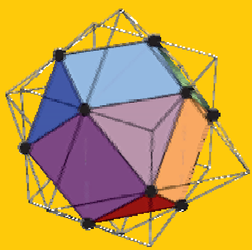
134

Μαθηματικό περιοδικό για το

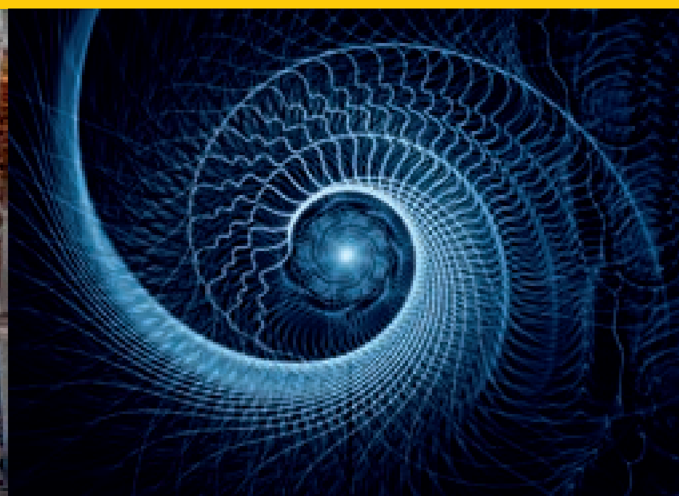
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

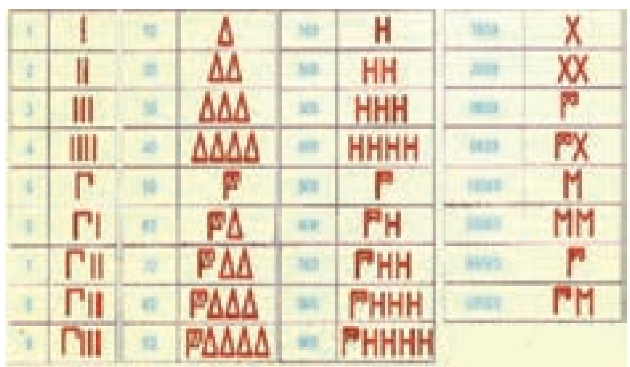
Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ+7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.



ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2024 ευρώ 3





Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 134

Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2024

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι καθηγητές,
Πολλές ευχές από όλους εμάς τους συντάκτες του περιοδικού,
Για καλές γιορτές και μια καλή και δημιουργική χρονιά.
Το 2025 να φέρει ευτυχία και ειρήνη στον κόσμο.

$$[2000 + 25] = [5\cdot 20^2 + 5^2] = 45^2 = 2025$$

Χρονιά Πολλά, Καλή πρόοδο

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Περί Τεχνητής Νοημοσύνης ο λόγος ...

Μπαδέμης Δημήτρης

- *Τεχνητή Νοημοσύνη (Τ.Ν.- AI) & Προγράμματα*
- *Ευρωπαϊκή Ένωση και Τεχνητή Νοημοσύνη*
- *Εφαρμογές της Τ.Ν. στην καθημερινότητα*
- *Οφέλη από την ενσωμάτωση της AI στην εκπαίδευση*

Στη δυναμική σφαίρα της εξελισσόμενης τεχνολογίας, ξεχωρίζει η ραγδαία ανάπτυξη προγραμμάτων τεχνητής Ευφυΐας (ΑΙ).

Η μεταμόρφωση των διαφόρων πεδίων της καθημερινότητάς μας με την συνειδητή ή ασυνείδητη χρήση τους ,είναι δεδομένη.

Η εκπαίδευση δεν αποτελεί εξαίρεση…

Η Τεχνητή Νοημοσύνη …

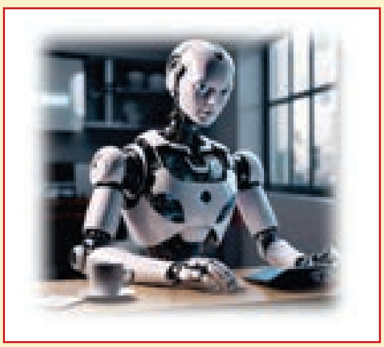
Η τεχνητή νοημοσύνη (ΤΝ) είναι ένα πεδίο της επιστήμης των υπολογιστών που εστιάζει στη δημιουργία συστημάτων που μπορούν να εκτελούν εργασίες που απαιτούν ανθρώπινη νοημοσύνη.

Στόχος της ΤΝ είναι η δημιουργία υπολογιστικών συστημάτων που μπορούν να εκτελούν λειτουργίες όπως η αναγνώριση προτύπων, η εκμάθηση, η αυτόματη λήψη αποφάσεων, η κατανόηση της φυσικής γλώσσας και άλλες που συνδέονται με τη νοημοσύνη.

Υπάρχουν πολλοί ορισμοί για την τεχνητή νοημοσύνη, αλλά μια κοινή αντίληψη είναι ότι πρόκειται για τη δημιουργία υπολογιστικών συστημάτων που μπορούν να εκτελούν εργασίες οι οποίες απαιτούν νοημοσύνη όπως η αναγνώριση προτύπων, η εκμάθηση, η λήψη αποφάσεων και άλλες.

Οι ορισμοί της τεχνητής νοημοσύνης μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με την προσέγγιση και το πεδίο του ερευνητή. Ανάμεσα στους διάφορους ορισμούς, υπάρχει η ταξινόμηση των συστημάτων τεχνητής νοημοσύνης σε δυνατά και αδύναμα, βάσει της ικανότητάς τους να πραγματοποιούν εργασίες που θεωρούνται νοημοσύνη.

Υπάρχουν επίσης ορισμοί που επικεντρώνονται σε συγκεκριμένες τεχνικές ή τεχνολογίες που χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη της τεχνητής νοημοσύνης, όπως τα νευρωνικά δίκτυα, οι γενετικοί αλγόριθμοι, κλπ.



Τα προγράμματα τεχνητής νοημοσύνης είναι λογισμικά που υλοποιούν αλγορίθμους και μοντέλα που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της τεχνητής νοημοσύνης. Αυτά τα προγράμματα μπορούν να εκτελούν διάφορες λειτουργίες, όπως αναγνώριση προτύπων, πρόβλεψη, αυτόματη λήψη αποφάσεων, επεξεργασία φυσικής γλώσσας, αυτόματη οδήγηση αυτοκινήτων, κ.λπ. Προγράμματα τεχνητής νοημοσύνης χρησιμοποιούνται ευρέως σε πολλούς τομείς, όπως η ρομποτική, η υγεία, η χρηματοοικονομική ανάλυση, η πρόβλεψη και πολλοί άλλοι.

Η τεχνητή νοημοσύνη έχει ενσωματωθεί σε πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής, βοηθώντας στην απλούστευση και βελτίωση πολλών διαδικασιών. Χρησιμοποιείται σε προσωπικές συσκευές, στην υγεία και στα κοινωνικά δίκτυα, παρέχοντας προηγμένες λύσεις και βελτιώνοντας την εμπειρία των χρηστών. Αυτή η τεχνολογία συνεχίζει να εξελίσσεται, ανοίγοντας νέους δρόμους για τη βελτίωση της ζωής μας.

Θέματα από το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο

Τι είναι η τεχνητή νοημοσύνη;

Η τεχνητή νοημοσύνη αναφέρεται στην ικανότητα μιας μηχανής να αναπαράγει τις γνωστικές λειτουργίες ενός ανθρώπου, όπως είναι η μάθηση, ο σχεδιασμός και η δημιουργικότητα.

Η τεχνητή νοημοσύνη καθιστά τις μηχανές ικανές να 'κατανοούν' το περιβάλλον τους, να επιλύουν προβλήματα και να δρουν προς την επίτευξη ενός συγκεκριμένου στόχου. Ο υπολογιστής λαμβάνει δεδομένα (ήδη έτοιμα ή συλλεγμένα μέσω αισθητήρων, π.χ. κάμερας), τα επεξεργάζεται και ανταποκρίνεται βάσει αυτών.

Τα συστήματα τεχνητής νοημοσύνης είναι ικανά να προσαρμόζουν τη συμπεριφορά τους, σε ένα ορισμένα βαθμό, αναλύοντας τις συνέπειες προηγούμενων δράσεων και επιλύοντας προβλήματα με αυτονομία.

Ποια η σημασία της τεχνητής νοημοσύνης;

Μερικές τεχνολογίες τεχνητής νοημοσύνης έκαναν την εμφάνισή τους εδώ και περισσότερο από 50 χρόνια. Η εξέλιξη, ωστόσο, των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η διάθεση αναρίθμητων δεδομένων και νέων αλγορίθμων επέτρεψαν την ταχύτατη ανάπτυξη της τεχνητής νοημοσύνης, η οποία αποτελεί προτεραιότητα της ΕΕ.

Παρότι επηρεάζει ήδη την καθημερινότητά μας, η τεχνητή νοημοσύνη αναμένεται να επιφέρει ακόμα τεράστιες αλλαγές και να παίξει κεντρικό ρόλο στη ψηφιακή μεταμόρφωση της κοινωνίας μας.

Εφαρμογές της Τ.Ν. στην καθημερινότητα

Αυτόνομη Κινητικότητα:

Συστήματα τεχνητής νοημοσύνης χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη αυτόνομων οχημάτων, τα οποία μπορούν να λειτουργούν χωρίς ανθρώπινη παρέμβαση.

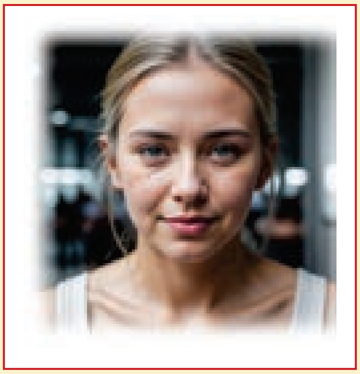
Κοινωνικά Δίκτυα και Διαδικτυακή Εμπειρία:

Η τεχνητή νοημοσύνη χρησιμοποιείται στην προσαρμοσμένη σύσταση περιεχομένου (recommendations) και την ανίχνευση ανεπιθύμητων περιεχομένων σε κοινωνικά δίκτυα και σε άλλες πλατφόρμες στο διαδίκτυο.

Αυτά είναι μόνο μερικά παραδείγματα της εφαρμογής της τεχνητής νοημοσύνης στην καθημερινή ζωή. Η τεχνολογία αυτή συνεχώς εξελίσσεται και επεκτείνεται σε νέους τομείς, προσφέροντας νέες δυνατότητες και βελτιώνοντας την ποιότητα ζωής.

Η χρήση τεχνητής νοημοσύνης μπορεί να συνδέεται με ορισμένους γενικούς κινδύνους και προκλήσεις σε διάφορους τομείς. Ορισμένοι από αυτούς τους κινδύνους περιλαμβάνουν:



Απώλεια θέσεων εργασίας:

Η αυτοματοποίηση που προκύπτει από την χρήση τεχνητής νοημοσύνης μπορεί να οδηγήσει σε μείωση θέσεων εργασίας σε ορισμένους τομείς, καθώς οι μηχανές αναλαμβάνουν καθήκοντα που πριν εκτελούνταν από ανθρώπους.

Ανεπάρκεια δεδομένων ή διαστρεβλώσεις:

Η ποιότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τα συστήματα τεχνητής νοημοσύνης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα και την ποσότητα των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για την εκπαίδευσή τους. Αν οι πηγές δεδομένων είναι περιορισμένες ή διαστρεβλωμένες, το σύστημα μπορεί να παράγει ανεπαρκή ή παραπλανητικά αποτελέσματα.

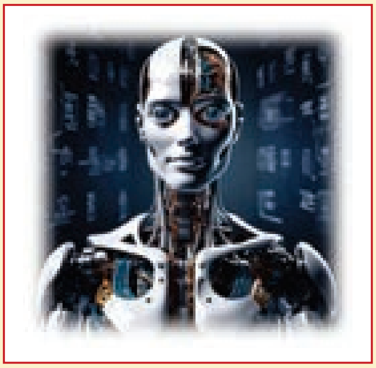
Αδιαφανείς αλγόριθμοι:

Ορισμένες φορές οι αλγόριθμοι τεχνητής νοημοσύνης είναι πολύπλοκοι και δύσκολο να ερμηνευτούν από ανθρώπους. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε έλλειψη διαφάνειας και κατανόησης σχετικά με το πώς λειτουργούν τα συστήματα ΤΝ, κάτι που ενδέχεται να επηρεάσει την εμπιστοσύνη και την αποδοχή τους από το κοινό.

Διακρίσεις και προκαταλήψεις:

Οι αλγόριθμοι τεχνητής νοημοσύνης μπορεί να αποκτήσουν προκαταλήψεις ή να αντικατοπτρίζουν τις διακρίσεις που υπάρχουν στα δεδομένα εκπαίδευσής τους. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε ανισότητες ή αδικίες στις αποφάσεις που λαμβάνονται από τα συστήματα ΤΝ.

Απώλεια απορρήτου και ανωνυμίας:



Η χρήση τεχνητής νοημοσύνης μπορεί να συνεπάγεται τη συλλογή και την επεξεργασία μεγάλων ποσοτήτων προσωπικών δεδομένων, με τον κίνδυνο της παραβίασης του απορρήτου και της ανωνυμίας.

Ηθικές Ανησυχίες:

Οι ηθικές επιπτώσεις των τεχνολογιών ΤΝ θέτουν σημαντικούς κινδύνους, συμπεριλαμβανομένων θεμάτων σχετικά με τη βάση, την ιδιωτικότητα και την ευθύνη. Η διασφάλιση ότι τα συστήματα

ΤΝ συμμορφώνονται με ηθικές κατευθυντήριες γραμμές και αξίες είναι ζωτικής σημασίας για την αντιμετώπιση αυτών των κινδύνων.

Αυτοί είναι μερικοί από τους γενικούς κινδύνους που σχετίζονται με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης σε διάφορους τομείς. Είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη αυτοί οι κίνδυνοι και να αναπτυχθούν μέτρα για την αντιμετώπισή τους καθώς και για την εξασφάλιση της υπεύθυνης χρήσης της τεχνολογίας τεχνητής νοημοσύνης

Πλεονεκτήματα της AI στην εκπαίδευση…

Η χρήση προγραμμάτων τεχνητής νοημοσύνης στην εκπαίδευση έχει πολλά πλεονεκτήματα, μερικά από τα οποία περιλαμβάνουν:

Εξατομικευμένη Μάθηση: Οι αλγόριθμοι μάθησης μπορούν να προσαρμοστούν ανάλογα με τις ανάγκες και το επίπεδο κάθε μαθητή, προσφέροντας έτσι εξατομικευμένη εκπαίδευση.

Βελτιωμένη Αξιολόγηση Επίδοσης:

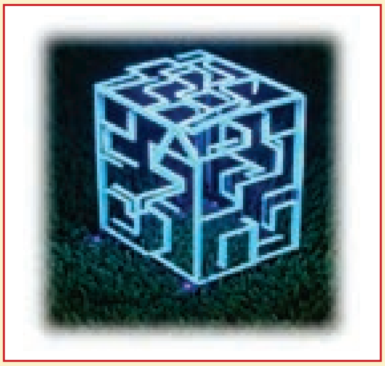
Τα προγράμματα ΤΝ μπορούν να αναλύουν την πρόοδο του μαθητή και να παρέχουν προσαρμοσμένα ανατροφοδοτικά σχόλια για τη βελτίωση της απόδοσής του.

Διαδραστική Μάθηση:

Η χρήση τεχνολογίας ΤΝ μπορεί να δημιουργήσει διαδραστικά περιβάλλοντα μάθησης που ενθαρρύνουν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών.

Αυτοματοποίηση Εκπαιδευτικών Διαδικασιών:

Η τεχνητή νοημοσύνη μπορεί να αυτοματοποιήσει διάφορες εκπαιδευτικές διαδικασίες, όπως η διαχείριση του περιεχομένου ή η αξιολόγηση των εργασιών των μαθητών.



Πρόσβαση σε Αμέτρητους Πόρους:

Οι μαθητές μπορούν να έχουν πρόσβαση σε πλούσιους εκπαιδευτικούς πόρους και εκπαιδευτικό υλικό που μπορεί να παραμετροποιηθεί ανάλογα με τις ανάγκες τους.

Πηγές – σύνδεσμοι - εφαρμογές για την παραγωγή αυτού του άρθρου.

https://www.europarl.europa.eu/topics/el/article/20200827STO85804/ti-einai-i-techniti-noimosuni-kai-pos-chrisimopoieitai

- ✓ https://gencraft.com/generate
- ✓ https://www.perplexity.ai/
- ✓ https://chat.openai.com/
- ✓ https://getimg.ai/text-to-image

Η διάδοση των Μαθηματικών μέσω των γρίφων από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος- Πρ. Διευθυντής Εκπαίδευσης Αθήνας, Επ. Σχολικός Σύμβουλος

Ποιο ήταν το κίνητρο ώστε ο άνθρωπος να οδηγηθεί στη μαθηματική σκέψη και λογική, από την οποία προήλθαν τα Μαθηματικά; Είναι προϊόν πνευματικής αναζήτησης ή οδηγήθηκε από ανάγκη επιβίωσης;

Ο **Ηρόδοτος** στο βιβλίο του «**Ιστορίαι**» ($2^{ο}$ μέρος, 109) αναφέρει πως η Γεωμετρία ανακαλύφθηκε από τους Αιγύπτιους για την είσπραξη των φόρων και ο Ευκλείδης την έκανε επιστήμη.

Οι πυραμίδες είναι κατασκευές με μαθηματική μελέτη

Ο **Αριστοτέλης** αντίθετα πίστευε ότι τα Μαθηματικά είναι προϊόν πνευματικής αναζήτησης. Δηλαδή οι Αιγύπτιοι ιερείς ήταν οι πρώτοι δημιουργοί, επειδή είχαν το χρόνο να σκεφτούν, να φιλοσοφήσουν και να ανακαλύψουν. Ύστερα, αυτά εφαρμόστηκαν για την εύρεση των κτημάτων στο Νείλο και η σχέση που είχαν οι ιερείς της Αιγύπτου με τους αρχαίους Έλληνες βοήθησε να εξελιχθούν σε επιστήμη.

Ποιες είναι οι απαρχές των Μαθηματικών;

Από μελέτες προκύπτει ότι οι πρωτόγονοι λαοί, είχαν αναπτύξει την έννοια της μέτρησης και είχαν χρησιμοποιήσει κάποιες μαθηματικές λέξεις πριν από 20.000 χρόνια. Οι άνθρωποι τότε ήταν κυνηγοί και δεν καλλιεργούσαν ακόμα τη Γη.

Όταν αργότερα καλλιέργησαν τη Γη, τότε χρειάστηκαν να βρουν τρόπο για να γίνει δίκαια το μοίρασμα της τροφής, δηλαδή των σιτηρών που καλλιεργούσαν και τα αποθήκευαν για να έχουν τροφή όλο το χρόνο. Έτσι οδηγήθηκαν σε μαθηματικές πράξεις.

Πάπυρος του Rhind

Οι γνώσεις μας για τα Μαθηματικά στην αρχαιότητα, προέρχονται από δυο διάσημους παπύρους, τον **πάπυρο Rhind** που χρονολογείται περίπου το 1650 π.Χ. και τον **πάπυρο της Μόσχας** που χρονολογείται το 1850 π.Χ. . Στον πάπυρο Rhind βρίσκουμε για πρώτη φορά προβλήματα ψυχαγωγικού και εκπαιδευτικού χαρακτήρα, τους ονομαζόμενους **Γρίφους**. Ο **πρώτος μαθηματικός Γρίφος** που γνωρίζουμε είναι το **79ο πρόβλημα** στον πάπυρο Rhind, είναι το εξής: «**Επτά σπίτια έχουν το καθένα 7 γάτες. Καθεμία από τις γάτες, τρώει 7 ποντίκια που το καθένα έφαγε 7 σπόρους σιταριού. Ο καθένας από τους οποίους θα είχε παραγάγει 7 νέους σπόρους**». Το πρόβλημα ζητάει να βρούμε πόσα είδη, αντικείμενα και ζώα, περιγράφονται στον γρίφο. Οι μαθηματικοί τα αρχαία χρόνια για να διαδώσουν ευκολότερα σε όλους τους ανθρώπους τις μαθηματικές τους γνώσεις τις μετέτρεπαν σε γρίφους. Μέσω των γρίφων μάθαμε πολλά σημαντικά προβλήματα.

Ο πάπυρος **Rhind** περιλαμβάνει 84 αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα, είναι ένα αντίγραφο του 1650 π.Χ. από παλαιότερο υλικό. Περιέχει πολλά αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα, όπως υπολογισμού όγκων και εμβαδών, μισθών αλλά και ποια ποσότητα σιτηρών χρειάζεται για να παραχθεί συγκεκριμένη ποσότητα ψωμιού.

Ο Πάπυρος του Γκολενίστσεφ ή ο **Μαθηματικός Πάπυρος της Μόσχας,** είναι πάπυρος του 1850 π.Χ. και είναι πιο μεγάλος από τον Πάπυρο Rhind. Περιέχει προβλήματα Άλγεβρας και Γεωμετρίας, εμβαδά και όγκους, υπολογισμούς για το μήκος μερών του πλοίου, για το πηδάλιο, το κατάρτι, κ.α. Επίσης προβλήματα για την εύρεση άγνωστης ποσότητας Χ αν δίνεται το σύνολο ή μέρος. Τέτοια προβλήματα ο πάπυρος Rhind έχει μόνο τέσσερα. Στον πάπυρο της Μόσχας το $19^{ο}$ πρόβλημα-γρίφος αναφέρει: «*αν έχουμε μια ποσότητα και ένα δεύτερο αυτής και προσθέσουμε τέσσερα, θα πάρουμε δέκα*». Ζητάει δηλαδή τη λύση πρωτοβάθμιας εξίσωσης $(x+\frac{1}{2}x+4=10)$. Επίσης έχει προβλήματα ανταλλαγής προϊόντων, απόδοσης εργατών και αμοιβής, κ.ά.

