Μαθηματικό περιοδικό για το

# Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο 120

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2021 ευρώ 3,00

**Augusta Ada King (Adda Byron) (1815-1852)**
**Μαθηματικά γένους θηλυκού**

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

**Ενδεικτικά Επαναληπτικά Θέματα**
**Α΄ - Β΄ - Γ΄ Γυμνασίου**

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
# Ευκλείδης α΄

Τεύχος 120
Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2021
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
**Εκδότης**
Ανάργυρος Φελλούρης
**Διευθυντής**
Παναγιώτης Δρούτσας

**Επιμέλεια Έκδοσης:**
Αρδαβάνη Καλλιόπη
Κεΐσογλου Στέφανος
Παλαιογιαννίδης Δημήτριος
Τριανταφύλλου Ανδρέας



### Γράμμα της Σύνταξης

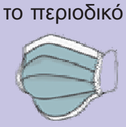
Αγαπητοί / ές αναγνώστες αναγνώστριες.

Βρισκόμαστε στο τέλος μιας σχολικής χρονιάς που πέρασε με πολλές δυσκολίες αλλά χωρίς σημαντικές γνωστικές απώλειες χάρις στις προσπάθειες των συναδέλφων εκπαιδευτικών, των μαθητών και των γονέων.

Καθώς το τεύχος 120 κλείνει το σχολικό έτος 2020-2021, το μεγαλύτερο μέρος του καλύπτεται από **επαναληπτικά θέματα όλων των τάξεων και όλων των κεφαλαίων**. Ελπίζουμε ότι θα σας είναι **χρήσιμο** για μία **καλή επανάληψη στα Μαθηματικά.**

Ευχόμαστε **καλό καλοκαίρι**, με υγεία και ταχεία επαναφορά στην κανονικότητά μας.

Θα θέλαμε, για ακόμη μία φορά, να σας επισημάνουμε ότι το περιοδικό περιμένει κείμενα αναγνωστών τα οποία με χαρά θα επιμεληθούμε και δημοσιεύσουμε.



Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού
Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

**Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών**

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

**Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού**

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

● Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
● Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

**Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00**

**Ετήσια συνδρομή** (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
**Ετήσια συνδρομή για Σχολεία** 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

# Augusta Ada King (Adda Byron) (1815-1852)

## Μαθηματικά γένους θηλυκού

**Γράφει ο Γιώργος Λαγουδάκος**

Η **Augusta Ada King, Countess of Lovelace** (1815-1852) ήταν Αγγλίδα μαθηματικός και συγγραφέας και παιδί του ποιητή **Lord Byron** και της Lady Byron. Ο Byron χώρισε με την μητέρα της ένα μήνα μετά τη γέννησή της και πέθανε στην Ελλάδα όταν η Ada ήταν οκτώ χρονών. Το 1835 παντρεύεται τον William King και αποκτά τον τίτλο της κόμισσας του Lovelace. Γεννά δύο παιδιά που τα ονομάζει Byron και Gordon προς τιμή του πατέρα της.

Η εποχή που έζησε η Ada χαρακτηρίζεται από την έντονη εκ βιομηχανοποίηση της παραγωγής στην Αγγλία με την εισαγωγή στην παραγωγική διαδικασία μηχανών που εξασφάλιζαν ταχύτητα και μαζική παραγωγή προϊόντων.

Οι μηχανές αυτές έρχονται σαν συνέχεια της ανακάλυψης από τον Γάλλο μηχανικό, εφευρέτη και βιομήχανο **Joseph Marie Jacquard (1752-1834)** του προγραμματιζόμενου αργαλειού.

Η μηχανή αυτή ήταν ουσιαστικά ένας μηχανικός αργαλειός που χρησιμοποιούσε διάτρητες κάρτες. Κάθε κάρτα διέθετε πολλές σειρές από τρύπες και πάρα πολλές κάρτες συνδυάζονταν μαζί για να τυπωθεί το επιθυμητό σχέδιο πάνω στο ύφασμα. Ουσιαστικά επρόκειτο για μία μηχανή που διέθετε ένα πρώιμο μέσο αποθήκευσης της πληροφορίας μέσω δυαδικού μετασχηματισμού από οπές και έλλειψη οπών.

Αυτός ο τρόπος αποθήκευσης του σχεδίου σε οπές πάνω σε διάτρητες κάρτες αποτελούσε ουσιαστικά μία από τις πρώτες μορφές προγραμματισμού.

Η Αγγλία της Βικτωριανής περιόδου που βρισκόμαστε είναι μία ανερχόμενη αυτοκρατορία που τα πάντα εξελίσσονται με πρωτόγνωρους ρυθμούς. Η βιομηχανία, το εμπόριο, η ναυσιπλοΐα απαιτούν σύγχρονους τρόπους οργάνωσης. Στο πλαίσιο αυτό οποιαδήποτε διαδικασία που απαιτούσε υπολογισμούς έπρεπε να απλοποιηθεί και να γίνει ασφαλέστερη, ακριβέστερη και πολύ πιο γρήγορη. Οι περισσότερες μαθηματικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνταν από μηχανικούς και επιστήμονες (λογαριθμικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις) προσεγγίζονταν από πολυώνυμα για μεγαλύτερη ευκολία. Ωστόσο, εκείνη την εποχή οι συντελεστές των πολυωνύμων υπολογίζονταν με το χέρι. Η ανάγκη για γρήγορους και σωστούς υπολογισμούς ενέπνευσε τον Άγγλο μαθηματικό **Charles Babbage** (1791-1871) την ιδέα κατασκευής του πρώτου αυτόματου μηχανικού υπολογιστή σχεδιασμένου να υπολογίζει πίνακες πολυωνυμικών συντελεστών.

Η κατασκευή της μηχανής που ονομάστηκε **Μηχανή Διαφορών (Difference Engine)** ξεκίνησε το 1819 και η πρώτη της έκδοση ολοκληρώθηκε το 1822. Λειτουργούσε χειροκίνητα και εκτελούσε πράξεις στο δεκαδικό σύστημα. Η μηχανή που τελικά βγήκε στην παραγωγή χρησιμοποιήθηκε από την Αγγλική κυβέρνηση αλλά είχε την ικανότητα να εκτελεί περίπου το ένα έβδομο των υπολογισμών που τα αρχικά σχέδια προέβλεπαν και αυτό διότι υπήρχαν αστοχίες στην κατασκευή των επιμέρους εξαρτημάτων της.

Ο ανήσυχος **Babbage** αμέσως μετά αφιερώθηκε στο έργο σχεδιασμού και κατασκευής μιας μηχανής νεότερης τεχνολογίας, την «**Αναλυτική Μηχανή**».

Η μηχανή επρόκειτο να είναι ένας υπολογιστής γενικής χρήσης. Η αναλυτική μηχανή ενσωμάτωνε μία αριθμητική λογική μονάδα, μία μονάδα ελέγχου καθώς και μια μονάδα αποθήκευσης ως μνήμη.

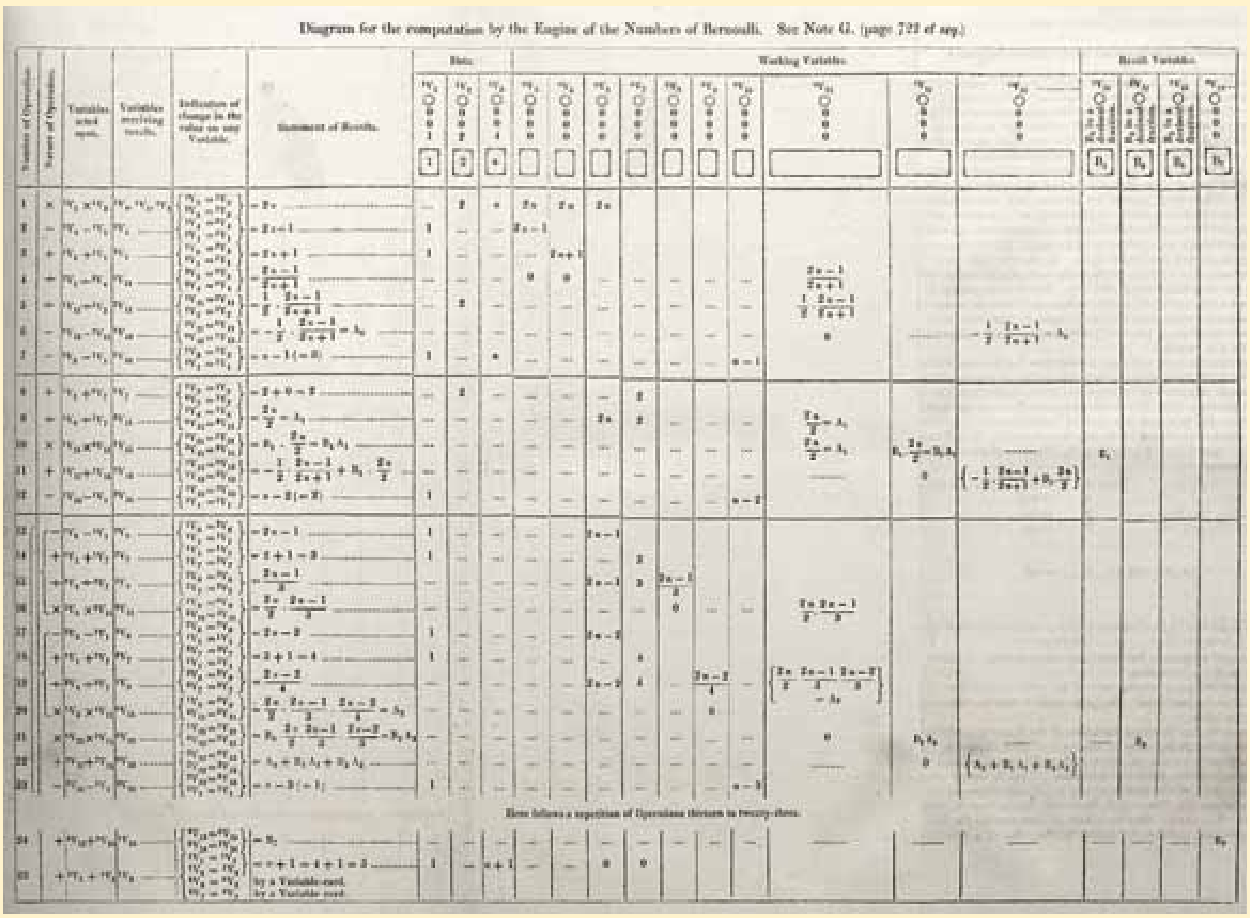
Η μηχανή ήταν σχεδιασμένη ώστε να προγραμματίζεται και να λαμβάνει δεδομένα μέσω διάτρητων καρτών. Η έξοδος της μηχανής, περιλάμβανε την εκτύπωση των αποτελεσμάτων σε διάτρητες κάρτες.

Διέθετε μνήμη που μπορούσε να αποθηκεύει ως 1.000 αριθμούς με ακρίβεια ως και 40 δεκαδικών ψηφίων. Η αριθμητική λογική μονάδα θα ήταν ικανή να εκτελεί και τις τέσσερις πράξεις, να υπολογίζει τη ρίζα ενός αριθμού καθώς και να συγκρίνει.

Στα σχέδια της μηχανής, παρουσιάζονται ένα πλέγμα γραναζιών, που ονομάζεται «μύλος» και έπαιζε τον ρόλο του σημερινού επεξεργαστή. Η μηχανή όμως δεν ολοκληρώθηκε ποτέ λόγω έλλειψης χρηματοδότησης.

Εδώ υπεισέρχεται η σημαντική δουλειά της Adda. Μεταξύ του 1842 και του 1843 η Adda μεταφράζει ένα άρθρο του Ιταλού μηχανικού **Luigi Menabrea** πάνω στην Αναλυτική μηχανή συμπληρώνοντάς το με ένα περίτεχνο σύνολο σημειώσεων, που ονομάζεται απλά "**Σημειώσεις**".

Στις σημειώσεις προτείνεται ένας εναλλακτικός τρόπος προγραμματισμού της μηχανής για τον υπολογισμό των αριθμών **Bernoulli**, δίνοντας αναλυτικά μία σειρά πράξεων – αλγόριθμο - για τον υπολογισμό των αριθμών της ακολουθίας. Ο αλγόριθμος αυτός θεωρείται το πρώτο ολοκληρωμένο πρόγραμμα για υπολογιστή και η Adda αναγνωρίζεται ως η πρώτη προγραμματίστρια της ιστορίας.




Στη συνέχεια μελετώντας τα σχέδια της αναλυτικής μηχανής διαπίστωσε πως ήταν ικανή να χρησιμοποιηθεί και σε άλλες εφαρμογές πέρα από απλούς υπολογισμούς.

Αναφέρει χαρακτηριστικά :

*«το κύριο χαρακτηριστικό της Αναλυτικής Μηχανής είναι ότι καθιστά δυνατό να αποκτήσει εκτεταμένες ικανότητες … με την εισαγωγή της αρχής την οποία επινόησε ο* **Jacquard** *… είναι σε θέση να υφαίνει αλγεβρικά μοτίβα όπως ο αργαλειός υφαίνει λουλούδια και φύλλα..»*

Οι Σημειώσεις δημοσιεύθηκαν στο **Richard Taylor's Scientific Memoirs Volume 3** το 1843 με το όνομα του συγγραφέα να φαίνεται ως **AAL – Augusta Ada Lovelace**. Εκείνη την εποχή, δεν επιτρεπότανε σε γυναίκες να γράφουν επιστημονικά συγγράμματα.

Μετά τη δημοσίευση των "Σημειώσεων", η υγεία της επιδεινώθηκε. Μέχρι το τέλος του έτους έπαιρνε αρκετά φάρμακα για διάφορα προβλήματα υγείας που την ενοχλούσαν.

Στην συνέχεια σκέφτηκε να γράψει ένα επιστημονικό άρθρο , δομημένο στο στυλ των «Σημειώσεων», σχετικά με τη δουλειά του **Ohm** «**On galvanic series**». Δυστυχώς οι αφόρητοι πόνοι λόγω – πιθανόν – ανίατης νόσου, δυσχέραιναν κάθε της πνευματική προσπάθεια.

Η Adda πέθανε στις **27 Νοεμβρίου 1852** σε ηλικία 37 ετών. Στην κηδεία της βρέθηκε λίγος κόσμος. Ούτε η μητέρα της, ούτε ο **Babbage** πήγαν. Θάφτηκε δίπλα στον πατέρα της όπως η ίδια είχε απαιτήσει.

Το έργο της αναγνωρίστηκε πολύ αργότερα. Προς χάριν της πρωτοπόρου αυτής γυναίκας μια σειρά από πρωτοβουλίες που σκοπό έχουν την ενθάρρυνση της συμμετοχής των γυναικών στην ανάπτυξη των επιστημών και της τεχνολογίας έχουν προς τιμή της χρησιμοποιήσει το όνομά της. Ενδεικτικά αναφέρουμε …

- Το 1981, η **Ένωση Γυναικών στην Πληροφορική** εγκαινίασε το **βραβείο Ada Lovelace**

- Δημιουργήθηκε το **Ada Lovelace Institute** που είναι ένα ανεξάρτητο ερευνητικό ινστιτούτο και ένας οργανωτικός οργανισμός αφιερωμένος στη διασφάλιση ότι τα δεδομένα και η τεχνητή νοημοσύνη λειτουργούν για τους ανθρώπους και την κοινωνία.

- **Η γλώσσα υπολογιστή Ada**, που δημιουργήθηκε για λογαριασμό του Υπουργείου Άμυνας των Ηνωμένων Πολιτειών , πήρε το όνομά της από τη Lovelace.

- Από το 1998, η Βρετανική Εταιρεία Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (BCS) απονέμει το **Lovelace μετάλλιο**, και το 2008 ξεκίνησε ένα ετήσιο διαγωνισμό για τις γυναίκες σπουδάστριες.

- Το **Ada College**είναι ένα κολέγιο επιμόρφωσης στο **Tottenham Hale** του Λονδίνου, με επίκεντρο τις ψηφιακές δεξιότητες

- Το κτίριο Μηχανικών στην Επιστήμη των Υπολογιστών και το Τηλεπικοινωνιακό Κολλέγιο στο **Πανεπιστήμιο της Σαραγόσα** ονομάζεται κτίριο **Ada Byro**

- Το κέντρο υπολογιστών στο χωριό **Porlock**, κοντά στο οποίο έζησε η Lovelace, πήρε το όνομά της.

- Το 2009, ορίστηκε ότι κάθε δεύτερη Τρίτη του Οκτωβρίου θα είναι η **παγκόσμια ημέρα Ada Lovelace** με σκοπό να "... αναβαθμιστεί το προφίλ των γυναικών στην επιστήμη, την τεχνολογία, τη μηχανική και τα μαθηματικά … και να δημιουργηθούν νέα πρότυπα για κορίτσια και γυναίκες σε αυτούς τους τομείς».

- Στις 2 Φεβρουαρίου 2018, η **Satellogic**, μια εταιρεία απεικόνισης και ανάλυσης γεωσκόπησης υψηλής ανάλυσης, εκτόξευσε έναν μίκρο-δορυφόρο που ονομάστηκε «**Ada Lovelace**».

- Τον Νοέμβριο του 2020 ανακοινώθηκε ότι στο **Trinity College Dublin** του οποίου η βιβλιοθήκη είχε προηγουμένως σαράντα προτομές, όλοι άντρες, εκτίθενται πλέον και τέσσερις προτομές γυναικών, μία εκ των οποίων είναι της **Adda Lovelace**.

**Βιβλιογραφία-Αρθρογραφία-Sites**

**1)** Famous women mathematicians – AURORA University – άρθρο 1-3-2019 - https://online.aurora.edu/infographics/10-famous-women-mathematicians/

**2)** Female Mathematicians whose accomplishments add up – J.V.Macdonald – 12-9-2018 - https://www.mentalfloss.com/article/88279/15-female-mathematicians-whose-accomplishments-add

**3)** Biographies of women mathematicians – Agnes Scott College - https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/women.htm

**4)** Ada Lovelace – Computer history Museum -

https://www.computerhistory.org/babbage/adalovelace/

**5)** Αρχείο Ιστορίας Μαθηματικών MacTutor - https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

# Επαναληπτικά θέματα
# Α΄ Γυμνασίου

Καρκαζής Γιάννης, Κωστοπούλου Καλλιόπη,
Οικονομόπουλος Μπάμπης, Παυλόπουλος Τάκης

Παράρτημα Αρκαδίας

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

**Α.** Να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

$$A = 2\cdot\left(2^2\cdot 3 - 2\div 1^3\right)+\left(-2\right)^2\div\left(-1\right)^{2022}\ ,\quad B = -\frac{1}{3}\div\left[-\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{15}+\frac{3}{5}\right)\right]\quad \text{και}\quad \Gamma=\frac{A}{B}$$

**Β.** Να διατάξετε από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τιμή:

α) τους αντίθετους των αριθμών Α, Β, Γ

β) τους αντίστροφους των αριθμών Α, Β, Γ, 1

γ) τους αριθμούς $0,\ -\dfrac{|A-\Gamma|}{B},\ (-B)\cdot(-A),\ -\dfrac{A+\Gamma}{A}$

δ) τους αριθμούς $1,\ \dfrac{A}{\Gamma},\ \dfrac{\Gamma}{A}$

**Γ.** Να μετατρέψετε: α) σε ποσοστά τους αριθμούς: $\dfrac{A}{\Gamma},\ \dfrac{\Gamma}{A-4}$

β) σε κλάσμα τα ποσοστά: $A\%,\ \Gamma\%$

γ) σε δεκαδικούς αριθμούς τα κλάσματα: $\dfrac{A}{\Gamma},\ \dfrac{\Gamma}{A+1},\ \dfrac{1}{B+1},\ A\cdot B$

και να τους στρογγυλοποιήσετε στη πλησιέστερη μονάδα

**Δ.** Να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών Α και Γ. Είναι οι αριθμοί Α, Γ πρώτοι μεταξύ τους;

**Ε.** α) Να γραφεί η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $\left(2\cdot\Gamma\right)\div A$

β) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν ευκλείδεια διαίρεση και γι' αυτές να βρείτε τον διαιρετέο, τον διαιρέτη, το πηλίκο και το υπόλοιπο:

i) $1000 = A\cdot\Gamma + 40$ ii) $A = 3\cdot 7 + 3$ iii) $\Gamma + 1 = 5\cdot 8 + 1$

συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα

| ισότητα | Ευκλείδεια διαίρεση ΝΑΙ/ΟΧΙ | διαιρετέος Δ | διαιρέτης δ | πηλίκο π | υπόλοιπο υ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

**ΣΤ.** **Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:**

**α)** $A + x = Γ$ **β)** $A \div x = B$ **γ)** $A - 2x = Γ$

**Ζ.** **Να γίνει ανάγωγο το κλάσμα:** $\dfrac{A + A + A \cdot A}{A + A + A + A}$

**Λύση**

**Α.** $A = 2\left(2^2 \cdot 3 - 2 \div 1^3\right) + \left(-2\right)^2 \div \left(-1\right)^{2022} = 2\left(4 \cdot 3 - 2 \div 1\right) + \left(-2\right)^2 \div \left(-1\right)^{2022} =$

$= 2\left(12 - 2\right) + \left(-2\right)^2 \div \left(-1\right)^{2022} = 2 \cdot 10 + 4 \div 1 = 20 + 4 = 24$

$$B = -\frac{1}{3} \div \left[-\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{\overset{1}{1}}{15} + \frac{\overset{3}{3}}{5}\right)\right] = \frac{-1}{3} \div \left(-\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{6}_3} x \frac{\cancel{10}^5}{\cancel{15}_3}\right) = -\frac{1}{3} \div \left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{1}{\cancel{3}_1} x \left(-\frac{\cancel{9}^3}{5}\right) = \frac{1}{3} x \frac{9}{5} = \frac{3}{5}$$

$$Γ = \frac{A}{B} = \frac{24}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{24}{1}}{\frac{3}{5}} = \frac{120}{3} = 40$$. Άρα $A = 24,\ B = \frac{3}{5},\ Γ = 40$

