. Στα σχήματα 4.72(α) (β) να υπολογιστούν οι γωνίες *x*, *y* και *ω*.



Σχ. 4.72



κεφάλαιο 5

Επίπεδη τριγωνομετρία

Σε αυτό το κεφάλαιο, υπενθυμίζουμε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα της επίπεδης τριγωνομετρίας. Η τριγωνομετρία αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση πολλών προβλημάτων της Ναυτιλίας γι' αυτόν το λόγο, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε ναυτικές εφαρμογές.

5.1 Μονάδες μέτρησης γωνιών

1) Το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε ***μοίρες*** και τις υποδιαιρέσεις της: πρώτα ***λεπτά*** και ***δεύτερα λεπτά***.

1 *μοίρα:* $\mathbf{1^o}$

Το **1 *πρώτο λεπτό*** συμβολίζεται **1΄** και είναι τέτοιο ώστε: $\mathbf{1' = \frac{1}{60}\,1^o}$

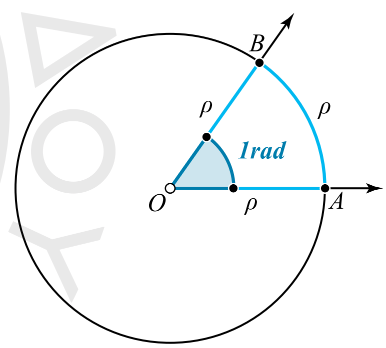
Το **1 *δεύτερο λεπτό*** συμβολίζεται **1΄΄** και είναι τέτοιο ώστε: $\mathbf{1'' = \frac{1}{60}\,1'}$

Ισχύει: $\mathbf{1^o = 60' = 3600''}$ **και** $\mathbf{1' = 60''}$

Για παράδειγμα αν μια γωνία ω είναι 30 μοίρες, 24 πρώτα λεπτά και 52 δεύτερα λεπτά, γράφουμε: ω= $30^o\,24'\,52''$

2) Μια άλλη μονάδα μέτρησης γωνιών είναι το ακτίνιο.

Ακτίνιο ή ***rad*** είναι η γωνία που όταν είναι επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου (σχ. 5.1).



Σχ. 5.1

Εφόσον γνωρίζουμε ότι το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι $2\pi\rho$, η γωνία που είναι 360° είναι ίση με 2π ακτίνια.

Άρα, η σχέση μοιρών και ακτινίων είναι: $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{\mu}{360^o}$ ή με απλοποίηση:

Σχέση μοιρών ακτινίων $\boxed{\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\mu}{180^o}}$

όπου: μ οι μοίρες μιας γωνίας και α τα ακτίνια της ίδιας γωνίας.

Θέτοντας στον παραπάνω τύπο όπου α το 1, και λύνοντας ως προς μ προκύπτει ότι:

$$1\ rad \text{ αντιστοιχεί σε } \frac{180^o}{\pi} \cong 57{,}29578^o$$

Με τον παραπάνω τύπο μπορούμε να μετατρέψουμε μια γωνία από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα. Για παράδειγμα, για να εκφράσουμε τη γωνία 72° σε ακτίνια, θέτουμε στον παραπάνω τύπο όπου: $\mu = 72^o$:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{72^o}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}\,rad$$

Η αντιστοιχία ανάμεσα σε μοίρες και ακτίνια για τις πιο συνηθισμένες γωνίες παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1

Μοίρες		*Ακτίνια*
0^o	↔	$0\,rad$
30^o	↔	$\frac{\pi}{6}\,rad$
45^o	↔	$\frac{\pi}{4}\,rad$
60^o	↔	$\frac{\pi}{3}\,rad$
90^o	↔	$\frac{\pi}{2}\,rad$
180^o	↔	$\pi\,rad$
360^o	↔	$2\pi\,rad$

5.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90$. Ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οξείας γωνίας $\hat{B} = \omega$ (σχ. 5.2) ως εξής:

Ημίτονο της ω: $$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

Συνημίτονο της ω: $$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

Εφαπτομένη της ω: $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

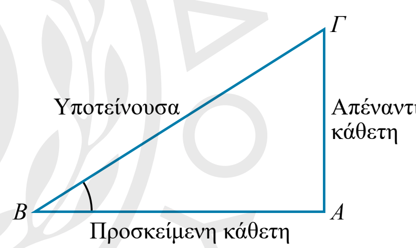
Συνεφαπτομένη της ω: $$\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$$

Τέμνουσα της ω: $$\tau\varepsilon\mu\omega = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Συντέμνουσα της ω: $$\sigma\tau\varepsilon\mu\omega = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{1}{\eta\mu\omega}$$

Συμβολισμοί

Ελληνικός συμβολισμός	*Αγγλικός συμβολισμός*
ημ	sin
συν	cos
εφ	tan
σφ	cot
τεμ	s
στεμ	csc



Σχ. 5.2

Παράδειγμα 5.1

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 5.3) με $\hat{A} = 90^{o}$, δίνονται η πλευρά ΒΓ = 50 cm και η γωνία $\hat{B} = 48^{o}$. Να βρεθούν οι υπόλοιπες πλευρές του και η γωνία $\hat{\Gamma}$

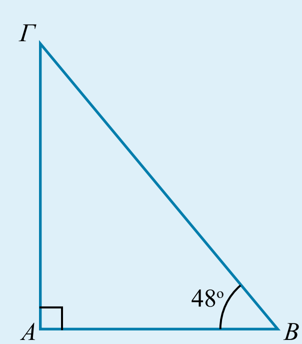
Λύση

$$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu 48^{o} = \frac{A\Gamma}{50} \Leftrightarrow 0{,}74314 = \frac{A\Gamma}{50} \Leftrightarrow A\Gamma =$$
$$= 0{,}74314 \cdot 50 \Leftrightarrow A\Gamma = 37{,}157 \text{ cm}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 48^{o} = \frac{AB}{50} \Leftrightarrow 0{,}66913 = \frac{AB}{50} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB = 0{,}66913 \cdot 50 \Leftrightarrow AB = 33{,}4565 \text{ cm}$$

Για τη γωνία $\hat{\Gamma}$ έχουμε:

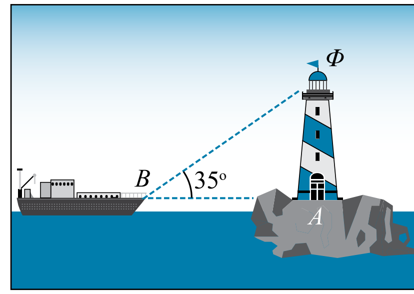
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{o} \Leftrightarrow 90^{o} + 48^{o} + \hat{\Gamma} = 180^{o} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^{o} - 90^{o} - 48^{o} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 42^{o}$$



Σχ. 5.3

Πρόβλημα 5.1

Ένας φαροφύλακας εντοπίζει ένα σκάφος κοντά στην ακτή, και εστιάζει πάνω του με τον προβολέα. Αν το φως του προβολέα σχηματίζει γωνία 35° με τον ορίζοντα, να βρεθεί η απόσταση της βάρκας από τον φάρο. Δίνεται ότι ο προβολέας βρίσκεται σε ύψος 42 m.



Σχ. 5.4

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Phi$ του σχήματος 5.4 έχουμε:

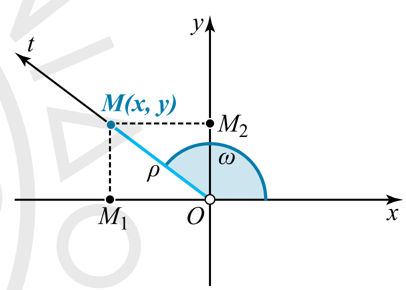
$$\varepsilon\varphi 35^{\circ} = \frac{A\Phi}{AB} \Leftrightarrow 0{,}7 = \frac{42}{AB} \Leftrightarrow 0{,}7 \cdot AB = 42 \Leftrightarrow AB = \frac{42}{0{,}7} \Leftrightarrow AB = 60.$$

Άρα η βάρκα βρίσκεται σε απόσταση 60 m από τον φάρο.

5.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^{\circ} \le \omega \le 360^{\circ}$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας $0^{\circ} \le \omega \le 360^{\circ}$. Μια γωνία μεγαλύτερη των 90°, δεν μπορεί να είναι γωνία ορθογωνίου τριγώνου. Επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της με τους τύπους της παραγράφου 5.2.

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων $0xy$ στο επίπεδο, και $0t$ μια ημιευθεία. Έστω ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα $0x$ αν περιστραφεί με φορά αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού (θετική φορά) γύρω από το O μέχρι να συμπέσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Ot. Ο ημιάξονας Ox λέγεται ***αρχική πλευρά της γωνίας ω***, ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται ***τελική πλευρά της ω*** (σχ. 5.5).



Σχ. 5.5

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M\,(x,y)$ της τελικής πλευράς της γωνίας. Αν

$$\boxed{\varrho = (OM) = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων, ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της ω ως εξής:

$\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\varrho}$	$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{y}{x}$ (εφόσον $x \neq 0$)	όπου $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$
$\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\varrho}$	$\sigma\varphi\omega = \dfrac{x}{y}$ (εφόσον $y \neq 0$)	

Για τις γωνίες 90° και 270° δεν ορίζεται η εφαπτομένη ($x = 0$) αντίστοιχα για τις γωνίες 0° και 180° δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη ($y=0$).

1) Τριγωνομετρικός κύκλος

Για την καλύτερη απεικόνιση των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών μάς διευκολύνει η χρήση του ***τριγωνομετρικού κύκλου***. Ονομάζεται έτσι ο κύκλος ο οποίος έχει ως κέντρο των αρχή των αξόνων, ακτίνα $\varrho = 1$ και είναι προσανατολισμένος θεωρώντας ως θετική φορά αυτή που είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Όταν το σημείο $M\ (x,y)$ μιας γωνίας ω ανήκει και στον τριγωνομετρικό κύκλο (σχ. 5.6), δηλαδή όταν $OM = 1$, τότε οι παραπάνω τύποι παίρνουν την πιο απλή μορφή:

$$\eta\mu\omega = y \qquad\qquad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \text{ με } x \neq 0$$

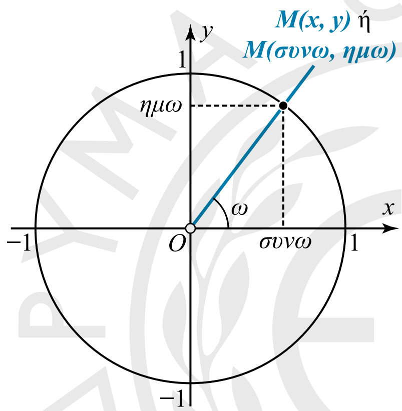
$$\sigma\upsilon\nu\omega = x \qquad\qquad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \text{ με } x \neq 0$$

και θα ισχύει: $M\ (\sigma\upsilon\nu\omega,\ \eta\mu\omega)$

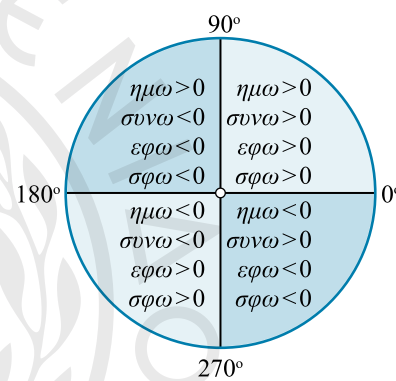
Παρατηρούμε ότι, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

2) Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω εξαρτάται από το πρόσημο των συντεταγμένων του σημείου $M\ (x,y)$ της τελικής πλευράς της. Στο σχήμα 5.7 φαίνεται το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική της πλευρά.



Σχ. 5.6



Σχ. 5.7

Παράδειγμα 5.2

Να υπολογιστούν το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη των γωνιών: 0°, 90°, 180°, 270°.

Λύση

Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος 5.8.

Γωνία 0°: Χρησιμοποιούμε το σημείο $A(1,0)$ του τριγωνομετρικού κύκλου, οπότε:

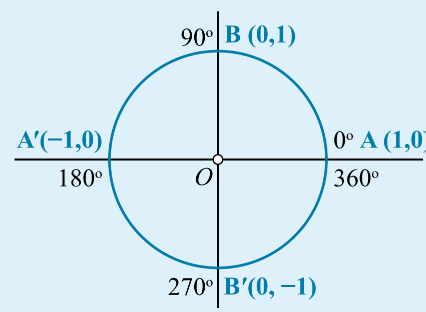
$\eta\mu 0^\circ = y = 0,\ \sigma\upsilon\nu 0^\circ = x = 1,\ \varepsilon\varphi 0^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\sigma\varphi 0^\circ = \dfrac{x}{y}$ δεν ορίζεται, αφού $y = 0$

Γωνία 90°: Χρησιμοποιούμε το σημείο Β(0,1) οπότε:

$\eta\mu 90^\circ = y = 1,\ \sigma\upsilon\nu 90^\circ = x = 0,\ \varepsilon\varphi 0^\circ = \dfrac{y}{x}$

δεν ορίζεται, αφού $x = 0$, $\sigma\varphi 0^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{1} = 0$



Σχ. 5.8

Γωνία 180°: Χρησιμοποιούμε το σημείο $A'(-1,0)$:

$$\eta\mu 180^{\circ} = y = 0,\ \sigma\upsilon\nu 180^{\circ} = x = -1,\ \varepsilon\varphi 180^{\circ} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\sigma\varphi 180^{\circ} = \frac{x}{y} \text{ δεν ορίζεται, αφού } y = 0$$

Γωνία 270°: Χρησιμοποιούμε το σημείο $B'(0, -1)$:

$$\eta\mu 270^{\circ} = y = -1, \sigma\upsilon\nu 270^{\circ} = x = 0,\ \varepsilon\varphi 270^{\circ} = \frac{y}{x}, \text{ δεν ορίζεται, αφού } x = 0,$$

$$\sigma\varphi 270^{\circ} = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

3) Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Στον πίνακα 5.2 παρατίθενται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των βασικότερων γωνιών.

Πίνακας 5.2

ω σε μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ω σε *rad*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\varepsilon\varphi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\sigma\varphi\omega$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

5.4 Τύποι αναγωγής τριγωνομετρικών αριθμών στο 1° τεταρτημόριο

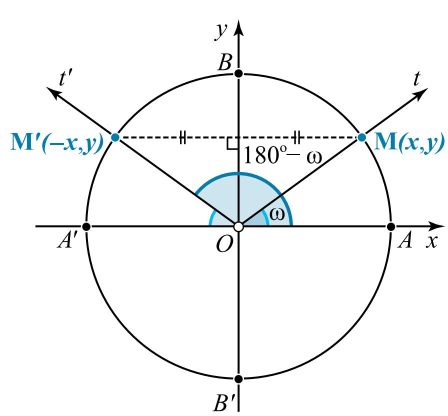
5.4.1 Παραπληρωματικές γωνίες

Αν $M\ (x,y)$ είναι το σημείο τομής της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω και του τριγωνομετρικού κύκλου, το αντίστοιχο σημείο για την παραπληρωματική της γωνία $180^{\circ} - \omega$ θα είναι το $M'(-x,y)$ (σχ. 5.9). Έχοντας υπόψη τους ορισμούς της παραγράφου 5.3, συμπεραίνουμε ότι:

$$\boxed{\begin{aligned} &\eta\mu(180^{\circ} - \omega) = \eta\mu\omega \\ &\sigma\upsilon\nu(180^{\circ} - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \\ &\varepsilon\varphi(180^{\circ} - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega \\ &\sigma\varphi(180^{\circ} - \omega) = -\sigma\varphi\omega \end{aligned}}$$

Επομένως, ***οι παραπληρωματικές γωνίες ω, 180° – ω έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.***

Με τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας αμβλείας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.



Σχ. 5.9

Για παράδειγμα:

$$\eta\mu 120^{\circ} = \eta\mu(180^{\circ} - 60^{\circ}) = \eta\mu 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^{\circ} = \sigma\upsilon\nu(180^{\circ} - 60^{\circ}) = -\sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 120^{\circ} = \varepsilon\varphi(180^{\circ} - 60^{\circ}) = -\varepsilon\varphi 60^{\circ} = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi 120^{\circ} = \sigma\varphi(180^{\circ} - 60^{\circ}) = -\sigma\varphi 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Παράδειγμα 5.3

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = \sigma\upsilon\nu 55^{\circ} + \varepsilon\varphi 135^{\circ} + \sigma\upsilon\nu 125^{\circ} + 2\eta\mu 150^{\circ}$

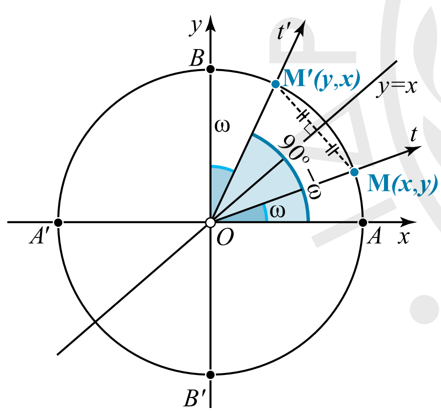
Λύση

$\varepsilon\varphi 135^{\circ} = \varepsilon\varphi(180^{\circ} - 45^{\circ}) = -\varepsilon\varphi 45^{\circ} = -1$

$\sigma\upsilon\nu 125^{\circ} = \sigma\upsilon\nu(180^{\circ} - 55^{\circ}) = -\sigma\upsilon\nu 55^{\circ}$

$\eta\mu 150^{\circ} = \eta\mu(180^{\circ} - 30^{\circ}) = \eta\mu 30^{\circ} = \frac{1}{2}$

$A = \sigma\upsilon\nu 55^{\circ} + \varepsilon\varphi 135^{\circ} + \sigma\upsilon\nu 125^{\circ} + 2\eta\mu 150^{\circ} = \sigma\upsilon\nu 55^{\circ} - 1 - \sigma\upsilon\nu 55^{\circ} + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 1 = 0$



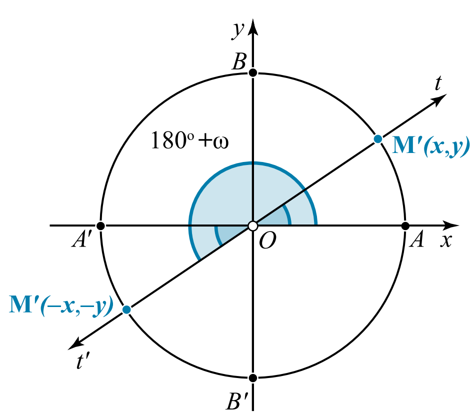
Σχ. 5.10

5.4.2 Συμπληρωματικές γωνίες

Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.10, τα σημεία M και M' πάνω στις τελικές πλευρές των γωνιών ω και $90^{\circ} - \omega$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο 1ης – 3ης γωνίας, οπότε η τετμημένη του ενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου. Εφαρμόζοντας τους ορισμούς, έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu(90^{\circ} - \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \omega) &= \sigma\varphi\omega \\ \sigma\varphi(90^{\circ} - \omega) &= \varepsilon\varphi\omega \end{aligned}}$$

Επομένως, ***στις συμπληρωματικές γωνίες ισχύει ότι το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.***



Σχ. 5.11

5.4.3 Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

Αν $M\,(x,y)$ είναι ένα σημείο της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.11, το σημείο $M'(-x,-y)$ θα βρίσκεται πάνω στη τελική πλευρά της γωνίας $180^{\circ} + \omega$. Εάν εφαρμόσουμε τους ορισμούς, για τις γωνίες που διαφέρουν κατά 180° ισχύουν:

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu(180^{\circ} + \omega) &= -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180^{\circ} + \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(180^{\circ} + \omega) &= \varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(180^{\circ} + \omega) &= \sigma\varphi\omega \end{aligned}}$$

Επομένως, ***οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, και έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.***

Παράδειγμα 5.4

Να αποδειχθεί ότι:

$$\eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ + 3\cdot \varepsilon\varphi^2 135^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 250^\circ - \sigma\upsilon\nu 36^\circ + \sigma\upsilon\nu 110^\circ = 3$$

Λύση

$$\varepsilon\varphi 135^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 54^\circ) = \eta\mu 54^\circ$$

$$\sigma\upsilon\nu 250^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 70^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$$

$$\sigma\upsilon\nu 110^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 70^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$$

Άρα:

$$\eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ + 3\cdot \varepsilon\varphi^2 135^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 250^\circ - \sigma\upsilon\nu 36^\circ + \sigma\upsilon\nu 110^\circ =$$
$$= \eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ + 3\cdot(-1)^2 - 2(-\sigma\upsilon\nu 70^\circ) - \eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ =$$
$$= 3\cdot 1 + 2\sigma\upsilon\nu 70^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 70^\circ = 3$$

5.5 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 1, ταυτότητα είναι μια ισότητα που ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της. Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι σχέσεις που περιλαμβάνουν τριγωνομετρικούς αριθμούς και ισχύουν για κάθε τιμή των γωνιών. Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικότερες τριγωνομετρικές ταυτότητες και μετασχηματισμοί.

1) Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
$\sigma\varphi\omega = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$	$\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\sigma\tau\varepsilon\mu\omega = \dfrac{1}{\eta\mu\omega}$
$\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega = 1$	$\tau\varepsilon\mu^2\omega = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$	$\sigma\tau\varepsilon\mu^2\omega = 1 + \sigma\varphi^2\omega$

2) Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$$

3) Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

5.6 Επίλυση τυχαίου τριγώνου

Επίλυση τριγώνου ονομάζουμε την εύρεση όλων των κύριων στοιχείων ενός τριγώνου, δηλαδή όλων των πλευρών και όλων των γωνιών του. Κάθε τρίγωνο, ορθογώνιο ή μη, μπορεί να επιλυθεί εάν γνωρίζουμε 3 οποιαδήποτε στοιχεία του, από τα οποία το ένα τουλάχιστον είναι πλευρά. (Δεν είναι δυνατή η επίλυση όταν γνωρίζουμε τις 3 γωνίες του τριγώνου και καμία πλευρά του, εφόσον όλα τα όμοια τρίγωνα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες). Η επίλυση τυχαίου τριγώνου γίνεται με τους Νόμους Ημιτόνου και Συνημιτόνου:

5.6.1 Θεώρημα 1: Νόμος Ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει: $$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}}$$

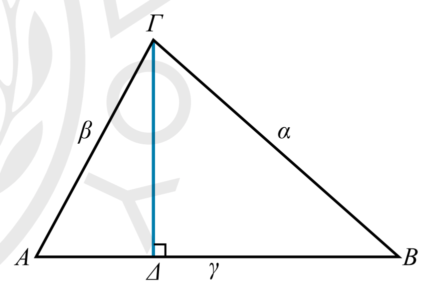
Απόδειξη

Σε τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 5.12 φέρνουμε το ύψος του $\Gamma\Delta$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \beta\eta\mu A \qquad (1)$$

ενώ από το ορθογώνιο $\Gamma\Delta B$ έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \alpha\eta\mu B \qquad (2)$$



Σχ. 5.12

Από τις ισότητες (1), (2) έχουμε:

$$\beta\eta\mu A = \alpha\eta\mu B \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

Παρατήρηση

Χρησιμοποιούμε τον Νόμο Ημιτόνων για την επίλυση τριγώνου, όταν είναι γνωστές:
1) *Μια πλευρά και 2 γωνίες* (Γ-Γ-Π ή Γ-Π-Γ).
2) *Δύο πλευρές και μια γωνία, εκτός της περιεχόμενης* (Π-Π-Γ).

Παράδειγμα 5.5

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 25$, $\hat{B} = 48^{\circ}$ και $\hat{\Gamma} = 63^{\circ}$ (σχ. 5.13).

Λύση

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Επομένως, αφού είναι γνωστές οι 2 γωνίες του μπορεί να υπολογιστεί η τρίτη:

$$\hat{A} = 180^{\circ} - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180^{\circ} - (48^{\circ} + 63^{\circ}) = 180^{\circ} - 111^{\circ} = 69^{\circ}$$

Γνωρίζουμε μία πλευρά και όλες τις γωνίες. Επομένως θα εφαρμόσουμε Νόμο Ημιτόνων για να βρούμε τις 2 άγνωστες πλευρές:

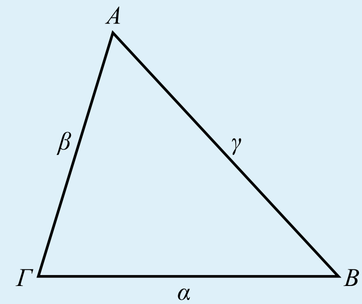
$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{25}{\eta\mu 69^o} = \frac{25}{\eta\mu 48^o} \Leftrightarrow \frac{25}{0{,}93358} = \frac{\beta}{0{,}74314} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}93358 \cdot \beta = 25 \cdot 0{,}74314 \Leftrightarrow 0{,}93358 \cdot \beta = 18{,}5785 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{18{,}5758}{0{,}93358} \Leftrightarrow \beta = 19{,}90028$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{25}{\eta\mu 69^o} = \frac{\gamma}{\eta\mu 63^o} \Leftrightarrow \frac{25}{0{,}93358} = \frac{\gamma}{0{,}89101} \Leftrightarrow 0{,}93358 \cdot \gamma =$$

$$= 25 \cdot 0{,}89101 \Leftrightarrow 0{,}93358 \cdot \gamma = 22{,}27525 \Leftrightarrow \gamma = \frac{22{,}27525}{0{,}93358} \Leftrightarrow \gamma = 23{,}86003$$



Σχ. 5.13

– Τόξο ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

Κατά την επίλυση τριγώνου, αναζητούμε όλες τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου. Η εύρεση μιας γωνίας, τις περισσότερες φορές, γίνεται μέσω της εύρεσης ενός από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της. ΄Εστω ότι έχουμε υπολογίσει το ημίτονο μιας γωνίας και είναι ο αριθμός x, όπου $-1 \le x \le 1$. Η γωνία που το ημίτονο της είναι ίσο με x ονομάζεται ***τόξο ημιτόνου x*** και συμβολίζεται:

arcsinx ή **asinx** ή $\mathbf{sin^{-1}x}$ ή $\mathbf{\eta\mu^{-1}x}$

Είναι γνωστό ότι περισσότερες από μια γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο. Για παράδειγμα $\eta\mu 30^o = 0{,}5$ αλλά και $\eta\mu 150^o = \eta\mu(180^o - 30^o) = \eta\mu(30^o) = 0{,}5$. Άρα θα πρέπει να καθοριστεί ποια από όλες τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο x θεωρείται το τόξο ημιτόνου x. Παρατηρούμε ότι οι γωνίες που ανήκουν στο διάστημα από -90^o έως 90^o έχουν όλες διαφορετικά ημίτονα, που καλύπτουν όλες τις τιμές στο $[-1, 1]$. ΄Ετσι, ορίζουμε:

$$\omega = \eta\mu^{-1}x \text{ αν } \eta\mu\omega = x \text{ όπου } -90^o \le \omega \le 90^o \text{ (σε μοίρες) ή } -\frac{\pi}{2} \le \omega \le \frac{\pi}{2} \text{ (σε } rad\text{)}$$

Δηλαδή τελικά $\eta\mu^{-1}\, 0{,}5 = 30^o$

Ομοίως, το ***τόξο συνημιτόνου*** x, όπου $-1 \le x \le 1$, συμβολίζεται:

arccosx ή **acosx** ή $\mathbf{cos^{-1}x}$ ή $\mathbf{\sigma\upsilon\nu^{-1}x}$

και είναι η γωνία ω που το συνημίτονό της είναι x και ισχύει $0^o \le \omega \le 180^o$ ή $0 \le \omega \le \pi$, εφόσον όλες οι γωνίες στο διάστημα από 0^o έως 180^o έχουν διαφορετικά συνημίτονα, που καλύπτουν όλες τις τιμές στο $[-1, 1]$.

Δηλαδή: $\omega = \sigma\upsilon\nu^{-1}x$ αν $\sigma\upsilon\nu\omega = x$ όπου $0^o \le \omega \le 180^o$ ή $0 \le \omega \le \pi$.

Για παράδειγμα:

$$\sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}5 = 60^o \text{ διότι } \sigma\upsilon\nu 60^o = 0{,}5 \text{ και } \sigma\upsilon\nu^{-1}(-0{,}5) = 120^\circ \text{ διότι } \sigma\upsilon\nu 120^o = -0{,}5$$

Επίσης το ***τόξο εφαπτομένης*** x συμβολίζεται:

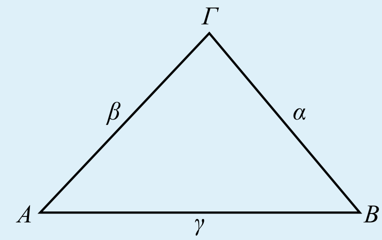
arctanx ή **atanx** ή $\mathbf{tan^{-1}x}$ ή $\mathbf{\varepsilon\varphi^{-1}x}$

και είναι η γωνία ω που η εφαπτομένη της ισούται με x όπου $x \in (-\infty, \infty)$ και ισχύει $-90^o < \omega < 90^o$ ή $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$, εφόσον οι γωνίες μεταξύ -90^o και 90^o, έχουν διαφορετικές εφαπτόμενες που καλύπτουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα: $\varepsilon\varphi^{-1}1 = 45^o$ διότι $\varepsilon\varphi 45^o = 1$

Παράδειγμα 5.6

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 23$, $\beta = 31$ και $\hat{B} = 35^o$ (σχ. 5.14).



Σχ. 5.14

Λύση

Γνωρίζουμε 2 πλευρές και μία γωνία από τις απέναντί τους.

Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τον Νόμο Ημιτόνων για να βρούμε την γωνία Α.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{\eta\mu 35^o} \Leftrightarrow \frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{0{,}57358}$$

$$31 \cdot \eta\mu A = 13{,}19234 \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{13{,}19234}{31} \Leftrightarrow \eta\mu A = 0{,}42556$$

$$\eta\mu^{-1} 0{,}42556 = 25{,}18611^o$$

Άρα: $\hat{A} = 25{,}18611^o$ ή $\hat{A} = 180^o - 25{,}18611^o = 154{,}81389^o$

↓

Απορρίπτεται διότι:
είναι $\alpha < \beta$ άρα πρέπει
και $\hat{A} < \hat{B}$ επομένως $\hat{A} < 35^o$

$$\hat{\Gamma} = 180^o - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^o - (25{,}18611^o + 35^o) = 119{,}81389^o$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων για να βρούμε την πλευρά γ

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{31}{0{,}57358} = \frac{\gamma}{0{,}86764} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}57358 \cdot \gamma = 31 \cdot 0{,}86764 \Leftrightarrow 0{,}57358 \cdot \gamma = 26{,}89684$$

$$\gamma = \frac{26{,}89684}{0{,}57358} \Leftrightarrow \gamma = 46{,}89292$$

Παράδειγμα 5.7

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 24$, $\gamma = 33$, και $\hat{A} = 42$

Λύση

Είναι γνωστές 2 πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες. Εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων για να βρούμε την άλλη απέναντι γωνία

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42^o} = \frac{33}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{24}{0{,}66913} = \frac{33}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \cdot \eta\mu \Gamma = 22{,}08129 \Leftrightarrow \eta\mu \Gamma = \frac{22{,}08129}{24} \Leftrightarrow \eta\mu \Gamma = 0{,}92005$$

Άρα: $\hat{\Gamma} = \eta\mu^{-1} 0{,}92005 = 66{,}93339^o$ ή $\hat{\Gamma} = 180^o - 66{,}93339^o = 113{,}06661^o$

Επειδή $\gamma > \alpha$, θα πρέπει και $\hat{\Gamma} > A$.

Όμως δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία, διότι είναι και οι δύο γωνίες μεγαλύτερες από την $\hat{A} = 42^o$. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Αν $\hat{\Gamma} = 66{,}93339^o$:

$$\hat{B} = 180^o - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180^o - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180^o - (42^o + 66{,}93339^o) = 71{,}06661^o$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42^{o}} = \frac{\beta}{\eta\mu 71{,}06661^{o}} \Leftrightarrow \frac{24}{0{,}66913} = \frac{\beta}{0{,}9459} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}66913 \cdot \beta = 22{,}7016 \Leftrightarrow \beta = \frac{22{,}7016}{0{,}66913} \Leftrightarrow \beta = 33{,}92704$$

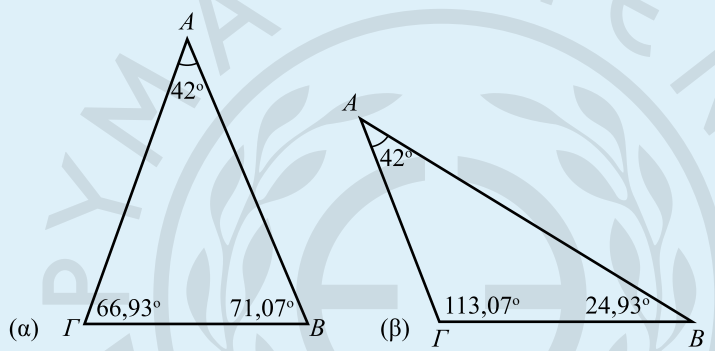
Οπότε η λύση είναι το τρίγωνο του σχήματος 5.15(α)
β) Αν $\hat{\Gamma} = 113{,}06661^{o}$:

$$\hat{B} = 180^{o} - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180^{o} - (42^{o} + 113{,}06661^{o}) = 24{,}93339^{o}$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42^{o}} = \frac{\beta}{\eta\mu 24{,}93339^{o}} \Leftrightarrow \frac{24}{0{,}66913} = \frac{\beta}{0{,}42156} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}66913 \cdot \beta = 10{,}11744 \Leftrightarrow \beta = \frac{10{,}11744}{0{,}66913} \Leftrightarrow \beta = 15{,}12029$$

Η λύση είναι το τρίγωνο του σχήματος 5.15(β).



Σχ. 5.15

5.6.2 Θεώρημα 2: Νόμος Συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \end{aligned}}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 5.16 και φέρουμε το ύψος του $\Gamma\Delta$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχουμε:

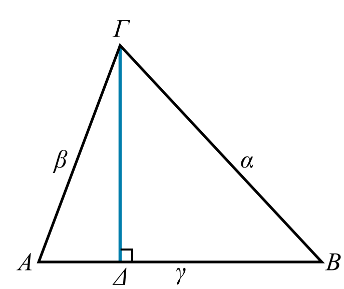
$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2 \qquad (1)$$

Επειδή $\Delta B = \gamma - A\Delta$ η (1) γίνεται:

$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta^2) \Leftrightarrow \alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + A\Delta^2 - 2\gamma \cdot A\Delta \qquad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2 \;\; \text{και} \;\; \sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{\beta} \Leftrightarrow A\Delta = \beta \cdot \sigma\upsilon\nu A$$



Σχ. 5.16

Με αντικατάσταση στην ισότητα (2) προκύπτει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες 2 ισότητες.

Παρατήρηση

Χρησιμοποιούμε τον Νόμο Συνημιτόνων για την επίλυση τριγώνου, όταν είναι γνωστές:
1) *Οι 3 πλευρές (Π-Π-Π)*
2) *Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (Π-Γ-Π)*

Παράδειγμα 5.8

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \sqrt{2}, \gamma = \sqrt{3}$ και $\hat{A} = 67^{\circ}$

Λύση

Από τον Νόμο Συνημιτόνων έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$\alpha^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu 67^{\circ}$$

$$\alpha^2 = 2 + 3 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 0{,}39073$$

$$\alpha^2 = 5 - 2 \cdot 2{,}44949 \cdot 0{,}39073$$

$$\alpha^2 = 5 - 1{,}91418$$

$$\alpha^2 = 3{,}08582$$

$$\alpha = \sqrt{3{,}08582}$$

$$\alpha = 1{,}75665$$

Γνωρίζοντας τώρα τις τρεις πλευρές του τριγώνου μπορούμε να βρούμε τις γωνίες του πάλι από τον Νόμο των Συνημιτόνων.

Αναλυτικά έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{(1{,}75665)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot 1{,}75665 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{3{,}08583 + 3 - 2}{2 \cdot 1{,}75665 \cdot 1{,}73205}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{4{,}08582}{6{,}08521} = 0{,}67143$$

Άρα $\hat{B} = \sigma\upsilon\nu^{-1} 0{,}67143 = 47{,}82247^{\circ}$ και άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{\circ} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^{\circ} - \hat{A} - \hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^{\circ} - 67^{\circ} - 47{,}82247^{\circ} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 65{,}17753^{\circ}$$

Παράδειγμα 5.9

Σε τριγωνο $ΑΒΓ$ δίνονται οι πλευρές του: $α = 8$, $β = 11$ και $γ = 14$. Να επιλυθεί το τρίγωνο.

Λύση

Δίνονται οι 3 πλευρές του τριγώνου και ζητούνται οι γωνίες του. Επειδή δεν γνωρίζουμε καμία γωνία, δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί με τον Νόμο Ημιτόνων. Εφαρμόζοντας τον Νόμο Συνημιτόνων για την πλευρά α, μπορούμε να υπολογίσουμε το *συνΑ* και επομένως να βρούμε τη γωνία Α:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot συνA \Leftrightarrow 8^2 = 11^2 + 14^2 - 2 \cdot 11 \cdot 14 \cdot συνA \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64 = 121 + 196 - 308 \cdot συνA \Leftrightarrow 308 \cdot συνA = 121 + 196 - 64 \Leftrightarrow 308 \cdot συνA = 253 \Leftrightarrow$$

$$συνA = \frac{253}{308} \Leftrightarrow συνA = 0{,}82142 \quad \text{άρα: } \hat{A} = συν^{-1}0{,}82142 = 34{,}77281^{o}$$

Ομοίως για να βρούμε τη γωνία Β, εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για την πλευρά β:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot συνB \Leftrightarrow 11^2 = 8^2 + 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot συνB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 121 = 64 + 196 - 224 \cdot συνB \Leftrightarrow 224 \cdot συνB = 64 + 196 - 121 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 224 \cdot συνB = 139 \Leftrightarrow συνB = \frac{139}{224} \Leftrightarrow συνB = 0{,}62053$$

Άρα: $B = συν^{-1}0{,}62053 = 51{,}64515^\circ$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^{o} - \hat{A} - \hat{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^{o} - 34{,}77281^{o} - 51{,}64515^{o} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 93{,}58204^{o}$$

5.7 Γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

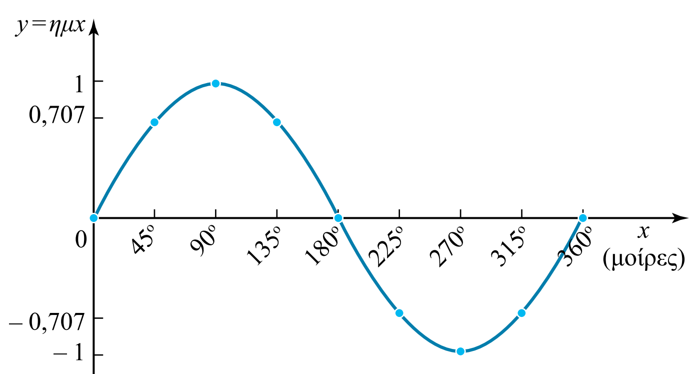
Στη συνέχεια θα δούμε τα γραφήματα των βασικότερων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

1) $y = ημx$

Για την κατασκευή του γραφήματος φτιάχνουμε πίνακα τιμών:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = ημx$	0	0,707	1	0,707	0	–0,707	–1	–0,707	0

Με τη βοήθεια των τιμών του πίνακα, σχεδιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης $y = ημx$ του σχήματος 5.17



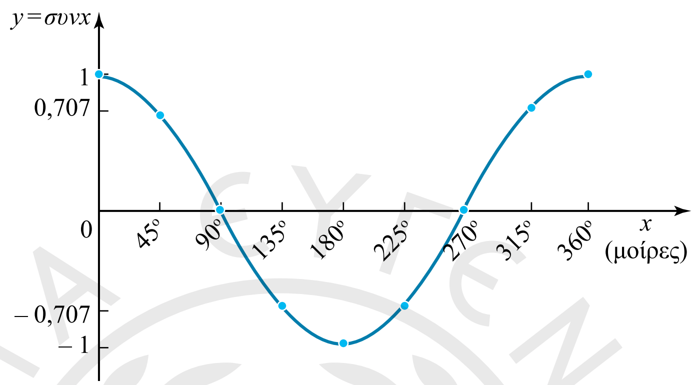
Σχ. 5.17

2) $y = \sigma\upsilon\nu x$

Ο πίνακας τιμών για τον σχεδιασμό του γραφήματος της $y = \sigma\upsilon\nu x$ είναι:

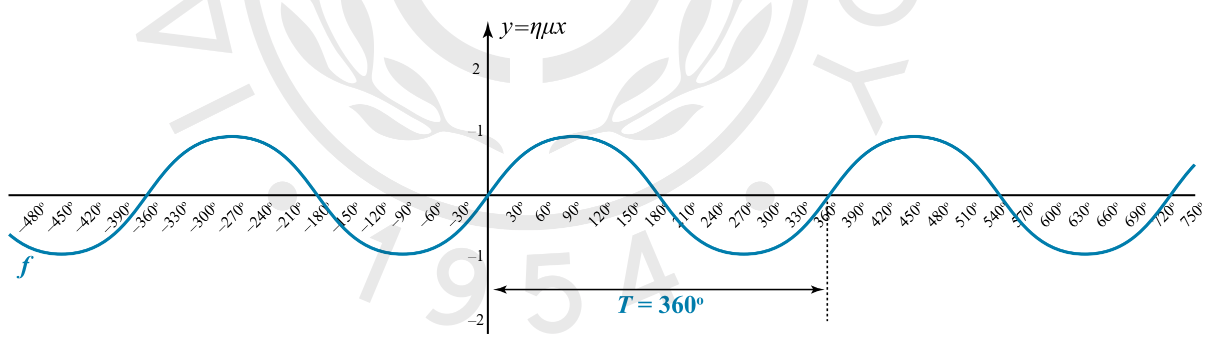
x	0^o	45^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	360^o
$y = \sigma\upsilon\nu x$	1	0,707	0	–0,707	–1	–0,707	0	0,707	1

Οπότε παίρνουμε το γράφημα του σχήματος 5.18



Σχ. 5.18

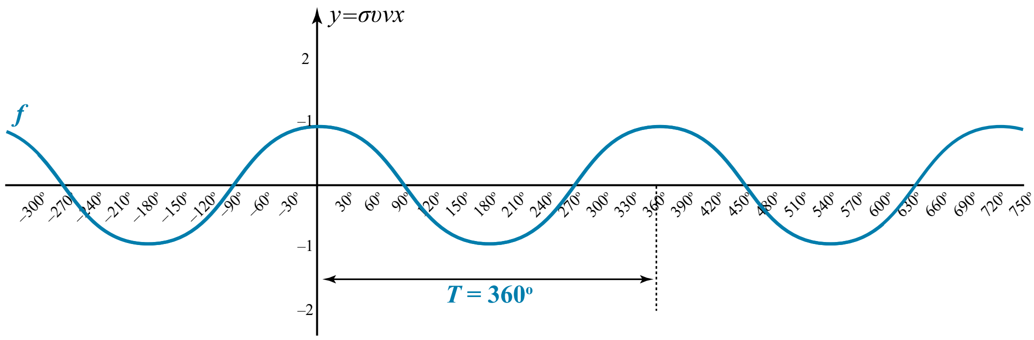
Οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις έχουν σχεδιαστεί για γωνίες από 0^o έως 360^o. Εαν επεκτείνουμε το διάστημα των τιμών του x για γωνίες μεγαλύτερες από 360^o και για αρνητικές γωνίες, προκύπτει το γράφημα του σχήματος 5.19 για τη συνάρτηση $y = \eta\mu x$:



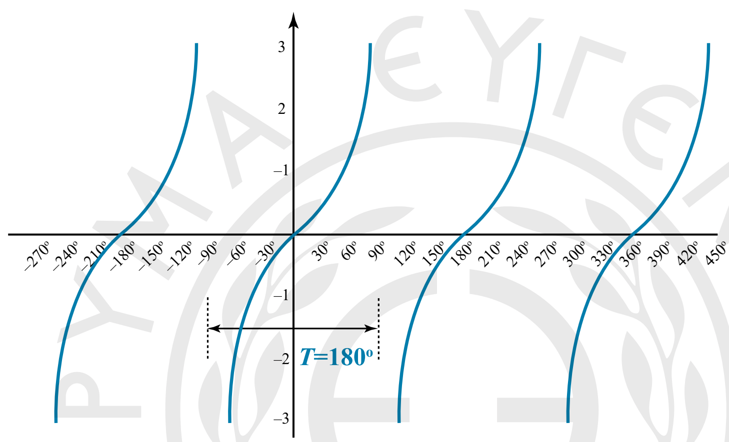
Σχ. 5.19

Το γράφημα της συνάρτησης y=ημx

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα τμήμα της γραφικής παράστασης, που επαναλαμβάνεται. Ξεκινώντας από τις 0^o, το τμήμα αυτό ολοκληρώνεται στις 360^o. Μετατοπίζοντας το τμήμα αυτό κατά μήκος του άξονα $x'x$ σχηματίζεται όλη η γραφική παράσταση. Το μήκος του διαστήματος του $x'x$ που ολοκληρώνεται αυτό το τμήμα, ονομάζεται ***περίοδος T*** της συνάρτησης. Άρα η περίοδος της $y=\eta\mu x$ είναι $\boldsymbol{T=360^\circ}$. Οι συναρτήσεις που το γράφημά τους παρουσιάζει αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται ***περιοδικές***. Παρατηρούμε ότι τα σημεία που οι τετμημένες τους διαφέρουν κατά μία περίοδο έχουν ίδια τεταγμένη. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y=\sigma\upsilon\nu x$ και $y=\varepsilon\varphi x$ είναι επίσης περιοδικές. Η περίοδος της $y=\sigma\upsilon\nu x$ είναι $T=360^o$, ενώ της $y=\varepsilon\varphi x$ είναι $T=180^o$. Στα σχήματα 5.20 και 5.21 βλέπουμε τα γραφήματά τους.



Σχ. 5.20
Το γράφημα της συνάρτησης y=συνx



Σχ. 5.21
Το γράφημα της συνάρτησης y=εφx

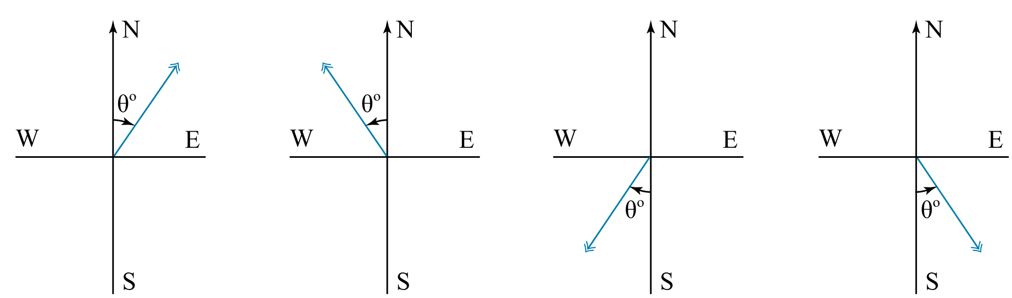
5.8. Εφαρμογές επίπεδης τριγωνομετρίας στην Ναυτιλία

5.8.1 Διόπτευση

Διόπτευση ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ κάποιας γραμμής αναγωγής και της κατεύθυνσης ενός αντικειμένου στον ορίζοντα.

Στη Ναυτιλία χρησιμοποιούμε την τεταρτοκυκλική και την ολοκυκλική διόπτευση.

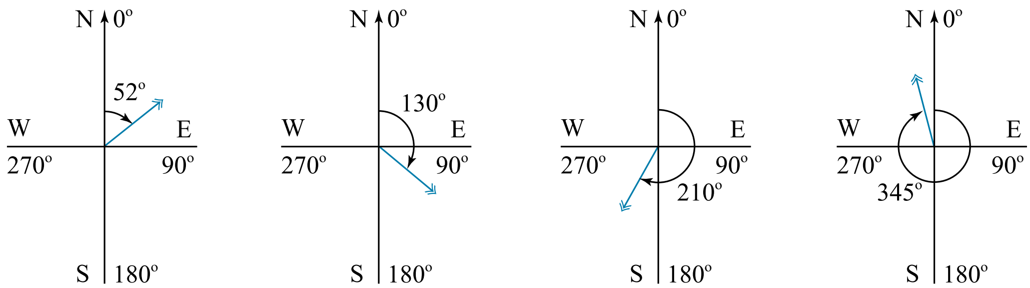
1) Στην ***τεταρτοκυκλική*** διόπτευση μετράμε τη γωνία από Βορρά ή Νότο προς Ανατολή ή Δύση. Η γωνία παίρνει τιμές από 0° έως 90°, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.22.



Διόπτευση: Nθ° E   Διόπτευση: Nθ° W   Διόπτευση: Sθ° W   Διόπτευση: Sθ°E

Σχ. 5.22
Τεταρτοκυκλική διόπτευση

2) Στην ***απόλυτη*** ή ***ολοκυκλική*** διόπτευση, κάθε γωνία μετριέται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ξεκινώντας από τον Βορρά. Η γωνία παίρνει τιμές από 0° έως 360° και η αντιστοιχία έχει ως εξής (σχ. 5.23):



Διόπτευση: 52°   Διόπτευση: 130°   Διόπτευση: 210°   Διόπτευση: 345°

Σχ. 5.23

Ολοκυκλική διόπτευση

Πρόβλημα 5.2

Ένα πλοίο μετατοπίζεται κατά την διεύθυνση $N\,34°W$ με ταχύτητα 25 knots. Να βρεθεί κατά πόσο έχει μετατοπιστεί κατά τον Βορρά και κατά πόσο κατά τη Δύση, μετά από 2 h.

Λύση

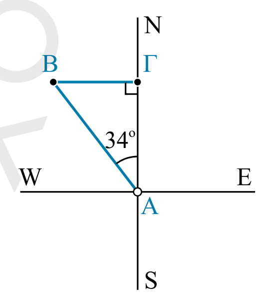
Έστω Α η αρχική θέση του πλοίου και Β η τελική. Από τη θέση Β φέρνουμε κάθετη ΒΓ προς τον άξονα N-S οπότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 5.24.

Η απόσταση που διανύει το πλοίο σε 2 h είναι:

$$(AB) = v \cdot t = 25 \cdot 2 = 50\ \nu.\mu.$$

$$\eta\mu\hat{A} = \frac{B\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu 34^\circ = \frac{B\Gamma}{50} \Leftrightarrow 0{,}55919 = \frac{B\Gamma}{50} \Leftrightarrow B\Gamma = 27{,}9595 \text{ ν.μ.}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{A\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 34^\circ = \frac{A\Gamma}{50} \Leftrightarrow 0{,}82904 = \frac{A\Gamma}{50} \Leftrightarrow A\Gamma = 41{,}452 \text{ ν.μ.}$$



Σχ. 5.24

Πρόβλημα 5.3

Τρία πλοία Α, Β και Γ είναι τοποθετημένα ως εξής: το Β είναι 180 *ν.μ.* δυτικά του Α και το Γ είναι βόρεια του Α και διοπτεύεται από το Β υπό γωνία $N\,43^\circ E$. Να βρεθεί:

α) Η διόπτευση του Β από το Γ.