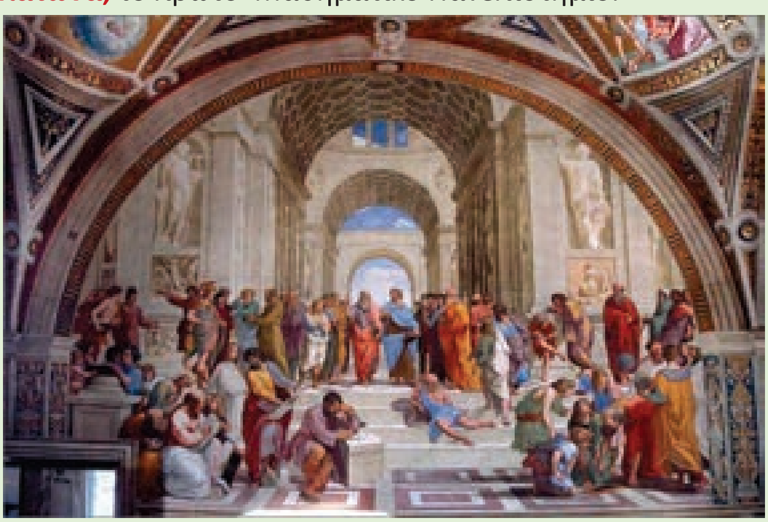
Οι Αρχαίοι Έλληνες

Πρώτος μαθηματικός θεωρείται **ο Θαλής(624-546)** που ανακάλυψε την έννοια της απόδειξης, και ακολουθούν:

ο **Πυθαγόρας(583-507)** που υποστήριζε ότι «Το παν είναι αριθμός»,

ο **Αρχιμήδης (287-212)** με μεγάλο και σπουδαίο επιστημονικό έργο

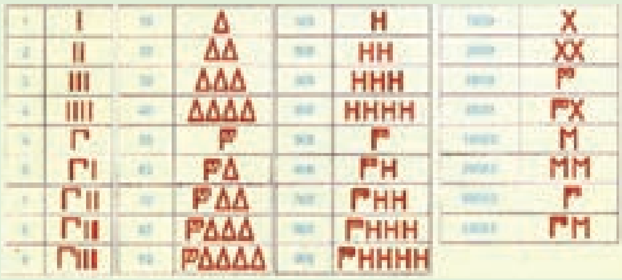
η **Ακαδημία του Πλάτωνα,** το πρώτο Μαθηματικό Πανεπιστήμιο.



Οι άλλοι λαοί

Οι Σουμέριοι και οι Ακκάδες αρχαίος λαός βόρεια των Σουμερίων στη Μεσοποταμία κατά την 3η χιλιετία π.Χ. είχαν τη χώρα που αργότερα έγινε γνωστή ως Βαβυλωνία. Αυτοί ήταν οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά και με μηχανικές κατασκευές την 3^{η} π.Χ. χιλιετία. Επίσης με τα Μαθηματικά ασχολήθηκαν οι Κινέζοι, οι Ινδοί, οι Φοίνικες, οι Βαβυλώνιοι, οι Άραβες, αλλά και οι Κρήτες της Μινωικής περιόδου και οι Αχαιοί της Μυκηναϊκής εποχής.

Το **εξηνταδικό σύστημα** αρίθμησης που έχουμε για τη μέτρηση του χρόνου, των γωνιών κλπ, είναι των Βαβυλωνίων. Είχαν συντάξει και πίνακες πολλαπλασιασμού, εύρεσης τετραγώνων και τετραγωνικών ριζών, ενώ γνώριζαν και περιπτώσεις του Πυθαγορείου θεωρήματος.



Η ταμπλέτα **Πλίμπτον** των Βαβυλωνίων 1900-1600 π.Χ. περιέχει **Πυθαγόρειες 3αδες**.

Μεγάλη και σημαντική ήταν η προσφορά των Ινδών στα Μαθηματικά, η επινόηση του **δεκαδικού συστήματος αρίθμησης** που το χρησιμοποιεί πλέον όλη η ανθρωπότητα και διευκόλυνε τα μέγιστα την επιστήμη των Μαθηματικών είναι των Ινδών. Το λέμε και Αραβικό σύστημα αρίθμησης γιατί έφτασε στην Ευρώπη μέσω των Αράβων από τον Fibonatcci. Τα πρώτα Ινδικά Μαθηματικά είναι σε θρησκευτικά κείμενα και έχουν κανόνες για την κατασκευή βωμών με συγκεκριμένα σχήματα και διαστάσεις. Στο μυαλό μας έρχεται το Δήλιο πρόβλημα από την αρχαία Ελλάδα και ο σπουδαίος Ινδός μαθηματικός του 19^{ου} αιώνα **Srinivasa Ramanujan** που έδωσε τεράστια ώθηση στα σύγχρονα μαθηματικά.

Οι Κινέζοι ανέπτυξαν τα Μαθηματικά, τη λογοτεχνία, τη φιλοσοφία, τις τέχνες ενώ έκαναν και πολλές εφευρέσεις. Μαθηματικά κείμενα και **μαγικά τετράγωνα** σύμφωνα με μύθο βρέθηκαν το 2200 π.Χ. στον κίτρινο ποταμό χαραγμένα στην πλάτη χελώνας. Τα πρώτα Μαθηματικά περιέχονται σε θρησκευτικά τους κείμενα.

Το σπουδαιότερο κείμενο της αρχαίας Κίνας είναι η αριθμητική **Chiu-chang-shu**. Περιέχει κανόνες για τη μέτρηση εμβαδού διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, υπολογισμό τετραγωνικών και κυβικών ριζών, όγκο στερεών, ποσοστά, αναλογίες, απλή μέθοδο των τριών, κ.ά. Μεταξύ αυτών βρίσκονται δύο **γρίφοι**, των **κρουνών** και του **ταχυδρόμου**. Στη διδασκαλία οι γρίφοι βοηθάνε πάρα πολύ για την **κατανόηση** των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, γιατί ο γρίφος έλκει το μαθητή και τον κρατάει σε εγρήγορση μέχρι να βρει τη λύση.

Τι αποκαλούμε γρίφους;

Γρίφους αποκαλούμε Μαθηματικά θέματα διατυπωμένα σε απλή καθημερινή γλώσσα αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε να φαίνονται παράξενα και παράδοξα, για να προκαλούν την περιέργεια, το ενδιαφέρον και την δημιουργικότητα.

Οι γρίφοι μας διδάσκουν την πρωτότυπη σκέψη, ενθαρρύνουν την εξερεύνηση και την ανακάλυψη, ενώ παράλληλα μας εκπαιδεύουν και μας διασκεδάζουν.

Οι Αρχαίοι Έλληνες και άλλοι λαοί, δημιουργούσαν κατά καιρούς διάφορα χαριτωμένα προβλήματα σε έμμετρο λόγο και **γρίφους**. Συλλέκτες και δημιουργοί τέτοιων προβλημάτων υπήρξαν πολλοί, όπως οι μοναχοί **Κωνσταντίνος Κεφαλάς** και **Μάξιμος Πλανούδης** λόγιοι και συγγραφείς του Βυζαντίου το 10^{ο} αιώνα.

Αυτά τα προβλήματα που διασώθηκαν από τον 7^{ο} αιώνα π.Χ. μέχρι τον 10^{ο} αιώνα μ.Χ.. περιέχονται στην **«Ελληνική Ανθολογία»**. Στην **Ελληνική Ανθολογία** περιέχονται: Γρίφοι, προβλήματα του Διόφαντου, σοφίσματα του Ζήνωνα, το Δήλιο πρόβλημα, ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο Αχιλλέας και η Χελώνα, το «Βοεικό πρόβλημα» του Αρχιμήδη, «το πρόβλημα των Μουσών», «το Παίγνιο του Νικόμαχου», «το πρόβλημα του Ωρονόμου», αριθμητικά του Ιάμβλιχου, του Θέωνος του Σμυρναίου, του Άδραστου, του Υψικλέους και άλλων.

Στη Βενετία υπάρχει η **Μαρκιανή βιβλιοθήκη** στην οποία περιέχονται περί τα 2400 επιγράμματα σε Ελληνικά και Λατινικά χειρόγραφα. Βέβαια πολλά έργα όχι μόνο των αρχαίων Ελλήνων έχουν χαθεί με την καταστροφή της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας.

Στις εφευρέσεις των Αρχαίων Ελλήνων, τις οποίες μάθαμε από τέτοια χειρόγραφα που σώθηκαν, έχει τις ρίζες της και η ανάπτυξη της **τεχνολογίας**. Αυτή την τεχνολογία μπορούμε να την θαυμάσουμε αν επισκεφτούμε **το Μουσείο «Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας» του κ. Κώστα Κοτσανά** στην **Αθήνα** και την **Αρχαία Ολυμπία**.

Με **Γρίφους, αινίγματα και μαγικά τετράγωνα** ασχολήθηκαν πολλοί λαοί και όλοι οι μεγάλοι μαθηματικοί, τόσο στη Δύση όσο και στην Ανατολή, υπάρχουν πολλές συλλογές **διασκεδαστικών μαθηματικών.**

Πάθος με τους Γρίφους είχε ο Γάλλος μαθηματικός **Μπασέ ντε Μεζιριάκ (Bachet de Méziriac 1581-1638),** το 1626 δημοσίευσε μια συλλογή γρίφων **«Ευχάριστα και απολαυστικά προβλήματα καμωμένα από αριθμούς»,** το 1621 μετέφρασε και δημοσίευσε συλλογή 100 προβλημάτων **«Τα αριθμητικά» του Διόφαντου** που είχαν ξεχαστεί με την πυρπόληση της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Επίσης ασχολήθηκαν και οι: **Riemann**, **Euler**, **Lucas**, **Laisant**, **Gauss**, **Gödel**, **Henri Poincaré**, **Blaise Pascal**, **Newton**, ο Πέρσης **Αλ Χουαρίζμι (Al Khwarizmi)**, ο σύμβουλος του Καρλομάγνου **Albinus Flaccus Alcuin** (735—804), ο **Λεονάρδος της Πίζας ή Fibonacci (1175—1230), ο Clavius (1608),** ο **Nicolas Chuquet(1445-1488)** . Ο **Ozanam** το 1692 με τη δίτομη πραγματεία του «Διασκεδαστικά των Μαθηματικών και της Φυσικής» και πολλοί άλλοι.

(Περισσότερα *στο βιβλίο «Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν» έκδοση ΕΜΕ*).

Ποιες είναι οι γνώσεις μου ξεκινώντας το Γυμνάσιο;

Παντελής Γρυπάρης - Νίκος Σαμπάνης

Η βασική πρωτοβάθμια εκπαίδευση ολοκληρώνεται με την φοίτηση στις 6 τάξεις του δημοτικού. Οι μαθητές και οι γονείς έχουν αγωνία και άγχος για την μετάβαση στο Γυμνάσιο. Μια μεγάλη αλλαγή για την οποία απαιτείται σωστή προετοιμασία και έλεγχος γνώσεων ώστε να γίνει ομαλά η μετάβαση στην βασική δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η ύλη των Μαθηματικών του δημοτικού μπορεί να οργανωθεί σε δέκα βασικές θεματικές ενότητες για τις οποίες μπορούμε να δούμε κάποιες ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπως ακριβώς εξετάζονται οι υποψήφιοι μαθητές για την εισαγωγή στα Πρότυπα Γυμνάσια.

Ενότητα 1η : Αριθμητικές παραστάσεις
Ενότητα 2η : Αριθμογραμμή
Ενότητα 3η : Εξισώσεις
Ενότητα 4η : Κλάσματα
Ενότητα 5η : Ποσοστά
Ενότητα 6η : Ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά
Ενότητα 7η : Σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων
Ενότητα 8η : Μοτίβα
Ενότητα 9η : Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων
Ενότητα 10η : Γεωμετρία

Η επιλογή της σωστής απάντησης απαιτεί σε αρκετές περιπτώσεις, την χρήση πρακτικής αριθμητικής και κριτικής σκέψης, δύο από τις πλέον βασικές δεξιότητες που πρέπει να έχει αναπτύξει ένα παιδί που ολοκληρώνει την ΣΤ΄ Δημοτικού.

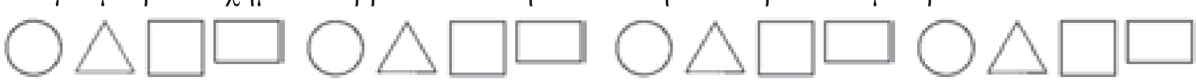
Ας δούμε 30 ερωτήσεις από τις 10 βασικές θεματικές ενότητες στις οποίες είναι οργανωμένες οι γνώσεις που πρέπει να έχει ένας μαθητής που ξεκινά την Α΄ Γυμνασίου.

1. Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των αριθμών 12 , 24 και 30 είναι:
Α. 6 **Β.** 12 **Γ.** 4 **Δ.** 5

2. Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 12 , 24 και 30 είναι:
Α. 60 **Β.** 120 **Γ.** 90 **Δ.** 150

3. Ποιο κλάσμα είναι πιο κοντά στη μονάδα ;
Α. $\frac{3}{17}$ **Β.** $\frac{3}{12}$ **Γ.** $\frac{3}{13}$ **Δ.** $\frac{3}{33}$

4. Το γεωμετρικό σχήμα που βρίσκεται στην $67^{η}$ θέση του παρακάτω μοτίβου είναι :



Α. τρίγωνο **Β.** ορθογώνιο **Γ.** κύκλος **Δ.** Τετράγωνο

5. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου διπλασιασθεί τότε το εμβαδόν του σε σχέση με το αρχικό είναι το:

Α. 50% **Β.** 100% **Γ.** 200% **Δ.** 400%

6. Ένα παντελόνι κόστιζε 28€ και στις εκπτώσεις το αγοράσαμε 21€. Το ποσοστό της έκπτωσης ήταν :

Α. 50% **Β.** 20% **Γ.** 25% **Δ.** 25%

7. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά το μισό του ισούται με 22. Ποια εξίσωση περιγράφει το πρόβλημα ;

Α. $3 \cdot x + \frac{x}{2} = 22$ **Β.** $3 \cdot x + x = 22$ **Γ.** $3 \cdot x = 22 + \frac{x}{2}$ **Δ.** $3 \cdot x = \frac{x}{2}$

8. Ποιος είναι ο αμέσως μεγαλύτερος αριθμός του 2023 ο οποίος διαιρείται με το 2 και το 16 ;

Α. 2042 **Β.** 2024 **Γ.** 2028 **Δ.** 2032

9. Μία ταινία έχει διάρκεια 100 λεπτά και ακριβώς στο μέσο της ταινίας γίνεται ένα διάλειμμα 15 λεπτών. Αν η ταινία ξεκινάει στις 8.20 μμ, τι ώρα θα ξεκινήσει η ταινία μετά το διάλειμμα;

Α. 9.15 μμ **Β.** 9.30 μμ **Γ.** 9.25 μμ **Δ.** 9.10 μμ

10. Ο Νίκος και ο Παναγιώτης αγόρασαν ένα μπουκάλι κρασί. Ο Νίκος ήπιε τα $\frac{3}{5}$ του κρασιού και ο Παναγιώτης ήπιε το μισό από όσο άφησε ο Νίκος. Ποιο μέρος του κρασιού έμεινε στο μπουκάλι ;

Α. $\frac{1}{5}$ **Β.** $\frac{2}{5}$ **Γ.** $\frac{3}{5}$ **Δ.** $\frac{3}{10}$

11. Η τιμή της παράστασης $\frac{19}{2} - 3^2 : 4$ είναι ίση με :

Α. $\frac{29}{4}$ **Β.** $\frac{32}{2}$ **Γ.** $\frac{10}{4}$ **Δ.** $\frac{10}{2}$

12. Ο Γιώργος εκτρέφει σαλιγκάρια και κάθε εξάμηνο ο πληθυσμός τους αυξάνεται κατά 30%. Αν σήμερα έχει 1000 σαλιγκάρια πόσα θα έχει στο τέλος του έτους ;

Α. 1060 **Β.** 1690 **Γ.** 1300 **Δ.** 1600

13. Τρία μολύβια και πέντε στυλό κοστίζουν 4,6€ ενώ τα τέσσερα μολύβια και δύο στυλό κοστίζουν 3,1€. Πόσο κοστίζουν δύο μολύβια και δύο στυλό ;

Α. 2€ **Β.** 1,1€ **Γ.** 1,5€ **Δ.** 2,2€

14. Πόσους τετραψήφιους ακέραιους αριθμούς μεταξύ του 3.500 και 4.500 μπορώ να φτιάξω χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα ψηφία 2,3,4,5 μία φορά το καθένα ;

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** πάνω από 4 **Δ.** 1

15. Η βιβλιοθήκη του σχολείου περιέχει 530 βιβλία. Τα ξενόγλωσσα είναι 150 λιγότερα από τα ελληνόγλωσσα. Πόσα είναι ελληνόγλωσσα βιβλία στην βιβλιοθήκη ;

Α. 190 **Β.** 340 **Γ.** 280 **Δ.** 250

16. Ένας παραγωγός λαδιού μπορεί να συσκευάσει τα πορτοκάλια που προέκυψαν από την συγκομιδή σε κιβώτια των 25, 30 ή 40 κιλών .
Πόσα κιλά ήταν η παραγωγή του αν ο αριθμός των κιβωτίων είναι ακέραιος και όχι δεκαδικός;

Α. 1200 κιλά **Β.** 1,4 τόνοι **Γ.** 260 κιλά **Δ.** 0,7 τόνοι

17. Στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{13}{5}$ απέχει από το $\frac{\alpha}{\beta}$ τετραπλάσια απόσταση από όσο απέχει από το 3. Πόσο απέχουν μεταξύ τους ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ με το 3 ;

Α. 2 **Β.** 1 **Γ.** $\frac{3}{5}$ **Δ.** 1/2

18. Η Ελένη, η Μαρία και 8 συμμαθητές τους επέλεξαν τα γαλλικά ως $2^{η}$ ξένη γλώσσα, ενώ τα υπόλοιπα $\frac{3}{5}$ των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης διάλεξαν γερμανικά.

Πόσους μαθητές έχει η ΣΤ΄ τάξη;

Α. 24 **Β.** 22 **Γ.** 20 **Δ.** 25

19. Το διπλανό σχεδιάγραμμα που απεικονίζει μία πλατεία και ένα γήπεδο, σχεδιάστηκε με κλίμακα 1:1.000 .
Η περίμετρος της πλατείας στο σχεδιάγραμμα είναι 32 εκατοστά .
Ποια είναι η πραγματική περίμετρος του γηπέδου ;

Α. 240 μέτρα **Β.** 120 μέτρα
Γ. 440 μέτρα **Δ.** 220 μέτρα

20. Ο Παναγιώτης ήπιε τα $\frac{2}{5}$ του μπουκαλιού γάλα που αγόρασε η μαμά του και η Άννα ήπιε $\frac{1}{6}$ περισσότερο από τον Παναγιώτη. Ποιο μέρος του γάλακτος απέμεινε στο μπουκάλι ;

Α. $\frac{1}{30}$ **Β.** $\frac{1}{5}$ **Γ.** $\frac{1}{6}$ **Δ.** $\frac{2}{15}$

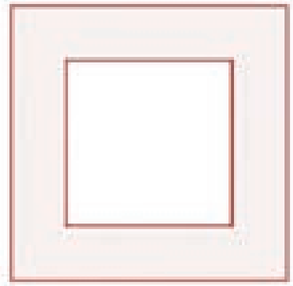
21. Για το πασχαλινό τσουρέκι χρησιμοποιήσαμε $\frac{3}{4}$ του κιλού αλεύρι για τσουρέκι, 200 γραμμάρια ζάχαρη, 150 γραμμάρια βούτυρο και τα υπόλοιπα υλικά ζυγίζουν 350 γραμμάρια. Πόσο βούτυρο πρέπει να βάλουμε για τη ζύμη ενός τσουρεκιού όπου τα υλικά ζυγίζουν 2.900 γραμμάρια;

Α. 350 γρ. **Β.** 300 γρ. **Γ.** 250 γρ **Δ.** 150 γρ.

22. Τα 10 κιλά αλάτι κοστίζουν 9 €. Τα 3 κιλά αλάτι και τα 8 κιλά ζάχαρη κοστίζουν 9,1 €. Πόσο κοστίζουν συνολικά 7 κιλά αλάτι και 7 κιλά ζάχαρη ;

Α. 12,9 € **Β.** 9,5 € **Γ.** 11,9 € **Δ.** 12,5 €

23. Το μεγάλο τετράγωνο έχει πλευρά 5 εκατοστά και το μικρό τετράγωνο έχει πλευρά 4 εκατοστά.
Το ποσοστό επί τοις εκατό της γραμμοσκιασμένης περιοχής ως προς το μεγάλο τετράγωνο είναι :



Α. 36% **Β.** 18% **Γ.** 25% **Δ.** 20%

24. Η Μαρία με την φίλη της και άλλα 23 άτομα περιμένουν στην ουρά μιας τράπεζας για να πληρώσουν λογαριασμούς. Τα άτομα που περιμένουν μπροστά από τη Μαρία είναι τριπλάσια από όσα περιμένουν πίσω από τη Μαρία.
Η θέση της Μαρίας στην ουρά είναι η :

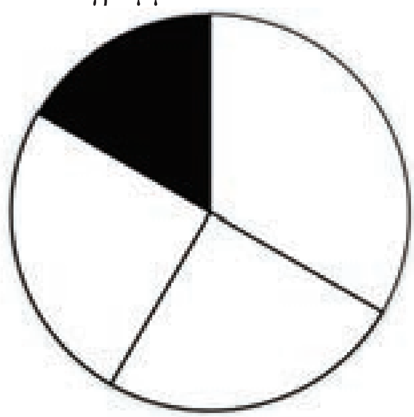
Α. 7η **Β.** 19η **Γ.** 18η **Δ.** 17η

25. Ένα δοχείο και το νερό που περιέχει ζυγίζουν 1.100 γραμμάρια. Χύθηκε το 30% του νερού και το βάρος του δοχείου μαζί με το νερό ήταν 830 γραμμάρια. Ποιο είναι το βάρος του άδειου δοχείου ;

Α. 150 γρ. **Β.** 250 γρ. **Γ.** 100 γρ. **Δ.** 200 γρ.