**Β.** **α)** Αφού $A = 24,\ B = \frac{3}{5},\ Γ = 40$, έχουμε Β<Α< Γ, οπότε $-40 < -24 < -\frac{3}{5}$, ισχύει $-Γ < -A < -B$

**β)** $\frac{1}{A} = \frac{\overset{5}{1}}{24},\quad \frac{1}{B} = \frac{\overset{40}{5}}{3},\quad \frac{1}{Γ} = \frac{\overset{3}{1}}{40},\quad \frac{\overset{120}{1}}{1}$. Μετατρέπουμε σε ομώνυμα τα κλάσματα και έχουμε

$\frac{1}{A} = \frac{5}{120},\quad \frac{1}{B} = \frac{200}{120},\quad \frac{1}{Γ} = \frac{3}{120},\quad \frac{120}{120}$ Ισχύει ότι: $\frac{3}{120} < \frac{5}{120} < \frac{120}{120} < \frac{200}{120}$ άρα $\frac{1}{Γ} < \frac{1}{A} < 1 < \frac{1}{B}$

**γ)** $$-\frac{|A - Γ|}{B} = -\frac{|24 - 40|}{\frac{3}{5}} = -\frac{|-16|}{\frac{3}{5}} = -\frac{16}{\frac{3}{5}} = -\frac{\frac{16}{1}}{\frac{3}{5}} = -\frac{80}{3}$$

$\left(-B\right) \cdot \left(-A\right) = A \cdot B = 24 \cdot \frac{3}{5} = \frac{72}{5}$ άρα $(-B)\cdot(-A) > 0$

$-\frac{A + Γ}{A} = -\frac{24 + 40}{24} = -\frac{64}{24} = -\frac{8}{3}$

$-80 < -\frac{8}{3} < 0$ Επομένως, $-\frac{|A - Γ|}{B} < -\frac{A + Γ}{A} < 0 < (-B)\cdot(-A)$

**δ)** Αφού Α=24 και Γ=40 έχουμε $A < Γ$. Άρα $\frac{A}{Γ} < 1$ και $\frac{Γ}{A} > 1$. Επομένως, $\frac{A}{Γ} < 1 < \frac{Γ}{A}$

**Γ.** **α)** $\frac{A}{Γ} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$ και $\frac{Γ}{A - 4} = \frac{40}{24 - 4} = \frac{40}{20} = \frac{40x5}{20x5} = \frac{200}{100} = 200\%$

**β)** $A\% = 24\% = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$ και $Γ\% = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

**γ)** $\frac{A}{Γ} = \frac{24}{40} = 0,6$ και $\frac{Γ}{A + 1} = \frac{40}{25} = 1,6$ ενώ $\frac{1}{B + 1} = \frac{1}{\frac{3}{5} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{5} + \frac{5}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} = 0,625$

$A \cdot B = 24x\dfrac{3}{5} = \dfrac{72}{5} = 14,4$

Στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη μονάδα:

0,6→1 1,6→2 0,625→1 14,4 →14

**Δ.** Οι διαιρέτες του 24 είναι: 1,2,3,4,6,8,12,24

Οι διαιρέτες του 40 είναι: 1,2,4,5,8,10,20,40

Οι κοινοί διαιρέτες του 24 και του 40 είναι: 1, 2, 4, 8

Άρα, $\text{ΜΚΔ}(24,40) = 8$

Επομένως, οι αριθμοί 24 και 40 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού ο ΜΚΔ τους θα έπρεπε να ισούται με 1.

Τα πολλαπλάσια του 24 είναι: 0,24,48,72,96,120,144,168,…

Τα πολλαπλάσια του 40 είναι: 0,40,80,120,160,200,…

Τα κοινά πολλαπλάσια του 24 και του 40 είναι: 0, 120,…

Επομένως, το ΕΚΠ(24,40) = 120

**Ε. α)** $2\Gamma = 2 \cdot 40 = 80$

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $(2\Gamma) \div A$ είναι: $\Delta = \pi \cdot \delta + \upsilon$, $\upsilon<\delta$

$80 = 3 \cdot 24 + 8$

**β) i)** $1000 = A \cdot \Gamma + 40$ δηλαδή $1000 = 24 \cdot 40 + 40$ (1)

Η ισότητα (1) δεν εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση, αφού το 40 δεν είναι μικρότερο ούτε από το 40 ούτε από το 20.

**ii)** $A = 3 \cdot 7 + 3$, δηλαδή $24 = 3 \cdot 7 + 3$ (2)

Αφού $3 < 7$, η ισότητα (2) εκφράζει την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $24 \div 7$ με διαιρετέο $\Delta = 24$, διαιρέτη $\delta = 7$, πηλίκο $\pi = 3$ και υπόλοιπο $\upsilon = 3$

**iii)** $\Gamma + 1 = 5 \cdot 8 + 1$, δηλαδή $41 = 5 \cdot 8 + 1$ (3)

Αφού $1 < 5$ και $1 < 8$ η ισότητα (3) εκφράζει την ευκλείδεια διαίρεση

- $41 \div 5$ με διαιρετέο $\Delta = 41$ διαιρέτη $\delta = 5$, πηλίκο $\pi = 8$ και υπόλοιπο $\upsilon = 1$
- $41 \div 8$ με διαιρετέο $\Delta = 41$ διαιρέτη $\delta = 8$, πηλίκο $\pi = 5$ και υπόλοιπο $\upsilon = 1$

| **ισότητα** | **ΝΑΙ/ΟΧΙ Ευκλείδεια διαίρεση** | **Δ** | **δ** | **π** | **υ** |
|---|---|---|---|---|---|
| $1000 = A \cdot \Gamma + 4$ | ΟΧΙ | - | - | - | - |
| $A = 3 \cdot 7 + 3$ | ΝΑΙ | 24 | 7 | 3 | 3 |
| $\Gamma + 1 = 5 \cdot 8 + 1$ | ΝΑΙ | 41 | 5 | 8 | 1 |
| $\Gamma + 1 = 5 \cdot 8 + 1$ | ΝΑΙ | 41 | 8 | 5 | 1 |

**ΣΤ. α)** $A + x = \Gamma$ ή $24 + x = 40$ ή $x = 40 - 24$ ή $x = 16$.

**β)** $A \div x = B$ ή $24 \div x = \dfrac{3}{5}$ ή $\dfrac{x}{24} = \dfrac{5}{3}$ ή $x = 24 \cdot \dfrac{5}{3}$ ή $x = 8 \cdot 5$ ή $x = 40$.

**γ)** $A - 2x = \Gamma$ ή $24 - 2x = 40$ ή $2x = 24 - 40$ ή $2x = -16$ ή $x = -16 \div 2$ ή $x = -8$.

**Ζ.** $\dfrac{A + A + A \cdot A}{A + A + A + A} = \dfrac{2 \cdot A + A^2}{4A} = \dfrac{2 \cdot 24 + 24^2}{4 \cdot 24} = \dfrac{48 + 576}{96} = \dfrac{624}{96} = \dfrac{624 \div 48}{96 \div 48} = \dfrac{13}{2}$

## ΑΣΚΗΣΗ 2

**Η Μαρία που είναι φοιτήτρια, θέλει να αντικαταστήσει το ψυγείο και την τηλεόραση που έχει στο σπίτι της. Για το λόγο αυτό, επισκέπτεται δύο καταστήματα που πουλούν**

**ηλεκτρικά είδη. Και στα δύο καταστήματα η τηλεόραση και το ψυγείο της αρεσκείας της τιμώνται στα 200€ και 300€ αντίστοιχα (καθαρή αξία χωρίς το ΦΠΑ 24%).**
**Το κατάστημα Α κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη.**
**Το κατάστημα Β κάνει έκπτωση στο ψυγείο το 1/3 της αρχικής του τιμής.**
**α) Ποιο κατάστημα συμφέρει την Μαρία να επιλέξει για την αγορά των συσκευών;**
**β) Αν για τους φοιτητές, το κατάστημα Α κάνει επιπλέον έκπτωση 5% στην αρχική τιμή των προϊόντων και το κατάστημα Β 10% στη τελική τιμή των προϊόντων:**
**i) Ποιο κατάστημα συμφέρει την Μαρία να επιλέξει για την αγορά των προϊόντων;**
**ii) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό της έκπτωσης από την αρχική τιμή και στα δύο καταστήματα;**
**iii) Στο κατάστημα που επέλεξε η Μαρία, πωλούνται σε προσφορά ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Η Μαρία υπολόγισε ότι το ποσό που θα πληρώσει για την αγορά των ηλεκτρονικών συσκευών από το φθηνότερο κατάστημα ισοδυναμεί με το 60% της τιμής του υπολογιστή, αφού είχαν γίνει όλες οι εκπτώσεις. Η Μαρία διαθέτει 1.200€ για την αγορά των τριών προϊόντων. Επαρκούν για την αγορά, αν η τελική τιμή των τριών προϊόντων επιβαρύνεται με 24% ΦΠΑ;**

### Λύση

Στο κατάστημα Α οι συσκευές τιμώνται: $200+300=500$ €

Η έκπτωση είναι: $500\cdot\frac{20}{100}=100$€ άρα, η καθαρή αξία των συσκευών είναι: $500-100=400$ €

Στο κατάστημα Β το ψυγείο έχει έκπτωση: $300\cdot\frac{1}{3}=\frac{300}{3}=100$ € άρα, η καθαρή αξία του ψυγείου είναι: $300 - 100 = 200$ € και συνολικά των συσκευών $200+200=400$ €

**α)** Άρα η Μαρία μπορεί να επιλέξει για την αγορά των συσκευών οποιοδήποτε από τα καταστήματα Α, Β αφού στοιχίζουν και στα δύο την ίδια τιμή.

**β)** Στο κατάστημα Α υπάρχει $5\%$ επιπλέον έκπτωση στην αρχική τιμή $500\cdot\frac{5}{100}=25$ €

Άρα, η τελική τιμή της καθαρής αξίας των προϊόντων στο Α κατάστημα είναι: $400 - 25 = 375$ €

Στο κατάστημα Β υπάρχει $10\%$ επιπλέον έκπτωση στην τελική τιμή $400\cdot\frac{10}{100}=40$ €

Άρα, η τελική τιμή της καθαρής αξίας των προϊόντων στο Β κατάστημα είναι: $400-40=360$ €

**i)** Άρα, συμφέρει η αγορά των συσκευών να γίνει από το Β κατάστημα, αφού στοιχίζουν $375-360=15$ € φθηνότερα.

**ii)** Στο Α κατάστημα το συνολικό ποσοστό της έκπτωσης είναι: $20+5=25\%$

Στο Β κατάστημα η συνολική έκπτωση είναι: $500-360=140$€ δηλαδή $\frac{140}{500}=\frac{14}{50}=\frac{28}{100}=28\%$

**iii)** $360\div\frac{60}{100}=360\cdot\frac{100}{60}=6\cdot 100=600$ € άρα, η καθαρή αξία του υπολογιστή μετά από όλες τις εκπτώσεις είναι 600 €. Η καθαρή αξία όλων των συσκευών είναι: $360 + 600 = 960$ €

Αυτά επιβαρύνονται με $24\%$ ΦΠΑ, δηλαδή με $960\cdot\frac{24}{100}=\frac{2.304}{10}=230,4$ €

Η τελική αξία των τριών συσκευών είναι: $960+230,4=1.190,4€<1.200€$.

Άρα, τα χρήματα που έχει η Μαρία επαρκούν για την αγορά των συσκευών.

### ΑΣΚΗΣΗ 3

**Στο 2$^{ο}$ Γυμνάσιο Τρίπολης φοιτούν μαθητές από την Τρίπολη, την Τεγέα και την Κανδήλα.**
**Τα $\frac{9}{40}$ των μαθητών είναι από την Κανδήλα, ενώ από την Τεγέα είναι 23 μαθητές.**

**Οι Τριπολιτσιώτες μαθητές που φοιτούν στη Β΄ τάξη είναι $\frac{3}{16}$ του συνόλου των μαθητών. Το $\frac{1}{5}$ των μαθητών της Β΄ τάξης είναι από την Τεγέα. Αν γνωρίζουμε ότι στη Β΄ τάξη φοιτούν 25 μαθητές, ο αριθμός των μαθητών της Β΄ τάξης είναι ίσος με τον αριθμό των μαθητών της Γ΄ τάξης και το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης είναι τα $\frac{5}{16}$ του συνόλου των μαθητών του σχολείου, να βρείτε: α) πόσοι είναι οι μαθητές του σχολείου.**
**β) πόσοι είναι οι μαθητές της Α΄ τάξης. γ) πόσοι είναι οι μαθητές είναι από την Κανδήλα.**
**δ) πόσοι είναι οι Τριπολιτσιώτες μαθητές.**
**ε) πόσοι είναι οι μαθητές από τη Κανδήλα που φοιτούν στη Β΄ τάξη.**

Λύση

Αφού ο αριθμός των μαθητών της Γ΄ τάξης είναι ίσος με τον αριθμό των μαθητών της Β' τάξης, τότε και η Γ΄ τάξη έχει 25 μαθητές.

**α)** Αφού οι μαθητές της Γ΄ τάξης είναι τα $\frac{5}{16}$ των μαθητών του σχολείου, τότε τα $\frac{5}{16}$ είναι 25 μαθητές άρα, το $\frac{1}{16}$ είναι 25:5=5, οπότε τα $\frac{16}{16}$ είναι $16\cdot 5 = 80$ (το σχολείο έχει 80 μαθητές).

**β)** Οι μαθητές της Α΄ τάξης προκύπτουν αν από το σύνολο των μαθητών του σχολείου αφαιρέσουμε το πλήθος των μαθητών της Β΄ και της Γ΄ τάξης.
Οπότε, οι μαθητές της Α' τάξης είναι 80-25-25=30 μαθητές.

**γ)** Τα $\frac{40}{40}$ είναι 80 μαθητές. Το $\frac{1}{40}$ είναι 2 μαθητές, άρα οι μαθητές από την Κανδήλα είναι 18.

**δ)** Αφού οι μαθητές από την Κανδήλα είναι 18 και από την Τεγέα είναι 23, τότε οι μαθητές από την Τρίπολη θα είναι 80-18-23=39 μαθητές.

**ε)** Οι μαθητές από την Τρίπολη που φοιτούν στην Β΄ τάξη είναι τα $\frac{3}{16}$ του συνόλου των μαθητών του σχολείου.

Τα $\frac{16}{16}$ είναι 80 μαθητές. Τα $\frac{1}{16}$ είναι $80:16=5$ μαθητές. Τα $\frac{3}{16}$ είναι $3\cdot 5=15$ μαθητές.
Οπότε, οι μαθητές της Β΄ τάξης από την Τρίπολη είναι 15 μαθητές.

Επίσης, οι μαθητές της Β΄ τάξης από την Τεγέα είναι $\frac{1}{5}\cdot 25=5$ μαθητές.

Η Β΄ τάξη έχει 25 μαθητές, τότε οι μαθητές της Β΄ τάξης από την Κανδήλα είναι $25-15-5=5$ μαθητές.

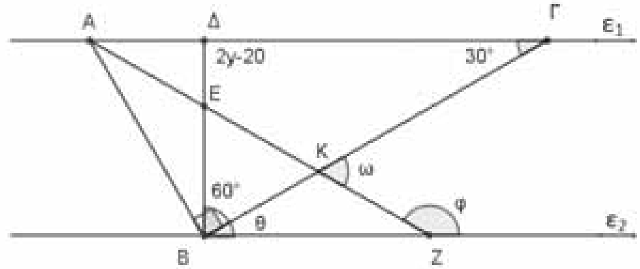
ΑΣΚΗΣΗ 4

**Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι παράλληλες, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Αν $A\hat{\Gamma}B =$ $30^o$, $\Gamma\hat{B}\Delta = 60^o$ και $E\hat{\Delta}\Gamma = (2y\text{-}20)^o$ .**

**α) Να βρείτε την τιμή του y.**

**β) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\theta}$, $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$.**

**γ) Να τοποθετήσετε το σύμβολο x στις κατάλληλες θέσεις του παρακάτω πίνακα για να δηλώσετε τη θετική σας απάντηση.**



| ΤΡΙΓΩΝΟ | ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ | ΟΞΥΓΩΝΙΟ | ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ | ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ | ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ | ΣΚΑΛΗΝΟ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **ΑΕΒ** | | | | | | |
| **ΒΕΚ** | | | | | | |
| **ΒΚΖ** | | | | | | |
| **ΒΔΓ** | | | | | | |

**δ) Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ έχει μήκος 7cm, να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΚ και ΚΖ.**

**Λύση:**

**α)** Για τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ ισχύει:

$\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} + \mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma} + \mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta} = 180^o$ ή $2y\text{-}20^o+60^o+30^o=180^o$ ή $2y+70^\circ=180^\circ$ ή

$2y=110^\circ$ ή $y=110^\circ \div 2$ έτσι $y=55^\circ$ .

**β)** Οι γωνίες $\hat{\theta}$ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ που τέμνονται

από την ευθεία ΒΓ, επομένως, ισχύει $\hat{\theta} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 30^o$

- Αφού $y=55^o$ ισχύει ΒΔΓ γωνία είναι ίση με $2\cdot55^o\text{-}20^o=90^o$.
- Για τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ισχύει:

$\mathrm{B\hat{A}\Gamma} + \mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 180^o$ ή $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} + 90^o + 30^o = 180^o$ ή $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} + 120^o = 180^o$ ή

$\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 180^o - 120^o$ ή $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 60^o$.

Έτσι αφού η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ ισχύει: $\mathrm{B\hat{A}Z} = \mathrm{Z\hat{A}\Gamma} = 30^o$.

Όμως, οι γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\mathrm{Z\hat{A}\Gamma}$ είναι εντός και επί τ' αυτά των παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ που τέμνονται από την ευθεία ΑΖ.

Επομένως, ισχύει $\mathrm{Z\hat{A}\Gamma} + \hat{\varphi} = 180^o$ ή $30^o + \hat{\varphi} = 180^o$ ή $\hat{\varphi} = 180^o - 30^o$ ή $\hat{\varphi} = 150^o$

- Αφού $\hat{\varphi} = 150^o$, για την παραπληρωματική της, $\mathrm{B\hat{Z}K}$ ισχύει

$\mathrm{B\hat{Z}K} = 180^o - \hat{\varphi}$ ή $\mathrm{B\hat{Z}K} = 180^o - 150^o$ ή $\mathrm{B\hat{Z}K} = 30^o$

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{BZK}}$ ισχύει: $\mathrm{B\hat{K}Z} + \mathrm{K\hat{B}Z} + \mathrm{B\hat{Z}K} = 180^o$ *ή* $\mathrm{B\hat{K}Z} + 30^o + 30^o = 180^o$ *ή*

$\mathrm{B\hat{K}Z} + 60^o = 180^o$ ή $\mathrm{B\hat{K}Z} = 180^o - 60^o = 120^o$ Άρα $\hat{\omega} = 180^o - 120^o$ *ή* $\hat{\omega} = 60^o$

**γ)** Για το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AEB}}$ ισχύουν:

- $\mathrm{A\hat{B}E} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ $\mathrm{B\hat{A}E} = \mathrm{A\hat{B}E} = 30^o$ άρα $\mathrm{AE} = \mathrm{AB}$
- $\mathrm{A\hat{E}B} + \mathrm{B\hat{A}E} + \mathrm{E\hat{B}A} = 180^o$ ή $\mathrm{A\hat{E}B} + 30^o + 30^o = 180^o$ ή $\mathrm{A\hat{E}B} + 60^o = 180^o$ ή

  $\mathrm{A\hat{E}B} = 120^o$ άρα, το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AEB}}$ είναι ισοσκελές και αμβλυγώνιο.

- Για το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{BEK}}$ ισχύουν:
  - $\mathrm{B\hat{E}K} = 180^\circ - \mathrm{A\hat{E}B} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
  - $\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 60^\circ$, από υπόθεση
  - $\mathrm{B\hat{K}E} = \hat{\omega} = 60^o$, ως κατακορυφήν Έτσι, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και οξυγώνιο.
- Για το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{BKZ}}$ ισχύουν:

- Από το προηγούμενο ερώτημα: $K\hat{B}Z = K\hat{Z}B = 30^o$
- $B\hat{K}Z + K\hat{B}Z + K\hat{Z}B = 180^o$ ή $B\hat{K}Z + 30^o + 30^o = 180^o$ ή $B\hat{K}Z = 120^o$

Επομένως, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αμβλυγώνιο.

- Για το τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Delta\Gamma}$ ισχύουν:

$B\hat{\Gamma}B = 30^o$, $\Delta\hat{B}\Gamma = 60^o$, $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και σκαληνό.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω συμπληρωμένος πίνακας:

| ΤΡΙΓΩΝΟ | ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ | ΟΞΥΓΩΝΙΟ | ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ | ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ | ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ | ΣΚΑΛΗΝΟ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ΑΕΒ | | | x | x | | |
| ΒΕΚ | | x | | | x | |
| ΒΚΖ | | | x | x | | |
| ΒΔΓ | x | | | | | x |

**δ)** Αφού έχουμε ότι $AE = 7cm$ ισχύουν:

- $EB = AE = 7cm$, αφού το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AEB}$ είναι ισοσκελές
- $EB = EK = KB = 7cm$, αφού το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BEK}$ είναι ισόπλευρο
- $KB = KZ = 7cm$, αφού το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BKZ}$ είναι ισοσκελές άρα ισχύει:
  $EK = KZ = 7cm$

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\left(2-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{4}$, $B=3\cdot 2^2-7\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$ και $\Gamma=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}-4\cdot\frac{1}{5}$

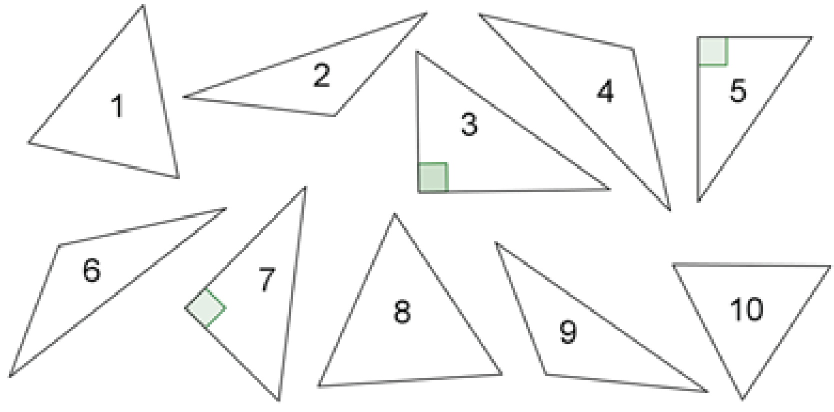
**α)** Να δείξετε ότι $A=\frac{5}{2}$, $B=9$ και $\Gamma=-\frac{13}{30}$.