β) Η απόσταση του Γ από το Β.

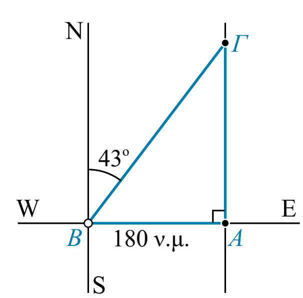
γ) Η απόσταση του Γ από το Α.

Λύση

α) Η διόπτευση του Β από το Γ είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$ του σχήματος 5.25.

$\hat{\Gamma} = N\hat{B}\,\Gamma = 43^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Επομένως η ζητούμενη διόπτευση είναι: $S43°W$.



Σχ. 5.25

$$\beta)\ \eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu 43^\circ = \frac{180}{B\Gamma} \Leftrightarrow 0{,}79864 = \frac{180}{B\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\Gamma = \frac{180}{0{,}79864} \Leftrightarrow B\Gamma = 225{,}38315 \text{ ν.μ}$$

γ) $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 43^{o} = \dfrac{180}{A\Gamma} \Leftrightarrow 0{,}93252 = \dfrac{180}{A\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma = \dfrac{180}{0{,}93252} \Leftrightarrow A\Gamma = 193{,}02535$ ν.μ

5.8.2 Τρίγωνο πλεύσης – Υπολογισμός λοξοδρομικής απόστασης

Το ***τρίγωνο πλεύσης*** χρησιμοποιείται στους λοξοδρομικούς πλόες, όταν η απόσταση – δίαρμα (d) μεταξύ του σημείου αναχώρησης Ε και του σημείου άφιξης Α δεν υπερβαίνει τα 600 ν.μ.. Τότε, η επιφάνεια της γης θεωρείται επίπεδη και η επίλυση των προβλημάτων γίνεται με μεθόδους επίπεδης τριγωνομετρίας.

Λοξοδρομία ονομάζεται η πλεύση ενός πλοίου που διατηρεί σταθερή πορεία, η οποία τέμνει όλους τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία. Σε μερκατορικό χάρτη, η απεικόνιση του λοξοδρομικού πλου είναι μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο αναχώρησης Ε και από το σημείο άφιξης Α. Με το τρίγωνο πλεύσης που θα μελετήσουμε παρακάτω, μπορούμε να υπολογίσουμε την ***λοξοδρομική απόσταση***, δηλαδή την απόσταση που διανύει ένα πλοίο εκτελώντας λοξοδρομία.

Το ***τρίγωνο πλεύσης*** είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ (σχ. 5.26) με κορυφές το αρχικό στίγμα Ε, το τελικό στίγμα Α και το σημείο τομής Β του αρχικού μεσημβρινού και του τελικού παράλληλου. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στον ίδιο παράλληλο και επομένως ισχύει: $\boldsymbol{\varphi_A = \varphi_B}$. Η υποτείνουσα ΕΑ είναι το μέτρο της λοξοδρομικής απόστασης.

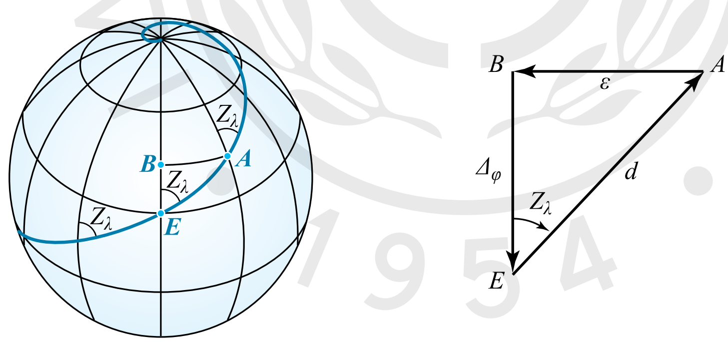
Στο σχήμα 5.26, φαίνεται το τρίγωνο πλεύσης, όπου:

1) Η πλευρά ΑΒ ονομάζεται ***αποχώρηση*** και συμβολίζεται ***ε***.

2) Η πλευρά ΒΕ ονομάζεται ***διαφορά πλάτους*** και συμβολίζεται ***Δφ***.

3) Η υποτείνουσα ΕΑ ονομάζεται ***δίαρμα***, συμβολίζεται με ***d***, και είναι η απόσταση που διανύει το πλοίο.

4) Η γωνία ΒΕΑ ονομάζεται ***αληθής πορεία*** και συμβολίζεται με Z_λ.



Σχ. 5.26

Για τον υπολογισμό του $\Delta\varphi$ ισχύει:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} |\varphi_A - \varphi_E|, & \text{αν } \varphi_A,\ \varphi_E \text{ ομώνυμα} \\ \varphi_A + \varphi_E, & \text{αν } \varphi_A,\ \varphi_E \text{ ετερώνυμα} \end{cases}$$

Στο τρίγωνο πλεύσης, η πλευρά ΒΕ που είναι ίση με $\Delta\varphi$ μετριέται σε ν.μ. όπως και οι άλλες πλευρές του τριγώνου.

Σημείωση: Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το τρίγωνο πλεύσης χρησιμοποιείται μόνο σε μικρές λοξοδρομικές αποστάσεις (<600 ν.μ.), ώστε η επιφάνεια της γης να μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη. Στη πράξη, μπορούμε να επιλύσουμε το λοξοδρομικό πρόβλημα απεριόριστα, σε οποιαδήποτε απόσταση, με το ***τρίγωνο αυξομερών πλατών***. Το τρίγωνο αυξομερών πλατών είναι επίσης ορθογώνιο τρίγωνο και είναι το αντίστοιχο τρίγωνο του τριγώνου πλεύσης στον Μερκατορικό χάρτη, όπου η πλευρά $BE = \Delta\varphi$ γίνεται $\Delta\varphi_\xi$ (διαφορά αυξομερών πλατών). Η μεθοδολογία επίλυσης είναι ανάλογη με αυτήν του τριγώνου πλεύσης. Για την επίλυση είναι απαραίτητη η χρήση πίνακα αυξομερών πλατών.

Παρατήρηση

Το 1 ν.μ. είναι το μήκος 1 πρώτου λεπτού της γεωγραφικής μοίρας. Συγκεκριμένα είναι το μήκος τόξου 1΄, που ανήκει σε μέγιστο κύκλο. Στο κεφάλαιο 8 (Β΄ Μέρος) θα μελετήσουμε αναλυτικά τους κύκλους σφαίρας και θα ορίσουμε τον μέγιστο κύκλο σφαίρας.

Πρόβλημα 5.4

Ένα πλοίο ξεκινά από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 15°32΄N$ και πλέει προς $N\ 25°\ 12΄W$ έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 18°47΄N$. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρησή του.

Λύση

Σχηματίζουμε το τρίγωνο πλεύσης του σχήματος 5.27

$$\Delta\varphi = |\varphi_A - \varphi_E| = 18^o47΄ - 15^o32΄ = 3^o15΄$$

Η πλευρά $EB = \Delta\varphi$ πρέπει να υπολογιστεί σε ν.μ..

Γνωρίζουμε ότι 1΄ αντιστοιχεί σε 1 ν.μ. Επομένως, θα μετατρέψουμε τη γωνία σε πρώτα λεπτά. Άρα:

$$3^o15΄ = (3 \cdot 60)΄ + 15΄ = 180΄ + 15΄ = 195΄$$

Άρα: $\Delta\varphi = 195$ *ν.μ.*

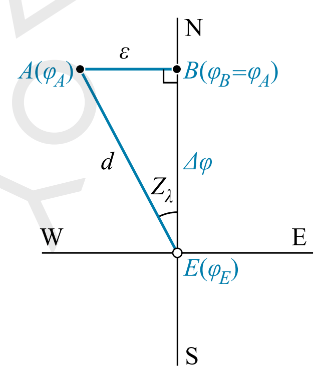
$$Z_\lambda = 25^o12΄ = 25^o + \left(\frac{12}{60}\right)^o = 25^o + 0{,}2^o = 25{,}2^o$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\ 25{,}2 = \frac{195}{d} \Leftrightarrow 0{,}90483 = \frac{195}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}90483 \cdot d = 195 \Leftrightarrow d = \frac{195}{0{,}90483} \Leftrightarrow d = 215{,}5101 \text{ ν.μ.}$$

$$\varepsilon\varphi Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta\varphi} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 25{,}2 = \frac{\varepsilon}{195} \Leftrightarrow 0{,}47056 = \frac{\varepsilon}{195} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = 0{,}47056 \cdot 195 = 91{,}7592 \text{ ν.μ.}$$



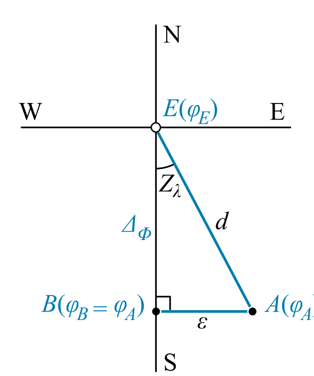
Σχ. 5.27

Πρόβλημα 5.5

Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 2°24΄N$ και πλέει νοτιοανατολικά, 400 ν.μ. ως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 3°28΄S$ (σχ. 5.28). Να βρεθεί η αληθής πορεία και η αποχώρησή του.

Λύση

Τα φ_A και φ_E είναι ετερώνυμα. Επομένως η διαφορά πλάτους υπολογίζεται ως εξής:



Σχ. 5.28

$$\Delta\varphi = \varphi_{A} + \varphi_{E} = 3^{o}28' + 2^{o}24' = 5^{\circ}52'$$

$$5^{\circ}52' = (5 \cdot 60)' + 52' = 352' \text{ ή } 352 \text{ ν.μ.}$$

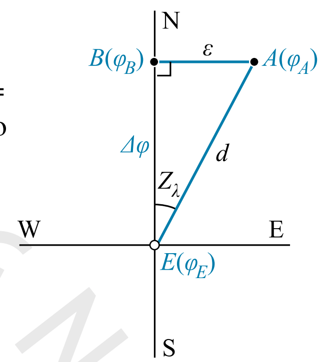
$$\sigma\upsilon\nu Z_{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{352}{400} = 0{,}88$$

Άρα: $Z_{\lambda} = \text{συν}^{-1}0{,}88 = 28{,}35764^{o}$

$$\eta\mu Z_{\lambda} = \frac{\varepsilon}{d} \Leftrightarrow \eta\mu 28{,}35764 = \frac{\varepsilon}{400} \Leftrightarrow 0{,}47497 = \frac{\varepsilon}{400} \Leftrightarrow \varepsilon = 189{,}988 \text{ ν.μ.}$$

Πρόβλημα 5.6

Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 48^{\circ}\ 40' N$ και πλέει προς $N33^{\circ}\ 45' E$ για 296 ν.μ. (σχ. 5.29). Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρησή του.



Σχ. 5.29

Λύση

$$Z_{\lambda} = 33^{o}45' = 33^{o}\left(\frac{45}{60}\right)^{o} = 33^{o} + 0{,}75^{o} = 33{,}75^{o}$$

$$\eta\mu Z_{\lambda} = \frac{\varepsilon}{d} \Leftrightarrow \eta\mu 33{,}75^{o} = \frac{\varepsilon}{296} \Leftrightarrow 0{,}55557 = \frac{\varepsilon}{296} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = 164{,}44872 \text{ ν.μ.}$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow 0{,}83147 = \frac{\Delta\varphi}{296} \Leftrightarrow \Delta\varphi = 246{,}11512 \text{ ν.μ.}$$

$$246{,}11512' = \left(\frac{246{,}11512}{60}\right)^{o} = 4{,}10192^{o} = 4^{o}\ (0{,}10192 \cdot 60)' = 4^{o}\ 6{,}1152' =$$

$$= 4^{o}\ 6'\ (0{,}1152 \cdot 60)'' = 4^{o}\ 6'\ 6{,}912''$$

Άρα με στρογγυλοποίηση στα δεύτερα λεπτά: $\Delta\varphi = 4^{\circ}\ 6'\ 7''$

Τα φ_A, φ_E είναι ομώνυμα, διότι το σημείο εκκίνησης Ε είναι στο βόρειο ημισφαίριο και κινείται βόρεια. Άρα και το σημείο Α θα είναι στο βόρειο ημισφαίριο.

$$\Delta\varphi = |\varphi_A - \varphi_E| \overset{\varphi_A > \varphi_E}{\Longleftrightarrow} \Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_E \Leftrightarrow 4^{o}6'7'' = \varphi_A - 48^{\circ}40' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_A = 4^{o}6'7'' + 48^{\circ}40' \Leftrightarrow \varphi_A = 52^{o}46'7''N$$

Πρόβλημα 5.7

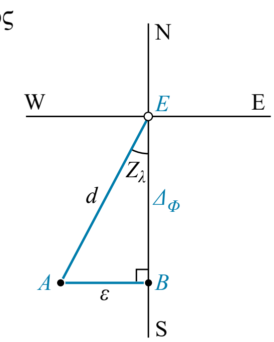
Ένα πλοίο ξεκινάει στις 10 Νοεμβρίου, στις 21:50, από ένα λιμάνι Ε με $\varphi_E = 8^{o}24'N$ και πλέει προς $S\ 36^{\circ}\ 12'W$ με ταχύτητα 15 knots, ως ένα λιμάνι Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 6^{o}28'N$.

α) Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το πλοίο.

β) Να βρεθεί η αποχώρηση του πλοίου.

γ) Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

Παρατήρηση: Το πλοίο δεν αλλάζει ζώνη ώρας.



Σχ. 5.30

Λύση

α) Σχεδιάζουμε το τρίγωνο πλεύσης του σχήματος 5.30

$$Z_{\lambda} = 36^{o}12' = 36^{o} + \left(\frac{12}{60}\right)^{o} = 36{,}2^{o}$$

$$\Delta\varphi = |\Phi_A - \Phi_E| = 8^o24' - 6^o28' = 7^o84' - 6^o28' = 1^\circ 56' = 116' \text{ ή } 116 \text{ ν.μ.}$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow 0{,}80696 = \frac{116}{d} \Leftrightarrow d = 143{,}74938 \text{ ν.μ.}$$

β) $\varepsilon\varphi Z_\lambda = \dfrac{\varepsilon}{\Delta\Phi} \Leftrightarrow 0{,}73189 = \dfrac{\varepsilon}{116} \Leftrightarrow \varepsilon = 84{,}89924$ ν.μ.

γ) $\nu = \dfrac{d}{t} \Leftrightarrow 15 = \dfrac{143{,}74938}{t} \Leftrightarrow t = 9{,}583292$ h

9,583292 h = 9 h + (0,583292 · 60) min= 9 h 34,99752 min =
= 9h 34 min (0,99752 · 60) s = 9 h 34 min 59,8512 s

Στρογγυλοποιώντας τα δευτερόλεπτα:

9 h 34 min 60 s ή 9 h 35 min

	21 h	50 min
+	9	35 min
	30 h	85 min
	31 h	25 min

31 – 24 = 7 h

Άρα ώρα άφιξης: 11 Νοεμβρίου 7:25:00

5.8.3 Πλους επί παραλλήλου

Πλους επί παραλλήλου ονομάζεται η πλεύση κατά την οποία το πλοίο κινείται επάνω στον ίδιο παράλληλο ως προς τον ισημερινό, δηλαδή έχει σταθερή πορεία ή προς Ανατολή ή προς Δύση. Όταν το πλοίο κινείται πάνω στον ίδιο παράλληλο από έναν τόπο Α έως έναν τόπο Β, οι 2 τόποι έχουν το ίδιο γεωγραφικό πλάτος (του παραλλήλου) και διαφορετικά μήκη λ_1, λ_2.

Έστω $u = (\overset{\frown}{AB})$ το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ δηλαδή η απόσταση που διανύει το πλοίο σε ν.μ. (σχ. 5.31)

Φέρνουμε $AH \perp OZ$.

Ισχύει $Z\hat{O}A = \varphi$ (ίση με το γεωγραφικό πλάτος των Α και Β).

Γνωρίζουμε οτι το μήκος ενός τόξου ισούται με το γινόμενο της γωνίας του (μετρημένη σε *rad*) επί την ακτίνα του κύκλου. Άρα για τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{Z\Theta}$ και $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε:

$$(\overset{\frown}{Z\Theta}) = OZ \cdot \overset{\frown}{ZO\Theta}$$

$$(\overset{\frown}{AB}) = A\Gamma \cdot \overset{\frown}{A\Gamma B}$$

Επειδή $\overset{\frown}{ZO\Theta} = \overset{\frown}{A\Gamma B}$ προκύπτει:

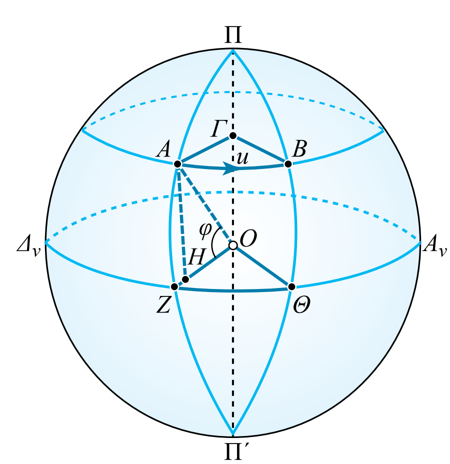
$$\frac{(\overset{\frown}{Z\Theta})}{(\overset{\frown}{AB})} = \frac{OZ}{A\Gamma} = \frac{AO}{OH}$$

διότι $OZ = AO$ ως ακτίνες της σφαίρας και $A\Gamma = OH$ ως απέναντι πλευρές στο ορθογώνιο $A\Gamma OH$.

Στο ορθογώνιο τριγωνο ΑΗΟ ισχύει:

$$\tau\varepsilon\mu\varphi = \frac{AO}{OH}$$

Άρα έχουμε καταλήξει:



Σχ. 5.31

$$\frac{(\widehat{Z\Theta})}{(\widehat{AB})} = \tau\varepsilon\mu\varphi \Leftrightarrow (\widehat{Z\Theta}) = (\widehat{AB}) \cdot \tau\varepsilon\mu\varphi \Leftrightarrow \Delta\lambda = u \cdot \tau\varepsilon\mu\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda = u \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Δηλαδή:

$$\boxed{u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Το μήκος τόξου ενός παραλλήλου ισούται με το γινόμενο του μήκους του αντίστοιχου τόξου του ισημερινού (Δλ) × το συνημίτονο του γεωγραφικού πλάτους του παραλλήλου

ή

$$\boxed{\Delta\lambda = u \cdot \tau\varepsilon\mu\varphi}$$

Η διαφορά μήκους (σε πρώτα λεπτά) = Μήκος τόξου × τέμνουσα του γεωγραφικού πλάτους.

Πρόβλημα 5.8

΄Ενα πλοίο που βρίσκεται σε τόπο Α (φ_A = 48° 18΄*N)* πλέει κατά 60 ν.μ. ανατολικά στον ίδιο παράλληλο. Να βρεθεί η διαφορά μήκους μεταξύ του τόπου άφιξης και του Α.

Λύση

$$\varphi = \varphi_A = 48^{o}\,18' = \left(48 + \frac{18}{60}\right)^{o} = 48{,}3^{o}$$

$$u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{u}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{60}{0{,}66523} \Leftrightarrow \Delta\lambda = 90{,}19437' \text{ ή}$$

$$\Delta\lambda = 1^{o}\,30{,}19437' = 1^{o}\,30'\,(0{,}19437 \cdot 60)'' = 1^{o}\,30'\,11{,}7''$$

Πρόβλημα 5.9

΄Ενα πλοίο που βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίριο πλέει για 750 ν.μ. στον ίδιο παράλληλο. Εάν Α (λ_A = 39° 15΄*W*) είναι το σημείο εκκίνησης και Β (λ_B = 56° 45΄*W*) το σημείο άφιξης, να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων Α και Β.

Λύση

Το πλοίο κινείται όπως φαίνεται στο σχήμα 5.32. Τα λ_A, λ_B είναι ομώνυμα. Επομένως για την διαφορά μήκους ισχύει:

$$\Delta\lambda = |\lambda_A - \lambda_B| = 56^{o}\,45' - 39^{o}15' = 17^{o}\,30' = (17 \cdot 60)' + $$
$$+\ 30' = 1050' \text{ ή } \Delta\lambda = 1050 \text{ ν.μ.}$$

$$u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{u}{\Delta\lambda} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{750}{1050} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}71428$$

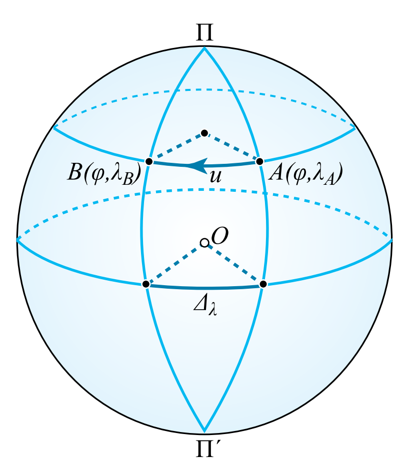
Άρα: $\varphi = \sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}71428 = 44{,}41578^{o}$ ή

$$44{,}41578^{o} = 44^{o}24{,}9468' = 44^{o}\,24'57''$$

Επομένως οι γεωγραφικές συντεταγμένες είναι:

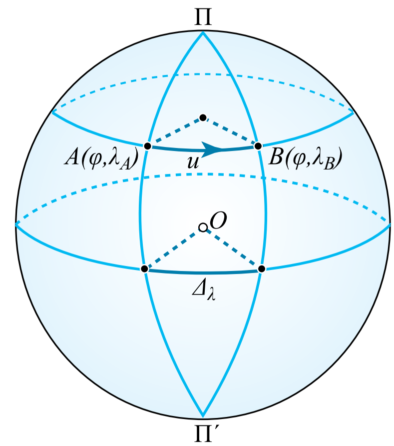
Α ($\varphi_A = 44^{o}24'57''N$, $\lambda_A = 39^{o}15'W$)

Β ($\varphi_B = 44^{o}24'57''N$, $\lambda_B = 56^{o}\,45'W$)



Σχ. 5.32

Πρόβλημα 5.10



Σχ. 5.33

΄Ενα πλοίο πλέει από ένα σημείο Α ($\varphi_A = 54^o\ N$) για 510 ν.μ. ανατολικά στον ίδιο παράλληλο έως ένα σημείο Β ($\lambda_B = 144^o\ 3'W$). Να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων.

Λύση

Η κίνηση του πλοίου φαίνεται στο σχήμα 5.33

$$u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{u}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{510}{0{,}58779} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda = 867{,}65682' \text{ ή } \Delta\lambda = 867{,}65682 \text{ ν.μ.}$$

Επειδή το σημείο άφιξης Β είναι στο δυτικό ημισφαίριο και η κίνηση είναι προς Ανατολή , το σημείο Α θα είναι επίσης στο δυτικό ημισφαίριο και ως εκ τούτου θα ισχύει $\lambda_A > \lambda_B$. Άρα:

$$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B \Leftrightarrow 867{,}65682' = \lambda_A - 144^\circ\ 3' \Leftrightarrow 867{,}65682' = \lambda_A - 8643' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_A = 8643' + 867{,}65682' \Leftrightarrow \lambda_A = 9510{,}65682 = 158{,}51095^o =$$

$$= 158^o\ (0{,}51095 \cdot 60)' = 158^o 30{,}657' = 158^o 30'\ (0{,}657 \cdot 60)'' = 158^o 30' 39{,}42''$$

Άρα: Α ($\varphi_A = 54^o N,\ \lambda_A = 158^o 30'\ 39{,}42'' W$)

Β ($\varphi_B = 54^o N,\ \lambda_B = 144^o 3' W$)

5.8.4 Εφαρμογές του Νόμου Ημιτόνων και Συνημιτόνων

Πρόβλημα 5.11

Δυο πλοία ξεκινούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα. Το ένα κινείται προς $S34^o W$ με ταχύτητα 20 knots και το άλλο προς $S41^o E$ με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από δύο h.

Λύση

΄Εστω ότι τα δύο πλοία ξεκινούν από το λιμάνι Ο και ότι μετά από 2 ώρες βρίσκονται στις θέσεις Α και Β (σχ. 5.34). Η ζητούμενη απόσταση d είναι η πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΟΒ

$$OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ ν.μ.}$$

$$OB = 2 \cdot 16 = 32 \text{ ν.μ.}$$

$$A\hat{O}B = 34 \cdot 41^o = 75 \text{ ν.μ.}$$

Από τον Νόμο Συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΟΒ:

$$d^2 = OA^2 + OB^2 - 2\, OA \cdot OB \cdot \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B \Leftrightarrow$$

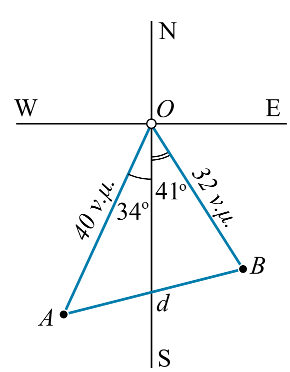
$$\Leftrightarrow d^2 = 40^2 + 32^2 - 2 \cdot 40 \cdot 32 \cdot \sigma\upsilon\nu 75^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 1.600 + 1.024 - 2.560 \cdot 0{,}25882 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 1.961{,}4208 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{1.961{,}4208} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 44{,}28793 \text{ ν.μ.}$$



Σχ. 5.34

Πρόβλημα 5.12

Δύο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο ταυτόχρονα. Το Α κινείται προς $540^{o}W$ με ταχύτητα 20 knots και το Β προς $N32^{o}W$ με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 2 h.

Λύση

Η ζητούμενη απόσταση d είναι η πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΟΒ του σχήματος 5.35.

$$A\hat{O}B = 180^{o} - (32^{o} + 40^{o}) = 180^{o} - 72^{o} = 108^{o}$$

$$OA = 2 \cdot 20 = 40 \; \nu.\mu.$$

$$OB = 2 \cdot 16 = 32 \; \nu.\mu.$$

Από τον Νόμο Συνημιτόνων:

$$d^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B$$

$$d^2 = 40^2 + 32^2 - 2 \cdot 40 \cdot 32 \cdot \sigma\upsilon\nu 108^{o}$$

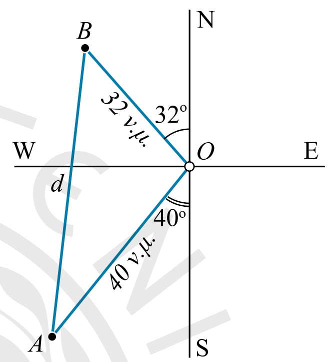
$$d^2 = 1600 + 1024 - 2560 \cdot (-0{,}30902)$$

$$d^2 = 1600 + 1024 + 791{,}0912$$

$$d^2 = 3.415{,}0912$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{3.415{,}0912}$$

$$d = 58{,}43878 \; \nu.\mu.$$



Σχ. 5.35

Πρόβλημα 5.13

Μια τράτα που κινείται σε απόσταση 5,8 ν.μ βορειοδυτικά ενός φάρου Φ, παθαίνει βλάβη και σταματάει. ΄Ενα ταχύπλοο, βρίσκεται 4,4 ν.μ. δυτικά του φάρου, στη θέση Β. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στην τράτα, εάν πλεύσει με ταχύτητα 32 knots, και η διόπτευση της τράτας από τη θέση Β είναι $N\,31^{o}W$.

Λύση

Η τράτα βρίσκεται στο σημείο Α του σχήματος 5.36.

$$A\hat{B}\Phi = 90^{o} - 31^{o} = 59^{o}$$

Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε την απόσταση $x = AB$ που θα διανύσει το ταχύπλοο. Εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων:

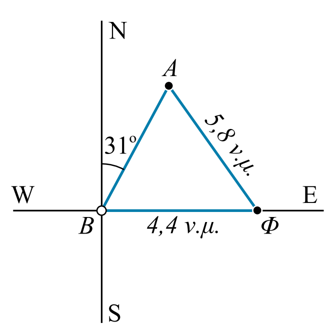
$$\frac{A\Phi}{\eta\mu 59^{o}} = \frac{B\Phi}{\eta\mu \mathrm{A}} \Leftrightarrow \frac{5{,}8}{0{,}85717} = \frac{4{,}4}{\eta\mu \mathrm{A}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5{,}8\,\eta\mu A = 3{,}77155 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{3{,}77155}{5{,}8} = 0{,}65027$$

Άρα: $\hat{A} = \eta\mu^{-1} 0{,}65027 = 40{,}56196^{o}$

ή $\hat{A} = 180^{o} - 40{,}56196^{o} = 139{,}43804^{o}$



Σχ. 5.36

Επειδή $B\Phi < A\Phi$ θα ισχύει και $\hat{A} = A\hat{B}\Phi$,
άρα: $\hat{A} = 40{,}56196^{o}$

$$B\hat{\Phi}A = 180^o - (59^o + 40{,}56196^o) = 80{,}43804^o$$

$$\frac{AB}{\eta\mu 80{,}43804^o} = \frac{A\Phi}{\eta\mu 59^o} \Leftrightarrow \frac{AB}{0{,}98611} = \frac{5{,}8}{0{,}85717} \Leftrightarrow 0{,}85717 \cdot AB = 5{,}71944 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{5{,}71944}{0{,}85717} \Leftrightarrow AB = 6{,}67247 \text{ ν.μ.}$$

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 32 = \frac{6{,}67247}{t} \Leftrightarrow t = \frac{6{,}67247}{32} \Leftrightarrow t = 0{,}20851 \text{ h}$$

$$0{,}20851\text{h} = (0{,}20851 \cdot 60) \text{ min} = 12{,}5106 \text{ min} = 12 \text{ min} + 0{,}5106 \text{ min}$$
$$= 12 \text{ min } (0{,}5106 \cdot 60) \text{ s} = 12 \text{ min } 30{,}636 \text{ s}$$

Άρα θα φτάσει στην τράτα μετά από 12 λεπτά και 31 δευτερόλεπτα.

Πρόβλημα 5.14

Ένα πλοίο που βρίσκεται στη θέση Α, πλέει με κατεύθυνση προς E με ταχύτητα 18 knots, και διοπτεύει έναν φάρο κατά $S\ 68^\circ E$. Μετά από 2 ώρες και 24 λεπτά βρίσκεται στη θέση Β, όπου διοπτεύει τον φάρο κατά $S\ 20^\circ\ W$. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις του πλοίου από τον φάρο, στις θέσεις Α και Β.

Λύση

Αναζητούμε τις πλευρές $A\Phi$ και $B\Phi$ του τριγώνου ΑΦΒ του σχήματος 5.37

$$2 \text{ h } 24 \text{ min} = 2 \text{ h} + \frac{24}{60} \text{ h} = 2{,}4 \text{ h}$$

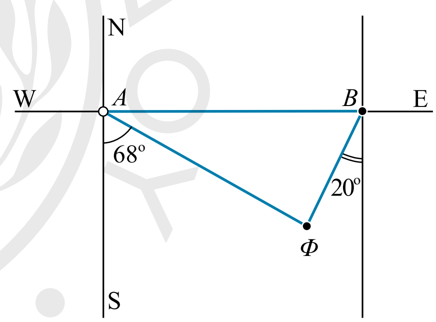
Η απόσταση που διανύει το πλοίο είναι:

$$x = v \cdot t = 18 \cdot 2{,}4 = 43{,}2 \text{ ν.μ.}$$

$$\Phi\hat{A}B = 90^o - 68^o = 22^o$$

$$\Phi\hat{A}B = 90^o - 20^o = 70^o$$

$$\hat{\Phi} = 180^o - (70^o + 22^o) = 88^o$$



Σχ. 5.37

Από τον Νόμο Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{A\Phi}{\eta\mu 70^o} = \frac{AB}{\eta\mu 88^o} \Leftrightarrow \frac{A\Phi}{0{,}93969} = \frac{43{,}2}{0{,}99939} \Leftrightarrow 0{,}99939 \cdot A\Phi = 40{,}59461 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Phi = \frac{40{,}59461}{0{,}99939} \Leftrightarrow A\Phi = 40{,}61939 \text{ ν.μ.}$$

$$\frac{B\Phi}{\eta\mu 22^o} = \frac{AB}{\eta\mu 88^o} \Leftrightarrow \frac{B\Phi}{0{,}37461} = \frac{43{,}2}{0{,}99939} \Leftrightarrow 0{,}99939 \cdot B\Phi = 16{,}18315 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Phi = \frac{16{,}18315}{0{,}99939} \Leftrightarrow A\Phi = 16{,}19303 \text{ ν.μ.}$$

Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, ΑΒ = 7 cm και Β = 40°.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓ.

2. Να βρεθεί η σκιά ενός κτηρίου ύψους 180 m, όταν ο ήλιος είναι 30^o επάνω από τον ορίζοντα.

3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης χωρίς την χρήση υπολογιστή τσέπης:

$$\mathrm{A} = \frac{\eta\mu 160^o \cdot \sigma\upsilon\nu 330^o \cdot \eta\mu 40^o}{\eta\mu 30^o \cdot \sigma\upsilon\nu 250^o \cdot \eta\mu 220^o}$$

4. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με α = 16, $\hat{A} = 46^o$ και $\hat{B} = 95^o$.

5. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με α = 22, β =35 και $\hat{B} = 48^o$.

6. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με β = 30, γ = 26 και $\hat{B} = 56^o$.

7. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με β = 34, $\hat{A} = 42^o$ και $\hat{\Gamma} = 73^o$.

8. Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 32, β = 35 και γ = 28.

9. Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 10, β = 15 και $\hat{\Gamma} = 53^o$.

10. Τρία πλοία Α, Β και Γ είναι τοποθετημένα ως εξής: το Β βρίσκεται 200 ν.μ. βόρεια του Α και το Γ βρίσκεται 320 ν.μ. ανατολικά του Α. Να βρεθεί η διόπτευση:
α) του Β από το Γ και
β) του Γ από το Β.

11. ΄Ενα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος φ_E = 5^{o}15΄*N* και πλέει προς *N* 30^{o}12΄*E* έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος φ_A = 7^o 30΄*N*. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρησή του.

12. ΄Ενα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος φ_E = 1^{o}24΄*N* και πλέει νοτιοανατολικά, 400 ν.μ. ως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος φ_A = 2^{o}28΄*S*. Να βρεθεί η αληθής πορεία και η αποχώρησή του.

13. ΄Ενα πλοίο ξεκινά από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος φ_E = 5^{o}15΄*N* και πλέει προς *S* 36^{o}12΄*E* έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος φ_A = 2^o 30΄*S*. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρησή του.

14. ΄Ενα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος φ_E = 18^{o}24΄*S* και πλέει προς *S* 60^o 30΄*W*, 300 ν.μ. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρησή του.

15. ΄Ενα πλοίο αναχωρεί από ένα λιμάνι Ε γεωγραφικού πλάτους φ_E = 34^{o}20΄*N* και πλέει προς *N* 23^{o}14΄*E*, 250 ν.μ. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρηση.

16. ΄Ενα πλοίο ξεκινάει στις 5 Αυγούστου, 21:50, από ένα σημείο Ε με φ_E = 1^o 14΄*S* και πλέει με ταχύτητα 16 knots, προς *N* 72^o 36΄*W* έως ένα σημείο Α με φ_A = 2^o 38΄*N*.
α) Να βρεθεί η απόσταση που διένυσε το πλοίο.
β) Να βρεθεί η αποχώρηση του πλοίου.
γ) Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

17. ΄Ενα πλοίο ξεκινά στις 11 Μαΐου 19:45, από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος φ_E = 5^o 28΄*N* και πλέει με ταχύτητα 16 knots προς *N* 65^o 12΄Ε έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος φ_A = 8^o 43΄N. Να βρεθούν:
α) Η απόσταση που διένυσε το πλοίο.
β) Η αποχώρηση του πλοίου.
γ) Η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

18. Ένα πλοίο ξεκινά στις 22 Οκτωβρίου 13:50, από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 1^o\ 46'S$ και πλέει βορειοδυτικά 380 ν.μ. με ταχύτητα 16 knots, έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 2^o\ 38'$N. Να βρεθούν:
α) Η αληθής πορεία.
β) Η αποχώρηση του πλοίου.
γ) Η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

19. Ένα πλοίο που βρίσκεται στο νότιο ημισφαίριο, πλέει για 1272,82 ν.μ. δυτικά στον ίδιο παράλληλο. Εάν Α ($\lambda_A = 20^o 10'\ W$) είναι το σημείο εκκίνησης και Β ($\lambda_B = 43^o 12'\ W$) το λιμάνι άφιξης να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των δύο λιμανιών.

20. Ένα πλοίο που βρίσκεται στο βόρειο ημισφαίριο πλέει για 1070 ν.μ. στον ίδιο παράλληλο. Αν Α ($\varphi_A, \lambda_A = 126^o\ 18'$ E) είναι το σημείο εκκίνησης και Β ($\varphi_B, \lambda_B = 146^o\ 32'$ E) το σημείο άφιξης, να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των δύο σημείων Α και Β.

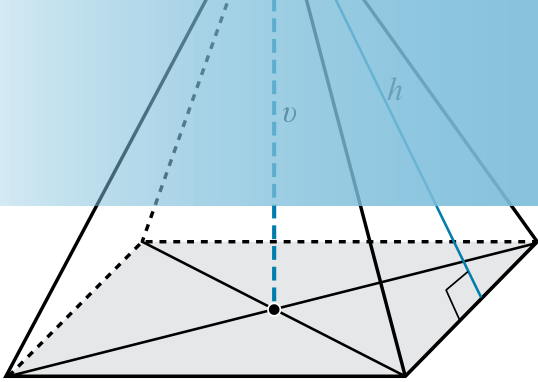
21. Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο Α ($\varphi_A = 64^o\ 20'\ N$) για 620 ν.μ. ανατολικά στον ίδιο παράλληλο έως ένα σημείο Β ($\lambda_B = 124^o\ 23'\ W$). Να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων.

22. Ένα πλοίο που βρίσκεται στη θέση Α($\varphi_A = 38^o 16' 24''N$, $\lambda_A = 98^o 50' 20''W$) πλέει με ταχύτητα 20 knots στον ίδιο παράλληλο. Σε πόση ώρα θα φτάσει σε σημείο B με $\lambda_B = 90^o 39' 40''W$;

23. Δύο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα. Το Α κινείται προς $S\ 41^oE$ με ταχύτητα 20 knots και το Β προς $S\ 34^oW$ με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 2 h.

24. Δύο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα. Το Α κινείται προς $N\ 20^\circ E$ με ταχύτητα 12 knots και το Β προς $S\ 60^o\ E$ με ταχύτητα 18 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 3 h.

25. Ένα πλοίο απέχει από ένα σημείο Α της στεριάς 10 ν.μ. και διοπτεύεται από αυτό κατά $S36^oE$. Το πλοίο κατευθύνεται δυτικά και μετά από 2 h απέχει από το σημείο Α 11,8 ν.μ. Να βρεθούν:
α) Η ταχύτητα του πλοίου.
β) Η διόπτευση του πλοίου από το Α στη δεύτερη θέση του.



Μετρήσεις

6.1 Μονάδες μέτρησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την μέτρηση μηκών, εμβαδών επίπεδων σχημάτων και όγκων στερεών. Ας θυμηθούμε τις βασικές μονάδες μέτρησης.

6.1.1 Μονάδες μέτρησης μήκους

Η βασική μονάδα μέτρησης μήκους, η οποία χρησιμοποιείται διεθνώς είναι το ***μέτρο*** (***m***). Εκτός από το *m* για μεγάλες αποστάσεις χρησιμοποιείται το ***χιλιόμετρο*** (km), όπου **1 *km*=1000** m.

Για μικρότερα μήκη χρησιμοποιούνται οι ***υποδιαιρέσεις*** του *m*:

Δεκατόμετρο ή ***δέκατο***	dm	**1** dm $= \frac{1}{10}$ m $=$**0,1** m
Εκατοστόμετρο ή ***εκατοστό***	cm	**1** cm $= \frac{1}{100}$ m $=$ **0,01** m
Χιλιοστόμετρο ή ***χιλιοστό***	mm	**1** mm $= \frac{1}{1000}$ m $=$ **0,001** m

Φυσικά, πρέπει να αναφέρουμε τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται στη Ναυτιλία: το ***ναυτικό μίλι*** ή (ν.μ.) όπου: **1** ν.μ. **= 1852** m. Το ν.μ. το έχουμε ορίσει ήδη στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας και το έχουμε χρησιμοποιήσει ήδη σε πολλές εφαρμογές.

6.1.2 Μονάδες μέτρησης εμβαδού

Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το ***τετραγωνικό μέτρο*** (***m²***), που είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά ένα μέτρο. Οι υποδιαιρέσεις του m^2 είναι:

Τετραγωνικό δεκατόμετρο	dm^2	**1** $\mathrm{dm}^2 = \frac{1}{100}\,\mathrm{m}^2 =$ **0,01** m^2
Τετραγωνικό εκατοστόμετρο	cm^2	**1** $\mathrm{cm}^2 = \frac{1}{10.000}\,\mathrm{m}^2 =$ **0,0001** m^2
Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο	mm^2	**1** $\mathrm{mm}^2 = \frac{1}{1.000.000}\,\mathrm{m}^2 =$ **0,000001** m^2

Για μεγάλες επιφάνειες στην Ελλάδα χρησιμοποιούμε το ***στρέμμα***. Ισχύει: **1 στρέμμα=1000** m^2.

6.1.3 Μονάδες μέτρησης όγκου

Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το ***κυβικό μέτρο*** (***m³***), που είναι ο όγκος ενός κύβου ακμής ενός μέτρου.

Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου:

Κυβικό δεκατόμετρο	dm^3	**1** $dm^3 = \frac{1}{1000}\ m^3 = \mathbf{0{,}001}\ m^3$
Κυβικό εκατοστόμετρο	cm^3	**1** $cm^3 = \frac{1}{1.000.000}\ m^3 = \mathbf{0{,}000001}\ m^3$
Κυβικό χιλιοστόμετρο	mm^3	**1** $mm^3 = \frac{1}{1.000.000.000}\ m^2 = \mathbf{0{,}000000001}\ m^3$

Ειδικά για μέτρηση όγκου υγρών, το 1 ***dm³*** λέγεται **1 λίτρο (1 *lt*)** και το 1 ***cm³*** λέγεται **1 χιλιοστόλιτρο (1 *ml*).**

6.2 Υπολογισμός εμβαδού και περιμέτρου πολυγώνων

Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι τύποι υπολογισμού περιμέτρου και εμβαδού των βασικών ευθυγράμμων σχημάτων, του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και τραπεζίου.

Συμβολισμός εμβαδού. Για να συμβολίσουμε το εμβαδόν πολυγώνου, το γράφουμε μέσα σε παρένθεση. Δηλαδή, το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ), το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζεται με (ΑΒΓ) κ.λπ. Εάν δεν θέλουμε να δηλώσουμε το όνομα του πολυγώνου, το εμβαδόν μπορεί να συμβολιστεί απλώς με Ε.

Η περίμετρος όλων των ευθυγράμμων σχημάτων ισούται με το άθροισμα των μηκών όλων των πλευρών τους και θα τη συμβολίζουμε με Π.

6.2.1 Εμβαδόν και περίμετρος τετραγώνου

Θεώρημα 6.1: Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι α^2, (σχ. 6.1) δηλαδή:

$$\boxed{E = \alpha^2}$$

Περίμετρος: Εφόσον το τετράγωνο έχει όλες του τις πλευρές ίσες με α, το άθροισμα αυτών θα ισούται με 4α. Άρα:

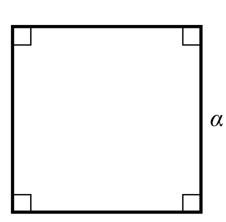
$$\boxed{\Pi = 4 \cdot \alpha}$$

6.2.2 Εμβαδόν και περίμετρος ορθογωνίου

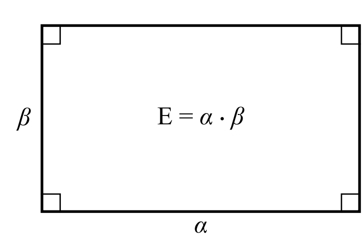
Θεώρημα 6.2: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή, αν *α, β* τα μήκη των πλευρών του (σχ. 6.2) ισχύει

Εμβαδόν $$\boxed{E = \alpha \cdot \beta}$$

Περίμετρος $$\boxed{\Pi = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta}$$



Σχ. 6.1



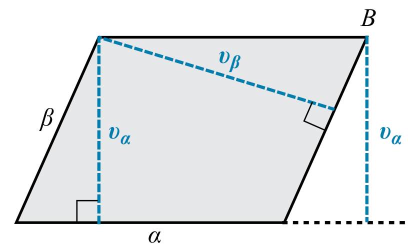
Σχ. 6.2

6.2.3 Εμβαδόν και περίμετρος παραλληλογράμμου

Θεώρημα 6.3: Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή. Δηλαδή στο σχήμα 6.3:

Εμβαδόν $\boxed{E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta}$

Περίμετρος $\boxed{\Pi = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta}$

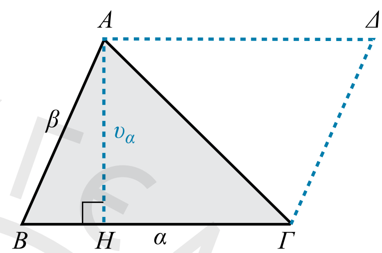


Σχ. 6.3

6.2.4 Εμβαδόν και περίμετρος τριγώνου

Θεώρημα 6.4: Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος. Δηλαδή στο σχήμα 6.4:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha}$$



Σχ. 6.4

Ο τύπος αυτός εξηγείται εύκολα, αν σε ένα παραλληλόγραμμο φέρουμε τη διαγώνιο που το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΗ του σχήματος 6.4, προκύπτει:

$$\eta\mu \mathrm{B} = \frac{\upsilon_\alpha}{\gamma} \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \gamma \cdot \eta\mu \mathrm{B}$$

Με αντικατάσταση του υ_α στον τύπο του εμβαδού έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu \mathrm{B}$$

Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται και στην περίπτωση που $\hat{\mathrm{B}} > 90^\circ$ όπου το υ_α είναι εξωτερικό του τριγώνου, και ισχύει και στη περίπτωση που $\hat{\mathrm{B}} = 90^\circ$. Έτσι αποδείξαμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.5: Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον τύπο:

Εμβαδόν $\boxed{E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2}\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma}$

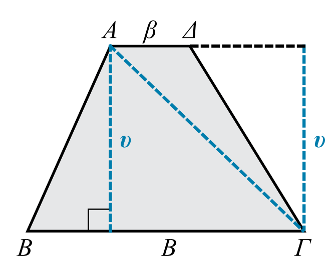
Περίμετρος $\boxed{\Pi = \alpha + \beta + \gamma}$

6.2.5 Εμβαδόν και περίμετρος τραπεζίου

Θεώρημα 6.6: Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του. Δηλαδή στο σχήμα 6.5:

$$\boxed{E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}}$$

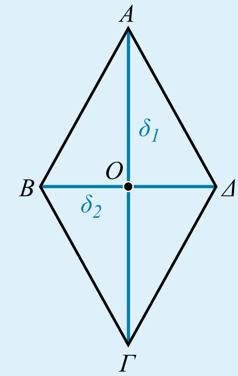
Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται εύκολα εάν φέρει κάποιος μια διαγώνιο και υπολογίσει τα εμβαδά των δύο τριγώνων, χρησιμοποιώντας το ίδιο ύψος.



Σχ. 6.5

Εφαρμογή 6.1

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.



Σχ. 6.6

Απόδειξη

Θεωρούμε τον ρόμβο του σχήματος 6.6. Είναι προφανές ότι:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΒΔ}) + (\text{ΒΓΔ}) \qquad (1)$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΔ} \cdot \text{ΑΟ}$$

Επειδή οι διαγώνιοι στον ρόμβο είναι κάθετες και διχοτομούνται, ισχύει ότι:

$$\text{ΑΟ} = \frac{\delta_1}{2}$$

Επομένως:

$$(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2} \cdot \delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{4} \qquad (2)$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι ίσα, διότι έχουν και τις 3 πλευρές τους ίσες, άρα είναι και ισεμβαδικά. Οπότε από (1) και (2) έχουμε:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

Εφαρμογή 6.2

Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με:

$$E = \frac{\alpha^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Απόδειξη

Έστω το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 6.7. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Το ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι και διάμεσος. Επομένως $\text{ΒΔ} = \text{ΔΓ} = \frac{\alpha}{2}$. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΔ}^2 + \upsilon^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \upsilon^2 \Leftrightarrow$$

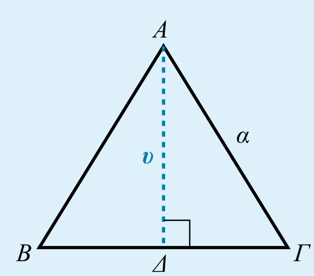
$$\Leftrightarrow \upsilon^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}$$

Άρα:

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$



Σχ. 6.7

Παράδειγμα 6.1

Το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 6.8 είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, ΒΓ=6 cm και έχει περίμετρο 16 *cm*. Να βρεθούν:

α) Οι ίσες πλευρές του τριγώνου.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου.

Λύση

α) $\Pi = 16 \Leftrightarrow B\Gamma + AB + A\Gamma = 16 \Leftrightarrow 6 + 2AB = 16 \Leftrightarrow AB = 5\text{ cm} = A\Gamma$

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος είναι και διάμεσος, άρα $B\Delta = \Delta\Gamma = 3\text{ cm}$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{16} = 4\text{ cm}$$

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12\text{ cm}^2$

Παράδειγμα 6.2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ = ΒΓ και $\hat{B} = 135^o$ (σχ. 6.9). Αν $A\Delta = 4\sqrt{2}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου.

Λύση

$\hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^o$ ως εντός και επί τα αυτά των ΑΒ//ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ. Άρα:

$$135^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^o$$

Φέρνουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του τραπεζίου.

$$Z\hat{B}\Gamma = 135^o - 90^o = 45^o.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BZ^2 + Z\Gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2BZ^2 \Leftrightarrow \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 2BZ^2 \Leftrightarrow 32 = 2BZ^2 \Leftrightarrow BZ^2 = 16 \Leftrightarrow BZ = 4$$

Άρα και $Z\Gamma = 4$.

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν:

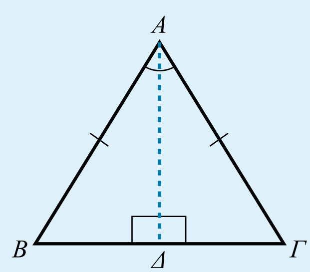
ΑΔ = ΒΓ επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές και

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου.

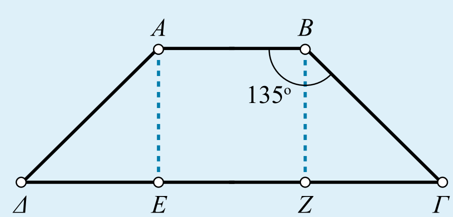
Άρα θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\Delta E = Z\Gamma = 4$.