26. Μεταξύ παιδιών ενός σχολείου έγινε μία έρευνα, για το αγαπημένο του χρώμα. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν «μπλε», «κόκκινο», «πράσινο» και «κίτρινο». Τα περισσότερα παιδιά απάντησαν πράσινο, ενώ «κόκκινο» απάντησαν αρκετά περισσότερα παιδιά από όσα απάντησαν «κίτρινο». Τα αποτελέσματα φαίνονται στο κυκλικό διάγραμμα.
Σε ποιο χρώμα αντιστοιχεί το μαύρο μέρος του διαγράμματος;

Α. μπλε
Β. κίτρινο
Γ. κόκκινο
Δ. πράσινο



27. Γράφουμε τη λέξη ΔΙΑΒΑΣΜΑ συνεχόμενα 300 φορές:

ΔΙΑΒΑΣΜΑΔΙΑΒΑΣΜΑΔΙΑΒΑΣΜΑΔΙΑΒΑΣΜΑΔΙΑΒΑΣΜΑ…

Αν μετρήσουμε τα γράμματα από αριστερά προς δεξιά, τότε πιο γράμμα βρίσκεται στη 500η θέση;

Α. Α **Β.** Β **Γ.** Σ **Δ.** Μ

28. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από την ναυμαχία της Σαλαμίνας, που έγινε το 480 π.Χ., μέχρι σήμερα;

Α. 2503 χρόνια Β. 1543 χρόνια Γ. 2480 χρόνια Δ. 2043 χρόνια

29. Πόσες διαγώνιες έχει ένα εξάγωνο;

Α. 18 **Β.** 9 **Γ.** 12 **Δ.** 6

30. Πόσοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν από τον αριθμό 1989 μέχρι και τον αριθμό 2024;

Α. 34 **Β.** 35 **Γ.** 36 **Δ.** 37

Ποσοστά

Θανάσης Χριστόπουλος

Αλήθεια, πως θα εκφράσουμε με τα Μαθηματικά ότι φάγαμε μισή σοκολάτα;

1) Μια πρώτη ιδέα είναι με **κλάσμα** (χωρίσαμε τη σοκολάτα σε δύο ίσα μέρη και φάγαμε το ένα από τα δύο) άρα με το $\frac{1}{2}$

2) Ένας δεύτερος τρόπος είναι με **δεκαδικό** αριθμό **0,5** (εδώ χωρίσαμε τη σοκολάτα σε 10 ίσα μέρη και φάγαμε τα 5)

3) Ένας τρίτος τρόπος είναι να χωρίσουμε τη σοκολάτα σε εκατό ίσα μέρη και να φάμε τα 50. Αυτό, (εκτός από 0,50) μπορούμε να πούμε ότι φάγαμε το **50%** της σοκολάτας. Δηλαδή με **ποσοστό (%)**.

Τα ποσοστά τα συναντάμε στην καθημερινότητα και είναι πολύ χρήσιμα.

Θα έχετε δει στις βιτρίνες των καταστημάτων για παράδειγμα: εκπτώσεις **30%** ή θα έχετε ακούσει ότι κάποιο προϊόν αυξήθηκε η τιμή του **10%** ή ότι κάποιο κόμμα «πήρε» στις εκλογές το 20% των ψήφων.

Η ιδέα είναι ότι οποιοδήποτε ποσότητα τη χωρίζουμε σε 100 ίσα μέρη και στη συνέχεια παίρνουμε κάποια από αυτά, όχι απαραίτητα ακέραιο πλήθος από αυτά. Έτσι αν πάρουμε 20 μέρη τότε λέμε ότι πήραμε το 20%

Για να **μετατρέψουμε** κάθε κλάσμα σε ποσοστό δεν έχουμε παρά να το μετατρέψουμε σε δεκαδικό και μετά να το πολλαπλασιάσουμε επί εκατό και το αποτέλεσμα να το συνοδεύσουμε με το συμβολο % (…τοις εκατό)

Γενικά,

Ποσοστό(%)$=\frac{\textit{το μέρος ενός συνόλου}}{\textit{συνολικη ποσότητα}} * 100\%$

Επίσης για το ποσοστό αύξησης ή μείωσης ενός ποσού έχουμε:

Ποσοστό(%)$=\frac{\textit{ποσό αύξησης ή μείωσης}}{\textit{Αρχική τιμή}}\cdot 100\%$

Το α% του β είναι: $\frac{\alpha}{100}\cdot\beta$

Παράδειγμα 1ο

Από το Α2 στο οποίο φοιτούν 24 παιδιά, απουσίαζαν 6, τι ποσοστό απουσίαζε;

Υπολογίζουμε: $\frac{6}{24}=0{,}25$ αυτό το πολλαπλασιάζουμε με το 100 οπότε γίνεται 25, επομένως το ποσοστό είναι 25%

(ή ποσοστό%$=\frac{6}{24}\cdot 100\% = 25\%$)

Παράδειγμα 2ο

Η τιμή ενός τετραδίου από 4€ πήγε 5€. Ποιο το ποσοστό αύξησης του τετραδίου.

Ποσό αύξησης=5€-4€=1€. Αρχική τιμή= 4€

Άρα,

Ποσοστό αύξησης(%)$=\frac{1}{4}\cdot 100\%=0{,}25\cdot 100\%$ **=25%**

Παράδειγμα 3ο

Ο ΦΠΑ (φόρος προστιθέμενης αξίας) είναι 24% στην αξία παραγωγής ενός προϊόντος. Τι ΦΠΑ αντιστοιχεί σε ένα προϊόν που η αρχική αξία του είναι 250€.

$\frac{24}{100}\cdot 250=\frac{24\cdot 25}{10}=\frac{600}{10}=60€$

(Θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ότι $\frac{24}{100}$ =0,24 άρα 0,24·250=60€)

Άσκηση 1η

Η τιμή ενός ποδηλάτου μειώθηκε κατά 12% και έτσι κερδίσαμε 72 ευρώ. Ποια ήταν η αρχική τιμή του ποδηλάτου;

Λύση

α΄τρόπος. Αν **x η τιμή του ποδηλάτου** τότε η **μείωση είναι:** $\frac{12}{100}\cdot x$ **ή** $0{,}12\cdot x=72$ άρα x=72:0,12=600€

β΄τρόπος. Αν υποθέσουμε ότι η τιμή του ποδηλάτου είναι 100€ τότε η μείωση είναι 12€ οπότε με ανάλογα ποσά θα έχουμε:

αρχική 100	μείωση 12
x	72

12·x=7200 άρα x=600€

Άσκηση 2η

Στις δημοτικές εκλογές μιας πόλης συμμετείχαν τρία κόμματα Α, Β, Γ. Τα έγκυρα ψηφοδέλτια ήταν 18.000 το Α πήρε 8.000 ψήφους και το Β 6.000 ψήφους.
Τι ποσοστό ψήφων πήρε το καθένα από τα τρία κόμματα;

Λύση

Ποσοστό Α κόμματος $=\frac{8000}{18000}\cdot 100\%=44{,}44\%$

Ποσοστό Β κόμματος $=\frac{6000}{18000}\cdot 100\%=33{,}33\%$

Ψήφοι Γ κόμματος=18000-8000-6000=4000

Ποσοστό Γ κόμματος $=\frac{4000}{18000}\cdot 100\%=22{,}22\%$

Άσκηση 3η

Η τιμή της φέτας αυξήθηκε κατά 2€, του ψωμιού κατά 0,20€. Η προηγούμενη τιμή της φέτας ήταν 10€ και του ψωμιού 0,80€. Ποιο από τα δύο είχε μεγαλύτερο ποσοστό αύξησης;

Λύση

Ποσοστό αύξησης της φέτας$=\frac{2}{10}\cdot 100\%=20\%$

Ποσοστό αύξησης του ψωμιού$=\frac{0{,}20}{0{,}80}100\% = 25\%$. Άρα μεγαλύτερη ποσοστιαία αύξηση είχε το ψωμί.

Άσκηση 4η

Από τα παιδιά που φοιτούν στο Α1 του σχολείου το 40% είναι αγόρια. Αν τα κορίτσια του τμήματος είναι 12 πόσα παιδιά έχει το Α1.

Λύση

Τα αγόρια είναι το 40% των παιδιών του $Α_1$, επομένως τα κορίτσια είναι το 60%

Αν x το σύνολο των παιδιών τότε:

$\frac{60}{100}\cdot x=12$ ή $0{,}6\cdot x=12$ οπότε

$x=12:0{,}6$ άρα $x=20$

Το Α1 έχει 20 παιδιά

Άσκηση 5η

ο Νάσος πήρε σήμερα όλα τα χρήματα που είχε στο κουμπαρά του και πήγε στο βιβλιοπωλείο. Αγόρασε τετράδια 8 ευρώ, ένα βιβλίο για το ηλιακό μας σύστημα 10€ και ένα στυλό 2€. Τι ποσοστό των χρημάτων του έδωσε για τετράδια, τι για το βιβλίο και τι για το στυλό;

Λύση

Συνολικά πλήρωσε 8+10+2=20€

Ποσοστό χρημάτων για τετράδια$=\frac{8}{20}\cdot 100=40\%$

Ποσοστό χρημάτων για βιβλίο $=\frac{10}{20}\cdot 100=50\%$

Ποσοστό χρημάτων για στυλό$=\frac{2}{20}\cdot 100=10\%$

Άσκηση 6η

Ο Τηλέμαχος θέλει να αγοράσει ένα ζευγάρι παπούτσια που στοιχίζουν 125 ευρώ αλλά διαθέτει μόνο 100 ευρώ. Βλέπει όμως στη βιτρίνα μία ανακοίνωση, ότι από αύριο αρχίζουν οι εκπτώσεις που θα είναι 20% σε όλα τα είδη. Θα φτάσουν άραγε τα χρήματά του για να αγοράσει αύριο τα παπούτσια;

Λύση

Η έκπτωση θα είναι $\frac{20}{100}\cdot 125=25$€

Η τιμή τους αύριο θα είναι: 125-25=100€

Επομένως θα μπορέσει να τα αγοράσει.

Άσκηση 7η

Το 40% του πληθυσμού μιας πόλης είναι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης το 35% είναι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και οι υπόλοιποι 8.000 είναι υποχρεωτικής εκπαίδευσης.
α) Ποιος είναι ο πληθυσμός της πόλης;
β) πόσοι είναι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης και πόσοι δευτεροβάθμιας;

Λύση

α) Οι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης μαζί με αυτούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αποτελούν το 75% του πληθυσμού της πόλης. Επομένως μένει το 25% το οποίο είναι υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Οπότε έχουμε ότι το 25% αντιστοιχεί σε 8000 άτομα.

Αν x το σύνολο των ατόμων της πόλης, τότε:

$\frac{25}{100} \cdot \boldsymbol{x}$ =8000 ή 0,25· $\boldsymbol{x}$=8000 οπότε

$\boldsymbol{x} = \mathbf{8000:0,25}$ άρα $\boldsymbol{x}$ =32000

Ο πληθυσμός της πόλης είναι 32.000.

β) Επομένως πανεπιστημιακής εκπαίδευσης είναι: $\frac{40}{100} \cdot \mathbf{32000}$ =12800 και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι:

$$\frac{35}{100} \cdot \mathbf{32000} = 11200$$

Τι ιδιαίτερο έχουν τα ποσοστά;

1. Τα ποσοστά, όπως και τα κλάσματα αποκτούν αξία από την ποσότητα στην οποία αναφέρονται (ακόμα και όταν τα συναντάμε σε μια άσκηση μόνα τους, δεχόμαστε ότι αναφέρονται στην ακεραία μονάδα).

2. Όταν δεν αναφέρονται σε ίδια ποσότητα τότε δεν κάνουμε πρόσθεση ή αφαίρεση με ποσοστά.

3. Χρησιμοποιούμε επίσης και ποσοστό «τοις χιλίοις» (**‰**).

Παράδειγμα: 5‰ του β σημαίνει: $\frac{5}{1000} \cdot \beta$

Άσκηση 8η

Ένας επιχειρηματίας αγόρασε μετοχές μιας εταιρείας, προς 50€ την κάθε μετοχή. Σε ένα μήνα η μετοχή έπεσε κατά 12% και τον επόμενο μήνα ανέβηκε κατά 12%.
Τελικά είχε κέρδος ή ζημιά, αυτούς τους δύο μήνες.

Λύση

Το πρώτο μήνα έχασε $\frac{12}{100}$·50=6€, οπότε η τιμή της μετοχής έγινε 50-6=44€

Το δεύτερο μήνα κέρδισε $\frac{12}{100} \cdot$ 44=5,28€, οπότε η τιμή της μετοχής έγινε 44+5,28=49,28€

Επομένως από κάθε μετοχή έχασε 0,72€

Άσκηση 9η

Τι ποσό πρέπει να καταθέσουμε στην τράπεζα, για να πάρουμε στο τέλος ενός έτους 5.200€ , αν το επιτόκιο είναι 4%;

Λύση

Αν x το Κεφάλαιο που πρέπει να καταθέσουμε τότε μετά από ένα έτος θα πάρουμε:

Κεφάλαιο + Τόκος=5200

$\boldsymbol{x} + \frac{4}{100} \cdot \boldsymbol{x}$ =5200

$\left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \boldsymbol{x}$ =5200

1,04·x=5200 οπότε x =5200:1,04

$\boldsymbol{x}$ = **5000€**

Άσκηση 10η

Τα πάγια τέλη διμήνου για λογαριασμό του ρεύματος είναι 18€ και η χρέωση για κάθε Kwh (Κιλοβατώρα) είναι 0,09€. Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ένας καταναλωτής, αν έχει καταναλώση 800 kwh, επί του συνόλου υπολογίζεται και ΦΠΑ 6%.

Λύση

Οι 800kwh κοστίζουν 800·0,09=72€ οπότε μαζί με τα τέλη το σύνολο είναι: 72+18=90€

ΦΠΑ=$\frac{6}{100} \cdot$ 90=5,40€

Ποσό πληρωμής=90+5,40=95,40€

Άσκηση 11η

Σε ένα σχολείο το 40% των κοριτσιών και το 30% των αγοριών πήρε αριστείο. Αν τα κορίτσια είναι 120 και τα αγόρια είναι 100, τι ποσοστό επί του συνόλου των μαθητών του σχολείου πήρε αριστείο.

Λύση

Το 40% των120 κοριτσιών είναι: $\frac{40}{100} \cdot$ 120=48

Το 30% των 110 αγοριών είναι: $\frac{30}{100} \cdot$ 100=30

Άρα πήραν Αριστείο 48+30=78 παιδιά

Το σύνολο των μαθητών είναι: 120+100=220

Επομένως στο σύνολο των μαθητών του σχολείου το ποσοστό των παιδιών που πήραν Αριστείο είναι: $\frac{78}{220} \cdot$ **100=35,45%**

Γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας

Χρήστος Κουστέρης

Στα παρακάτω παραδείγματα τα μεγέθη όλα ικανοποιούν τους τυχόν περιορισμούς.

Είναι γνωστό ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς α,β,γ ισχύει $\boxed{\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma}$

Ας δούμε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλάτος α και μήκος β, τότε το εμβαδόν του είναι

$$\boxed{E_1=\alpha\cdot\beta}$$

Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΔΓ προς το Β και Γ αντίστοιχα κατά ίσα ευθύγραμμα τμήματα μήκους γ τότε το **νέο** ορθογώνιο ΑΕΖΔ θα έχει εμβαδόν

$$\boxed{E_2=\alpha\cdot\gamma}$$

Άρα το εμβαδόν ΑΕΖΔ θα είναι $E=E_1+E_2=\alpha\beta+\alpha\gamma$

Αν όμως είχαμε εξαρχής το δεύτερο σχήμα τότε το εμβαδόν θα το υπολογίζαμε ως εξής

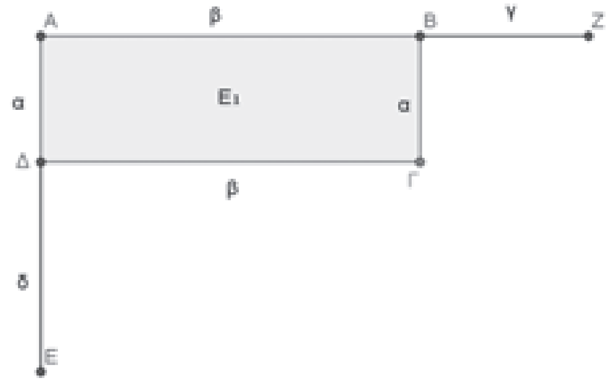
$$E=\alpha\cdot(\beta+\gamma)$$

Άρα $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

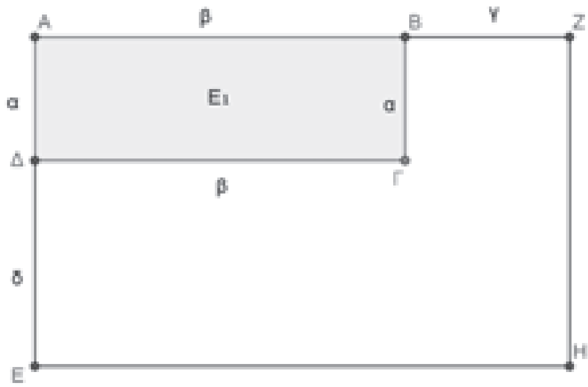
Η επιμεριστική

$$\boxed{(\alpha+\delta)\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\delta\beta+\delta\gamma}$$

Έστω τώρα ότι στο αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ αυξάναμε το μήκος κατά γ και το πλάτος κατά δ.



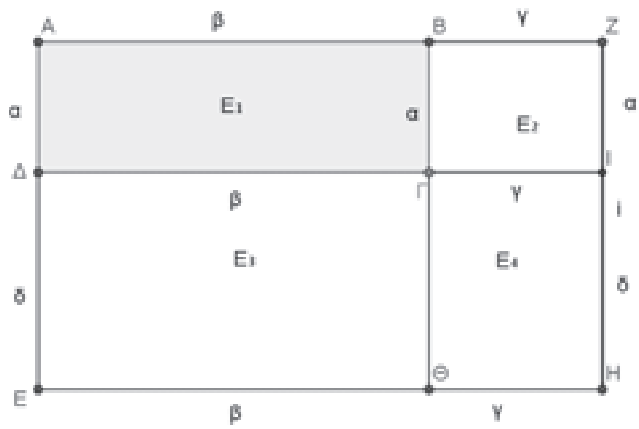
Άρα κατασκευάζοντας ένα νέο ορθογώνιο οικόπεδο με μήκος $(\beta+\gamma)$ και πλάτος $(\alpha+\delta)$ το εμβαδόν του θα είναι $\mathrm{E}=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)$



Όμως χωρίζοντας το ορθογώνιο ΑΖΗΕ σε 4 μικρότερα ορθογώνια

Το εμβαδόν του θα μπορούσε να υπολογιστεί αν προσθέσουμε τα εμβαδά των 4 ορθογωνίων που περιέχονται μέσα σε αυτό.

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3+\mathrm{E}_4=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$$

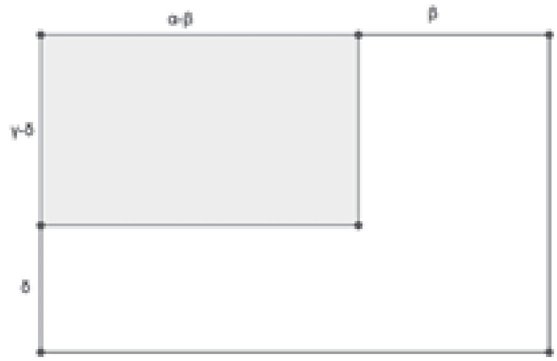


Άρα $\boxed{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta+\gamma\delta}$

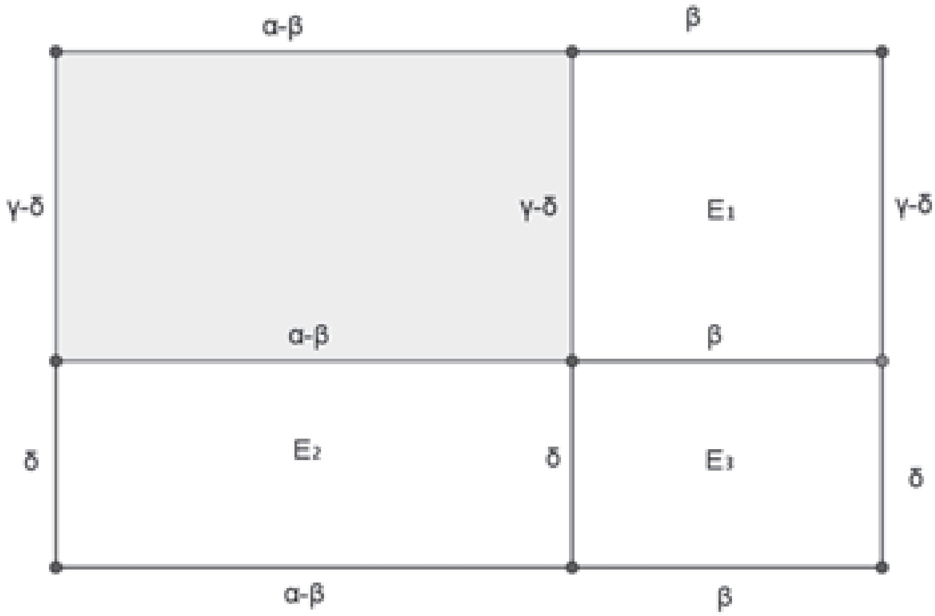
Ας πάρουμε την επιμεριστική $(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)$

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α, γ και χωρίζουμε την πλευρά α σε δύο κομμάτια $\alpha-\beta$, β και την πλευρά γ σε δυο κομμάτια $\gamma-\delta$, δ.

Το γραμμοσκιασμένο ορθογώνιο έχει εμβαδόν $(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)$



Κατασκευάζουμε αλλά 3 ορθογώνια μέσα στο μεγάλο



Το μεγάλο ορθογώνιο έχει εμβαδόν : $E=\alpha\cdot\gamma$, ενώ τα εμβαδά των εσωτερικών ορθογωνίων θα είναι

$$E_1=\beta(\gamma-\delta)=\beta\gamma-\beta\delta$$

$$E_2=\delta(\alpha-\beta)=\delta\alpha-\alpha\beta$$

$$E_3=\delta\beta$$

Άρα το γραμμοσκιασμένο χωρίο θα έχει εμβαδόν $E-E_1-E_2-E_3$

Δηλαδή $(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)=\alpha\gamma-\beta\gamma+\beta\delta-\alpha\delta+\alpha\beta-\delta\beta$

Κάνοντας τις πράξεις θα προκύψει

$$\boxed{(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)=\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta}$$

Προβλήματα
για τους μαθητές Α΄ και Β΄ Γυμνασίου

Στυλιανός Μαραγκάκης Ανδρέας Τριανταφύλλου

Πρόβλημα 1

Σε ένα σχολείο φοιτούν 1200 μαθητές, οι οποίοι κάθε μέρα παρακολουθούν 5 ώρες μάθημα ο καθένας. Κάθε τάξη έχει 30 μαθητές και κάθε εκπαιδευτικός διδάσκει 4 ώρες την ημέρα. Πόσοι εκπαιδευτικοί διδάσκουν στο σχολείο ;

Α 50

Πρόβλημα 2

Πόσα διαφορετικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ακέραιο αριθμό μήκος πλευράς σε εκατοστά, έχουν περίμετρο 18 εκατοστά του μέτρου. Δώστε τις διαστάσεις των παραλληλογράμμων αυτών.

Α 4, 1εκ. και 8εκ., 2εκ. και 7εκ., 3εκ. και 6εκ., 4εκ. και 5εκ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ένα τετράγωνο. Αν μεγαλώσω τη μια πλευρά του τετραγώνου κατά 3 εκατοστά και μικρύνω την άλλη πλευρά κατά 2 εκατοστά, προκύπτει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει εμβαδόν 24 τετραγωνικά εκατοστά. Να βρείτε τη περίμετρο του αρχικού τετραγώνου.