**β)** Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\Delta=\frac{7}{5}\cdot A+3\cdot\Gamma-\frac{1}{5}$ και $E=2A-\frac{1}{3}\cdot B-\frac{3}{2}$ είναι αντίστροφοι.

**γ)** Να υπολογίσετε την παράσταση $Z=\dfrac{4\cdot A+\frac{B}{9}-1}{\frac{1}{3\Gamma}}$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν ο αριθμός $|Z|$ είναι πρώτος ή σύνθετος.

### ΑΣΚΗΣΗ 2

Η καθηγήτρια των Μαθηματικών του τμήματος $A_2$ του $2^{ου}$ Γυμνασίου Τρίπολης έδωσε στους μαθητές/τριες ένα φυλλάδιο με διάφορα τρίγωνα, όπου στο κάθε τρίγωνο αναγράφεται ένας αριθμός, όπως φαίνεται δίπλα.



Τους ζήτησε να συμπληρώσουν τον παρακάτω πίνακα. Η Καίτη όμως, δυσκολεύεται στα Μαθηματικά.

**α)** Να βοηθήσετε την Καίτη να συμπληρώσει τον πίνακα.

| **Είδος τριγώνου** | **Αριθμός που αναγράφεται στο τρίγωνο** | **Πλήθος τριγώνων** |
|---|---|---|
| οξυγώνιο | | |
| ορθογώνιο | | |
| αμβλυγώνιο | | |

**β)** Να βρείτε το ποσοστό των τριγώνων που είναι ορθογώνια.

**γ)** Να βρείτε το ποσοστό των τριγώνων που ο αριθμός ο οποίος αναγράφεται στο τρίγωνο είναι διαιρέτης του 12.

**δ)** Η καθηγήτρια ζήτησε από τα παιδιά να σχεδιάσουν και άλλα τρίγωνα. Αν το πλήθος όλων των οξυγώνιων τριγώνων είναι το 75% του πλήθους των αμβλυγώνιων τριγώνων να βρείτε πόσα οξυγώνια τρίγωνα πρέπει να σχεδιάσουν τα παιδιά, αν τα αμβλυγώνια τρίγωνα που σχεδίασαν είναι 64;

**ε)** Να εξετάσετε αν τα ψηφία που βρίσκονται στο εσωτερικό των αμβλυγώνιων τριγώνων σχηματίζουν τετραψήφιο αριθμό που διαιρείται με το 3 ή με το 9.

## ΑΣΚΗΣΗ 3

Ο πατέρας του Ανδρέα αποφάσισε να του πάρει ένα κινητό ως δώρο για την επιτυχία του στον διαγωνισμό «ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ».

**α)** Αν για το κινητό πλήρωσε 560€ μετά την έκπτωση 30% που του έκανε το κατάστημα, να βρείτε την αξία του κινητού πριν την έκπτωση.

**β)** Για να ανοίγει το καινούργιο του κινητό ο Ανδρέας χρειάζεται να πληκτρολογεί έναν τετραψήφιο κωδικό, τον οποίο όμως ξέχασε. Θυμάται όμως ότι είναι μεγαλύτερος του 2021 και μικρότερος του 7021, ότι το δεύτερο του ψηφίο είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης του 2 και του 3, ότι το τρίτο του ψηφίο είναι 0 και ότι διαιρείται με το 5 και το 9. Ποιος είναι ο κωδικός αυτός;

## ΑΣΚΗΣΗ 4

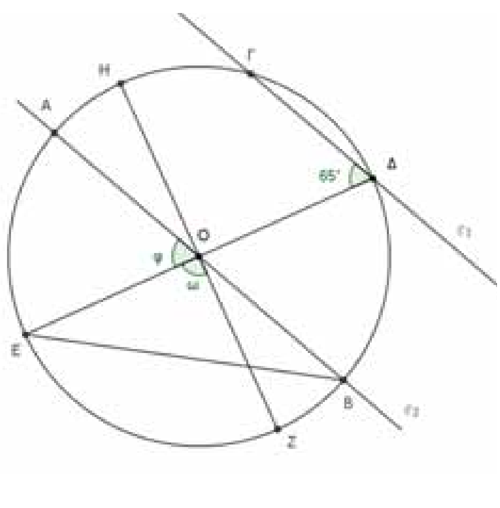
Το Casa Mainalo είναι ένα ξενοδοχείο χτισμένο στους πρόποδες του ομώνυμου βουνού της Αρκαδίας.

**α)** Η ομάδα δημοσίων σχέσεων του ξενοδοχείου στα πλαίσια μιας έρευνας, καταμέτρησε τους πελάτες του. Οι άνδρες που καταμετρήθηκαν ήταν 160 και αποτελούσαν το 40% των ενοίκων. Αν τα παιδιά ήταν το $\frac{1}{4}$ του συνόλου των πελατών του ξενοδοχείου, να βρείτε πόσες ήταν οι γυναίκες και πόσα τα παιδιά.

**β)** Ο manager του ξενοδοχείου κάνει έλεγχο κάθε 9 μέρες, ενώ ο κηπουρός κάθε 15 μέρες. Αν στις 8 Ιουνίου 2021 έλεγξαν και οι δύο υπεύθυνοι τις εγκαταστάσεις του ξενοδοχείου, να βρείτε την ημερομηνία που θα συμπέσει να ελέγξουν ξανά και οι δύο υπεύθυνοι μαζί το ξενοδοχείο.

## ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται κύκλος (Ο, ΟΑ) και οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$). Αν οι διάμετροι του κύκλου ΗΖ και ΕΔ τέμνονται κάθετα και η γωνία $\Gamma\hat{\Delta}O = 65^0$,



**α)** να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Επίκεντρη γωνία | Αντίστοιχο τόξο |
|---|---|
| $A\hat{O}H$ | |
| | ΑΕ |
| | ΖΒ |
| $B\hat{O}\Delta$ | |
| $H\hat{O}\Delta$ | |

**β)** να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων Α, Ε και Ζ ως προς το σημείο Ο

**γ)** να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$

**δ)** να υπολογίσετε τις γωνίες $E\hat{O}B$ και $Z\hat{O}B$

**ε)** να φέρετε το ύψος ΟΜ του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και να υπολογίσετε την γωνία $E\hat{O}M$

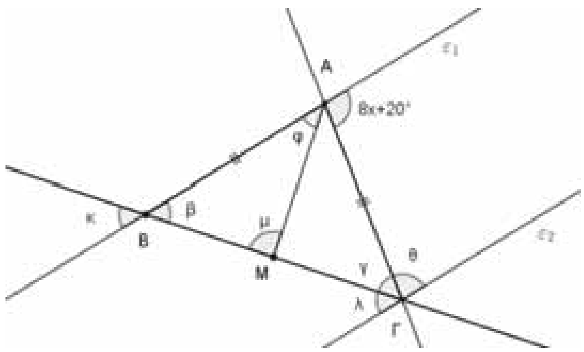
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

## ΑΣΚΗΣΗ 6

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$),

ΑΒ = ΑΓ, η γωνία $\hat{\kappa}$ είναι τα $\frac{5}{9}$ της ορθής και

Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.




**α)** Τι είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ για το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$;

Επιλέξτε ένα:

α. Διάμεσος β. Υψος γ. Διχοτόμος δ. Το α και το β

ε. Το β και το γ ζ. Το α, το β και το γ

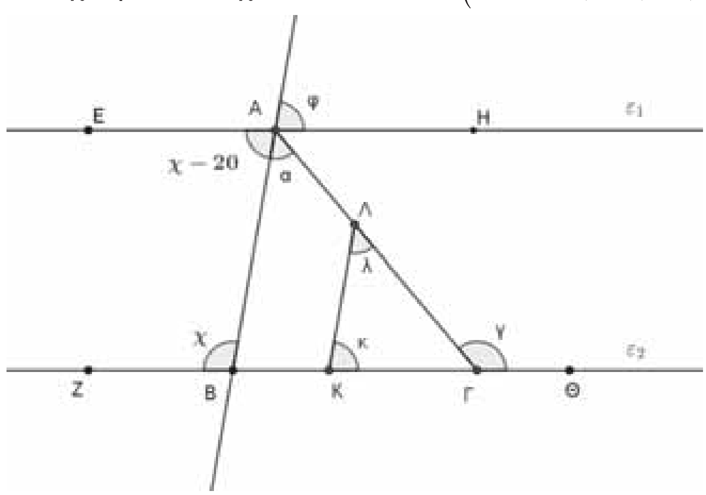
**β)** Να υπολογίσετε τις τιμές των κ, β, γ, φ , μ , κ , ($8x+20^o$), θ και λ.

**γ)** Αν ΒΜ= 2cm και ΑΒ =3cm, να βρεθεί το ποσοστό επί τοις εκατό που θα αυξηθεί η περίμετρος του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, αν κάθε πλευρά του αυξηθεί κατά 1cm;

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

## ΑΣΚΗΣΗ 7

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$), η ΑΒ παράλληλη στην ΚΛ (ΑΒ//ΚΛ), η $A\hat{B}Z = \chi$, η $E\hat{A}B = 2\chi - 20$ και $B\hat{A}\Gamma = \left(2^6 - [\,4^2 : (7-5)^2 + (4-6)^2 + 5 - (-1)^{2021}]\right)^o$



Να υπολογίσετε το χ, τις γωνίες $\hat{\varphi}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\kappa}$, $\hat{\gamma}$ και στη συνέχεια να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

## 1η Ενδεικτική Γραπτή Δοκιμασία

### ΘΕΩΡΙΑ

#### ΘΕΜΑ 1ο

α) Ποιο κλάσμα λέγεται ανάγωγο; Να γράψετε ένα παράδειγμα ανάγωγου κλάσματος.

β) Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα; Να γράψετε ένα παράδειγμα ισοδύναμων κλασμάτων.

γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

ii) Όταν α > β τότε $\frac{\alpha}{\beta}<1$ $(\beta \neq 0)$

iii) Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

iv) Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι όταν έχουν άθροισμα 1.

#### ΘΕΜΑ 2ο

α) Πότε δύο γωνίες ονομάζονται εφεξής και πότε παραπληρωματικές; Να σχεδιάσετε δύο γωνίες που να είναι ταυτόχρονα εφεξής και παραπληρωματικές.

β) Πότε δύο γωνίες ονομάζονται κατακορυφήν και ποια η μεταξύ τους σχέση; Να κάνετε το αντίστοιχο σχήμα.

γ) Να γράψετε τους ορισμούς των γωνιών: Οξεία γωνία, αμβλεία γωνία, ευθεία γωνία και πλήρης γωνία.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\dfrac{(-1)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}$ και $B=\left(\frac{2}{3}\cdot 5-\frac{5}{2}\right):\frac{5}{3}+3-3\cdot\left(\frac{5}{4}-1+\frac{1}{2}\right)$

α) Να δείξετε ότι $A=-\frac{1}{2}$ και $B=\frac{5}{4}$

β) Να βρεθεί ο αντίστροφος του Α, ο αντίθετος του Β και να υπολογίσετε την παράσταση

$K=\left|\frac{A}{B}\right|-\left|-B\right|$.

γ) Χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα σύμβολα $>$ , $<$ ή $=$ να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις.

i) $-A \ldots\ldots |B|$ ii) $|-B| \ldots\ldots |B|$

iii) $\left|\dfrac{A}{B}\right| \ldots\ldots |-A|$ iv) $\dfrac{1}{A} \ldots\ldots A$

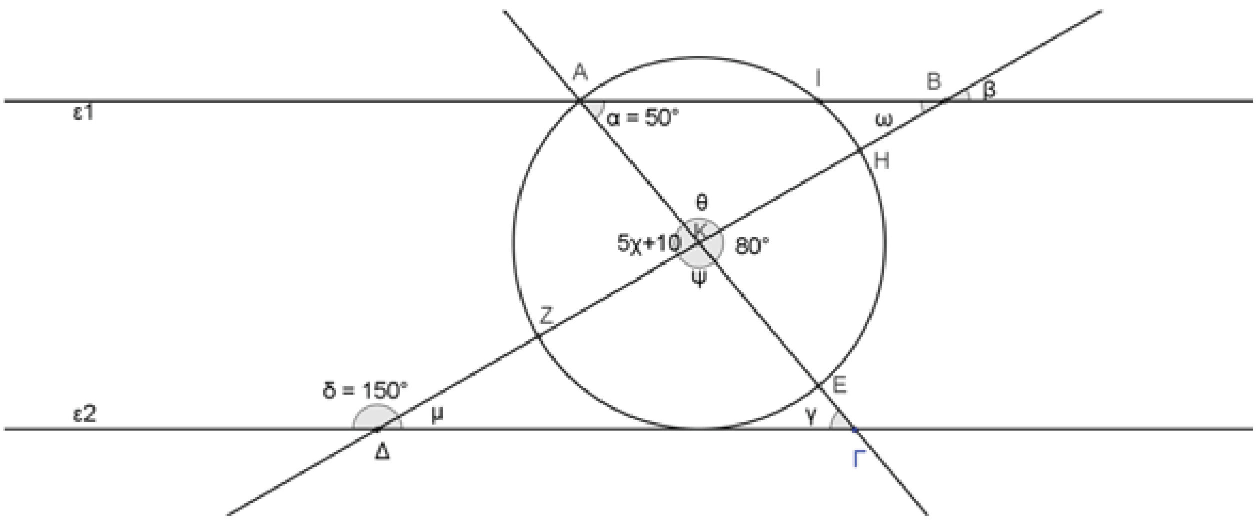
## ΘΕΜΑ 2ο

Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει την εξής προσφορά. Αν ο πελάτης αγοράσει ταυτόχρονα έναν υπολογιστή και έναν εκτυπωτή γίνεται έκπτωση 10% στη τιμή και των δύο προϊόντων. Ο Ανδρέας επιλέγει ένα υπολογιστή που κοστίζει 300€ και ένα εκτυπωτή. Στο ταμείο μετά την έκπτωση της προσφοράς πληρώνει συνολικά 324€.

**Α)** Πόσα χρήματα εξοικονόμησε στην τιμή του υπολογιστή;
**Β)** Πόσο του κόστισε τελικά ο εκτυπωτής;
**Γ)** Ποια ήταν η τιμή του εκτυπωτή πριν την έκπτωση;

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και δύο ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ παράλληλες.
α) Με βάση το παραπάνω σχήμα:




**i)** Να ονομάσετε μία ακτίνα και μία χορδή του κύκλου
**ii)** Να ονομάσετε μία διάμετρο και ένα ημικύκλιο του κύκλου.
**iii)** Να βρείτε το χ.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\mu}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\psi}$ ( χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου ) αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

# Επαναληπτικά θέματα Β΄ Γυμνασίου

**Αγγελάκος Ηλίας, Διαμαντοπούλου Έλενα, Κολοβού Ευθυμία, Λουμπαρδιά Αγγελική .**

**Παράρτημα Αρκαδίας**

## Προτεινόμενα θέματα επανάληψης

**ΘΕΜΑ 1**

**α)** Να εξετάσετε αν είναι σωστοί οι παρακάτω συλλογισμοί και να εξηγήσετε ποιες ιδιότητες των ισοτήτων αναγνωρίζετε

$$1=1$$
$$1+1=1+1$$
$$\frac{2021}{2021}+\frac{2022}{2022}=\frac{2023}{2023}+\frac{2024}{2024}$$

**β)** Μπορείτε να μαντέψετε μια λύση της εξίσωσης:

$$\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$$

**γ)** Να εξετάσετε αν $x=-2022$ είναι λύση της εξίσωσης.

**δ)** Να λύσετε την εξίσωση.

**ΛΥΣΗ:**

**α)** Κάθε αριθμός είναι ίσος με τον εαυτό του. Μια ισότητα δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε και στα δυο μέλη της τον ίδιο αριθμό. Κάθε κλάσμα που έχει τον ίδιο αριθμό για αριθμητή και παρονομαστή ισούται με τη μονάδα. Επομένως και οι τρεις ισότητες ισχύουν και ο συλλογισμός είναι σωστός.

**β)** Αντιπαραθέτοντας την ισότητα $\frac{2021}{2021}+\frac{2022}{2022}=\frac{2023}{2023}+\frac{2024}{2024}$ με την εξίσωση $\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$ μπορούμε να πούμε ότι μια λύση είναι ο αριθμός 0 δηλαδή $x=0$

**γ)** Ο αριθμός -2022 δεν είναι λύση της εξίσωσης γιατί για $x=-2022$ η εξίσωση γίνεται $\frac{2021-2022}{2021}+\frac{2022-2022}{2022}=\frac{2023-2022}{2023}+\frac{2024-2022}{2024}$ δηλαδή $\frac{-1}{2021}=\frac{1}{2023}+\frac{2}{2024}$, άτοπο αφού το άθροισμα δυο θετικών αριθμών είναι θετικός και όχι αρνητικός αριθμός.

**δ) 1ος τρόπος**

Η εξίσωση $\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$

είναι πρώτου βαθμού, έχει μια λύση την $x=0$ και δεν είναι αόριστη αφού όπως εξετάσαμε στο γ) ερώτημα δεν έχει λύση τον αριθμό $x=-2022$. Άρα έχει μοναδική λύση την $x=0$.

**2ος τρόπος**

Η εξίσωση $\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$ γίνεται

$$\frac{2021}{2021}+\frac{x}{2021}+\frac{2022}{2022}+\frac{x}{2022}=\frac{2023}{2023}+\frac{x}{2023}+\frac{2024}{2024}+\frac{x}{2024}$$

ή $\quad 1+\frac{x}{2021}+1+\frac{x}{2022}=1+\frac{x}{2023}+1+\frac{x}{2024}$ ή $\frac{x}{2021}+\frac{x}{2022}-\frac{x}{2023}-\frac{x}{2024}=0$

ή $x\left(\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)=0$ οπότε x=0 αφού $\left(\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)\neq 0$

αφού $\frac{1}{2021}>\frac{1}{2023}$ και $\frac{1}{2022}>\frac{1}{2024}$

## ΘΕΜΑ2

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση: $y=\frac{\kappa+1}{3}x-2$

**α)** Να προσδιορίσετε την τιμή του κ αν είναι γνωστό ότι η (ε) διέρχεται από το σημείο Γ(-3,-5).

**β)** Αν κ=2

i) να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) και την εξίσωσή της.

ii) να εξετάσετε με ποια ή ποιες από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλη:

$\varepsilon_1$: y – x = 0 $\qquad$ $\varepsilon_2$: y = - x + 4 $\qquad$ $\varepsilon_3$: x = - 2 + y

**γ)** Να εξετάσετε αν η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(2,0)του άξονα xx΄

**δ)** Από ποιο σημείο του άξονα yy΄ διέρχεται η ευθεία;

**ε)** Να κάνετε την γραφική της παράσταση .

## ΛΥΣΗ:

**α)** Για να διέρχεται η ευθεία από το σημείο Γ(-3,-5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλαδή:

$$-5=\frac{\kappa+1}{3}(-3)-2 \text{ ή } -5=(\kappa+1)(-1)-2 \text{ ή } -5=-\kappa-1-2 \text{ ή } \kappa=5-1-2 \text{ ή } \kappa=2$$

**β)**i) Αν κ=2 η κλίση της ευθείας θα είναι $\frac{\kappa+1}{3}=\frac{2+1}{3}=1$ και θα έχει εξίσωση y=x-2 .

ii) Η ευθεία ($\varepsilon_1$) είναι η y=x και έχει κλίση 1 συνεπώς είναι παράλληλη με την (ε) αφού έχουν την ίδια κλίση.

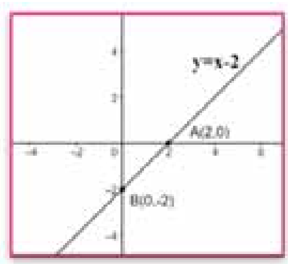
Η ευθεία ($\varepsilon_2$): y=-x+2 και έχει κλίση -1 συνεπώς δεν είναι παράλληλη με την (ε).

Η ευθεία ($\varepsilon_3$):είναι η y=x+2 και έχει κλίση 1 συνεπώς είναι παράλληλη με την (ε) αφού έχουν την ίδια κλίση.

**γ)** Η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(2,0) του άξονα xx΄ αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της y=x-2.

**δ)** Κάθε ευθεία της μορφής y=αx+β διέρχεται από το σημείο (0,β) του άξονα yy΄ άρα η (ε) θα διέρχεται από το Β(0,-2).

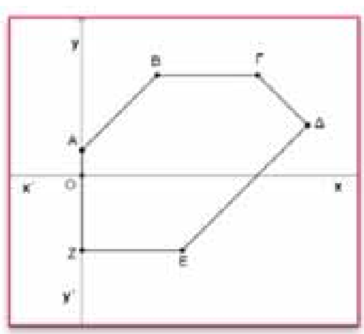
**ε)** Αφού η ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(2,0) και Β(0,-2) η γραφική της παράσταση θα είναι η εξής:




## ΘΕΜΑ3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει ένα εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- ΑΖ=ΒΓ=ΖΕ=4
- Οι κορυφές Α,Ζ είναι σημεία του άξονα y΄y
- Τα Α,Β είναι σημεία της ε:y=x+1καιτο Β έχει τετμημένη 3.
- Οι πλευρές ΒΓ και ΖΕ είναι παράλληλες στον άξονα x΄x
- Η πλευρά ΕΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ και το Δ έχει τεταγμένη 2.