$EZ = AB = 4\sqrt{2}$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΖΕ.

Επομένως $\Delta\Gamma = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 8 + 4\sqrt{2}$.



Σχ. 6.8



Σχ. 6.9

Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{(\text{Β} + \beta)\cdot \upsilon}{2} = \frac{(8 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2})\cdot 4}{2} = 16\,(1 + \sqrt{2})$$

6.3 Μετρήσεις κύκλου

6.3.1 Μήκος κύκλου και τόξου

Θεώρημα 6.7: Το μήκος L κύκλου ακτίνας ϱ, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{L = 2\pi\varrho}$$

ή

$$\boxed{L = \pi\delta}$$

όπου: $\delta = 2\varrho$ είναι η διάμετρος του κύκλου.

Θεώρημα 6.8: Το μήκος l ενός τόξου μ^{o} κύκλου ακτίνας ϱ (σχ. 6.10), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{l = \frac{\pi\varrho\mu}{180}}$$

Πράγματι, σύμφωνα με την απλή μέθοδο των τριών:

´Ενα τόξο 360° (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος $2\pi\varrho$.

´Ενα τόξο μ° έχει μήκος l

Άρα: $\dfrac{360}{\mu} = \dfrac{2\pi\varrho}{l}$ ή $l = \dfrac{\pi\varrho\mu}{180}$

6.3.2 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

1) Κυκλικός δίσκος

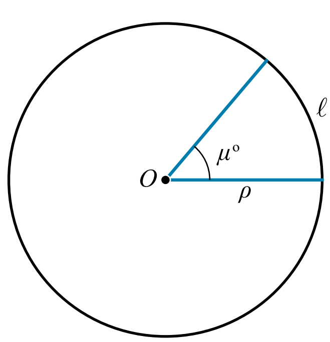
´Εστω ένας κύκλος (Ο, ϱ). Ο κύκλος μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν τον ***κυκλικό δίσκο*** με κέντρο Ο και ακτίνα ϱ.

Θεώρημα 6.9: Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας ϱ δίνεται από τη σχέση

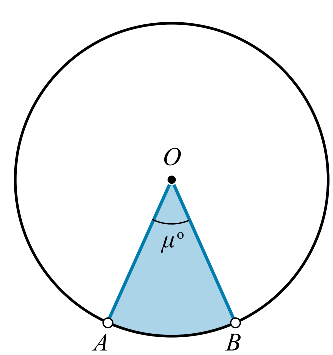
$$\boxed{E = \pi\varrho^2}$$

2) Κυκλικός τομέας

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, ρ) και μία επίκεντρη γωνία ΑÔΒ (σχ. 6.11). Το σύνολο



Σχ. 6.10



Σχ. 6.11

των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $A\hat{O}B$ και του κυκλικού δίσκου (Ο, ρ) λέγεται ***κυκλικός τομέας*** κέντρου Ο και ακτίνας ρ, και συμβολίζεται $O\overset{\frown}{AB}$. Αν η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι μ^o, λέμε ότι και ο κυκλικός τομέας είναι μ^o.

Με απλή μέθοδο των τριών προκύπτει ότι το ***εμβαδόν του κυκλικου τομέα*** $\boldsymbol{\mu^o}$ που βρίσκεται σε κύκλο ακτίνας ϱ δίνεται από τη σχέση:

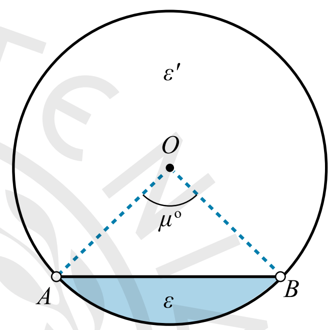
$$\boxed{(O\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi\varrho^2\mu}{360}}$$

3) Κυκλικό τμήμα

Έστω ένας κύκλος (Ο, ϱ) και μια χορδή του ΑΒ (σχ. 6.12). Η χορδή χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη καθένα από τα οποία λέγεται ***κυκλικό τμήμα***.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν **ε** του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία ΑΟΒ, αρκεί να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{AB}$. Δηλαδή:

$$\boxed{\varepsilon = (AOB) - (O\overset{\frown}{AB})}$$



Σχ. 6.12

Το (ΑΟΒ) σύμφωνα με το Θεώρημα 6.5 είναι:

$$(AOB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \eta\mu\mu = \frac{1}{2} \cdot \varrho^2 \cdot \eta\mu\mu$$

Επομένως:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \varrho^2 \cdot \eta\mu\mu - \frac{\pi\varrho^2\mu}{360}}$$

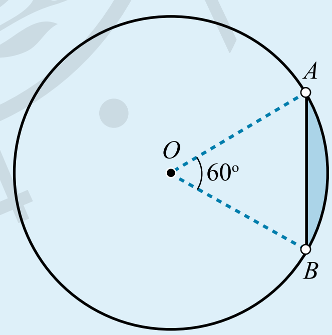
Παράδειγμα 6.3

Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του σχήματος 6.13 έχει μήκος $l = 2\pi$ cm. Να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

γ) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος.



Σχ. 6.13

Λύση

α) $l = \frac{\pi\varrho\mu}{180} \Leftrightarrow 2\pi = \frac{\pi\varrho 60}{180} \Leftrightarrow 2\pi = \frac{\pi\varrho}{3} \Leftrightarrow \varrho = 6$ cm

$E = \pi\varrho^2 = \pi 6^2 = 36\pi$ cm^2

β) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο διότι είναι ισοσκελές αφού ΟΑ = ΟΒ = ϱ κι έχει $A\hat{O}B = 60^o$. Άρα σύμφωνα με την Εφαρμογή 6.2 το εμβαδόν του είναι:

$$(AOB) = \frac{\varrho^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Εναλλακτικά:

$$(AOB) = \frac{1}{2}\varrho^2\eta\mu 60^\circ = \frac{\varrho^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

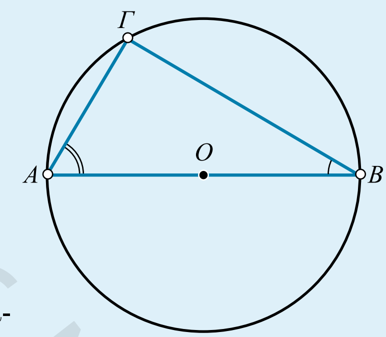
γ) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\text{O}\overset{\frown}{\text{AB}}$ είναι:

$$(\text{OAB}) = \frac{\pi\varrho^2\mu}{360} = \frac{\pi 6^2 \cdot 60}{360} = 6\pi \text{ cm}^2$$

Άρα το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι:

$$\varepsilon = (AOB) - (O\overset{\frown}{AB}) = (6\pi - 9\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

Παράδειγμα 6.4



Σχ. 6.14

Στο σχήμα 6.14 η ΑΒ είναι διάμετρος και ισχύει: $\text{ΑΓ} = 4$ cm και $\text{ΒΓ} = 4\sqrt{3}$ cm. Να βρεθούν:

α) Το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.
β) Οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) Το μέτρο και το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$.

Λύση

α) Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα:

$$\hat{\Gamma} = \frac{\overset{\frown}{\text{AB}}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\text{AB}^2 = \text{A}\Gamma^2 + \text{B}\Gamma^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 4^2 \cdot 3 = 64$$

Άρα ΑΒ = 8 cm. Επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι $\varrho = 8:2 = 4$ cm.
Το μήκος του κύκλου είναι:

$$\text{L} = 2\pi\varrho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E = \pi\varrho^2 = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$$

β) Δείξαμε ήδη ότι $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

$$\eta\mu\text{B} = \frac{\text{A}\Gamma}{\text{AB}} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \quad \text{άρα} \quad \hat{\text{B}} = \eta\mu^{-1}\, 0{,}5 = 30^\circ$$

Άρα $\hat{\text{A}} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
γ) Η $\hat{\text{A}}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$. Άρα ισχύει:

$$\hat{\text{A}} = \frac{\overset{\frown}{\text{B}\Gamma}}{2} = \Leftrightarrow \overset{\frown}{\text{B}\Gamma} = 2 \cdot \hat{\text{A}} = 120^\circ$$

Το μήκος του $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$ είναι:

$$l = \frac{\pi\varrho\mu}{180} = \frac{3{,}14 \cdot 4 \cdot 120}{180} = 8{,}373 \text{ cm}$$

6.4 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος στερεών σχημάτων

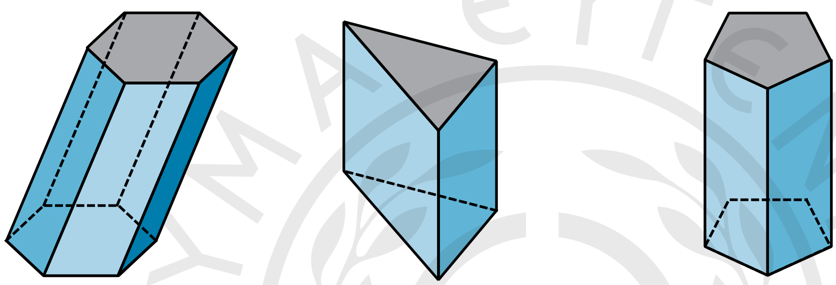
Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε δύο κατηγορίες στερεών σχημάτων, τα πολύεδρα και τα στερεά εκ περιστροφής. Τα πολύεδρα αποτελούνται από τμήματα επιπέδων, κατάλληλα τοποθετημένα, ώστε να σχηματίζουν ένα κλειστό στερεό σχήμα. Από τα διάφορα είδη πολυέδρων που υπάρχουν, θα μελετήσουμε τα πρίσματα και τις πυραμίδες.

Τα στερεά εκ περιστροφής με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα. Τα στερεά αυτά ονομάζονται έτσι γιατί σχηματίζονται κατά την περιστροφή επιπέδων σχημάτων.

6.4.1 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος πρίσματος

Πρίσμα ονομάζεται το πολύεδρο που έχει δύο απέναντι έδρες ίσες και παράλληλες και όλες τις άλλες έδρες του παραλληλόγραμμα. Οι παράλληλες έδρες λέγονται ***βάσεις*** του πρίσματος, ενώ όλες οι υπόλοιπες έδρες που περικλείονται μεταξύ των επιπέδων των βάσεων λέγονται ***παράπλευρες έδρες***. Οι πλευρές των εδρών λέγονται ***ακμές***. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα στα επίπεδα των βάσεων και είναι κάθετο σε αυτά λέγεται ***ύψος*** του πρίσματος. ***Ορθό*** λέγεται το πρίσμα που οι έδρες του είναι κάθετες στις βάσεις του, διαφορετικά λέγεται ***πλάγιο***.

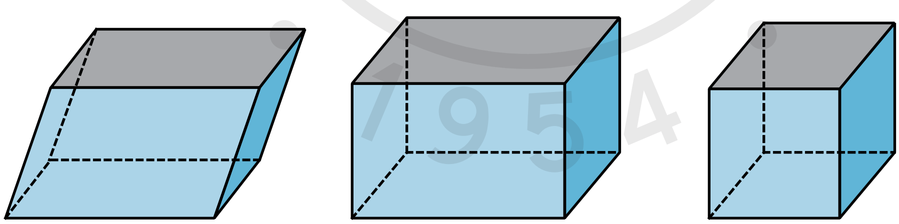
Ένα πρίσμα παίρνει την ονομασία του από το σχήμα των βάσεών του. Αν είναι τρίγωνα τότε το πρίσμα λέγεται τριγωνικό, αν είναι εξάγωνα εξαγωνικό κ.λπ. (σχ. 6.15).



(α) Πλάγιο πρίσμα *(β) Ορθό τριγωνικό πρίσμα* *(γ) Ορθό πενταγωνικό πρίσμα*

Σχ. 6.15

Αν και οι βάσεις ενός πρίσματος είναι παραλληλόγραμμα, τότε το πρίσμα λέγεται ***παραλληλεπίπεδο***. Αν το πρίσμα είναι ορθό και οι βάσεις είναι ορθογώνια, το πρίσμα λέγεται ***ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο***. Ειδικότερα, αν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις ακμές ίσες, λέγεται ***κύβος*** (σχ. 6.16).



(α) Παραλληλεπίπεδο *(β) Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο* *(γ) Κύβος*

Σχ. 6.16

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $$\boxed{E_\pi = \Pi_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot \upsilon}$$

Είναι προφανές ότι για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας αρκεί να προσθέσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης με το εμβαδόν των δύο βάσεων:

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας $$\boxed{E_{o\lambda} = 2E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} + E_\pi}$$

Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος, δηλαδή:

Όγκος $\boxed{V = E_{βάσης} \cdot υ}$

6.4.2 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και κύβος

1) Ορθογώνιο παραλληλεπίδο.

Ειδικά στην περίπτωση του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ακμές $α$, $β$, $γ$, (σχ. 6.17) οι παραπάνω τύποι γίνονται:

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\boxed{Eπ = 2αγ + 2βγ}$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας: $\boxed{Eολ = 2αβ + 2αγ + 2βγ}$

Όγκος $\boxed{V = α \cdot β \cdot γ}$

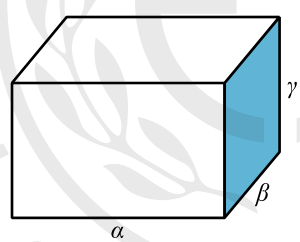
2) Κύβος

Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κύβου ακμής $α$, (σχ. 6.18):

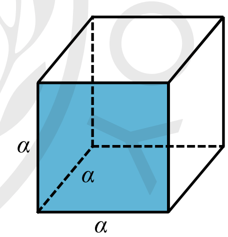
$$\boxed{Eολ = 6α^2}$$

και ο όγκος του κύβου:

$$\boxed{V = α^3}$$



Σχ. 6.17



Σχ. 6.18

Παράδειγμα 6.5

Μια κλειστή δεξαμενή πλοίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 11 m, 7 m και 6,2 m περιέχει 500 m^3 πετρέλαιο. Να βρεθούν:

α) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της δεξαμενής.

β) Πόσο επιπλέον πετρέλαιο χωράει η δεξαμενή.

Λύση

α) $Eολ = 2αβ + 2αγ + 2βγ = 2 \cdot 11 \cdot 7 + 2 \cdot 11 \cdot 6{,}2 + 2 \cdot 7 \cdot 6{,}2 = 377{,}2$ m^2.

β) Ο όγκος της δεξαμενής είναι: $V = α \cdot β \cdot γ = 11 \cdot 7 \cdot 6{,}2 = 477{,}4$ m^3. Άρα η δεξαμενή χωράει ακόμα $500 – 477{,}4 = 22{,}6$ m^3.

6.4.3 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος κυλίνδρου

Το σχήμα που παράγεται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο εκτελεί μία πλήρη περιστροφή στον χώρο γύρω από τη μία πλευρά του, ονομάζεται ***κύλινδρος***. Ένας κύλινδρος αποτελείται από δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, που είναι οι βάσεις του, και την παράπλευρη ή κυρτή επιφάνεια, που αν την ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου. Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται ***ύψος*** του κυλίνδρου.

Θεωρούμε τον κύλινδρο του σχήματος 6.19 ύψους *υ,* στον οποίο οι βάσεις του έχουν ακτίνα ***ρ***. Τότε:

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας:

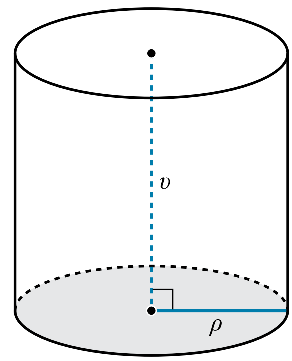
$$E\pi = \Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma \cdot \upsilon = 2\pi\varrho \cdot \upsilon$$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας:

$$E o\lambda = 2E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} + E\pi = 2\pi\varrho^2 + 2\pi\varrho \cdot \upsilon$$

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο:

$$V = E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot \upsilon = \pi\varrho^2 \cdot \upsilon$$



Σχ. 6.19

Παράδειγμα 6.6

Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 10 m. Οι εργάτες θέλουν να κατασκευάσουν μια ίδια. Δεν μπορούν να μετρήσουν τη διάμετρο της βάσης. Γνωρίζουν όμως ότι η δεξαμενή χωράει 502.650 l πετρέλαιο. Ποιο θα είναι το κόστος της κατασκευής αν το υλικό είναι λαμαρίνα που κοστίζει 4 € το m^2;

Λύση

$$502.650\ \text{l} = 502.650:1000\ \text{m}^3 = 502{,}65\ \text{m}^3$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot \upsilon \Leftrightarrow 502{,}65 = \boldsymbol{E}_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot 10 \Leftrightarrow \boldsymbol{E}_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = 50{,}265\ \text{m}^2$$

$$\boldsymbol{E}_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = 50{,}265 \Leftrightarrow \pi \cdot \varrho^2 = 50{,}265 \Leftrightarrow \varrho^2 = \frac{50{,}265}{\pi} \cong 16m.\ \text{Άρα}\ \varrho = 4\ \text{m}$$

Επομένως το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι:

$$E o\lambda = 2\pi\varrho^2 + 2\pi\varrho\upsilon = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 = 351{,}86\ \text{m}^2.$$

Άρα το κόστος κατασκευής είναι: $351{,}86 \cdot 4 = 1407{,}44$ €.

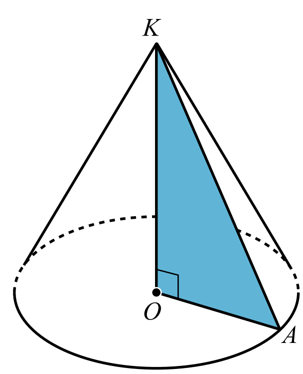
6.4.4 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος κώνου

Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΑ του σχήματος 6.20. Η βάση του κώνου είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ, την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου ΚΟΑ. Η ακτίνα ΟΑ = ρ λέγεται ***ακτίνα του κώνου***.

Η κάθετη πλευρά ΚΟ γύρω από την οποία περιστρέψαμε το ορθογώνιο τρίγωνο, λέγεται ***ύψος*** του κώνου.

Η κυρτή επιφάνεια που παράγεται από την υποτείνουσα ΚΑ λέγεται ***παράπλευρη*** ή ***κυρτή*** επιφάνεια του κώνου.



Σχ. 6.20

Η τυχαία θέση της ΚΑ λέγεται γενέτειρα του κώνου και τη συμβολίζουμε λ.

Το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας του κώνου του σχήματος 6.21 είναι κυκλικός τομέας κέντρου Κ και ακτίνας λ, που βλέπει σε τόξο μήκους $2\pi\varrho$. Έτσι προκύπτει ο τύπος:

Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας:

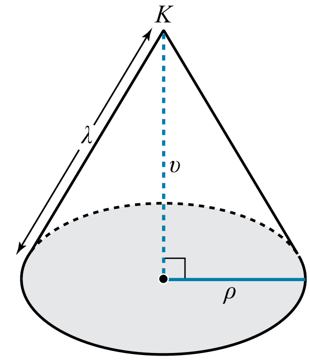
$$\boxed{E\kappa = \pi \cdot \varrho \cdot \lambda}$$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας:

$$\boxed{E o\lambda = E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} + E\kappa = \pi\varrho^2 + \pi\varrho \cdot \lambda}$$

Όγκος:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \varrho^2 \cdot \upsilon}$$



Σχ. 6.21

Παρατηρούμε ότι ο όγκος κώνου είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου κυλίνδρου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

6.4.5 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος πυραμίδας

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Το πολύγωνο λέγεται ***βάση*** της πυραμίδας, ενώ τα τρίγωνα με κοινή κορυφή και απέναντι πλευρές τις πλευρές της βάσης λέγονται ***παράπλευρες έδρες***. Το σύνολο των παράπλευρων εδρών λέγεται ***παράπλευρη επιφάνεια*** της πυραμίδας. Η πυραμίδα λέγεται τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική κ.λπ., αν η βάση είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.λπ.

Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας κάθετα στο επίπεδο της βάσης λέγεται ***ύψος της πυραμίδας*** (το υ στο σχ. 6.22)

Μία πυραμίδα λέγεται ***κανονική***, αν η βάση είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της πυραμίδας στο επίπεδο της βάσης είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου. Σε μία κανονική πυραμίδα, οι παράπλευρες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα, ίσα μεταξύ τους και το ύψος κάθε παράπλευρης έδρας που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας λέγεται ***απόστημα*** ή ***παράπλευρο ύψος*** της κανονικής πυραμίδας (το h στο σχ. 6.22)

Κανονική πυραμίδα

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας:

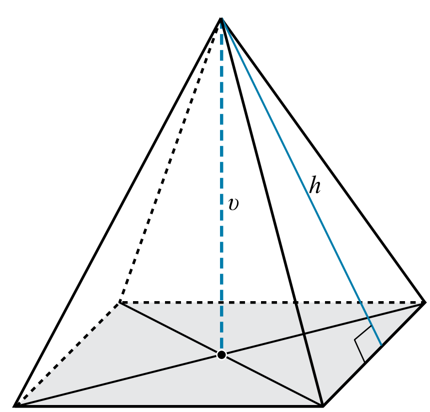
$$\boxed{E\pi = \frac{1}{2} \,\Pi\varepsilon\varrho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\varrho o\varsigma\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma \cdot h}$$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας:

$$\boxed{E o\lambda = E_\beta + E_\pi}$$

Όγκος:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot \upsilon}$$

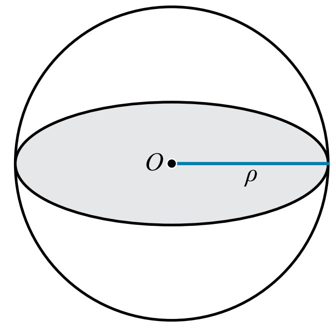


Σχ. 6.22

Παρατηρούμε ότι ο όγκος πυραμίδας είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου παραλληλεπιπέδου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

6.4.6 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος σφαίρας

Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του. Η ακτίνα του κυκλικού δίσκου λέγεται και ακτίνα της σφαίρας. Θεωρούμε τη σφαίρα ακτίνας ρ του σχήματος 6.23.



Σχ. 6.23

Εμβαδόν επιφάνειας: $\boxed{E\pi = 4\pi\rho^2}$

Όγκος: $\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3}$

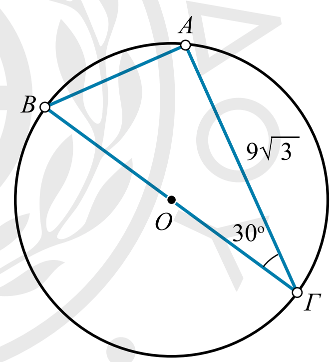
Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τραπεζίου.

2. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ, ΑΒ=6 cm, ΓΔ=3 cm, και περίμετρο Π = 14 cm. Να βρεθούν:
α) Οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ.
β) Το εμβαδόν του τραπεζίου.

3. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) όπου ΑΒ=12, ΑΔ=8 και $\hat{\Delta} = 60^o$. Να βρεθούν:
α) Όλες οι γωνίες του τραπεζίου
β) Η περίμετρος και το εμβαδόν του τραπεζίου.

4. Στο σχήμα 6.24 δίνεται: $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = 9\sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 30°$. Να βρεθούν:
α) Οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$.
γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
δ) Το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.
ε) Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$.
στ) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\text{Ο}\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$.



Σχ. 6.24

5. Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι 1256 cm^2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 45^o.

6. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος 7 cm, πλάτος 6 cm, και ύψος 5 cm. Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδόν ολικής επιφάνειάς του.

7. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 4 m, πλάτος 3 m και όγκο 120 m^3. Να υπολογιστεί το ύψος του και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

8. Να υπολογιστεί το εμβαδόν και ο όγκος ορθού πρίσματος, του οποίου το ύψος είναι 6 cm, και οι βάσεις του είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm, και 4 cm.

9. Μια κλειστή δεξαμενή πλοίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 9 m, 8 m και 6,5 m περιέχει 420 m^3. πετρέλαιο. Να βρεθούν:
α) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της δεξαμενής.
β) Πόσο επιπλέον πετρέλαιο χωράει η δεξαμενή.

10. Ένας κύλινδρος έχει ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης 4 cm. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και ο όγκος του.

11. Ένας κύλινδρος έχει όγκο ίσο με 175π m^3. Αν το ύψος του είναι ίσο με 7 m, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

12. Μία κυλινδρική δεξαμενή έχει ύψος 6 m και ακτίνα βάσης 4 m. Αν η δεξαμενή έχει μέσα 200 m^3 πετρέλαιο, πόσο επιπλέον πετρέλαιο χωράει;

13. Να αποδειχθεί ο τύπος εμβαδού κυρτής επιφάνειας κώνου.

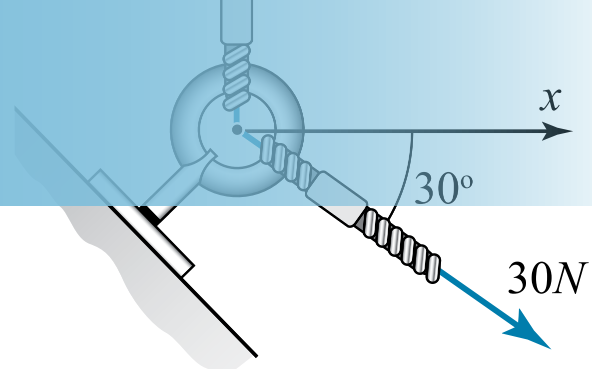
14. Η διάμετρος μίας σφαίρας είναι $\delta = 4$ cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας.

15. Η επιφάνεια μίας σφαίρας είναι 36π m^2. Να βρείτε τον όγκο της.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

κεφάλαιο 7

Διανύσματα



Στις θετικές επιστήμες, διακρίνουμε δύο είδη φυσικών μεγεθών. Υπάρχουν φυσικά μεγέθη που για να προσδιοριστούν πλήρως, αρκεί η γνώση της αριθμητικής τους τιμής και η μονάδα μέτρησής τους. Αυτά τα μεγέθη λέγονται ***μονόμετρα*** ή ***βαθμωτά***. Τέτοια μεγέθη είναι για παράδειγμα ο χρόνος, η μάζα, ο όγκος, η θερμοκρασία κ.ά. Υπαρχουν όμως και τα φυσικά μεγέθη που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από την αριθμητική τους τιμή και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται ***διανυσματικά*** μεγέθη. Διανυσματικά μεγέθη είναι η δύναμη, η μετατόπιση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κ.ά. Τα διανυσματικά μεγέθη απεικονίζονται με τα διανύσματα, τα οποία θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο αυτό. Τα διανύσματα έχουν σημαντικές εφαρμογές, κυρίως στη Φυσική, στη Μηχανική και στη Γεωμετρία.

7.1 Η έννοια του διανύσματος

Εφαρμοσμένο διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται ***αρχή*** ή ***σημείο εφαρμογής*** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται ***πέρας*** του διανύσματος.

΄Ενα εφαρμοσμένο διάνυσμα συμβολίζεται με δύο κεφαλαία γράμματα κάτω από ένα βέλος, όπου το πρώτο γράμμα είναι η αρχή του διανύσματος και το δεύτερο το πέρας. Το διάνυσμα του σχήματος 7.1 με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται ως εξής: $\overrightarrow{AB}$.

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται ***μηδενικό***. ΄Ετσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Το μηδενικό διάνυσμα συμβολίζεται ως εξής: $\vec{0}$.

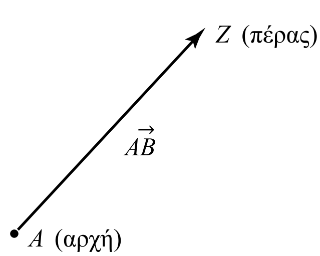
΄Ενα εφαρμοσμένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει τα εξής στοιχεία:

1) ***Μέτρο***, που είναι η απόσταση των άκρων του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

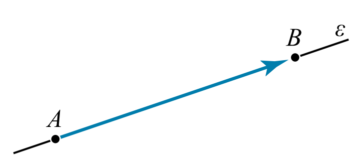
Αν ένα εφαρμοσμένο διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με 1, λέγεται ***μοναδιαίο***.

2) ***Διεύθυνση***, που είναι η ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή (σχ. 7.2). Η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται το $\overrightarrow{AB}$ λέγεται ***φορέας του*** $\overrightarrow{AB}$.

3) ***Φορά***, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β, ή αρχή το Β και πέρας το Α.



Σχ. 7.1



Σχ. 7.2

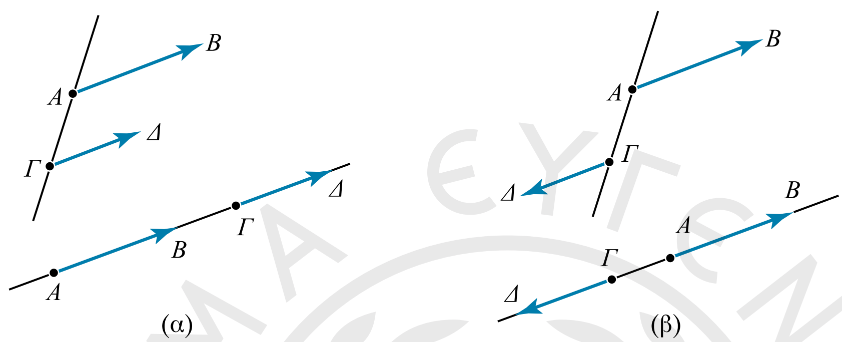
Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την ***κατεύθυνση*** ενός διανύσματος.

Δύο μη μηδενικά εφαρμοσμένα διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση, ονομάζονται ***παράλληλα*** ή ***συγγραμμικά***. Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι συγγραμμικά, γράφουμε $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ονομάζονται:

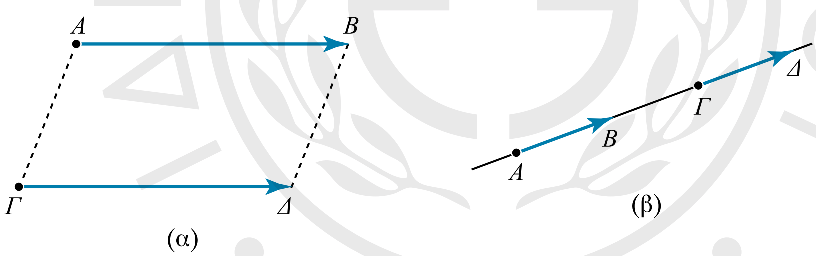
1) ***Ομόρροπα*** αν είναι συγγραμμικά και έχουν ίδια φορά, δηλαδή έχουν ίδια κατεύθυνση [σχ. 7.3(α)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} \nearrow\nearrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

2) ***Αντίρροπα*** αν είναι συγγραμμικά και έχουν διαφορετική φορά [σχ. 7.3(β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} \nearrow\swarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



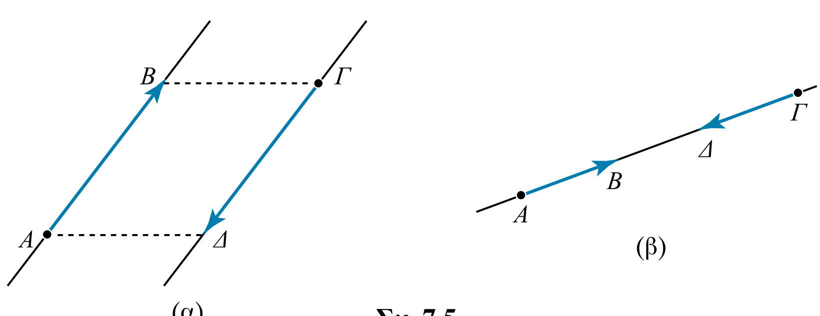
Σχ. 7.3

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ***ίσα*** όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα [σχ. 7.4(α) και (β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 7.4

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ***αντίθετα***, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά [σχ. 7.5(α) και (β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 7.5

Παρατηρήσεις

1) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε θα ισχύουν και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Αυτό συμβαίνει

διότι στο παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Gamma$ (σχ. 7.4α) οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες, οπότε τα αντίστοιχα διανύσματα είναι παράλληλα και έχουν ίσα μέτρα.

2) Ισχύει ότι: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

3) Ισχύει ότι: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

1) Ελεύθερο διάνυσμα

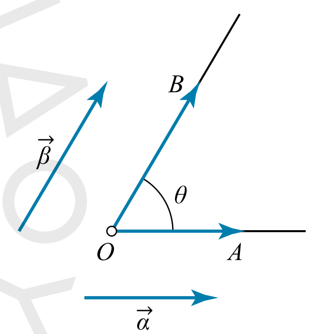
Σύμφωνα με όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, οποιαδήποτε δύο εφαρμοσμένα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και ίσα μέτρα, είναι ίσα. ΄Ετσι, όλα τα άπειρα διανύσματα που είναι ίσα, αλλά διαφέρουν στο σημείο εφαρμογής τους, αποτελούν μια κλάση διανυσμάτων. Το σύνολο των διανυσμάτων επομένως διαμερίζεται σε κλάσεις ίσων μεταξύ τους διανυσμάτων. Ονομάζουμε ***ελεύθερο διάνυσμα*** ή πιο απλά ***διάνυσμα*** την κλάση των άπειρων ίσων μεταξύ τους εφαρμοσμένων διανυσμάτων.

΄Ενα ελεύθερο διάνυσμα αντιπροσωπεύεται από οποιοδήποτε εφαρμοσμένο που ανήκει στην κλάση του, και συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα κάτω από ένα βέλος. Για παράδειγμα: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$. Για να δηλώσουμε ότι ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ αντιπροσωπεύεται από το εφαρμοσμένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ γράφουμε $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$.

Στη Φυσική γίνεται συχνά χρήση του ελεύθερου διανύσματος. Για παράδειγμα η ταχύτητα ενός κινητού όταν εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση καθορίζεται με ελεύθερο διάνυσμα.

2) Γωνία διανυσμάτων

΄Εστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Ονομάζουμε ***γωνία των*** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή πιο απλά θ, την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB (σχ. 7.6).



Σχ. 7.6

Ισχύει ότι:

$$0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ} \text{ (σε μοίρες) ή } 0^{\circ} \leq \theta \leq \pi \text{ (σε rad).}$$

Ειδικά:

Αν $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 0^{\circ}$

Αν $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 180^{\circ}$

Αν $\theta = 90^{\circ}$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται ***ορθογώνια*** ή ***κάθετα*** και γράφονται ως εξής: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

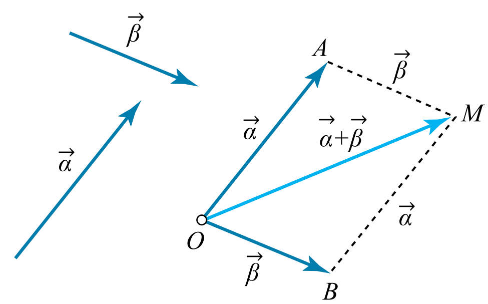
7.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

7.2.1 Πρόσθεση διανυσμάτων

΄Εστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ονομάζουμε ***άθροισμα των*** $\vec{\alpha}$ ***και*** $\vec{\beta}$ ένα νέο διάνυσμα, το οποίο συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, και το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί με τους εξής δύο τρόπους:

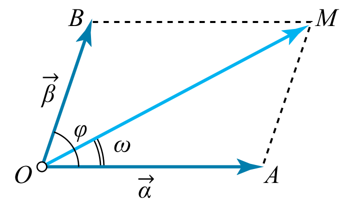
1) Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου

Επιλέγουμε δύο αντιπροσώπους για τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή O και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7. Η διαγώνιος $\overrightarrow{OM}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή



Σχ. 7.7

ισούται με $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι το ελεύθερο διάνυσμα που έχει το $\overrightarrow{OM}$ ως αντιπρόσωπο.



Σχ. 7.8

Μέτρο του $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$:

Το $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος *OM*. Για τον υπολογισμό του (*OM*) εφαρμόζουμε Νόμο Συνημιτόνων στο τρίγωνο *OAM* (σχ. 7.8).

$$(OM)^2 = (AM)^2 + (OB)^2 - 2\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot συνA \Leftrightarrow$$
$$(OM)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot συν\left(180 - \varphi\right) \Leftrightarrow$$
$$(OM)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 + 2\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot συν\varphi$$

$$\text{Ή } \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot συν\varphi \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \sqrt{\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot συν\varphi}}$$

Διεύθυνση του $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$:

Εφαρμόζοντας τον Νόμο Ημιτόνων στο τρίγωνο *OAM:*

$$\frac{(OM)}{ημA} = \frac{(AM)}{ημω} \Leftrightarrow \frac{(OM)}{ημ\left(180 - \varphi\right)} = \frac{(\mathrm{OB})}{ημω} \Leftrightarrow \frac{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|}{ημ\varphi} = \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{ημω} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{ημω = \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|}\cdot ημ\varphi}$$

2) Με την μέθοδο των διαδοχικών διανυσμάτων

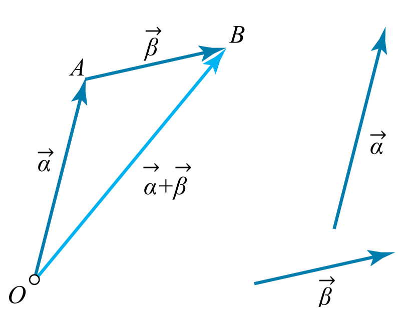
Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Το άθροισμά τους $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ θα είναι το διάνυσμα που θα έχει αρχή την αρχή του $\vec{\alpha}$ και πέρας το πέρας του $\vec{\beta}$ (σχ. 7.9).

Με τον δεύτερο τρόπο μπορούμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διανύσματα.

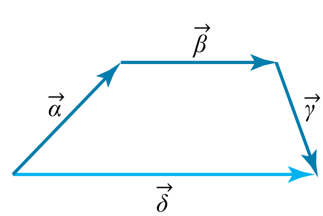
Το άθροισμα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου (σχ. 7.10).

Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)



Σχ. 7.9



Σχ. 7.10

2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ (μηδενικό στοιχείο)
4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$ (αντίθετο στοιχείο)

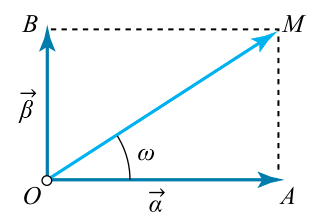
– Ειδικές περιπτώσεις στην πρόσθεση

1) Άθροισμα κάθετων διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (σχ. 7.11), υπολογίζουμε το μέτρο του αθροίσματος με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAM:

$$(OM)^2=(OA)^2+(AM)^2 \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2}}$$



Σχ. 7.11

Για τη διεύθυνση, στο ορθογώνιο τρίγωνο *OAM:*

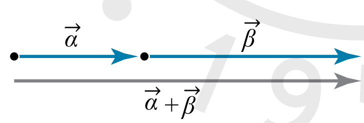
$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega=\frac{(AM)}{(OA)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|}}$$

2) Άθροισμα συγγραμμικών διανυσμάτων:

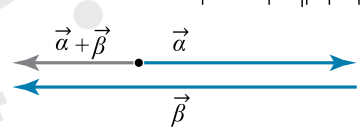
Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ μόνο με την μέθοδο των διαδοχικών διανυσμάτων:

α) Το άθροισμα δύο ***ομόρροπων*** διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχ. 7.12) είναι ένα διάνυσμα:
- Με διεύθυνση και φορά αυτή των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Με μέτρο το άθροισμα των μέτρων τους: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$.

β) Το άθροισμα 2 ***αντίρροπων*** διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχ. 7.13) είναι ένα διάνυσμα:
- Με διεύθυνση αυτή των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Με φορά τη φορά αυτού με το μεγαλύτερο μέτρο.
- Με μέτρο την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων τους: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|$.



Σχ. 7.12



Σχ. 7.13

Εφαρμογή

Να βρεθεί η συνισταμένη $\overrightarrow{\Sigma F}$ των δυνάμεων $\vec{F_1}=6N$ και $\vec{F_2}=8N$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

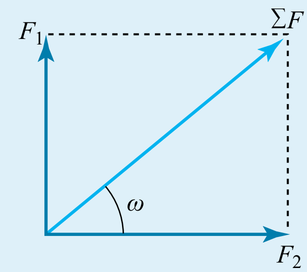
α) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ ομόρροπες.
β) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ αντίρροπες.
γ) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ κάθετες.
δ) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ σχηματίζουν γωνία 50°.

Λύση

α) Μέτρο: $\left|\overrightarrow{\Sigma F}\right|=\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F_1}\right|+\left|\vec{F_2}\right|=6+8=14N$ και έχει διεύθυνση και φορά ίδια με τις δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$.

β) Μέτρο: $\left|\overrightarrow{\Sigma F}\right| = \left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right| = \left|\left|\vec{F}_1\right| - \left|\vec{F}_2\right|\right| = 8 - 6 = 2N$

Κατεύθυνση: της $\vec{F}_2$

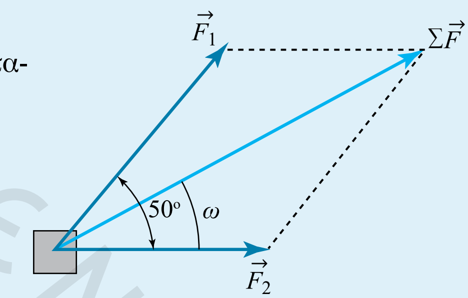


Σχ. 7.14

γ) Όταν $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$ (σχ. 7.14) για την συνισταμένη έχουμε:

Μέτρο: $\left|\overrightarrow{\Sigma F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10N$

Κατεύθυνση: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\left|\vec{F}_1\right|}{\left|\vec{F}_2\right|} = \dfrac{6}{8} = 0,75.$ Άρα $\omega = \varepsilon\varphi^{-1}0,75 = 36,86^{\circ}$



Σχ. 7.15

δ) Όταν οι $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ σχηματίζουν γωνία 50° (σχ. 7.15) για τη συνισταμένη του ισχύει:

Μέτρο: $\left|\overrightarrow{\Sigma F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2 + 2\left|\vec{F}_1\right| \cdot \left|\vec{F}_2\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{\Sigma F}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sigma\upsilon\nu 50} \Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{\Sigma F}\right| = 12,716N$

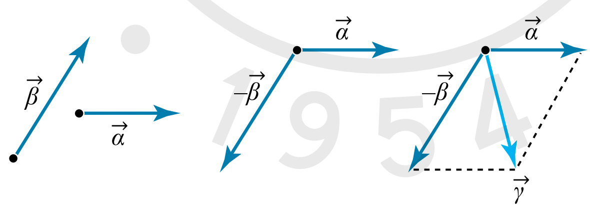
Και για τη διεύθυνση: $\eta\mu\omega = \dfrac{\left|\vec{F}_1\right|}{\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right|} \cdot \eta\mu\varphi = \dfrac{6}{12,716}\eta\mu 50^{\circ} = 0,36146$

Άρα $\omega = \eta\mu^{-1}0,36146 = 21,18999^{\circ}$

7.2.2 Αφαίρεση διανυσμάτων

Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$ (σχ. 7.16), δηλαδή:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$



Σχ. 7.16

7.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα

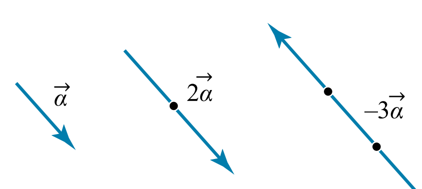
Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός διάφορος του 0 και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

1) Είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda>0$, και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda<0$ και

2) έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda\vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Για παράδειγμα το διάνυσμα $2\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ με διπλάσιο μέτρο του $\vec{\alpha}$, ενώ το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με τριπλάσιο μέτρο του $\vec{\alpha}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.17.



Σχ. 7.17

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού επί διάνυσμα

1) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
2) $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$
3) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$
4) $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$
5) Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
6) Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

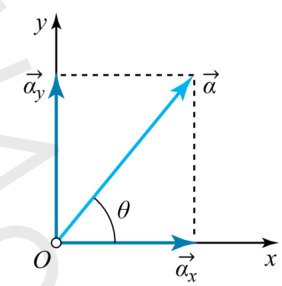
Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Κάθε διάνυσμα της μορφής $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ονομάζεται ***γραμμικός συνδυασμός*** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Για παράδειγμα τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

7.4 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ στο επίπεδο Oxy. Αναζητούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha_x}$ και $\overrightarrow{\alpha_y}$ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, ώστε το $\vec{\alpha}$ να είναι άθροισμα των δύο διανυσμάτων (βλ. σχ. 7.18). Τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha_x}$ και $\overrightarrow{\alpha_y}$ ονομάζονται ***διανυσματικές συνιστώσες*** του $\vec{\alpha}$. Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{\alpha_x} + \overrightarrow{\alpha_y}$$



Σχ. 7.18

Υπολογισμός των μέτρων των συνιστωσών:
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\eta\mu\theta = \frac{|\overrightarrow{\alpha_y}|}{|\vec{\alpha}|} \Leftrightarrow |\overrightarrow{\alpha_y}| = |\vec{\alpha}| \cdot \eta\mu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{|\overrightarrow{\alpha_x}|}{|\vec{\alpha}|} \Leftrightarrow |\overrightarrow{\alpha_x}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Άρα:

$$\boxed{|\overrightarrow{\alpha_y}| = |\vec{\alpha}| \cdot \eta\mu\theta}$$

$$\boxed{|\overrightarrow{\alpha_x}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

Παράδειγμα 7.1

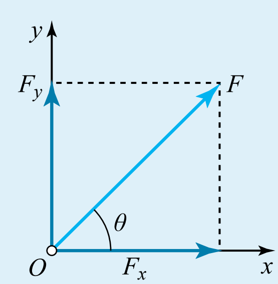
Το διάνυσμα $\vec{F}$ του σχήματος 7.19 έχει μέτρο 100 και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία $\theta = 50^\circ$. Να αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες.

Λύση

Τα μέτρα των συνιστωσών $\overrightarrow{F_x}$ και $\overrightarrow{F_y}$ είναι:

$$|\overrightarrow{F_y}| = |\vec{F}| \cdot \eta\mu\theta = 100 \cdot \eta\mu 50^\circ = 100 \cdot 0,766 = 76,6$$

$$|\overrightarrow{F_x}| = |\vec{F}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 100 \cdot \sigma\upsilon\nu 50^\circ = 100 \cdot 0,643 = 64,3$$



Σχ. 7.19

– Πρόσθεση περισσότερων από δύο διανυσμάτων με διαφορετική διεύθυνση

Για να προσθέσουμε μη συγγραμμικά διανύσματα, σύμφωνα με αυτά που έχουμε ήδη δει, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα της πρόσθεσης διανυσμάτων, δηλαδή να τα κάνουμε διαδοχικά και να ενώσουμε την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου. Μπορούμε όμως και να ακολουθήσουμε την ακόλουθη διαδικασία, η οποία είναι πιο ακριβής.

1) Κατασκευάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$. Η επιλογή των αξόνων είναι αυθαίρετη. Γίνεται με στόχο όσο το δυνατό περισσότερα διανύσματα να συμπίπτουν με τους άξονες.

2) Αναλύουμε όσα διανύσματα είναι εκτός των αξόνων, σε κάθετες συνιστώσες πάνω στους άξονες.

3) Βρίσκουμε τις συνισταμένες των διανυσμάτων σε κάθε άξονα, $\vec{\sigma_x}$ και $\vec{\sigma_y}$.

4) Βρίσκουμε τη συνισταμένη $\vec{\sigma_{o\lambda}}$ των διανυσμάτων $\vec{\sigma_x}$ και $\vec{\sigma_y}$, εφαρμόζοντας τους τύπους για τη συνισταμένη δύο κάθετων διανυσμάτων. Δηλαδή:

$$\left|\vec{\sigma_{o\lambda}}\right| = \sqrt{\left|\vec{\sigma_x}\right|^2 + \left|\vec{\sigma_y}\right|^2} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\left|\vec{\sigma_y}\right|}{\left|\vec{\sigma_x}\right|}$$

Παράδειγμα 7.2

Να υπολογιστεί η συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ του σχήματος 7.20, αν $|\vec{\alpha}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$ και $|\vec{c}| = 8$.

Λύση

Επιλέγουμε άξονες $x'x$ και $y'y$ τους φορείς των διανυσμάτων.

Αναλύουμε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\alpha_x}$ και $\vec{\alpha_y}$ (σχ. 7.21).

$$\left|\vec{\alpha_x}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 6 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{o} = 6 \cdot 0{,}5 = 3$$

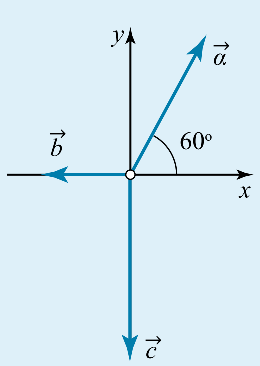
$$\left|\vec{\alpha_y}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| \cdot \eta\mu\theta = 6 \cdot \eta\mu 60^{o} = 6 \cdot 0{,}866 = 5{,}196$$

Η συνισταμένη δυνάμεων του άξονα $x'x$ έχει μέτρο: $\left|\vec{\sigma_x}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a_x}\right| = 4 - 3 = 1$ και φορά τη φορά του $\vec{b}$.

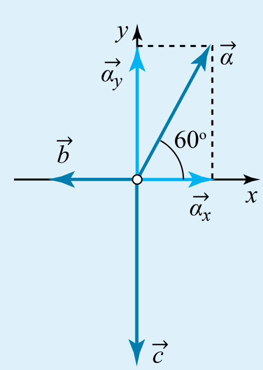
Η συνισταμένη δυνάμεων του άξονα $y'y$ έχει μέτρο: $\left|\vec{\sigma_y}\right| = \left|\vec{c}\right| - \left|\vec{a_y}\right| = 8 - 5{,}196 = 2{,}804$ και φορά τη φορά του $\vec{c}$.

Η συνισταμένη των $\vec{\sigma_x}$ και $\vec{\sigma_y}$ (σχ. 7.22) έχει μέτρο:

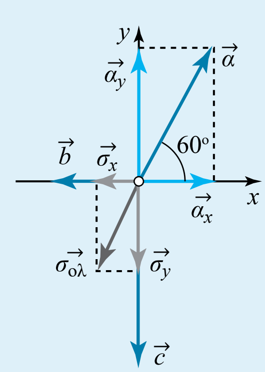
$$\left|\vec{\sigma_{o\lambda}}\right| = \sqrt{\left|\vec{\sigma_x}\right|^2 + \left|\vec{\sigma_y}\right|^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}804^2} = 2{,}977$$



Σχ. 7.20



Σχ. 7.21

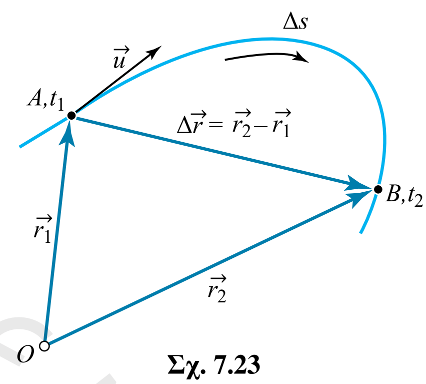


Σχ. 7.22

και διεύθυνση: $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{|\vec{\sigma_y}|}{|\vec{\sigma_x}|} = \frac{2,804}{1} = 2,804$$

Άρα $\hat{\omega} = \varepsilon\varphi^{-1}2,804 = 70,372^{o}$.