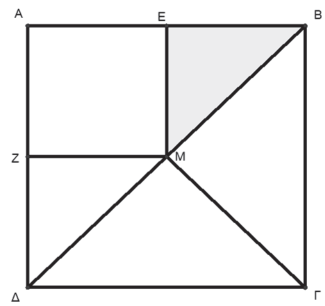
Α 20

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΔ και το σημείο Μ είναι το μέσο της διαγώνιου ΒΔ.

Τι ποσοστό (επί της %) του εμβαδού του τετράγωνου είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΕΜΒ ;

Α $\frac{1}{8}$



Πρόβλημα 5

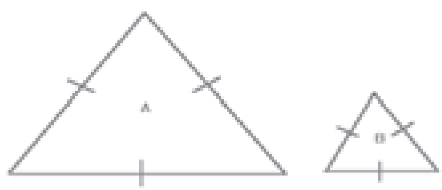
Το ύψος ενός τριγώνου είναι ίσο με το τετραπλάσιο της βάσης του. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 32 τετραγωνικά εκατοστά, ποιο είναι το μήκος της βάσης του τριγώνου σε εκατοστά ;

Α 4

Πρόβλημα 6

Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου Α είναι διπλάσια από τη πλευρά του τριγώνου Β. Πόσα τρίγωνα Β χωράνε στο τρίγωνο Α ;

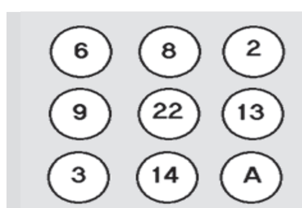
Α 4



Πρόβλημα 7

Προσπαθήστε να ανακαλύψετε τη σχέση που έχουν μεταξύ τους οι αριθμοί που είναι μέσα στους κύκλους και κατόπιν να βρείτε τη αριθμητική τιμή που έχει ο Α.

Α 11



Πρόβλημα 8

Τοποθετείστε τις απαραίτητες παρενθέσεις στο αριστερό μέρος της παρακάτω παράστασης, ώστε να αληθεύει η ισότητα.

$$32+4:2\bullet 8-5+12:4=41$$

Α $32+(4:2)\bullet(8-5)+(12:4)$

Πρόβλημα 9

Αν προσθέσουμε τους 98 αριθμούς $1,\ 2,\ 3,\ldots,97,\ 98$ προκύπτει σαν άθροισμα ένας τετραψήφιος αριθμός. Να βρείτε σε ποιο ψηφίο λήγει ο αριθμός;

Α 1

Πρόβλημα 10

Στις παρακάτω κάρτες παρατηρείτε ένα αριθμητικό μοτίβο. Ποιος αριθμός είναι το περιεχόμενο της έκτης κάρτας

Α 95

Πρόβλημα 11

Σε μια τάξη φοιτούν ίσος αριθμός από αγόρια και κορίτσια. Φεύγουν εννέα κορίτσια από την τάξη για να πάρουν μέρος σε μια θεατρική παράσταση. Τότε ο αριθμός των αγοριών στην τάξη γίνεται διπλάσιος από τα κορίτσια που παρέμειναν. Πόσα αγόρια και κορίτσια συνολικά είχε η τάξη πριν φύγουν τα εννέα κορίτσια ;

Α 36

Πρόβλημα 12

Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα;

α) Η παροχή νερού και ο χρόνος που απαιτείται για να γεμίσει μια πισίνα.
β) Η περίμετρος ενός ισοπλεύρου τριγώνου και η πλευρά του.
γ)Το μήκος ενός σχοινιού και η τιμή του.
δ)Το βάρος ενός καρπουζιού και η τιμή του.
ε) Η ηλικία ενός παιδιού και το ύψος του.
στ) Ποσότητα μολυβιών και η τιμή τους.

Α β) γ) δ) στ)

Πρόβλημα 13

Ένα σχολείο πήγε εκδρομή στην Αρχαία Ολυμπία. Ξεκίνησαν στις 8 το πρωί. Μόλις έφθασαν επισκέφθηκαν τον αρχαιολογικό χώρο, όπου έμειναν 45 λεπτά. Αμέσως μετά στις 11π.μ. επισκέφθηκαν το μουσείο, από όπου έφυγαν όταν έκλεισε στις 1.30΄μ.μ.. Μετά κάθισαν για φαγητό και ξεκούραση μέχρι τις 3.30΄μ.μ. που αναχώρησαν. Η επιστροφή κράτησε 2 ώρες και 20 λεπτά.

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις

1. Τι ώρα επέστρεψαν;
2. Πόση ώρα έμειναν στο μουσείο;
3. Πόση ώρα κάθισαν για φαγητό και ξεκούραση;
4. Πότε έκανα περισσότερο χρόνο στην διαδρομή, όταν πήγαιναν ή όταν γύριζαν;

Α 5:50΄μ.μ., 2 ώρες και 30 λεπτά, 2 ώρες, όταν γύριζαν

Β΄ Τάξη

Ασκήσεις στις τετραγωνικές Ρίζες

Επιμέλεια: Ειρήνη Κοτσακιλάφη, Μαρία Παππά

Η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι ίσως ο πρώτος άρρητος αριθμός που ανακαλύφθηκε. Αναφορές για την προσέγγιση των πρώτων δεκαδικών ψηφίων του $\sqrt{2}$ υπάρχουν τόσο σε Βαβυλωνιακές πλάκες όσο και σε αρχαία Ινδικά κείμενα. Επίσης, οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρά μήκους 1 ισούται με το $\sqrt{2}$. Ο συμβολισμός της τετραγωνικής ρίζας άρχισε να χρησιμοποιείται το 1525 από τον Christoff Rudolf.

Πρόβλημα 1

Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει πλάτος α=$\sqrt{8+\sqrt{9-2\sqrt{16}}-3\sqrt{2^4}}$ και μήκος β= $3\sqrt{49}+\sqrt{16^2}-\sqrt{(-3)^2}$. Στη μία γωνία του οικοπέδου υπάρχει μία είσοδος. Ποια είναι η απόσταση από την είσοδο μέχρι την διαγωνίως απέναντι γωνία του οικοπέδου;

Λύση :

Κάνουμε τις πράξεις ξεκινώντας από το εσωτερικό των ριζών:

β=$3\sqrt{49}+\sqrt{16^2}-\sqrt{(-3)^2}=3\cdot 7+16-\sqrt{9}=21+16-3=34$

α=$\sqrt{8+\sqrt{9-2\sqrt{16}}}+3\sqrt{2^4}=\sqrt{8+\sqrt{9-2\cdot 4}}+3\sqrt{16}=\sqrt{8+\sqrt{9-8}}+3\cdot 4=\sqrt{8+1}+12=\sqrt{9}+12=3+12=15$

Χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο θεώρημα για τον υπολογισμό της διαγωνίου γ του οικοπέδου.

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$$
$$\gamma^2=15^2+34^2$$
$$\gamma^2=225+1156$$
$$\gamma^2=1381$$
$$\gamma=\sqrt{1381}=37{,}16m$$

Πρόβλημα 2

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 16 γίνεται ίσο με το 5πλάσιό του τετραγώνου του. Ποιος είναι ο αριθμός;

Λύση :

Έστω x ο αριθμός που ψάχνουμε και μάλιστα $x>0$ αφού λέει η εκφώνηση ότι ο αριθμός είναι θετικός. Εκφράζουμε κάθε μέγεθος ως συνάρτηση του x.

x^2: το τετράγωνο του αριθμού

$5x^2$: το 5πλάσιό του τετραγώνου του

Η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$x^2+16=5x^2$ την οποία και επιλύουμε.

$$x^2+16=5x^2$$
$$x^2-5x^2=-16$$
$$-4x^2=-16$$
$$x^2=4$$

$x=2$ ή $x=-2$ *απορρίπτεται αφού* $x>0$

Πρόβλημα 3

Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου έχει μήκος 13 cm και μια κάθετη πλευρά του είναι 5 cm. Να υπολογίσετε:

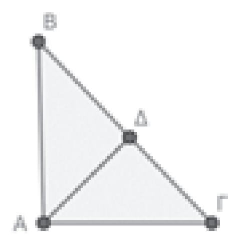
α) Το εμβαδόν του τριγώνου.

β) Το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου.

Λύση:

α) Ξέρουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με $E=\frac{βάση\ x\ ύψος}{2}$.

$E=\frac{ΑΓ\cdot ΑΒ}{2}$



Ξέρουμε όμως την υποτείνουσα $ΒΓ=13$ και τη μία κάθετη πλευρά έστω $ΑΓ=5$ και δεν ξέρουμε το μήκος της κάθετης

AB. Για να το βρούμε θα εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα.

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$13^2 = AB^2 + 5^2$

$169 = AB^2 + 25$

$AB^2 = 169 - 25$

$AB^2 = 144$

$AB = \sqrt{144}$

$AB = 12\ cm$

Οπότε: $E = \frac{12\cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30\ \text{cm}^2$

β) Αφού ξέρουμε ότι το εμβαδόν είναι $E = 30cm^2$

$$\frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} = 30 \text{ ή } \frac{13 \cdot A\Delta}{2} = 30 \text{ ή } 13 \cdot A\Delta = 60 \text{ ή } A\Delta = \frac{60}{13}\ cm$$

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{16}}}}} = 5$

Λύση:

Αρχικά θα σκεφτόμασταν να υπολογίσουμε τον αριθμό 5^{16}. Είναι όμως ένας πολύ μεγάλος αριθμός και είναι δύσκολο να υπολογιστεί.

Ξέρουμε ότι $\sqrt{\chi^2} = \chi,\ \mu\varepsilon\ \chi \geq 0$. Άρα , μήπως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα;

Πράγματι: Είναι

$$5^{16} = \underbrace{5\cdot 5\cdot \ldots \cdot 5}_{8\ \text{φορές}} \cdot \underbrace{5\cdot 5\cdot \ldots \cdot 5}_{8\ \text{φορές}} = 5^8 \cdot 5^8 = (5^8)^2$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{16}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(5^8)^2}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5^8}}}$$

Όμοια:

Είναι

$$5^8 = \underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{4\ \text{φορές}} \cdot \underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{4\ \text{φορές}} = 5^4 \cdot 5^4 = (5^4)^2$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{16}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(5^8)^2}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5^8}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{(5^4)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5^4}}$$

$$5^4 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^2 \cdot 5^2 = (5^2)^2$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{16}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(5^8)^2}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5^8}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{(5^4)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5^4}} = \sqrt{\sqrt{(5^2)^2}} = \sqrt{5^2} = 5$$

Πρόβλημα 5

Ένα πλοίο φεύγει από το λιμάνι και ταξιδεύει $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} + \sqrt{3\sqrt{6+\sqrt{9}}}$ μίλια δυτικά και $\beta = \sqrt{121} - \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25}{8}} + \sqrt{\frac{1}{16}}$ μίλια βόρεια. Να βρείτε την απόσταση του πλοίου από το λιμάνι.

Λύση:

Θα υπολογίσουμε αρχικά τις αποστάσεις α,β:

$\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} + \sqrt{3\sqrt{6+\sqrt{9}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+2}} + \sqrt{3\sqrt{6+3}} = \sqrt{2+\sqrt{4}} + \sqrt{3\sqrt{9}} = \sqrt{2+2} + \sqrt{3\cdot 3} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ μίλια δυτικά

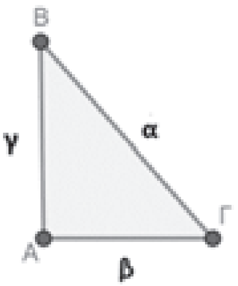
$\beta = \sqrt{121} - \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25}{8}} + \sqrt{\frac{1}{16}} = 11 - \sqrt{\frac{63}{7}} - \sqrt{\frac{1\cdot 25}{2\cdot 8}} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 11 - \sqrt{9} - \sqrt{\frac{25}{16}} + \frac{1}{4} = 11 - 3 - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{1}{4} = 8 - \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = 8 - \frac{4}{4} = 8 - 1 = 7$ μίλια βόρεια

Για να βρούμε την απόσταση του πλοίου από το λιμάνι θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$
$$\gamma^2 = 5^2 + 7^2$$
$$\gamma^2 = 25 + 49$$
$$\gamma^2 = 74$$

$\gamma = \sqrt{74} = 8{,}6$ μίλια είναι η απόσταση από το λιμάνι

Πρόβλημα 6



Με τη βοήθεια του ορθογωνίου τριγώνου του παραπάνω σχήματος να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\boldsymbol{A = \sqrt{\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma^2} - \beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}.}$$

Λύση:

Βλέποντας το $\beta^2 + \gamma^2$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ σκεφτόμαστε να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Δηλαδή :

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2.$$

Επίσης, αν λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς β^2, έχουμε: $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$. Επομένως, η παράσταση A γίνεται:

$$A = \sqrt{\alpha\cdot\sqrt{\alpha^2} - \beta\sqrt{\beta^2}} = \sqrt{\alpha\cdot\alpha - \beta\cdot\beta}$$
$$= \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\gamma^2} = \gamma$$

Αφού:

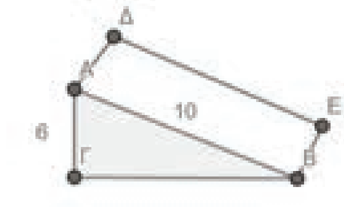
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \ \text{ ή } \ \alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \gamma > 0.$$

Πρόβλημα 7

Η ράμπα ενός χώρου στάθμευσης που συνδέει το επίπεδο του δρόμου με το υπόγειο ενός κτιρίου πρέπει να καλυφθεί με τσιμέντο. Η ράμπα έχει μήκος 10 μέτρα και η κατακόρυφη απόσταση από το επίπεδο του δρόμου έως το υπόγειο είναι 6 μέτρα. Να βρείτε:

α) Τη βάση της ράμπας

β) Το εμβαδόν της επιφάνειας που θα καλυφθεί με τσιμέντο αν το πλάτος της ράμπας είναι 5 μέτρα.



Λύση:

α) Για να υπολογίσουμε τη βάση της ράμπας θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Άρα είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$
$$10^2 = \alpha^2 + 6^2$$
$$\alpha^2 = 100 - 36$$
$$\alpha^2 = 64$$
$$\alpha = \sqrt{64}$$
$$\alpha = 8 \text{ μέτρα}$$

β) Η επιφάνεια της ράμπας είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο επομένως για να υπολογίσω το εμβαδόν της επιφάνειας που θα καλυφθεί με τσιμέντο θα χρησιμοποιήσω τον τύπο

$$E = \beta\acute{\alpha}\sigma\eta \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma$$
$$E = AB \cdot A\Delta = 10 \cdot 5 = 50\ \tau.\mu$$

Πρόβλημα 8

Δίνονται οι αριθμοί: α=$\boldsymbol{\sqrt{4-\sqrt{8-\sqrt{49}}}}$,

β=$\boldsymbol{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$ και γ=3,03003123…..

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

β) Να βρείτε ποιοι αριθμοί είναι άρρητοι και ποιος ρητός

γ) Να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός

Λύση:

α) Βρίσκω πρώτα τον αριθμό

α=$\sqrt{4-\sqrt{8-\sqrt{49}}}$ =

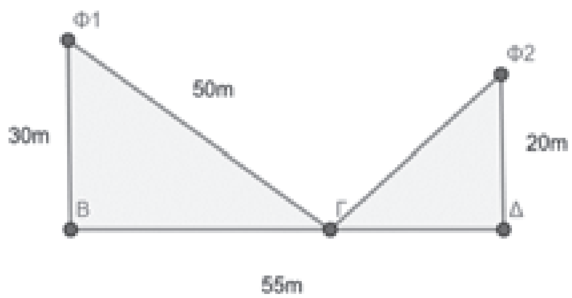
=$\sqrt{4-\sqrt{8-7}}$=$\sqrt{4-\sqrt{1}}$=$\sqrt{4-1}$=$\sqrt{3}$ και

β= $\sqrt{3\sqrt{3\cdot 3}}$=$\sqrt{3\sqrt{9}}$ =$\sqrt{3\cdot 3}$=$\sqrt{9}$=3

β) Άρρητοι είναι οι αριθμοί $α=\sqrt{3}$ και γ=3,03003123... διότι έχει άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων με μη επαναλαμβανόμενο κάποιο τμήμα.
γ) Μεγαλύτερος από τους α, β, γ είναι ο γ= 3,03003123…

Πρόβλημα 9

Στην πλατεία της γειτονιάς βρίσκεται στο σημείο Γ ένα γήπεδο μπάσκετ. Ένας φανοστάτης ύψους 30m (Φ1) και ένας φανοστάτης ύψους 20m (Φ2) απέχουν μεταξύ τους 55m. Η απόσταση της κορυφής του Φ1 από το γήπεδο είναι 50m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής του Φ2 έως το γήπεδο (Γ).



Λύση:
Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΒΓΦ1 για να βρούμε την ΒΓ:

$$(ΓΦ1)^2 = (ΒΦ1)^2 + ΒΓ^2$$
$$50^2 = 30^2 + ΒΓ^2$$
$$ΒΓ^2 = 2500 - 900$$
$$ΒΓ^2 = 1600$$
$$ΒΓ = \sqrt{1600}$$
$$ΒΓ = 40 \text{ m.}$$

Όμως το ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ=55-40=15 m.

Επομένως εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΓΔΦ2 για να βρούμε την ΓΦ2.
Έχουμε:

$$(ΓΦ2)^2 = (ΔΦ2)^2 + ΔΓ^2$$
$$(ΓΦ2)^2 = 20^2 + 15^2$$
$$(ΓΦ2)^2 = 400 + 225$$
$$(ΓΦ2)^2 = \sqrt{625}$$

(ΓΦ2)=25 m.

Άρα η απόσταση της κορυφής του φανοστάτη Φ2 έως το γήπεδο είναι 25m.

Πρόβλημα 10

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $\mathbf{2(χ - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 3χ}$
β) $\mathbf{5\sqrt{11} \cdot χ = \sqrt{11} \cdot (\sqrt{11} - χ)}$

Λύση:
α) $2(χ - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 3χ$

$2χ - 4\sqrt{2} = \sqrt{2} + 3χ$ (κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα)

$2χ - 3χ = \sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους)

$-χ = 5\sqrt{2}$ (κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων)
$χ = -5\sqrt{2}$

β) $5\sqrt{11} \cdot χ = \sqrt{11} \cdot (\sqrt{11} - χ)$

$5\sqrt{11} \cdot χ = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} - \sqrt{11} \cdot χ$ (κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα)

$5\sqrt{11} \cdot χ + \sqrt{11} \cdot χ = \sqrt{121}$ (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους)

$(5\sqrt{11} + \sqrt{11})χ = 11$

(κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και πράξεις)

$6\sqrt{11}χ = 11$

$χ = \frac{11}{6\sqrt{11}}$ (διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου)

$χ = \frac{11\sqrt{11}}{6\sqrt{11}^2}$ (κάνουμε ρητοποίηση)

$$χ = \frac{11\sqrt{11}}{6 \cdot 11}$$

$$χ = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

Β΄ Τάξη

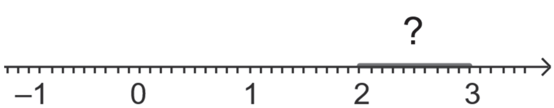
Πώς τοποθετούμε άρρητους αριθμούς με τετραγωνικές ρίζες στον άξονα των πραγματικών αριθμών;

Δημήτρης Διαμαντίδης

Η τοποθέτηση ενός αριθμού στον άξονα των πραγματικών αριθμών γίνεται εφόσον εντοπίσουμε το σημείο με την αντίστοιχη απόσταση από το 0. Για έναν δεκαδικό αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων είναι μάλλον απλή υπόθεση. Για παράδειγμα, το 2,4 βρίσκεται σε ένα σημείο μεταξύ 2 και 3, ώστε να χωρίζει το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, λόγο 4:6, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ή αλλιώς ώστε η απόσταση του 2 από το σημείο είναι 0,4. Έτσι προκύπτει το σημείο του 2,4 στον άξονα:

Τα πράγματα είναι διαφορετικά όταν πρόκειται για έναν άρρητο αριθμό με τετραγωνική ρίζα. Ένας άρρητος όπως το $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, το $\sqrt{3} = 1{,}73205081\ldots$ ή το $\sqrt{5} = 2{,}23606798\ldots$, κτλ., δεν μπορεί να γραφτεί στο δεκαδικό σύστημα με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά, όσα δεκαδικά ψηφία και αν συμπεριλάβουμε. Στην περίπτωση του $\sqrt{2}$ γνωρίζουμε ότι το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό βρίσκεται μεταξύ 2 και 3, αλλά όχι πού ακριβώς.



Το ερώτημα «σε τι λόγο θα χωρίζεται το ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, μεταξύ 2 και 3;» δεν μπορεί να απαντηθεί. Συνεπώς πρέπει να εργαστούμε διαφορετικά. Στον τρόπο δουλειάς μας κεντρική θέση έχει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Παρακάτω θα δούμε ορισμένες περιπτώσεις και πώς τις αντιμετωπίζουμε.

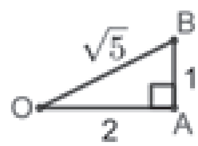
1η περίπτωση

Θέλουμε να εντοπίσουμε το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό $\sqrt{5}$.

Θα μας βοηθήσει ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η υποτείνουσά του έχει μήκος $\sqrt{5}$, το οποίο σχεδιάζουμε ως εξής:

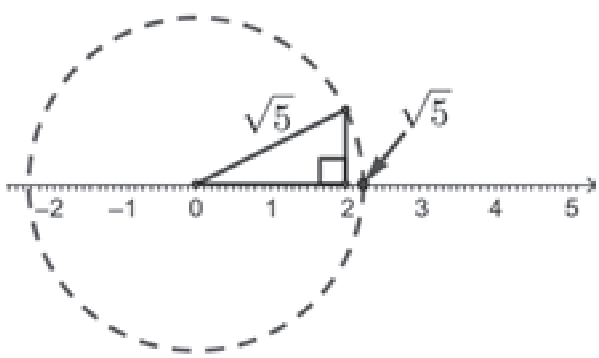
Η μια κάθετη πλευρά του έχει μήκος 1 και η άλλη 2. Ως μονάδα μέτρησης μήκους χρησιμοποιούμε την απόσταση δύο διαδοχικών αριθμών στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος βρίσκουμε ότι η υποτείνουσά του είναι $\sqrt{5}$.



Έτσι προκύπτει το παραπάνω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΟ. Το μήκος της υποτείνουσάς του, δηλαδή της ΟΒ αντιστοιχεί στην απόσταση του σημείου που αναζητούμε από το 0, πάνω στον άξονα.