**α)**Να βρείτε : i)Τις συντεταγμένες των σημείων Α,Β,Γ,Ζ,Ε.

ii)Την εξίσωση της ευθείας ΕΔ και τις συντεταγμένες του Δ

**β)**Να υπολογίσετε το εμβαδό του εξάγωνου

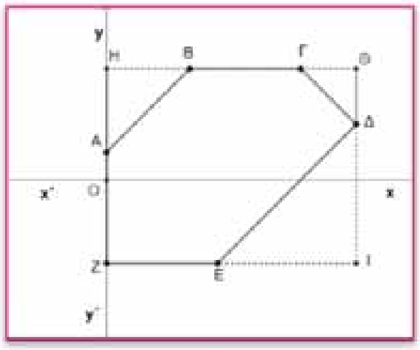
**γ)**Να αποδείξετε ότι η γωνία ΓΔΕ είναι ορθή.

**ΛΥΣΗ:**

**α)** i) Το Α είναι σημείο της ευθείας ε: $y=x+1$ και του άξονα y΄y άρα για $x=0$ στην εξίσωση της ε προκύπτει $y=0+1=1$. Συνεπώς Α(0,1). Το Β είναι σημείο της ευθείας ε: $y=x+1$ και έχει τετμημένη 3άρα για $x=3$ στην εξίσωση της επροκύπτει $y=3+1=4$. Συνεπώς Β(3,4). Το σημείο Γ έχει την ίδια τεταγμένη με το Β και αφού ΒΓ=4 είναι Γ(7,4). Το Ζ έχει τετμημένη 0 και αφού ΑΖ=4 είναι Ζ(0,-3). Το Ε έχει την ίδια τεταγμένη με το Ζ και αφού ΕΖ=4 είναι Ε(4,-3) .

ii) Η ευθεία ΕΔ είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε :$y=x+1$ , συνεπώς $\alpha=1$και ΕΔ : $y=x+\beta$. Διέρχεται από το Ε(4,-3) οπότε $-3=4+\beta$ δηλ. $\beta=-7$. Επομένως η εξίσωση της ΕΔ είναι $y=x-7$.

Το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ΕΔ και έχει τεταγμένη 2 οπότε για $y=2$ στην εξίσωση της ΕΔ , προκύπτει $x=2+7=9$ . Άρα Δ(9,2).




**β)**i)Το εμβαδό του εξάγωνου ΑΒΓΔΕΖ μπορούμε να υπολογίσουμε αφαιρώντας από το εμβαδό του ορθογωνίου ΗΘΙΖ τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων ΑΗΒ , ΓΘΔ και ΔΙΕ. Είναι (ΗΘΙΖ)=ΗΘ•ΘΙ= 9•7 =63 τμ

$(AHB)=\dfrac{1}{2}HB\bullet HA=\dfrac{1}{2}3\bullet 3=\dfrac{9}{2}$ τμ

$(\Gamma\Theta\Delta)=\dfrac{1}{2}\Gamma\Theta\bullet\Gamma\Delta=\dfrac{1}{2}2\bullet 2=2$τμ

$(\Delta I E)=\dfrac{1}{2}\Delta I\bullet IE=\dfrac{1}{2}5\bullet 5=\dfrac{25}{2}$ τμ

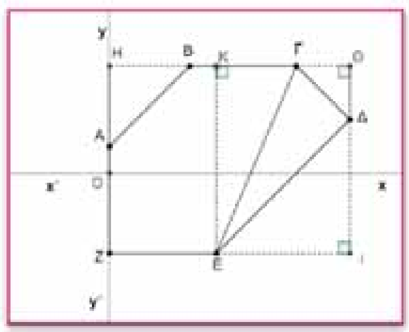
$(AB\Gamma\Delta EZ)=(H\Theta IZ)-(AHB)-(\Gamma\Theta\Delta)-(\Delta IE)=63-\dfrac{9}{2}-2-\dfrac{25}{2}=44$ τμ

ii) **1$^{ος}$τρόπος:** Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο. Στο ΓΘΔ ισχύει το Π.Θ.: Είναι $\Gamma\Delta^2=\Gamma\Theta^2+\Theta\Delta^2=2^2+2^2=8$ .

Στο ΔΙΕ ισχύει το Π.Θ.: Είναι $\Delta E^2=\Delta I^2+IE^2=5^2+5^2=50$ .

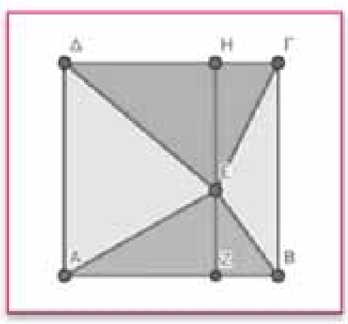
Στο ΓΚΕ ισχύει το Π.Θ.: Είναι $\Gamma E^2=\Gamma K^2+KE^2=3^2+7^2=58$.

Ισχύει : $\Gamma E^2=\Gamma\Delta^2+\Delta E^2$. Άρα $\widehat{\Gamma\Delta E}=90^o$ .




**2$^{ος}$ τρόπος:** Τα τρίγωνα ΓΘΔ και ΔΙΕ είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Άρα $\widehat{\Theta\Delta\Gamma}=\widehat{E\Delta I}=45^o$ . Επομένως $\widehat{\Gamma\Delta E}=180^o-\widehat{\Theta\Delta\Gamma}-\widehat{E\Delta I}=180^o-45^o-45^o=90^o$.

**ΘΕΜΑ 4**




Δυο αδέρφια κληρονόμησαν από τον πατέρα τους ένα οικόπεδο σε σχήμα τετραγώνου (διπλανό σχήμα) και το μοίρασαν έτσι ώστε ο ένας πήρε τα κόκκινα κομμάτια και ο άλλος τα μπλε.

**α)** Με τη βοήθεια του ευθυγράμμου τμήματος ΗΖ που είναι παράλληλο στη πλευρά ΒΓ του τετραγώνου να αποδείξετε ότι η μοιρασιά ήταν δίκαιη.

**β)** Αν τα δυο κόκκινα κομμάτια έχουν εμβαδόν 32000 τ.μ. να βρεθεί η πλευρά ΑΒ του τετραγώνου.

**ΛΥΣΗ:**

**α)** Έστω α η πλευρά του τετραγώνου και ΓΔ=α. Ο ένας αδελφός πήρε τα οικόπεδα ΔΕΓ και ΑΕΒ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ είναι, $E_{ΔΕΓ}=\frac{α\times ΗΕ}{2}$ ενώ του τριγώνου ΑΕΒ είναι

$$E_{AEB}=\frac{α\times ZE}{2}.$$

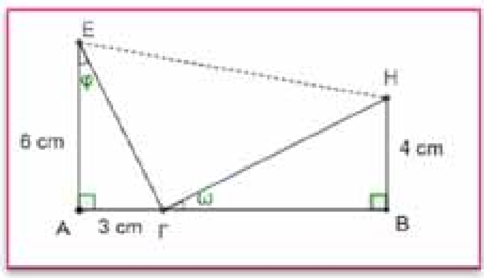
Άρα ο ένας αδελφός πήρε το άθροισμα αυτών των δυο και έχουμε:

$$E_{ΔΕΓ}+E_{AEB}=\frac{α\times ΗΕ}{2}+\frac{α\times ZE}{2}=\frac{α\times(ΗΕ+ZE)}{2}=\frac{α\times α}{2}=\frac{α^2}{2}$$

Επομένως ο ένας αδελφός πήρε το μισό του τετραγώνου $\frac{α^2}{2}$ οπότε και ο άλλος αδελφός πήρε το άλλο μισό δηλαδή $\frac{α^2}{2}$ αφού όλο το οικόπεδο έχει εμβαδόν $α^2$. Άρα η μοιρασιά είναι δίκαιη.

**β)** Το μισό τετράγωνο που πήρε ο ένας αδελφός είναι 32.000 τ.μ άρα το ολόκληρο θα έχει εμβαδόν Ε=64.000 τ.μ. Επομένως $α^2$=64.000 και άρα $α=\sqrt{6400}=\sqrt{64\times 100}=\sqrt{64}\times\sqrt{100}=8\times 10=80$ μ. δηλαδή η πλευρά του τετραγώνου ΑΒ=α=80μ.

**ΘΕΜΑ 5**




Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΓ=3cm ,ΑΕ= 6 cm καιΒΗ=4 cm ενώ το εμβαδό (ΒΗΓ) είναι μεγαλύτερο κατά 7 $cm^2$από το εμβαδό (ΑΕΓ).

**α)**Να βρείτε το ΒΓ

**β)**Να αποδείξετε ότι φ=ω

**γ)**Να δείξετε ότι $\widehat{ΕΓΗ}=90^o$

**δ)**Να βρείτε το ΕΗ

**ΛΥΣΗ:**

**α)** Το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΓ είναι $(ΑΕΓ)=\frac{1}{2}ΑΕ\bullet ΑΓ=\frac{1}{2}6\bullet 3=9\ cm^2$. Επομένως (ΒΓΗ)= $(ΑΕΓ)+7=9+7=16\ cm^2$. Άρα $\frac{1}{2}ΒΗ\bullet ΒΓ=\frac{1}{2}4\bullet ΒΓ=16$ δηλ. ΒΓ=8 cm .

**β)**Στο τρίγωνο ΑΕΓ είναι $εφφ=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ . Στο τρίγωνο ΒΗΓ είναι $εφω=\frac{ΒΗ}{ΒΓ}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Για τις οξείες γωνίες φ, ω ισχύει εφφ=εφω άρα φ=ω (1) .

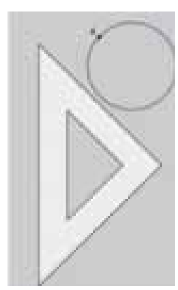
**γ)** Οι γωνίες του τριγώνου ΑΕΓ είναι συμπληρωματικές δηλ. $\widehat{ΑΓΕ}+φ=90^o$(2). Από (1) ,(2) προκύπτει : $\widehat{ΑΓΕ}+ω=90^o$ . Επομένως $\widehat{ΑΓΕ}+\widehat{ΕΓΗ}+ω=180^o$ ή $\widehat{ΕΓΗ}+90^o=180^o$ ή $\widehat{ΕΓΗ}=90^o$ .

**δ)** Στο τρίγωνο ΑΕΓ ισχύει το Π.Θ. : $ΓΕ^2=ΑΓ^2+ΑΕ^2=3^2+6^2=9+36=45$

Στο τρίγωνο ΒΗΓ ισχύει το Π.Θ. : $ΓΗ^2=ΒΗ^2+ΒΓ^2=4^2+8^2=16+64=80$

Στο τρίγωνο ΕΓΗ ισχύει το Π.Θ. : $ΓΗ^2=ΓΕ^2+ΓΗ^2=45+80=125$ . Επομένως ΓΗ= $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ cm.

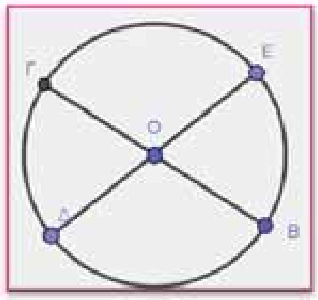
**ΘΕΜΑ 6**



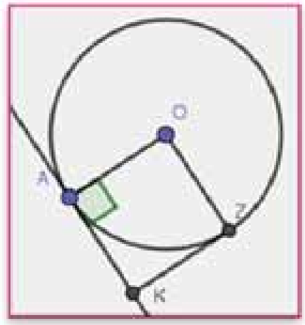
Έχεις έναν μη αριθμημένο γνώμονα . Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύκλος ακτίνας ρ και πάνω σε αυτό ένα σημείο Α.

- **i.** Να βρεις το κέντρο του κύκλου Ο .
- **ii.** Να χαράξεις την εφαπτομένη του κύκλου στο Α.
- **iii.** Να κατασκευάσεις τετράγωνο πλευράς ΟΑ.
- **iv.** Να εξετάσεις αν τρία τετράγωνα πλευράς ΟΑ έχουν μεγαλύτερο εμβαδόν από το κύκλο.

## ΛΥΣΗ:




**i.** Τοποθετώ την κορυφή της ορθής γωνίας του γνώμονα στον κύκλου και έστω Β, Γ τα σημεία όπου οι κάθετες πλευρές του τέμνουν τον κύκλο. Η χορδή ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου αφού η ορθή γωνία έχει γίνει εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΒΓ που είναι $180^o$. Επαναλαμβάνω τη διαδικασία σε άλλο σημείο του κύκλου και με τον ίδιο τρόπο παίρνω δυο σημεία πάνω στον κύκλο Δ, Ε όπου ΔΕ είναι διάμετρος του κύκλου. Το σημείο τομής Ο των δυο διαμέτρων θα είναι το κέντρο του κύκλου.



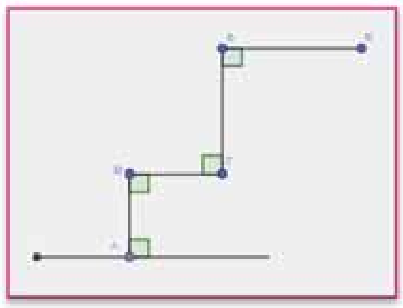

**ii.** Γράφω την ακτίνα ΟΑ του κύκλου και με τον γνώμονα φέρνω κάθετη στην ακτίνα ΟΑ στο σημείο Α του κύκλου, η κάθετη αυτή θα είναι εφαπτόμενη του κύκλου αφού η εφαπτόμενη με την ακτίνα στο σημείο επαφής τέμνονται κάθετα.

**iii.** Έχοντας γράψει την ακτίνα ΟΑ και την εφαπτομένη ε φέρνω με τον γνώμονα την κάθετη ΟΖ στο ΟΑ, όπου Ζ το σημείο τομής της με τον κύκλο. Κατόπιν φέρνω κάθετη στη ΟΖ στο Ζ που τέμνει την εφαπτομένη ε στο σημείο Κ. Το ΑΟΖΚ είναι το ζητούμενο τετράγωνο.

**iv.** Ένα τετράγωνο πλευράς ΟΑ=ρ έχει εμβαδόν $E_{τετ}=ρ^2$ και άρα τρία τετράγωνα πλευράς ρ θα έχουν εμβαδόν $E_{3τετ}=3ρ^2$. Ένας κύκλος ακτίνας ρ θα έχει εμβαδόν $E_{κύκλου}=πρ^2$.

Οπότε $\dfrac{E_{3τετ}}{E_{κυκλου}}=\dfrac{3ρ^2}{πρ^2}=\dfrac{3}{π}<1$ και άρα $E_{3τετ}<E_{κύκλου}$

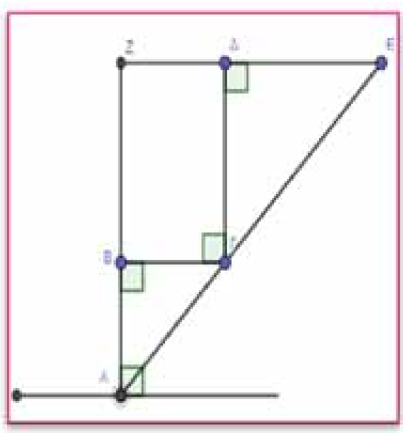
## ΘΕΜΑ 7



Στο διπλανό σχήμα έχουμε ΑΒ=ΒΓ=4 και ΓΔ=ΔΑ=5. Να δείξετε ότι:

- **i.** Να αποδείξετε ότι η $Α\hat{Γ}Ε$ είναι ευθεία γωνία
- **ii.** Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΓ, ΓΕ
- **iii.** Να αποδείξετε ότι $\sqrt{32}+\sqrt{50}=\sqrt{162}$
- **iv.** Είναι το ΑΒΔΕ τραπέζιο;

## ΛΥΣΗ:




**i.** Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{ΒΓΑ}=45^o$. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{ΔΓΕ}=\widehat{ΔΕΓ}=45^o$. Είναι $\widehat{ΑΓΒ}+\widehat{ΒΓΔ}+\widehat{ΔΓΕ}=45^o+90^o+45^o=180^o$ και άρα τα σημεία Α,Γ,Ε συνευθειακά δηλαδή η ευθεία ΑΕ διέρχεται από το σημείο Γ.

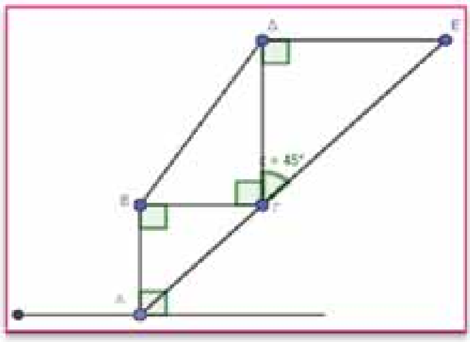
**ii.** Εφαρμόζω το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχω:

$ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2$ οπότε $ΑΓ^2=32$ άρα $ΑΓ=\sqrt{32}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ και βρίσκω $ΓΕ=\sqrt{50}$

**iii.** Προεκτείνω την ΑΒ προς το μέρος του Β και την ΕΔ προς το μέρος του Δ και έστω ότι τέμνονται στο σημείο Ζ (βλέπε στο διπλανό σχήμα). Το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχω: $AE^2=AZ^2+ZE^2$ (1). Όμως $AZ=AB+BZ=AB+\Gamma\Delta=4+5=9$ και $ZE=Z\Delta+\Delta E=B\Gamma+\Delta E=4+5=9$ οπότε η σχέση (1) δίνει $9^2+9^2=162$ και άρα $AE^2=162$ οπότε $AE=\sqrt{162}$. Ωστόσο $AE=A\Gamma+\Gamma E$(2) και από προηγούμενο ερώτημα έχω $A\Gamma=\sqrt{32}$ και $\Gamma E=\sqrt{50}$ οπότε η σχέση (2) δίνει $\sqrt{162}=\sqrt{32}+\sqrt{50}$

**iv.** Αν το ΑΒΔΕ ήταν τραπέζιο τότε η ΒΔ//ΑΕ. Αν όμως ίσχυε αυτό, οι γωνίες $\widehat{B\Delta\Gamma}$ και $\widehat{\Delta\Gamma E}$ θα ήταν ίσες, ως εντός και εναλλάξ μεταξύ των παραλλήλων ΒΔ και ΑΕ. Άρα θα ίσχυε $\widehat{B\Delta\Gamma}=45^o=\widehat{\Delta\Gamma E}$. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει γιατί η οξεία γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$ έχει $\varepsilon\varphi\widehat{B\Delta\Gamma}=\frac{4}{5}\neq 1=\varepsilon\varphi 45^o$

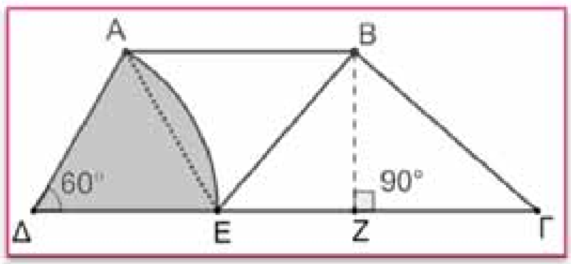



## ΘΕΜΑ 8

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ//ΔΓ και $\hat{\Delta}=60^o$. Ο κυκλικός τομέας $60^o$ του κύκλου(Δ,ΔΑ) έχει εμβαδό $(A\Delta E)=\frac{8\pi}{3}$.

**α)**

- **i.** Να αποδείξετε ότι ΑΔ=4 cm
- **ii.** Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
- **iii.** Να αποδείξετε ότι το ύψος ΒΖ του τραπεζίου είναι $BZ=2\sqrt{3}$ cm.




**β)** Εάν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΖ,ΖΓ,ΑΒ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί και το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΕ είναι $12\sqrt{3}$ $cm^2$ να υπολογίσετε τα ΕΖ, ΖΓ και ΑΒ.

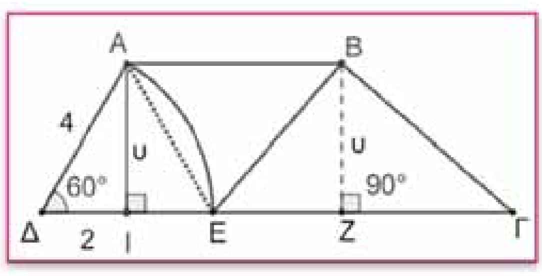
**γ)** Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο.

## ΛΥΣΗ

**α)**i) Ο κυκλικός τομέας (ΑΔΕ) γωνίας $60^o$ έχει εμβαδό ίσο με το $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$ του κυκλικού δίσκου(Δ,ΔΑ). Άρα $\frac{1}{6}\pi\Delta A^2=\frac{8\pi}{3}$ ή $\Delta A^2=16$ ή ΔΑ=4 cm.

ii) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές αφού ΑΔ=ΑΕ ως ακτίνες κύκλου. Οι $\widehat{\Delta AE}$ , $\widehat{AE\Delta}$ είναι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΑΕ του ισοσκελούς τριγώνου , επομένως $\widehat{\Delta AE}=\widehat{AE\Delta}$. Αφού $\widehat{A\Delta E}=60^o$ θα είναι και $\widehat{\Delta AE}=\widehat{AE\Delta}=60^o$ .Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΕ έχει όλες τις γωνίες του ίσες και επομένως είναι ισόπλευρο.

iii) Το ύψος υ=ΒΖ του τραπεζίου είναι και ύψος του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ πλευράς 4 cm. Το ύψος υ στο ΑΔΕ είναι και διάμεσος άρα $\Delta I=\frac{\Delta E}{2}=\frac{4}{2}=2$ .Στο τρίγωνο ΑΔΙ ισχύει το Π.Θ.$\upsilon^2=4^2-2^2=16-4=12$ δηλαδή $\upsilon=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ cm.