7.5 Εφαρμογές διανυσμάτων στην επίλυση προβλημάτων



Σχ. 7.23

Πριν την επίλυση προβλημάτων θα ορίσουμε κάποια σημαντικά μεγέθη της Φυσικής:

Έστω κινητό που κινείται σε κάποια τροχιά και τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση Α, ενώ μετά από χρόνο Δt, δηλαδή τη χρονική στιγμή t_2, βρίσκεται στη θέση Β (σχ. 7.23).

Μετατόπιση $\overrightarrow{\Delta r}$ ονομάζεται το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχική θέση Α ενός σώματος και πέρας την τελική θέση Β. Ισχύει:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

Όπου $\vec{r_2}, \vec{r_1}$ τα διανύσματα θέσης του σώματος στην τελική και στην αρχική θέση αντίστοιχα.

Μέση διανυσματική ταχύτητα ορίζεται το φυσικό διανυσματικό μέγεθος:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Δηλαδή, η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι ένα διάνυσμα που έχει διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και φορά της μετατόπισης και μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο πραγματοποιήθηκε η μετατόπιση.

Μέση επιτάχυνση ενός κινητού ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας $\overrightarrow{\Delta v}$ προς το χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{\alpha} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

Η διεύθυνση και η φορά της επιτάχυνσης συμπίπτουν με τη διεύθυνση και τη φορά της $\overrightarrow{\Delta v}$.

– Σύνθεση ταχυτήτων

Εάν ένα σώμα A κινείται ως προς ένα σώμα B με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\substack{A\\B}}$ και το σώμα B κινείται ως προς ένα σώμα Γ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\substack{B\\\Gamma}}$, αποδεικνύεται (από τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας) ότι το σώμα A κινείται ως προς το Γ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\substack{A\\\Gamma}}$:

$$\vec{\upsilon}_{\substack{A\\\Gamma}} = \vec{\upsilon}_{\substack{A\\B}} + \vec{\upsilon}_{\substack{B\\\Gamma}}$$

Πρόβλημα 7.1

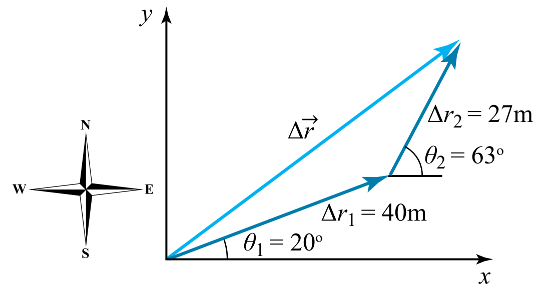
Πλοίο πλέει ευθύγραμμα με πορεία $N\ 70^{o}\ E$ και διανύει απόσταση 40 m. Στη συνέχεια, αλλάζοντας πορεία, πλέει ευθύγραμμα με πορεία $N\ 27^{o}\ E$ και διανύει απόσταση 27 m.

Να υπολογιστεί γραφικά το μέτρο της μετατόπισης $\overrightarrow{\Delta r}$ και η γωνία που σχηματίζει με τον Βορρά.

Λύση

Σχεδιάζουμε τα διαδοχικά διανύσματα, παίρνοντας κλίμακα 1 cm → 10 m (σχ. 7.24)

Ενώνουμε την αρχή του πρώτου με το πέρας του δεύτερου. Με τον χάρακα μετράμε το μήκος του $\overrightarrow{\Delta r}$. Είναι 6,5 cm. Επομένως, σύμφωνα με την κλίμακα που πήραμε, το μέτρο της μετατόπισης είναι 65 m. Επίσης με το μοιρογνωμόνιο μετράμε τη γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{\Delta r}$ με τον Βορρά και είναι 53^o.



Σχ. 7.24

Πρόβλημα 7.2

Ένα πλοίο αναχωρεί από το λιμάνι και πλέει 20 ν.μ. προς τον Βορρά. Στη συνέχεια κατευθύνεται 60^o νοτιοανατολικά για 40 ν.μ. Βρείτε την τελική του μετατόπιση από το λιμάνι.

Λύση

Η τελική μετατόπιση είναι η συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{r_1}$ και $\vec{r_2}$ του σχήματος 7.25.

Αναλύουμε το διάνυσμα $\vec{r_2}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες:

$$\left|\vec{r_{2x}}\right| = \left|\vec{r_2}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 40 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o = 20$$

$$\left|\vec{r_{2y}}\right| = \left|\vec{r_2}\right| \cdot \eta\mu\theta = 40 \cdot \eta\mu 60^o = 34,64$$

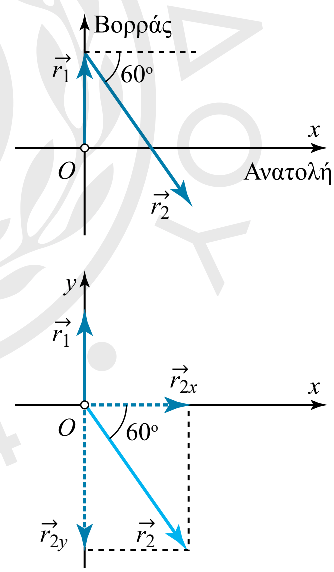
$$\left|\vec{r_y}\right| = \left|\vec{r_{2y}}\right| - \left|\vec{r_1}\right| = 34,64 - 20 = 14,64$$

Η συνισταμένη των $\vec{r_{2x}}$ και $\vec{r_y}$ έχει μέτρο:

$$\left|\vec{r_{o\lambda}}\right| = \sqrt{\left|\vec{r_{2x}}\right|^2 + \left|\vec{r_y}\right|^2} = \sqrt{20^2 + 14,64^2} = 24,79$$

Και η διεύθυνση:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\left|\vec{r_y}\right|}{\left|\vec{r_{2x}}\right|} = \frac{14,64}{20} = 0,732$$



Σχ. 7.25

Πρόβλημα 7.3

Πλοίο κινείται με ταχύτητα $v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o} = 14$ knots και πορεία 0^o (προς Βορρά) και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}}^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha} = 6$ knots και κατεύθυνση προς Δύση. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} = \overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}}^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}} + \overrightarrow{v_{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} \qquad \acute{\eta} \qquad \overrightarrow{v_{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} = \overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} - \overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}}^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}}$$

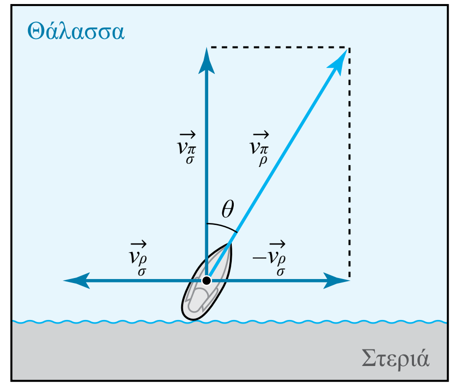
Η αντισταθμιστική ταχύτητα του πλοίου είναι το μέτρο του $\vec{v}_{\varrho}^{\pi}$ του σχήματος 7.26:

$$\left|\vec{v}_{\varrho}^{\pi}\right| = \sqrt{\left|\vec{v}_{\sigma}^{\pi}\right|^2 + \left|-\vec{v}_{\sigma}^{\varrho}\right|^2} = \sqrt{14^2 + 6^2} = 15{,}23 \text{ knots}$$

Για τη γωνία από το ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\left|\vec{v}_{\sigma}^{\varrho}\right|}{\left|\vec{v}_{\sigma}^{\pi}\right|} = \frac{6}{14} = 0{,}429 \cdot$$

Άρα $\theta = \varepsilon\varphi^{-1} 0{,}429 = 23{,}22^{\circ}$.



Σχ. 7.26

Ασκήσεις

1. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων.

2. Να υπολογιστεί γραφικά το μέτρο της συνισταμένης δύναμης του σχήματος 7.27 και η γωνία της με την οριζόντια διεύθυνση.

3. Σε ένα σώμα ασκούνται οι ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ και οι αντίρροπες με αυτές δυνάμεις $\vec{F_3}$ και $\vec{F_4}$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι $|\vec{F_1}| = 5N$, $|\vec{F_2}| = 7N$, $|\vec{F_3}| = 3N$ και $|\vec{F_4}| = 4N$. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη τους.

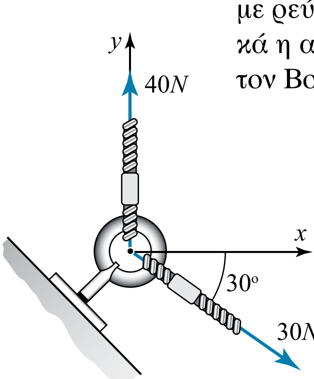
4. Ένα σώμα δέχεται τις δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν μέτρα $|\vec{F_1}| = 12N$ και $|\vec{F_2}| = 5N$. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη τους.

5. Στο σώμα Σ του σχήματος 7.28 ασκείται μια δύναμη με μέτρο $|\vec{F_1}| = 5N$ που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^{\circ}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Να αναλυθεί σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη.

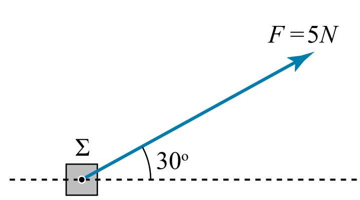
6. Να υπολογιστεί η συνισταμένη των δυνάμεων του σχήματος 7.29, αν $|\vec{F_1}| = 10N$, $|\vec{F_2}| = 5N$, $|\vec{F_3}| = 6N$, $\varphi = 60^{\circ}$ και $\theta = 30^{\circ}$.

7. Πλοίο κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{\text{στεριά}}^{\text{πλοίο}} = 12$ knots και πορεία προς Βορρά και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $\upsilon_{\text{στεριά}}^{\text{ρεύμα}} = 4$ knots και κατεύθυνση προς Νότο. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).

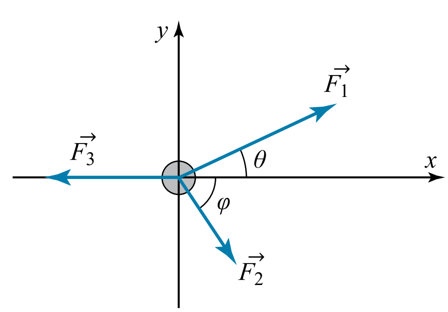
8. Πλοίο κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{\text{στεριά}}^{\text{πλοίο}} = 12$ knots και πορεία $N60^{\circ}E$ και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $\upsilon_{\text{στεριά}}^{\text{ρεύμα}} = 10$ knots και κατεύθυνση προς Νότο. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).



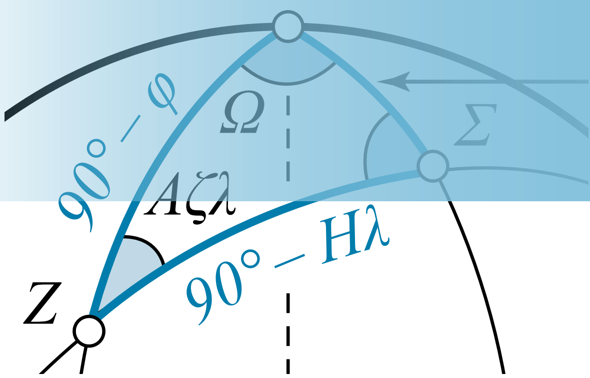
Σχ. 7.27



Σχ. 7.28



Σχ. 7.29



κεφάλαιο 8

Σφαιρικά τρίγωνα

8.1 Σφαίρα

Σφαίρα ονομάζεται το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο O. Το σημείο O είναι το κέντρο της σφαίρας και η σταθερή απόσταση R των σημείων από το O λέγεται ***ακτίνα***. Η σφαίρα συμβολίζεται με (O, R).

Έστω ότι μια ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (O, R) τέμνει την σφαίρα στα σημεία A και A΄. Τα σημεία A και A΄ λέγονται ***αντιδιαμετρικά σημεία***. Το ευθύγραμμο τμήμα AA΄ ονομάζεται ***διάμετρος*** της σφαίρας. Κάθε διάμετρος της σφαίρας έχει μήκος $2R$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ που ενώνει τα 2 σημεία Β και Γ της σφαίρας ονομάζεται ***χορδή*** (σχ. 8.1).

8.1.1 Κύκλοι σφαίρας

Μέγιστος κύκλος σφαίρας ονομάζεται ένας κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της. Ένας μέγιστος κύκλος έχει κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα την ακτίνα της σφαίρας (σχ. 8.2).

Μικρός κύκλος σφαίρας ονομάζεται κάθε κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που δεν διέρχεται από το κέντρο της (σχ. 8.2).

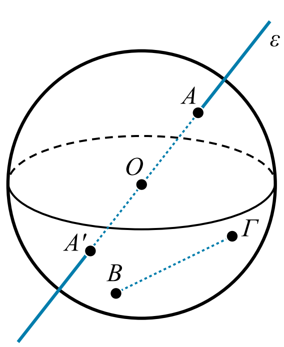
Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία, μιας σφαίρας περνούν άπειροι μικροί κύκλοι, αλλά μόνο ένας μέγιστος (σχ. 8.3). Αν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, περνούν άπειροι μέγιστοι κύκλοι. Φανταστείτε τους δύο πόλους της υδρογείου από τους οποίους διέρχονται άπειροι μεσημβρινοί. Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων της σφαίρας είναι το τόξο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται απ’ αυτά.

Απόσταση δύο σημείων A και B πάνω στη σφαίρα ονομάζεται το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από αυτά τα σημεία. Η απόσταση αυτή είναι ίση με την επίκεντρη γωνία AOB (σχ. 8.3).

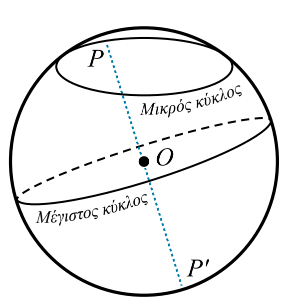
8.1.2 Άξονας και πόλοι κύκλου

Η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετη στο επίπεδο ενός κύκλου ονομάζεται ***άξονας του κύκλου***.

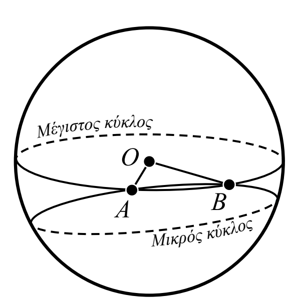
Τα σημεία που τέμνει ο άξονας ενός κύκλου την σφαίρα ονομάζονται ***πόλοι*** του κύκλου.



Σχ. 8.1



Σχ. 8.2



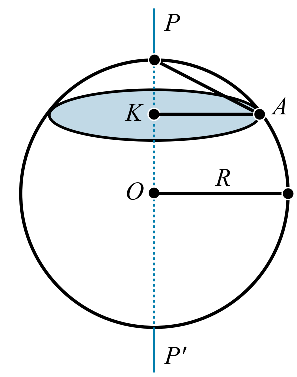
Σχ. 8.3

΄Ετσι, στο σχήμα 8.4 τα σημεία P και P' είναι πόλοι του κύκλου (Κ, ΚΑ) και η ευθεία PP' είναι ο άξονάς του.

Ο μέγιστος κύκλος που είναι κάθετος στη διάμετρο PP', ονομάζεται ***ισημερινός κύκλος*** του σημείου P.

Η απόσταση κάθε σημείου ενός κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου ονομάζεται ***πολική απόσταση*** του κύκλου.

Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει τον πόλο του κύκλου με ένα τυχαίο σημείο του κύκλου ονομάζεται ***σφαιρική ακτίνα*** του κύκλου. Στο σχήμα 8.4, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος PA είναι η πολική απόσταση του κύκλου (Κ, ΚΑ) και το τόξο $\widehat{PA}$ είναι η σφαιρική ακτίνα του.

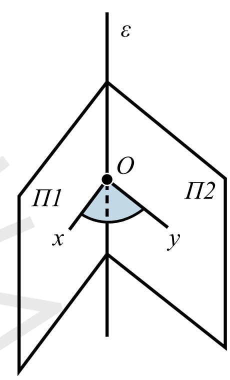


Σχ. 8.4

8.1.3 Γωνίες στον χώρο

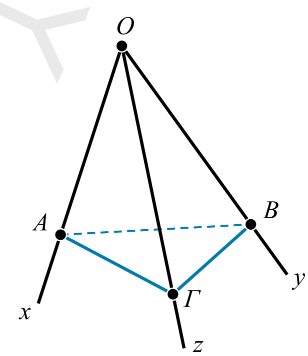
Δίεδρη γωνία ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα, Π1 και Π2, που τέμνονται σε ευθεία *ε*, και τη συμβολίζουμε με ε(Π1, Π2) (σχ. 8.5). Τα ημιεπίπεδα Π1 και Π2 λέγονται ***έδρες*** της δίεδρης γωνίας και η κοινή ευθεία *ε* λέγεται ***ακμή*** της δίεδρης γωνίας.

Ορίζουμε ως ***μέτρο*** της δίεδρης γωνίας ε(Π1, Π2) το μέτρο της επίπεδης γωνίας $x\hat{O}y$, όπου Ox, Oy οι ημιευθείες που περιέχονται στα επίπεδα Π1 και Π2 αντίστοιχα και είναι κάθετες στην ακμή της δίεδρης γωνίας στο σημείο Ο.



Σχ. 8.5

Τρίεδρη γωνία λέγεται το σχήμα που καθορίζεται από τρεις ημιευθείες Ox, Oy και Oz, με κοινή αρχή Ο, οι οποίες δεν είναι συνεπίπεδες. Το σημείο Ο λέγεται ***κορυφή*** της τρίεδρης γωνίας, και οι ημιευθείες Ox, Oy και Oz λέγονται ***ακμές*** της τρίεδρης γωνίας. Αν Α, Β και Γ είναι τρία σημεία στις ακμές της τρίεδρης γωνίας, οι γωνίες $\mathrm{A\hat{O}B}$, $\mathrm{B\hat{O}\Gamma}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{O}A}$ λέγονται ***έδρες***. Η τρίεδρη γωνία του σχήματος 8.6 συμβολίζεται με Ο.ΑΒΓ.



Σχ. 8.6

8.1.4 Σφαιρική γωνία

Σφαιρική γωνία ονομάζεται το μέρος της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ δύο τεμνόμενων τόξων τα οποία ανήκουν σε μέγιστους κύκλους. Τα τόξα αυτά ονομάζονται ***πλευρές*** της γωνίας, και το σημείο τομής τους ονομάζεται ***κορυφή*** της γωνίας [σχ. 8.7(α)]. Η σφαιρική γωνία του σχήματος 8.7 έχει κορυφή το σημείο Α και πλευρές τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$. Οι μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και στο αντιδιαμετρικό σημείο του Α, το Α΄ [σχ. 8.7(β)].

Ορίζουμε ως μέτρο της σφαιρικής γωνίας με κορυφή το σημείο Α, το μέτρο της επίπεδης γωνίας $x\widehat{A}y$, όπου Ax, Ay οι εφαπτομένες των πλευρών της γωνίας στην κορυφή A [σχ. 8.7(γ)].

Προφανώς, εξ ορισμού, όπου και να είναι οι θέσεις των σημείων Β και Γ πάνω στους δύο μέγιστους κύκλους, οι αντίστοιχες σφαιρικές γωνίες που σχηματίζονται έχουν όλες το ίδιο μέτρο.

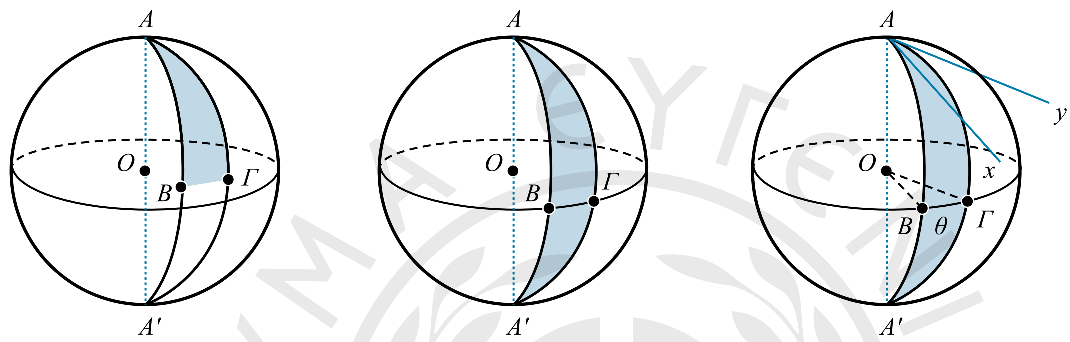
– Ιδιότητες σφαιρικής γωνίας

1) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο της δίεδρης γωνίας την οποία σχηματίζουν τα επίπεδα που περιέχουν τις πλευρές της. Στο σχήμα 8.7 η δίεδρη γωνία έχει ακμή τη διάμετρο AA' και έδρες τα δύο ημιεπίπεδα που περιέχουν τα τόξα $\overset{\frown}{ABA'}$ και $\overset{\frown}{AB\Gamma'}$ αντίστοιχα.

2) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου του ισημερινού κύκλου της κορυφής, το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών της. Το μέτρο αυτού του τόξου είναι ίσο με την επίκεντρη γωνία του ισημερινού κύκλου, η οποία βαίνει σε αυτό [σχ. 8.7(γ)].

Επομένως ισχύει:

$$\widehat{xAy} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \widehat{BO\Gamma} = \theta$$



(α) (β) (γ)

Σχ. 8.7

8.2 Σφαιρικό τρίγωνο

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των τόξων τριων μέγιστων κύκλων μικρότερων του ημικυκλίου, τα οποία δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Στο σχήμα 8.8 τρεις μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και σχηματίζεται το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία τομής *Α, Β, Γ* των μέγιστων κύκλων ονομάζονται ***κορυφές του σφαιρικού τριγώνου***.

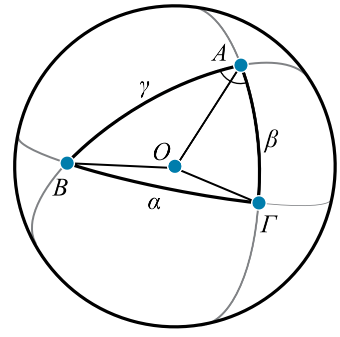
Αν ενώσουμε το κέντρο Ο της σφαίρας με τις κορυφές *Α, Β, Γ,* σχηματίζεται η τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ. Λέμε ότι στην τρίεδρη αυτή γωνία αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ.

– Κύρια στοιχεία σφαιρικού τριγώνου

1) Τα τόξα των τριών μέγιστων κύκλων ονομάζονται ***πλευρές*** του σφαιρικού τριγώνου. Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου του σχήματος 8.8 είναι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$ και συμβολίζονται και με μικρά γράμματα ***γ***, ***α***, ***β*** αντίστοιχα. Κάθε πλευρά είναι τόξο μικρότερο του ημικυκλίου, δηλαδή είναι μικρότερη από 180º. Το ***μέτρο της πλευράς*** είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε αυτό. Δηλαδή:

$$B\hat{O}\Gamma = \alpha \quad A\hat{O}\Gamma = \beta \quad A\hat{O}B = \gamma$$

2) Οι γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ονομάζονται ***γωνίες του σφαιρικού τριγώνου***, συμβολίζονται με ***Α***, ***Β***, ***Γ*** και έχουν το ίδιο μέτρο με τις δίεδρες γωνίες *Α, Β, Γ* αντίστοιχα. Ισοδύναμα, οι γωνίες *Α, Β* και *Γ* του σφαιρικού τριγώνου είναι οι επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μέγιστων κύκλων σε κάθε



Σχ. 8.8

κορυφή του σφαιρικού τριγώνου. Θυμηθείτε το σχήμα 8.7(γ). Προφανώς κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180^o.

Οι 3 γωνίες και οι 3 πλευρές ονομάζονται ***κύρια στοιχεία*** του σφαιρικού τριγώνου, και μετριούνται ή όλα σε μοίρες ή όλα σε rad. Το σφαιρικό τρίγωνο έχει πολλές εφαρμογές στη Ναυτιλία, με κυριότερες το τρίγωνο θέσης και το τρίγωνο ορθοδρομίας που θα δούμε παρακάτω. Οι Πλοίαρχοι στις εφαρμογές του σφαιρικού τριγώνου, δουλεύουν αποκλειστικά με μοίρες, γι' αυτό και σε όλα τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης των γωνιών και των πλευρών τη μοίρα και τις υποδιαιρέσεις της.

Παρατηρήσεις

1) Ένα οποιοδήποτε τρίγωνο στην επιφάνεια μιας σφαίρας δεν είναι απαραίτητα σφαιρικό τριγωνο. Σύμφωνα με τον ορισμό, οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου είναι τόξα μέγιστων κύκλων. Αν μια πλευρά του τριγώνου είναι τόξο μικρού κύκλου, τότε δεν πρόκειται για σφαιρικό τρίγωνο.

2) Δεν πρέπει να συγχέουμε το μέτρο της πλευράς με το μήκος της πλευράς. Στο σφαιρικό τρίγωνο, όταν ζητείται να υπολογιστεί μια πλευρά, υπολογίζουμε το μέτρο της σε μοίρες, δηλαδή το γωνιακό μέτρο του αντίστοιχου μέγιστου κύκλου, και όχι το μήκος της (όπως κάνουμε στο επίπεδο τρίγωνο).

8.2.1 Βασικές ιδιότητες σφαιρικού τριγώνου

Ας θεωρήσουμε το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 8.8.

1) Καθε πλευρά του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180^o (αν είναι μετρημένη σε μοίρες).

2) Καθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180^o (αν είναι μετρημένη σε μοίρες).

3) Αν α, β, γ οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ σε μοίρες, τότε:

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma < 360^o}$$

4) Αν Α, Β, Γ οι γωνίες σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, τότε σε μοίρες θα είναι:

$$\mathbf{180^o} < \boldsymbol{A + B + \Gamma} < \mathbf{540^o}$$

5) Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες. Συνεπώς, απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του και αντίστροφα.

6) Κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

7) Κάθε γωνία αυξημένη κατά 180^o είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{A + 180^o > B + \Gamma} \ \textbf{(κυκλικά)}$$

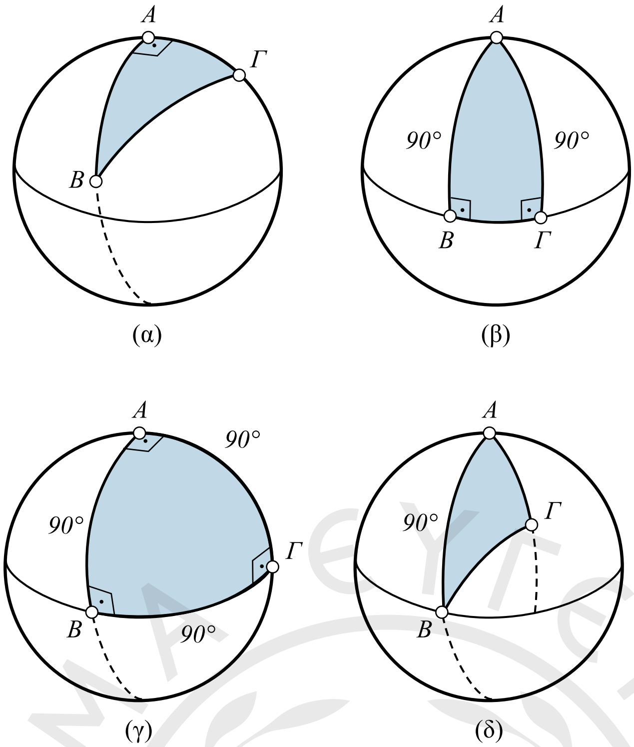
8) Δύο πλευρές σφαιρικού τριγώνου είναι ίσες αν και μόνον αν οι απέναντι προς αυτές τις πλευρές γωνίες είναι ίσες.

8.2.2 Είδη σφαιρικών τριγώνων

Κάθε σφαιρικό τρίγωνο θα ανήκει σε μία ή περισσότερες από τις παρακάτω κατηγορίες ανάλογα με το αν οι γωνίες ή οι πλευρές του έχουν μέτρο 90^o ή αν είναι ίσες μεταξύ τους:

1) ***Ορθογώνιο:*** Αν μία γωνία του είναι ίση με 90^o [σχ. 8.9(α)].

2) ***Δισορθογώνιο:*** Αν δύο γωνίες του είναι ίσες με 90^o [σχ. 8.9(β)].



Σχ. 8.9

3) ***Τρισορθογώνιο:*** Αν και οι τρεις γωνίες του είναι ίσες με 90° [σχ. 8.9(γ)].
4) ***Ορθόπλευρο:*** Αν μία πλευρά του έχει μέτρο 90° [σχ. 8.9(δ)].
5) ***Δισορθόπλευρο:*** Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο 90° [σχ. 8.9(β)].
6) ***Τρισορθόπλευρο:*** Αν και οι τρεις πλευρές του έχουν μέτρο 90° [σχ. 8.9(γ)].
7) ***Ισοσκελές:*** Αν δύο πλευρές του είναι ίσες [σχ. 8.9(β)].
8) ***Ισόπλευρο:*** Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες [σχ. 8.9(γ)].
9) ***Σκαληνό:*** Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
10) ***Τυχαίο (ή κοινό):*** Δεν έχει αναγκαστικά γωνία ή πλευρά ίση με 90°.

8.2.3 Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα

Έστω τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με γωνίες *Α, Β, Γ* και πλευρές *α, β, γ*. Στο *ΑΒΓ* αποδεικνύονται οι παρακάτω θεμελιώδεις σχέσεις:

1) ***Νόμος Συνημιτόνων για τις Πλευρές (Θεμελιώδεις σχέσεις πρώτου είδους)***

$$συν\,α = συν\,β \cdot συν\,γ + ημ\,β \cdot ημ\,γ \cdot συν\,Α$$
$$συν\,β = συν\,α \cdot συν\,γ + ημ\,α \cdot ημ\,γ \cdot συν\,Β$$
$$συν\,γ = συν\,α \cdot συν\,β + ημ\,α \cdot ημ\,β \cdot συν\,Γ$$

2) ***Νόμος Συνημιτόνων για τις Γωνίες (Πολικοί τύποι των θεμελιωδών σχέσεων)***

$$συν\,Α = -συν\,Β \cdot συν\,Γ + ημ\,Β \cdot ημ\,Γ \cdot συν\,α$$
$$συν\,Β = -συν\,Α \cdot συν\,Γ + ημ\,Α \cdot ημ\,Γ \cdot συν\,β$$
$$συν\,Γ = -συν\,Α \cdot συν\,Γ + ημ\,Α \cdot ημ\,Β \cdot συν\,γ$$

3) ***Νόμος Ημιτόνων (Θεμελιώδεις σχέσεις δευτέρου είδους)***

$$\frac{ημ\,Α}{ημ\,α} = \frac{ημ\,Β}{ημ\,β} = \frac{ημ\,Γ}{ημ\,γ}$$

4) ***Αναλογικοί τύποι Gauss – Delambre***

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta+\gamma}{2}}=\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\dfrac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\eta\mu\dfrac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta-\gamma}{2}}=\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$$

5) ***Αναλογικοί τύποι του Napier***

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\dfrac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\eta\mu\dfrac{\beta+\gamma}{2}}=\sigma\varphi\frac{B+\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta+\gamma}{2}}$$

6) ***Τύποι των τεσσάρων στοιχείων***

$$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi A-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi B$$
$$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi A-\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma$$
$$\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu A=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi B-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi A$$
$$\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi B-\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma$$
$$\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu A=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi A$$
$$\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi B$$

7) ***Τύποι ημιπαρημιτόνων***

α) ***Γωνιών:***

$$\eta\mu\pi\varrho A=\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$$
$$\eta\mu\pi\varrho B=\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$$
$$\eta\mu\pi\varrho\Gamma=\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha$$

β) ***Πλευρών:***

$$\eta\mu\pi\varrho\alpha=\eta\mu\pi\varrho(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\pi\varrho A$$
$$\eta\mu\pi\varrho\beta=\eta\mu\pi\varrho(\gamma-\alpha)+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\pi\varrho B$$
$$\eta\mu\pi\varrho\gamma=\eta\mu\pi\varrho(\alpha-\beta)+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\pi\varrho\Gamma$$

όπου το $\eta\mu\pi\varrho\ \omega$ είναι το ***ημιπαρημίτονο*** του τόξου ω, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$\eta\mu\pi\varrho\ \omega=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}\quad\kappa\alpha\iota\quad\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

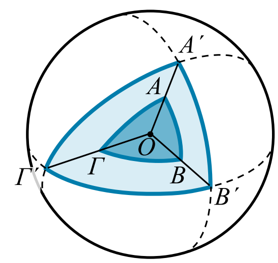
8.2.4 Πολικό τρίγωνο

΄Εστω σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 8.10). Κάθε πλευρά του ανήκει σε μέγιστο κύκλο, στον οποίο αντιστοιχούν δύο πόλοι. Αν Α΄ είναι ο πόλος του μέγιστου κύκλου ΒΓ που είναι πλησιέστερος στην κορυφή Α του σφαιρικού τριγώνου, Β΄ ο πόλος του μέγιστου κύκλου ΑΓ που είναι πλησιεστερος στην κορυφή Β και Γ΄ ο πόλος του μέγιστου κύκλου ΑΒ που είναι πλησιεστερος στην κορυφή Γ, το σφαιρικό τρίγωνο Α΄ Β΄ Γ΄ ονομάζεται ***πολικό τρίγωνο*** του τριγώνου ΑΒΓ. Οι πλευρές του πολικού τριγώνου συμβολίζονται με α΄, β΄, γ΄.

Αποδεικνύεται ότι αν Α΄ Β΄ Γ΄ είναι το πολικό τρίγωνο του ΑΒΓ, τότε και το ΑΒΓ είναι το πολικό τρίγωνο του Α΄ Β΄ Γ΄.

Ιδιότητα: οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού τριγώνου και αντίστροφα:

$$A + \alpha' = B + \beta' = \Gamma + \gamma' = 180^{o}$$
$$A' + \alpha = B' + \beta = \Gamma' + \gamma = 180^{o}$$



Σχ. 8.10

8.3 Επίλυση ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν δέκα βασικοί τύποι, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου, αν γνωρίζουμε δύο στοιχεία του πλην της ορθής γωνίας. Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με Α = 90°. Οι σχέσεις που ακολουθούν, προκύπτουν από τον Νόμο Συνημιτόνων για τις Πλευρές, τον Νόμο Συνημιτόνων για τις Γωνίες και τον Νόμο Ημιτόνων, της παραγράφου 8.2.3, αν θέσουμε $\eta\mu A = \eta\mu 90^{o} = 1$ και $\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu 90^{o} = 0$:

1) (α) $\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$
2) (α) $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma$
3) (α) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$
4) (α) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B$
5) (α) $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma$

1) (β) $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$
2) (β) $\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi B$
3) (β) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma$
4) (β) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha$
5) (β) $\sigma\upsilon\nu B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha$

Ενδεικτικά, θα αποδείξουμε τις σχέσεις 1(α) και 1(β):

Στον Νόμο Ημιτόνων, θέτουμε $\eta\mu A = \eta\mu 90^{o} = 1$, οπότε έχουμε για την 1(α):

$$\frac{\eta\mu\, A}{\eta\mu\, \alpha} = \frac{\eta\mu\, B}{\eta\mu\, \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu\, \alpha} = \frac{\eta\mu\, B}{\eta\mu\, \beta} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$$

Για την 1(β) στον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες θέτουμε $\sigma\upsilon\nu A = 0$ και $\eta\mu A = 1$, οπότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\, \Gamma = -\sigma\upsilon\nu\, A \cdot \sigma\upsilon\nu\, B + \eta\mu\, A \cdot \eta\mu\, B \cdot \sigma\upsilon\nu\, \gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\, \Gamma = \eta\mu\, B \cdot \sigma\upsilon\nu\, \gamma \qquad (1)$$

Από τον Νόμο Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\, B}{\eta\mu\, \beta} = \frac{\eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, \gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\, B = \eta\mu\beta \cdot \frac{\eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, \gamma} \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu\, \Gamma = \eta\mu\beta \cdot \frac{\eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, \gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\, \gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\eta\mu\, \gamma}{\sigma\upsilon\nu\, \gamma} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\, \Gamma}{\eta\mu\, \Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$$

8.3.1 Κανόνες Napier

Επειδή η απομνημόνευση των δέκα παραπάνω τύπων των ορθογώνιων σφαιρικών τριγώνων είναι δύσκολη, ο Napier επινόησε ένα μνημονικό τέχνασμα, με το οποίο μπορούμε να βρίσκουμε οποιονδήποτε από αυτούς και μάλιστα εκείνον ακριβώς που μας χρειάζεται σε κάθε συγκεκριμένη επίλυση. Το τέχνασμα αυτό αποτελείται από δύο κανόνες, οι οποίοι ονομάζονται Κανόνες του Napier. Αρχικά, για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του Napier, πρέπει να σχηματίσουμε ένα «νέο» ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο θα προκύψει από το αρχικό, αν στη θέση της υποτείνουσας και των δύο γωνιών εκτός της ορθής, βάλουμε τα συμπληρωματικά τους στοιχεία.

Στην διάταξη του σχήματος 8.11 κάθε στοιχείο έχει δύο προσκείμενα και δύο αντικείμενα στοιχεία, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την ορθή γωνία Α.

1) Για το στοιχείο 90^o – Γ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα 90^o – α και β και τα αντικείμενα τα 90^o – Β και γ.

2) Για το στοιχείο γ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα 90^o – Β και β (αφού η γωνία Α δεν λαμβάνεται υπόψη) και τα αντικείμενα τα 90^o – α και 90^o – Γ.

1^{ος} κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκείμενων στοιχείων του.

2^{ος} κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των συνημιτόνων των αντικειμένων στοιχείων του.

Για παράδειγμα για το στοιχείο ***β:***

1^{ος} Νόμος: $ημβ = εφγ \cdot εφ(90^o - Γ) \Leftrightarrow ημβ = εφγ \cdot σφΓ$

2^{ος} Νόμος: $ημβ = συν(90^o - α) \cdot συν(90 \cdot B) \Leftrightarrow ημβ = ημα \cdot ημB$

Για παράδειγμα για το στοιχείο ***90^o – B:***

1^{ος} Νόμος: $ημ(90^o - B) = εφγ \cdot εφ(90^o - α) \Leftrightarrow συνB = εφγ \cdot σφα$

2^{ος} Νόμος: $ημ(90^o - \mathrm{B}) = συν(90^o - \mathrm{Γ}) \cdot συνβ \Leftrightarrow συνB = ημΓ \cdot συνβ$

Σχ. 8.11

8.3.2 Θεωρήματα τεταρτημορίων

Η γνώση των κανόνων Napier που μας δίνουν την δυνατότητα να παράξουμε τις 3 εξισώσεις με τα 3 άγνωστα στοιχεία του τριγώνου, δεν είναι αρκετή για να επιλύσουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο. Στην επίλυση ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, συναντάμε δυσκολίες που δεν τις έχουμε στο επίπεδο ορθογώνιο. Να επισημανθεί ότι στο σφαιρικό ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα δεν είναι πάντα η μεγαλύτερη πλευρά, και οι γωνίες που είναι διάφορες της ορθής δεν είναι απαραιτήτως οξείες. Έτσι, αν από τους παραπάνω τύπους υπολογιστεί το ημίτονο ενός άγνωστου στοιχείου, π.χ. $ημB = 0{,}5$, υπάρχουν δύο πιθανές γωνίες από 0^o έως 180^o: $B = 30^o$ ή $B = 180^o - 30^o = 150^o$. Τα παρακάτω θεωρήματα μας λύνουν το πρόβλημα της επιλογής μεταξύ των δύο αυτών γωνιών.

1^o Θεώρημα: Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, κάθε γωνία (εκτός της ορθής Α) και η απέναντί της πλευρά ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (δηλ. $\mathrm{B} < 90^o \Leftrightarrow β < 90^o$ και $B > 90^o \Leftrightarrow β > 90^o$).

2^o Θεώρημα: Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, μια πλευρά που είναι απέναντι από οξεία γωνία είναι μικρότερη ή ίση της γωνίας, ενώ μια πλευρά που είναι απέναντι από αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη ή ίση της γωνίας.

3ο Θεώρημα: Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ:

1) Αν η υποτείνουσα α έχει πέρας στο 1ο τεταρτημόριο (δηλ. $\alpha < 90^{\circ}$), τότε οι πλευρές β, γ έχουν πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο (και οι δύο στο 1ο ή και οι δύο στο 2ο) και αντίστροφα.

2) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρας στο 2ο τεταρτημόριο (δηλ. $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$), τότε οι πλευρές β και γ θα έχουν πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

8.3.3 Μεθοδολογία επίλυσης ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου

Βήμα 1ο: Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο κυκλώνοντας τα γνωστά στοιχεία.

Βήμα 2ο: Εφαρμόζουμε τους κανόνες Napier, κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να πάρουμε 3 σχέσεις, οι οποίες να έχουν μόνο ένα άγνωστο στοιχείο. Αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχείο που υπολογίστηκε για τον υπολογισμό άλλου στοιχείου.

Βήμα 3ο: Χρησιμοποιούμε τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων (όπου χρειάζεται).

Βήμα 4ο: Γράφουμε τον τύπο ελέγχου: εφαρμόζουμε τον κανόνα Napier που συνδέει τα τρία άγνωστα στοιχεία.

Παράδειγμα 8.1

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{\circ}$, $\alpha = 75^{\circ}$ και $\beta = 46^{\circ}$.

Λύση

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, που στη θέση τής υποτείνουσας και των δυο γωνιών έχει τα συμπληρωματικά τους στοιχεία (σχ. 8.12).

Εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα Napier, έτσι ώστε η σχέση που θα προκύψει να περιλαμβάνει τα εξής 3 στοιχεία: το ζητούμενο και τα δύο αρχικά δεδομένα. Επομένως:

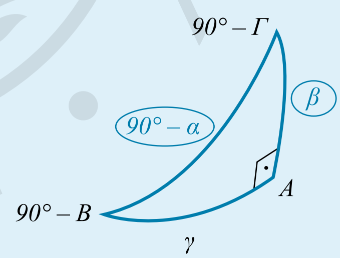
Υπολογισμός της Γ:

$$\eta\mu(90^{\circ} - \Gamma) = \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \alpha) \cdot \varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi\,\beta}{\varepsilon\varphi\,\alpha} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi\,46^{\circ}}{\varepsilon\varphi\,75^{\circ}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{1{,}03553}{3{,}73205} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = 0{,}27747$$

Άρα $\Gamma = \sigma\upsilon\nu^{-1}\, 0{,}27747 = 73{,}89074$



Σχ. 8.12

Υπολογισμός της Β:

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 46^{\circ} = \eta\mu 75^{\circ} \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\eta\mu\,46^{\circ}}{\eta\mu\,75^{\circ}} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{0{,}71934}{0{,}96593} = 0{,}74471$$

Άρα $B = \eta\mu^{-1}\, 0{,}74471 = 48{,}1342^{\circ}$ ή $B = 180^{\circ} - 48{,}1342^{\circ} = 131{,}8658^{\circ}$

Έχουμε δύο πιθανές τιμές για την γωνία Β. Σύμφωνα με το 1ο Θεώρημα τεταρτημορίων, επειδή $\beta = 46^{\circ} < 90^{\circ}$, θα πρέπει και $B < 90^{\circ}$. Άρα η τιμή $131{,}8658^{\circ}$ απορρίπτεται και επομένως $B = 48{,}1342^{\circ}$.

Υπολογισμός της γ:

$$\eta\mu(90^{\circ} - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 75^{\circ} = \sigma\upsilon\nu 46^{\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\,75^{\circ}}{\sigma\upsilon\nu\,46^{\circ}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{0{,}25882}{0{,}69466} = 0{,}37259$$

Άρα $\gamma = \sigma\upsilon\nu^{-1}\, 0{,}37259 = 68{,}12456^{\circ}$

Τύπος ελέγχου: $\eta\mu(90^{\circ} - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - B) \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$

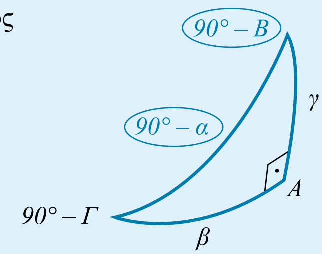
$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 73{,}89074 = \eta\mu 48{,}1342^{\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu 68{,}12456^{\circ} \Leftrightarrow 0{,}27747 = 0{,}74471 \cdot 0{,}37259$ που ισχύει.

Παράδειγμα 8.2

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{\circ}$, $\alpha = 62^{\circ}$ και $B = 125^{\circ}$.

Λύση

Με εφαρμογή των Κανόνων Napier στη διάταξη του σχήματος 8.13 έχουμε:



Σχ. 8.13

Υπολογισμός της γ:

$\eta\mu(90^{\circ} - B) = \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \alpha) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\varepsilon\varphi\, \gamma}{\varepsilon\varphi\, \alpha} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 125^{\circ} = \dfrac{\varepsilon\varphi\, \gamma}{\varepsilon\varphi\, 62^{\circ}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \sigma\upsilon\nu 125^{\circ} \cdot \varepsilon\varphi 62^{\circ}$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = (-0{,}57358) \cdot 1{,}88073 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = -1{,}07875$

$\varepsilon\varphi^{-1}\, 1{,}07875 = 47{,}16952^{\circ}$. Άρα $\gamma = 180^{\circ} - 47{,}16952^{\circ} = 132{,}83048^{\circ}$

Υπολογισμός της β:

$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu 62^{\circ} \cdot \eta\mu 125^{\circ} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0{,}88294 \cdot 0{,}81915 \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0{,}72326$

Άρα $\beta = \eta\mu^{-1}\, 0{,}72326 = 46{,}32429^{\circ}$ ή $\beta = 180^{\circ} - 46{,}32429^{\circ} = 133{,}67571^{\circ}$

Σύμφωνα με το 1ο Θεώρημα Τεταρτημορίων, επειδή $B = 125^{\circ} > 90^{\circ}$, θα πρέπει και $\beta > 90^{\circ}$. Άρα η λύση $\beta = 46{,}32429^{\circ}$ απορρίπτεται. Επομένως: $\beta = 133{,}67571^{\circ}$

Υπολογισμός της Γ:

$\eta\mu(90^{\circ} - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi(90^{\circ} - B) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\, \Gamma} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\, B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi\, B} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{1}{0{,}46947 \cdot (-1{,}42815)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = -1{,}49148$

$\varepsilon\varphi^{-1}\, 1{,}49148 = 56{,}15914^{\circ}$. Άρα $\Gamma = 180^{\circ} - 56{,}15914 = 123{,}84086^{\circ}$

Τύπος ελέγχου: $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \dfrac{\varepsilon\varphi\, \gamma}{\varepsilon\varphi\, \Gamma} \Leftrightarrow 0{,}72326 = \dfrac{-1{,}07875}{-1{,}49418}$ που ισχύει.

Παρατήρηση

Μικρή απόκλιση στο 5ο δεκαδικό ψηφίο δικαιολογείται λόγω των στρογγυλοποιήσεων που έχουν γίνει.

Παράδειγμα 8.3

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{\circ}$, $\gamma = 40^{\circ}$ και $\Gamma = 75^{\circ}$.

Λύση:

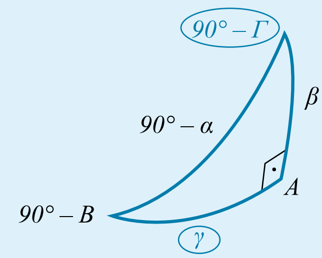
Με εφαρμογή των Κανόνων Napier στη διάταξη του σχήματος 8.14 έχουμε:

Υπολογισμός της β:

$$\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90^o - \Gamma)\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \sigma\varphi\Gamma\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\varepsilon\varphi\,\gamma}{\varepsilon\varphi\,\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{0{,}8391}{3{,}73205} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0{,}22484$$

Άρα $\beta = \eta\mu^{-1}\,0{,}22484 = 12{,}99347$ ή $\beta = 180^o - 13{,}003^o = 167{,}00653^o$



Σχ. 8.14

Επειδή δεν γνωρίζουμε την απέναντι γωνία (Γ), δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία από τις τιμές με βάση τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων.

Υπολογισμός της Β:

$$\eta\mu(90^o - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(90^o - B)\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 75^o = \eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu 40^o \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\sigma\upsilon\nu 75^o}{\sigma\upsilon\nu 40^o} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{0{,}25882}{0{,}76604} = 0{,}33786$$

Άρα $B = \eta\mu^{-1}\,0{,}33786 = 19{,}74655^o$ ή $B = 180^o - 19{,}74655^o = 160{,}25345^o$

Επειδή δεν γνωρίζουμε την απέναντι πλευρά (β), δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία από τις τιμές με βάση τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων.

Υπολογισμός της α:

$$\eta\mu\gamma = \sigma\upsilon\nu(90^o - \alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^o - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 40^o = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu 75^o \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu 40^o}{\eta\mu 75^o} = \frac{0{,}64279}{0{,}96593} = 0{,}66546$$

Άρα $\alpha = \eta\mu^{-1}\,0{,}66546 = 41{,}71763^o$ ή $\alpha = 180^o - 41{,}71763^o = 138{,}28237^o$

Για να απορρίψουμε κάποια από τις δύο τιμές σύμφωνα με το 3^o Θεώρημα Τεταρτημορίων, πρέπει να γνωρίζουμε αν οι πλευρές β, γ ανήκουν στο ίδιο ή σε διαφορετικά τεταρτημόρια. Επειδή για την β πλευρά έχουμε δύο πιθανές τιμές: 12,99347^o και 167,00653^o, θα χρειαστεί να διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Έστω ότι $\beta = 12{,}99347^o$. Τότε, από το 1^o Θεώρημα Τεταρτημορίων, επειδή $\beta < 90^o$, θα είναι και $B < 90^o$ και άρα $B = 19{,}74655^o$. Στη συνέχεια, επειδή οι πλευρές β και γ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (είναι και οι δύο μικρότερες από 90^o), σύμφωνα με το 3^o Θεώρημα Τεταρτημορίων, η υποτείνουσα α θα είναι μικρότερη από 90^o, άρα $\alpha = 41{,}71763^o$.