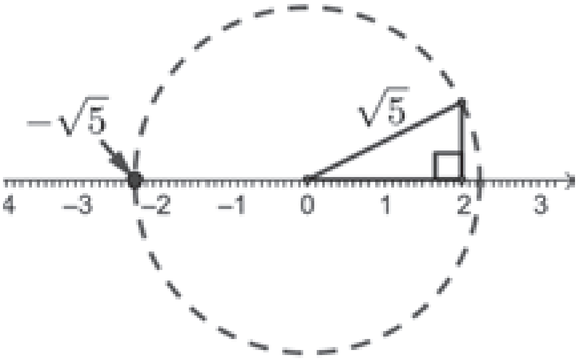
Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το τρίγωνο στον άξονα, με τη βοήθεια των κάθετων πλευρών του, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο του 0 και ακτίνα την υποτείνουσα, δηλαδή $\sqrt{5}$.

Το σημείο δεξιά του μηδενός, στο οποίο τέμνονται κύκλος και άξονας είναι εκείνο που αντιστοιχεί στον $\sqrt{5}$.

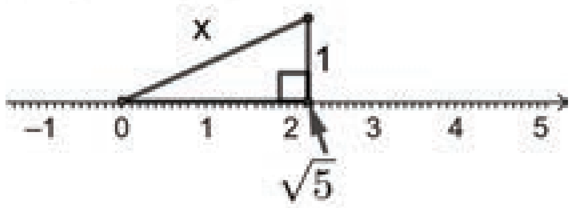
Στην περίπτωση που θέλουμε τον $-\sqrt{5}$, αυτός βρίσκεται στο αντίστοιχο, αλλά αριστερά του μηδενός, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



2η περίπτωση

Θέλουμε να εντοπίσουμε τον άρρητο αριθμό $\sqrt{6}$. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές, οι οποίες να έχουν (και οι δύο) μήκη φυσικούς ή δεκαδικούς και με υποτείνουσα με μήκος $\sqrt{6}$.

Ωστόσο, αν αξιοποιήσουμε το $\sqrt{5}$, το οποίο πλέον μας είναι γνωστό από την περίπτωση 1, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 1 και $\sqrt{5}$.

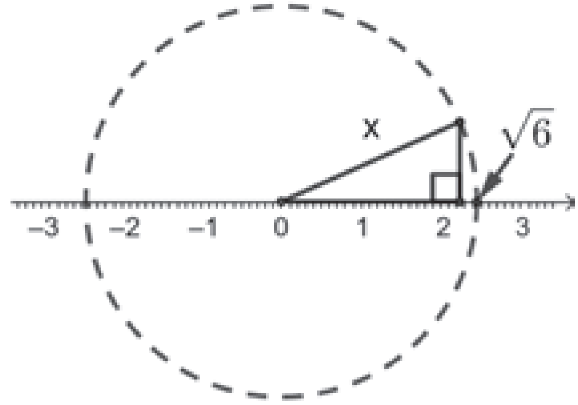


Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος βρίσκουμε ότι το μήκος x της υποτείνουσας του τριγώνου είναι $\sqrt{6}$, γιατί:

$$x^2 = 1^2 + \sqrt{5}^2$$
$$x^2 = 1 + 5$$
$$x = \sqrt{6}$$

(το x είναι θετικό γιατί αντιστοιχεί σε μήκος)

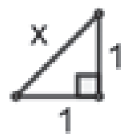
Με τον διαβήτη εντοπίζουμε το $\sqrt{6}$, στην αριθμογραμμή, όπως και στην περίπτωση 1.



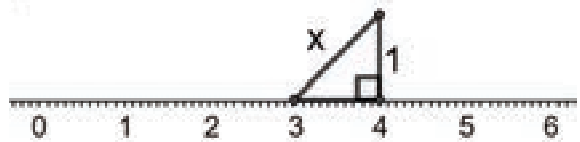
3η περίπτωση

Θέλουμε να εντοπίσουμε τον άρρητο αριθμό $3 + \sqrt{2}$.

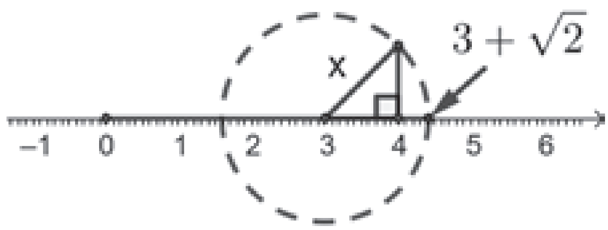
Θα ξεκινήσουμε με το $\sqrt{2}$, σχεδιάζοντας ένα ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο στον άξονα, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις. Το τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές μήκους 1 η κάθε μια.



Η υποτείνουσά του έχει μήκος $x = \sqrt{2}$, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Αυτή τη φορά σχεδιάζουμε το τρίγωνο στον άξονα όπως στο παρακάτω σχήμα, ώστε η μια κορυφή να συμπίπτει με το 3 και η μια κάθε πλευρά με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία των αριθμών 3 και 4.



Όπως και προηγουμένως, με τη βοήθεια του διαβήτη «μεταφέρουμε» το μήκος x στον άξονα. Αυτή τη φορά το σημείο που εντοπίσαμε έχει απόσταση από το 0 που είναι ίση με 3 + x δηλαδή $3 + \sqrt{2}$. Άρα αντιστοιχεί στον αριθμό $3 + \sqrt{2}$.



4η περίπτωση

Θέλουμε να εντοπίσουμε τον άρρητο αριθμό $\sqrt{8}$.

Εδώ θα αξιοποιήσουμε την ιδιότητα:

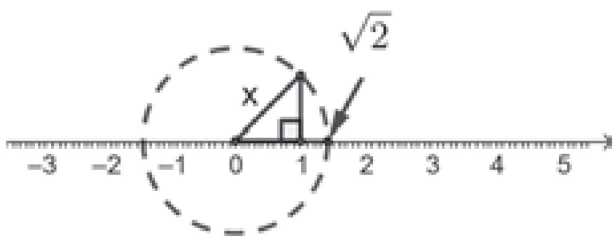
$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

για $\alpha = 4$ και $\beta = 2$:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

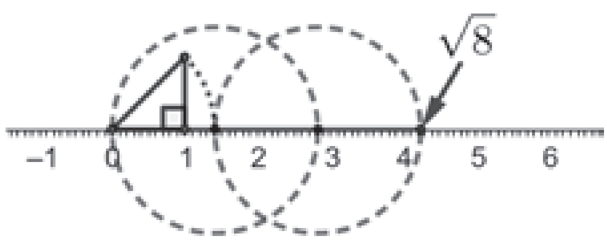
Εφόσον έχουμε ήδη εντοπίσει το $\sqrt{2}$ μπορούμε να το αξιοποιήσουμε και εδώ.

Έτσι, αυτή τη φορά σχεδιάζουμε το ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 1, ώστε η μια κορυφή του να συμπίπτει με το 0, όπως στο σχήμα:



Εντοπίζουμε το $\sqrt{2}$ όπως και στην 1η και 2η περίπτωση.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον διαβήτη «μεταφέρουμε» το ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\sqrt{2}$, έτσι ώστε να έχουμε τρία τέτοια διαδοχικά μήκη, ξεκινώντας από το 0, όπως στο παρακάτω σχήμα.



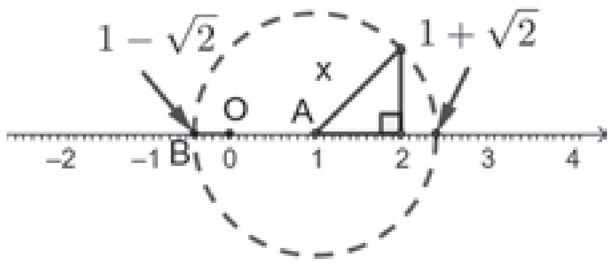
Το ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζεται έχει μήκος $3 \cdot \sqrt{2}$, δηλαδή $\sqrt{8}$. Έτσι εντοπίζουμε τον αριθμό $\sqrt{8}$ στον άξονα.

5η περίπτωση

Θέλουμε να εντοπίσουμε τον άρρητο αριθμό $1 - 3\sqrt{2}$.

Θα αξιοποιήσουμε κι εδώ το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 1, που χρειάζεται για τον εντοπισμό του $\sqrt{2}$.

Η υποτείνουσα του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου έχει μήκος $x = \sqrt{2}$.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα:

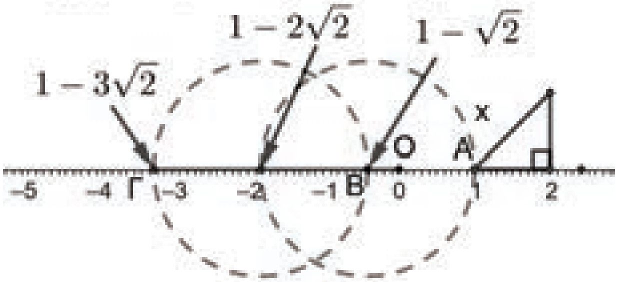
- Αρχικά σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 1 και ακτίνα $x = \sqrt{2}$.
- Το σημείο τομής του άξονα και του κύκλου, το οποίο είναι δεξιά από το 0, αντιστοιχεί στον αριθμό $1 + \sqrt{2}$.
- Η απόσταση ΟΒ του σημείου τομής Β από το 0 αντιστοιχεί στη διαφορά των μηκών $ΟΑ = 1$ και $ΑΒ = \sqrt{2}$. Άρα η απόσταση ΟΒ είναι $\sqrt{2} - 1$.
- Το σημείο Β αντιστοιχεί σε αρνητικό αριθμό, γιατί βρίσκεται αριστερά του μηδενός.
- Ο αριθμός αυτός έχει απόσταση από το 0 ίση με $ΟΒ = \sqrt{2} - 1$.

Επομένως πρόκειται για τον αριθμό:

$$-\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{ ή } 1 - \sqrt{2}$$

Αν σκεφτούμε με παρόμοιο τρόπο, για τον αριθμό $1 - 3\sqrt{2}$, πρέπει να «κινηθούμε προς τα αριστερά» ακόμα περισσότερο, ώστε η απόσταση από το 0 να γίνει $3\sqrt{2} - 1$.

Αυτό μπορεί να γίνει αν μεταφέρουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα μήκους $\sqrt{2}$ το καθένα, από το Β και προς τα αριστερά, με τη βοήθεια του διαβήτη, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Το σημείο Γ έχει απόσταση $3\sqrt{2}-1$ από το 0 και αντιστοιχεί στον αρνητικό αριθμό:

$$1-3\sqrt{2}$$

Ένας άλλος τρόπος να εντοπίσουμε το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό $1-3\sqrt{2}$ είναι ο εξής:

- Εντοπίζουμε το σημείο του αριθμού $3\sqrt{2}-1$, που είναι θετικός.
- Στη συνέχεια, με τη βοήθεια αυτού του σημείου εντοπίζουμε το σημείο του αριθμού $1-3\sqrt{2}$ που είναι ο αντίθετός του.

6η περίπτωση

Θέλουμε να εντοπίσουμε τον άρρητο αριθμό:

$$\frac{6}{\sqrt{2}}$$

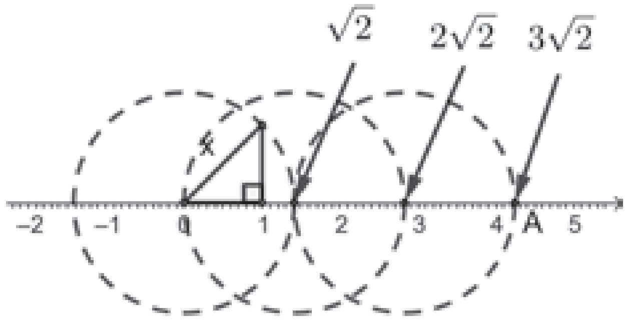
Για να το καταφέρουμε, αξιοποιώντας τις μεθόδους που έχουμε ήδη δει στις προηγούμενες περιπτώσεις, θα μετατρέψουμε τον αριθμό χωρίς ρίζα στον παρονομαστή.
Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας αριθμητή κα παρονομαστή το $\sqrt{2}$, δηλαδή με τη ρίζα που θέλουμε να φύγει από τον παρονομαστή.

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

(εδώ αξιοποιήσαμε την ιδιότητα $\sqrt{\alpha}^2=\alpha$)

Έτσι, για να εντοπίσουμε τον αριθμό $\frac{6}{\sqrt{2}}$ στον άξονα, αρκεί να εντοπίσουμε το $3\sqrt{2}$.

Αυτό θα το κάνουμε αξιοποιώντας, για άλλη μια φορά το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 1 και υποτείνουσα μήκους $\sqrt{2}$.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα έχουμε τοποθετήσει, με τη βοήθεια του διαβήτη, το ευθύγραμμο τμήμα που έχει μήκος $\sqrt{2}$ (όσο και η υποτείνουσα του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου), τρεις φορές, διαδοχικά στον άξονα ξεκινώντας από το 0 και προς τα δεξιά, ώστε το συνολικό μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που προκύπτει να είναι ίσο με $3\sqrt{2}$.
Με αυτό τον τρόπο προκύπτει το σημείο Α, το οποίο αντιστοιχεί στον αριθμό $3\sqrt{2}$.

Όπως είδαμε στις έξι παραπάνω περιπτώσεις, για να εντοπίσουμε άρρητους αριθμούς με τετραγωνική ρίζα στον άξονα των πραγματικών αριθμών ανάμεσα σε άλλα αξιοποιήσαμε:

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα.
- Την ιδιότητα $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, που ισχύει για $\alpha,\beta\geq 0$.
- Την ιδιότητα $\sqrt{\alpha}^2=\alpha$, που ισχύει για $\alpha\geq 0$.

Μπορείτε να τοποθετήσετε κι εσείς τους παρακάτω άρρητους αριθμούς στον άξονα; Τι άλλο χρειάζεται να αξιοποιήσετε εκτός από όσα είδα στις έξι περιπτώσεις;

$$3-\sqrt{5},\qquad 2-3\sqrt{3},\qquad \sqrt{8}-5,\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Γ΄ Τάξη

Προβλήματα Δευτεροβάθμιων Εξισώσεων

Παντελής Γρυπάρης, Ειρήνη Κοτσακιλάφη

Η επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνουν εξισώσεις ακολουθεί μια συστηματική διαδικασία, η οποία περιγράφεται ως εξής:

1. Ο άγνωστος αριθμός αναπαρίσταται με ένα σύμβολο, συνήθως το γράμμα x.
2. Τα υπόλοιπα μεγέθη του προβλήματος εκφράζονται συναρτήσει του x.
3. Η μαθηματική εξίσωση του προβλήματος καταγράφεται, λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα.
4. Ακολουθεί η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης, ώστε να βρεθεί η τιμή του x.
5. Τέλος, πραγματοποιείται έλεγχος για να διαπιστωθεί αν η προκύπτουσα λύση ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Αυτή η μεθοδολογία εξασφαλίζει την ορθή προσέγγιση στην επίλυση εξισώσεων.

Πρόβλημα 1

Ένα εργοστάσιο πρόκειται να κατασκευαστεί σε ένα οικόπεδο με διαστάσεις 80 m επί 60 m. Γκαζόν ομοιόμορφου πλάτους, ίσο με το εμβαδόν του εργοστασίου, πρέπει να περιβάλλει το εργοστάσιο. Ποιο είναι το πλάτος της λωρίδας του γκαζόν, και ποιες είναι οι διαστάσεις του εργοστασίου;

Λύση:

Ορίζουμε σαν μεταβλητή x το πλάτος της λωρίδας του γκαζόν. Επομένως, το πλάτος του εργοστασίου θα είναι 60-2x και το μήκος του 80-2x.Συνεπάγεται ότι το εμβαδόν του εργοστασίου αφού έχει σχήμα ορθογώνιο δίνεται από τον τύπο $E = μήκος \cdot πλάτος$, άρα $\mathrm{E} = (60-2\mathrm{x})(80-2\mathrm{x})$ (1). Όμως , το εμβαδόν του οικοπέδου είναι $E_{οικ} = 80 \cdot 60 = 4800$.Το γκαζόν και το εργοστάσιο έχουν ίσο εμβαδόν και ίσο με το μισό του οικοπέδου .Έχουμε λοιπόν $E_{οικ} = E_{γκαζον=}4800: 2 = 2400$ (2). Εξισώνοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε : $(60-2x)(80-2x) = 2400$.

$$4800 - 120x - 160x + 4x^2 = 2400$$
$$4x^2 - 280x + 2400 = 0$$
$$x^2 - 70x + 600 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 1 \cdot 600}}{2 \cdot 1} = \frac{70 \pm \sqrt{4900 - 2400}}{2} = \frac{70 \pm \sqrt{2500}}{2} = \frac{70 \pm 50}{2}$$

Άρα οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = 60m$ και $x_2 = 10m$.Το πλάτος της λωρίδας που αποκόπτεται δεν μπορεί να ξεπερνάει το πλάτος του οικοπέδου που είναι 60 m. Τελικά, η λωρίδα που αποκόπτεται έχει πλάτος 10m και οι διαστάσεις του εργοστασίου είναι: μήκος=80-20=60 και πλάτος=60-20=40.

Πρόβλημα 2

Ο Γιώργος σκέφτηκε έναν φυσικό αριθμό. Αν τον αύξησε κατά 54 μονάδες και στη συνέχεια πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα με 9 ο αριθμός που βρήκε είναι ίσος με το τετράγωνο του αριθμού που σκέφτηκε. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

Λύση:

Ονομάζουμε x τον ακέραιο αριθμό. Αν τον αυξήσουμε κατά 54 ,θα γίνει x+54. Πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα με 9 έχουμε 9(x+54). Καταστρώνουμε την εξίσωση: $9(x+54) = x^2$. Λύνουμε την εξίσωση :

$$x^2 - 9x - 486 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-486)}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1944}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{2025}}{2} = \frac{9 \pm 45}{2}$$

Άρα οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = 27$ και $x_2 = -18$.Επειδή ο αριθμός πρέπει να είναι φυσικός θα κρατήσουμε το $x_1 = 27$.

Πρόβλημα 3 (Ηλικίες)

Το γινόμενο της ηλικίας του Φίλιππου πριν 2 χρόνια με την ηλικία του Φίλιππου μετά από 4 χρόνια είναι όσο το διπλάσιο της τωρινής του ηλικίας αυξημένο κατά 1.Να βρείτε την σημερινή ηλικία του Φίλιππου.

Λύση:

Έστω x η σημερινή ηλικία του Φίλιππου. Πριν 2 χρόνια η ηλικία του ήταν x-2 ,ενώ μετά από 4 χρόνια η ηλικία του είναι x+4.
Καταστρώνουμε την εξίσωση :

$$(x-2)(x+4)=2x+1\,.$$

Λύνουμε την εξίσωση :

$$x^2+4x-2x-8=2x+1$$

$$x^2-9=0$$

Άρα οι λύσεις είναι $x_1=3$ και $x_2=-3$. Όμως ,ο άγνωστος αφορά ηλικία επομένως αποδεχόμαστε την λύση $x_1=3$. Η σημερινή ηλικία του Φίλιππου είναι 3 ετών.

Πρόβλημα 4 (Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου)

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος μεγαλύτερο κατά 4 μέτρα από το πλάτος του. Αν το εμβαδόν του είναι 60 τετραγωνικά μέτρα, ποιο είναι το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου;

Λύση:

Ορίζουμε σαν μεταβλητή x το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το μήκος του είναι χ+4. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χρησιμοποιούμε τον τύπο τύπο $E=μήκος\cdot πλάτος=x(x+4)$. Όμως το εμβαδόν είναι 60 επομένως λύνουμε την εξίσωση $x(x+4)=60$

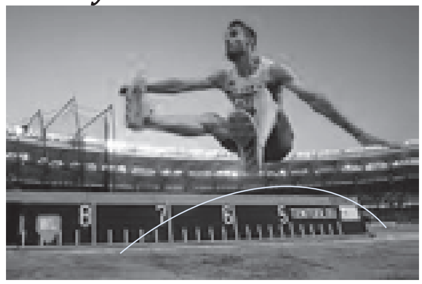
$$x^2+4x-60=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-60)}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{9\pm16}{2}$$

Άρα οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1=12.5$ και $x_2=-3.5$.Επειδή ο αριθμός πρέπει να είναι θετικός γιατί αντιπροσωπεύει πλάτος, θα κρατήσουμε το $x_1=12.5$ μέτρα και αντίστοιχα το μήκος είναι 16.5 μέτρα.

Πρόβλημα 5 (Άλμα Μίλτου Τεντόγλου)

Ο χρυσός Ολυμπιονίκης (Τόκιο 2021, Παρίσι 2024) πηδά σε μια παραβολική τροχιά. Η εξίσωση που περιγράφει το ύψος y του άλματος συναρτήσει της απόστασης x που διανύει είναι $y=-x^2+4x$.



Σε ποια απόσταση από το σημείο εκκίνησης το άλμα του Μίλτου Τεντόγλου φτάνει στο μέγιστο ύψος;

Λύση (Α τρόπος):

Το άλμα περιγράφεται από τη συνάρτηση $y=-x^2+4x$, που είναι μια παραβολή.
Η μέγιστη τιμή της παραβολής (μέγιστο ύψος) επιτυγχάνεται στη κορυφή της. Η απόσταση από το σημείο εκκίνησης στην κορυφή της παραβολής δίνεται από τον τύπο:

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Όπου $\alpha=-1$ και $\beta=4$

Υπολογίζουμε: $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{4}{2\cdot(-1)}=2$

Άρα το άλμα του αθλητή φτάνει στο μέγιστο ύψος όταν βρίσκεται 2 μέτρα μακριά από το σημείο εκκίνησης.

Λύση (Β τρόπος):

$$\begin{aligned} y=-x^2+4x&=-x^2+4x-4+4\\ &=-(x^2-4x+4)+4\\ &=-(x-2)^2+4\le 4\end{aligned}$$

Άρα το άλμα του αθλητή φτάνει στο μέγιστο ύψος που είναι 4 όταν

$$y=4$$
$$-x^2+4x=4$$
$$-x^2+4x-4=0$$
$$-(x-2)^2=0$$
$$x=2$$

Πρόβλημα 6 (Ταχύτητα και χρόνος)

Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα που αυξάνεται με τον χρόνο σύμφωνα με τον τύπο $υ(t)=t^2-4t+3$, όπου t είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και υ(t) η ταχύτητα σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Για ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα του αυτοκινήτου μηδενίζεται;

Λύση:

Εφόσον θέλουμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία μηδενίζεται η ταχύτητα ,λύνουμε την εξίσωση $\upsilon(t) = 0$ Έχουμε : $t^2 - 4t + 3 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Άρα οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $t_1 = 3$ και $t_2 = 1$.

Άρα η ταχύτητα του κινητού μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές $t_1 = 3s$ και $t_2 = 1s$.