**β)** Αν ΕΖ=χ , ΖΓ=χ+1 , ΑΒ=χ+2 , το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι

$$(ΑΒΓΔ)= \frac{(ΑΒ+ΕΖ)ΒΖ}{2}=\frac{(χ+χ+1+χ+2)2\sqrt{3}}{2}=(3χ+3)\sqrt{3}$$

και ισχύει (ΑΒΓΔ)=$12\sqrt{3}\ cm^2$ επομένως

$(3χ+3)\sqrt{3}=12\sqrt{3}$ ή 3χ+3=12 ή χ=3. Άρα ΕΖ=3 cm ,ΖΓ=4 cm και ΑΒ=5 cm.

**γ)** Στο τρίγωνο ΒΖΓ ισχύει το Π.Θ. : $ΒΓ^2=ΒΖ^2+ΖΓ^2=(2\sqrt{3})^2+4^2=12+16=28$ , δηλ. ΒΓ= $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ .Στο τρίγωνο ΒΕΓ ισχύει το Π.Θ.:$ΒΕ^2=ΒΖ^2+ΕΖ^2=(2\sqrt{3})^2+3^2=12+9=21$ , δηλ. ΒΕ= $\sqrt{21}$ cm.

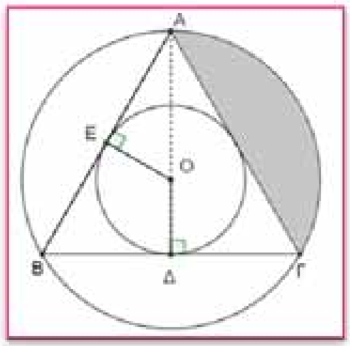
Στο τρίγωνο ΒΕΓ ισχύει: $ΒΕ^2+ΒΓ^2=(\sqrt{28})^2+(\sqrt{21})^2=49$ και $ΕΓ^2=7^2=49$ .Ισχύει :

$$ΒΕ^2+ΒΓ^2=ΕΓ^2 .$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{ΕΒΓ}=90^o$ .

**ΘΕΜΑ 9**

Στο διπλανό σχήμα το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και περιεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ). Δίνεται ρ=$5\sqrt{3}$ cm.




- **i.** Να δείξετε ότι $\widehat{ΒΑΔ}=30^o$ και R=2ρ
- **ii.** Να βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓ
- **iii.** Να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος
- **iv.** Να βρείτε το εμβαδό του τετράπλευρου ΒΕΟΔ

**ΛΥΣΗ**

**i.**Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΔ είναι και διχοτόμος. Άρα $\widehat{ΒΑΔ}=\widehat{ΔΑΓ}=30^o$

Ισχύει ημ$\widehat{ΕΑΟ}=\frac{ΕΟ}{ΑΟ}=\frac{ρ}{R}$ ή ημ$30^o$= $\frac{ρ}{R}$ ή $\frac{1}{2}=\frac{ρ}{R}$ ή R=2ρ

**ii)** Στο τρίγωνο ΑΕΟ ισχύει το Π.Θ. : $ΑΕ^2=ΑΟ^2-ΕΟ^2=R^2-ρ^2=(10\sqrt{3})^2-(5\sqrt{3})^2=300-75=225$ δηλ.ΑΕ=15cm. Η πλευρά του ΑΒΓ είναι ΑΒ=2ΑΕ= 2•15 =30 cmκαι η περίμετρος του ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ= 3ΑΒ=90 cm.

**iii)** Τα κυκλικά τμήματα που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ,ΒΓ ,ΓΑ και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα , επομένως το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος ισούται με το 1/3 του εμβαδό που προκύπτει αν αφαιρέσουμε το εμβαδό του ισόπλευρου τριγώνου από το εμβαδό του κυκλικού δίσκου (Ο,R).

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου : $Ε_1=πR^2=π(10\sqrt{3})^2=300π\ cm^2$.

Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ : $Ε_2=\frac{1}{2}ΒΓ\ ΑΔ=\frac{1}{2}30\bullet 15\sqrt{3}=225\sqrt{3}\ cm^2$

Εμβαδόν κυκλικού τμήματος : $Ε=\frac{1}{3}(Ε_1-Ε_2)=\frac{1}{3}(300π-225\sqrt{3})=100π-75\sqrt{3}\ cm^2$.

**iv)**$(ΒΕΟΔ)=(ΒΕΟ)+(ΒΟΔ)=\frac{1}{2}ΒΕ\ ΟΕ+\frac{1}{2}ΒΔ\ ΟΔ=\frac{1}{2}15\bullet 5\sqrt{3}+\frac{1}{2}15\bullet 5\sqrt{3}=75\sqrt{3}\ cm^2$.

## Προτεινόμενες ασκήσεις για λύση

**1.** Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις :

$$Α=\frac{3x-1}{4}\ ,\ Β=-\frac{5+2x}{6}\ \text{ και }\ Γ=\frac{5x+1}{12}\ .$$

- **i.** Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α για x=0.

**ii.** Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης Β για $x=-2^{-1}$

**iii.** Να βρείτε την τιμή του x ώστε Α=Β.

**iv.** Να εξετάσετε αν υπάρχει x ώστε Α+Β=Γ .

**v.** Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x οι παραστάσεις 4Α-12Γ και 6Β+3 είναι ίσες.

**vi.** Αν $\Delta=5(y-2)+3y+2$ να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση 4Α+12Γ-Δ και να βρείτε την τιμή της για $x-y=\frac{1}{8}$

**2.** Δίνεται η εξίσωση: $\frac{1}{2}(x-1)-\frac{5}{3}x=2-x$ και τρίγωνο με πλευρές: $AB=\frac{x-3}{2}$, $B\Gamma=x-7$, $A\Gamma=2(20-x)$ **α)** Να λύσετε την εξίσωση

**β)** Για x=15 να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και στη συνέχεια να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο προσδιορίζοντας ποια είναι η κορυφή της ορθής γωνίας.

**3.** Ο Πυθαγόρας ζήτησε από την Υπατία να σκεφτεί έναν αριθμό και να τον διπλασιάσει. Ύστερα της ζήτησε στο διπλάσιο του αριθμού αυτού, να προσθέσει το 8 και στη συνέχεια να διαιρέσει το άθροισμα που προκύπτει με το 2. Από το πηλίκο που προκύπτει της ζήτησε να αφαιρέσει τον αριθμό που αρχικά είχε σκεφτεί. Τότε ο Πυθαγόρας της είπε τον αριθμό που βρήκε και αυτός ήταν το 4.

**i.** Μπορείτε να βρείτε την παράσταση που περιγράφεται στις παραπάνω πράξεις χρησιμοποιώντας για άγνωστο x τον αριθμό που αρχικά σκέφτηκε η Υπατία;

**ii.** Να υπολογίσετε την παράσταση και να εξηγήσετε τι θα γινόταν αν η Υπατία είχε σκεφτεί άλλον αριθμό;

**iii.** Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2x+8}{2}-x=4$

**iv.** Να βρείτε μια αντίστοιχη αλγεβρική παράσταση ώστε το αποτέλεσμα να είναι 5 ανεξάρτητα από τον αριθμό που θα σκεφτούμε αρχικά;

**4.** α) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+1}{3}-\frac{2(x+2)}{5}=\frac{2x}{3}+1$

β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB=-3x$, $B\Gamma=\sqrt{x^2}-4x$ και $A\Gamma=-x^3$ όπου x η λύση της παραπάνω εξίσωσης.

**i.** Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

**ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου και το ύψος του προς την υποτείνουσα.

**iii.** Να βρείτε το μήκος του ημικυκλίου με διάμετρο την υποτείνουσα ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ .

**5.** Ένας εκπαιδευτικός για την συμμετοχή του σε μια εκπαιδευτική- επιστημονική ένωση πρέπει να πληρώσει για εγγραφή 20 €. Επιπλέον για κάθε σεμινάριο που θα παρακολουθήσει στην ένωση θα πρέπει να πληρώσει 30 €.

**i.** Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y που θα πληρώσει ο εκπαιδευτικός για την εγγραφή και για την παρακολούθηση x σεμιναρίων

**ii.** Ποιο είναι το χαμηλότερο ποσό που θα πληρώσει και πότε συμβαίνει αυτό

**iii.** Υπάρχει εκπαιδευτικός που θα πληρώσει στην ένωση το πόσο των 85 €; Δικαιολογείστε την απάντηση σας

**iv.** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

| **Αριθμός σεμιναρίων** x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **Συνολικό ποσό** y | | | | |

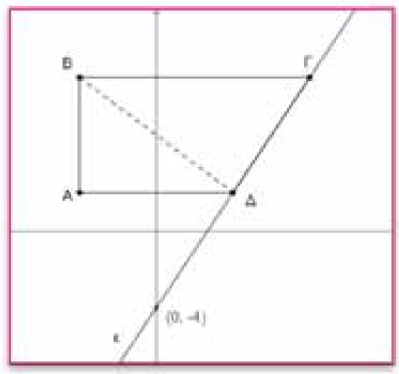
**6.** Σε έναν αγώνα μπάσκετ οι πόντοι που πέτυχαν οι τρεις πρώτοι σκόρερ μιας ομάδας είναι: ο πρώτος έτυχε το $\frac{1}{3}$ των συνολικών πόντων, ο δεύτερος το $\frac{1}{4}$ και ο τρίτος το $\frac{1}{6}$ των συνολικών ελαττωμένους κατά 3 πόντους. Οι υπόλοιποι παίκτες πέτυχαν 24 πόντους συνολικά. Να βρείτε:

**i.** Τους συνολικούς πόντους της ομάδας
**ii.** Τους πόντους που έτυχαν οι τρεις πρώτοι σκόρερ ο καθένας ξεχωριστά.
**iii.** Το ποσοστό επί των συνολικών πόντων της ομάδας που πέτυχαν οι τρεις πρώτοι σκόρερ της ομάδας

**7.** Ο παππούς έχει γενέθλια σήμερα. Κλείνει έναν αιώνα ζωής. Μαζί του έχουν γενέθλια ο γιος του και ο εγγονός του. Οι τετραγωνικές ρίζες των ηλικιών των τριών ανδρών είναι ακέραιοι αριθμοί και θα μπορούσαν να είναι μήκη ορθογωνίου τριγώνου.
**i)** Ποιες είναι οι ηλικίες τους;
**ii)** Πριν πόσα χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους ήταν πολλαπλάσιο του μεγαλύτερου διψήφιου πρώτου αριθμού;

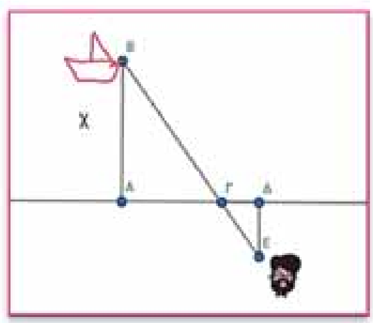
**8.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία Α(0,4) και Β(-3,0).
**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ
**β)** Με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να γράψετε ένα ημικύκλιο. Επίσης προς το ίδιο μέρος του ΑΒ που γράψατε το ημικύκλιο να σχηματίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά ΑΒ. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στα δύο σχήματα.
**γ)** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της μικρότερης από τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ.

**9.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις ΑΔ και ΒΓ.
Τα σημεία Α, Δ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y και τα σημεία Γ,Δ ανήκουν στην ευθεία ε που τέμνει τον άξονα y΄yστο σημείο (0,-4) και έχει κλίση $\frac{3}{2}$. Αν το σημείο Α έχει τετμημένη -4 και το σημείο Β έχει τεταγμένη8:



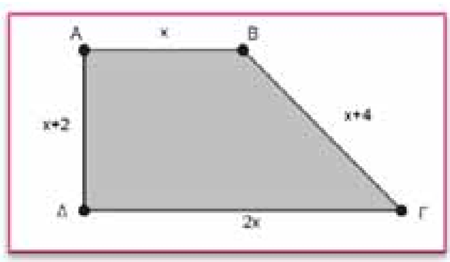

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΓΔ.
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ,Α,Β,Γ.
iii. Να βρείτε την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
iv. Να εξετάσετε αν το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ είναι κάθετο στην ευθεία ε

**10.** Ο Αρχιμήδης για να υπολογίσει την απόσταση $x$ των πλοίων των Ρωμαίων, περπατούσε (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) κάθετα στην ΑΒ ως το σημείο Γ ώστε ΑΓ=10m.Ύστερα τοποθετούσε ένα σημάδι στο σημείο Γ και συνέχιζε να περιπατεί στην ίδια ευθεία ΑΓ ώστε να φτάσει στο Δ όπου ΓΔ=2m. Στη συνέχεια από το σημείο Δ άλλαζε κατεύθυνση και προχωρούσε κάθετα στην ΑΔ προς τη στεριά ώσπου να φτάσει σε ένα σημείο Ε έτσι ώστε τα σημεία Ε, Γ, Β να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Αν μια μέρα προχώρησε προς τη στεριά τόσο ώστε ΔΕ=20m.




**α)** Να βρείτε ποιόν τριγωνομετρικό αριθμό των γωνιών ΑΓΒ και ΔΓΕ παριστάνουν τα κλάσματα $\frac{x}{10}$ και $\frac{20}{2}$
**β)** Να εξηγήσετε γιατί $\frac{x}{10}=\frac{20}{2}$
**γ)**Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ του πλοίου από την ακτή εκείνη τη μέρα
**δ)** Αν μια άλλη μέρα το ΔΕ ισούται με 30m πόση θα είναι η απόσταση ΑΒ;

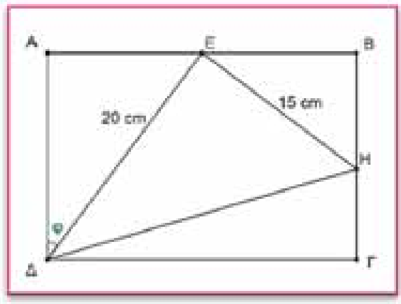
**11.** Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο και οι πλευρές του είναι: ΑΒ=x, ΒΓ=x+4, ΓΔ=2x, ΑΔ=x+2. Αν είναι γνωστό ότι η περίμετρος του τραπεζίου είναι 36cm να βρείτε:




**α)** το μήκος της κάθε πλευράς του
**β)** το μήκος της διαγωνίου ΒΔ
**γ)** το εμβαδόν του τραπεζίου

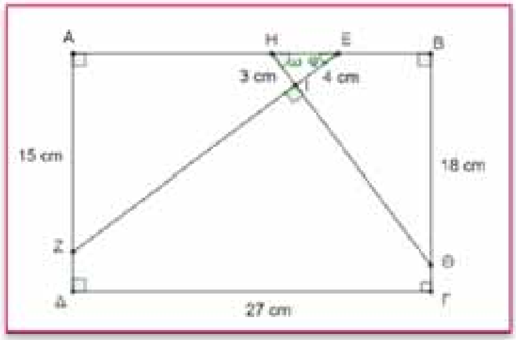
**δ)** τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$

**12.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Το τρίγωνο ΔΕΗ με κορυφές τα σημεία Δ,Ε,Η των πλευρών του ορθογωνίου έχει πλευρές ΔΕ= 20 cm και ΕΗ=15 cm. Για τη γωνία ΑΔΕ=φ ισχύει συνφ $=\frac{4}{5}$ .




- **i.** Να βρείτε τις διαστάσεις ΑΒ και ΒΓ του ορθογωνίου.
- **ii.** Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΔΕΗ είναι ορθογώνιο.

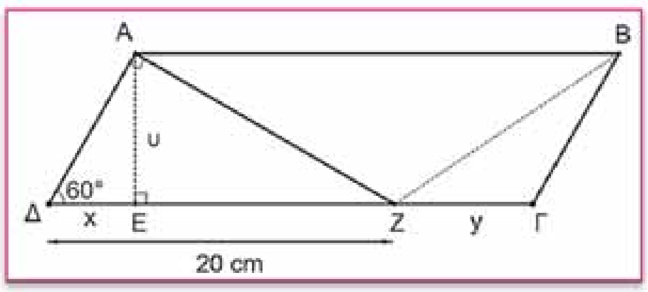
**13.** Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει πλευρές ΑΒ= 27cm και ΒΓ=18 cm. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ και ΗΘ τέμνονται κάθετα στο σημείο Ι. Ισχύει ακόμη ότι :
ΑΖ= 15cm ΗΙ= 3cm και ΕΙ= 4cm.
Να υπολογίσετε :




- **i.** Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΕ,ΕΒ ,ΗΕ,ΒΘ
- **ii.** Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΖ και ΗΘ.
- **iii.** Την περίμετρο και το εμβαδό του πεντάπλευρου ΙΖΔΓΘ.

**15.** Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει ύψος υ=ΑΕ . Από σημείο Ζ της πλευράς ΔΓ τέτοιο ώστε ΔΖ=20 cm , έχουμε φέρει ευθύγραμμο τμήμα ΖΑ⊥ΑΔ. Ισχύει $\widehat{\mathrm{ΑΔΕ}} = 60^{o}$ .

**α)**

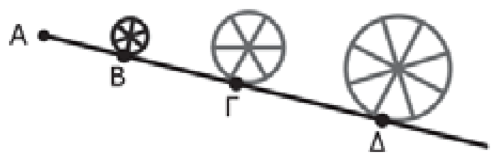



- **i.** Να εκφράσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ ως συνάρτηση του x.
- **ii.** Στο τρίγωνο ΑΔΕ να εκφράσετε το ύψος υ ως συνάρτηση της εφ $\widehat{\mathrm{ΑΔΕ}}$ και του x.
- **iii.** Στο τρίγωνο ΑΖΕ να εκφράσετε το ύψος υ ως συνάρτηση της εφ $\widehat{\mathrm{ΑΖΕ}}$ και του x.
- **iv.** Με βάση τα προηγούμενα να αποδείξετε ότι ΔΕ=x=5 cm και υ= $5\sqrt{3}$ cm.

**β)** Να βρείτε: Το μήκος y ευθύγραμμου τμήματος ΖΓ ώστε να ισχύει (ΑΒΓΖ)=90 $\sqrt{3}$ cm$^2$ και το εμβαδό (ΒΖΓ) .

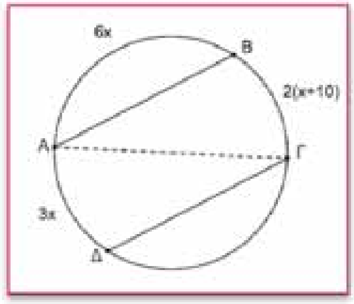
**γ)** Να βρείτε το ύψος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.

**16.** Τρεις τροχοί με ακτίνες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ αφήνονται να κυλίσουν ( χωρίς να ολισθήσουν) από το σημείο Α και τους ακινητοποιούμε όταν συμπληρώσουν μια στροφή. Ένας από τους τροχούς έφτασε στο σημείο Β ένας στο Δ και ένας στο Γ.




- **i.** Ποια η ακτίνα του τροχού που έφτασε στο Δ, ποια η ακτίνα του τροχού που έφτασε στο Γ και ποια η ακτίνα του τροχού που έφτασε στο Β; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.
- **ii.** Αν ΑΒ=ΔΓ τότε αρχικά δείξτε ότι $\rho_1+\rho_2=\rho_3$ και κατόπιν αν ΑΔ= 26π και $\rho_1$, $\rho_2$ πρώτοι αριθμοί να βρείτε τις ακτίνες $\rho_1$, $\rho_2$ και $\rho_3$.

**17.** Για τις χορδές ΑΒ,ΓΔ του κύκλου (Ο,ρ) ισχύει ΑΒ=ΓΔ= $2\sqrt{3}$ cm. Είναι επίσης $\overset{\frown}{\mathrm{ΑΒ}}$=6x , $\overset{\frown}{\mathrm{ΒΓ}}$=2(x+10) , $\overset{\frown}{\mathrm{ΔΑ}}$=3x .



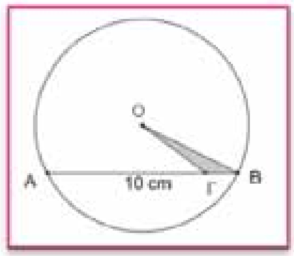

i. Να αιτιολογήσετε γιατί τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ είναι ίσα και να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$.

ii. Να δείξετε ότι ΑΒ//ΔΓ και ΒΓ//ΑΔ .

iii. Να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο του ΑΓ και να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου.

iv. Να βρείτε το μήκος και το εμβαδό του κύκλου.

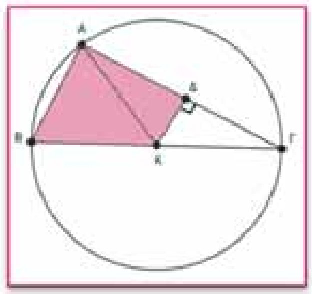
**18.** Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μία χορδή του ΑΒ=12 cm. Αν Γ σημείο της χορδής ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΓ=10 cm και το εμβαδό του τριγώνου ΟΓΒ είναι (ΟΓΒ)=3cm$^2$:




i. Να δείξετε ότι : ΟΒ=$3\sqrt{5}$cm και ΟΓ=5 cm.

ii. Να βρείτε το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζεται από τους κύκλους (Ο,ΟΒ,) και (Ο,ΟΓ)

**19.** Στο διπλανό σχήμα αν $\widehat{AKB}=60°$ αι ΑΒ=5cm να υπολογισθούν:



**α)** Οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ

**β)** Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου

**γ)** Το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου

**δ)** Αν $K\Delta \perp A\Gamma$

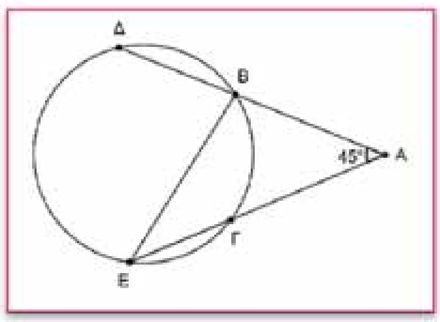
**i)** Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΒΚΔ

**ii)** Να υπολογισθεί το εμβαδόν αυτού του τετράπλευρου.

**20. α)** Να λυθεί η εξίσωση $2-\frac{\alpha}{12}-\frac{2\alpha-4}{8}=\frac{5}{6}$

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\beta=\sqrt{141+\sqrt{8-\sqrt{(-2)^2}+\left(\sqrt{3}\right)^2}}$

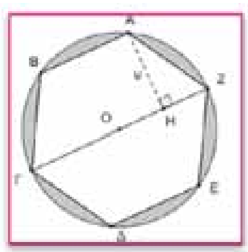
**γ)** Αν το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\Delta E}$ είναι 32α όπου α η λύση της παραπάνω εξίσωσης και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{E\Gamma}$ είναι 5β όπου β η τιμή της παραπάνω παράστασης να υπολογισθούν:




**i)** Τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Delta B}$

**ii)** Οι γωνίες του τετράπλευρου ΔΒΓΕ

**21.** Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ) και ΓΖ μία διαγώνιος του.
Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία του εξαγώνου καθώς και τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΖ.