2η περίπτωση: Έστω ότι $\beta = 167{,}00653^o$, τότε σύμφωνα με το 1^o Θεώρημα Τεταρτημορίων θα είναι $B = 160{,}25345^o$. Για την υποτείνουσα α, σύμφωνα με το 3^o Θεώρημα Τεταρτημορίων, ισχύει ότι είναι μεγαλύτερη από 90^o επειδή οι πλευρές β και γ ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια ($\beta = 167{,}00653 > 90^o$ και $\gamma = 40^o < 90^o$). Επομένως: $\alpha = 138{,}28237^o$.

Έτσι έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις:

1η λύση: $\beta = 12{,}99347^o$, $B = 19{,}74655^o$ και $\alpha = 41{,}71763^o$.

2η λύση: $\beta = 167{,}00653^o$, $B = 160{,}25345^o$ και $\alpha = 138{,}28237^o$.

Η επαλήθευση με τον τύπο ελέγχου είναι:

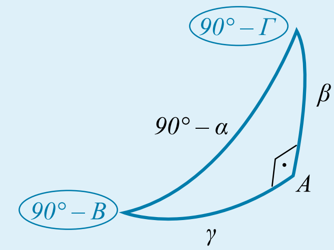
$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^o - \alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^o - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu B$$

1η λύση: $\eta\mu 12{,}99347^o = \eta\mu 41{,}71763^o\cdot\eta\mu 19{,}74655^o \Leftrightarrow 0{,}22484 = 0{,}66546\cdot 0{,}33786$, που ισχύει.

2η λύση: $\eta\mu 167{,}00653^o = \eta\mu 138{,}28237^o\cdot\eta\mu 160{,}25345^\circ \Leftrightarrow 0{,}22484 = 0{,}66546^o\cdot 0{,}33786$, που ισχύει.

Παράδειγμα 8.4

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{o}$, $B = 48^{o}$ και $\Gamma = 155^{o}$.



Σχ. 8.15

Λύση

Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχ. 8.15.

Υπολογισμός της α:

$\eta\mu(90^{o} - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^{o} - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi(90^{o} - B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\ \Gamma} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\ B} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\ 155^{o}} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\ 48^{o}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{-046631} \cdot \frac{1}{1{,}11061} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -1{,}931$$

Αδύνατον, διότι για το συνημίτονο ισχύει: $-1 \le \sigma\upsilon\nu\alpha \le 1$.

Άρα δεν υπάρχει σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{o}$, $B = 48^{\circ}$ και $\Gamma = 155^{o}$.

8.4 Επίλυση ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ***ορθόπλευρο*** ονομάζεται το ***σφαιρικό τρίγωνο*** που μία πλευρά του έχει μέτρο 90^{o}. Το πολικό τρίγωνο ενός ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου είναι ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, διότι οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού του. ΄Ετσι αν στο ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 90^{o}$, στο πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχουμε: $A' = 180^{o} - \alpha = 180^{o} - 90^{o} = 90^{o}$. Επομένως για να επιλύσουμε ένα ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο, αρκεί να επιλύσουμε το πολικό του, που είναι ορθογώνιο.

Παράδειγμα 8.5

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $\alpha = 90^{o}$, $B = 152^{o}$ και $\Gamma = 50^{o}$.

Λύση

Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, για το οποίο ισχύει:

$A' = 180^{o} - \alpha = 90^{o}$, $\beta' = 180^{\circ} - B = 28^{\circ}$ και $\gamma' = 180^{o} - \Gamma = 130^{o}$

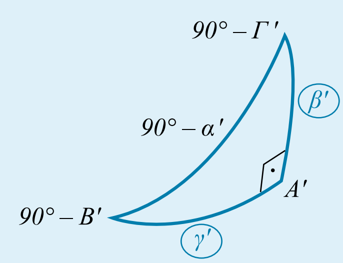
Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.16.

Υπολογισμός της α':

$\eta\mu(90^{o} - \alpha') = \sigma\upsilon\nu\beta' \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha' = \sigma\upsilon\nu 28^{o} \cdot \sigma\upsilon\nu 130^{o} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\alpha' = 0{,}88295 \cdot (-0{,}64279) = -0{,}56755$

$\alpha' = \sigma\upsilon\nu^{-1}(-0{,}56755) = 124{,}57956^{o}$



Σχ. 8.16

Υπολογισμός της B':

$\eta\mu\gamma' = \varepsilon\varphi(90^{o} - B') \cdot \varepsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow \eta\mu\gamma' = \sigma\varphi B' \cdot \varepsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\gamma' = \frac{\varepsilon\varphi\beta'}{\varepsilon\varphi B'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B' = \frac{\varepsilon\varphi\beta'}{\eta\mu\gamma'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B' = \frac{0{,}53171}{0{,}76604} = 0{,}6941$$

Άρα $B' = \varepsilon\varphi^{-1}\, 0{,}6941 = 34{,}76451^{o}$

Υπολογισμός της $Γ'$:

$ημβ' = εφ(90^o - Γ') \cdot εφγ' \Leftrightarrow ημβ' = σφΓ' \cdot εφγ' \Leftrightarrow$

$ημβ' = \dfrac{εφγ'}{εφΓ'} \Leftrightarrow εφΓ' = \dfrac{εφγ'}{ημβ'} \Leftrightarrow εφΓ' = \dfrac{εφ\ 130^o}{ημ28^o} = \dfrac{-1{,}19175}{0{,}46947} = -2{,}5385$

$εφ^{-1}\ 2{,}5385 = 68{,}49886^o$. Άρα $Γ' = 180^o - 68{,}49886^o = 111{,}50114^o$

Τύπος ελέγχου:

$ημ(90^o - α') = εφ(90^o - Γ') \cdot εφ(90^o - B') \Leftrightarrow συνα' = \dfrac{1}{εφΓ'} \cdot \dfrac{1}{εφB'} \Leftrightarrow$

$συν124{,}57956^o = \dfrac{1}{εφ111{,}50114^o} \cdot \dfrac{1}{εφ34{,}76451^o} \Leftrightarrow$

$-0{,}56755 = \dfrac{1}{-2{,}5385} \cdot \dfrac{1}{0{,}6947} \Leftrightarrow -0{,}56755 = \dfrac{1}{-1{,}76197}$ που ισχύει.

Επομένως τα άγνωστα στοιχεία του τριγώνου $ABΓ$ είναι:

$A = 180^o - α' = 180^o - 124{,}57956^o = 55{,}42044^o$

$β = 180^o - B' = 180^o - 34{,}76451^o = 145{,}23549^o$

$γ = 180^o - Γ' = 180^o - 111{,}50114^o = 68{,}49886^o$

8.5 Επίλυση τυχαίου σφαιρικού τριγώνου

Η επίλυση σφαιρικού τριγώνου αφορά στην εύρεση τριών άγνωστων στοιχείων του τριγώνου, αν είναι γνωστά τα υπόλοιπα τρία. Για την επίλυση χρησιμοποιούμε τις θεμελιώδεις σχέσεις που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 8.2.3. Υπάρχουν έξι διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το ποια είναι τα τρία γνωστά στοιχεία. Εκτός από τον τρόπο επίλυσης που θα δούμε σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν και άλλοι τρόποι. ΄Ενας από τους τρόπους αυτούς είναι η ***μέθοδος των ορθογωνίων τριγώνων***. Κατά τη μέθοδο αυτή, από μια κορυφή του τριγώνου φέρουμε μέγιστο κύκλο κάθετο προς την απέναντι πλευρά, οπότε το αρχικό τρίγωνο διαιρείται σε δύο ορθογώνια, καθένα από τα οποία επιλύεται με την μεθοδολογία που αναπτύξαμε.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο επίλυσης για κάθε περίπτωση, χρησιμοποιώντας τους τύπους της παραγράφου 8.2.3.

1η περίπτωση: Αν δίνονται ***δύο πλευρές*** και η ***περιεχόμενη γωνία***, π.χ.: ***β, γ, Α.***

Αυτή η περίπτωση έχει τις περισσότερες εφαρμογές στη Ναυτιλία. Για την επίλυση χρησιμοποιούμε:

1) Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές ώστε να βρούμε την πλευρά $α$ και μετά
2) Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές ώστε να βρούμε τις γωνίες B, $Γ$.

Παράδειγμα 8.6

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, αν $A = 50^o$, $β = 65^o$ και $γ = 72^o$.

Λύση

Υπολογισμός της $α$ στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.17:

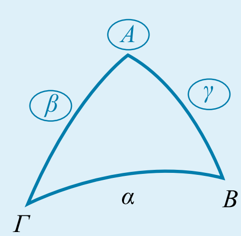
Από Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές έχουμε:

$συνα = συνβ \cdot συνγ + ημβ \cdot ημγ \cdot συνA \Leftrightarrow$

$συνα = συν65^o \cdot συν72^o + ημ65^o \cdot ημ72^o \cdot συν50^o \Leftrightarrow$

$συνα = 0{,}42262 \cdot 0{,}30902 + 0{,}90631 \cdot 0{,}95106 \cdot 0{,}64279 = 0{,}68465$

Άρα $α = συν^{-1}\ 0{,}685 = 46{,}764^o$



Σχ. 8.17

Υπολογισμός της Β: Εφαρμόζω Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές για τη β:

$συν\beta = συν\alpha \cdot συν\gamma + ημ\alpha \cdot ημ\gamma \cdot συνB \Leftrightarrow$

$συν\beta - συν\alpha \cdot συν\gamma = ημ\alpha \cdot ημ\gamma \cdot συνB \Leftrightarrow$

$$συνB = \frac{συν\beta - συν\alpha \cdot συν\gamma}{ημ\alpha \cdot ημ\gamma} \Leftrightarrow συνB = \frac{συν65^o - συν46{,}764^o \cdot συν72^o}{ημ46{,}764^o \cdot ημ72^o} \Leftrightarrow$$

$$συνB = \frac{0{,}42262 - 0{,}685 \cdot 0{,}30902}{0{,}72854 \cdot 0{,}95106} \Leftrightarrow \text{συνB} = \frac{0{,}21094}{0{,}69289} = 0{,}30443$$

$B = συν^{-1}\, 0{,}30443 = 72{,}27613^o$

Υπολογισμός της Γ: Ομοίως, από Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές, για την πλευρά γ:

$$συν\gamma = συν\alpha \cdot συν\beta + ημ\alpha \cdot ημ\beta \cdot συνΓ \Leftrightarrow συνΓ = \frac{συν72^o - συν46{,}764^o \cdot συν65^o}{ημ46{,}764^o \cdot ημ65^o} \Leftrightarrow$$

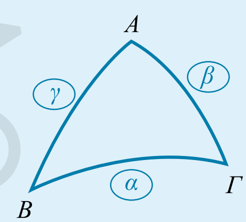
$$συνΓ = \frac{0{,}30902 - 0{,}685 \cdot 0{,}42262}{0{,}72854 \cdot 0{,}90631} = \frac{0{,}01953}{0{,}66028} = 0{,}02958$$

Άρα $Γ = συν^{-1}\, 0{,}02958 = 88{,}30494^o$

2η περίπτωση: Αν δίνονται οι ***3 πλευρές*** του, π.χ.: ***α, β, γ,*** τότε χρησιμοποιούμε τρεις φορές Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές.

Παράδειγμα 8.7

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 110^o$, $\beta = 76^o$, $\gamma = 70^o$.



Σχ. 8.18

Λύση

Στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.18 είναι γνωστές οι τρεις πλευρές και αναζητούμε τις 3 γωνίες.

Υπολογισμός της γωνίας Α:

Από τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές, για την α:

$συν\alpha = συν\beta \cdot συν\gamma + ημ\beta \cdot ημ\gamma \cdot συνA \Leftrightarrow$

$$συνA = \frac{συν\alpha - συν\beta \cdot συν\gamma}{ημ\beta \cdot ημ\gamma} \Leftrightarrow συνA = \frac{συν110^o - συν76^o \cdot συν70^o}{ημ76^o \cdot ημ70^o} \Leftrightarrow$$

$$συνA = \frac{-0{,}34202 - 0{,}24192 \cdot 0{,}34202}{0{,}9703 \cdot 0{,}93969}\, συνA = \frac{-0{,}42476}{0{,}91178} = -0{,}46586$$

$συν^{-1}\,(-0{,}46586) = 117{,}76589^o$

Υπολογισμός της γωνίας Β: Από τον Νόμο Συνημιτόνων (ομοίως):

$$συνB = \frac{συν\beta - συν\alpha \cdot συν\gamma}{ημ\alpha \cdot ημ\gamma} \Leftrightarrow συνB = \frac{συν76^o - συν110^o \cdot συν70^o}{ημ110^o \cdot ημ70^o} = 0{,}40644$$

Άρα $B = συν^{-1}\, 0{,}40644 = 66{,}0186^o$

Υπολογισμός της γωνίας Γ:

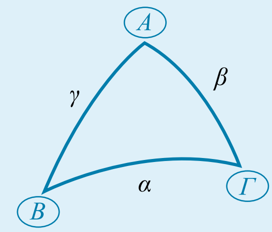
$$συνΓ = \frac{συν\gamma - συν\alpha \cdot συν\beta}{ημ\alpha \cdot ημ\beta} \Leftrightarrow συνΓ = \frac{συν70^o - συν110^o \cdot συν76^o}{ημ110^o \cdot ημ76^o} = 0{,}46586$$

Άρα $Γ = συν^{-1}\, 0{,}46586 = 62{,}23411^o$

3η περίπτωση: Αν δίνονται οι ***3 γωνίες*** του, π.χ.: ***Α, Β, Γ,*** τότε χρησιμοποιούμε τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες.

Παράδειγμα 8.8

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, όταν δίνονται οι γωνίες του: $A = 106^o, B = 79^o, Γ = 62^o$.



Σχ. 8.19

Λύση

Υπολογισμός της α: Στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.19 εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για τη γωνία Α:

$$συνA = -συνB \cdot συνΓ + ημB \cdot ημΓ \cdot συνα \Leftrightarrow$$

$$συνα = \frac{συνA + συνB \cdot συνΓ}{ημB \cdot ημΓ} \Leftrightarrow συνα = \frac{συν106^o + συν79^o \cdot συν62^o}{ημ79^o \cdot ημ62^o} \Leftrightarrow$$

$$συνα = \frac{-0{,}27564 + 0{,}19081 \cdot 0{,}46947}{0{,}72854 \cdot 0{,}90631} \Leftrightarrow συνα = \frac{-0{,}18606}{0{,}86673} = -0{,}21467$$

Άρα $α = συν^{-1}(-0{,}21467) = 102{,}39617^o$

Υπολογισμός της β: Ομοίως από Νόμο Συνημιτόνων για την Β:

$$συνβ = \frac{συνB + συνA \cdot συνΓ}{ημA \cdot ημΓ} \Leftrightarrow συνB = \frac{συν79^o + συν106^o \cdot συν62^o}{ημ106^o \cdot ημ62^o} = 0{,}07235$$

Άρα: $β = συν^{-1}\,0{,}07235 = 85{,}85103^o$

Υπολογισμός της γ:

$$συνγ = \frac{συνΓ + συνA \cdot συνB}{ημA \cdot ημB} \Leftrightarrow συνγ = \frac{συν62^o + συν106^o \cdot συν79^o}{ημ106^o \cdot ημ79^o} = 0{,}44179$$

Άρα $γ = συν^{-1}\,0{,}44179 = 63{,}78185^o$

4η περίπτωση: Αν δίνονται ***μία πλευρά*** και οι ***δύο προσκείμενες γωνίες*** του, π.χ.: ***α, Β, Γ,*** τότε χρησιμοποιούμε:

1) Τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για να βρούμε την απέναντι γωνία Α.
2) Τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για να βρούμε τις β, γ.

Παράδειγμα 8.9

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $α = 71{,}94^o$, $B = 24{,}7^o$ και $Γ = 50{,}44^o$.

Λύση

Υπολογισμός της γωνίας Α: Από τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες στο σφαιρικο τρίγωνο του σχήματος 8.20 έχουμε:

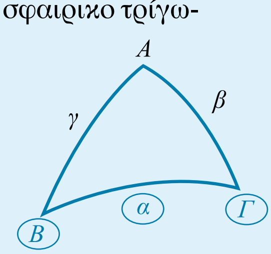
$$συνA = -συνB \cdot συνΓ + ημB \cdot ημΓ \cdot συνα \Leftrightarrow$$

$$συνA = -συν24{,}7 \cdot συν50{,}44^o + ημ24{,}7 \cdot ημ50{,}44^o \cdot συν71{,}94^o$$

$$συνA = -0{,}90851 \cdot 0{,}63689 + 0{,}41787 \cdot 0{,}77096 \cdot 0{,}31001 \Leftrightarrow$$

$$συνA = -0{,}47875$$

Άρα $A = συν^{-1}(-0{,}47875) = 118{,}60379^o$



Σχ. 8.20

Υπολογισμός της πλευράς β: Από τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για τη Γ:

$$συνB = -συνA \cdot συνΓ + ημA \cdot ημΓ \cdot συνβ \Leftrightarrow$$

$$συνβ = \frac{συνB + συνA \cdot συνΓ}{ημA \cdot ημΓ} \Leftrightarrow συνβ = \frac{0{,}90851 - 0{,}47875 \cdot 0{,}63689}{0{,}87795 \cdot 0{,}77096} \Leftrightarrow$$

$$β = συν^{-1}\,0{,}89176 = 26{,}90475^o$$

Για την πλευρά γ:

$$συνΓ = -συνA \cdot συνB + ημA \cdot ημB \cdot συνγ \Leftrightarrow$$

$$συνγ = \frac{συνΓ + συνA \cdot συνB}{ημA \cdot ημB} \Leftrightarrow συνγ = \frac{0{,}63689 - 0{,}47875 \cdot 0{,}90851}{0{,}87795 \cdot 0{,}41787} = 0{,}55044$$

άρα $γ = συν^{-1}\, 0{,}55044 = 56{,}6028^{o}$

5η περίπτωση: Αν δίνονται ***δύο πλευρές*** και ***μία από τις απέναντι γωνίες***, π.χ: $α, γ, A$, τότε χρησιμοποιούμε:

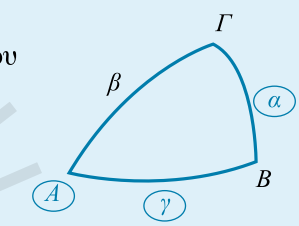
1) Νόμο Ημιτόνων για τη γωνία $Γ$.
2) Αναλογικούς τύπους Napier για τα άλλα δύο στοιχεία.

Παράδειγμα 8.10

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, αν $A = 30^{o}$, $α = 40^{o}$ και $γ = 100^{o}$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.21 για να βρούμε τη γωνία Γ:



Σχ. 8.21

$$\frac{ημA}{ημα} = \frac{ημΓ}{ημγ} \Leftrightarrow \frac{ημ30^{o}}{ημ40^{o}} = \frac{ημΓ}{ημ100^{o}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{0{,}5}{0{,}64279} = \frac{ημΓ}{0{,}98481} \Leftrightarrow ημΓ = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}98481}{0{,}64279} = 0{,}76604$$

Άρα $Γ = ημ^{-1}\, 0{,}76604 \simeq 50^{o}$ ή $Γ \simeq 180^{o} - 50^{o} = 130^{o}$.

Επειδή $γ > α$, θα πρέπει να είναι και $Γ > A$, που ισχύει και για τις δύο περιπτώσεις. Άρα δεκτές και οι δύο. Επομένως θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Συνεχίζουμε με Αναλογικούς Τύπους Napier:

1η περίπτωση: Αν $Γ = 50^{o}$

$$εφ\frac{β}{2} = εφ\frac{α+γ}{2} \cdot \frac{συν\frac{A+Γ}{2}}{συν\frac{A-Γ}{2}} \Leftrightarrow εφ\frac{β}{2} = εφ\frac{40^{o}+100^{o}}{2} \cdot \frac{συν\frac{30^{o}+50^{o}}{2}}{συν\frac{30^{o}-50^{o}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$εφ\frac{β}{2} = εφ70^{o} \cdot \frac{συν40^{o}}{συν(-10^{o})} \Leftrightarrow εφ\frac{β}{2} = 2{,}74748 \cdot \frac{0{,}76604}{0{,}98481} = 2{,}13714$$

Άρα $\frac{β}{2} = εφ^{-1}\, 2{,}13714 \Leftrightarrow \frac{β}{2} = 64{,}9244 \Leftrightarrow β = 129{,}8488$

$$εφ\frac{B}{2} = σφ\frac{A+Γ}{2} \cdot \frac{συν\frac{α-γ}{2}}{συν\frac{α+γ}{2}} \Leftrightarrow εφ\frac{B}{2} = σφ\frac{30^{o}+50^{o}}{2} \cdot \frac{συν\frac{40^{o}-100^{o}}{2}}{συν\frac{40^{o}+100^{o}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$εφ\frac{B}{2} = σφ40^{o} \cdot \frac{συν(-30^{o})}{συν70^{o}} \Leftrightarrow εφ\frac{B}{2} = \frac{1}{εφ40^{o}} \cdot \frac{συν30^{o}}{συν70^{o}} \Leftrightarrow$$

$$εφ\frac{B}{2} = \frac{0{,}86602}{0{,}8391 \cdot 0{,}34202} = 3{,}01761$$

Άρα $\frac{B}{2} = εφ^{-1}\, 3{,}01761 = 71{,}66542^{o} \Leftrightarrow B = 143{,}33084^{o}$.

2η περίπτωση: $\Gamma = 130^o$

$$\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\varepsilon\varphi 70^o\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 80^o}{\sigma\upsilon\nu(-50^o)}=...=0,74223$$

$$\frac{\beta}{2}=\varepsilon\varphi^{-1}\,0{,}74223 = 36{,}58391^o \Leftrightarrow \beta = 73{,}16782^o$$

$$\kappa\alpha\iota\ \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sigma\varphi\frac{A+\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\gamma}{2}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{1}{\varepsilon\varphi 80^o}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(-30^o)}{\sigma\upsilon\nu 70^o}=0,44648$$

$$\frac{B}{2}=\varepsilon\varphi^{-1}\,0{,}44648 = 24{,}05960^o \Leftrightarrow B = 48{,}11920^o$$

Άρα 2 λύσεις: α) $\Gamma = 50^o,\ \beta = 129{,}8488^o, B = 143{,}33084^o$

β) $\Gamma = 130^o,\ \beta = 73{,}16782^o, B = 48{,}11920^o$

6η περίπτωση: Αν δίνονται ***δύο γωνίες*** και ***μία από τις απέναντι πλευρές***, π.χ.: *α, Α, Γ,* τότε χρησιμοποιούμε:

1) Τον Νόμο Ημιτόνων για γωνίες για τον υπολογισμό της πλευράς γ.
2) Τους αναλογικούς τύπους Napier για τα άλλα δύο στοιχεία.

Παράδειγμα 8.11

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, αν $A = 86^o$, $\alpha = 24^\circ$ και $\Gamma = 14^o$.

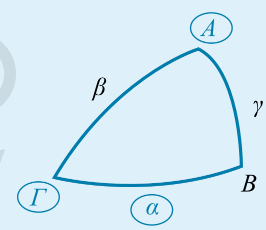
Λύση

Από τον Νόμο Ημιτόνων στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.22 έχουμε:

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\gamma}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 86^o}{\eta\mu 24^o}=\frac{\eta\mu 14^o}{\eta\mu\gamma}\Leftrightarrow\frac{0{,}99756}{0{,}40674}=\frac{0{,}24182}{\eta\mu\gamma}\Leftrightarrow\eta\mu\gamma = 0{,}0986$$

Άρα $\gamma = \eta\mu^{-1}0{,}0986 = 5{,}65856^o$ ή $\gamma = 180^o - 5{,}65856^o = 174{,}34144^o$

Η τιμή $174{,}34144^\circ$ απορρίπτεται διότι $\Gamma < A$, άρα και $\gamma < \alpha$. Άρα $\gamma = 5{,}65856^o$



Σχ. 8.22

Αναλογικοί τύποι Napier:

$$\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\varepsilon\varphi\frac{24^o+5{,}65856^o}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{86^o+14^o}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{86^o-14^o}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\varepsilon\varphi 14{,}784\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 50^o}{\sigma\upsilon\nu 36^o}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=0{,}26476\cdot\frac{0{,}64279}{0{,}80902}=0{,}21036$$

$$\text{Άρα }\frac{\beta}{2}=\varepsilon\varphi^{-1}0{,}21036\Leftrightarrow\frac{\beta}{2}=11{,}87953^o\Leftrightarrow\beta = 23{,}75906^o$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sigma\varphi\frac{A+\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\gamma}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\sigma\varphi 50^o\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 9{,}17072}{\sigma\upsilon\nu 14{,}82928^o}=\frac{1}{\varepsilon\varphi 50^o}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 9{,}17072}{\sigma\upsilon\nu 14{,}82928^o}=0{,}85692$$

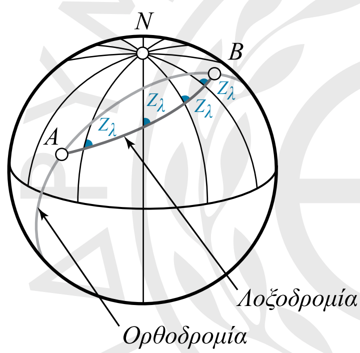
$$\text{Άρα }\frac{B}{2}=\varepsilon\varphi^{-1}0{,}85692\Leftrightarrow\frac{B}{2}=40{,}59393^o\Leftrightarrow B = 81{,}18787^o$$

8.6 Εφαρμογές σφαιρικής τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία και την Αστρονομία

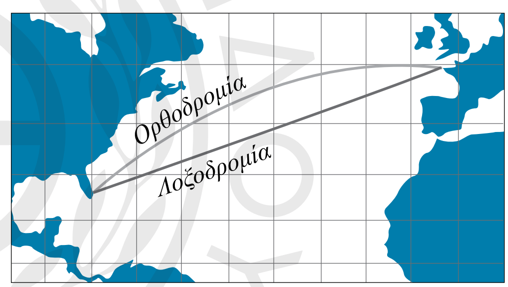
Η σφαιρική τριγωνομετρία έχει εφαρμογές σε σημαντικά προβλήματα της Ναυτιλίας. Δύο πολύ σημαντικά σφαιρικά τρίγωνα είναι το τρίγωνο ορθοδρομίας και το τρίγωνο θέσης. Το ***τρίγωνο ορθοδρομίας*** είναι σφαιρικό τρίγωνο της γήινης σφαίρας, και η σημαντικότερη εφαρμογή του είναι ο υπολογισμός της απόστασης που διανύει ένα πλοίο που εκτελεί ορθοδρομία. Το ***τρίγωνο θέσης*** είναι σφαιρικό τρίγωνο της ουράνιας σφαίρας, με κορυφές το Ζενίθ (Ζ) του παρατηρητή, τον άνω ουράνιο πόλο (Π) και τη θέση ενός αστέρα (Σ). Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές του τριγώνου θέσης είναι ο προσδιορισμός των γεωγραφικών συντεταγμένων της θέσης ενός παρατηρητή.

8.6.1 Τρίγωνο ορθοδρομίας

Στην Ναυτιλία, η πλεύση από ένα σημείο αναχώρησης Α προς ένα σημείο προορισμού Β μπορεί να γίνει είτε με λοξοδρομία, είτε με ορθοδρομία, είτε με συνδυασμό αυτών των δύο πλεύσεων (μεικτός ή σύνθετος πλους). Ήδη, στο κεφάλαιο 5, έχουμε μελετήσει την λοξοδρομική πλεύση. Είδαμε ότι κατά την λοξοδρομία, το πλοίο διατηρεί σταθερή πορεία, η οποία τέμνει τους μεσημβρινούς υπό την ίδια γωνία [σχ. 8.23(α)]. Επειδή όμως το πλοίο κινείται σε μικρό κύκλο (εκτός αν η λοξοδρομία είναι πάνω σε μεσημβρινό ή τον ισημερινό), δεν διανύεται η μικρότερη δυνατή απόσταση.



(α)



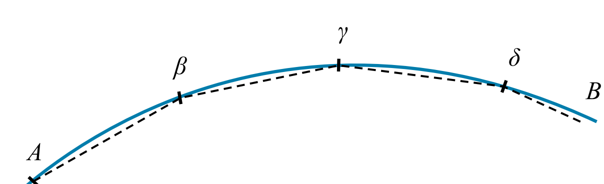
(β)

Σχ. 8.23

(α) Απεικόνιση λοξοδρομίας και ορθοδρομίας στη σφαίρα

(β) Απεικόνιση λοξοδρομίας και ορθοδρομίας στον μερκατορικό χάρτη

Ορθοδρομία ή ***ορθοδρομικό τόξο*** ονομάζεται το μικρότερο από 180° τόξο μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο τόπους. Ανάμεσα σε δύο τόπους υπάρχουν άπειρα τόξα που τους συνδέουν. Το μικρότερο τόξο που τους ενώνει είναι το τόξο που ανήκει σε μέγιστο κύκλο, δηλαδή το ορθοδρομικό τόξο. Η πλεύση ενός πλοίου που κινείται πάνω σε μέγιστο κύκλο, ονομάζεται ***ορθοδρομική πλεύση***. Δηλαδή, κατά την ορθοδρομική πλεύση, διανύεται η μικρότερη δυνατή απόσταση για να πάμε από έναν τόπο σε έναν άλλον. Το ορθοδρομικό τόξο τέμνει τους μεσημβρινούς υπό διαφορετική γωνία τον καθένα. Αυτό σημαίνει ότι για να κινείται ένα πλοίο πάνω σε ορθοδρομικό τόξο πρέπει να αλλάζει την πορεία του συνεχώς. Αυτό που συμβαίνει στην πράξη είναι ότι το πλοίο κινείται πάνω σε τεθλασμένη γραμμή (σχ. 8.24),



Σχ. 8.24

εγγεγραμμένη στο ορθοδρομικό τόξο, και όσο πιο πολλά είναι τα ευθύγραμμα τμήματα της τεθλασμένης τόσο καλύτερα προσεγγίζεται η ορθοδρομία.

Στον πίνακα 8.1 συγκρίνονται τα δύο είδη πλεύσης.

Πίνακας 8.1

Λοξοδρομικούς πλους	*Ορθοδρομικός πλούς*
Πλεύση με ***σταθερή πορεία***	Η πορεία μεταβάλλεται συνεχώς.
Δεν διανύεται η συντομότερη απόσταση.	Είναι η ***συντομότερη απόσταση*** πλεύσης.
Σπειροειδής καμπύλη που τέμνει όλους τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία.	Τόξο μέγιστου κύκλου που τέμνει τους μεσημβρινούς με διαφορετική γωνία.
Ο υπολογισμός της απόστασης γίνεται με το ***τρίγωνο πλεύσης***, το οποίο είναι ορθογώνιο τρίγωνο της επίπεδης τριγωνομετρίας.	Ο υπολογισμός της απόστασης γίνεται με το ***τρίγωνο ορθοδρομίας***, το οποίο είναι σφαιρικό τρίγωνο.

Παρατήρηση

Όταν η πλεύση είναι πάνω σε μεσημβρινό ή στον ισημερινό, η λοξοδρομία και η ορθοδρομία ταυτίζονται.

8.6.2 Υπολογισμός ορθοδρομικής απόστασης και αρχικής πορείας

Ο υπολογισμός των στοιχείων του ορθοδρομικού πλου γίνεται με την επίλυση του τριγώνου ορθοδρομίας. ***Τρίγωνο ορθοδρομίας ΑΠΒ*** (σχ. 8.25) ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές το σημείο αναχώρησης *Α*, το σημείο άφιξης *Β* και τον πόλο *Π*, που είναι πλησιέστερος στο σημείο αναχώρησης.

Αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως στην ορθοδρομική πλεύση είναι ο υπολογισμός της απόστασης σε ν.μ. που διανύει το πλοίο, δηλαδή η ***ορθοδρομική απόσταση***, αν είναι γνωστές οι γεωγραφικές συντεταγμένες του σημείου εκκίνησης $A(\varphi_A, \lambda_A)$ και του σημείου άφιξης $B(\varphi_B, \lambda_B)$**.** Είναι γνωστό ότι:

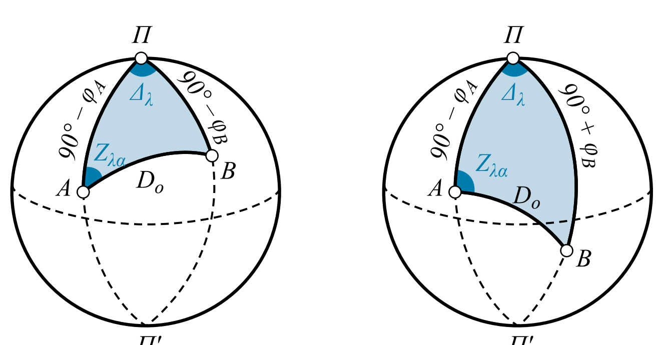
«1 πρώτο λεπτό τόξου μέγιστου κύκλου, έχει μήκος 1 ν.μ.»

Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε την πλευρά ΑΒ = D_o, και να την μετατρέψουμε σε πρώτα λεπτά. Τα στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας είναι:

1) Οι πλευρές *ΠΑ* και *ΠΒ* του τριγώνου είναι τόξα των μεσημβρινών των τόπων *Α* και *Β* αντίστοιχα. Ισχύει:

$$\boxed{\Pi A = 90^o - \varphi_A}$$

$$\boxed{\Pi B = \begin{cases} 90^o - \varphi_B & \text{αν } \varphi_A, \varphi_B \text{ ομώνυμα} \\ 90^o + \varphi_B & \text{αν } \varphi_A, \varphi_B \text{ ετερώνυμα} \end{cases}}$$



Σχ. 8.25

2) Η γωνία *ΑΠΒ* συμβολίζεται με $\Delta\lambda$ και ισούται με τη διαφορά μήκους των τόπων *Α* και *Β*.

$$\Delta\lambda = \begin{cases} |\lambda_A - \lambda_B|, & \text{αν } \lambda_A, \lambda_B \text{ ομώνυμα} \\ \lambda_A + \lambda_B & \text{αν } \lambda_A, \lambda_B \text{ ετερώνυμα} \end{cases}$$

3) Η πλευρά ΑΒ του τριγώνου, η οποία όπως αναφέραμε, υπολογισμένη σε ν.μ. δίνει την απόσταση D_O του ορθοδρομικού πλου από το Α στο Β.

4) Η γωνία *Α* είναι η αρχική πλεύση, με την βοήθεια της οποίας υπολογίζεται η ***αρχική ορθοδρομική πορεία*** $Z_{\lambda\alpha}$.

Ο υπολογισμός της απόστασης D_o που διανύει ένα πλοίο εκτελώντας ορθοδρομία, καθώς και της αρχικής πορείας του, επιτυγχάνεται με την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου *ΠΑΒ*, χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τρόπο επίλυσης που μάθαμε στην παράγραφο 8.5. Θα δούμε την επίλυση αυτή μέσα από συγκεκριμένα προβλήματα.

Πρόβλημα 8.1

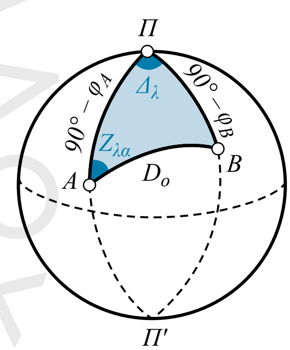
΄Ενα πλοίο πλέει από ένα σημείο $A(\varphi_A = 20^o25΄N, \lambda_A = 46^o36΄\ W)$ έως ένα σημείο $B(\varphi_B = 48^o42΄N, \lambda_B = 16^o24΄W)$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση και η αρχική πορεία του πλοίου.

Λύση:

$ΠΑ = 90^o - \varphi_A = 90^o - 20^o25΄ = 90^o - 20{,}417^o = 69{,}583^o$

$ΠΒ = 90^o - \varphi_B = 90^o - 48^o42΄ = 90^o - 48{,}7^\circ = 41{,}3^o$

$\Delta_\lambda = |\lambda_A - \lambda_B| = 46^o36΄ - 16^o24΄ = 30^o12΄= 30{,}2^o$



Σχ. 8.26

Εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές στο τρίγωνο *ΑΠΒ* του σχήματος 8.26:

$συνD_o = συνΠΑ \cdot συνΠΒ + ημΠΑ \cdot ημΠΒ \cdot συνΔλ \Leftrightarrow$

$συνD_o = συν69{,}583 \cdot συν41{,}3 + ημ69{,}583 \cdot ημ41{,}3^o \cdot συν30{,}2^o \Leftrightarrow$

$συνD_o = 0{,}349 \cdot 0{,}751 + 0{,}937 \cdot 0{,}66 \cdot 0{,}864 \Leftrightarrow συνD_o = 0{,}796$

Άρα $D_o = συν^{-1}0{,}796 = 37{,}25^o$

$37{,}25^\circ = (37{,}25 \cdot 60)΄ = 2235΄$. Άρα $D_o = 2235$ ν.μ.

Για να υπολογίσουμε την αρχική ορθοδρομική πορεία $Z_{\lambda\alpha}$, εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για την απέναντι πλευρά της, *ΠΒ* (σχ. 8.26):

$$συνΠΒ = συνD_o \cdot συνΠΑ + ημD_o \cdot ημΠΑ \cdot συνΑ \Leftrightarrow$$

$$συνΑ = \frac{συνΠΒ - συνD_o \cdot συνΠΑ}{ημD_o \cdot ημΠΑ} \Leftrightarrow$$

$$συνΑ = \frac{0{,}751 - 0{,}796 \cdot 0{,}349}{0{,}605 \cdot 0{,}937} = \frac{0{,}473}{0{,}567} = 0{,}834$$

Άρα $Z_{\lambda\alpha} = A = συν^{-1}0{,}834 = 33{,}488^o$

Πρόβλημα 8.2

Δίνονται οι συντεταγμένες λιμανιού εκκίνησης ενός πλοίου ($\varphi_A = 08^o14΄N, \lambda_A = 98^o40΄E$) και του λιμανιού άφιξης ($\varphi_B = 7^o27΄S, \lambda_B = 68^o30΄E$). Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση $D_o = \widehat{AB}$ και η αρχική πορεία.

Λύση

$A\Pi = 90^o - \varphi_B = 90^o - 8^o14' = 90^o - 8{,}233 = 81{,}767^o$

$\Pi B = 90^o + \varphi_B = 90^o + 7^o27' = 90^\circ + 7{,}45 = 97{,}45^o$

$\Delta_\lambda = A\Pi B = |\lambda_A - \lambda_B| = 98^o40' - 68^o30' = 98{,}667 - 68{,}5 = 30{,}167^o$

Εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές στο τρίγωνο $A\Pi B$ του σχήματος 8.27:

$\sigma\upsilon\nu D_o = \sigma\upsilon\nu(A\Pi) \cdot \sigma\upsilon\nu(B\Pi) + \eta\mu(A\Pi) \cdot \eta\mu(B\Pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta_\lambda \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu D_o = \sigma\upsilon\nu 81{,}767 \cdot \sigma\upsilon\nu 97{,}45^o + \eta\mu 81{,}767^o \cdot \eta\mu 97{,}45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30{,}167^o \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu D_o = 0{,}143 \cdot (-0{,}13) + 0{,}99 \cdot 0{,}992 \cdot 0{,}865 = 0{,}8304$

Άρα $D_o = cos^{-1} 0{,}8304 = 33{,}86^o$

$D_o = (33{,}86 \cdot 60)' = 2031{,}6'$ ή $D_o = 2031{,}6$ ν.μ.

Νόμος Συνημιτόνων για την πλευρά ΠB:

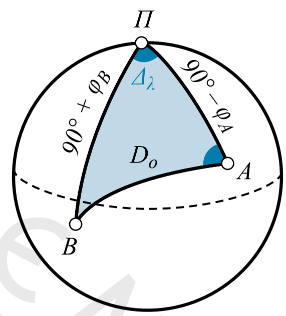
$\sigma\upsilon\nu\Pi B = \sigma\upsilon\nu D_o \cdot \sigma\upsilon\nu\Pi A + \eta\mu D_o \cdot \eta\mu\Pi A \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = \frac{\sigma\upsilon\nu\Pi B - \sigma\upsilon\nu D_o \cdot \sigma\upsilon\nu\Pi A}{\eta\mu D_o \cdot \eta\mu\Pi A} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_{\lambda\alpha} = \frac{0{,}13 - 0{,}8304 \cdot 0{,}143}{0{,}557 \cdot 0{,}99} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = \frac{-0{,}249}{0{,}551} = -0{,}452$$

$A = \sigma\upsilon\nu^{-1}(-0{,}452) = 116{,}872^o$

Άρα η αρχική πλεύση είναι: $Z_{\lambda\alpha} = 360^o - 116{,}872^o = 243{,}128^o$.



Σχ. 8.27

8.6.3 Τύποι υπολογισμού ορθοδρομικής απόστασης και αρχικής πορείας στη Ναυτιλία

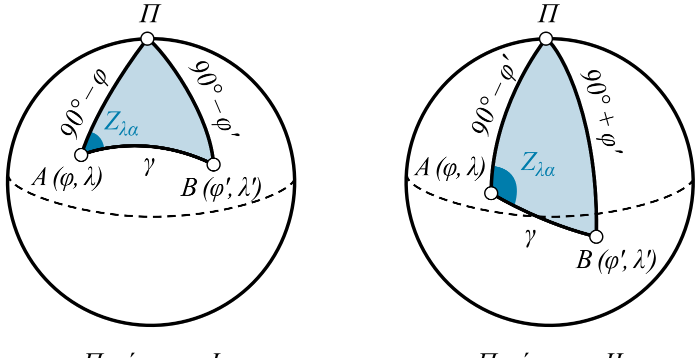
Οι Πλοίαρχοι στη Ναυτιλία υπολογίζουν την ορθοδρομική απόσταση γ μεταξύ ενός σημείου αναχώρησης $A(\varphi, \lambda)$ και ενός σημείου προορισμού $B(\varphi', \lambda')$ με απευθείας αντικατάσταση στον τύπο:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \pm \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\varphi'}$$

όπου το «+» ισχύει όταν φ, φ' είναι ομώνυμα και «–» όταν φ, φ' είναι ετερώνυμα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο τύπος αυτός προκύπτει από τον Νόμο Συνημιτόνων.

– Απόδειξη του τύπου

Θεωρούμε το τρίγωνο ορθοδρομίας ΠAB του σχήματος 8.28, όπου $A(\varphi, \lambda)$ και $B(\varphi', \lambda')$ τα σημεία αναχώρησης και άφιξης αντίστοιχα και Π ο πλησιέστερος πόλος στο A.



Περίπτωση Ι *Περίπτωση ΙΙ*

Σχ. 8.28

Για τις πλευρές *ΑΠ* και *ΒΠ* του τριγώνου ισχύει:

$$\Pi A = 90 - \varphi \;\; \text{και} \;\; \Pi B = \begin{cases} 90^{\circ} - \varphi', & \text{αν } \varphi, \varphi' \text{ ομώνυμα} \\ 90^{\circ} + \varphi', & \text{αν } \varphi, \varphi' \text{ ετερώνυμα} \end{cases}$$

Η γωνία *ΑΠΒ* είναι ίση με τη διαφορά μήκους $\Delta\lambda$ των σημείων *Α* και *Β*.
Από Νόμο Συνημιτόνων στο ΑΠΒ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu AB = \sigma\upsilon\nu\Pi A \cdot \sigma\upsilon\nu\Pi B + \eta\mu\Pi A \cdot \eta\mu\Pi B \cdot \sigma\upsilon\nu A\Pi B \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\Pi A \cdot \sigma\upsilon\nu\Pi B + \eta\mu\Pi A \cdot \eta\mu\Pi B \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda$$

Περίπτωση Ι: φ, φ΄ ομώνυμα

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\,(90^{\circ} - \varphi) \cdot \sigma\upsilon\nu\,(90^{\circ} - \varphi') + \eta\mu\,(90^{\circ} - \varphi) \cdot \eta\mu\,(90^{\circ} - \varphi') \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\varphi' + \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda + \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\varphi'$$

Περίπτωση ΙΙ: φ, φ΄ ετερώνυμα

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - \varphi) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} + \varphi') + \eta\mu(90^{\circ} - \varphi) \cdot \eta\mu(90^{\circ} + \varphi') \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(90^{\circ} - (-\varphi')) + \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu(90^{\circ} - (-\varphi')) \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu(-\varphi') + \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(-\varphi') \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = -\eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\varphi' + \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda - \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\varphi'$$

– *Τύπος υπολογισμού αρχικής ορθοδρομικής πορείας*

Στα παραδείγματα που έχουμε ήδη δει, υπολογίσαμε την αρχική πορεία εφαρμόζοντας στο τρίγωνο ορθοδρομίας Νόμο Συνημιτόνων για την απέναντι πλευρά της. Ας δούμε και έναν ακόμα τύπο υπολογισμού της αρχικής πορείας, ο οποίος αποδεικνύεται μέσω του Νόμου Ημιτόνων. Για την πλεύση από το σημείο *Α* στο σημείο *Β* του σχήματος 8.28 ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$\boxed{\eta\mu Z_{\lambda\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \eta\mu\,\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma}}$$

Απόδειξη

Από τον Νόμο Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\Pi B} = \frac{\eta\mu\Pi}{\eta\mu AB} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu\Pi B} = \frac{\eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma}$$

Περίπτωση Ι: φ, φ΄ ομώνυμα

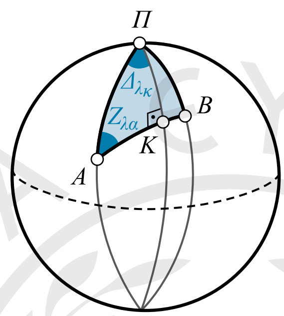
$$\frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu(90^{\circ} - \varphi')} = \frac{\eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\varphi'} = \frac{\eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \eta\mu Z_{\lambda\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma}$$

Περίπτωση ΙΙ: φ, φ΄ ετερώνυμα

$$\frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu(90^{\circ} + \varphi')} = \frac{\eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu(90^{\circ} - (-\varphi'))} = \frac{\eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\sigma\upsilon\nu(-\varphi')} = \frac{\eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\varphi'} = \frac{\eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \eta\mu Z_{\lambda\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi' \cdot \eta\mu\Delta\lambda}{\eta\mu\gamma}$$

8.6.4 Κορυφαίο σημείο ορθοδρομίας

Θεωρούμε το τρίγωνο ορθοδρομίας *ΠΑΒ* του σχήματος 8.29. Από τον πόλο *Π* φέρνουμε τον μεσημβρινό που είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο ΑΒ, και ο οποίος τέμνει το τόξο αυτό στο σημείο $\boldsymbol{K(\varphi_\kappa, \lambda_\kappa)}$. Το σημείο τομής *Κ* λέγεται ***κορυφαίο σημείο*** (vertex) του ορθοδρομικού τόξου. Το σημείο *Κ* δεν ανήκει κατ' ανάγκη στο τόξο *ΑΒ,* αλλά μπορεί να βρίσκεται και στην προέκταση αυτού. Σε κάθε περίπτωση, το σημείο *Κ* απέχει τη μικρότερη απόσταση από τον πόλο και άρα τη μεγαλύτερη από τον ισημερινό. Επομένως, έχει το μεγαλύτερο γεωγραφικό πλάτος από όλα τα σημεία του ορθοδρομικού τόξου. Ο υπολογισμός των συντεταγμένων του κορυφαίου σημείου είναι χρήσιμος στους ναυτικούς για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των ενδιάμεσων σημείων, ώστε να χαράξουν το ορθοδρομικό τόξο.



Σχ. 8.29

Επειδή το τόξο *ΠΚΠ΄* είναι κάθετο στο τόξο *ΑΒ*, το σφαιρικό τρίγωνο *ΑΠΚ* είναι ορθογώνιο. Στο *ΑΠΚ* γνωρίζουμε την πλευρά *ΑΠ* (επειδή γνωρίζουμε το γεωγραφικό πλάτος του σημείου αναχώρησης) και την αρχική πορεία (γωνία Α του τριγώνου). Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες $(\varphi_\kappa, \lambda_\kappa)$, αρκεί στο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο *ΑΠΚ* να βρούμε τη πλευρά *ΠΚ* και τη γωνία *ΑΠΚ,* η οποία είναι η διαφορά μήκους $\Delta_{\lambda\kappa}$ μεταξύ του σημείου αναχώρησης Α και του κορυφαίου σημείου *Κ.* Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\varphi_\kappa = 90^\circ - \Pi K} \qquad \boxed{\lambda_\kappa = \lambda_A - \Delta\lambda_\kappa \quad \text{ή} \quad \lambda_\kappa = \lambda_A + \Delta\lambda_\kappa}$$

Πρόβλημα 8.3

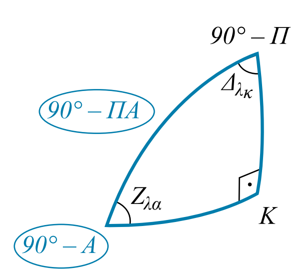
Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο $A(\varphi = 24^\circ N, \lambda = 73^\circ W)$ προς ένα σημείο *Β* εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Αν η αρχική πορεία είναι $N\,42^\circ 18' E$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του κορυφαίου σημείου.

Λύση

Για την εύρεση του κορυφαίου σημείου $K(\varphi_\kappa, \lambda_\kappa)$ θα επιλύσουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο *ΑΠΚ* ($K = 90^\circ$) του σχήματος 8.29. Έχουμε:

$$A\Pi = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$
$$A = 42^\circ 18' = 42{,}3^\circ$$

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία επίλυσης ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου της παραγράφου 8.3, για να εφαρμόσουμε τους κανόνες Napier, θα σχηματίσουμε τη διάταξη του σχήματος 8.30.



Σχ. 8.30

Υπολογισμός της πλευράς $ΠΚ$:

$$ημΠΚ = συν(90^o - Α) \cdot συν(90^o - ΑΠ) \Leftrightarrow$$

$$ημΠΚ = ημΑ \cdot ημΑΠ \Leftrightarrow ημΠΚ = ημ42{,}3^o \cdot ημ66^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημΠΚ = 0{,}67301 \cdot 0{,}91355 = 0{,}61483$$

Άρα $ΠΚ = ημ^{-1}0{,}61483 = 37{,}93957^o$ ή $ΠΚ = 180^o - 37{,}93957^o = 142{,}06043^o$

Επειδή $\mathrm{A} = 42{,}3^o < 90^o$, σύμφωνα με το 1^o Θεώρημα Τεταρτημορίων είναι και $ΠΚ < 90^o$, άρα η λύση 142,06043 απορρίπτεται.

Υπολογισμός της γωνίας $Π = Δλ$:

$$ημ(90^o - ΑΠ) = εφ(90^o - \mathrm{Π}) \cdot εφ(90^o - \mathrm{Α}) \Leftrightarrow$$

$$συνΑΠ = σφΠ \cdot σφΑ \Leftrightarrow συνΑΠ = \frac{1}{εφΠ} \cdot \frac{1}{εφΑ} \Leftrightarrow$$

$$συν66^o = \frac{1}{εφΠ} \cdot \frac{1}{εφ42{,}3^o} \Leftrightarrow$$

$$εφΠ = \frac{1}{συν66^o} \cdot \frac{1}{εφ42{,}3^o} \Leftrightarrow$$

$$εφΠ = \frac{1}{0{,}40674} \cdot \frac{1}{0{,}90993} = 2{,}70194$$

Άρα $Π = Δλϰ = εφ^{-1}2{,}70194 = 69{,}69026^o$

Η πλευρά $ΑΚ$ δεν ζητείται, αλλά θα την υπολογίσουμε για να κάνουμε την επαλήθευση με τον τύπο ελέγχου.