Πρόβλημα 7 (Βιολογία-Πληθυσμός βακτηρίων)

Ο πληθυσμός μιας αποικίας βακτηρίων αυξάνεται εκθετικά. Στην αρχή του πειράματος, ο πληθυσμός είναι 1000 βακτήρια. Η εξίσωση που περιγράφει την αύξηση του πληθυσμού είναι

$$\mathbf{P(t) = 1000 + t^2 - 4t}$$

όπου P(t) είναι ο αριθμός των βακτηρίων και t ο χρόνος σε ώρες. Μετά από πόσες ώρες ο πληθυσμός των βακτηρίων θα είναι 1600; (Δίνεται $\sqrt{2416} \cong 49{,}15$ **)**

Λύση:

Για να γίνει ο πληθυσμός των βακτηρίων είναι 1600 θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση P(t)=1600.

$$1600 = 1000 + t^2 - 4t$$
$$t^2 - 40t - 600 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1} = \frac{40 \pm \sqrt{16 + 2400}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{2416}}{2} = \frac{40 \pm 49{,}15}{2}$$

Άρα οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $t_1 = 44{,}6$ και $t_2 = -4{,}575$.

Άρα λόγω των δεδομένων του προβλήματος μετά από 44,6 ώρες ο πληθυσμός των βακτηρίων θα είναι 1600.

Πρόβλημα 8 (Οικονομία - Κέρδος επιχείρησης)

Μια επιχείρηση παράγει και πουλά ένα προϊόν. Το κόστος παραγωγής ανά προϊόν είναι 5 ευρώ, και η τιμή πώλησης ανά προϊόν είναι 15 ευρώ. Το συνολικό κέρδος της επιχείρησης περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathbf{K(x) = -x^2 + 17x + 60}$$

όπου x είναι ο αριθμός των προϊόντων που πωλούνται και K(x) το κέρδος σε ευρώ. Ποιος είναι ο αριθμός των προϊόντων που πρέπει να πωληθούν ώστε να γίνει απόσβεση (δηλαδή το κέρδος να είναι μηδέν);

Λύση:

Η εξίσωση που δίνει το κέρδος της επιχείρησης είναι:

$$K(x) = -x^2 + 17x + 60$$

όπου x είναι ο αριθμός των προϊόντων, δηλαδή x θετικός αριθμός (x>0)

Θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των προϊόντων x που πρέπει να πωληθούν ώστε το κέρδος να είναι μηδέν:

$$K(x) = 0$$
$$-x^2 + 17x + 60 = 0$$

Λύνουμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας τον τύπο της διακρίνουσας:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (+60)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 240}}{-2} = \frac{-17 \pm \sqrt{529}}{-2} = \frac{-17 \pm 23}{-2}$$

Οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = -3$ (απορρίπτεται) και $x_2 = 20$.Άρα η επιχείρηση κάνει απόσβεση όταν παράγει 20 προϊόντα.

Πρόβλημα 9

Ένα πυροτέχνημα εκτοξεύεται από ένα λόφο ύψους 80m πάνω από μια λίμνη ,με ταχύτητα 64m/s. Το πυροτέχνημα αφού εκραγεί στο μέγιστο ύψος του, θα πέσει μέσα στη λίμνη. Το ύψος που του πυροτεχνήματος κατά τη διάρκεια της κίνησής του δίνεται από τη σχέση g(t)= -16t² + 64t + 80,όπου t είναι ο χρόνος. Ποια χρονική στιγμή θα πέσει το πυροτέχνημα στη λίμνη και ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος που θα εκραγεί;

Λύση:

Λύνουμε την εξίσωση g(t)=0. Επομένως, $-16t^2 + 64t + 80 = 0$.Μπορούμε να κάνουμε απλοποίηση: $-t^2 + 4t + 5 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2}$$

Άρα οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $t_1 = -1$ και $t_2 = 5$. Άρα το πυροτέχνημα θα πέσει στη λίμνη μετά από 5s.

Επειδή το πυροτέχνημα κάνει παραβολική κίνηση, το μέγιστο ύψος της παραβολής θα γίνει την χρονική στιγμή :

$$\mathrm{t} = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Όπου $\alpha = -1$ και $\beta = 4$

Υπολογίζουμε: $t = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2\mathrm{s}$

Άρα g(2)= -16·22 + 64·2 + 80=144m

Πρόβλημα 10

Να βρείτε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου ,του οποίου το άθροισμα των δυο κάθετων πλευρών είναι 31 και η υποτείνουσα είναι 25.

Λύση:

Το άθροισμα των κάθετων πλευρών είναι γ+β=31 (1) και επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο θα εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα.

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,όπου β=31-γ από την σχέση (1)

$$25^2 = (31 - \gamma)^2 + \gamma^2$$
$$625 = \gamma^2 + 961 - 62\gamma + \gamma^2$$
$$2\gamma^2 - 62\gamma + 336 = 0$$
$$\gamma^2 - 31\gamma + 168 = 0$$
$$\gamma_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$
$$= \frac{31 \pm \sqrt{(-31)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 168}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{31 \pm \sqrt{961 - 672}}{2}$$
$$= \frac{31 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{31 \pm 17}{2}$$

Οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $\gamma_1 = 24$ και $\gamma_2 = 7$.

Αν η πλευρά γ=24 τότε η πλευρά β=31-24=7 και το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\cdot\acute{\upsilon}\psi o\varsigma}{2} = \frac{24\cdot7}{2} = 84$.

Αν η πλευρά γ=7 τότε η πλευρά β=31-7=24 και το εμβαδόν του τριγώνου παραμένει ίδιο Ε=84.

Πρόβλημα 11 (Χημεία)

Ένας χημικός έχει ένα μίγμα από δύο ουσίες Α και Β. Η συνολική μάζα του μίγματος είναι 100 γραμμάρια. Ο χημικός γνωρίζει ότι η μάζα της ουσίας Α είναι κατά 10 γραμμάρια μεγαλύτερη από το τετράγωνο της μάζας της ουσίας Β.

Πόσα γραμμάρια είναι η μάζα της ουσίας Α και πόσα της ουσίας Β; Δημιούργησε και λύσε την εξίσωση 2ου βαθμού που προκύπτει.

Λύση:

Θα συμβολίσουμε με x τη μάζα της ουσίας Β και y τη μάζα της ουσίας Α. Στη συνέχεια θα γράψουμε την εξίσωση που προκύπτει για τη σχέση των δυο ουσιών:

$$y = x^2 + 10 \ (1).$$

Επειδή η συνολική μάζα του μίγματος είναι 100 γραμμάρια έχουμε : y+x=100

Όμως χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) η εξίσωση γίνεται :$x^2 + 10 + x = 100$

$$x^2 + x + 10 - 100 = 0$$
$$x^2 + x - 90 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

Οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = 9$ και $x_2 = -10$.Απορρίπτουμε την x_2 <0 γιατί η μάζα είναι πάντα θετική ποσότητα.

Άρα η μάζα της ουσίας Β είναι 9 gr και η μάζα της ουσίας Α είναι :

$$y = 9^2 + 10 = 81 + 10 = 91 \text{ gr}.$$

Θέματα Γεωμετρίας

Χρήστος Π. Τσιφάκης

ΑΣΚΗΣΗ 1.

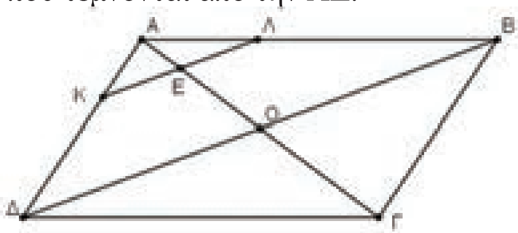
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε πάνω στην διαγώνιο ΑΓ έτσι ώστε $ΑΓ = 6 \cdot ΑΕ$. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την διαγώνιο ΒΔ που τέμνει τις ΑΔ, ΑΒ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα.

α) **Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΒΔ είναι όμοια.**

β) **Να δείξετε ότι $ΚΛ = \frac{1}{3}ΒΔ$**

γ) **Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΚΛ)}{(ΑΒΔ)}$**

Λύση: α) Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΒΔ είναι όμοια γιατί έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες. Την $\hat{Α}$ κοινή και τις $\hat{Κ} = \hat{Δ}$, $\hat{Λ} = \hat{Β}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΚΛ και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ.



β) Αφού είναι όμοια, θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ανάλογα. Άρα $λ = \frac{ΚΛ}{ΒΔ} = \frac{ΑΕ}{ΑΟ} = \frac{\frac{1}{6}ΑΓ}{\frac{1}{2}ΑΓ} = \frac{1}{3}$

οπότε $ΚΛ = \frac{1}{3}ΒΔ$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών τους είναι το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

$$\frac{(ΑΚΛ)}{(ΑΒΔ)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ// ΓΔ, ΓΔ=3cm και ΑΒ = 6 cm.

α) **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι όμοια.**

β) **Να γράψετε τους ίσους λόγους των πλευρών και να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων.**

γ) **Να υπολογισθεί το x αν $ΓΕ = (x+1)$ cm και $ΕΒ = (x+3)$ cm.** **Μαθηματικός Περιηγητής**

Λύση: α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι όμοια γιατί έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, δηλαδή $\hat{Α} = \hat{Δ}$ και $\hat{Β} = \hat{Γ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ // ΓΔ που τέμνονται από τις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα και την $Β\hat{Ε}Δ = Γ\hat{Ε}Δ$ (ως κατακορυφήν).

β) Αφού είναι όμοια θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες με $λ = \frac{ΕΓ}{ΕΒ} = \frac{ΕΔ}{ΑΕ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

γ) Αφού $λ = \frac{ΕΓ}{ΕΒ} = \frac{1}{2}$ τότε έχουμε $\frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$ ή

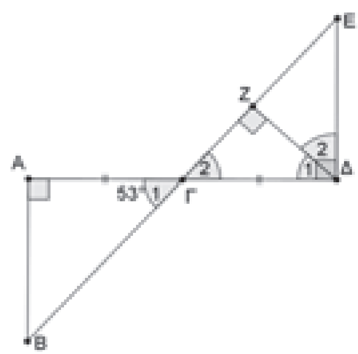
$2x + 2 = x + 3$ ή $x = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ορθογώνια με $\hat{Α} = 90^o$ και $\hat{Δ} = 90^o$, ΑΓ = ΓΔ = 3, ΔΕ = 4, ΔΖ ⊥ ΓΕ και $\hat{Γ}_1 = 53^o$.

α) **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα και να συμπληρώσετε τις ισότητες ΑΒ =….. και ΒΓ =……..**

β) **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ είναι όμοια και να συμπληρώσετε τους λόγους $\frac{\dots}{ΔΕ} = \frac{\dots}{ΖΔ} = \frac{\dots}{ΖΕ}$.**



γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΔ και να βρείτε το λόγο $\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΖΔΕ}}$ των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΔΕ. Να χρησιμοποιήσετε τις απαντήσεις των ερωτημάτων α) και β).

Μαθηματικός Περιηγητής

Λύση: α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

1) Είναι ορθογώνια $\hat{Α}=\hat{Δ}=90^{o}$

2) ΑΓ = ΓΔ και

3) $\hat{Γ}_1=\hat{Γ}_2=53^{o}$

Άρα ΑΒ = ΔΕ και ΒΓ = ΓΕ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ είναι όμοια γιατί έχουν:

1) $\hat{Α}=\hat{Ζ}=90^{o}$

2) $\hat{Β}=\hat{Ε}$ ως εντός εναλλάξ που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΑΒ//ΔΕ (γιατί είναι κάθετες στην ΑΓ)

3) και $\hat{Γ}_1=\hat{Δ}_2$

Άρα θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$λ=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΖΔ}=\frac{ΑΒ}{ΖΕ}$$

γ) Από το πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι ΒΓ = 5 και ΔΕ = ΑΒ = 4 οπότε ο λόγος ομοιότητας από το β) ερώτημα είναι

$$λ=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΖΔ}=\frac{ΑΒ}{ΖΕ}=\frac{5}{4}.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{ΑΓ}{ΖΔ}=\frac{5}{4} \text{ δηλαδή } \frac{3}{ΖΔ}=\frac{5}{4}$$

οπότε

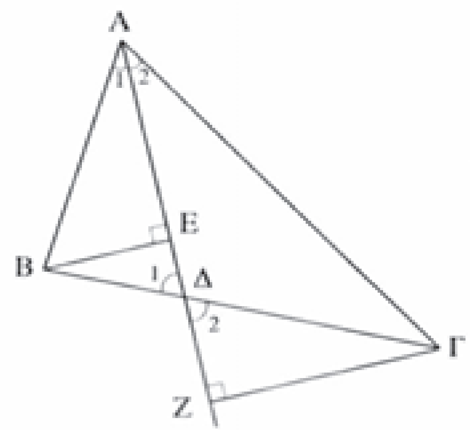
$$ΖΔ=\frac{12}{5}=2,4.$$

Ο λόγος των εμβαδών

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΖΕ)}=λ^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Στο σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ. Φέρουμε τις ΒΕ, ΓΖ κάθετες στην διχοτόμο ΑΔ. Δείξτε ότι:



i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι όμοια και ισχύει ΑΕ · ΑΓ = ΑΖ · ΑΒ.

ii. Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΖΔ είναι όμοια και ισχύει ΒΕ · ΔΓ = ΓΖ · ΒΔ.

Λύση

i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ έχουν:

1) είναι ορθογώνια $\hat{Ε}=\hat{Ζ}=90^{o}$ και

2) $\hat{Α}_1=\hat{Α}_2$

Άρα είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές ανάλογες, δηλαδή

$$λ=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΕ}{ΖΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΖ} \text{ άρα } ΑΕ\cdot ΑΓ=ΑΖ\cdot ΑΒ.$$

ii. Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΔΖ έχουν:

1) είναι ορθογώνια $\hat{Ε}=\hat{Ζ}=90^{o}$ και

2) $\hat{Δ}_1=\hat{Δ}_2$ ως κατακορυφήν

Άρα είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές ανάλογες, δηλαδή

$$λ=\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΒΕ}{ΖΓ}=\frac{ΔΕ}{ΔΖ} \text{ άρα } ΒΕ\cdot ΔΓ=ΓΖ\cdot ΔΒ.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

85^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”

8 Νοεμβρίου 2024

Οι λύσεις των προβλημάτων

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις: Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathbf{A}=-\left(\frac{(-\mathbf{10})^2-(-\mathbf{8})^2}{-(-\mathbf{6})^2}\right)^{\mathbf{2024}}+\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{11}}\quad \textbf{και}\quad \mathbf{B}=-[(\mathbf{3}-\mathbf{8})^2+(-\mathbf{3})^3+\mathbf{1}]^{\mathbf{2000}}+\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{31}},$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Λύση

$$\mathrm{A}=-\left(\frac{(-10)^2-(-8)^2}{-(-6)^2}\right)^{2024}+\frac{10}{11}=-\left(\frac{100-64}{-36}\right)^{2024}+\frac{10}{11}=-(-1)^{2024}+\frac{10}{11}$$

$$=-1+\frac{10}{11}=-\frac{1}{11}.$$

$$\mathrm{B}=-[(3-8)^2+(-3)^3+3]^{2000}+\frac{30}{31}=-[(-5)^2+(-3)^3+1]^{2000}+\frac{30}{31}$$

$$=-[25+(-27)+1]^{2000}+\frac{30}{31}=-(-1)^{2000}+\frac{30}{31}=-1+\frac{30}{31}=-\frac{1}{31}.$$

Για τη σύγκριση των αριθμών Α και Β θεωρούμε τη διαφορά Α - Β:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=-\frac{1}{11}-\left(-\frac{1}{31}\right)=-\frac{1}{11}+\frac{1}{31}=-\frac{20}{11\cdot 31}<0\Rightarrow \mathrm{A}<\mathrm{B}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω θετικός ακέραιος α τέτοιος ώστε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 24 και α να είναι ίσο με 120. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24 και α.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του α είναι όλοι οι θετικοί ακέραιοι που είναι διαιρέτες του 120, αλλά όχι του 24, δηλαδή $\alpha\in\{5,10\ \ 15,20,30,40,60,120\}$. Έχουμε ότι:

$$\text{ΜΚΔ}(24,5)=1,\ \text{ΜΚΔ}(24{,}10)=2,\ \text{ΜΚΔ}(24{,}15)=3,\ \text{ΜΚΔ}(24,20)=4,$$
$$\text{ΜΚΔ}(24,30)=6, \text{ΜΚΔ}(24,40)=8, \text{ΜΚΔ}(24,60)=12, \text{ΜΚΔ}(24{,}120)=24.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24 και α είναι οι:

$$1,2,3,4,6,8,12,24.$$

Πρόβλημα 3

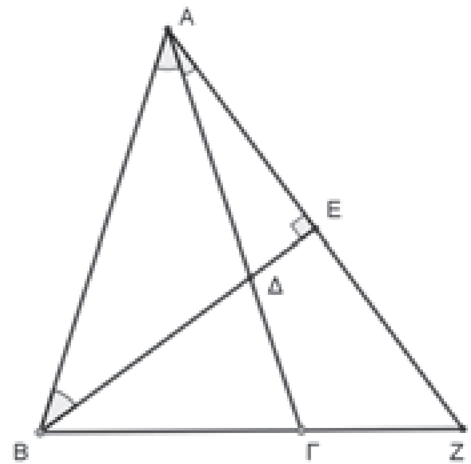
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να είναι ισοσκελές με ΒΓ = ΒΔ. Το σημείο Ζ ανήκει στην ευθεία ΒΓ, έτσι ώστε η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΔ στο σημείο Ε.

Δίνεται επίσης ότι: $\mathrm{B\widehat{A}\Delta = A\widehat{B}\Delta}$.

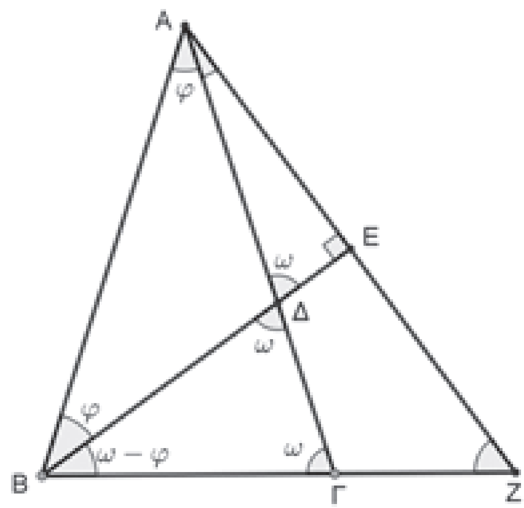
(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{B\widehat{A}\Gamma = 2 \cdot \Delta\widehat{A}E}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι: **ΑΓ = ΒΖ.**



Λύση



(α) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma} = \omega$ και $\widehat{\mathrm{A}} = \varphi = 180^o - 2\omega$ (1)

Για το ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $\widehat{\Gamma} = \mathrm{B\widehat{\Delta}\Gamma} = \omega$ και $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 180^o - 2\omega$ (2)

Επειδή $\mathrm{B\widehat{A}\Delta = A\widehat{B}\Delta}$ έπεται ότι: $\mathrm{A\widehat{B}\Delta} = \widehat{\mathrm{A}} = \varphi$ οπότε έχουμε:

$$\widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{A\widehat{B}\Delta} + \Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta \Leftrightarrow \omega = \varphi + 180^o - 2\omega \Leftrightarrow 3\omega = \varphi + 180^o$$

$$\Leftrightarrow 3\omega = 180^o - 2\omega + 180^o \Leftrightarrow 5\omega = 360^o \Leftrightarrow \omega = \frac{360^o}{5} = 72^o.$$

Άρα έχουμε

$$\widehat{\mathrm{A}} = \varphi = 180^o - 2\omega = 180^o - 2 \cdot 72^o = 36^o.$$

(β) Επειδή $\mathrm{A\widehat{\Delta}E} = \mathrm{B\widehat{\Delta}\Gamma}$, ως κατά κορυφή, έπεται ότι: $\mathrm{A\widehat{\Delta}E = B\widehat{\Delta}\Gamma} = \omega = 72^o$,
οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε: $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^o - \mathrm{A\widehat{\Delta}E} = 90^o - 72^o = 18^o$.
Επειδή $\mathrm{B\widehat{A}\Gamma} = 36^o$, έπεται ότι: $\mathrm{B\widehat{A}\Gamma} = 2 \cdot \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(γ) Επειδή ΑΒ = ΑΓ, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΒΖ, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{B\widehat{A}Z = B\widehat{Z}A}$, που ισχύει γιατί $\mathrm{B\widehat{A}Z} = \widehat{\mathrm{A}} + \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 36^o + 18^o = 54^o$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ έχουμε

$$\mathrm{B\widehat{Z}A} = 90^0 - \Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 90^0 - (180^o - 2\omega) = 2\omega - 90^0 = 54^o.$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathbf{A}=\left(\left(-\frac{\mathbf{99}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{2}}+\frac{(-\mathbf{3})^{\mathbf{5}}}{\mathbf{9}^{\mathbf{2}}}\right)\cdot(-\mathbf{2024})^{\mathbf{0}}-\mathbf{118}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}},$$

$$\mathbf{B}=\frac{(-\mathbf{20})^{\mathbf{8}}}{\mathbf{4}^{\mathbf{8}}}-\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{-\mathbf{8}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Λύση

$$A=\left(\left(-\frac{99}{9}\right)^{2}+\frac{(-3)^{5}}{9^{2}}\right)\cdot(-2024)^{0}-118-\frac{2}{21}$$

$$=\left((-11)^2+\frac{-3^5}{9^2}\right)\cdot 1-118-\frac{2}{21}=\left((-11)^2-\frac{3^4\cdot 3}{9^2}\right)\cdot 1-118-\frac{2}{21}$$

$$=(121-3)\cdot 1-118-\frac{2}{21}=-\frac{2}{21}.$$

$$B=\frac{(-20)^8}{4^8}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-8}-\frac{3}{32}=\left(\frac{-20}{4}\right)^8-(-5)^8-\frac{3}{32}=5^8-5^8-\frac{3}{32}=-\frac{3}{32}.$$

Για τη σύγκριση των αριθμών Α και Β θεωρούμε τη διαφορά Α – Β:

$$A-B=-\frac{2}{21}-\left(-\frac{3}{32}\right)=\frac{3}{32}-\frac{2}{21}=\frac{63-64}{672}=-\frac{1}{672}<0\Rightarrow A<B.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}=\mathbf{100}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{10}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ που είναι εικοσαπλάσιοι του αθροίσματος των ψηφίων τους.