**α)**Να αιτιολογήσετε γιατί το ΑΒΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**β)**Αν η περίμετρος του εξαγώνου είναι 18 cm να βρείτε:

i. Το ύψος υ του τραπεζίου ΑΒΓΖ

ii. Το εμβαδό του κανονικού εξαγώνου

iii. Το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας

# Ενδεικτικό διαγώνισμα Β΄ Γυμνασίου

## ΘΕΩΡΙΑ

### ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** Πότε δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

**Β.** Η συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$ συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν : i) $\alpha > 0$ ii) $\alpha < 0$

**Γ.** Πώς ονομάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\frac{\alpha}{x}$ και ποιες συμμετρίες έχει;

### ΘΕΜΑ 2ο

**Α.** Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

**Β.** Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** Να λύσετε την εξίσωση $2x-1-\frac{5x-2}{2}+\frac{6x-2}{5}=\frac{3x-4}{2}$

**Β.** Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $AB=-4(x-1)+3(2x+1)-7$, $B\Gamma=x\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $A\Gamma=\frac{x-2}{2}+5$ είναι ορθογώνιο , όπου x είναι η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος Α.

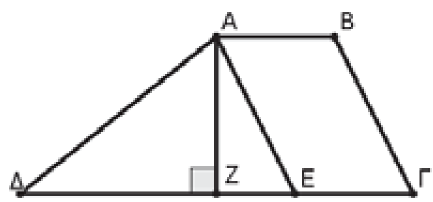
### ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με μικρή βάση AB=10cm και εμβαδό (ΑΒΓΔ)=270 $cm^2$.Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ είναι παράλληλο στο ΒΓ (ΑΕ//ΒΓ) χωρίζει το τραπέζιο σε δύο σχήματα για τα οποία ισχύει: $(AB\Gamma E)=\frac{4}{5}(A\Delta E)$. Ισχύει ακόμη ότι $\eta\mu\Delta=\frac{3}{5}$.

**Α)** Να αποδείξετε ότι (ΑΔΕ)=150$cm^2$ και (ΑΒΓΕ)=120 $cm^2$ .

**Β)** Να δείξετε ότι το ύψος του τραπεζίου είναι ΑΖ=12cm και ότι ΔΕ=25cm.

**Γ)** Να βρείτε το ΑΔ και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο.



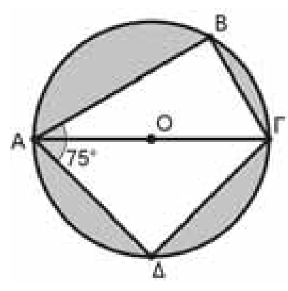

### ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο μήκους L=20π cm είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Η διαγώνιος ΑΓ του τετράπλευρου ταυτίζεται με διάμετρο του κύκλου. Δίνεται ότι ΑΔ=ΔΓ και $\widehat{BA\Delta}=75^0$

**Α.** Να δικαιολογήσετε γιατί οι γωνίες Β και Δ είναι ορθές και να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$ .

**Β.** Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

**Γ.** Να βρείτε το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



# Β΄ Γυμνασίου
# Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

**1)** «Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια περίμετρο, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο».
Να θεωρήσετε ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει και να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν ενός τετραπλεύρου του οποίου οι διαγώνιες είναι κάθετες και μεταβάλλονται αλλά το άθροισμά τους παραμένει ίσο με 48cm.

**2)** Οι πλευρές δύο τετραγώνων έχον λόγο $\lambda \neq 1$. Να υπολογίσετε, με βάση το λ, τον λόγο του αθροίσματος προς τη διαφορά των εμβαδών των δύο τετραγώνων.

**3)** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο στο οποίο τα ύψη του να έχουν μήκη 5, 12 και 13 εκατοστά.

**4)** Ένας έμπορος διαθέτει 100 kgr ζάχαρη μέρος της οποίας πούλησε με κέρδος 7% και το υπόλοιπο το πούλησε με κέρδος 17%. Το συνολικό ποσοστιαίο του κέρδος ήταν 10%. Πόσα κιλά ζάχαρη πούλησε με κέρδος 7% ;

**5)** Ένα εργοστάσιο διαθέτει 2 ειδών μηχανές, τις τύπου Α και τις τύπου Β, που παράγουν το ίδιο αντικείμενο. 3 μηχανές τύπου Α και 5 μηχανές τύπου Β παράγουν τα $\frac{19}{20}$ του συνόλου των αντικειμένων σε 3 ημέρες. Μία άλλη πληροφορία είναι το ότι 4 μηχανές τύπου Α και 18 μηχανές τύπου Β παράγουν τα $\frac{14}{15}$ του του συνόλου των αντικειμένων σε 2 ημέρες. Πόσες ημέρες θα χρειαστεί μία μηχανή τύπου Β για να κατασκευάσει όλα τα αντικείμενα, αν δουλεύει μόνη της;

## Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 119

**1)** Έχουμε $\Pi=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}+\frac{129}{128}+\frac{257}{256}+\frac{513}{512}-10=$

$$1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{8}+1+\frac{1}{16}+1+\frac{1}{32}+1+\frac{1}{64}+1+\frac{1}{128}+1+\frac{1}{256}+1+\frac{1}{512}-10=$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}-1$ οπότε αρκεί να υπολογιστεί το άθροισμα των κλασμάτων. Εδώ παρατηρούμε ότι στο άθροισμα των κλασμάτων, αν προστεθεί το κλάσμα $\frac{1}{512}$ τότε το αποτέλεσμα είναι 1 (γιατί;), επομένως το άθροισμα των κλασμάτων είναι ίσο με $1-\frac{1}{512}$ και τελικά $\Pi=1-\frac{1}{512}-1=-\frac{1}{512}$

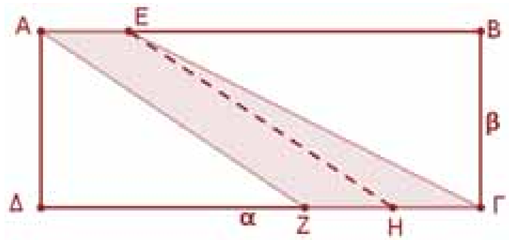
Η γενίκευση για ν κλάσματα θα είναι: $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+..........+\frac{2^{\nu}+1}{2^{\nu}}-(\nu+1)=-\frac{1}{2^{\nu}}$

**2)** Το σύμβολο ν! σημαίνει $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots\nu$, όπου ν ένα θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$.

Ο αριθμός **99!·100!** είναι τέλειο τετράγωνο καθώς **99!·100!** =
$1\cdot2\cdot3\cdots\cdots98\cdot99\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots98\cdot99\cdot100=(1\cdot2\cdot3\cdots\cdots98\cdot99)^2\cdot100$ που είναι τέλειο τετράγωνο

**3)** Ας υποθέσουμε ότι το μήκος του ορθογωνίου είναι α και το πλάτος του β. Αν Η το μέσον του του ΖΓ τότε το ΑΕΗΖ είναι παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $\frac{\alpha}{\nu}\cdot\beta$.

Το τρίγωνο ΕΗΓ έχει βάση $\frac{\alpha}{\nu}$ και ύψος β άρα το εμβαδόν του είναι $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\nu}\cdot\beta$ οπότε το εμβαδόν του σχήματος ΑΕΓΖ είναι ίσο με $\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\nu}\cdot\beta=\frac{3}{2}\frac{\alpha\cdot\beta}{\nu}=\frac{3}{2\nu}\cdot E$ όπου Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου




**4)** Ας χρησιμοποιήσουμε ορισμένα γράμματα για να περιγράψουμε με Μαθηματικό τρόπο το πρόβλημα.
Αν η ηλικία του εγγονού είναι α τότε η ηλικία του παππού θα είναι x+α, όπου α και x παριστάνουν ακέραιους θετικούς αριθμούς.
Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε ότι τα κλάσματα:
$\frac{x+\alpha}{\alpha}$, $\frac{x+\alpha+1}{\alpha+1}$, $\frac{x+\alpha+2}{\alpha+2}$, $\frac{x+\alpha+3}{\alpha+3}$, $\frac{x+\alpha+4}{\alpha+4}$, $\frac{x+\alpha+5}{\alpha+5}$ είναι ακέραιοι αριθμοί. Από αυτό προκύπτει ότι οι παραστάσεις $1+\frac{x}{\alpha}$, $1+\frac{x}{\alpha+1}$, $1+\frac{x}{\alpha+2}$, $1+\frac{x}{\alpha+3}$, $1+\frac{x}{\alpha+4}$, $1+\frac{x}{\alpha+5}$ είναι ακέραιοι αριθμοί επομένως ο αριθμός x είναι πολλαπλάσιο 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών, των α, α+1, α+2, α+3, α+4, α+5. Αυτό, για ηλικίες παιδιού και παππού, είναι εφικτό μόνο όταν οι 6 διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, δηλαδή α=1 που σημαίνει ότι ο εγγονός είναι 1 ετών και ο παππούς είναι 61 ετών αφού μόνο η τιμή x=60 ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος, καθώς ο αριθμός 60 είναι πολλαπλάσιο των 1, 2, 3, 4, 5, 6 ενώ συγχρόνως αποτελεί ¨λογική¨ τιμή για ηλικία παππού.

**5)** Στο θέμα αυτό μπορούμε να εφαρμόσουμε τη στρατηγική της αντίστροφης πορείας. Συγκεκριμένα θα αρχίσουμε από το τέλος και θα πάμε προς την αρχή. Ας υποθέσουμε ότι στον τρίτο γύρο έχασε ο Γ, τότε φαίνεται ότι έδωσε σε κάθε ένα από τους Α και Β από 12€ για να διπλασιάσουν τα χρήματά τους και επομένως να έχουν από 24€ ο καθένας. Αυτό σημαίνει ότι ο Γ έδωσε συνολικά 24€ οπότε είχε 48€ όταν άρχισε ο τρίτος γύρος, δηλαδή όταν τελείωσε ο δεύτερος γύρος.
Παρατηρήστε τον πίνακα:

| | Χρήματα του Α | Χρήματα του Β | Χρήματα του Γ |
|---|---|---|---|
| ΤΕΛΟΣ $3^{ου}$ ΓΥΡΟΥ | 24€ | 24€ | 24€ |
| ΤΕΛΟΣ $2^{ου}$ ΓΥΡΟΥ | 12€ | 12€ | 48€ |
| ΤΕΛΟΣ $1^{ου}$ ΓΥΡΟΥ | 6€ | 42€ | 24€ |
| ΑΡΧΙΚΑ | 39€ | 21€ | 24€ |

Προσπαθήστε τώρα να εξηγήσετε πως προέκυψαν τα ποσά στην προτελευταία και στην τελευταία γραμμή.

# Επαναληπτικά θέματα Γ΄ Γυμνασίου

**Αντωνόπουλος Ευάγγελος, Γκόνης Γεώργιος,**
**Κοζής Χρήστος, Μαζαράκης Αναστάσιος, Χαρίτος Μιχάλης**

**Παράρτημα Αρκαδίας**

## Προτεινόμενα θέματα επανάληψης

**Άσκηση 1:** Δίνονται τα πολυώνυμα:

- $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$
- $Q(x) = (2x - 1)P(2) - 4P(0) + x^2P(-1) - (25x^2 + 4x)P(1)$.

**α)** Να βρεθούν τα πολυώνυμα $P(x) + 2Q(x)$ και $2P(x) - Q(x)$.

**β)** Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών α, β, γ και δ, ώστε τα πολυώνυμα $Q(x)$ και $H(x) = (\alpha - 2)x^3 - (4\beta - 2)x^2 + (\gamma - 1)x + 1 - \delta$ να είναι ίσα.

**Λύση: α)** Είναι:

- $P(2) = 3.2^3 - 5.2^2 + 4.2 - 2 = 3.8 - 5.4 + 8 - 2 = 24 - 20 + 6 = 10$
- $P(0) = 3.0 - 5.0 + 4.0 - 2 = -2$
- $P(-1) = 3.(-1)^3 - 5.(-1)^2 + 4.(-1) - 2 = 3.(-1) - 5.1 - 4 - 2 = -3 - 5 - 4 - 2 = -14$
- $P(1) = 3.1^3 - 5.1^2 + 4.1 - 2 = 3 - 5 + 4 - 2 = 0$,

οπότε για το $Q(x)$ είναι:

$$Q(x) = 10(2x - 1) - 4(-2) + (-14)x^2 - 0.(25x^2 + 4x) = 20x - 10 + 8 - 14x^2 = $$
$$= -14x^2 + 20x - 2.$$

Έτσι, θα έχουμε:

- $P(x) + 2Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2 + 2.(-14x^2 + 20x - 2)$
  $= 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2 - 28x^2 + 40x - 4$
  $= 3x^3 - 33x^2 + 44x - 6$
- $2P(x) - Q(x) = 2.(3x^3 - 5x^2 + 4x - 2) - (-14x^2 + 20x - 2)$
  $= 6x^3 - 10x^2 + 8x - 4 + 14x^2 - 20x + 2$
  $= 6x^3 + 4x^2 - 12x - 2$

**β)** Έχουμε το πολυώνυμο $H(x) = (\alpha - 2)x^3 - (4\beta - 2)x^2 + (\gamma - 1)x + 1 - \delta$ και το
$$Q(x) = -14x^2 + 20x - 2.$$

Για να είναι ίσα θα πρέπει:

$Q(x) = H(x)$

$-14x^2 + 20x - 2 = (\alpha - 2)x^3 - (4\beta - 2)x^2 + (\gamma - 1)x + 1 - \delta$

$0x^3 - 14x^2 + 20x - 2 = (\alpha - 2)x^3 - (4\beta - 2)x^2 + (\gamma - 1)x + 1 - \delta$

$\alpha - 2 = 0$ και $-(4\beta - 2) = -14$ και $\gamma - 1 = 20$ και $1 - \delta = -2$

$\alpha = 2$ και $4\beta - 2 = 14$ και $\gamma = 21$ και $\delta = 3$

$\alpha = 2$ και $\beta = 4$ και $\gamma = 21$ και $\delta = 3$

**Άσκηση 2:** Αν για τους αριθμούς α, β και γ ισχύουν:

- οι α, β είναι αντίστροφοι
- $\alpha + \beta = -2$
- $\gamma = \alpha^3 + \beta^3$,

να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $K = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

**Λύση:** Οι α, β είναι αντίστροφοι, επομένως θα είναι $\alpha.\beta = 1$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\alpha + \beta = -2$, οπότε θα είναι:

$$(\alpha+\beta)^2 = (-2)^2$$
$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 4$$
$$\alpha^2 + 2.1 + \beta^2 = 4$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 2$$

Είναι και:

$$(\alpha + \beta)^3 = (-2)^3$$
$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = -8$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -8$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + 3.1.(-2) = -8$$
$$\alpha^3 + \beta^3 - 6 = -8$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = -2$$
$$\gamma = -2$$

οπότε η παράσταση θα γίνει $K = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2 + (-2)^2 = 2 + 4 = 6$

**'Άσκηση 3:** **α)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A = (\alpha^2 + 2\alpha)(\alpha^2 + 2\alpha + 2) + 1$.

**β)** Αν α είναι η λύση της εξίσωσης $A = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \dfrac{x+\alpha}{x^2-9} + \alpha\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+\alpha-1}{3-x}$.

**Λύση:** **α)** Θέτουμε $\alpha^2 + 2\alpha = \omega$ και η παράσταση γίνεται:

$$A = (\alpha^2 + 2\alpha)(\alpha^2 + 2\alpha + 2) + 1$$
$$A = \omega(\omega + 2) + 1$$
$$A = \omega^2 + 2\omega + 1$$
$$A = (\omega + 1)^2$$
$$A = (\alpha^2 + 2\alpha + 1)^2$$
$$A = [(\alpha + 1)^2]^2$$
$$A = (\alpha + 1)^4$$

**β)** Είναι $A = 0$, δηλ. $(\alpha + 1)^4 = 0$, οπότε $\alpha + 1 = 0$ και έτσι $\alpha = -1$. Για $\alpha = -1$, έχουμε:

$$K = \frac{x+\alpha}{x^2-9} + \alpha\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+\alpha-1}{3-x} \text{ άρα } K = \frac{x-1}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} - \frac{x-2}{3-x} \text{ οπότε}$$

$$K = \frac{x-1}{(x-3)(x+3)} - \frac{x-3}{x+3} + \frac{x-2}{x-3} \text{ άρα } K = \frac{x-1}{(x-3)(x+3)} - \frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$K = \frac{x-1-(x-3)^2+(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-1-x^2+6x-9+x^2+x-6}{(x-3)(x+3)} = \frac{8x-16}{(x-3)(x+3)} = \frac{8(x-2)}{(x-3)(x+3)}$$

**Άσκηση 4:** **α)** Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

$$\alpha = \frac{4-x}{4+x}.\frac{x^2+8x+16}{x^2-16} \text{ και } \beta = \frac{16x^3-4x}{4x^2-4x+1} : \frac{32x^3+32x^2+8x}{8x^2-2}$$

**β)** Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο παραπάνω ερώτημα, να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- $A = (2\beta + \alpha)x^2 + 25\alpha$
- $B = x^2 + (\alpha + 5\beta)x\psi + (3\beta - \alpha)\psi^2 - 16$.

**Λύση: α)** Είναι:

$$\alpha=\frac{4-x}{4+x}\cdot\frac{x^2+8x+16}{x^2-16}=\frac{-(x-4)}{x+4}\cdot\frac{(x+4)^2}{(x-4)(x+4)}=\frac{-(x-4).(x+4)^2}{(x+4)^2(x-4)}=-1$$

και

$$\beta=\frac{16x^3-4x}{4x^2-4x+1}:\frac{32x^3+32x^2+8x}{8x^2-2}=\frac{4x(4x^2-1)}{(2x-1)^2}:\frac{8x(4x^2+4x+1)}{2(4x^2-1)}=$$

$$=\frac{4x(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)^2}:\frac{8x(2x+1)^2}{2(2x-1)(2x+1)}=\frac{4x(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)^2}\cdot\frac{2(2x-1)(2x+1)}{8x(2x+1)^2}=\frac{8x(2x-1)^2(2x+1)^2}{8x(2x-1)^2(2x+1)^2}=1$$

**β)** Για α = –1, β = 1, οι παραστάσεις γίνονται $A = x^2 - 25$ και $B = x^2 - 4x\psi + 4\psi^2 - 16$.
Έτσι, θα έχουμε:

- $A = x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$
- $B = x^2 - 4x\psi + 4\psi^2 - 16 = (x - 2\psi)^2 - 4^2 = (x - 2\psi - 4)(x - 2\psi + 4)$

## Άσκηση 5

Δίνεται η εξίσωση: $(x+1)^2 + (x-2)^2 = (3-x)^2 + x - x^2 - 2$

**α)** Να φέρετε την εξίσωση στη μορφή: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

**β)** Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα

**γ)** Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

**Λύση**

**α)** $x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = 9 - 6x + x^2 + x - x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$

**β)** $\Delta = 25$

**γ)** $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm5}{4}$ οπότε $x_1=\dfrac{1}{2}$ και $x_2 = -2$

## Άσκηση 6

Δίνονται οι παραστάσεις:

$\alpha= |-5|+|-3|-|-2|-|1|$

$\beta= 3\cdot[\,2\cdot(5-3\cdot2) +18: (9-12:4)]$

$\gamma= 2^{-1}\cdot10 - (-2)^2 - (-1)^{2021}$

**α)** Να υπολογιστούν οι παραστάσεις α, β, γ

**β)** Να λυθεί η εξίσωση $\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$

**Λύση**

**α)** $\alpha= 5 +3-2-1 =5$, $\beta= 3\cdot[2\cdot(5-6) +18: (9-3)]= 3\cdot[2\cdot(-1) + 18:6]=3\cdot(-2 + 3) =3\cdot1=3$

$\gamma= \frac{1}{2}\cdot 10- 4-(-1)= 5 - 4 + 1= 2$

**β)** $5x^2 - 3x - 2 = 0$. $\Delta= 49$ άρα $x_{1,2}=\dfrac{3\pm7}{10}$ οπότε $x_1 = 1$ και $x_2 = -\dfrac{2}{5}$

## Άσκηση 7

Δίνονται οι παραστάσεις : $A=(x-1)^2+2\cdot(x+3)+(x-1)\cdot(x+1)$, $B=(-x-1)^2-3\cdot(x-2)+1$

**α)** Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις Α,Β

**β)** Να λυθεί η εξίσωση Α = Β

**γ)** Να λυθεί η ανίσωση $A > 2B - 3\chi + 5$ και να παραστήσετε τις λύσεις της ανίσωσης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

**Λύση**

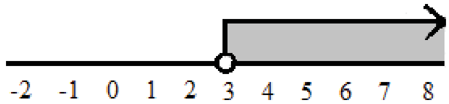
**α)** $A= x^2\ - 2x +1 +2x + 6 + x^2 - 1= 2x^2 +6$

$B= x^2+ 2x +1- 3x + 6 + 1= x^2- x +8$

**β)** $A=B \Leftrightarrow 2x^2 + 6 = x^2 - x + 8 \Leftrightarrow x^2 + x -2 =0$

$\Delta=9$ άρα $\chi_{1,2} = \dfrac{-1\pm 3}{2}$ οπότε $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$

**γ)** $2x^2 + 6 > 2x^2 - 2x +16 - 3x + 5 \Leftrightarrow 5x > 15 \Leftrightarrow x > 3$




**Άσκηση 8**

Δίνεται η παράσταση $A=(3x-1)^2 -(2x+1)\cdot(2x-1)-1$

**α)** Να δείξετε ότι $A= 5x^2- 6x +1$

**β)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Α

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση $A= x^2 + x - 2$

**δ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του χ ορίζεται η παράσταση Β $B=\dfrac{25x^2-x}{A}$ και στην συνέχεια να την απλοποιήσετε.