Υπολογισμός της $ΑΚ$:

$$ημ(90^o - Α) = εφ(90^o - ΑΠ) \cdot εφΑΚ \Leftrightarrow$$

$$συνΑ = \frac{1}{εφΑΠ} \cdot \mathrm{εφ}ΑΚ \Leftrightarrow \mathrm{εφ}ΑΚ = συνΑ \cdot \mathrm{εφ}ΑΠ \Leftrightarrow$$

$$εφΑΚ = 0{,}73963 \cdot 2{,}24604 = 1{,}66124$$

Άρα $ΑΚ = εφ^{-1}1{,}66124 = 58{,}95374^o$.

Τύπος ελέγχου:

$$ημΠΚ = εφ(90^o - Π) \cdot εφΑΚ \Leftrightarrow$$

$$ημΠΚ = \frac{1}{εφΠ} \cdot \mathrm{εφ}ΑΚ \Leftrightarrow$$

$$0{,}61483 = \frac{1{,}66124}{2{,}70194}, \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως $φ_ϰ = 90^o - ΠΚ = 90^o - 37{,}93957^o = 52{,}06043^o N = 52^o 3΄38΄΄\mathrm{N}$

Επειδή το σημείο αναχώρησης είναι στο δυτικό ημισφαίριο και το πλοίο κινείται δυτικά, για το $λ_ϰ$ ισχύει:

$$λ_ϰ = λ_Α - Δ_{λϰ} = 73^o - 69{,}69026^o = 3{,}30974^o = 3^o 18΄35΄΄W$$

Άρα Κ (52°3΄38΄΄N, 3°18΄35΄΄W)

8.6.5 Τύποι υπολογισμού συντεταγμένων κορυφαίου σημείου στη Ναυτιλία

Οι Πλοίαρχοι, για την εύρεση του στίγματος του κορυφαίου σημείου, εφαρμόζουν απευθείας τους παρακάτω τύπους:

1) Για το γεωγραφικό πλάτος $\varphi_\varkappa$:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\varphi_\varkappa = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu Z_{\lambda\alpha}}$$

2) Για τη διαφορά μήκους σημείου αναχώρησης και κορυφαίου $\Delta_{\lambda\varkappa}$:

$$\boxed{\sigma\varphi\Delta_{\lambda\varkappa} = \eta\mu\varphi \cdot \varepsilon\varphi Z_{\lambda\alpha}}$$

όπου $A(\varphi,\lambda)$ το σημείο αναχώρησης και $Z_{\lambda\alpha}$ η αρχική πορεία της ορθοδρομικής πλεύσης.

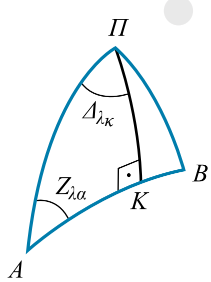
– Απόδειξη των τύπων

Θεωρούμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.31.
Για την πλευρά $A\Pi$ ισχύει: $A\Pi = 90^o - \varphi$
Για την πλευρά ΠK ισχύει: $\Pi K = 90 - \varphi_\varkappa$
Για την εφαρμογή των Νόμων Napier χρησιμοποιούμε τη διάταξη του σχήματος 8.32.
Από τον 2^o Νόμο του Napier έχουμε:

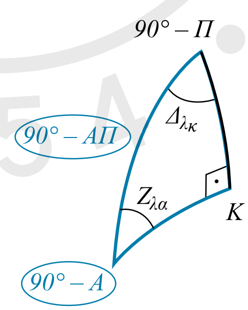
$$\eta\mu\Pi K = \sigma\upsilon\nu(90^o - A\Pi) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^o - A) \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\Pi K = \eta\mu A\Pi \cdot \eta\mu A \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu(90^o - \varphi_\varkappa) = \eta\mu(90^o - \varphi) \cdot \eta\mu A \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\varphi_\varkappa = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu Z_{\lambda\alpha}$$

Από τον 1^o Νόμο του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^o - A\Pi) = \varepsilon\varphi(90^o - A) \cdot \varepsilon\varphi(90^o - \Pi) \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu A\Pi = \sigma\varphi A \cdot \sigma\varphi\Pi \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu(90^o - \varphi) = \sigma\varphi Z_{\lambda\alpha} \cdot \sigma\varphi\Delta_{\lambda\varkappa} \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\varphi = \frac{1}{\varepsilon\varphi Z_{\lambda\alpha}} \cdot \sigma\varphi\Delta_{\lambda\varkappa} \Leftrightarrow$$
$$\sigma\varphi\Delta_{\lambda\varkappa} = \eta\mu\varphi \cdot \varepsilon\varphi Z_{\lambda\alpha}$$



Σχ. 8.31



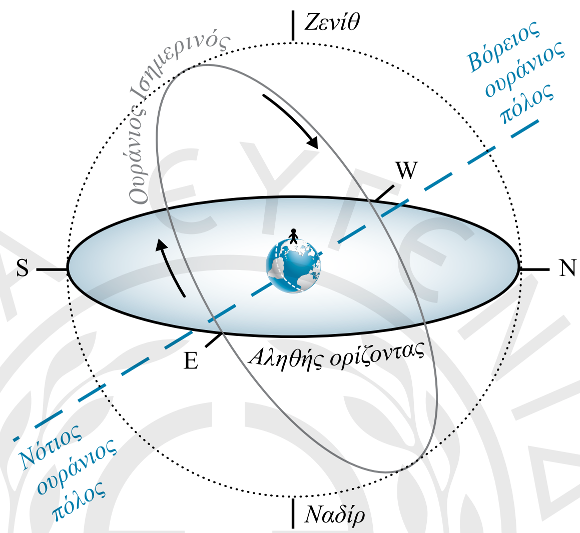
Σχ. 8.32

8.6.6 Στοιχεία ουράνιας σφαίρας

Ουράνια σφαίρα ονομάζουμε τη σφαίρα στην οποία βρίσκονται τα άστρα και η οποία έχει κέντρο το κέντρο της γης. Επειδή η ακτίνα της έχει «άπειρο» μήκος, η ακτίνα της γης θεωρείται αμελητέα σε σχέση με αυτήν, και έτσι οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια της γης μπορεί να θεωρηθεί κέντρο της ουράνιας σφαίρας. Ένας παρατηρητής που βρίσκεται στην επιφάνεια της γης βλέπει τα ουράνια σώματα να κινούνται από ανατολή προς δύση.

Κατακόρυφος ενός τόπου *T* της επιφάνειας της γης ονομάζεται η διεύθυνση της γήινης ακτίνας που διέρχεται από τον τόπο αυτόν. Η προέκταση της κατακορύφου ενός τόπου προς τα επάνω «τέμνει» την ουράνια σφαίρα σε σημείο ***Z***, που ονομάζεται ***Ζενίθ*** του τόπου, ενώ η προέκτασή της προς τα κάτω «τέμνει» την ουράνια σφαίρα σε σημείο ***N***, που ονομάζεται ***Ναδίρ*** του τόπου (σχ. 8.33).

Κάθε επίπεδο κάθετο στον κατακόρυφο ονομάζεται ***ορίζοντας***. Ο ορίζοντας που διέρχεται από το κέντρο της γης ονομάζεται ***αληθής*** ή ***ουράνιος ορίζοντας***. Ο ορίζοντας, το επίπεδο του οποίου διέρχεται από τον οφθαλμό του παρατηρητή, ονομάζεται ***φαινομενικός ορίζοντας***. Το επίπεδο που εφάπτεται στη γήινη επιφάνεια στο σημείο που βρίσκεται ο παρατηρητής (στίγμα) ονομάζεται ***αισθητός ορίζοντας***.



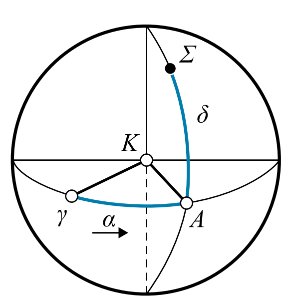
Σχ. 8.33

Άξονας του κόσμου ονομάζεται ο άξονας της γης αν προεκταθεί έως ότου να συναντήσει την ουράνια σφαίρα. Ο άξονας περιστροφής της Γης τέμνει την ουράνια σφαίρα σε δύο σημεία Π και Π΄, που ονομάζονται ***βόρειος (ουράνιος) πόλος*** και ***νότιος (ουράνιος) πόλος***.

Ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που είναι κάθετος στον άξονα ΠΠ΄ ονομάζεται ***ουράνιος ισημερινός*** και το επίπεδό του συμπίπτει με το επίπεδο του γήινου ισημερινού.

Κάθε μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που διέρχεται από τους πόλους λέγεται ***ουράνιος μεσημβρινός***. Ο μεσημβρινός που διέρχεται από έναν αστέρα λέγεται ***ωριαίος*** ή ***ωρικός κύκλος*** του αστέρα.

Κλίση δ ενός σημείου ή ενός αστέρα ονομάζεται η γωνιώδης απόστασή του από τον ουράνιο ισημερινό, δηλαδή το τόξο *ΣΑ* του ωρικού κύκλου που περιλαμβάνεται μεταξύ του αστεριού *Σ* και του ισημερινού (σχ. 8.34). Η συμπληρωματική γωνία 90^{o} – δ ονομάζεται ***πολική απόσταση*** του αστέρα και μετριέται πάνω στον ωριαίο του αστέρα από τον βόρειο προς τον νότιο πόλο της ουράνιας σφαίρας.



Σχ. 8.34

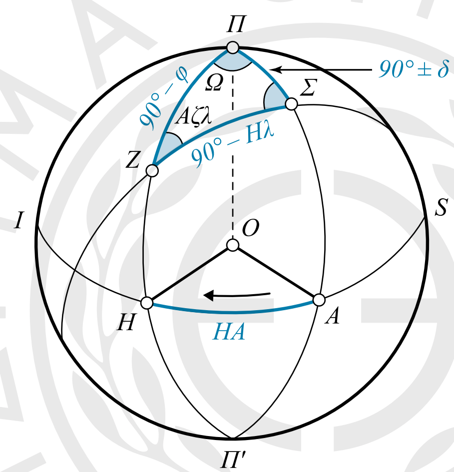
Ορθή αναφορά α ενός σημείου ή ενός αστέρα ονομάζεται η δίεδρη γωνία που σχηματίζει ο ωρικός κύκλος του με τον ωρικό του εαρινού σημείου *γ*, δηλαδή είναι το τόξο *γΑ* του ουράνιου ισημερινού (σχ. 8.34).

Ωρική ή ***ωριαία γωνία LHA*** ονομάζεται η δίεδρη γωνία που σχηματίζει ο ωρικός κύκλος του αστέρα με τον μεσημβρινό του τόπου του παρατηρητή. Το μέτρο της ισούται με το αντίστοιχο μέτρο του τόξου του ισημερινού. Μετριέται με αρχή τον μεσημβρινό προς τον ωρικό κύκλο, προς δυτικά, και κυμαίνεται από 0^o έως 360^o.

Ύψος ή ***αληθές ύψος*** H_λ ενός αστέρα ή ενός σημείου ονομάζεται η γωνιακή απόσταση από τον αληθή ορίζοντα του τόπου του παρατηρητή, δηλαδή το τόξο του κάθετου κύκλου του αστεριού, που περιλαμβάνεται μεταξύ αυτού και του αληθή ορίζοντα. Μετριέται με αρχή τον ορίζοντα και κυμαίνεται από 0^o εως 90^o.

8.6.7 Τρίγωνο θέσης

Το σφαιρικό τρίγωνο που ορίζεται από το ζενίθ του παρατηρητή **Ζ**, τον βόρειο ουράνιο πόλο ***Π*** και τον αστέρα ***Σ*** (σχ. 8.35), ονομάζεται ***τρίγωνο θέσης*** του αστέρα.



Σχ. 8.35

– Κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσης

Τα κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσης είναι τα εξής:

1) Η πλευρά ***ΠΖ*** λέγεται ***πολοζενιθιακή απόσταση***, και μετρά την επί του μεσημβρινού απόσταση του τόπου από τον άνω πόλο. Ισχύει:

$$\boxed{\Pi Z = 90^o - \varphi}$$

2) Η πλευρά ***ΠΣ*** λέγεται ***πολική απόσταση***, και μετράει την απόσταση του αστέρα πάνω στον ωρικό κύκλο από τον άνω πόλο. Για την *ΠΣ* ισχύει:

$$\boxed{\Pi\Sigma = \begin{cases} 90^o - \delta, & \text{αν } \varphi, \delta \text{ ομώνυμα} \\ 90^o + \delta, & \text{αν } \varphi, \delta \text{ ετερώνυμα} \end{cases}}$$

3) Η πλευρά ***ΖΣ*** λέγεται ***ζενιθιακή απόσταση***, και μετρά την απόσταση του αστέρα *Σ* πάνω στον κάθετο κύκλο από το Ζενίθ. Ισχύει:

$$\boxed{Z\Sigma = 90^o - H_\lambda}$$

4) Η γωνία ***Ζ*** λέγεται ***αζιμούθ του αστέρα*** $A_{\zeta\lambda}$.

5) Η γωνία **Σ** λέγεται ***γωνία θέσης του αστέρα***.

6) Η γωνία **Ω** με κορυφή τον πόλο *Π* και πλευρές τον μεσημβρινό του τόπου και τον ωρικό κύκλο του αστεριού, είναι η ***ωρική γωνία LHA του αστέρα***.

Πρόβλημα 8.4

Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 40°48'N$. Η κλίση του ήλιου είναι $18^o42'N$ και η $LHA = 100^o$. Να βρεθεί το ύψος του ήλιου και το αζιμούθ.

Λύση

$\Pi Z = 90^o - \varphi = 90^o - 40^o48' = 90^o - 40{,}8^o = 49{,}2^o$

$\Pi\Sigma = 90^o - \delta = 90^o - 18^o42' = 90^o - 18{,}7^o = 71{,}3^o$

Στο σφαιρικό τρίγωνο *ΠΖΣ* (σχ. 8.36) γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενή τους γωνία. Άρα θα εφαρμόσουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές, προκειμένου να βρούμε την πλευρά *ΖΣ*.

$$\sigma\upsilon\nu Z\Sigma = \sigma\upsilon\nu \Pi Z \cdot \sigma\upsilon\nu \Pi\Sigma + \eta\mu \Pi Z \cdot \eta\mu \Pi\Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu LHA \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}Z\Sigma = \text{συν}49{,}2^o \cdot \text{συν}71{,}3^o + \text{ημ}49{,}2^o \cdot \text{ημ}71{,}3^o \cdot \text{συν}100^o \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu Z\Sigma = 0{,}08498$$

Άρα $Z\Sigma = \text{συν}^{-1}0{,}08498 = 85{,}12513^o$

$Z\Sigma = 90^o - H_\lambda \Leftrightarrow 85{,}12513^o = 90^o - H_\lambda \Leftrightarrow H_\lambda = 4{,}87487^o$ είναι το ύψος του ήλιου.

Για το αζιμούθ, πάλι από τον Νόμο των Συνημιτόνων για την πλευρά *ΠΣ* έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu \Pi\Sigma = \sigma\upsilon\nu \Pi Z \cdot \sigma\upsilon\nu Z\Sigma + \eta\mu \Pi Z \cdot \eta\mu Z\Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu A_{\zeta\lambda} \Leftrightarrow$$

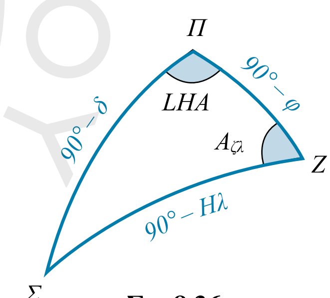
$$\sigma\upsilon\nu A_{\zeta\lambda} = \frac{\sigma\upsilon\nu \Pi\Sigma - \sigma\upsilon\nu \Pi Z \cdot \sigma\upsilon\nu Z\Sigma}{\eta\mu \Pi Z \cdot \eta\mu Z\Sigma} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu A_{\zeta\lambda} = \frac{\sigma\upsilon\nu 71{,}3^o - \sigma\upsilon\nu 49{,}2^o \cdot \sigma\upsilon\nu 85{,}12513^o}{\eta\mu 49{,}2^o \cdot \eta\mu 85{,}12513^o} \Leftrightarrow$$

$$\text{συνA}_{\zeta\lambda} = 0{,}35145$$

$$A_{\zeta\lambda} = \sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}35145 = 69{,}42397^o.$$

Τελικά $A_{\zeta\lambda} = N\ 69{,}42397^o\ W$.



Σχ. 8.36

Πρόβλημα 8.5

Να υπολογιστεί η ωρική γωνία LHA ενός αστέρα Σ, του οποίου η κλίση είναι $\delta = 23^o48'N$, σε έναν τόπο πλάτους $\varphi = 48°18'N$, τη στιγμή που ο αστέρας διέρχεται από τον 1^o κάθετο μετά την άνω μεσημβρινή διάβασή του.

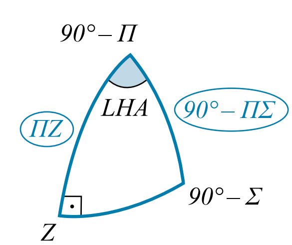
Λύση

Επειδή ο αστέρας βρίσκεται στον 1^o κάθετο, το σχηματιζόμενο τρίγωνο θέσης είναι ορθογώνιο με $A_{\zeta\lambda} = 90^o$.

$\Pi Z = 90^o - \varphi = 90^o - 48°18' = 90^o - 48{,}3^o = 41{,}7^o$

$\Pi\Sigma = 90^o - \delta = 90^o - 23°48' = 90^o - 23{,}8^o = 66{,}2^o$

Για την εφαρμογή του κανόνα Napier, σχηματίζουμε τη διάταξη του σχήματος 8.37.



Σχ. 8.37

Από τον 1^{o} κανόνα του Napier έχουμε:

$$ημ(90^{o}-\Pi) = εφΠΖ \cdot εφ(90^{o}-ΠΣ) \Leftrightarrow συνΠ = εφΠΖ \cdot σφΠΣ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συνLHA = \frac{εφΠΖ}{εφΠΣ} \Leftrightarrow συνLHA = \frac{εφ41{,}7^{o}}{εφ66{,}2^{o}} = \frac{0{,}87543}{2{,}2673} = 0{,}38611$$

Άρα $LHA = συν^{-1}0{,}38611 = 67{,}28733$.

Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ΓΔΕ$ με $Ε = 90^{o}$. Να συμπληρωθούν τα κενά:
α) $ημδ = ημ\_\_ \cdot ημ\_\_$
β) $ημ\_\_ = εφγ \cdot σφ\_\_$
γ) $συν\_\_ = συν\_\_ \cdot ημΔ$

2. Δίνεται ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ΓΔΕ$ με $\Gamma = 90^{\circ}$. Να συμπληρωθούν τα κενά:
α) $ημε = ημ\_\_ \cdot ημ\_\_$
β) $συνΕ = εφ\_\_ \cdot σφ\_\_$
γ) $συν\_\_ = συν\_\_ \cdot ημΕ$

3. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Α = 90^{o}$, $α = 108^{o}$ και $β = 46^{o}$.

4. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Α = 90^{o}$, $Γ = 65^{o}$ και $β = 30^{o}$.

5. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Α = 90^{o}$, $β = 110^{o}$ και $γ = 34^{o}$.

6. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Α = 90^{o}$, $α = 105^{o}$ και $Γ = 74^{o}$.

7. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Α = 90^{o}$, $β = 54^{o}$ και $Β = 82^{o}$.

8. Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $α = 90^{o}$, $Β = 132^{o}$ και $Γ = 68^{o}$.

9. Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $α = 90^{o}$, $Β = 148^{o}$ και $γ = 115^{o}$.

10. Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $Α = 112^{o}$, $Β = 84^{o}$ και $Γ = 53^{o}$.

11. Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $α = 87^{o}$, $β = 106^{o}$ και $γ = 66^{o}$.

12. Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $α = 72^{o}$, $Β = 26^{o}$ και $Γ = 50^{o}$.

13. Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $α = 98^{o}30'$, $β = 44^{o}24'$ και $Γ = 50^{o}$.

14. Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $α = 36^{o}$, $β = 44^{o}$ και $Α = 32^{o}$.

15. Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $Α = 76^{o}30'$, $Β = 24^{o}24'$ και $α = 30^{o}$.

16. Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο $Α$ με $φ_A = 38°24'N$, $λ_A = 143^{o}E$ έως ένα σημείο Β με $φ_B = 58^{o}42'N$, $λ_B = 171^{o}\,E$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική του απόσταση και η αρχική του πορεία.

17. Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο $Α$ με $φ_A = 44^{o}54'N$, $λ_A = 10^{o}16'W$ έως ένα σημείο Β με $φ_B = 33^{o}23'N$, $λ_B = 72^{o}23'W$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική του απόσταση.

18. Ένα πλοίο ξεκινά από σημείο εκκίνησης με $Αφ_A = 47^{o}09'N$, $λ_A = 33^{o}48'W$ και κατευθύνεται προς ένα σημείο άφιξης $Β$ με $φ_B = 21^{o}46'N$, $λ_B = 70^{o}21'W$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να βρεθούν η ορθοδρομική απόσταση ΑΒ και η αρχική ορθοδρομική του πορεία.

19. Ένα πλοίο αναχωρεί από σημείο $Α$ με $φ_A = 32^{o}42'N$, $λ_A = 140^{o}E$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου με αρχική πλεύση 60°30΄. Να βρεθεί το στίγμα του κορυφαίου σημείου της ορθοδρομίας.

20. Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο A με $\varphi_A = 43^{o}42'N$, $\lambda_A = 56^{o}12'W$ έως ένα σημείο B με $\varphi_B = 39^{o}24'N$, $\lambda_B = 28^{o}42'W$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί:

α) Η ορθοδρομική του απόσταση.

β) Η αρχική του πλεύση.

γ) Οι συντεταγμένες του κορυφαίου σημείου.

21. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση μεταξύ των παρακάτω τόπων, καθώς και η αρχική πλεύση του πλοίου:

α) Φιλιππίνες ($\varphi_A = 13^{o}N$, $\lambda_A = 126^{o}E$), Γιοκοχάμα ($\varphi_A = 35^{o}26'N$, $\lambda_A = 139^{o}38'E$).

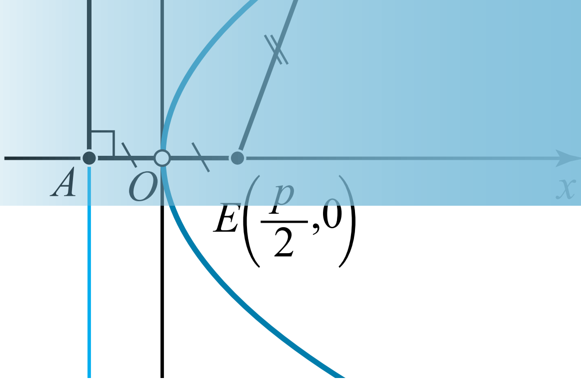
β) Γιβραλτάρ ($\varphi_A = 35^{o}57'N$, $\lambda_A = 5^{o}36'W$), Νέα Υόρκη ($\varphi_B = 40^{o}30'N$, $\lambda_B = 74^{o}06'E$).

γ) Πουέρτο Ρίκο ($\varphi_A = 18^{o}45'N$, $\lambda_A = 66^{o}12'E$), Καζαμπλάνκα ($\varphi_B = 33^{o}37'12''N$, $\lambda_B = 7^{o}36'W$).

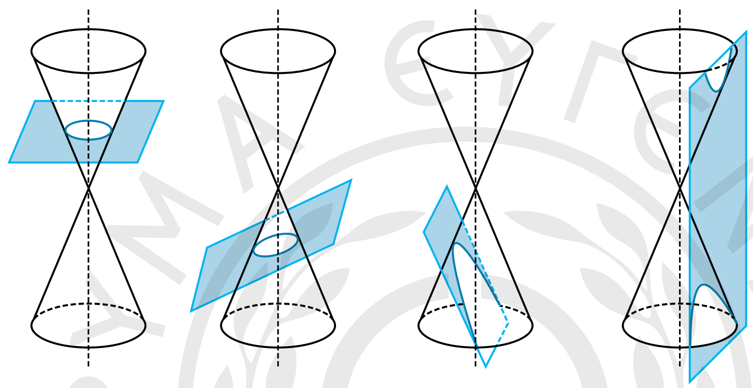
22. Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 26^{\circ}48'N$. Η κλίση του ήλιου είναι $32^{o}12'N$ και η LHA = 125°. Να βρεθεί το ύψος του ήλιου και το αζιμούθ.

κεφάλαιο 9

Κωνικές τομές



Κωνική τομή ονομάζεται μια ***καμπύλη*** που προκύπτει από την τομή ενός επιπέδου με δύο ίσες ορθές άπειρες κωνικές επιφάνειες που έχουν κοινή κορυφή και οι άξονες περιστροφής τους είναι αντικείμενες ημιευθείες. Η θέση του επιπέδου ως προς τον κώνο καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής. Όλες οι δυνατές τέτοιες καμπύλες παρουσιάζονται στο σχήμα 9.1.



(α) Κύκλος (β) Έλλειψη (γ) Παραβολή (δ) Υπερβολή

Σχ. 9.1

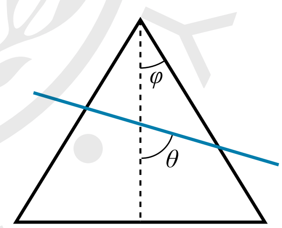
Τέμνοντας την άπειρη κωνική επιφάνεια με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα της παίρνουμε έναν κώνο. Έστω ότι φ είναι η ημιγωνία της κορυφής του κώνου και θ η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο της κωνικής τομής με το ύψος του κώνου (σχ. 9.2):

1) Εάν το επίπεδο είναι κάθετο στο ύψος του κώνου η κωνική τομή είναι ένας ***κύκλος***.

2) Εάν ισχύει $\varphi<\theta$, τότε η κωνική τομή είναι μια ***έλλειψη***.

3) Εάν $\varphi=\theta$, δηλαδή το επίπεδο της κωνικής τομής είναι παράλληλο προς μια γενέτειρα του κώνου, η κωνική τομή είναι ***παραβολή***.

4) Εάν $\varphi>\theta$, τότε η κωνική τομή είναι ***υπερβολή***.



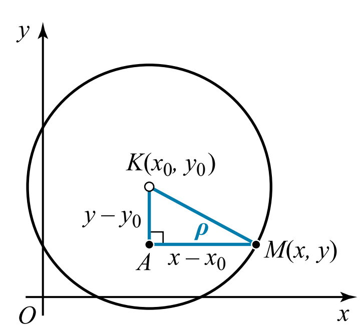
Σχ. 9.2

9.1 Ο κύκλος

9.1.1 Εξίσωση κύκλου με κέντρο και ακτίνα ρ

Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και C ο κύκλος με κέντρο το $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ (σχ. 9.3). Είδαμε στο κεφάλαιο 4 ότι ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση ρ από το κέντρο του κύκλου. Άρα ένα σημείο $M(x,y)$ θα είναι σημείο του κύκλου αν και μόνον αν:

$$(\mathrm{KM}) = \rho$$

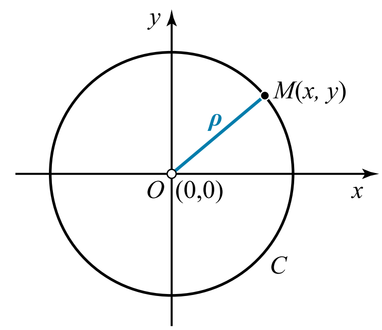


Σχ. 9.3

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΜ του σχήματος 9.3 έχουμε:

$$(\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{KA})^2 = (\mathrm{KM})^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varrho^2} \quad (1)$$



Σχ. 9.4

Για παράδειγμα η εξίσωση κύκλου με $K(2,-5)$ και ακτίνα $\varrho=3$ είναι:

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

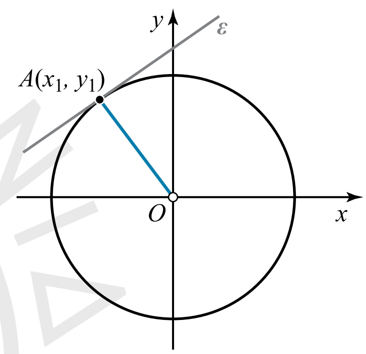
Ειδική περίπτωση: ***Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων*** (σχ. 9.4).

Προφανώς σε αυτήν την περίπτωση $x_0 = y_0 = 0$. Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\boxed{x^2 + y^2 = \varrho^2}$$

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\varrho = 1$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ και λέγεται ***μοναδιαίος κύκλος*** ή ***τριγωνομετρικός κύκλος***.

9.1.2 Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων



Σχ. 9.5

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \varrho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$ (σχ. 9.5). Αν $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της ε, τότε η εξίσωση της ε είναι:

$$\boxed{x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \varrho^2}$$

Παράδειγμα 9.1

Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 100$.

1) Στο σημείο $A(6,8)$

2) Που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = 3x - 5$

Λύση

1) Το σημείο $A(6,8)$ είναι σημείο του κύκλου διότι επαληθεύει την εξίσωση του: $6^2 + 8^2 = 100$.

Είναι δηλαδή το σημείο επαφής. Επομένως θέτουμε στην εξίσωση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \varrho^2$ $x_1 = 6, y_1 = 8$ και $\varrho = 10$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$6x + 8y = 100 \Leftrightarrow 3x + 4y = 50$$

2) Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης ε με τον C. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 100 \Leftrightarrow y = -\frac{x_1}{y_1} \cdot x + \frac{100}{y_1}$$

Επειδή η εφαπτομένη και η δ είναι παράλληλες, έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Άρα:

$$-\frac{x_1}{y_1} = 3 \Leftrightarrow x_1 = -3y_1 \quad (1)$$

Το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του C και άρα επαληθεύει την εξίσωση του: $x_1^2 + y_1^2 = 100$ και με αντικατάσταση της (1):

$$(-3y_1)^2 + y_1^2 = 100 \Leftrightarrow 9y_1^2 + y_1^2 = 100 \Leftrightarrow 10y_1^2 = 100 \Leftrightarrow y_1^2 = 10 \Leftrightarrow y_1 = \sqrt{10}$$

$$\text{ή} \quad y_1 = -\sqrt{10}$$

– Αν $y_1 = \sqrt{10} \Rightarrow x_1 = -3y_1 = -3\sqrt{10}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon : -3\sqrt{10} \cdot x + y \cdot \sqrt{10} = 100$$

– Αν $y_1 = -\sqrt{10} \Rightarrow x_1 = -3y_1 = 3\sqrt{10}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon : -3\sqrt{10} \cdot x - y \cdot \sqrt{10} = 100$$

Ας δούμε τώρα μια διαφορετική μορφή εξίσωσης κύκλου:

Θεώρημα 9.1: Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0} \qquad (2)$$

$$\text{με } \boxed{A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0}$$

παριστάνει κύκλο, και αντιστρόφως, κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής (2)

Το κέντρο του κύκλου είναι: $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ και η ακτίνα είναι: $\boxed{\varrho = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}}$

Απόδειξη

Ευθύ: Η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή:

$$x^2 + Ax + y^2 + By = -\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 + 2\frac{A}{2}x + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{B}{2}y + \frac{B^2}{4}\right) = -\Gamma + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \qquad (3)$$

1) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ τότε η εξίσωση (3) γράφεται:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}\right)^2$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\varrho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}.$$

2) Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$ τότε η (3) παριστάνει σημείο, ενώ
3) αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$ τότε η (3) είναι αδύνατη.

Αντιστρόφως: Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και C ο κύκλος με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ϱ. Είδαμε ότι ο C έχει εξίσωση:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varrho^2$$

Αν αναπτύξουμε τις ταυτότητες η εξίσωση αυτή γίνεται:

$$x^2-2x\cdot x_0+x_0^2+y^2-2y\cdot y_0+y_0^2=\varrho^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x\cdot x_0+2y\cdot y_0+x_0^2+y_0^2-\varrho^2=0$$

Δηλαδή παίρνει τη μορφή: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ όπου:

$$A=-2x_0,\ B=-2y_0 \text{ και } \Gamma=x_0^2+y_0^2-\varrho^2.$$

Παράδειγμα 9.2

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ παριστάνει κύκλο, και αν ναι, να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Λύση

$A^2+B^2-4\Gamma=(-6)^2+4^2-4\cdot 12=4>0$ άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

Το κέντρο του κύκλου είναι: $K\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ ή $K(3,-2)$

Η ακτίνα είναι $\varrho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{4}}{2}=1$

Εξίσωση κύκλου: $C:(x-3)^2+(y+2)^2=1$

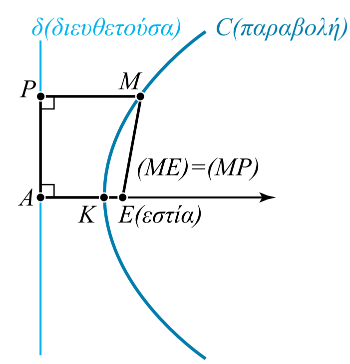
9.2 Η παραβολή

Παραβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία δ που λέγεται ***διευθετούσα της παραβολής*** και από ένα σταθερό σημείο E που λέγεται ***εστία της παραβολής*** (σχ. 9.6).

Δηλαδή: $M\in C \Leftrightarrow (ME)=d(M,\delta)$.

Το σημείο K στο οποίο η κάθετη προς την δ από την E τέμνει την C λέγεται ***κορυφή της παραβολής***.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την παραβολή στην ειδική περίπτωση που η εστία είναι σημείο των αξόνων και η διευθετούσα είναι κάθετη σε έναν άξονα.



Σχ. 9.6

9.2.1 Εξίσωση παραβολής

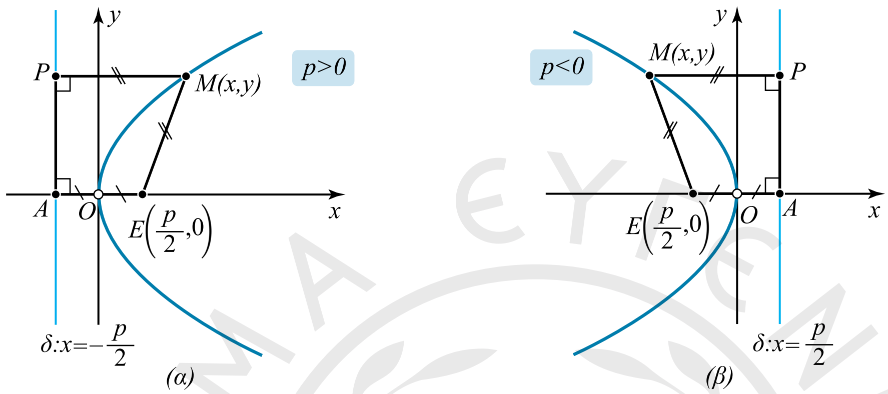
1) Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x=-\dfrac{p}{2}$ είναι:

$$\boxed{y^2=2px}$$

Απόδειξη

Έστω C η παραβολή με εστία Ε σημείο του άξονα $x'x$ και διευθετούσα δ κάθετη στον $x'x$. Θα βρούμε την εξίσωση της παραβολής C ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή Ο την κορυφή της παραβολής. Έστω ότι η εστία έχει τετμημένη $\frac{p}{2}$. Τότε η διευθετούσα θα έχει εξίσωση $\delta: x = -\frac{p}{2}$.

Έχουμε δύο γραφικές παραστάσεις ανάλογα με το αν $p > 0$ [σχ. 9.7 (α)] ή αν $p < 0$ [σχ. 9.7(β)].



Σχ. 9.7

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής, ένα σημείο $M(x,y)$ θα ανήκει στη C, αν και μόνο αν ισχύει:

$$d(M,\delta) = (ME) \Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

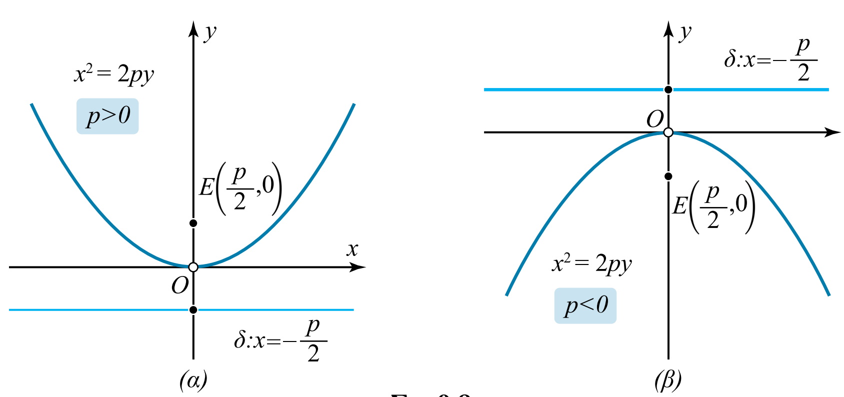
$$\left|x + \frac{p}{2}\right|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 - 2\cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2\cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 - 2\cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot p = -x \cdot p + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

2) Ομοίως αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$ είναι:

$$\boxed{x^2 = 2py}$$



Σχ. 9.8

Ο αριθμός p λέγεται ***παράμετρος*** της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση της εξίσωσης $x^2 = 2py$ λύνοντας ως προς y έχουμε $y = -\frac{1}{2p} \cdot x^2$ που είναι η γνωστή συνάρτηση $y = ax^2$ η οποία έχει γραφική παράσταση παραβολή, την οποία είδαμε στο Κεφάλαιο 2.

Παράδειγμα 9.3

Να γραφεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O και εστία

α) $E(3,0)$, β) $E(-2,0)$, γ) $E(0,3)$, δ) $E(0,-5)$.

Λύση

α) Επειδή $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ είναι $\frac{p}{2} = 3$, άρα $p = 6$, οπότε: $y^2 = 2px \Leftrightarrow y^2 = 2 \cdot 6 \cdot x \Leftrightarrow y^2 = 12 \cdot x$

β) Επειδή $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ είναι $\frac{p}{2} = -2$, άρα $p = -4$, οπότε: $y^2 = 2px \Leftrightarrow y^2 = 2 \cdot (-4) \cdot x \Leftrightarrow y^2 = -8 \cdot x$

γ) Επειδή $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ είναι $\frac{p}{2} = 3$, άρα $p = 6$, οπότε: $x^2 = 2py \Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot 6 \cdot y \Leftrightarrow x^2 = 12 \cdot y$

δ) Επειδή $E\left(0,\frac{p}{2}\right) \Rightarrow \frac{p}{2} = -5$, άρα $p = -10$, οπότε: $x^2 = 2py \Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot (-10) \cdot y \Leftrightarrow x^2 = -20 \cdot y$

9.2.2 Εξίσωση εφαπτομένης παραβολής

1) Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ (βλ. σχ. 9.9) έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$$

2) Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : x \cdot x_1 = p \cdot (x + x_1)$$

Παράδειγμα 9.4

Δίνεται η παραβολή $y^2 = -8x$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, που διέρχεται από το σημείο:

α) $A(-2,4)$, β) $B(2,3)$.

Λύση

α) Το σημείο $A(-2,4)$ είναι σημείο της παραβολής διότι επαληθεύει την εξίσωση της: $4^2 = -8 \cdot (-2)$. Επομένως είναι το σημείο επαφής.

$$y^2 = -8x \Leftrightarrow y^2 = 2 \cdot (-4)x, \text{ άρα } p = -4.$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon \colon y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1) \Leftrightarrow 4y = -4\,(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

β) Το σημείο $B(2{,}3)$ δεν είναι σημείο της παραβολής διότι $3^2 \neq -8 \cdot 2$. Άρα αναμένουμε 2 εφαπτόμενες από το B προς την C.

Έστω $A(x_1{,}y_1)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:

$$\varepsilon \colon y \cdot y_1 = -4 \cdot (x + x_1)$$

Επειδή η ε διέρχεται από το $B(2{,}3)$, έχουμε:

$$\varepsilon \colon y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1) \Leftrightarrow 3y_1 = -4\,(2 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = \frac{-8 - 4x_1}{3}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της παραβολής $y^2 = -8x$ έχουμε:

$$\left(\frac{-8-4x_1}{3}\right)^2 = -8x_1 \Leftrightarrow \left(8+4x_1\right)^2 = -72x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64 + 64x_1 + 16x_1^2 = -72x_1 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 17x_1 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x_1 = -8$$

– Αν $x_1 = -\frac{1}{2}$ τότε $y_1 = \dfrac{-8-4x_1}{3} = \dfrac{-8-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = -2$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:

$$y \cdot y_1 = p \cdot \left(x + x_1\right) \Leftrightarrow -2y = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

– Αν $x_1 = -8$ τότε $y_1 = \dfrac{-8-4x_1}{3} = 8$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:

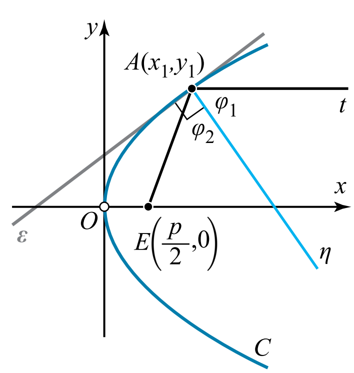
$$y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1) \Leftrightarrow 8y = -4\,(x-8) \Leftrightarrow 2y + x = 8 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

9.2.3 Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής A διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία AE και η ημιευθεία At, που είναι ομόρροπη της OE, όπου E είναι η εστία της παραβολής.

Δηλαδή, στο σχήμα 9.8 η ημιευθεία $A\eta$ που είναι κάθετη στην εφαπτομένη ε διχοτομεί τη γωνία EAt:

$$\widehat{\varphi_1} = \widehat{\varphi_2}$$



Σχ. 9.9

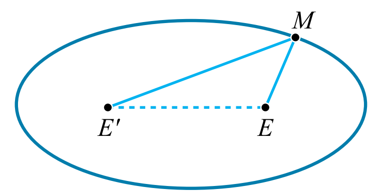
Η ιδιότητα αυτή λέγεται ***ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής*** και ουσιαστικά σημαίνει ότι αν η παραβολή ήταν κοίλο κάτοπτρο στο οποίο προσπίπτει δέσμη φωτός παράλληλη στον άξονα του OE, τότε η κάθε μία ακτίνα ανακλώμενη προσπίπτει στην εστία E. Χρήση της παραπάνω ιδιότητας γίνεται στα παραβολικά τηλεσκόπια και στα ραντάρ.

9.3 Η έλλειψη

Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από 2 σταθερά σημεία E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης των δύο σημείων (σχ. 9.10).

Τα σημεία E και E' ονομάζονται ***εστίες της έλλειψης***, και η μεταξύ τους απόσταση, εστιακή απόσταση και συμβολίζεται με 2γ.

Το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες συμβολίζεται με 2α**.** Δηλαδή αν M τυχαίο σημείο της έλλειψης, τότε ισχύει:



Σχ. 9.10

$$(ME) + (ME') = 2\alpha$$

Από τριγωνική ανισότητα στο $EM'E'$ ισχύει $(EE') < (ME) + (M'E')$ δηλ. $2\gamma < 2\alpha \Leftrightarrow \gamma < \alpha$. Αν $\gamma = 0$, τότε τα σημεία E', E συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το E και ακτίνα α.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση που οι εστίες της έλλειψης είναι πάνω στον άξονα $x'x$ ή στον $y'y$.

9.3.1 Εξίσωση έλλειψης

1) Εξίσωση έλλειψης όταν οι εστίες είναι στον x'x και ο άξονας y'y είναι μεσοκάθετος του EE':

$$\boxed{C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \quad \text{όπου: } \boxed{\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2}$$

Επειδή $(EE') = 2\gamma$, οι εστίες είναι πάνω στον $x'x$ και ο $y'y$ είναι μεσοκάθετος του EE', οι εστίες έχουν συντεταγμένες $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ (σχ. 9.11).

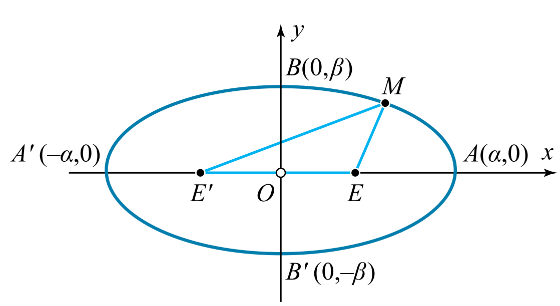
Από την εξίσωση της έλλειψης για $y = 0$ βρίσκουμε:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$$

Επομένως, η έλλειψη τέμνει τον άξονα xx στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$. Ενώ για $x = 0$ βρίσκουμε $y = \beta$ ή $y = -\beta$, δηλαδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0,-\beta)$ και $B(0,\beta)$.

2) Εξίσωση έλλειψης όταν οι εστίες είναι στον y'y και ο άξονα x'x είναι μεσοκάθετος του EE':

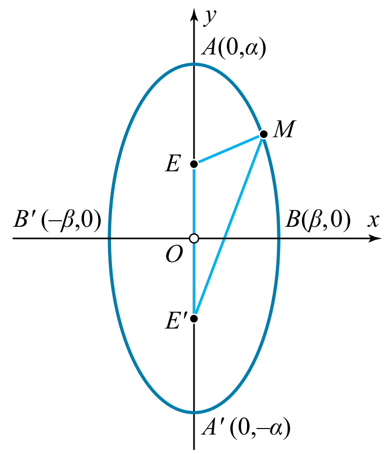
$$\boxed{C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1} \quad \text{όπου: } \boxed{\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2}$$



Σχ. 9.11

Οι εστίες είναι στον $y\acute{}y$ οπότε έχουν συντεταγμένες $E(0,\gamma)$ και $E\acute{}(0,-\gamma)$ (σχ. 9.12).

Θέτοντας στην εξίσωση της έλλειψης $y = 0$ βρίσκουμε $x = \beta$ ή $x = -\beta$, ενώ για $x = 0$ βρίσκουμε $y = \alpha$ ή $y = -\alpha$. Επομένως, η έλλειψη τέμνει τον άξονα $x\acute{}x$ στα σημεία $B\acute{}(-\beta,0)$ και $B(\beta,0)$, ενώ τον άξονα $y\acute{}y$ στα σημεία $A\acute{}(0,-\alpha)$ και $A(0,\alpha)$.



Σχ. 9.12

9.3.2 Χαρακτηριστικά της έλλειψης

1) Τα σημεία $A, A\acute{}, B, B\acute{}$ λέγονται ***κορυφές*** της έλλειψης.

2) Το ευθύγραμμο τμήμα $A\acute{}A$ λέγεται ***μεγάλος άξονας*** της έλλειψης και έχει μήκος **2α**.

3) Το ευθύγραμμο τμήμα $B\acute{}B$ λέγεται ***μικρός άξονας*** της έλλειψης και έχει μήκος **2β**.

4) Η έλλειψη έχει ***κέντρο συμμετρίας*** την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ***άξονες συμμετρίας*** τους άξονες $x\acute{}x$ και $y\acute{}y$.

Παρατήρηση

Από την εξίσωση της έλλειψης μπορούμε να καταλάβουμε τη μορφή της. Επειδή $\alpha>\beta$, καταλαβαίνουμε σε ποιον άξονα βρίσκονται οι εστίες της έλλειψης από τη θέση του α. Όταν ο μεγαλύτερος παρονομαστής (δηλ. το α^2) είναι κάτω από το x^2, οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x\acute{}x$. Όταν ο μεγαλύτερος παρονομαστής είναι κάτω από το y^2, οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $y\acute{}y$.

Παράδειγμα 9.5

Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης

α) Με εστίες $E(-3,0)$ και $E(3,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $2\alpha=10$

β) Με εστίες $E(0,1)$ και $E\acute{}(0,-1)$ και μήκος μεγάλου άξονα $2\alpha=4$

Λύση

α) Είναι $\gamma = 3, \alpha = 5$, οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Και εφόσον οι εστίες είναι στον άξονα $x\acute{}x$, η εξίσωση της έλλειψης έχει γενική μορφή

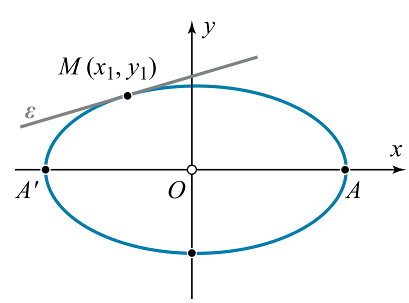
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ άρα: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

β) Είναι $\gamma = 1, \alpha = 2$, οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ άρα: $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

9.3.3 Εξίσωση εφαπτομένης έλλειψης

1) Η εφαπτομένη ε της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο τυχαίο σημείο της $M(x_1,y_1)$ (σχ. 9.13) έχει εξίσωση:

$$\varepsilon\text{: } \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$



Σχ. 9.13

2) Η εφαπτομένη ε της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\beta^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο

τυχαίο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} = 1$$

Παράδειγμα 9.6

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, στο σημείο της $M(-1, 1)$.

Λύση

Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ διότι

$$3x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow + \frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

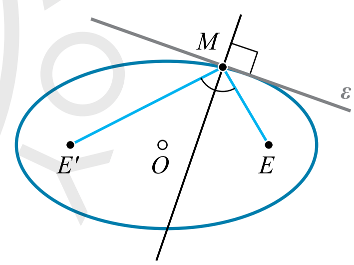
Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής:

$$\frac{x \cdot x_1}{\frac{4}{3}} + \frac{y \cdot y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 3x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 4$$

Για $x_1 = -1$ και $y_1 = 1$ έχουμε: $3x \cdot (-1) + y \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow y = 3x + 4$

9.3.4 Ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $E'ME$, όπου E',E οι εστίες της έλλειψης (σχ. 9.14).



Σχ. 9.14

9.3.5 Εκκεντρότητα έλλειψης

Εκκεντρότητα ε της έλλειψης ονομάζεται το πηλίκο της εστιακής απόστασης 2γ προς το μήκος του μεγάλου άξονα 2α. Δηλαδή:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

Η εκκεντρότητα είναι μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης. Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι $\gamma < \alpha$. Επομένως $\varepsilon < 1$.

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε τα εξής:

Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος β/α και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη, ενώ όταν το ε τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος β/α τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

Παράδειγμα 9.7

Να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα των ελλείψεων:

α) $64x^2 + 36y^2 = 2304$ β) $x^2 + 4y^2 = 4$

Λύση

α) $64x^2 + 36y^2 = 2304 \Leftrightarrow \dfrac{64x^2}{2304} + \dfrac{36y^2}{2304} = \dfrac{2304}{2304} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

Είναι $\alpha^2 = 64$ ή $\alpha = 8$. Άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 2α = 16. Είναι $\beta^2 = 36$ ή $\beta = 6$. Άρα ο μικρός άξονας έχει μήκος 12. Επειδή το α^2 είναι παρονομαστής του y^2, οι εστίες θα είναι στον $y΄y$.