Λύση

(1ος τρόπος). Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει να είναι $0<\alpha\leq 9$ και ισχύει η εξίσωση

$$\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma=20(\alpha+\beta+\gamma)\Leftrightarrow 80\alpha-10\beta=19\gamma\Leftrightarrow 10(8\alpha-\beta)=19\gamma.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος 19γ είναι πολλαπλάσιο του 10, οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το ψηφίο γ είναι η τιμή $\gamma=0$. Τότε θα είναι $8\alpha-\beta=0$, από την οποία προκύπτει ότι $\beta=8\alpha$, οπότε $\alpha=1$ και $\beta=8$, αφού $0<\beta\leq 9$. Άρα $\overline{\alpha\beta\gamma}=180$.

(2ος τρόπος) Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 20, οπότε λήγουν σε 0. Το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα των ψηφίων ενός τέτοιου αριθμού είναι 9+8=17, για τον 980, οπότε οποιοσδήποτε υποψήφιος αριθμός μεγαλύτερος του 340 απορρίπτεται, αφού όταν διαιρεθεί με το 20 δίνει πηλίκο μεγαλύτερο του 340/20=17. Οι ζητούμενοι αριθμοί, λοιπόν, είναι ανάμεσα στους παρακάτω δεκατρείς αριθμούς:

100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340.

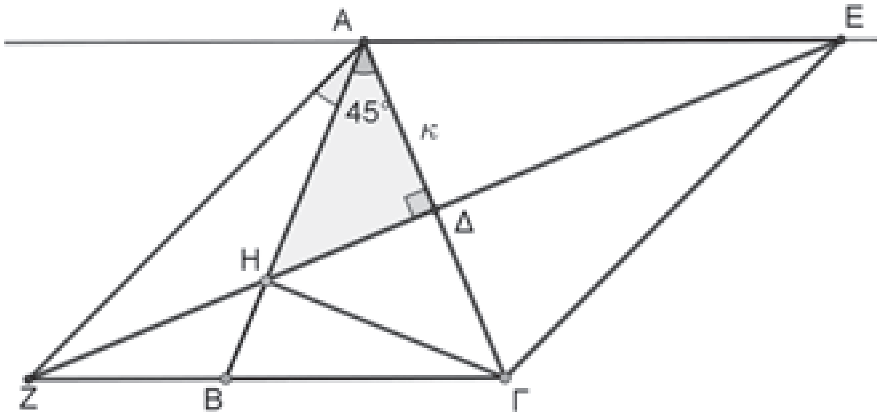
Το μικρότερο δυνατό άθροισμα των ψηφίων ενός τέτοιου αριθμού είναι μεγαλύτερο από 100/20=5. Οπότε απομένουν οι εξής έξι αριθμοί: 160, 180, 240, 260, 280 και 340.
Εύκολα βλέπουμε ότι μόνο ο αριθμός 180 ισούται με το 20πλασιο του αθροίσματος των ψηφίων του.

Πρόβλημα 3

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathbf{AB = A\Gamma}$ και $\mathbf{\widehat{A} = 45^o}$. Το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο Α προς την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε, την πλευρά ΑΒ στο σημείο Η και την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ.

(α) **Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathbf{Z\widehat{A}B}$.**

(β) **Αν $\mathbf{A\Delta = \kappa}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΓΕ συναρτήσει του $\boldsymbol{\kappa}$.**



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A} = 45^o$, έπεται ότι

$$\widehat{\Gamma} = A\widehat{\Gamma}Z = \frac{180^o - 45^o}{2} = 67{,}5^o.$$

Επειδή η ευθεία ΖΕ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ, έπεται ότι το τρίγωνο ΖΑΓ είναι ισοσκελές με ΖΑ = ΖΓ , οπότε θα είναι και

$$A\widehat{\Gamma}Z = \Gamma\widehat{A}Z = \widehat{A} + Z\widehat{A}B \Rightarrow Z\widehat{A}B = 67{,}5^o - 45^o = 22{,}5^o.$$

(β) Το τρίγωνο ΑΗΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $H\Delta = A\Delta = \kappa$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$AH^2 = \kappa^2 + \kappa^2 = 2\kappa^2 \Rightarrow AH = \kappa\sqrt{2}.$$

Επειδή η γωνία $A\widehat{H}\Delta = 45^o$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΗΖ έχουμε:

$$A\widehat{H}\Delta = Z\widehat{A}H + H\widehat{Z}A \Rightarrow H\widehat{Z}A = A\widehat{H}\Delta - Z\widehat{A}H = 45^o - 22{,}5^o = 22{,}5^o.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΗΖ είναι ισοσκελές με $ZH = AH = x\sqrt{2}$, οπότε $Z\Delta = \kappa + \kappa\sqrt{2}$.
Επειδή $AE \parallel Z\Gamma$ έχουμε:

$$\Gamma\widehat{Z}E = A\widehat{E}Z \quad (\text{εντός εναλλάξ})$$

Επίσης λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ΖΕ της ΑΓ έχουμε $\Gamma\widehat{Z}E = A\widehat{Z}E$.
Άρα είναι $A\widehat{Z}E = A\widehat{E}Z$, οπότε το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές με ΑΖ = ΑΕ, οπότε τελικά είναι ΑΖ = ΑΕ = ΓΕ = ΓΖ και επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΕΓ έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (η πλευρά ΑΓ είναι κοινή), οπότε είναι ίσα.
Επομένως το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΓΕ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΖΓ. Επειδή $A\Gamma = 2x$, $Z\Delta = \kappa + \kappa\sqrt{2}$, έχουμε:

$$(AZ\Gamma E) = 2 \cdot (AZ\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\kappa \cdot \left(\kappa + \kappa\sqrt{2}\right) = 2\kappa^2\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 133

Α81. Αν $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=4, x,y\neq 0$ να βρείτε την τιμή του κλάσματος

$$\mathrm{A}=\frac{2x+4xy-2y}{x-y-2xy}.$$

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε $x,y\neq 0$ και:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=4\Rightarrow y-x=4xy\,, \qquad (1)$$

Από την οποία η κλασματική παράσταση Α παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{A}=\frac{2x+4xy-2y}{x-y-2xy}=\frac{2(x-y)+4xy}{x-y-2xy}=\frac{-8xy+4xy}{-4xy-2xy}=\frac{-4xy}{-6xy}=\frac{2}{3}.$$

Α82. Αν δίνεται η ισότητα

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma},\ \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0,$$

να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τους αριθμούς α,β,γ είναι αντίθετοι.

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε $\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0$ και:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\alpha\beta\gamma\Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\gamma(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\alpha\beta\gamma\ \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma+\beta\gamma^2+\alpha\gamma^2-\alpha\beta\gamma=0\Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta)\gamma^2=0\ \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma^2)=0\ \Rightarrow(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)=0\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta=0 \text{ ή } \alpha+\gamma \text{ ή } \beta+\gamma=0\Rightarrow\alpha=-\beta \text{ ή } \alpha=-\gamma \text{ ή } \beta=-\gamma.$$

Α83. Το σύνολο Α έχει στοιχεία 13 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους. Το σύνολο Β έχει στοιχεία 12 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους, ενώ τα στοιχεία του συνόλου $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ είναι 15 διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι.
(α) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.
(β) Αν επιπλέον το άθροισμα των στοιχείων του συνόλου Α ισούται με το άθροισμα των στοιχείων του συνόλου Β, να προσδιορίσετε τα σύνολα Α και Β. Μ. Ο. Ρουμανίας 2023

Λύση. (α) Το σύνολο Α-Β περιέχει τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν και στο σύνολο Β, δηλαδή περιέχει από τα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ εκείνα που δεν ανήκουν στο σύνολο Β. Επομένως το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ ισούται με τη διαφορά $15-12=3$.

(β) Με το προηγούμενο σκεπτικό βρίσκουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Β-Α είναι $15-13=2$. Επιπλέον τα σύνολα $\mathrm{A}-\mathrm{B}, \mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}-\mathrm{A}$ ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή ανά δύο δεν έχουν κοινά στοιχεία, ενώ η ένωσή τους ισούται με το σύνολο $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. Επομένως για το πλήθος των στοιχείων τους ισχύει η ισότητα

$$|\mathrm{A}-\mathrm{B}|+|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|+|\mathrm{B}-\mathrm{A}|=|\mathrm{A}\cup\mathrm{B}|.$$

Άρα το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $A \cap B$ είναι $15 - 3 - 2 = 10$. Ας υποθέσουμε ότι $A \cap B = \{\nu, \nu+1, \dots, \nu+9\}$, $\nu > 3$, $A - B = \{\nu-3, \nu-2, \nu-1\}$ και $B - A = \{\nu+10, \nu+11\}$. Σύμφωνα με την υπόθεση τα αθροίσματα των στοιχείων των συνόλων A, B είναι ίσα, οπότε με εξαίρεση των κοινών στοιχείων των δύο συνόλων προκύπτει ότι και τα αθροίσματα των στοιχείων των συνόλων A-B και B-A είναι ίσα, δηλαδή

$$\nu - 3 + \nu - 2 + \nu - 1 = \nu + 10 + \nu + 11 \Leftrightarrow 3\nu - 6 = 2\nu + 21 \Leftrightarrow \nu = 27.$$

Άρα είναι $A = \{24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$ και

$$B = \{27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38\}.$$

Γ66. **Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε $\mathbf{AO = OB}$, $\mathbf{\Gamma O = O\Delta}$ και $\mathbf{A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta = 120^o}$. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.** Μ.Ο. Μόσχας 1995.

Λύση. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $K\Lambda = M\Lambda$ και $K\hat{\Lambda}M = 60^0$. Αν Ν και Ρ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ και ΟΓ, τότε έχουμε τις ισότητες

$$KN = \frac{OA}{2} = \frac{OB}{2} = P\Lambda \text{ και}$$

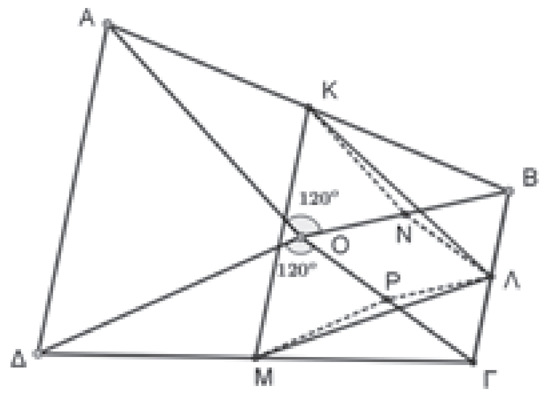
$$N\Lambda = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{O\Delta}{2} = PM,$$

και τις παραλληλίες

$$NK \parallel OA,\ N\Lambda \parallel O\Gamma,\ P\Lambda \parallel OB,\ PM \parallel O\Delta.$$

Επομένως, έχουμε τις ισότητες γωνιών:

$$K\hat{N}\Lambda = A\hat{O}\Gamma = 120^0 + B\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta = \Lambda\hat{P}M.$$



Άρα τα τρίγωνα ΚΝΛ και ΛΡΜ είναι ίσα , οπότε θα έχουν και $K\Lambda = \Lambda M$. Επιπλέον, έχουμε τις ισότητες γωνιών:

$$K\hat{\Lambda}M = K\hat{\Lambda}N + N\hat{\Lambda}P + P\hat{\Lambda}M = P\hat{M}\Lambda + \Lambda\hat{P}\Gamma + P\hat{\Lambda}M = 180^0 - \Gamma\hat{P}M = 180^0 - 120^0 = 60^0.$$

Επομένως το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Ασκήσεις για λύση

Δ16. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε τους 49 θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και 49 στα τετράγωνα ενός πίνακα 7×7 έτσι ώστε σε κάθε κελί να περιέχεται μόνο ένας αριθμός και να μην υπάρχουν δύο πρώτοι αριθμοί σε γειτονικά κελιά.

Σημείωση, *Εδώ θεωρούμε ως γειτονικά κελιά εκείνα που έχουν κοινή πλευρά ή κοινή κορυφή.*

Ν53. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι ν τέτοιοι ώστε ο αριθμός 2ν να είναι τέλειο τετράγωνο και ο αριθμός 3ν να είναι τέλειος κύβος.

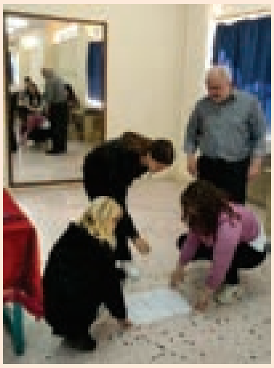
(β) Δεν υπάρχει θετικός ακέραιος μ τέτοιος ώστε ο αριθμός $2 + \mu$ να είναι τέλειο τετράγωνο και ο αριθμός 3μ να είναι τέλειος κύβος.

Γ67. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, σημεία Μ πάνω στην πλευρά ΓΔ και τα σημεία Ε και Ν πάνω στη διαγώνιο ΑΓ, έτσι ώστε $BE \perp A\Gamma$ και $\frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta} = \frac{EN}{EA}$. Αν οι ευθείες ΜΝ και ΝΒ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Μαθηματικές Βιωματικές Δράσεις – "Αποδράσεις"

Βαγενάς Κωνσταντίνος, Χρονόπουλος Σταύρος, Μουτουσίδης Αθανάσιος

1[ου] Γυμνασίου Μουζακίου Καρδίτσας Σχολ. έτους 2023 – 24

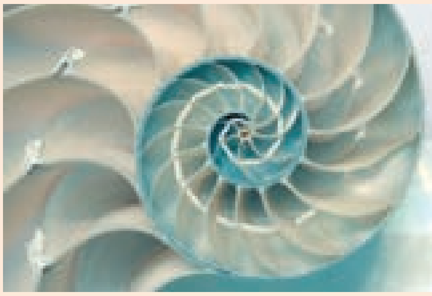


Η Μαθηματική εκπαίδευση είχε και έχει ένα εξέχοντα ρόλο στις ποικίλες δράσεις στο Γυμνάσιο Μουζακίου Καρδίτσας και είναι εύκολα αντιληπτό τόσο μέσω της ενασχόλησης των εκπαιδευτικών με την Μαθηματική Εταιρεία όσο και με τις διακρίσεις των μαθητών σε ποικίλους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Κεντρική επιδίωξη είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης καθώς και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Επιπροσθέτως, επιδιώκεται η σύνδεση των παραπάνω με την καθημερινότητα και το κοινωνικό περιβάλλον έτσι ώστε οι μαθητές να έχουν οδηγηθεί στον μαθηματικό αλφαβητισμό, δηλαδή την ικανότητα του ατόμου να αναλύει και να ερμηνεύει τον κόσμο γύρω του μέσω των μαθηματικών με σκοπό να καταλήγει στη βέλτιστη λήψη αποφάσεων. Μέσα διδασκαλίας και μάθησης αποτελούν διάφορες δραστηριότητες με τη χρήση άλλοτε χειραπτικών και άλλοτε ψηφιακών εργαλείων.

Στην παραπάνω φιλοσοφία και με αφορμή τον παγκόσμιο εορτασμό του αριθμού **π** έγιναν στο Γυμνάσιο Μουζακίου, βιωματικές δράσεις με επίκεντρο τον μαθητή κατόπιν πρωτοβουλίας και καθοδήγησης του καθηγητή Μαθηματικών και Υποδιευθυντή του σχολείου κ. Κώστα Βαγενά και με τη συνδρομή και παρακίνηση του Διευθυντή του σχολείου κ. Κώστα Καρύδα.

Αρχικά, ο αριθμός **π** γιορτάζεται παγκόσμια κάθε χρόνο στις 14 Μαρτίου, γιατί είναι περίπου 3,14 δηλαδή τον 3^{ο} μήνα και την 14^{η} ημέρα κάθε έτους. Μάλιστα, η ημέρα γιορτάζεται με πάρτι σε πολλές μαθηματικές σχολές του κόσμου, ακριβώς στις 1.59 μετά το μεσημέρι, καθώς τα 1, 5 και 9 είναι οι τρεις αριθμοί που ακολουθούν τη σταθερά 3,14 η οποία στην επταψήφια εκδοχή της είναι π=3,14159. Επειδή είναι άρρητος αριθμός και μάλιστα υπερβατικός δηλαδή δεν είναι ρίζα κάποιας μη μηδενικής πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές, μνημονεύεται ως γράμμα, γιατί έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία όπως και ο αριθμός e.

Οι μαθητές της Γ Γυμνασίου υπό την καθοδήγηση του καθηγητή Μαθηματικών κ. Βαγενά Κ. και τη συνδρομή του Μαθηματικού του Τμήματος Ένταξης του σχολείου κ. Σ. Χρονόπουλο, γνώρισαν βιωματικά πώς ο Αρχιμήδης ($3^{ος}$ αιώνας π. Χ.) επιχείρησε να υπολογίσει το π ως τον λόγο της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του. Επίσης πειραματίστηκαν με τις βελόνες του Buffon, όπου πετώντας

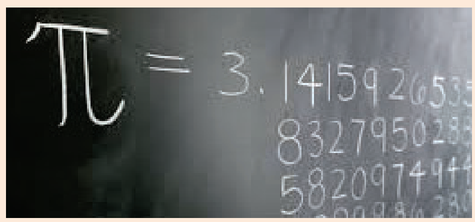


οδοντογλυφίδες σε ένα χαρτί που είναι χωρισμένο με παράλληλες ευθείες και διαιρώντας τον αριθμό των οδοντογλυφίδων που ρίχνουν τυχαία πάνω στο χαρτί, με τον αριθμό που τέμνουν τις γραμμές προκύπτει προσεγγιστικά το **π**. Επίσης συμπέραναν και έμαθαν ότι ακόμη και σήμερα συνεχίζεται η αναζήτηση δεκαδικών ψηφίων, με τη βοήθεια των υπολογιστών και μπορεί μέσω νέων τεχνικών, να έχουν υπολογιστεί πολλά εκατομμύρια από τα δεκαδικά του ψηφία, όμως το «**π**» ποτέ δεν θα μπορέσει να γραφεί ως ένας συγκεκριμένος αριθμός, διότι τα ψηφία του δεν τελειώνουν ποτέ.

Επίσης, στον εορτασμό του «**π**» συμμετείχαν όλοι οι μαθητές του Γυμνασίου. Έτσι, υπό την καθοδήγηση του καθηγητή εικαστικών του σχολείου κ. Α. Μουτουσίδη, οι μαθητές σχεδίασαν αφίσες με

θέμα το «**π**», όπου κατόπιν ψηφοφορίας από όλους τους μαθητές και καθηγητές του σχολείου βραβεύτηκε η καλύτερη που ήταν της μαθήτριας Ευαγγελίας Πάπαρη.

Μια άλλη δράση που έκαναν οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου με την καθοδήγηση του κ. Βαγενά ήταν να βρουν το ύψος του ιστού της σημαίας, σε προσομοίωση, όπως υπολόγισε ($7^{ος}$ αιώνας π.Χ.), το ύψος των πυραμίδων του Χέοπα. Η έννοια του πειραματισμού στα Μαθηματικά: μέσα από διαφορετικούς τρόπους πειραματισμού (γνωστικές συγκρούσεις, επαλήθευση σχέσεων σε αλληλεπιδραστικά περιβάλλοντα, πειραματισμός σε γνωστικές περιοχές, πειραματισμός σε περιβάλλοντα που έχουμε αποκρύψει ένα μέρος του μαθηματικού μοντέλου), οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν καθώς και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα.



Τέλος, μια πρωτοποριακή «απόδραση» από τα συνηθισμένα έγινε από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου στο μάθημα των Μαθηματικών, υπό την καθοδήγηση του καθηγητή τους κ. Βαγενά. Αντί για διαγώνισμα τετραμήνου οι μαθητές εκπόνησαν διαθεματικές εργασίες για πρώτη φορά με σκοπό την έρευνα και την διασταύρωση της διαθέσιμης πληροφορίας, όπως προβλέπεται σύμφωνα με το νόμο 4823/21. Τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά για να συνεχιστεί και στο μέλλον ο εναλλακτικός τρόπος εξέτασης

αφού πρώτα με γνώμονα την ανατροφοδότηση γίνουν κάποιες μικρές αλλαγές. Παρουσιάστηκαν εξαιρετικές εργασίες, όπου οι 4 καλύτερες που παρουσιάστηκαν ομαδικά ή ατομικά από τους μαθητές/τριες Βόμπρα Μαργαρίτα, Ντίκα Αθανασία, Τόλου Γεωργία και Ιωάννα, Τσιλίγγου Στεφανία, Μαγκούτη Αναστάσιο συμμετείχαν στο $4^{ο}$ Πανελλήνιο Μαθηματικό Φεστιβάλ στις 17-18 Απριλίου 2024 από το ΕΚΕΤΕ (Ελληνικό Κέντρο Τεχνολογίας) όπου μπορείτε να τις δείτε διαδικτυακά.

Πως μαθαίνουν τα παιδιά;

Γιάννης Νικολόπουλος

Από την απάντηση του ερωτήματος αυτού θα καταφέρουμε οι Μαθηματικοί και γενικά οι Εκπαιδευτικοί να βοηθήσουμε τα παιδιά να βελτιώσουν τη Μάθηση και τον Εγκέφαλο.

Τα παιδιά γεννιούνται με ορισμένες βιολογικές ικανότητες μάθησης. Μπορούν να αναγνωρίσουν τους ανθρώπινους ήχους, μπορούν να διακρίνουν τα έμψυχα από τα άψυχα αντικείμενα και έχουν μια εγγενή αίσθηση του χώρου, της κίνησης, των αριθμών.

Καταρχάς, ας σταθούμε στους «τομείς» που δημιουργούν τη Μάθηση. Πώς δημιουργείται η μάθηση; Από την εμπειρία δηλαδή τα βιώματα της καθημερινότητας και από την σχολική διδασκαλία. Κατόπιν, πώς επιδρούν στη βελτίωση του Εγκεφάλου οι διάφορες δραστηριότητες; Οφείλουν να είναι υψηλού πνευματικού επιπέδου ή μπορεί να είναι και απλές δράσεις; Κατά τη γνώμη μας όλες οι δραστηριότητες, από τις απλές έως τις σύνθετες συνεισφέρουν στη νοητική ανάπτυξη.

Τον προηγούμενο αιώνα, επικρατούσαν οι απόψεις των Παιδαγωγών-Ψυχολόγων σχετικά με τη Μάθηση, σήμερα οι θεωρίες αυτές ελέγχονται στο φως της Νευροεπιστήμης. Αρχικά, εφόσον αναπτύχθηκε η επιστήμη και η τεχνολογία, ξεκίνησε η εικασία, κατόπιν η έρευνα στην ανίχνευση των δομών του Εγκεφάλου, όπου τα ευρήματα που έχουν προκύψει αποτελούν θέσφατο για την αλληλεπίδραση Εγκέφαλου και Μάθησης. Δηλαδή υπάρχουν διδακτικές δραστηριότητες που αναπτύσσουν τον Εγκέφαλο και αντίστροφα με τη βοήθεια του βελτιωμένου πλέον Εγκεφάλου οδηγείται ο μαθητής στην κατανόηση, των απλών και σύνθετων εννοιών.