**Λύση**

**α)** $A= 9x^2 - 6x + 1 - 4x^2 +1 -1= 5x^2 -6x +1$

**β)** $\Delta=16$ άρα $x_{1,2} = \dfrac{6\pm 4}{10}$ οπότε $x_1 = 1$ και $x_2 = \dfrac{1}{5}$

Άρα $A=5\cdot(x-1)\cdot(x-\frac{1}{5}) = (x-1)\cdot(5x-1)$

**γ)** $A= x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 1= x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 7x + 3 = 0$

$\Delta=1$ άρα $x_{1,2} = \dfrac{7\pm 1}{8}$ οπότε $x_1 = 1$ και $x_2 = \dfrac{3}{4}$

**δ)** Πρέπει $A \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(5x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq \dfrac{1}{5}$

$$B=\frac{25x^3-x}{(x-1)\cdot(5x-1)}=\frac{x\cdot(25x^2-1)}{(x-1)\cdot(5x-1)}=\frac{x(5x-1)\cdot(5x+1)}{(x-1)\cdot(5x-1)}=\frac{x\cdot(5x+1)}{x-1}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

**Άσκηση 1:** Δίνονται τα πολυώνυμα:

- $P(x) = (\alpha - 2)x^3 - 2x^2 - 4x + 5$
- $Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + (\beta - 1)x - \gamma + 4$.

**α)** Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$.

**β)** Για $\alpha \neq 2$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β και γ, ώστε να είναι $P(x) = 2Q(x)$

**γ)** Για $\alpha = 2$, να βρείτε το πολυώνυμο $H(x) = 2Q(2x) - 5Q(x) - 2P(1 - x)$.

**Άσκηση 2:** **α)** Να δείξετε ότι η παράσταση $(x-1)(x+1) - (x-2)(x+2) + 9$ είναι ανεξάρτητη του x.

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις α – 2, 3α + 4, όπου α = 9 + 2022.2020 – 2019.2023.

**Άσκηση 3:** **α)** Να απλοποιήστε τις παραστάσεις:

$$A=\frac{2x(x+3)+x^2-9}{x^3+3x^2+2x+6},\ B=\frac{5x^2-4x}{3x^2+6x}\ ,\ \Gamma=\frac{x^3+x^2+2x+2}{4x^3-4x}$$

**β)** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις Α + Β και 3ΑΓ.

**Άσκηση 4**

**α)** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι α + β = 2αβ = 2, να υπολογίσετε την τιμή του αριθμού $\gamma = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2$.

**β)** Αν έχουμε το πολυώνυμο $P(x) = (1 - \gamma)x^3 - 2x^2 + x - 5$, όπου γ είναι ο αριθμός που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε τον αριθμό δ = P(2) – 3P(–1)

**Άσκηση 5**

Να λυθεί η εξίσωση: $(-2x-3)^2+(-x+5)(-x-5)=(x-1)(x+1)+x$

**Άσκηση 6**

Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{2x+3}{6}-\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{x^2+1}{3}$

**Άσκηση 7**

Δίνονται οι παραστάσεις $A = x^2 - x$, $B = x^2 - 3x + 2$ , $\Gamma = x^2 + 4x + 4$

**α)** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις Α, Β ,Γ

**β)** Να λυθεί η εξίσωση $A+B+\Gamma = 2x^2 + 3x + 10$

**γ)** Αν α η θετική ρίζα και β η αρνητική ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης , να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x-\beta y=1 \\ \alpha x+3y=\alpha+5\beta \end{cases}$$

**Άσκηση 8**

**α)** Να λύσετε την εξίσωση $10x^2 + 3x - 4 = 0$

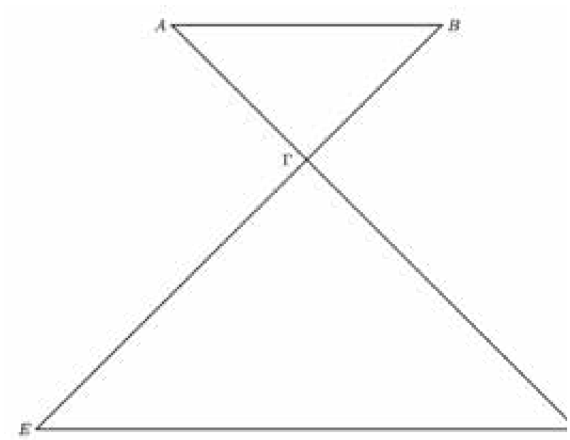
**β)** Αν η μία ρίζα της παραπάνω εξίσωσης είναι ίση με συνθ (90°<θ<180°), να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημθ, εφθ

**γ)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\dfrac{10\cdot \sigma\upsilon\nu\left(180^{o}-\theta\right)-20\cdot \eta\mu\theta}{4\varepsilon\varphi\ (180^{o}-\theta)}$

**Άσκηση 9**

Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι:

$AB \parallel E\Delta,\ \ AB = 6cm,\ \ E\Delta = 12cm,\ \ B\Gamma = (x+2),\ \ \Gamma E = ($




**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΔ είναι όμοια.

**β)** Να γράψετε τους ίσους λόγους των πλευρών και να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων.

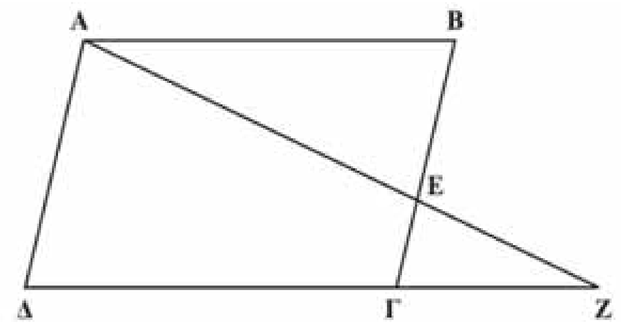
**γ)** Να υπολογιστεί το $x$.

### Άσκηση 10

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΕ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Αν ισχύει ότι $\sigma A\Delta = 3cm$ και $AZ = 12cm$, να βρεθεί η ΑΒ.

### Άσκηση 11

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ για το οποίο ισχύει ότι $A\Delta = 18cm$. Θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $E\Gamma = 6cm$ και $EZ = 13cm$



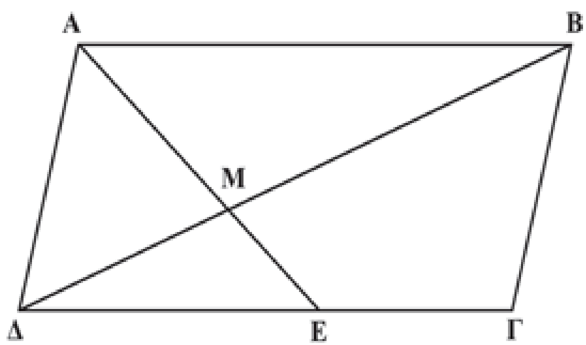

Να βρεθεί η απόσταση ΕΑ.

### Άσκηση 12

Να αποδείξετε ότι: **α)** $\eta\mu^2x + \eta\mu^2x \cdot \varepsilon\varphi^2x = \varepsilon\varphi^2x$. **β)** $\eta\mu^2x + \varepsilon\varphi^2x = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^4x}{\sigma\upsilon\nu^2x}$.

### Άσκηση 13

Στο διπλανό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ότι ΜΒ = 2ΜΔ και ΔΕ=4.




**α)** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΔΜΕ είναι όμοια και αφού γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν να βρείτε τον λόγο ομοιότητας.

**β)** Να υπολογιστεί η πλευρά ΔΓ.

### Άσκηση 14

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και ΑΔ το ύψος του.

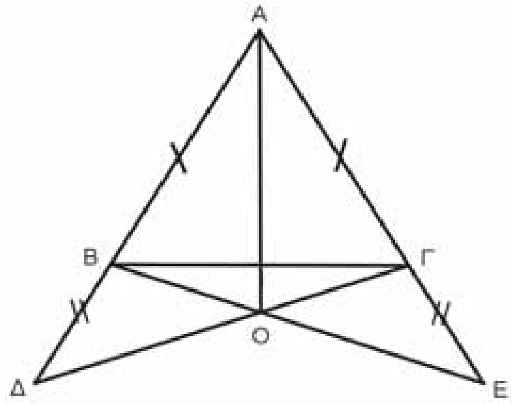
**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν.

**β)** Αν $AB = 8cm$ και $B\Delta = 6,4cm$ να βρείτε το μήκος της ΒΓ.

**Άσκηση 15**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ .

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντιστοίχως τμήματα ΒΔ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι :




**α)** Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα .

**β)** Τα τρίγωνα ΒΔΟ και ΓΕΟ είναι ίσα .

**γ)** Η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ .

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1
## ΘΕΩΡΙΑ

### ΘΕΜΑ $1^{o}$

**α)** Πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα ;

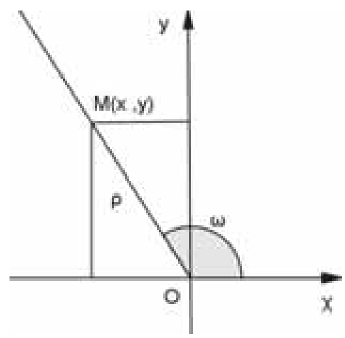
**β)** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ .

**γ)** Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες : i) $(\alpha-\beta)^2 =$

ii) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=$

### ΘΕΜΑ $2^{o}$

**α)** Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.




**β)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 .$$

## Β΄ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ $1^{o}$

Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} \dfrac{7\kappa+\lambda}{3}-\dfrac{\lambda-1}{2}=\kappa+3 \\[2ex] \dfrac{\kappa}{2}-\dfrac{9\lambda-1}{4}=1-\kappa \end{cases}$$

**α)** Να δείξετε ότι το σύστημα μπορεί να πάρει τη μορφή : $\begin{cases} 8\kappa-\lambda=15 \\ 6\kappa-9\lambda=3 \end{cases}$

**β)** Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 8\kappa-\lambda=15 \\ 6\kappa-9\lambda=3 \end{cases}$

**γ)** Για $\kappa=2$ και $\lambda=1$ να λύσετε την εξίσωση : $3x^2-\kappa x=\lambda+4$ .

### ΘΕΜΑ 2$^o$

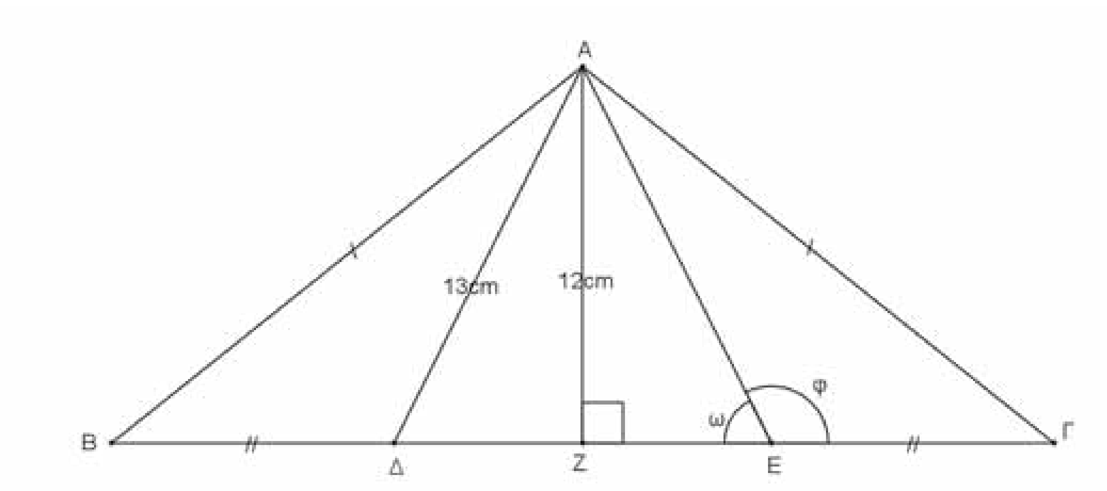
Δίνονται οι παραστάσεις : $A=\dfrac{x}{2x^2-6x+4}$, $B=\dfrac{3x}{6x-6}$ και $\Gamma=\dfrac{2}{4-2x}$.

**α)** Να παραγοντοποιήσετε τους παρανομαστές των παραστάσεων Α, Β και Γ.

**β)** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις Α, Β και Γ.

**γ)** Να δείξετε ότι :$A+B+\Gamma=\dfrac{1}{2}$

### ΘΕΜΑ 3$^o$




Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ και $AZ\perp B\Gamma$ .
Ακόμη είναι ΒΔ=ΕΓ, ΑΔ= 13cm και ΑΖ= 12cm .

**α)** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα .

**β)** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΖΕ είναι ίσα.

**γ)** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$ .

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2
## Α΄ ΘΕΩΡΙΑ

### ΘΕΜΑ 1$^o$

**α)** Πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα ;

**β)** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ .

**γ)** Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες :

i) $(\alpha-\beta)^2=$
ii) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=$

**ΘΕΜΑ 2$^{o}$**

**α)** Να γράψετε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

**β)** Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα ;

## Β΄ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1$^{o}$**

Δίνεται η παράσταση : $A=(3x-2)^2-(2x+5)^2-(3x+4)(3x-4)+20x$ .

**α)** Να δείξετε ότι $A=-4x^2-12x-5$

**β)** Να λύσετε την εξίσωση $A=0$ .

**γ)** Για $\kappa=-\dfrac{5}{2}$ και $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} \kappa x-\lambda y=4 \\ 4\kappa x-3y=1 \end{cases}$$

**ΘΕΜΑ 2$^{o}$**

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{x^2+2x}{2x^2-8} \quad \text{και} \quad B=\frac{2x-4}{x^3-4x^2+4x}\ .$$

**α)** Για ποιες τιμές του $x$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β.

**β)** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β .

**γ)** Να δείξετε ότι $A-B=\dfrac{x+2}{2x}$ .

**ΘΕΜΑ 3$^{o}$**

Δίνεται αμβλεία γωνία ω για την οποία ισχύει

$$\eta\mu\omega=\frac{4}{5}\ .$$

**α)** Να υπολογίσετε το συνω και την εφω .

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{5\ \eta\mu\omega\ -\ 3\ \varepsilon\varphi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\ .$$

**γ)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

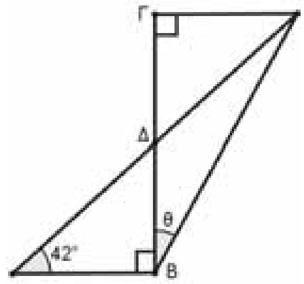
$$B=\frac{\sigma\upsilon\nu(180^{o}-\omega)\ -\ \eta\mu(180^{o}-\omega)}{\varepsilon\varphi(180^{o}-\omega)}$$

# Γ΄ Γυμνασίου
# Προχωρημένα θέματα για όλους.

**Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου**

**1)** Να υπολογίσετε τις τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού α που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}}=5$$




**2)** Στο σχήμα να υπολογίσετε την εφθ αν είναι γνωστό ότι ΒΔ=ΔΓ

**3)**Δίνεται η παράσταση $Π=\dfrac{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^6-\left(\alpha^6+\frac{1}{\alpha^6}\right)-2}{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right)}$ όπου α είναι θετικός ακέραιος. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση Π καθώς μεταβάλλεται ο α;

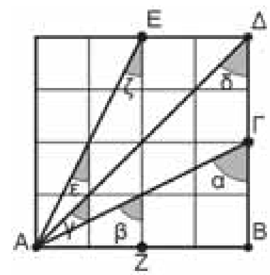
**4)** Αν α–7β+8γ=4 και 8α+4β–γ=7 να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2$.

**5)** Παρατηρείστε ότι:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ και $4^2+3^2=5^2$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ και $8^2+15^2=17^2$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35}$ και $12^2+35^2=37^2$

Με βάση τις παραπάνω ισότητες να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα που φαίνεται να ισχύει και να τον αποδείξετε.

## Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 119




**1)** Αρχικά οι γωνίες δ και γ είναι ίσες με $45^0$ η καθεμία. Ακόμη έχουμε α=β και ζ=ε. Σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΕ και ΓΒΑ είναι ίσα (γιατί;) επομένως $ζ+α=ε+β=90^0$. Με βάση τα παραπάνω $α+β+γ+δ+ε+ζ=270^0$.

**2)** $Π=\dfrac{(x^2-y^2)^2}{(1-x^2)(y^2-1)}+\dfrac{(1-x^2)^2}{(x^2-y^2)(y^2-1)}+\dfrac{(y^2-1)^2}{(x^2-y^2)(1-x^2)}=\dfrac{(x^2-y^2)^3+(1-x^2)^3+(y^2-1)^3}{(1-x^2)(y^2-1)(x^2-y^2)}$ αφού το Ε.Κ.Π των παρονομαστών είναι η παράσταση $(1-x^2)(y^2-1)(x^2-y^2)$.

Το να εκτελέσουμε τις πράξεις είναι πολύ επίπονο και βαρετό και επιπλέον δεν αξιοποιούμε την άσκηση του σχολικού βιβλίου, σύμφωνα με την οποία αν α+β+γ=0 τότε ισχύει $α^3+β^3+γ^3=3αβγ$. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $x^2–y^2=α$, $1–x^2=β$ και $y^2–1=γ$ τότε α+β+γ=0 άρα $α^3+β^3+γ^3=3αβγ$ και επομένως $(x^2-y^2)^3+(1-x^2)^3+(y^2-1)^3=3(x^2-y^2)(1-x^2)(y^2-1)^3$ δηλαδή

$$\Pi=\frac{3(x^2-y^2)(1-x^2)(y^2-1)}{(1-x^2)(y^2-1)(x^2-y^2)}=3$$

**3)** Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των παιδιών ήταν x και το ποσό των χρημάτων σε ευρώ ήταν α. Με βάση τα δεδομένα αρχικά κάθε παιδί θα έπρεπε να πάρει $\frac{\alpha}{x}$ €, άρα για 6 λιγότερα θα έπρεπε να πάρει κάθε παιδί $\frac{\alpha}{x-6}$ € ενώ για 8 λιγότερα κάθε παιδί θα έπρεπε να πάρει $\frac{\alpha}{x-8}$ €.

Όμως $\frac{\alpha}{x-6}=\frac{\alpha}{x}+1$ και $\frac{\alpha}{x-8}=\frac{\alpha}{x}+1{,}5$ από τις οποίες προκύπτουν οι σχέσεις:

$x^2-6x-6\alpha=0$ και $1{,}5\cdot x^2-12x-8\alpha=0$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει το σύστημα:

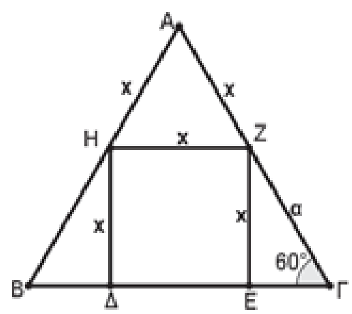
$\left.\begin{array}{l} 4x^2-24x-24\alpha=0 \\ 4{,}5\cdot x^2-36x-24\alpha=0 \end{array}\right\}$ από όπου με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση $0{,}5\cdot x^2-12x=0$ ή

$x\cdot(0{,}5x-12)=0$ άρα $x=24$ και επομένως $\alpha=72$€.

**4)** Από τη σχέση $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta}$ έχουμε $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta}$ από όπου προκύπτει $(\alpha+\beta)^2=\alpha\cdot\beta$ άρα $\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2=\alpha\cdot\beta$ και επομένως $\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2=0$.

Ας προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε τετράγωνα αριθμών και παραστάσεων.
$\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2=0$ άρα $2\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+2\beta^2=0$ επομένως $\alpha^2+(\alpha+\beta)^2+\beta^2=0$ που σημαίνει ότι θα πρέπει $\alpha=\beta=0$ πράγμα αδύνατον.

**5) α)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΖ έχουμε $\eta\mu 60^0=\frac{x}{\alpha}$ άρα $\frac{x}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και επομένως $\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ οπότε η πλευρά ΑΓ του ισοπλεύρου είναι ίση με $x+\frac{2\sqrt{3}}{3}x=(1+\frac{2\sqrt{3}}{3})x$

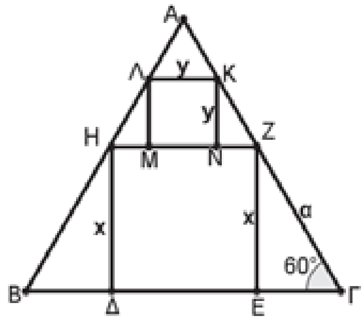



**β)** Αν εργαστούμε όμοια, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, για το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΗΖ και το τετράγωνο πλευράς y που είναι εγγεγραμμένο σε αυτό θα έχουμε ότι η πλευρά

$AZ=(1+\frac{2\sqrt{3}}{3})y$, όμως η πλευρά ΑΖ=x.