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 64 - 36 = 28 \text{ άρα } \gamma = \sqrt{28} = \sqrt{7}$$

Άρα εστίες: $E(0, 2\sqrt{7})$, $E΄(0, -2\sqrt{7})$

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{7}}{8} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

β) $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4y^2}{4} = \dfrac{4}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Είναι $\alpha^2=4$ ή $\alpha=2$. Άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $2\alpha = 4$. Είναι $\beta^2=1$ ή $\beta = 1$. Άρα ο μικρός άξονας έχει μήκος 2. Επειδή το α^2 είναι παρονομαστής του x^2, οι εστίες θα είναι στον $x΄x$.

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4 - 1 = 3 \text{ άρα } \gamma = \sqrt{3}$$

Άρα εστίες: $E(\sqrt{3},0)$, $E΄(-\sqrt{3},0)$

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9.4 Η υπερβολή

Υπερβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία E και $E΄$ είναι σταθερή και μικρότερη από την απόσταση των δύο σημείων (σχ. 9.15).

Τα σημεία Ε και Ε΄ ονομάζονται *εστίες της υπερβολής* και η μεταξύ τους απόσταση, ονομάζεται ***εστιακή απόσταση*** και συμβολίζεται με 2γ. $(EE΄ = 2\gamma)$

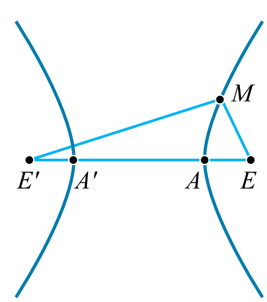
Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του τυχαίου σημείου από τις δύο εστίες συμβολίζεται με **2α**. Δηλαδή αν M τυχαίο σημείο της υπερβολής (σχ. 9.15) ισχύει:

$$|(ME) - (ME΄)| = 2\alpha$$

Επειδή $|(ME) - (ME΄)| < (E΄E)$= είναι $2\alpha<2\gamma$ ή $\alpha<\gamma$.

Τα σημεία A και $A΄$ στα οποία το ευθύγραμμο τμήμα $EE΄$ τέμνει τους δύο κλάδους της υπερβολής, λέγονται ***κορυφές της υπερβολής***.

Στη συνέχεια θα δούμε την εξίσωση της υπερβολής, όταν οι εστίες της είναι πάνω στον άξονα $x΄x$ ή πάνω στον $y΄y$.



Σχ. 9.15

9.4.1 Εξίσωση υπερβολής

1) ***Εξίσωση υπερβολής όταν οι εστίες είναι στον x΄x και ο άξονας y΄y είναι μεσοκάθετος του ΕΕ΄:***

$$\boxed{C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1} \quad \text{όπου: } \boxed{\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2}$$

Εφόσον $EE' = 2\gamma$ και άξονας $y'y$ είναι μεσοκάθετος του EE', οι εστίες της υπερβολής έχουν συντεταγμένες: $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ (σχ. 9.16).

Εάν θέσουμε στην εξίσωση $y = 0$ έχουμε $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$. Άρα η υπερβολή τέμνει τον $x'x$ στις κορυφές $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha,0)$.

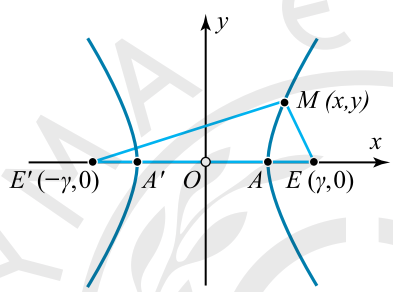
2) ***Εξίσωση υπερβολής όταν οι εστίες είναι στον y΄y και ο άξονα x΄x, είναι μεσοκάθετος του ΕΕ΄:***

$$\boxed{C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1} \quad \text{όπου: } \boxed{\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2}$$

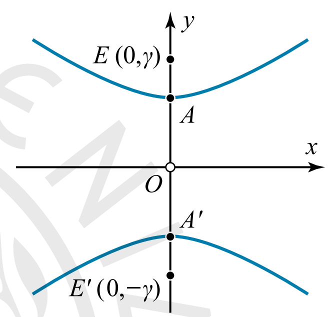
Οι εστίες έχουν συντεταγμένες: $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$.

Οι κορυφές θα είναι: $A(0,\alpha)$ και $A'(0,-\alpha)$ (σχ. 9.17).

Στη περίπτωση που α=β, η υπερβολή λέγεται ***ισοσκελής***, και έχει εξίσωση: $x^2 - y^2 = \alpha^2$.



Σχ. 9.16



Σχ. 9.17

Παρατήρηση

Η «μεταβλητή» (x ή y) που προηγείται στην διαφορά μας δείχνει τον άξονα που φιλοξενεί τις εστίες. Έτσι αν προηγείται το x^2, τότε οι εστίες είναι σημεία του άξονα $x'x$. Το α^2 είναι παρονομαστής πάντα του 1ου κλάσματος.

Παράδειγμα 9.8

Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εστίες:

α) Ε(5,0) και Ε΄(-5,0) και σταθερή διαφορά $2\alpha=8$

β) Ε(0,10) και Ε΄(0,–10) και σταθερή διαφορά $2\alpha=12$

Λύση

α) Είναι $\gamma = 5$ και $\alpha = 4$ οπότε $\beta^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, άρα $C: \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

β) Είναι $\gamma = 10$ και $\alpha = 6$ οπότε $\beta^2 = 10^2 - 2^2 = 64$, άρα $C: \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{64} = 1$

9.4.2 Εξίσωση εφαπτομένης υπερβολής

1) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$

2) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής C: $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ \frac{y\cdot y_1}{\alpha^2}+\frac{x\cdot x_1}{\beta^2}=1$$

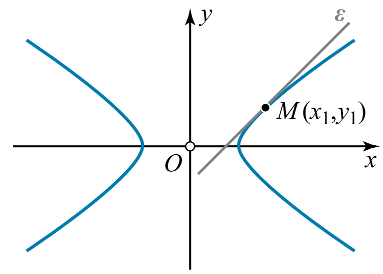
9.4.3 Ασύμπτωτες υπερβολής

Έστω η υπερβολή με εξίσωση

$$C:\ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Ονομάζουμε ***ασύμπτωτες*** της υπερβολής C τις ευθείες με εξίσωση (σχ. 9.18):

$$\varepsilon_1{:}\ y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2{:}\ y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$



Σχ. 9.18

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου $K\Lambda MN$ με κορυφές τα σημεία $K(\alpha,\beta)$, $\Lambda(\alpha,-\beta)$, $M(-\alpha,-\beta)$ και $N(-\alpha,\beta)$. Το ορθογώνιο αυτό λέγεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής (σχ. 9.19). Οι ασύμπτωτες βοηθούν στον σχεδιασμό της υπερβολής. Παρατηρούμε ότι οι κλάδοι της υπερβολής «πλησιάζουν» τις ευθείες ε_1 και ε_2 χωρίς όμως να τις ακουμπούν.

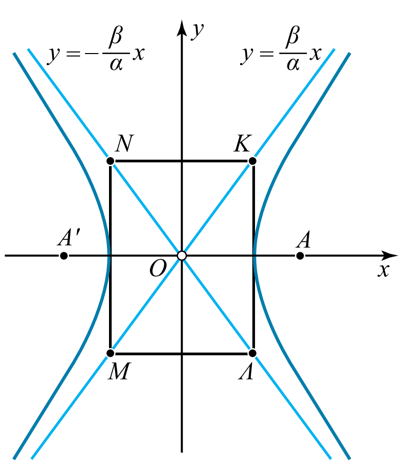
Αν η υπερβολή έχει εξίσωση C: $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$, τότε οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1{:}\ y=\frac{\alpha}{\beta}x \quad \text{και}\ \varepsilon_2{:}\ y=-\frac{\alpha}{\beta}x$$

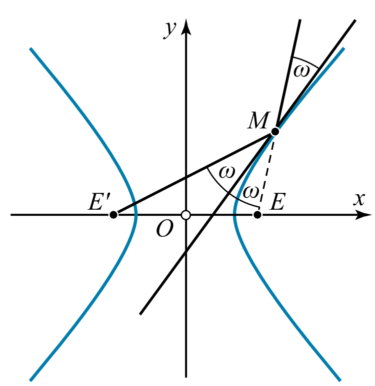
9.4.4 Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'ME$, όπου E',E οι εστίες της υπερβολής (σχ. 9.20).

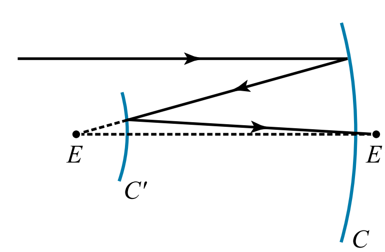
Η φυσική ερμηνεία της ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής είναι η εξής: μια ακτίνα φωτός, (η προέκταση του ΜΕ προς τα πάνω στο σχ. 9.20) κατευθυνόμενη προς την μία εστία της υπερβολής, όταν ανακλάται στην επιφάνεια αυτής (στο σημείο Μ), διέρχεται από την άλλη εστία. Η ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής, σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες των άλλων κωνικών τομών έχει εφαρμογή στην κατασκευή των ανακλαστικών τηλεσκοπίων, καθώς και στη ναυσιπλοΐα για τον προσδιορισμό του στίγματος των πλοίων (σχ. 9.21).



Σχ. 9.19



Σχ. 9.20



Σχ. 9.21

9.4.5 Εκκεντρότητα υπερβολής

Ονομάζουμε ***εκκεντρότητα της υπερβολής*** $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, και τη συμβολίζουμε με ε, το λόγο:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

Ισχύει: $\varepsilon>1$, αφού $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\beta^2+\alpha^2$ και άρα $\gamma>\alpha$. Όπως στην έλλειψη έτσι και στην υπερβολή η εκκεντρότητα καθορίζει το σχήμα της. Ισχύει:

$$\gamma^2=\beta^2+\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}+1 \Leftrightarrow \varepsilon^2=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+1 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\varepsilon^2-1$$

Επομένως, η εκκεντρότητα ε προσδιορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης των ασυμπτώτων της. Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, ο λόγος β/α, άρα και το β, μικραίνει και τείνει να γίνει ίσο με 0. Οπότε, τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Παράδειγμα 9.9

Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής: $9x^2-16y^2=144$.

Λύση

$$9x^2-16y^2=144 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Οι εστίες της υπερβολής θα είναι στον $x'x$ άξονα. $\gamma^2=\beta^2+\alpha^2=9+16=25$. Άρα οι εστίες έχουν συντεταγμένες: $E(5,0)$ και $E'(-5,0)$.

Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\frac{\gamma^2}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι: $\varepsilon_1\!: y=\frac{4}{3}x$ και $\varepsilon_2\!: y=-\frac{4}{3}x$

Παράδειγμα 9.10

Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής:

α) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-10)$, $E(0,10)$ και εκκεντρότητα 5/3.

β) Όταν έχει εστίες στον άξονα $x'x$, έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$ και διέρχεται από το σημείο $A(4\sqrt{2}, 3)$.

Λύση

α) Οι εστίες είναι $E'(0,-10)$, $E(0,10)$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\gamma=10$. Επειδή οι εστίες είναι σημεία του άξονα $x'x$, η μορφή της εξίσωσης είναι: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{3}=\frac{10}{\alpha} \Leftrightarrow 5\alpha=30 \Leftrightarrow \alpha=6$

Επομένως $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=10^2-6^2=64$. Άρα η εξίσωση της υπερβολής είναι:

$$C\!: \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$$

β) Επειδή οι εστίες είναι σημεία του άξονα $x'x$, η μορφή της εξίσωσης είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Τότε οι ασύμπτωτες της υπερβολής έχουν εξίσωση: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Επομένως ισχύει: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{4}\alpha$. Με αντικατάσταση στην εξίσωση της υπερβολής:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\alpha\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{16y^2}{9\alpha^2} = 1$$

Επειδή το σημείο $A(4\sqrt{2}, 3)$ ανήκει στην υπερβολή, ισχύει:

$$\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{\alpha^2} - \frac{16\cdot 3^2}{9\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{32}{\alpha^2} - \frac{16}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 16$$

Άρα η εξίσωση της υπερβολής είναι: C: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που:
α) Έχει κέντρο το $K(-8,3)$ και ακτίνα $\varrho = 6$
β) Έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(-1, 2)$ και $B(7,8)$

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο, και αν ναι, να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
α) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$
β) $x^2 + y^2 - 12x - 10y - 20 = 0$
γ) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 1 = 0$
δ) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 10 = 0$

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Στο σημείο $A(-2,1)$
β) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 5$

4. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων:
α) Που έχει εστία $E(0,2)$.
β) Που έχει διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση: δ: $x = -\frac{3}{2}$.
γ) Που έχει εστία το σημείο $E(-4,0)$.

5. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:
α) $y^2 = 10x$
β) $x^2 = -12y$

6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y = 1/4\,x^2$ η οποία είναι παράλληλη στην $y = x - 3$

7. Να αποδειχθεί η εξίσωση της έλλειψης με σταθερό άθροισμα 2α:
α) Όταν οι εστίες είναι στον $x'x$ και ο άξονας $y'y$ είναι μεσοκάθετος του EE'.
β) Όταν οι εστίες είναι στον $y'y$ και ο άξονας $x'x$ είναι μεσοκάθετος του EE'.

8. Να αποδειχθεί η εξίσωση της υπερβολής με σταθερή διαφορά 2α:
α) Όταν οι εστίες είναι στον $x'x$ και ο άξονας $y'y$ είναι μεσοκάθετος του EE'.
β) Όταν οι εστίες είναι στον $y'y$ και ο άξονας $x'x$ είναι μεσοκάθετος του EE'.

9. Να αποδείξετε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10.
β) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26.

10. Να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα των ελλείψεων:
α) $9x^2 + 16y^2 = 144$
β) $36x^2 + 4y^2 = 144$

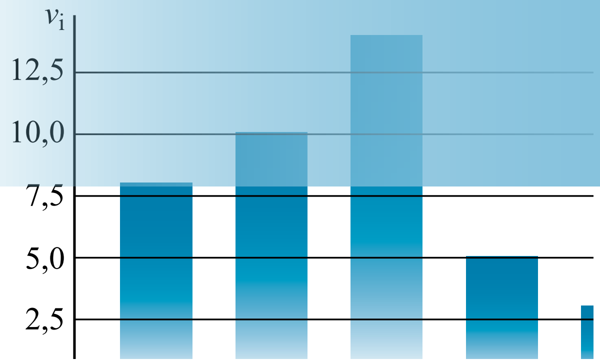
11. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$

12. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής: $25x^2 - 144y^2 = 3600$

13. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστίες τα σημεία $E'(-13,0)$, $E(13,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(5,0)$ και $A'(-5,0)$.

14. Να δοθεί η φυσική ερμηνεία της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης αν θεωρηθεί ότι η έλλειψη είναι ένα κοίλο κάτοπτρο.

15. Να δειχθεί ότι η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ δεν έχει κοινά σημεία με τις ασύμπτωτες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.



κεφάλαιο **10**

Στατιστική

Η ανάλυση στατιστικών ερευνών είναι το κυριότερο εργαλείο έρευνας στις περισσότερες επιστήμες. Η Στατιστική έχει βοηθήσει στην ανάπτυξη των Φυσικών επιστημών (όπως Φυσική, Χημεία, Αστρονομία), της Ιατρικής, των Οικονομικών Επιστημών, αλλά και των Τεχνολογικών (όπως Μηχανολογία, Ναυπηγική). Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

1) Τον σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων.
2) Τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους, και
3) την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Έχουμε δηλαδή 3 κλάδους στη Στατιστική: Τον ***Σχεδιασμό Πειραμάτων***, την ***Περιγραφική Στατιστική*** που ασχολείται με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας και την ***Επαγωγική Στατιστική*** που έχεις ως αντικείμενο την εξαγωγή συμπερασμάτων και την γενίκευση των αποτελεσμάτων σε ολόκληρους πληθυσμούς από συγκεκριμένα δεδομένα που λαμβάνονται από ένα μικρό υποσύνολο αυτών.

10.1 Βασικές έννοιες

Σε μια στατιστική έρευνα μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Το σύνολο των ατόμων ή αντικειμένων στο οποίο αναφέρονται οι παρατηρήσεις μας ονομάζεται ***πληθυσμός***. Τα στοιχεία του πληθυσμού ονομάζονται ***μονάδες*** ή ***άτομα*** του πληθυσμού**.** Η συγκέντρωση δεδομένων από όλες τις μονάδες του πληθυσμού λέγεται ***απογραφή***. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας έρευνας αποτελεί η ανά 10ετία απογραφή του πληθυσμού της χώρας μας που διενεργείται από τη Στατιστική Υπηρεσία. Στις περισσότερες έρευνες όμως η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη και σε κάποιες περιπτώσεις αδύνατη. Δύσκολη, κυρίως για οικονομικούς λόγους, αφού ο χρόνος και το κόστος της έρευνας αυξάνεται, καθώς αυξάνονται οι μονάδες του πληθυσμού. Επίσης, αν για παράδειγμα κάποια προϊόντα πρέπει να εξεταστούν για την αντοχή τους που συνίσταται στην εκτίμηση σημείου κάμψης ή του σημείου πέραν του οποίου αστοχούν, μελέτη όλου του πληθυσμού θα σήμαινε καταστροφή του συνόλου της παραγωγής. Στις παραπάνω περιπτώσεις είναι προτιμότερο να μελετήσουμε ένα μέρος – υποσύνολο του πληθυσμού, τα συμπεράσματα από το οποίο μπορούν να γενικευτούν για το σύνολο του πληθυσμού. Το υποσύνολο αυτό του πληθυσμού, ονομάζεται ***δείγμα***. Βέβαια, αυτό που πρέπει να προσέξει ένας ερευνητής είναι η επιλογή του κατάλληλου δείγματος, ώστε να είναι «αντιπροσωπευτικό». Ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό όταν διαθέτει την ίδια κατανομή χαρακτηριστικών με τον πληθυσμό από τον οποίο προήλθε, ώστε να είναι σωστή η γενίκευση των συμπερασμάτων της έρευνας σε όλον τον πληθυσμό. Για την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος μεγάλο ρόλο παίζει το μέγεθος, καθώς και ο τρόπος επιλογής του. Οι μέθοδοι επιλογής ενός δείγματος, είναι αντικείμενο του κλάδου της Στατιστικής που ονομάζεται ***δειγματοληψία***.

Αναφέραμε ήδη, ότι τα άτομα του πληθυσμού εξετάζονται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά. Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε έναν πληθυσμό, ονομάζεται ***στατιστική μεταβλητή***. Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται ***τιμές της μεταβλητής***. Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε στις εξής κατηγορίες (σχ. 10.1):

Είδη μεταβλητών

Σχ. 10.1

1) Σε ***ποιοτικές*** ή ***κατηγορικές***, των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι για παράδειγμα: το φύλο (άνδρας - γυναίκα) και η οικογενειακή κατάσταση. Διακρίνουμε δύο είδη ανάλογα με το αν υπάρχει η έννοια της διάταξης στις τιμές των μεταβλητών ή όχι. Αν οι τιμές μπορούν να διαταχθούν μιλάμε για ***διατάξιμες ποιοτικές μεταβλητές***. Διατάξιμες ποιοτικές μεταβλητές είναι για παράδειγμα το επίπεδο εκπαίδευσης (με τιμές δημοτικό, γυμνάσιο, λύκειο, πανεπιστήμιο), η βαθμίδα των πλοιάρχων (Πλοίαρχος Α΄, Πλοίαρχος Β΄, Πλοίαρχος Γ΄ κ.λπ.). Διαφορετικά, μιλάμε για ***μη διατάξιμες*** ή ***ονομαστικές ποιοτικές μεταβλητές***, όπως η οικογενειακή κατάσταση ή το χρώμα αυτοκινήτου.

2) Σε ***ποσοτικές,*** των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί. Για παράδειγμα το βάρος του μαθητή, ο αριθμός επιβατών δρομολογίου, η θερμοκρασία πόλεων. Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές μεταβλητές και σε συνεχείς. ***Διακριτές ποσοτικές μεταβλητές*** λέγονται αυτές που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές, συνήθως ακέραιες. Για παράδειγμα ο αριθμός παιδιών μιας οικογένειας. ***Συνεχείς*** λέγονται οι ***ποσοτικές μεταβλητές*** που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β). Τέτοια είναι για παράδειγμα το ύψος, το μηνιαίο εισόδημα.

10.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

Σκοπός της Περιγραφικής Στατιστικής είναι η παρουσίαση των δεδομένων που καταγράψαμε. Αυτή γίνεται με χρήση:

1) Στατιστικών πινάκων.
2) Γραφικών παραστάσεων.
3) Σστατιστικών μέτρων (μέτρα θέσης και διασποράς).

10.2.1 Πίνακες κατανομής συχνοτήτων

Ένας απλός τρόπος να παρουσιάσουμε τα στοιχεία που συλλέξαμε είναι οι στατιστικοί πίνακες. Τοποθετούμε, δηλαδή, τα στοιχεία μας σε μια ορθογώνια διάταξη, βάζοντας μία τάξη η οποία διευκολύνει την ανάλυσή τους.

Κάθε πίνακας συνήθως περιέχει:

1) ***Τίτλο***. Όπου βρίσκεται πάνω από τον πίνακα και δηλώνει το αντικείμενο με το οποίο ασχολούμαστε. Καλό θα είναι να είναι σαφής και σύντομος.

2) ***Κύριο σώμα.*** Είναι η ορθογώνια διάταξη που περιέχει σε γραμμές και στήλες τα στατιστικά δεδομένα.

3) ***Πηγή.*** Κάτω από κάθε πίνακα αναγράφεται η πηγή λήψης του στατιστικού υλικού, έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να ανατρέχει σε αυτήν, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Το πλήθος όλων των παρατηρήσεων του δείγματος ονομάζεται ***μέγεθος n*** του δείγματος.

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, δείγματος μεγέθους n, ο φυσικός αριθμός ν_i που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο δείγμα ονομάζεται (***απόλυτη***) ***συχνότητα της*** $\boldsymbol{x_i}$. Προφανώς το άθροισμα όλων των απόλυτων συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n} \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{k} \nu_i = n$$

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος του δείγματος n , προκύπτει η ***σχετική συχνότητα*** $\boldsymbol{f_i}$ της τιμής x_i. Δηλαδή:

$$\boxed{f_i = \frac{\nu_i}{n} \quad i = 1, \ldots, k}$$

Για την σχετική συχνότητα ισχύουν:

1) $0 \leq f_i \leq 1$

2) $\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$

Οι ποσότητες x_i, ν_i, f_i μπορούν να συγκεντρωθούν σε έναν πίνακα, ο οποίος ονομάζεται ***πίνακας κατανομής συχνοτήτων***.

Έστω μία διατάξιμη ποιοτική ή διακριτή ποσοτική μεταβλητή που μπορεί να λάβει τις διακεκριμένες τιμές $\{x_1, \ldots ,x_k\}$ σε αύξουσα σειρά, δηλαδή $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της συγκεκριμένης τιμής x_i της μεταβλητής, ονομάζεται ***αθροιστική συχνότητα*** $\boldsymbol{N_i}$ ***της*** $\boldsymbol{x_i}$. Προφανώς ισχύει:

$$\boxed{N_i = \sum_{j=1}^{i} \nu_j = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i}$$

Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της συγκεκριμένης τιμής της μεταβλητής, ονομάζεται ***σχετική αθροιστική συχνότητα*** $\boldsymbol{F_i}$ ***της*** $\boldsymbol{x_i}$.

$$\boxed{F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = f_1 + f_2 + \ldots + f_i}$$

Για την σχετική αθροιστική συχνότητα ισχύουν:

1) $0 \leq F_i \leq 1$ για κάθε $i = 1, \ldots , k$.

2) $F_i = \dfrac{N_i}{n}$

Η αθροιστική συχνότητα και η σχετική αθροιστική συχνότητα ορίζονται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές ή για διατάξιμες ποιοτικές.

Παράδειγμα 10.1

Ρωτήθηκαν 40 πρωτοετείς σπουδαστές της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού, σε τι είδους πλοίο θα επιθυμούσαν να ταξιδέψουν και πόσα μαθήματα οφείλουν για επανεξέταση. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 10.1.

α) Να κατασκευαστεί για κάθε μία από τις δύο μεταβλητές πίνακας κατανομής συχνοτήτων, δηλαδή πίνακας που να περιέχει τις συχνότητες, τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες.

β) Με τη βοήθεια του πίνακα να απαντηθούν τα ερωτήματα:

i) Τι ποσοστό σπουδαστών οφείλει 1 μάθημα;

ii) Πόσοι σπουδαστές οφείλουν το πολύ 3 μαθήματα;

iii) Τι ποσοστό σπουδαστών οφείλει το πολύ 3 μαθήματα;

Πίνακας 10.1
Στοιχεία σπουδαστών Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού

Σπουδαστής	*Κατηγορία πλοίου*	*Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων*	*Σπουδαστής*	*Κατηγορία πλοίου*	*Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων*
1	Δεξαμενόπλοιο	1	21	Containership	0
2	LNG	5	22	Δεξαμενόπλοιο	1
3	Δεξαμενόπλοιο	0	23	Bulk Carrier	5
4	LNG	1	24	LNG	10
5	Containership	1	25	LNG	1
6	Δεξαμενόπλοιο	0	26	Containership	2
7	Δεξαμενόπλοιο	2	27	Bulk Carrier	1
8	LNG	1	28	LNG	1
9	Containership	0	29	Containership	2
10	Bulk Carrier	1	30	LNG	3
11	LNG	5	31	Επιβατικό	5
12	LNG	10	32	Δεξαμενόπλοιο	2
13	Επιβατικό	0	33	LNG	1
14	Bulk Carrier	2	34	Containership	2
15	LNG	1	35	LNG	1
16	Δεξαμενόπλοιο	2	36	Containership	5
17	Containership	1	37	Δεξαμενόπλοιο	3
18	Δεξαμενόπλοιο	3	38	LNG	1
19	LNG	2	39	Bulk Carrier	0
20	Επιβατικό	3	40	Δεξαμενόπλοιο	1

Λύση
α) Πίνακας 10.2 και 10.3

Πίνακας 10.2
Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων

Τιμές x_i		*Συχνότητα v_i*	*Σχετική συχνότητα f_i*	*f_i %*	*Αθροιστική συχνότητα*	*Σχετική αθροιστική συχνότητα F_i*	*F_i %*
x_1	0	6	0,15	15,0	6	0,15	15
x_2	1	15	0,375	37,5	21	0,525	52,5
x_3	2	8	0,2	20,0	29	0,725	72,5
x_4	3	4	0,1	10,0	33	0,825	82,5
x_5	5	5	0,125	12,5	38	0,95	95
x_6	10	2	0,05	5,0	40	1	100
	ΣΥΝΟΛΟ	40	1	100,0			

Ενδεικτικά θα περιγράψουμε πώς υπολογίστηκαν τα μεγέθη που αναφέρονται στην τιμή $x_4 = 3$:

Η συχνότητα v_4 δείχνει πόσσες φορές εμφανίζεται η τιμή $x_4 = 3$ στο δείγμα. Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τα «3» στον πίνακα 10.1, οπότε βρίσκουμε $v_4 = 4$.

Για τη σχετική συχνότητα σύμφωνα με τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{n}$, αρκεί να διαιρέσουμε τη συχνότητα με το μέγεθος του δείγματος: $f_4 = \frac{v_4}{n} = \frac{4}{40} = 0{,}1$

Για την αθροιστική συχνότητα N_4 ισχύει: $N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 6 + 15 + 8 + 4 = 33$.

Ενώ η σχετική αθροιστική συχνότητα είναι το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων μέχρι την f_4. Δηλαδή

$$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0{,}15 + 0{,}375 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}825.$$

Πίνακας 10.3
Κατηγορία πλοίου

	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	f_i %
Containership	8	0,2	20
Δεξαμενόπλοιο	10	0,25	25
LNG	14	0,35	35
Bulk Carrier	5	0,12	12
Επιβατικό	3	0,075	7,5
ΣΥΝΟΛΟ	40	1	100,0

β) i) $f_1\ \% = 37{,}5\%$ ii) $N_4 = 33$ iii) $F_4\ \% = 82{,}5\%$

Παρατήρηση

Επειδή η μεταβλητή Κατηγορία Πλοίου είναι ποιοτική, δεν βάλαμε στον πίνακα τα μεγέθη αθροιστική συχνότητα N_i και σχετική αθροιστική συχνότητα F_i, διότι δεν ορίζονται για ποιοτικές μη διατάξιμες μεταβλητές.

Παράδειγμα 10.2

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας (πίν. 10.4):

Πίνακας 10.4

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1				0,04
2	18			
3				0,5
4	10	0,2		
5	5			
6				
ΣΥΝΟΛΟ				

Λύση

Ξεκινάμε υπολογίζοντας το μέγεθος n του δείγματος. Για την τιμή x_4, γνωρίζουμε τη συχνότητα της $v_4 = 10$ και τη σχετική συχνότητα $f_4 = 0{,}2$. Επομένως από τη σχέση $f_4 = \frac{v_4}{n}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το n.

$$f_4 = \frac{v_4}{n} \Leftrightarrow 0{,}2 = \frac{10}{n} \Leftrightarrow n = \frac{10}{0{,}2} \Leftrightarrow n = 50$$

Για την $x_1 = 1$ (1η γραμμή) ισχύει: $f_1 = F_1 = 0{,}04$.

Από τη σχέση $f_1 = \frac{v_1}{n}$ μπορεί να υπολογιστεί η συχνότητα v_1, αφού τα f_1 και n είναι γνωστά:

$$f_1 = \frac{v_1}{n} \Leftrightarrow 0{,}04 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 0{,}04 \cdot 50 = 2$$

$$N_1 = v_1 = 2$$

Για την $x_2 = 2$ (2η γραμμή) ισχύει:

$$f_2 = \frac{v_2}{n} = \frac{18}{50} = 0{,}36.$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 2 + 18 = 20$$

και $$F_2 = f_1 + f_2 = 0{,}04 + 0{,}36 = 0{,}4$$

Για την $x_3 = 3$ (3η γραμμή) έχουμε:

$$F_3 = F_2 + f_3 = \Leftrightarrow 0{,}5 = 0{,}4 + f_3 \Leftrightarrow f_3 = 0{,}1$$

Οπότε: $$f_3 = \frac{v_3}{n} \Leftrightarrow 0{,}1 = \frac{v_3}{50} \Leftrightarrow v_3 = 0{,}1 \cdot 50 = 5$$

και $$N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 2 + 18 + 5 = 25$$

Για την $x_4 = 4$ (4η γραμμή):

$$N_4 = N_3 + v_4 = 25 + 10 = 35$$

και $$F_4 = F_3 + f_4 = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$$

Για την $x_5 = 5$ (5η γραμμή):

$$f_5 = \frac{v_5}{n} = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

$$N_5 = N_4 + v_5 = 35 + 5 = 40 \quad \text{και} \quad F_5 = F_4 + f_5 = 0{,}7 + 0{,}1 = 0{,}8$$

Η συχνότητα της x_5 υπολογίζεται ως εξής:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = n \Leftrightarrow 40 + v_6 = 50 \Leftrightarrow v_6 = 10$$

Οπότε εύκολα υπολογίζεται όλη η γραμμή του πίνακα:

$$f_6 = \frac{v_6}{n} = \frac{10}{50} = 0{,}2, \quad N_6 = N_5 + v_6 = 40 + 10 = 50 \quad \text{και} \quad F_6 = F_5 + f_6 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1.$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,04	2	**0,04**
2	**18**	0,36	20	0,4
3	5	0,1	25	**0,5**
4	**10**	**0,2**	35	0,7
5	**5**	0,1	40	0,8
6	10	0,2	50	1
ΣΥΝΟΛΟ	50	1		

– Πίνακες συνάφειας

Οι πίνακες που κατασκευάσαμε μέχρι τώρα, παρουσίαζαν δεδομένα για μία μόνο μεταβλητή, είτε ποσοτική (αριθμός μαθημάτων) είτε ποιοτική (κατηγορία πλοίου). Πολλές φορές, μας ενδιαφέρει η σύγκριση δύο η περισσότερων μεταβλητών. Όταν οι υπό μελέτη μεταβλητές είναι δύο, τότε μας ενδιαφέρει η ύπαρξη σχέσης μεταξύ τους. Μια πρώτη εικόνα για την ύπαρξη σχέσης μεταξύ ***δύο ποιοτικών*** μεταβλητών δίνει ο ***πίνακας συνάφειας*** ή αλλιώς ***πίνακας διπλής εισόδου***. Ο πίνακας συνάφειας στις γραμμές του περιέχει τις τιμές της μιας ποιοτικής μεταβλητής και στις στήλες του τις τιμές της άλλης, ενώ στο εσωτερικό του, κάθε κελί περιέχει τις συχνότητες (ή σχετικές συχνότητες) εμφάνισης ταυτόχρονα των τιμών των δύο μεταβλητών που αντιστοιχούν σε αυτό το κελί. Ο πίνακας συνάφειας 10.5 δείχνει τη σχέση των ποιοτικών μεταβλητών φύλο και κάπνισμα.

Πίνακας 10.5
Πίνακας συνάφειας συχνοτήτων φύλου – καπνίσματος

		Καπνιστής			*Σύνολο*
		Καπνιστής	*Περιστασιακός καπνιστής*	*Μη καπνιστής*	
Φύλο	*Άνδρες*	56	4	28	88
	Γυναίκες	52	16	44	112
ΣΥΝΟΛΟ		108	20	72	200

Μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση φύλου – καπνίσματος αν ο πίνακας συνάφειας περιέχει τα ποσοστά – σχετικές συχνότητες αντί τις συχνότητες. Ο αντίστοιχος πίνακας συνάφειας του πίνακα 10.5 με ποσοστά είναι ο πίνακας 10.6.

Πίνακας 10.6
Πίνακας συνάφειας σχετικών συχνοτήτων φύλου – καπνίσματος

		Καπνιστής			*Σύνολο*
		Καπνιστής	*Περιστασιακός καπνιστής*	*Μη καπνιστής*	
Φύλο	*Άνδρες*	28%	2%	14%	44%
	Γυναίκες	26%	8%	22%	56%
ΣΥΝΟΛΟ		54%	10%	36%	100%

10.2.2 Ομαδοποίηση δεδομένων

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μεγάλο δημιουργούνται δυσχέρειες στη συλλογή πληροφοριών. Αυτό συμβαίνει κυρίως στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της, αλλά συμβαίνει και στην περίπτωση διακριτών μεταβλητών. Αν για παράδειγμα ρωτήσουμε το μηνιαίο εισόδημα 30 επιβατών, ενδεχομένως να έχουμε 30 διαφορετικές μεταξύ τους απαντήσεις. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων που έχουμε δει μέχρι τώρα δεν θα μας παρείχε καμία σημαντική πληροφορία, αφού όλες οι τιμές θα είχαν συχνότητα 1. Σε περιπτώσεις όπως κι αυτή θα πρέπει να ομαδοποιηθούν τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων (διαστημάτων), που ονομάζονται και ***κλάσεις***, έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει μόνο σε μία κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται ***όρια των κλάσεων***.

Είναι φανερό ότι μικρό πλήθος κλάσεων σημαίνει και μεγάλη απώλεια πληροφορίας από τα αρχικά (πρωτογενή) δεδομένα. Μεγάλο πλήθος (άνω των είκοσι) κλάσεων δεν συνηθίζεται γιατί έχει δυσκολία στους υπολογισμούς. Η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης ονομάζεται ***πλάτος της κλάσης***. Όσον αφορά στο πλάτος των κλάσεων θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να είναι το ίδιο σε όλες τις κλάσεις. Τις περισσότερες φορές όμως είναι πιο χρήσιμο να έχουμε ίδιο πλάτος, αφού έτσι υπολογίζονται μέτρα θέσης και διασποράς με μεγαλύτερη ευκολία.

Το ημιάθροισμα των δυο άκρων μιας κλάσης μας δίνει την ***κεντρική τιμή*** η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μέτρων θέσεως και διασποράς που θα δούμε πιο κάτω. Η κεντρική τιμή της i κλάσης συμβολίζεται x_i. Οι κλάσεις που θα ασχοληθούμε θα έχουν τη μορφή [,). Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη διαδικασία κατασκευής κλάσεων ***ίσου πλάτους***.

Κατά τη διαδικασία της ομαδοποίησης δεδομένων ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1) Επιλέγουμε το πλήθος των κλάσεων, στις οποίες θα ενταχθούν τα δεδομένα. Το πλήθος αυτό ορίζεται συνήθως αυθαίρετα από τον ερευνητή, σύμφωνα με την πείρα του και την κατά περίπτωση εικόνα της κατανομής των παρατηρήσεων. Γενικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ενδεικτικά ο πίνακας 10.7.

2) Βρίσκουμε το εύρος (τη διαφορά μεταξύ μεγαλύτερης x_{max} και μικρότερης x_{min} παρατήρησης)

$$R = x_{max} - x_{min}$$

3) Διαιρούμε το R με το πλήθος των κλάσεων που επιθυμούμε να έχουμε και βρίσκουμε το πλάτος c κάθε κλάσης.

$$c = \frac{R}{k}$$

Εαν χρειαστεί να στρογγυλοποιήσουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης σε ακέραιο, η στρογγυλοποίηση πρέπει να γίνει *μόνο προς τα πάνω*.

4) Εντάσσουμε κάθε παρατήρηση στην κλάση που ανήκει (συχνότητες των κλάσεων).

Πίνακας 10.7

Μέγεθος δείγματος n	*Αριθμός κλάσεων k*
< 20	5
20 – 50	6
50 – 100	7
100 – 200	8
200 – 500	9
> 500	10

Παράδειγμα 10.3

Στον πίνακα 10.8 φαίνεται ο χρόνος παραμονής σε λεπτά στο λιμάνι της Σαντορίνης 40 επιβατικών πλοίων. Να κατασκευαστεί πίνακας με 6 κλάσεις που περιέχει τις ν_i, f_i %, N_i, F_i %.

Πίνακας 10.8
Χρόνος παραμονής στο λιμάνι σε λεπτά

11	17	30	32	16	27	25	39
12	23	29	33	19	26	23	37
15	25	29	36	20	25	26	35
17	22	27	38	18	28	29	33
18	25	24	40	21	30	31	32

Λύση

Το εύρος των παρατηρήσεων είναι: 40 – 11 = 29. Το πλάτος των κλάσεων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$c = \frac{R}{k} = \frac{29}{6} = 4{,}83 \simeq 5$$

(στρογγυλοποιούμε προς τα επάνω). Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων που θα προκύψει είναι (πίν. 10.9):

Πίνακας 10.9
Ομαδοποιημένοι χρόνοι από τα πρωτογενή δεδομένα του πίνακα 10.8

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Σχετική συχνότητα ποσοστό	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική Σχετικη συχνότητα	Αθρ. Σχετ. συχν. ποσοστό
[,)	x_i	v_i	$f_i = \frac{v_i}{n}$	f_i %	N_i	F_i	F_i %
[11, 16)	13,5	3	0,075	7,5	3	0,075	7,5
[16, 21)	18,5	7	0,175	17,5	10	0,25	25
[21, 26)	23,5	9	0,225	22,5	19	0,475	47,5
[26, 31)	28,5	10	0,25	25	29	0,725	72,5
[31, 36)	33,5	6	0,15	15	35	0,875	87,5
[36, 41)	38,5	5	0,125	12,5	40	1	100

10.2.3 Γραφικές παραστάσεις

Σε πολλές περιπτώσεις η γραφική παρουσίαση της κατανομής συχνοτήτων παρέχει περιεκτικά αλλά με σαφήνεια όλες τις δυνατές πληροφορίες σχετικά με την κατανομή. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουμε. Κάποιοι από αυτούς είναι τα πέντε διαγράμματα που θα εξετάσουμε ευθύς αμέσως:

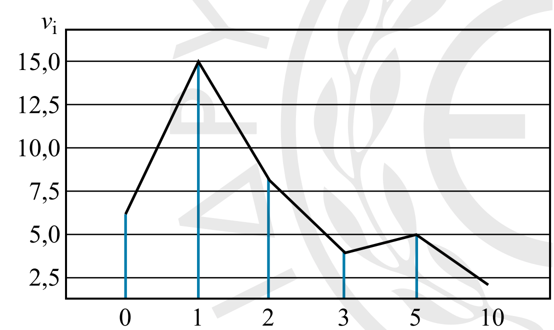
1) Διάγραμμα συχνοτήτων

Το ***διάγραμμα συχνοτήτων*** είναι ένας τύπος γραφικής παράστασης που χρησιμοποιείται για την απεικόνιση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. Σε κάθε τιμή (υποθέτουμε οτι οι τιμές είναι ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά) υψώνουμε μια κάθετη γραμμή με μήκος ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων v_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i, οπότε έχουμε ***διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων***. Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i), σχηματίζεται μια τεθλασμένη γραμμή, το

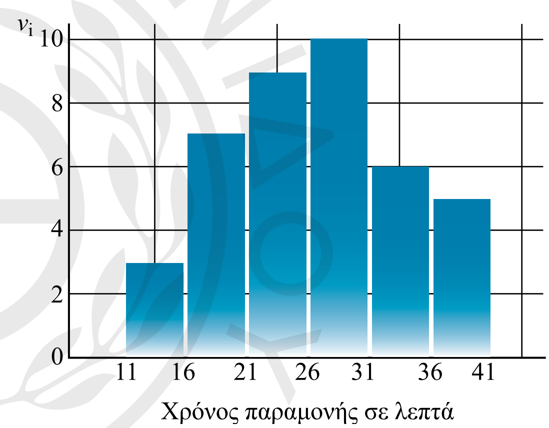
πολύγωνο συχνοτήτων ή το ***πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων***, αντίστοιχα, η οποία μας δίνει μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής. Για παράδειγμα στο σχήμα 10.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων για την μεταβλητή «αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων» του παραδείγματος 10.1.

2) Ιστόγραμμα

Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο ***ιστόγραμμα συχνοτήτων***. Στον οριζόντιο άξονα αναγράφεται η μεταβλητή καθώς και τα όρια των κλάσεων. Αποτελείται από διαδοχικά ορθογώνια, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το ***εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής***. Στην περίπτωση που ένα ιστόγραμμα έχει κλάσεις ίσου πλάτους, θεωρούμε το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, οπότε το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Το ιστόγραμμα του σχήματος 10.3 είναι για τη μεταβλητή «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι» του παραδείγματος 10.3.



Σχ. 10.2
Διάγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων για τη μεταβλητή «Αριθμός οφειλόμενων μαθηματων»



Σχ. 10.3
Ιστόγραμμα συχνοτήτων για τη μεταβλητή «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι σε λεπτά»

3) Πίτα συχνοτήτων ή κυκλικό διάγραμμα

Η ***πίτα συχνοτήτων*** χρησιμοποιείται και για ποσοτικές (διακριτές ή συνεχείς ομαδοποιημένες) και για ποιοτικές μεταβλητές. Το διάγραμμα είναι μία πίτα και κάθε κομμάτι της είναι ανάλογο της συχνότητας της κλάσης (αν πρόκειται για συνεχή ομαδοποιημένη μεταβλητή) ή της συχνότητας της τιμή της μεταβλητής (αν πρόκειται για ποσοτική κατηγορική η ποιοτική μεταβλητή).

Αν συμβολίσουμε με a_i το μέτρο του κυκλικού τομέα σε μοίρες που αντιστοιχεί στην τιμή x_i ή στην i κλάση, αν πρόκειται για συνεχή ποσοτική μεταβλητή, τότε το μέτρο a_i υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boxed{a_i = \frac{\nu_i}{n} \cdot 360^{\circ} = f_i \cdot 360^{\circ}}$$

Παράδειγμα 10.4

Να κατασκευαστούν τα κυκλικά διαγράμματα των μεταβλητών:
α) «Κατηγορία πλοίου» του παραδείγματος 10.1 και
β) «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι» του παραδείγματος 10.3.

Λύση

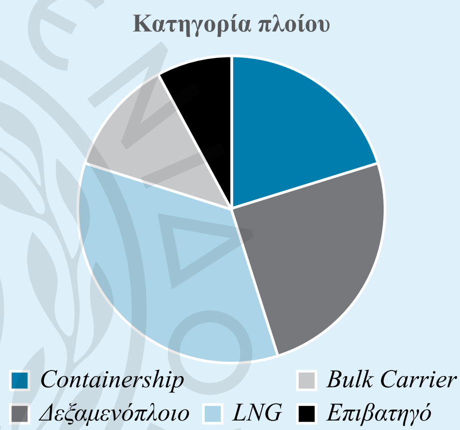
α) Η τελευταία στήλη του πίνακα 10.10 περιέχει τον υπολογισμό των γωνιών του κυκλικού διαγράμματος

β) Στην τελευταία στήλη του πίνακα 10.11 υπολογίζονται οι γωνίες για το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής».

Στο σχήμα 10.4 αποτυπώνεται το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Κατηγορίας πλοίου» και στο σχήμα 10.5 αποτυπώνεται το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι».

Πίνακας 10.10

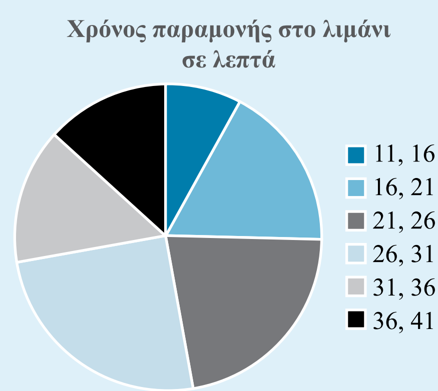
	ν_i	f_i	$a_i = \frac{\nu_i}{n} \cdot 360^o$
Containership	8	0,2	$\frac{8}{40} \cdot 360^o = 72^o$
Δεξαμενόπλοιο	10	0,25	$\frac{10}{40} \cdot 360^o = 90^o$
LNG	14	0,35	$\frac{14}{40} \cdot 360^o = 126^o$
Bulk Carrier	5	0,12	$\frac{5}{40} \cdot 360^o = 45^o$
Επιβατικό	3	0,075	$\frac{3}{40} \cdot 360^o = 27^o$
ΣΥΝΟΛΟ	40	1	360^o



Σχ. 10.4
Κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Κατηγορία πλοίου»

Πίνακας 10.11

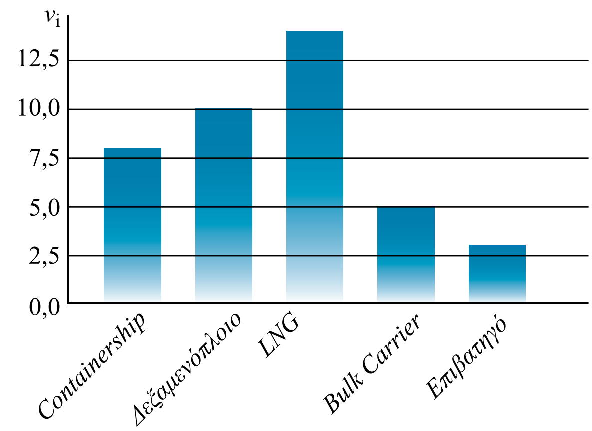
Κλάσεις [-)	***Κεντρικές τιμές***	***Συχν.***	***Σχετική Συχνότητα***	***Σχετική συχνότητα ποσοστό***
[,)	x_i	ν_i	$f_i = \frac{\nu_i}{n}$	$a_i = \frac{360}{n} \cdot \nu_i = 360 f_i$
[11, 16)	13,5	3	0,075	$0{,}075 \cdot 360^o = 27^o$
[16, 21)	18,5	7	0,175	$0{,}175 \cdot 360^o = 63^o$
[21, 26)	23,5	9	0,225	$0{,}225 \cdot 360^o = 81^o$
[26, 31)	28,5	10	0,25	$0{,}25 \cdot 360^o = 90^o$
[31, 36)	33,5	6	0,15	$0{,}15 \cdot 360^o = 54^o$
[36, 41)	38,5	5	0,125	$0{,}125 \cdot 360^o = 45^o$



Σχ. 10.5
Κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι»

4) Ραβδόγραμμα

Το ραβδόγραμμα μοιάζει πολύ με το ιστόγραμμα. Οι συχνότητες των τιμών της μεταβλητής παρουσιάζονται και εδώ με ορθογώνια. Η διαφορά είναι ότι χρησιμοποιείται για ποιοτικές μεταβλητές. Για ποιοτικές μεταβλητές (οι τιμές αναγράφονται στον οριζόντιο άξονα) δεν παίζει ρόλο η σειρά των τιμών ούτε το πλάτος των ράβδων. Το ραβδόγραμμα του σχήματος 10.6 είναι για τη μεταβλητή «Κατηγορία πλοίου» του παραδείγματος 10.1.



Σχ. 10.6

Ραβδόγραμμα της μεταβλητής «Κατηγορία πλοίου»

10.3 Μέτρα θέσης και διασποράς

Εκτός από τους στατιστικούς πίνακες και τα γραφήματα υπάρχουν και αριθμητικά μέτρα με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε ένα δείγμα. Δεδομένου ότι αυτά τα αριθμητικά μέτρα παρέχουν πληροφορίες είτε για τη θέση κάποιας τιμής είτε για τη διασπορά των τιμών, τα χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες: στα ***μέτρα θέσης*** και στα ***μέτρα διασποράς***. Οι σχετικοί τύποι υπολογισμού των στατιστικών μέτρων διαφοροποιούνται ανάλογα με το αν αναφερόμαστε σε πρωτογενή ή σε ταξινομημένα σε κλάσεις δεδομένα. Σε κάθε περίπτωση, παρουσιάζονται και οι δύο τεχνικές (πρώτα η περίπτωση των πρωτογενών και ακολούθως η περίπτωση των ομαδοποιημένων δεδομένων).

10.3.1 Μέτρα θέσης

Τα μέτρα θέσης είναι αριθμητικά μεγέθη, τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα. Τα κυριότερα μέτρα θέσης είναι:

1) Η μέση τιμή

Η ***μέση τιμή***, $\bar{x}$, αποτελεί το χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων. Δηλαδή:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

– Περιπτώσεις ταξινομημένων ή ομαδοποιημένων δεδομένων

Αν οι τιμές (ή οι κεντρικές τιμές στην περίπτωση των κλάσεων) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ μιας μεταβλητής X έχουν συχνότητες $v_1, v_2, \ldots, v_k$, η μέση τιμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_k \cdot v_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot v_i}{n}}$$

– Σταθμικός μέσος

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί της μέσης τιμής χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο. Εάν σε κάθε τιμή x_1, x_2, ... , x_n δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους ***συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)*** w_1, w_2, ... , w_n, τότε ο ***σταθμικός μέσος*** βρίσκεται από τον τύπο:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \ldots + x_n \cdot w_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

2) Η διάμεσος

Η ***διάμεσος δ***, ενός δείγματος είναι η τιμή που χωρίζει το δείγμα σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις του τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες απ’ αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Για τον υπολογισμό της διαμέσου δουλεύουμε ως εξής:

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

α) Αν το n είναι περιττός αριθμός, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση.