«Η διδασκαλία είναι μια πολύ παλιά τέχνη, παρόλα αυτά δεν είχαμε ιδέα, πώς επηρέαζε τον αναπτυσσόμενο εγκέφαλο», λέει ο Κουρτ Φίσερ, επικεφαλής του προγράμματος Εγκέφαλος και Παιδεία στο Χάρβαρντ. Ωστόσο, αυτό αλλάζει και παρατηρούμε να συνεργάζονται οι τομείς της νευροεπιστήμης, της ψυχολογίας και της εκπαίδευσης.

Εγκέφαλος και Μάθηση

Η βιολογική βάση της νόησης είναι ο εγκέφαλος, δεν νοείται διανοητική λειτουργία χωρίς εγκεφαλική δραστηριότητα. Στις μέρες μας δε χρειάζεται να θεωρήσουμε ως αναγκαία και υπαρκτή μια ξεχωριστή οντότητα με το όνομα «νους» καθότι όλες οι νοητικές δραστηριότητες συνοδεύονται από εγκεφαλικά συμβάντα όπως έχει αποδειχθεί από την Νευροεπιστήμη και την Τεχνολογία. Σήμερα αυτό που οφείλει να κάνει η εκπαιδευτική κοινότητα, είναι να αξιοποιήσει τις

υπάρχουσες γνώσεις, για να βελτιώσει τη μαθητική κοινότητα.

Ο Εγκέφαλος είναι πολύπλοκος και πολυσύνθετος, ωστόσο τρία μέρη αυτού (ο Προμετωπιαίος Φλοιός, η Αμυγδαλή, και ο Ιππόκαμπος) που σχετίζονται με τη μαθησιακή διαδικασία έτυχαν μελέτης και στη συνέχεια αξιοποίησης μέσω διδακτικών δραστηριοτήτων. Έτσι η χρησιμοποίηση της 'οπτικής οδού' στη διδασκαλία μέσω των δομών GeoGebra και των προσομοιώσεων, τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική, αποτελούν την κατάλληλη μέθοδο για την ενεργοποίηση και ανάπτυξη της οπτικής πρόσληψης. Κατόπιν, χρειάζεται η αξιοποίηση της Γεωμετρίας και της

Θεωρίας Αριθμών, παρόλο που είναι διδακτικές ενότητες σχετικά παροπλισμένη η πρώτη και στην ουσία εκτός ύλης η δεύτερη στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, εντούτοις οφείλουν οι γονείς και οι εκπαιδευτικοί να παρατηρήσουν, ότι αυτά τα θέματα θέτει στους διαγωνισμούς: Θαλής, Ευκλείδης και Αρχιμήδης η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Αυτό συμβαίνει γιατί αυτά τα θέματα απαιτούν αναλυτική-συνθετική σκέψη, σχεδιαστική νόηση, αλγοριθμική λογική, αποδεικτική διαδικασία και συμπεράσματα κατάλληλα δομημένα. Αυτή ακριβώς η θεματολογία βελτιώνει την Λειτουργική Ικανότητα άρα 'γυμνάζει' την Αμυγδαλή. Τέλος η διδασκαλία των Στερεών και των Χώρων μέσα στη ζωή ή με λογισμικά π.χ. GeoGebra, αναπτύσσουν/βελτιώνουν τον Ιππόκαμπο δηλαδή αποκτά ο μαθητής μεγαλύτερη και καλύτερη Μνήμη.

Διαπιστώσεις για την αξία της Οπτικοποίησης

Ο Αριστοτέλης στη Φιλοσοφία του αναφέρει πως «όλοι οι άνθρωποι επιζητούν εκ φύσεως τη γνώση και αυτό μαρτυρεί η αγάπη που τρέφουμε για τις αισθήσεις μας, αλλά περισσότερο απ' όλες είναι προσφιλής η αίσθηση της όρασης».

Η οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας ή ερμηνείας και χρήσης πάνω σε σχέδια, εικόνες και σε διαγράμματα, στο χαρτί, στο μυαλό και σε ΤΠΕ περιβάλλοντα με σκοπό την απεικόνιση και επεξεργασία πληροφοριών πάνω σε νέους συλλογισμούς για την πλήρη κατανόηση των εννοιών. Η βιολογική πτυχή της όρασης περιγράφεται ως: «Η ικανότητα της όρασης είναι η πιο σημαντική πηγή πληροφοριών για τον άνθρωπο. Το μεγαλύτερο μέρος του εγκεφάλου εμπλέκεται στην όραση και στον οπτικό έλεγχο της κίνησης, της αντίληψης και στην επεξεργασία των λέξεων, επίσης στη μορφή και το χρώμα των αντικειμένων. Το οπτικό νεύρο περιέχει πάνω από 1 εκατομμύριο ίνες, σε σύγκριση με 50.000 του ακουστικού νεύρου.

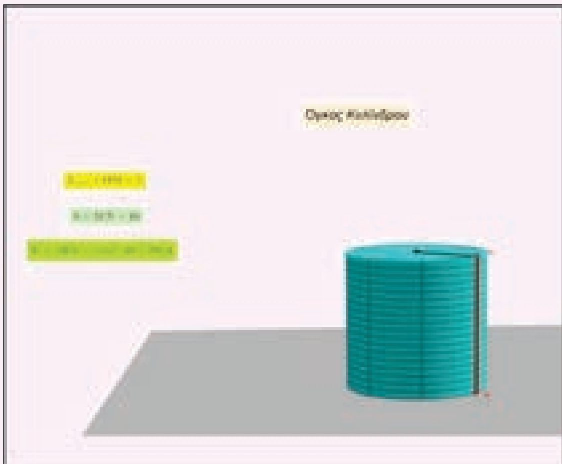
- Γενικά, με τον όρο οπτικοποίηση εννοούμε την ανάπτυξη και τη χρήση οπτικών μέσων ώστε να καταστήσουμε πιο κατανοητό ένα θέμα. Για παράδειγμα: Χρήση εικόνων που παράγονται από υπολογιστές και χρησιμοποιούνται για την κατανόηση των εννοιών.
- Σε ένα περιβάλλον οπτικοποίησης ο χρήστης μπορεί να αναπαραστήσει δεδομένα με τη μορφή εικόνων αλλά δεν έχει τη δυνατότητα να τα χειριστεί. Δεν μπορεί για παράδειγμα να

μεταβάλλει κάποιες από τις μεταβλητές ή τις παραμέτρους που τα αφορούν.

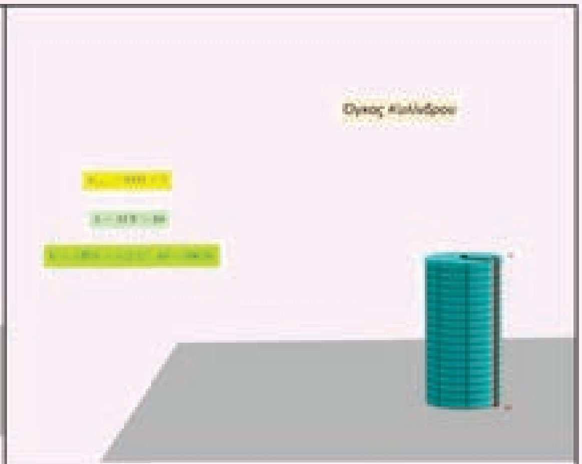
- Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται συνήθως μέσω των περιβαλλόντων προσομοίωσης.

Μια εκπαιδευτική προσομοίωση βασίζεται στο μοντέλο ενός φαινομένου, μιας συσκευής ή μιας διαδικασίας τα οποία ο μαθητής μαθαίνει να χειρίζεται αλληλοεπιδρώντας.

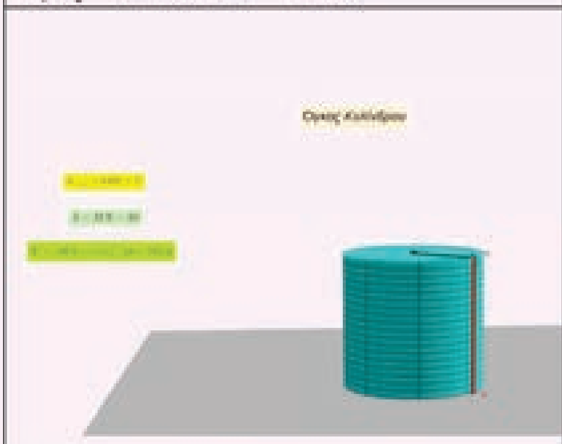
Αξιόλογη οπτικοποιημένη εφαρμογή για τον όγκο των στερεών: Να βρείτε πόσος γίνεται ο Όγκος του Κυλίνδρου αν διπλασιασθεί η ακτίνα του κυκλικού δίσκου της βάσης (εννοείται και των δύο βάσεων) και κατόπιν να υπολογισθεί ο όγκος αν διπλασιασθεί το ύψος του Κυλίνδρου;



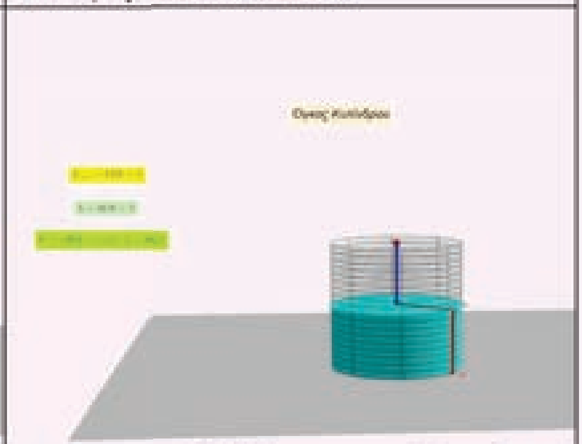
Ο όγκος του Κυλίνδρου με ακτίνα = 5 και ύψος =10 είναι: V = 785,4



Ο όγκος του Κυλίνδρου με ακτίνα = 2,5 και ύψος =10 είναι: 196,35



Ο όγκος του Κυλίνδρου με ακτίνα = 5 και ύψος =10 είναι: 785,4



Ο όγκος του Κυλίνδρου με ακτίνα = 5 και ύψος =5 είναι: 392,7

Σαφής η διαφορά του όγκου στις δύο περιπτώσεις: Στην 1η περίπτωση η ακτίνα υψώνεται στο τετράγωνο, ενώ στη 2η δεν πραγματοποιείται ύψωση στο τετράγωνο και προκύπτει το ήμισυ.

Συμπέρασμα

Διάφορα μονοπάτια της εμπειρίας και της διδασκαλίας οδηγούν στη μάθηση, ωστόσο η σύγχρονη τεχνολογία και έρευνα δείχνει πως κυρίως η ‘οπτική οδός’ χαράσσει ισχυρότερα ίχνη στον εγκέφαλο με αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση των εννοιών και την ισχυρότερη αποθήκευση αυτών.

Η Αλληλογραφία μας

Το email που λάβαμε έγραφε: Ονομάζομαι **Πέτρος Καζολιάς** και είμαι μαθητής της Β τάξης στο 1ο Γυμνάσιο Ναυπλίου. Επικοινωνώ μαζί σας λόγω μιας παρατήρησης που έκανα στις πρωτοβάθμιες εξισώσεις. Είχα την παρακάτω εξίσωση μπροστά μου: 5x+6=3x+20 την οποία έλυσα ως x=7. Σκέφτηκα ότι αν πάρω τα x και τα βάλω στις σταθερές δηλαδή αν τη μετατρέψω σε 5+6x=3+20x μου έβγαζε απάντηση x=1/7 δηλαδή τον αντίστροφο της προηγούμενης. Το δοκίμασα σε πολλές ακόμη και ισχύει σε όλες. Παρακαλώ επικοινωνήστε μαζί μου εάν αυτή μου η παρατήρηση είναι βάσιμη .

Απάντηση: Πέτρο πρώτα να σου ευχηθούμε καλή πρόοδο. Η αναζήτησή σου σε θέματα Μαθηματικών δείχνει ότι έχεις αγάπη στα Μαθηματικά, *συνέχισε να μελετάς και να μας λες τις απορίες σου. Η απορία σου αυτή είναι απλή αν γράψεις τη γενική μορφή της πρωτοβάθμιας εξίσωσης.* Η πρωτοβάθμια εξίσωση είναι της μορφής αx+b=0 όπου α,b ακέραιοι θετικοί ή αx=-b και το x=$\frac{-b}{a}$.
Αν τώρα γράψεις $\frac{1}{x}.a=-b$ $όπου\ x\neq 0\ δηλαδή$ a+bx=0 έχεις bx=-a και το x=$\frac{-a}{b}$ δηλαδή έχεις αντιστρέψει τη μεταβλητή. *Καλή πρόοδο Πέτρο*

Οι λύσεις των γρίφων του τεύχους 133

Μάντεψε ένα 3ψήφιο και δύο μονοψήφιους: Αφαιρούμε το 105 από το αποτέλεσμα που θα μας ανακοινώσουν και προκύπτει ο 3ψήφιος και οι δύο μονοψήφιοι.

Η αφαίρεση

Φ Η Φανή βλέπει: 888-666=222

999

888

Ζ Η Ζωή βλέπει: 999-888=111

Ο Πολλαπλασιασμός

```
   415
Χ  382
   830
  3320
 1245
158530
```

Το λάθος του ταμεία: Αντί για 49€ που έγραφε η επιταγή, ο ταμίας έδωσε στη Ναταλία 94€.

Η Ελένη: Η Ελένη είναι 20 ετών. Σε 10 χρόνια θα είναι 30 ετών, πριν 10 χρόνια ήταν 10 ετών.

Η περίφραξη: Αν πάρετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο , ένα τετράγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο με ίδιο εμβαδό π.χ. 256 τ.μ. τότε η περίμετρος είναι περίπου 73,5 μ. στο ισόπλευρο τρίγωνο, 64 μ. στο τετράγωνο και 60 μ. περίπου στο κανονικό εξάγωνο. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των πλευρών μειώνεται η περίμετρος. Στον κύκλο έχουμε την μικρότερη.

Το μπαστούνι: Θα βάλει το μπαστούνι μέσα στο κουτί διαγώνια και χωράει ακριβώς.

Διαγώνιος = $\sqrt{80^2+20^2}=82,4$

Ο Φύλακας: Είναι λάθος η λογική του φύλακα, διότι με πολλούς συνδυασμούς μπορεί να είναι 9 άτομα σε κάθε πλευρά.

1	7	1
7	**Φ**	7
1	7	1

Κρατούμενοι 32

2	5	2
5	**Φ**	5
2	5	2

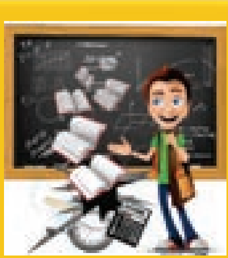
Κρατούμενοι 28

3	3	3
3	**Φ**	3
3	3	3

Κρατούμενοι 24

4	1	4
1	**Φ**	1
4	1	4

Κρατούμενοι 20



Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Οι μαθητές

Στο πρώτο τμήμα της Α τάξης το επώνυμο των μαθητών αρχίζει με τα γράμματα Α ή Β ή Γ. Οι μαθητές που το επώνυμό τους δεν αρχίζει από Α είναι 12, οι μαθητές που το επώνυμό τους δεν αρχίζει από Β είναι 13 και οι μαθητές που το επώνυμό τους δεν αρχίζει από Γ είναι 14. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές στο τμήμα αυτό και πόσοι με επώνυμο από Α, πόσοι από Β και πόσοι από Γ;

Αίνιγμα

Τι είναι αυτό που όταν είναι καθαρό μαυρίζει αλλά λερωμένο ασπρίζει;

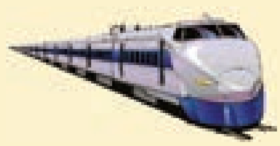
Τα γενέθλια

Ο Χρίστος είναι μόνο μία μέρα μεγαλύτερος από τη Βάσω. Στην τούρτα των γενεθλίων τους η Βάσω έβαλε ένα κεράκι λιγότερο από το Χρίστο, γιατί;

Οι ηλικίες

Ο Παύλος το 2025 θα έχει 3πλάσια ηλικία από την αδελφή του που γεννήθηκε το 2022. Πόσο μεγαλύτερος θα είναι από την αδελφή του 2030;

Στο τρένο



Ο Τάσος ταξιδεύει με το τρένο στο 5^o βαγόνι από μπροστά και η φίλη του στο 6^o από το τέλος αλλά είναι ένα βαγόνι ποιο μπροστά από τον Τάσο. Πόσα βαγόνια έχει το τρένο;

Με ένα ζύγισμα

Έχουμε στραγάλια, καρύδια και κάστανα. Όλα τα στραγάλια έχουν το ίδιο βάρος το οποίο δεν γνωρίζουμε, το ίδιο τα καρύδια και τα κάστανα. Το βάρος τους είναι 1 ή 2 ή 3,…., ή 8 ή 9 γραμμάρια. Μπορείτε με ένα ζύγισμα να πείτε τι βάρος έχει το κάθε είδος;

Παιχνίδι της παρέας, μαντέψτε το άθροισμα

Πάρτε 40 ομοιόμορφα χαρτάκια-κάρτες. Γράψτε τους αριθμούς από 1 μέχρι 10 από 4 φορές τον καθένα. Ζητήστε από τον φίλο σας ή τη φίλη σας να πάρει 3 χαρτιά από αυτά στην τύχη και σε κάθε ένα να προσθέσει(να βάλει) τόσα χαρτάκια από τα υπόλοιπα ώστε ο αριθμός που έχει το χαρτάκι και τα χαρτάκια που θα βάλει να είναι 10. Ύστερα σας επιστρέφει τα χαρτάκια που περίσσεψαν. Εσείς τώρα τα μετράτε διακριτικά και μαντεύετε το άθροισμα των αριθμών στα 3 χαρτάκια. Ξέρετε πως θα το βρείτε;

Οι φίλοι

Δύο παιδιά ο Βασίλης και η Χριστίνα είπαν τα κάλαντα των Χριστουγέννων. Αν προσθέσει ο καθένας στα χρήματά του όλα όσα πήραν από τα κάλαντα θα έχει 40 Ευρώ. Αφού τα μοίρασαν ο καθένας έχει 25 Ευρώ. Πόσα πήραν συνολικά από τα κάλαντα;

Η ισότητα

Αντικαταστήστε τα γράμματα με αριθμούς στην ισότητα: **Χ·Ψ·Ζ=Χ+Ψ+Ζ**

Η δασκάλα

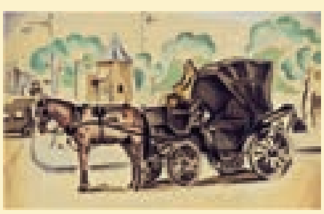
Την πρώτη μέρα των μαθημάτων μετά τις διακοπές των Χριστουγέννων και της Πρωτοχρονιάς είπε η δασκάλα στους μαθητές της, το 2025 είναι η ηλικία μου στο τετράγωνο, αν χωρίσετε το 2025 σε δύο 2ψήφιους, το άθροισμά τους διαιρεί το 2025 και το πηλίκο ισούται με το διαιρέτη.

Επίσης το 2025 διαιρείται με τον αριθμό των δύο τελευταίων ψηφίων του και με τρείς μονοψήφιους.

Α) Μπορείτε να κάνετε όλες αυτές τις πράξεις;

Β) ποιο άλλο έτος από τα αμέσως επόμενα διαιρείται με τους 2ψήφιους στους οποίους χωρίζεται και με το άθροισμά τους;

Ο Αμαξάς



Ένας αμαξάς, ενώ η άμαξα προχωράει κανονικά, κατεβαίνει και πηγαίνει στο πίσω μέρος της άμαξας κάνοντας 8 βήματα για να πάρει κάτι. Αμέσως επιστρέφει στη θέση του κάνοντας 24 βήματα. Πόσα βήματα του αμαξά είναι το μήκος της άμαξας από το πίσω μέρος μέχρι τη θέση του αμαξά;

Οι πλάκες

Ο εργολάβος για να στρώσει με πλάκες ένα πεζόδρομο ορθογωνίου σχήματος αγόρασε 2020 τετράγωνες πλάκες πεζοδρομίου και σκόπευε να βάλει 20 πλάκες στο πλάτος. Ο μηχανικός όμως άλλαξε τα σχέδια και ζήτησε από τον εργολάβο να στρώσει 3πλάσιο μήκος. Ο εργολάβος πήρε 101 πλάκες ακόμα και ολοκλήρωσε το έργο. Πόσες πλάκες κατά πλάτος έχει ο πεζόδρομος;

«**Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**», η στήλη που για πολλά χρόνια φιλοξενούμε στο περιοδικό, τώρα και σε βιβλίο. Η ΕΜΕ προχώρησε στην έκδοση ενός καταπληκτικού βιβλίου με τον τίτλο: «**Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**».

Το βιβλίο προλογίζει ο Νομπελίστας (**Βραβείο Shaw**) καθηγητής κ. **Δημήτρης Χριστοδούλου**. *Δύο αποσπάσματα από τον πρόλογο*: «….Από την αρχαιότητα, οι μαθηματικοί γρίφοι έχουν προκαλέσει την περιέργεια και τη φαντασία των ανθρώπων, αποτελώντας μια γέφυρα μεταξύ της αναζήτησης γνώσης και της διασκέδασης. …. Η μαγεία των μαθηματικών δεν είναι μόνο στην ικανότητα να λύνουμε προβλήματα, αλλά και στην δύναμη **να ανακαλύπτουμε** νέες ιδέες και να επεκτείνουμε τα όρια της γνώσης μας. Οι γρίφοι και τα πνευματικά παιχνίδια αποτελούν έναν εξαιρετικό τρόπο για να ενθαρρύνουμε την κριτική σκέψη και την μαθηματική προσέγγιση, τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην καθημερινή ζωή. ….»

Από την εισαγωγή: «Τα Μαθηματικά, γνωστά και ως η γλώσσα του σύμπαντος, έχουν τη δύναμη να μας μεταφέρουν σε έναν κόσμο όπου η λογική και η φαντασία συναντιούνται. Οι αρχαίοι Έλληνες, με πρωτοπόρους όπως ο Διόφαντος, ο Ζήνων και ο Αρχιμήδης, ανακάλυψαν την ομορφιά που κρύβεται πίσω από κάθε θεώρημα και απόδειξη. Μέσα από τα **Διασκεδαστικά Μαθηματικά**, η απλότητα και η ευφυΐα των μαθηματικών προβλημάτων γίνονται προσιτά σε όλους, αποκαλύπτοντας πως η μαθηματική σκέψη δεν είναι μόνο για τους ειδικούς, αλλά μπορεί να είναι μια πηγή χαράς και έμπνευσης για τον καθένα».