β) Αν το n είναι άρτιος αριθμός τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 10.5

Να βρεθεί η διάμεσος των δειγμάτων:

α) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6

β) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 9

Λύση

α) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 7

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός ($n=9$) η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή δηλαδή η 5η: $\delta = x_5 = 4$.

β) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 7, 9

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός ($n = 10$) η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων τιμών, δηλαδή:

$$\boxed{\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{4+6}{2} = 5}$$

Παρατηρούμε ότι η διάμεσος στην περίπτωση (β) είναι αριθμός που δεν ανήκει στο δείγμα 2.

Παρατηρήσεις:

α) Η διάμεσος μπορεί να έχει τιμή που να μην ανήκει στο δείγμα, όπως για παράδειγμα στο δείγμα (β).

β) Η διάμεσος δεν επηρεάζεται από παρατηρήσεις οι οποίες βρίσκονται πολύ μακριά από τον κύριο όγκο των δεδομένων. Το αντίθετο συμβαίνει με την μέση τιμή. Έτσι, για την *περιγραφή παρατηρήσεων που εμφανίζουν ακραίες τιμές προτιμάται ως μέτρο θέσης η διάμεσος από τη μέση τιμή, η οποία επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές.*

Πράγματι, τα δείγματα A: 2, 3, 4, 7, 9 και B: 2, 3, 4, 7, 99 έχουν την ίδια διάμεσο $\delta = x_3 = 4$ ενώ η μέση τιμή τους διαφέρει πολύ:

$$x_A = \frac{2+3+4+7+9}{5} = 5 \quad \text{και} \quad x_B = \frac{2+3+4+7+99}{5} = 23$$

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Η διάμεσος ομαδοποιημένων δεδομένων προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων, από τον τύπο:

$$\boxed{\delta = \alpha_i + \frac{c}{v_i} = \left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)}$$

όπου:

a_i είναι το κατώτερο όριο της κλάσης που ανήκει η διάμεσος,
c είναι το πλάτος της κλάσης i,
v_i είναι η συχνότητα της κλάσης i,
N_{i-1} είναι η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης κλάσης από την i και
n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων (μέγεθος του δείγματος).

3) Η επικρατούσα τιμή

Η ***επικρατούσα τιμή ή κορυφή*** $\boldsymbol{M_o}$, ορίζεται ως η παρατήρηση που εμφανίζεται πιο πολλές φορές, δηλαδή η παρατήρηση με την μεγαλύτερη συχνότητα.

Για παράδειγμα η επικρατούσα τιμή του δείγματος 1, 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 7, 9 είναι $\boldsymbol{M_o} = 6$.

Η επικρατούσα τιμή μπορεί να οριστεί και στην περίπτωση ποιοτικών δεδομένων, ενώ τα άλλα μέτρα που είδαμε ορίζονται μόνο για ποσοτικά δεδομένα. ΄Ετσι για παράδειγμα, η επικρατούσα τιμή του δείγματος «Κατηγορία πλοίου» που είδαμε στο παράδειγμα 10.1 είναι η τιμή LNG.

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων:

Η επικρατούσα τιμή ομαδοποιημένων δεδομένων προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων, από τον τύπο:

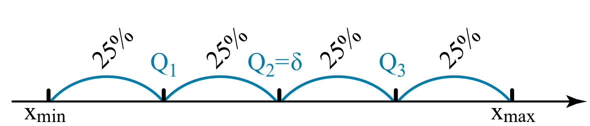
$$\boxed{M_0 = a_i + \frac{c \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

όπου:

a_i είναι το κατώτερο όριο της κλάσης που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη συχνότητα,
c είναι το πλάτος της κλάσης i,
το Δ_1 υπολογίζεται αν από τη μεγαλύτερη συχνότητα αφαιρέσουμε την συχνότητα της προηγούμενης κλάσης, δηλαδή: $\Delta_1 = \nu_i - \nu_{i-1}$ και
το Δ_2 υπολογίζεται αν από τη μεγαλύτερη συχνότητα αφαιρέσουμε την συχνότητα της επόμενης κλάσης: $\Delta_2 = \nu_i - \nu_{i+1}$.

4) Τα τεταρτημόρια

δ) Τα ***τεταρτημόρια*** $\boldsymbol{Q_1}$, $\boldsymbol{Q_2}$, $\boldsymbol{Q_3}$ διαιρούν το διατεταγμένο δείγμα σε τέσσερα ίσα μέρη (σχ. 10.7). Το $\boldsymbol{Q_2}$



Σχ. 10.7

ονομάζεται ***2ο τεταρτημόριο*** και ταυτίζεται με τη διάμεσο. Το Q_1 ονομάζεται ***1ο τεταρτημόριο*** και είναι η τιμή εκείνη που το ποσοστό των τιμών του δείγματος που είναι μικρότερες από αυτήν είναι το πολύ 25%. Το Q_3 ονομάζεται ***3ο τεταρτημόριο*** και είναι η τιμή εκείνη που το πολύ 75% των τιμών του δείγματος είναι μικρότερες από αυτήν.

Για τον υπολογισμό των τεταρτημορίων υπάρχουν διάφορες μέθοδοι. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον πιο απλό. Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Υπολογίζουμε τη διάμεσο του δείγματος η οποία είναι συγχρόνως και το 2ο τεταρτημόριο. Για τα Q_1, Q_3:

1) Αν το πλήθος των τιμών είναι άρτιο χωρίζουμε το δείγμα σε δύο δείγματα ίδιου μεγέθους. Η διάμεσος του πρώτου τμήματος (με τις μικρότερες τιμές) είναι το Q_1. Η διάμεσος του 2ου τμήματος είναι το Q_3.

2) Αν το πλήθος των τιμών είναι περιττό, τότε έχουμε δύο επιλογές. Να χωρίσουμε το δείγμα σε δύο μέρη αφού αφαιρέσουμε τη μεσαία τιμή. Να χωρίσουμε το δείγμα σε δύο δείγματα, περιλαμβάνοντας τη μεσαία τιμή και στα δύο δείγματα.

Παράδειγμα 10.6

Να υπολογιστούν τα τεταρτημόρια των δειγμάτων:

α) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6

β) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 9

Λύση

α) Η διάμεσος και άρα το 2ο τεταρτημόριο έχει ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 10.4: $Q_1 = \delta = 4$.

Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι: 1 1 2 2 4 6 6 6 7

Είναι $n = 9$ (περιττός). Εξαιρούμε τη μεσαία τιμή (το 4) και χωρίζουμε το υπόλοιπο δείγμα σε δύο δείγματα των τεσσάρων τιμών το καθένα.

Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1 1 2 2. Άρα: $Q_1 = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$.

Το Q_3 είναι η διάμεσος του 6 6 6 7. Άρα $Q_3 = \dfrac{6+6}{2} = 6$.

β) Η διάμεσος και άρα το 2ο τεταρτημόριο έχει ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 10.4: $Q_2 = \delta = 5$.

Χωρίζουμε το διατεταγμένο δείγμα σε δύο δείγματα των 5 παρατηρήσεων:

1, 1, 2, 2, 4   6, 6, 6, 7, 9

Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1, 1, 2, 2, 4. Άρα $Q_1 = 2$.

Το Q_3 είναι η διάμεσος του 6, 6, 6, 7, 9. Άρα $Q_3 = 6$.

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Το πρώτο τεταρτημόριο σε ομαδοποιημένα δεδομένα προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων από τον τύπο:

$$\boxed{Q_1 = \alpha_i + \frac{c}{v_i}\left(\frac{n}{4} - N_{i-1}\right)}$$

όπου:

a_i είναι κατώτερο όριο της κλάσης που ανήκει το πρώτο τεταρτημόριο,

c είναι το πλάτος της κλάσης i,

ν_i είναι η συχνότητα της κλάσης i,
N_{i-1} είναι η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης από την i κλάσης και
n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων (μέγεθος του δείγματος).

Το 3^o τεταρτημόριο Q_3 διαιρεί τα δείγμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε, όταν οι παρατηρήσεις είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά, το μέρος με τις μικρότερες παρατηρήσεις να αντιστοιχεί στο 75% των παρατηρήσεων.

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Το τρίτο τεταρτημόριο σε ομαδοποιημένα δεδομένα προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων από τον τύπο:

$$\boxed{Q_3 = \alpha_i + \frac{c}{\nu_i}\left(\frac{3n}{4} - N_{i-1}\right)}$$

Τα στοιχεία του τύπου είναι ίδια με αυτά του Q_1.

10.3.2 Μέτρα διασποράς

Από δύο τμήματα β εξαμήνου της ΑΕΝ επιλέξαμε τυχαία 10 σπουδαστές από το κάθε ένα και καταγράψαμε τον βαθμό εξετάσεων στα Μαθηματικά. Οι βαθμοί από κάθε τμήμα ήταν:
Α: 6, 6, 5, 6, 7, 7, 5, 6 ,7, 5
Β: 5, 2, 9, 10, 0, 3, 4, 10, 7

Τα δύο δείγματα έχουν ίδια μέση τιμή: $\overline{x_A} = \overline{x_B} = 6$ και την ίδια διάμεσο: $\delta_A = \delta_B = 6$.

Έχοντας ως μοναδικές πληροφορίες τις τιμές της μέσης τιμής και της διαμέσου, προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα δύο τμήματα παρουσιάζουν την ίδια εικόνα σχετικά με την επίδοση των σπουδαστών. Κοιτάζοντας όμως αναλυτικά τις βαθμολογίες του κάθε τμήματος, διαπιστώνουμε ότι στο Α τμήμα όλοι οι σπουδαστές είχαν μέτρια επίδοση (βαθμοί 5, 6 και 7), ενώ στο Β τμήμα είχαμε πολύ χαμηλές και πολύ υψηλές βαθμολογίες. Βλέπουμε λοιπόν ότι εκτός από τα μέτρα θέσης υπάρχει ανάγκη και άλλων μέτρων που να δείχνουν τη «διασπορά» των τιμών γύρω από το κέντρο τους.

Μέτρα διασποράς ονομάζονται τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μίας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τα κυριότερα μέτρα διασποράς είναι:

1) Εύρος R

Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το εύρος R, που ορίζεται ως η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση, δηλαδή:

$$\boxed{\textbf{\textit{R = Μεγαλύτερη τιμή – Μικρότερη τιμή}}}$$

Το εύρος εκφράζει το μήκος του διαστήματος που εκτείνονται όλες οι τιμές του δείγματος. Προφανώς, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του, τόσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά του δείγματος.

Το εύρος σε καθένα από τα δύο δείγματα βαθμολογιών είναι:

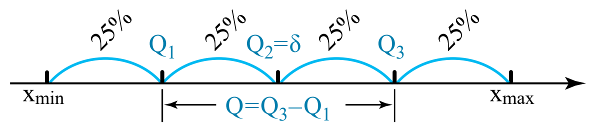
$$R_A = 7 - 5 = 2 \quad \text{και} \quad R_B = 10 - 0 = 10$$

2) Ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 απ' το τρίτο τεταρτημόριο Q_3, δηλαδή:

$$\boxed{Q = Q_3 - Q_1}$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι το μήκος του διαστήματος στο οποίο περιέχεται το 50% των «μεσαίων» τιμών (σχ. 10.8). Επομένως, όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συγκέντρωση των τιμών και άρα τόσο μικρότερη η διασπορά τους;



Σχ. 10.8

3) Διακύμανση s^2

Έστω ότι η μεταβλητή X λαμβάνει τις τιμές $x_1, \ldots, x_n$ σε δείγμα μεγέθους n. Η ***διακύμανση*** συμβολίζεται $Var(X)$ ή s^2, και ορίζεται ως:

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

όπου: $\bar{x}$ η μέση τιμή.

Ο τύπος αυτός μετά από πράξεις γίνεται:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right\}}$$

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Αν οι τιμές (ή οι κεντρικές τιμές στην περίπτωση των κλάσεων) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ μιας μεταβλητής X έχουν συχνότητες $v_1, v_2, \ldots, v_k$,τότε για τη διακύμανση ισχύυν οι παρακάτω τύποι:

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

και

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot x_i\right)^2}{n}\right)}$$

4) Τυπική απόκλιση

Η διακύμανση εκφράζεται σε μονάδες που αντιστοιχούν στο τετράγωνο των αρχικών μονάδων. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε kg, η διακύμανση εκφράζεται σε kg^2. Η ανάγκη για ένα μέτρο διασποράς που να εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις αρχικές, ούτως ώστε να μπορεί να συνεκτιμάται σε συνδυασμό και με τη μέση τιμή, οδήγησε στην χρησιμοποίηση της τετραγωνικής ρίζας της διακύμανσης, η οποία ονομάζεται ***τυπική απόκλιση***:

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}$$

10.3.3 Συντελεστής μεταβλητότητας

Ο συντελεστής μεταβλητότητας που θα δούμε στη συνέχεια αποτελεί ένα σχετικό μέτρο διασποράς. Η ανάγκη για την εισαγωγή ενός σχετικού μέτρου διασποράς γίνεται αντιληπτή με το επόμενο παράδειγμα: Ρωτήθηκαν οι ταξιδιώτες ενός κρουαζιερόπλοιου τι μισθούς παίρνουν. Οι μηνιαίοι μισθοί τους σε € είναι: 10.100, 10.050, 9.900, 10.000, 9.950. Επίσης ρωτήθηκαν για τον μισθό τους οι επιβάτες ενός πλοίου της γραμμής Πειραιάς – Ηράκλειο, οπότε οι απαντήσεις ήταν: 1.100, 1.050, 990, 1.000, 950. Παρατηρούμε ότι και τα δύο δείγματα έχουν ίδια μέτρα διασποράς (π.χ. τυπική απόκλιση, εύρος κ.λπ.). Παρόλα αυτά, αν κάποιος από τους επιβάτες του κρουαζιερόπλοιου υποστεί μείωση μισθού 1000 € τότε αυτό θα έχει γι' αυτόν πολύ μικρότερες συνέπειες από ό,τι θα είχε η ίδια μείωση σε επιβάτη του 2^{ου} πλοίου.

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται η ανάγκη να οριστεί ένα καινούργιο μέτρο το οποίο δεν θα αντικατοπτρίζει μόνο τη διασπορά των δεδομένων, αλλά και τις επιπτώσεις που έχει αυτή η διασπορά στην πειραματική μονάδα. Το μέτρο αυτό συμβολίζεται με ***CV***, ονομάζεται ***συντελεστής μεταβλητότητας*** και δίνεται από τον λόγο της τυπικής απόκλισης προς την μέση τιμή. Δηλαδή:

$$\boxed{CV = \frac{s}{|\bar{x}|}}$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης, εκφράζεται επί τοις εκατό (%) και εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής.

Όσο μικρότερη είναι η τιμή του *CV* τόσο μεγαλύτερη ομοιογένεια θεωρείται ότι έχει το δείγμα. Γενικά, δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ***ομοιογενές*** εάν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Παράδειγμα 10.7

Στο παρακάτω δείγμα να βρεθούν όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς και να εξεταστεί ως προς την ομοιογένεια:

3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 7, 8

Λύση

Μέση τιμή: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{52}{13} = 4$

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8

Διάμεσος: Το μέγεθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός (13) άρα η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή δηλαδή: $\delta = x_7 = 4$

Επικρατούσα τιμή: $M_o = 1$

1ο τεταρτημόριο: Εξαιρούμε την μεσαία – 7^{η} τιμή (x_7=4). Το Q_1 είναι η διάμεσος του δείγματος

$$0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$\text{Άρα: } Q_1 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$Q_2 = \delta = 4$$

3ο τεταρτημόριο: Είναι η διάμεσος του 5, 6, 6, 7, 8, 8. Άρα $Q_3 = \dfrac{x_{10} + x_{11}}{2} = \dfrac{6+7}{2} = 6{,}5$
Εύρος: R=8–0=8

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q = Q_3 - Q_1 = 6{,}5 - 1 = 5{,}5$

Διακύμανση:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{13} (x_i - \bar{x})^2}{12} =$$

$$= \frac{(0-4)^2 + (1-4)^2 \cdot 3 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 \cdot 2 + (7-4)^2 + (8-4)^2 2}{12} =$$

$$= \frac{98}{12} = 8{,}17$$

Τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{8{,}17} = 2{,}86$

Συντελεστής μεταβλητότητας: $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{2{,}86}{4} = 0{,}715$ ή 71,5%. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Παράδειγμα 10.8

Να υπολογιστούν όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς για το δείγμα της μεταβλητής «Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων» του παραδείγματος 10.1.

Λύση

Επειδή οι τιμές της μεταβλητής έχουν συχνότητες, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot x_i}{n}$$

Για να γίνουν εύκολα οι πράξεις, στον πίνακα συχνοτήτων (πίν. 10.2), προσθέτουμε μια ακόμα στήλη (πίν. 10.12) στην οποία υπολογίζουμε τα γινόμενα $x_i{\cdot}v_i$:

Πίνακας 10.12

		v_i	f_i	N_i	F_i	$x_i\ v_i$	$x_i^2\ v_i$
x_i	0	6	0,15	6	0,15	0	0
	1	15	0,375	21	0,525	15	15
	2	8	0,2	29	0,725	16	32
	3	4	0,1	33	0,825	12	36
	5	5	0,125	38	0,95	25	125
	10	2	0.05	40	1	20	200
	ΣΥΝΟΛΟ	40	1			88	408

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \nu_i \cdot x_i}{n} = \frac{88}{40} = 2,2$$

Διάμεσος: Επειδή το μέγεθος είναι άρτιος αριθμός (n = 40), η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, της 20ης και της 21ης. Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι $x_{20} = 1$ και $x_{21} = 1$.

Άρα $$\delta = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Τεταρτημόρια: Το Q_2 ταυτίζεται με τη διάμεσο άρα Q_2=1.

Χωρίζουμε το δείγμα σε δύο ίσα τμήματα των 20 παρατηρήσεων. Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1ου τμήματος, δηλαδή

$$Q_1 = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

και το Q_3 του 2ου τμήματος: $Q_3 = \dfrac{x_{30} + x_{31}}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3.$

Η ***επικρατούσα τιμή*** είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, άρα $M_o = 1$.

Εύρος : $R = 10 - 0 = 10$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q = Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = 2$

Διακύμανση: Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \nu_i\right)^2}{n}\right\}$$

Συμπληρώνουμε στον πίνακα 10.12 μία επιπλέον στήλη με τα γινόμενα: $x_i^2\ \nu_i$.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \nu_i\right)^2}{n}\right\} = \frac{1}{39}\left\{408 - \frac{88^2}{40}\right\} = 5,497$$

Τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{5,497} = 2,345$

Παράδειγμα 10.9

Η μηνιαία χρήση ενός συγκεκριμένου δρομολογίου πλοίου από 20 επιβάτες ήταν:

2	2	7	3	1	2	3	5	2	2
2	5	1	3	2	1	1	2	1	3

α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.

β) Να βρεθεί η διάμεσος, η μέση τιμή, τα τεταρτημόρια, η επικρατούσα τιμή και η τυπική απόκλιση.

γ) Να εξεταστεί το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Λύση

α) Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων του δείγματος είναι ο πίνακας 10.13.

Πίνακας 10.13

	v_i	f_i	N_i	F_i	$x_i\, v_i$	$x_i^2\, v_i$
1	5	0,25	5	0,25	5	5
2	8	0,4	13	0,65	16	32
3	4	0,2	17	0,85	12	36
5	2	0,1	19	0,95	10	50
7	1	0,05	20	1	7	49
ΣΥΝΟΛΟ	20	1			50	172

β) $\delta = \dfrac{x_{10}+x_{11}}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot x_i}{n} = \frac{50}{20} = 2{,}5 \text{ δρομ.}$$

Χωρίζουμε το δείγμα σε δύο ίσα τμήματα των δέκα παρατηρήσεων. Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1ου τμήματος, δηλαδή $Q_1 = \dfrac{x_5+x_6}{2} = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$ και το Q_3 του 2ου τμήματος: $Q_3 = = \dfrac{x_{15}+x_{16}}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3$.

Διακύμανση: $$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2}{n}\right\} = \frac{1}{19}\left\{172 - \frac{50^2}{20}\right\} = 2{,}474$$

Άρα τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{2{,}474} = 1{,}573$ δρομ.

γ) Συντελεστής μεταβλητότητας: $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{1{,}573}{2{,}5} = 0{,}629$ ή $62{,}9\%$ ή 62,9%. Επομένως $CV > 10\%$, άρα το δείγμα είναι μη ομοιογενές.

Παράδειγμα 10.10

Να βρεθούν τα κυριότερα μέτρα θέσης και διασποράς για τα ομαδοποιημένα δεδομένα της μεταβλητής «χρόνος παραμονής στο λιμάνι» του παραδείγματος 10.3.

Λύση

Πίνακας 10.14

Κλάσεις [,)	x_i	x_i^2	v_i	$v_i\, x_i$	$v_i\, x_i^2$
[11, 16)	13,5	182,25	3	40,5	546,75
[16, 21)	18,5	342,25	7	129,5	2395,75
[21, 26)	23,5	552,25	9	211,5	4970,25
[26, 31)	28,5	812,25	10	285	8122,5
[31, 36)	33,5	1122,25	6	201	6733,5
[36, 41)	38,5	1482,25	5	192,5	7411,25
	156	4493,5		1060	30180

Εφαρμόζοντας τον τύπο της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot x_i}{n} = \frac{1.060}{40} = 26{,}5 \text{ λεπτά}$$

Η διάμεσος θα βρεθεί από τον τύπο: $\delta = \alpha_i + \frac{c}{v_i} = \left(\frac{n}{2} - N_{i-1}\right)$

Παρατηρούμε ότι η διάμεσος ανήκει στην κλάση [26, 31) άρα $a_i = 26$ (το κατώτερο όριο της κλάσης που ανήκει η διάμεσος). Ακόμα το πλάτος της κλάσης *i,* όπως και όλων των κλάσεων είναι 5, η συχνότητα της κλάσης v_i είναι ίση με 10, το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n = 40$ και η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης από την *i* κλάσης είναι ίση με 19. Επομένως έχουμε:

$$\delta = 26 + \frac{5}{10} = \left(\frac{40}{2} - 19\right) \Leftrightarrow \delta = 26{,}5 \text{ λεπτά}$$

Η επικρατούσα τιμή θα βρεθεί από τον τύπο $M_0 = a_i + \frac{c \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$

όπου: α_i είναι το κατώτερο όριο της κλάσης που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη συχνότητα δηλαδή στην [26, 31). Επομένως $\alpha_i = 26$ και όπως και πριν $c = 5$. Ακόμα $\Delta_1 = 10 - 9 = 1$ και $\Delta_2 = 10 - 6 = 4$. Επομένως

$$M_0 = a_i + \frac{c \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \Leftrightarrow M_0 = 26 + \frac{5 \cdot 1}{4 + 1} \Leftrightarrow M_0 = 26 \text{ λεπτά}$$

Το 1ο τεταρτημόριο θα είναι η 10η τιμή. Επομένως η κλάση που περιέχει το Q_1 είναι η 2η. Άρα:

$$Q_1 = \alpha_i + \frac{c}{v_i}\left(\frac{n}{4} - N_{i-1}\right) = 16 + \frac{5}{7}\left(\frac{40}{4} - 3\right) = 21 \text{ λεπτά}$$

Το 3ο τεταρτημόριο βρίσκεται στην 5η κλάση (η 30η παρατήρηση) άρα:

$$Q_3 = \alpha_i + \frac{c}{v_i}\left(\frac{3n}{4} - N_{i-1}\right) = 31 + \frac{5}{6}\left(\frac{120}{4} - 29\right) = 31{,}83 \text{ λεπτά}$$

Μέτρα διασποράς: Η μεγαλύτερη κεντρική τιμή είναι το 38,5 και η μικρότερη το 13,5 οπότε το εύρος είναι 25.

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q = Q_3 - Q_1 = 31{,}83 - 21 = 10{,}83$

Διακύμανση:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot x_i\right)^2}{n} \right) \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{39} \cdot \left(30.180 - \frac{(1.060)^2}{40}\right) \Leftrightarrow s^2 = 53{,}59 \text{ λεπτά}^2$$

Τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{53{,}59} = 7{,}32$ λεπτά

10.4 Γραμμική συσχέτιση

Στα προβλήματα που εξετάσαμε έως τώρα στη Στατιστική, ασχοληθήκαμε κάθε φορά με μία μόνο μεταβλητή. Ενδεχομένως να μας ενδιαφέρει όμως η ταυτόχρονη μελέτη δύο ή περισσότερων μεταβλητών, για να προσδιορίσουμε με ποιον τρόπο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Έχουμε ήδη μιλήσει στους πίνακες συνάφειας (σελ. 175) για σχέση δύο ποιοτικών μεταβλητών. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της σχέσης δύο ποσοτικών μεταβλητών μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

1) Το βάρος ενός παιδιού σχετίζεται με την ηλικία του, εφόσον όσο μεγαλώνει αυξάνεται το βάρος του.

2) Ο μισθός ενός υπαλλήλου σχετίζεται με τα χρόνια προϋπηρεσίας, αφού όσο πιο πολλά έτη εργάζεται τόσο αυξάνεται ο μισθός του.

3) Ο μισθός ενός υπαλλήλου δεν σχετίζεται με το βάρος του.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την διερεύνηση ύπαρξης (γραμμικής) σχέσης δύο ποσοτικών μεταβλητών μεταξύ τους.

10.4.1 Διάγραμμα διασποράς

Στην περίπτωση δύο συνεχών ποσοτικών μεταβλητών X, Y, οι τιμές για κάθε μονάδα του δείγματος μπορούν να παρασταθούν σαν σημεία στο επίπεδο. Η γραφική παράσταση των σημείων σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων ονομάζεται ***διάγραμμα διασποράς*** (scatterplot) των μεταβλητών X και Y. Από το διάγραμμα διασποράς μπορούμε να εντοπίσουμε την ύπαρξη συσχέτισης που ενδεχομένως να υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών που εξετάζουμε. Ο βαθμός συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από ευθεία γραμμή δίνει τον βαθμό συσχέτισής τους. Όσο πιο συσχετισμένα είναι τα δεδομένα τόσο καλύτερη προσέγγιση ευθείας γραμμής έχουμε. Η κλίση της ευθείας δείχνει το πώς επηρεάζει η μία μεταβλητή την άλλη.

Παράδειγμα 10.11

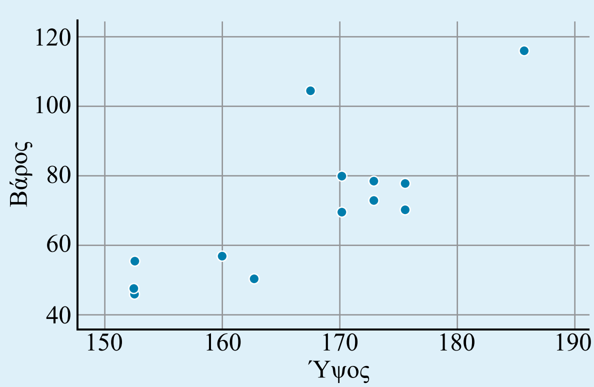
Στον πίνακα 10.15 οι μεταβλητές X και Y παριστάνουν το ύψος και βάρος αντίστοιχα 12 ενηλίκων ανθρώπων.

Το διάγραμμα διασποράς των μεταβλητών X, Y δίνεται στο σχήμα 10.9.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς «τείνουν» προς μια ευθεία με θετική κλίση. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει μια θετική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Όταν αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής X (ύψος) αυξάνεται και της Y (βάρος).

Πίνακας 10.15

Ύψος (X)	*Βάρος (Y)*
175	70
185	116
152	55
160	56
168	104
170	69
152	47
152	45
175	77
173	73
163	50
170	79



Σχ. 10.9
Διάγραμμα διασποράς Ύψους – Βάρους

10.4.2 Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

Πέραν του διαγράμματος διασποράς, που η αξιολόγησή του εμπεριέχει και έναν βαθμό υποκειμενικότητας, θέλουμε ένα πιο αντικειμενικό κριτήριο για την ύπαρξη γραμμικής σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών. Ένα μέτρο που μας δίνει το μέγεθος της γραμμικής σχέσης ή τον βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από μία ευθεία είναι ο λεγόμενος ***συντελεστής γραμμικής συσχέτισης***. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης, *r*, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boxed{r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_1^2 - n\bar{x}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_1^2 - n\bar{y}^2\right)}}}$$

όπου: $\bar{x}, \bar{y}$ οι μέσες τιμές των δειγμάτων των δύο μεταβλητών *X, Y*.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. Επιπλέον ισχύει πάντοτε ότι:

$$\boxed{-1 \le r \le 1}$$

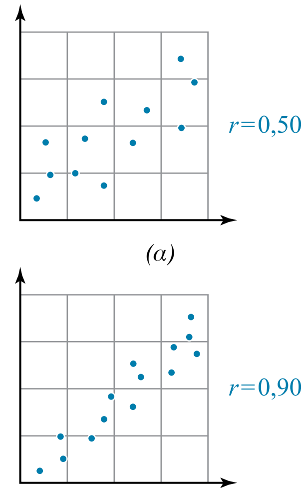
Όσο η τιμή του *r* πλησιάζει την τιμή +1 (ή –1) τόσο ισχυρότερη είναι η γραμμική συσχέτιση, ενώ όσο πιο κοντά είναι στο 0 τόσο πιο αδύναμη η γραμμική συσχέτιση. Πιο αναλυτικά:

1) Αν $0 < r < +1$, τότε οι *X*, *Y* είναι ***θετικά γραμμικά συσχετισμένες***. Αυτό σημαίνει ότι, όταν οι τιμές της μεταβλητής *X* αυξάνονται, οι τιμές της *Y* τείνουν να αυξάνονται. Όσο πιο κοντά στο 1 είναι τιμή του *r* τόσο πιο ισχυρή είναι η γραμμική συσχέτιση. Στο σχήμα 10.10 βλέπουμε δυο διαγράμματα διασποράς θετικής γραμμικής συσχέτισης όπου στην περίπτωση $r = 0{,}90$ η γραμμική συσχέτιση είναι πιο ισχυρή απ' ό,τι στη περίπτωση $r = 0{,}50$.

2) Αν $-1 < r < 0$ τότε οι *X*, *Y* είναι ***αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες*** (σχ. 10.8). Αυτό σημαίνει ότι, όταν οι τιμές της μεταβλητής *X* αυξάνονται, οι τιμές της *Y* τείνουν να μειώνονται. Όσο πιο κοντά στο –1 είναι τιμή του *r* τόσο πιο ισχυρή είναι η αρνητική γραμμική συσχέτιση. Στο σχήμα 10.11 στην περίπτωση του $r = -0{,}90$ η αρνητική γραμμική συσχέτιση είναι πιο ισχυρή από ό,τι στην περίπτωση $r = -0{,}50$.

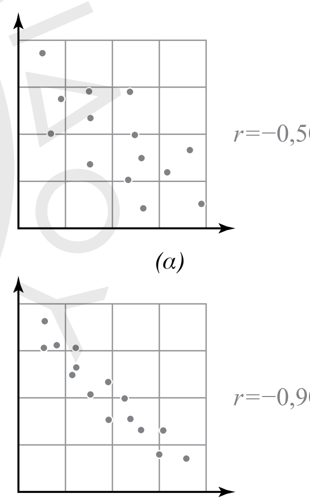
3) Αν $r = 1$, τότε έχουμε ***τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση*** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με θετική κλίση (σχ. 10.12).

4) Αν $r = -1$, τότε έχουμε ***τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση*** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση (σχ. 10.13)



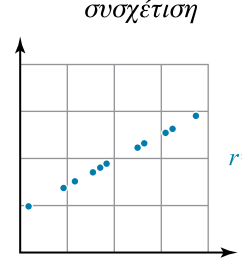
(β)

Σχ. 10.10
(α) Θετική γραμμική συσχέτιση και (β) ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση

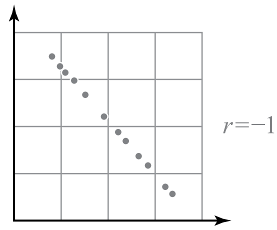


(β)

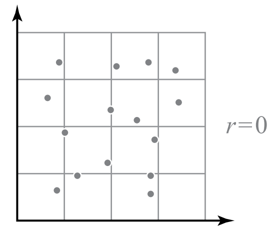
Σχ. 10.11β
(α) Αρνητική γραμμική συσχέτιση και (β) ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση



Σχ. 10.12
Τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση



Σχ. 10.13
Τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση



Σχ. 10.14
Γραμμικά ασυσχέτιστες

5) Αν ***r = 0***, τότε ***δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών***. Οι μεταβλητές δηλαδή X, Y είναι γραμμικά ασυσχέτιστες (σχ. 10.14).

Παράδειγμα 10.12

Να υπολογιστεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r μεταξύ των μεταβλητών X: ύψος και Y: βάρος του πίνακα 10.15.

Λύση

Για τον υπολογισμό του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μας διευκολύνει η κατασκευή του πίνακα 10.16.

Πίνακας 10.16

Ύψος (x_i)	***Βάρος (y_i)***	$x_i y_i$		
175	70	12.250	30.625	4.900
185	116	21.469	34.225	13.456
152	55	8.360	23.104	3.025
160	56	8.960	25.600	3.136
168	104	17.472	28.224	10.816
170	69	11.730	28.900	4.761
152	47	7.144	23.104	2.209
152	45	6.840	23.104	2.025
175	77	13.475	30.625	5.929
173	73	12.629	29.929	5.329
163	50	8.150	26.569	2.500
170	79	13.430	28.900	6.241
$\sum x_i = 1.995$	$\sum y_i = 841$	$\sum x_i y_i = 141.909$	$\sum x_i^2 = 332.909$	$\sum y_i^2 = 64.327$

Οι μέσες τιμές $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{12} = \frac{1.995}{12} = 166,25 \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{12} = \frac{841}{12} = 70,083$$

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_1^2 - n\overline{x}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_1^2 - n\overline{y}^2\right)}}$$

$$= \frac{141.909 - 12\cdot 166{,}25\cdot 70{,}083}{\sqrt{(332.909 - 12\cdot 166{,}25^2)\cdot(64.327 - 12\cdot 70{,}083^2)}} =$$

$$= \frac{2.093{,}415}{\sqrt{6.681.818{,}76}} = \frac{2.093{,}415}{2584{,}92} = 0{,}80985$$

Επομένως οι μεταβλητές X, Y έχουν ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση.

10.5 Απλή γραμμική παλινδρόμηση

Αφού διαπιστωθεί η γραμμική συσχέτιση, που δείχνει τον βαθμό που οι παρατηρήσεις δύο μεταβλητών X, Y περιγράφονται από ευθεία γραμμή, το ζητούμενο είναι η εύρεση της εξίσωσης αυτής της ευθείας. Η διαδικασία εύρεσης της ζητούμενης ευθείας ονομάζεται ***ανάλυση απλής γραμμικής παλινδρόμησης***. Ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μίας από αυτές μέσω των άλλων χαρακτηρίζεται ως ***ανάλυση παλινδρόμησης***. Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση έχουμε μια μεταβλητή Y και μια μόνο μεταβλητή X μέσω της οποίας υπολογίζονται οι τιμές της Y και η εξίσωση (παλινδρόμησης) που τις συνδέει είναι εξίσωση ευθείας. Η μεταβλητή Y έχει τον ρόλο της ***εξαρτημένης μεταβλητής*** και η X της ***ανεξάρτητης***.

Ο σκοπός μας λοιπόν είναι η εύρεση της εξίσωσης της ευθείας που προσαρμόζεται όσο το δυνατό καλύτερα στα σημεία των δεδομένων. Όπως γνωρίζουμε, η εξίσωση μιας ευθείας δίνεται από τη σχέση:

$$y = \alpha + \beta x$$

Επομένως, θέλουμε να υπολογίσουμε ή καλύτερα να «εκτιμήσουμε» τους συντελεστές α και β. Μία μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β είναι η «***μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων***». Η μέθοδος ονομάζεται έτσι, διότι ο προσδιορισμός των παραμέτρων α και β γίνεται με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία $y = \alpha + \beta x$. Δηλαδή το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{n} e_1^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \widehat{y}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta + \alpha\cdot x_i\right)^2$$

να γίνεται ελάχιστο, όπου με $\widehat{y_i}$ συμβολίζουμε τις εκτιμώμενες τιμές της μεταβλητής Y όπως προκύπτουν από την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή $\widehat{y_i} = \beta + \alpha\cdot x_i$. Η διαφορά πραγματικής τιμής y_i και προβλεπόμενης τιμής $\widehat{y_i}$ είναι το ***σφάλμα***

$$\boxed{e_i = y_i - \widehat{y_i}}$$

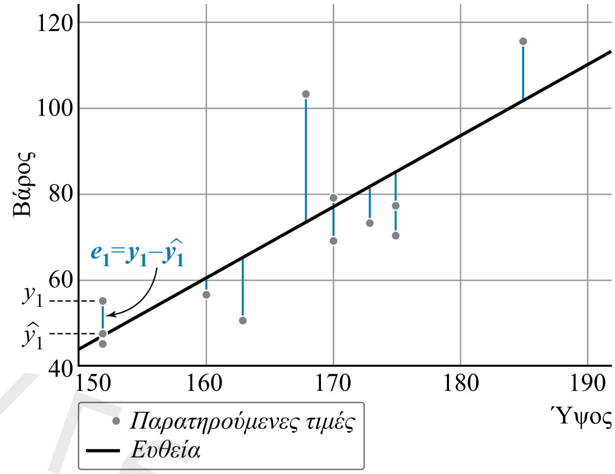
για το συγκεκριμένο σημείο.

Οι τιμές των παραμέτρων α και β που ελαχιστοποιούν το παραπάνω άθροισμα τετραγώνων καλούνται ***εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων***, συμβολίζονται $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\beta}$ και αποδεικνύεται ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} \qquad \boxed{\hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \hat{\beta}}$$

$$\text{όπου } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ και } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

οι μέσες τιμές των X, Y.



Σχ. 10.15

Η ευθεία $\boxed{\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta} \cdot x}$

καλείται ***ευθεία ελαχίστων τετραγώνων*** της Y (πάνω) στη X.

Στο σχήμα 10.15 βλέπουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα του πίνακα 10.15.

– Ερμηνεία των συντελεστών $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$:

α) Η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α παριστάνει την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$, δηλαδή την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν $x = 0$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta} \cdot x$ εκφράζει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή X μεταβληθεί κατά μια μονάδα.

Παράδειγμα 10.13

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα του παραδείγματος 10.11.

β) Να δοθεί η ερμηνεία των συντελεστών της ευθείας.

γ) Να βρεθεί το αναμενόμενο βάρος ενός ατόμου ύψους 178 cm.

δ) Να υπολογιστούν τα σφάλματα εκτιμώμενης–πραγματικής τιμής της Y, για κάθε σημείο του πίνακα.

Λύση

α) Στον πίνακα 10.17 έχουν υπολογιστεί τα αθροίσματα:

$$\sum x_i y_i = 141.909 \text{ και } \sum x_i^2 = 332.909$$

Επίσης έχουμε υπολογίσει: $\bar{x} = 166{,}25$ και $\bar{y} = 70{,}083$.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{141909 - 12 \cdot 166{,}25 \cdot 70{,}083}{332909 - 12 \cdot 166{,}25^2} = \frac{2093{,}415}{1240{,}25} = 1{,}688$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \hat{\beta} = 70{,}083 - 166{,}25 \cdot 1{,}688 = -210{,}547$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $\hat{y} = 1{,}688x - 210{,}547$

Πίνακας 10.17

΄Υψος (x_i)	*Βάρος* (y_i)	$x_i\, y_i$	x_i^2	*Εκτιμώμενες τιμές* $\hat{y}_i$	*Σφάλμα* $e_i = y_i - \hat{y}_i$
175	70	12.250	30625	84,853	–14,853
185	116	21.469	34225	101,585	14,415
152	55	8.360	23104	46,142	8,858
160	56	8.960	25600	59,583	–3,583
168	104	17.472	28224	73,024	30,976
170	69	11.730	28900	76,384	–7,384
152	47	7.144	23104	46,142	,858
152	45	6.840	23104	46,142	–1,142
175	77	13.475	30625	84,784	–7,784
173	73	12.629	29929	81,424	–8,424
163	50	8.150	26569	64,623	–14,623
170	79	13.430	28900	76,384	2,616
$\sum x_i = 1.995$	$\sum y_i = 841$	$\sum x_i y_i = 141.909$	$\sum x_i^2 = 332.909$		

β) Ο συντελεστής $\hat{\alpha}$ δίνει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ανεξάρτητη X έχει τιμή 0. Προφανώς στη συγκεκριμένη περίπτωση η ερμηνεία δεν είναι ρεαλιστική αφού δεν γίνεται το ύψος να έχει τιμή 0. Η τιμή $\hat{\beta} = 1{,}688$ δείχνει ότι όταν το ύψος αυξάνεται κατά 1 cm το βάρος αυξάνεται κατά 1,688 kg.

γ) Για $x = 178$ στην εξίσωση της ευθείας έχουμε:

$$\hat{y} = 1{,}688x - 210{,}547 = 1{,}688 \cdot 178 - 210{,}547 = 89{,}917 \text{ kg}$$

δ) Για το ζεύγος τιμών $(x_1, y_1) = (175, 70)$ η εκτιμώμενη τιμή από την εξίσωση $\hat{y} = 1{,}688x - 210{,}547$ είναι $\hat{y} = 84{,}853$ το σφάλμα $e_1 = y_1 - \widehat{y_1} = 70 - 84{,}853 = -14{,}853$.

Ομοίως υπολογίζονται τα σφάλματα για τα υπόλοιπα σημεία. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 10.17.

Ασκήσεις

1. Μία μελέτη περιλαμβάνει 150 επιβάτες ενός πλοίου. Στην μελέτη, καταγράφονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά. Να αναφερθεί το είδος της κάθε μεταβλητής (ποιοτική διατάξιμη, ποιοτική μη διατάξιμη, ποσοτική διακριτή, ποσοτική συνεχής).

α) Φύλο επιβάτη.
β) Κατηγορία θέσης (οικονομική, αριθμημένα καθίσματα, διακεκριμένη).
γ) Αριθμός τέκνων του επιβάτη.
δ) Βάρος του επιβάτη σε kg.
ε) Οικογενειακή κατάσταση επιβάτη.
στ) Μορφωτικό επίπεδο επιβάτη.
ζ) Εισόδημα του επιβάτη σε €.

2. Παρακάτω βλέπετε τον αριθμό μαθημάτων που πέρασαν στην τελευταία εξεταστική 20 σπουδαστές της ΑΕΝ.

7	5	7	1	1	1	5	5	5	2
5	5	4	5	4	4	5	4	1	4

α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.
β) Να βρεθεί η μέση τιμή, η διάμεσος, η επικρατούσα τιμή, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, η τυπική απόκλιση.
γ) Να γίνει το κυκλικό διάγραμμα.

3. Η μηνιαία χρήση ενός συγκεκριμένου δρομολογίου πλοίου από 20 επιβάτες ήταν:

1	2	1	10	1	2	3	6	2	2
10	6	1	6	2	2	1	2	2	3

α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.
β) Να βρεθεί η μέση τιμή, η διάμεσος, η επικρατούσα τιμή και η τυπική απόκλιση.
γ) Να εξεταστεί το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

4. Οι ημέρες απουσίας 20 σπουδαστών της ΑΕΝ τον μήνα Ιούνιο, ήταν:

7	4	0	1	1	1	2	4	0	2
2	1	0	0	2	0	4	2	7	0

α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα.
β) Να βρεθεί, η διάμεσος η μέση τιμή, το 1^{ο} και το 3^{ο} τεταρτημόριο.
γ) Να εξεταστεί το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

5. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες κατανομών.

α)

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	3	0,03		
2			15	
3			25	
4				0,65
5	10			
6				
ΣΥΝΟΛΟ				

β)

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1				
2	4	0,2	6	
3				0,6
4		0,25		
5	2			
6				
ΣΥΝΟΛΟ				

6. Οι 50 εργαζόμενοι μιας ναυτιλιακής εταιρείας έχουν τις παρακάτω ηλικίες:

21 43 50 25 55 30 28 40 31 51 30 48 36 43 38 33 27 39 41 43 38 27 27 40 35

18 47 52 34 47 32 27 41 35 54 32 22 46 52 29 32 34 34 42 36 35 28 57 56 20

α) Να ομαδοποιηθούν τα δεδομένα σε 6 κλάσεις.
β) Να βρεθεί η μέση και η διάμεση ηλικία.
γ) Να κατασκευαστεί ιστόγραμμα συχνοτήτων.

7. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος προϋπηρεσίας (σε έτη) 160 υπαλλήλων μίας ναυτιλιακής εταιρείας.

Απουσίες	*Άτομα*
[7,11)	24
[11,15)	40
[15,19)	48
[19,23)	32
[23,27)	16

α) Να βρεθούν:
– Ο μέσος αριθμός ετών προϋπηρεσίας.
– Η τυπική απόκλιση του δείγματος.
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

8. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις επιδόσεις 10 σπουδαστών στα μαθήματα Μαθηματικά και Ναυτιλία Ι.

Μαθηματικά (X)	7	6,5	9	3,5	5	8	6.5	7	10	4
Ναυτιλία (Y)	5	6	7,5	5	3	9	7	5	8,5	6

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της Y πάνω στη X.
β) Τι βαθμό αναμένουμε να έχει ένας σπουδαστής στη Ναυτιλία Ι, αν στα Μαθηματικά έχει βαθμό 7,5;

9. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. Στη συνέχεια να εκτιμήσετε την τιμή της μεταβλητής Y για $X=19$

X	10,5	9	13	15	18	16	17	11	14
Y	60	75	58	39	90	74	56	85	63

10. Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα της άσκησης 8 και να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα.

11. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τους δείκτες ευφυΐας (I.Q.) 6 μητέρων (X) και των παιδιών τους (Y):

X	85	95	100	110	110	120
Y	90	85	110	110	120	115

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς
β) Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης.

Βιβλιογραφία

Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών σπουδών*, Β΄ Γενικού Λυκείου, Εκδόσεις Διόφαντος, 1998

Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., Σβέρκος Α., *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής*, Γ΄ Γενικού Λυκείου, Εκδόσεις Διόφαντος, 1999

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων*, Α΄ Γενικού Λυκείου, Εκδόσεις Διόφαντος, 1998

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Άλγεβρα*, Β΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ, 1992

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ., *Μαθηματικά*, Γ΄ Γυμνασίου, Εκδόσεις Διόφαντος

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσιούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σίδερης Π., *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Εκδόσεις Διόφαντος

Βραχάτης Μ., *Αριθμητική Ανάλυση – Εισαγωγή*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2011

Βρούλος Α., Καρναβάς Σ., *Φυσική* (γ΄ έκδοση), Ίδρυμα Ευγενίδου, 2021

Δημαράκης Α., Ντούνης Χ., *Ναυτιλία* (Τόμος Α΄ - Ακτοπλοΐα), Ίδρυμα Ευγενίδου, 2019

Δημαράκης Α., Ντούνης Χ., *Ναυτιλία* (Τόμος Β΄), Ίδρυμα Ευγενίδου, 2016

Κολλινιάτης Ι., *Ευστάθεια – Κοπώσεις*, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2016

Κούτρας Μ., Λάττας Κ., Μπερσίμης Σ., Μαθηματικά Πλοιάρχων – Μηχανικών, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2012

Παλληκάρης Α., «Βελτιωμένες Μέθοδοι Επίλυσης Θεμελιωδών Προβλημάτων Ναυσιπλοΐας», *Nausivios Chora, A Journal in Naval Science and Technology*, Helenic Naval Academy, 2010

Παπαγεωργίου Γ., Τσίτουρας Χ., *Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica*, εκδόσεις Συμεών, 2006

Παπαγεωργίου Ε., Χαλικιάς Μ., *Εφαρμοσμένη Στατιστική & Πιθανότητες για Μηχανικούς με χρήση SPSS & MATLAB, BROKEN HILL PUBLISHERS*, 2020

Πέππας Χ., *Μαθηματικά ΑΔΣΕΝ Πλοιάρχων*, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2006

Πέππας Χ., *Σφαιρική Τριγωνομετρία*, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2006

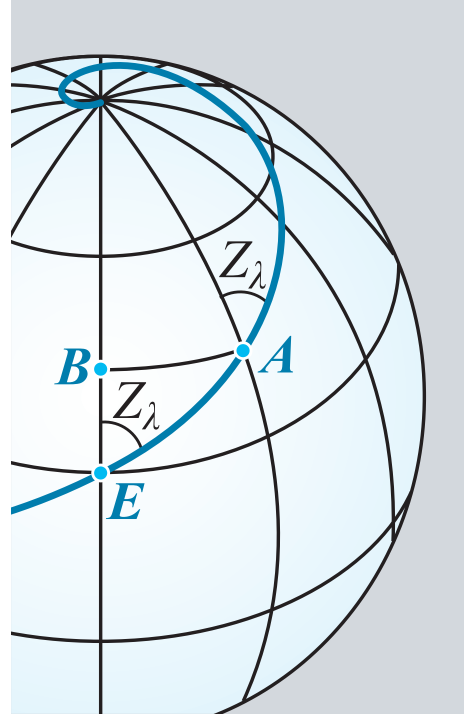
Πετρόπουλος Γ., Σημειώσεις Ναυπηγίας Δ – ΜΑΧ, Ευστάθεια, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

Χαλικιάς Μ., *Επαγωγική Στατιστική*, Σύγχρονη Εκδοτική, 2012

Χαλικιάς Μ., Μανωλέσσου Α., Λάλου Π., *Μεθοδολογία έρευνας και εισαγωγή στη Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων με το IBM SPSS STATISTICS*, Κάλλιπος, Ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις, 2015

Χρυσοβέργης Θ., *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, 1992

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους σπουδαστές Α' και Β' εξαμήνου της σχολής Πλοιάρχων των Ακαδημιών Εμπορικού Ναυτικού. Στόχος του είναι να αποκτήσουν οι σπουδαστές τις απαραίτητες γνώσεις Μαθηματικών, που θα χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια των σπουδών τους στην Ακαδημία, αλλά και στην μετέπειτα εργασία τους στο πλοίο. Περιλαμβάνει βασικές γνώσεις Άλγεβρας, Ευκλείδειας και Αναλυτικής Γεωμετρίας, Στατιστικής, Επίπεδης και Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Όλα τα κεφάλαια, αλλά ιδιαιτέρως η Επίπεδη και η Σφαιρική Τριγωνομετρία, περιλαμβάνουν εφαρμογές στη ναυτιλία.



ISBN 978-960-337-187-8