Συνοψίζοντας $A\Gamma=(1+\frac{2\sqrt{3}}{3})x=(1+\frac{2\sqrt{3}}{3})(1+\frac{2\sqrt{3}}{3})y$

Τελικά $A\Gamma=\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot y$. Εδώ τώρα δημιουργείται η πεποίθηση ότι έχουμε ανακαλύψει έναν γενικό τύπο. Μπορείτε να τον διατυπώσετε;



## ΘΑΛΗΣ 2020-21

## Συμπληρωματικός

## Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

**Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακέραιου 707070 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 707070 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε τον έβδομο στη σειρά διαιρέτη.** ***Μονάδες 6***

**Λύση:** Με παραγοντοποίηση του αριθμού 707070 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε:

$$707070 = 70\cdot\left(10^4+10^2+1\right) = 70\cdot 10101 = 2\cdot 5\cdot 7\cdot 3\cdot 3367 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13\cdot 37\,.$$

Σε κάθε διαιρέτης $\delta_\kappa$ του 707070 που το τετράγωνό του είναι μικρότερο ή ίσο του 707070, αντιστοιχεί ένα άλλος διαιρέτης $\delta_\lambda$ μεγαλύτερος ή ίσος του $\delta_\kappa$, με $\delta_\kappa\cdot\delta_\lambda = 707070$. Έτσι στο μικρότερο διαιρέτη 1, αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος διαιρέτης 707070, στο διαιρέτη 2, αντιστοιχεί ο διαιρέτης $707070:2=353535$ και συνεχίζοντας ομοίως με τους μικρότερους διαιρέτες $3,\ 5,\ 2\cdot 3,7$ θα φθάσουμε στον έβδομο στη σειρά μικρότερο διαιρέτη $2\cdot 5=10$. Έτσι ο έβδομος μεγαλύτερος διαιρέτης είναι ο $707070:10=70707$.

**Πρόβλημα 2**

**Σε μία γιορτή ένας αριθμός ζευγαριών που αποτελούνται από ένα αγόρι και ένα κορίτσι χορεύουν. Από τα κορίτσια που συμμετέχουν στη γιορτή χορεύουν τα $\frac{2}{3}$, ενώ από τα αγόρια που συμμετέχουν χορεύουν τα $\frac{3}{5}$. Να βρείτε το ποσοστό των συμμετεχόντων στη γιορτή που χορεύουν.** ***Μονάδες 7***

**Λύση:** Έστω ότι συμμετέχουν στη γιορτή $\kappa$ κορίτσια και α αγόρια. Τότε χορεύουν τα $\frac{2\kappa}{3}$ των κοριτσιών και τα $\frac{3\alpha}{5}$ των αγοριών και ισχύει ότι: $\frac{2\kappa}{3}=\frac{3\alpha}{5}\Leftrightarrow \kappa=\frac{9\alpha}{10}$.

Ο αριθμός των παιδιών που χορεύουν είναι $2\cdot\frac{3\alpha}{5}=\frac{6\alpha}{5}$, ενώ ο συνολικός αριθμών παιδιών που συμμετέχουν στη γιορτή είναι $\kappa+\alpha=\frac{9\alpha}{10}+\alpha=\frac{19\alpha}{10}$, οπότε έχουμε:

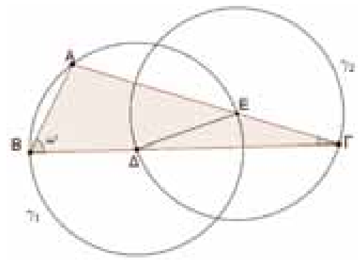
$$\frac{\text{Αριθμός παιδιών που χορεύουν}}{\text{Αριθμός παιδιών που συμμετέχουν}}=\frac{\frac{6\alpha}{5}}{\frac{19\alpha}{10}}=\frac{12}{19}\,.$$

Επομένως το ποσοστό $x$ επί τις εκατό των παιδιών που χορεύουν είναι:

$$\frac{x}{100}=\frac{12}{19}\Leftrightarrow 19x=1200\Leftrightarrow x=\frac{1200}{19}=63{,}15$$

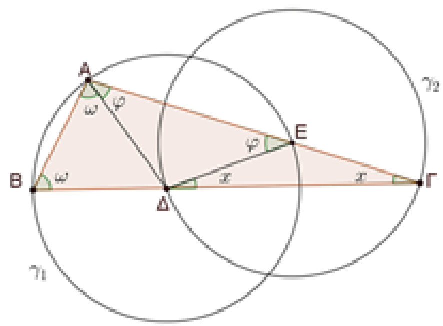
### Πρόβλημα 3

**Στο διπλανό σχήμα το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ και το σημείο Ε ανήκει στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία Α, Β, Ε ανήκουν στον κύκλο $\gamma_1$ με κέντρο το σημείο Δ. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στον κύκλο $\gamma_2$ με κέντρο το σημείο Ε. Αν η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\omega = 63^0$ μοιρών, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.**




*Μονάδες 7*

**Λύση:**




Σχήμα 1

Από τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε ότι $\Delta B = \Delta A = \Delta E = E\Gamma$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΕ και ΕΔΓ είναι ισοσκελή με $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{B}A = \omega$, $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{E}A = \varphi$ και $E\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = x$.

Επειδή η γωνία $\Delta\hat{E}A = \varphi$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΔΓ έπεται ότι $\varphi = 2x$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ που το άθροισμα των τριών γωνιών του είναι $180^0$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow \omega + \varphi + \omega + x = 180^0 \overset{\varphi=2x}{\Rightarrow} 2\omega + 3x = 180^0$$

$$\Rightarrow 3x = 180^0 - 2\omega \Rightarrow x = 60^0 - \frac{2\omega}{3} \Rightarrow x = 60^0 - \frac{2\cdot 63}{3} = 18^0.$$

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

**Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακέραιου 4654650 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 4654650 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε το δέκατο στη σειρά διαιρέτη.** *Μονάδες 6*

**Λύση:** Με παραγοντοποίηση του αριθμού 4654650 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε:

$$4654650 = 10\cdot 465\cdot\left(10^3+1\right) = 10\cdot 465\cdot 1001 = 2\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 31\cdot 11\cdot 7\cdot 13 = 2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 31$$

Σε κάθε διαιρέτης $\delta_\kappa$ του 4664650 που το τετράγωνό του είναι μικρότερο ή ίσο του 4654650, αντιστοιχεί ένα άλλος διαιρέτης $\delta_\lambda$ μεγαλύτερος ή ίσος του $\delta_\kappa$, με $\delta_\kappa \cdot \delta_\lambda = 4654650$. Έτσι στο μικρότερο διαιρέτη 1, αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος διαιρέτης 4654650, στο διαιρέτη 2, αντιστοιχεί ο διαιρέτης $4654650 : 2 = 2327325$ και συνεχίζοντας ομοίως με τους μικρότερους διαιρέτες $3,\ 5,\ 2\cdot 3, 7, 2\cdot 5, 11,\ 13,$ θα φθάσουμε στον δέκατο στη σειρά μικρότερο διαιρέτη $2\cdot 7 = 14$. Έτσι ο δέκατος μεγαλύτερος διαιρέτης είναι ο $4654650 : 14 = 332475$.

### Πρόβλημα 2

**(α) Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός y έτσι ώστε η διαφορά $x - y$ να ισούται με το γινόμενο $xy$.**

**(β) Αν οι x, y ικανοποιούν τις συνθήκες του ερωτήματος (α), να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης** $A = \dfrac{y\left(x^2+2\right)}{x(y+1)}$. *Μονάδες 7*

**Λύση (α)** Έχουμε

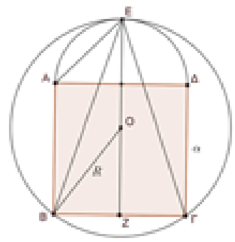
$$x - y = xy \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x = y(1+x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x}.$$

Επομένως, για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $y = \dfrac{x}{1+x}$ έτσι ώστε η διαφορά $x - y$ να ισούται με το γινόμενο $xy$.

**(β)** Αντικαθιστώντας το *y*, παίρνουμε $A = \dfrac{y\left(x^2+2\right)}{x(y+1)} = \dfrac{\dfrac{x}{x+1}\cdot(x^2+2)}{x\cdot\dfrac{2x+1}{x+1}} = \dfrac{x^2+2}{2x+1}$.

Όμως $x^2+2 \geq 2x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, και επομένως $A \geq 1$. Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $x = 1$ και $y = \dfrac{1}{2}$. Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α είναι 1.

**Πρόβλημα 3**



**Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $\alpha$. Το ημικύκλιο ΑΕΔ έχει διάμετρο την πλευρά ΑΔ του τετραγώνου και ο κύκλος γ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ΟΒ = ΟΓ = ΟΕ = R εφάπτεται εσωτερικά με το ημικύκλιο στο σημείο Ε που είναι το μέσο του ημικυκλίου. Δίνεται ακόμη ότι η ΕΖ είναι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Να εκφράσετε το μήκος της ακτίνας R του κύκλου γ ως συνάρτηση της πλευράς α και να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ, ως συνάρτηση του α.** *Μονάδες 7*

**Λύση:** Επειδή ΕΖ μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ και $OB = O\Gamma$ η ευθεία ΕΖ περιέχει και το σημείο Ο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΖ έχουμε ότι $.BZ = \dfrac{\alpha}{2}$, $OB = R$ , οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$OZ^2 = R^2 - \frac{\alpha^2}{4} \qquad (1)$$

Έστω Η το σημείο που τέμνει την πλευρά ΑΔ η ευθεία ΕΖ. Τότε, αφού ΕΑ = ΕΔ, το Η θα είναι το μέσο της ΑΔ και $HE = HA = \dfrac{\alpha}{2}$. Επειδή τα σημεία Ε, Ο και Ζ είναι συνευθειακά και το Ο βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ε και Ζ έχουμε ότι:

$$ZE = ZH + HE = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2} \qquad (2)$$

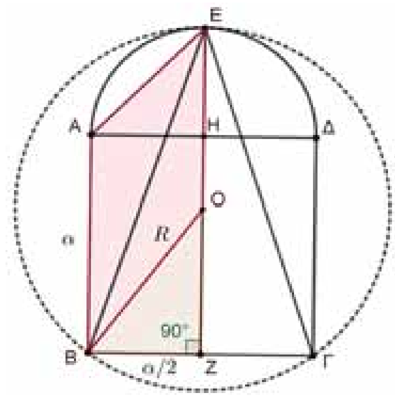
$$OZ = EZ - EO = EZ - R \overset{(2)}{=} \frac{3\alpha}{2} - R \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$\left(\frac{3\alpha}{2} - R\right)^2 = R^2 - \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \frac{9a^2}{4} - 3\alpha R + R^2 = R^2 - \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \frac{10\alpha^2}{4} = 3\alpha R \Leftrightarrow R = \frac{5\alpha}{6}.$$

Επειδή $EZ \parallel AB$ το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι τραπέζιο, οπότε έχουμε:

$$(ABOE)=\left(\frac{AB+EO}{2}\right)\cdot AZ=\left(\frac{\alpha+R}{2}\right)\cdot\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{\alpha+\frac{5a}{6}}{2}\right)\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{11\alpha^2}{24}.$$




Σχήμα 2

## Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 119

**Α67. Αν $x,y,z$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x^2+y^2+z^2=2$, να αποδείξετε ότι: $x+y+z\le xyz+2$.** **Ρουμανία 2019**

**Λύση.** Έχουμε ότι $2xy\le x^2+y^2\le x^2+y^2+z^2=2$, οπότε: $x^2+y^2\le 2$ και $xy\le 1$. (1)

Από την ανισότητα Cauchy – Schwarz προκύπτει ότι:

$$(x+y+z-xyz)^2=\left((x+y)+z(1-xy)\right)^2\le\left((x+y)^2+z^2\right)\left(1+(1-xy)^2\right)$$

$$\overset{\text{υπόθεση}}{=}(2+2xy)\left(2-2xy+x^2y^2\right)=4+2x^2y^2(xy-1)\overset{(1)}{\le}4.$$

**Ν43. Βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους $\alpha,\beta$ με $(\alpha,\beta)=1$ (πρώτοι μεταξύ τους), που ικανοποιούν την εξίσωση: $\alpha^2+\beta=(\alpha-\beta)^3$.** **Ρουμανία 2019**

**Λύση.** Έστω $\gamma=\alpha-\beta$, οπότε $\gamma\in\mathbb{Z}$, $\gamma\ge 2$ και $.\alpha=\beta+\gamma,$ οπότε με αντικατάσταση η δεδομένη εξίσωση γίνεται: $(\beta+\gamma)^2+\beta=\gamma^3\Leftrightarrow\beta^2+2\beta\gamma+\beta+\gamma^2=\gamma^3\Rightarrow\gamma\,|\,\beta^2+\beta=\beta(\beta+1)\overset{(\beta,\gamma)=1}{\Rightarrow}\gamma\,|\,\beta+1$.

Ομοίως προκύπτει ότι $\beta\,|\,\gamma^3-\gamma^2=\gamma^2(\gamma-1)\overset{(\beta,\gamma)=1}{\Rightarrow}\beta\,|\,\gamma-1,\ \gamma-1>0$.

Άρα έχουμε: $\gamma\le\beta-1$ και $\beta\le\gamma-1\Rightarrow\beta=\gamma-1$, οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται:

$4\gamma^3-3\gamma=\gamma^3\Leftrightarrow\gamma(\gamma-1)(\gamma-3)=0\overset{\gamma\ge 2}{\Leftrightarrow}\gamma=3$, οπότε έχουμε τελικά $\alpha=5,\ \beta=2$.

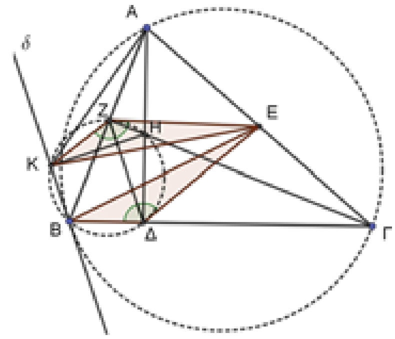
**Γ47. Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε την εφαπτομένη δ του περιγεγραμμένου του κύκλου γ στο σημείο Β. Η κάθετη από το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ προς την ευθεία δ την τέμνει στο σημείο Κ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΕ είναι ισοσκελές.** **Ρουμανία 2019**

**Λύση** Υποθέτουμε ότι $AB<A\Gamma$ (ομοίως εργαζόμαστε, αν ΑΒ>ΑΓ). Θεωρούμε τα ύψη ΑΔ και ΓΖ. Τότε το τετράπλευρο ΒΔΖΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο διαμέτρου ΒΗ στον οποίο ανήκει και το σημείο Κ, αφού $B\hat{K}H=90^0$, και επίσης το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι εγγράψιμο, οπότε: $B\hat{Z}\Delta=\hat{\Gamma}=K\hat{B}A$, Επομένως το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΚΒΔΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Επιπλέον, τα τμήματα ΖΕ και ΔΕ είναι διάμεσοι στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΔΓ, οπότε

$ZE=\Delta E=\dfrac{A\Gamma}{2}$. Άρα τα τρίγωνα ΕΖΚ και ΕΔΒ είναι ίσα, αφού έχουν ΕΖ = ΕΔ, ΖΚ = ΖΓ (από το ισοσκελές τραπέζιο ΚΒΔΖ) και

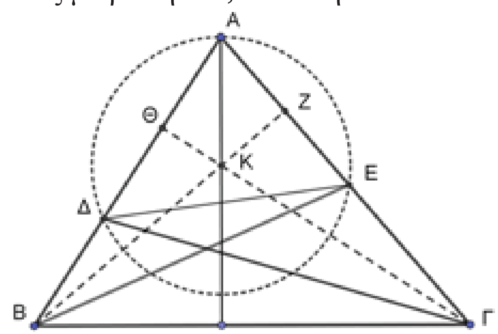
$$E\hat{Z}K=E\hat{Z}\Delta+\Delta\hat{Z}K=E\hat{\Delta}B+Z\hat{\Delta}B=E\hat{\Delta}B.$$

Επομένως θα είναι και ΕΚ = ΕΒ, δηλαδή το τρίγωνο ΒΚΕ είναι ισοσκελές.



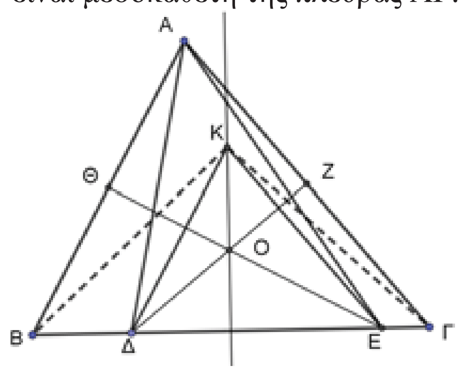

**Γ48. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB\le A\Gamma<B\Gamma$ και τα σημεία Δ και Ε πάνω στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Gamma\Delta=\Gamma A$ και $BE=BA$. Αν Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΔΕ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ.** **Τσεχία 2020**

**Λύση:** Επειδή $BE=BA$ το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με βάση ΑΕ, οπότε η ευθεία ΒΖ του ύψους του είναι μεσοκάθετη της ΑΕ. Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ η ευθεία ΓΘ είναι μεσοκάθετη της ΑΔ. Άρα, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΔΕ, έστω Κ, είναι το σημείο τομής των ευθειών ΒΖ και ΓΘ. Όμως το σημείο Κ είναι και το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε και η ΑΚ είναι η ευθεία του ύψους από την κορυφή Α, δηλαδή $AK\perp B\Gamma$.




**Γ49. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ και τα σημεία Δ και Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $A\Delta=\Gamma\Delta$ και $AE=BE$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ και από το Ε φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι $KB=K\Gamma$.** **Τσεχία 2020**

**Λύση:** Επειδή $A\Delta=\Gamma\Delta$ η διάμεσος ΔΖ του τριγώνου ΑΔΓ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Ομοίως, η διάμεσος ΑΘ του τριγώνου ΑΕΒ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ. Επομένως, οι ευθείες ΔΖ και ΕΘ τέμνονται στο περίκεντρο Ο του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή $EK\parallel A\Gamma$ και $\Delta K\parallel AB$, έπεται ότι $\Delta Z\perp KE$ και $E\Theta\perp AB$, οπότε το σημείο Ο είναι και ορθόκεντρο του τριγώνου ΔΕΚ. Επομένως η ευθεία ΚΟ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ και αφού Ο περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ έπεται ότι η ΚΟ είναι η μεσοκάθετη του ΒΓ, οπότε $KB=K\Gamma$.




## Ασκήσεις για λύση

**Γ50.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}=110^0$. Πάνω στη μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ και στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{A}\Gamma=25^0$ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $BE=A\Delta$.

**(α)** Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\hat{E}\Delta$.

**(β)** Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ.

# Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

**Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος**

### Τα διαστημόπλοια

Ο ΕΛΟΝ ΜΑΣΚ στέλνει αρκετά διαστημόπλοια για να δώσει σε όλη τη Γη επικοινωνία. Τα διαστημόπλοια που φεύγουν για το διάστημα, όταν εκτοξεύονται μετά την κατακόρυφη άνοδο και πριν μπουν σε τροχιά κατευθύνονται βόρια, νότια, ανατολικά ή δυτικά;


### Το αντηλιακό

Έρχεται το καλοκαίρι και αγόρασα ένα αντηλιακό με δείκτη 15 για να το χρησιμοποιήσω στη θάλασσα. Η Ηλέκτρα πήρε ένα αντηλιακό με δείκτη 30. Πόσο χρόνο μπορεί να μείνει εκτεθειμένη στην υπεριώδη ακτινοβολία η Ηλέκτρα αν χωρίς αντηλιακό ο χρόνος είναι 10 λεπτά;

### Οι Ανεξεταστέοι

Από τους 120 μαθητές ενός σχολείου προήχθησαν τον Ιούνιο οι 70 και οι υπόλοιποι είναι ανεξεταστέοι για το Σεπτέμβριο. Η ανακοίνωση για τους ανεξεταστέους είχε: 36 στα Αρχαία Ελληνικά, 35 στην Πληροφορική, 40 στα Μαθηματικά και 42 στην Ιστορία. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που έχει μείνει και στα τέσσερα μαθήματα;

### Το πληκτρολόγιο

Γιατί τα πλήκτρα των γραμμάτων στα κινητά και στο πληκτρολόγιο του Η/Υ δεν είναι στην σειρά και είναι μπερδεμένα;


### Μαμά και κόρη

Η μαμά κρατά την μικρή της κόρη από το χέρι και βαδίζουν στο πάρκο. Ξεκίνησαν τη βόλτα τους πατώντας ταυτόχρονα πρώτα το δεξί τους πόδι. Σε κάθε δύο βήματα της μαμάς η κόρη κάνει τρία. Πότε θα πατήσουν ταυτόχρονα το αριστερό τους πόδι;

### Το δέντρο

Σε ένα ποτάμι με πλάτος 12 μέτρα και στο μέσο ακριβώς υπάρχει ένα δέντρο που η κορυφή του είναι δύο μέτρα έξω από το νερό. Αν το λυγίσουμε η κορυφή του αγγίζει την όχθη. Τι ύψος έχει το δέντρο;

### Το βαρέλι

Έχετε ακούσει πολλές φορές ότι αυξήθηκε η τιμή στο βαρέλι πετρελαίου ή ότι η παραγωγή είναι τόσα βαρέλια. Πόσα λίτρα έχει το βαρέλι;

### Ο Μαραθώνιος

Στο Μαραθώνιο όλοι εγκατέλειψαν εκτός από τρείς αθλητές. Κάποια στιγμή ο τρίτος προσπέρασε το δεύτερο.

**α)** Τι σειρά έχει τώρα;

**β)** Έχει καλύτερη θέση από τον προ τελευταίο;

**γ)** Αν στην κορδέλα φτάσουν τελικά δυο αθλητές ποιος έχει καλύτερη θέση ο δεύτερος ή ο προ τελευταίος;

## Λύσεις - Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 119

**ΜΔ1.** 2x-x=30 άρα x=30

**ΜΔ2.** 10 13 23 32 49 79 97

**ΜΔ3.** Στην $2^{\eta}$ και $3^{\eta}$ στήλη υπάρχει το 3, άρα το α=3. Τα β και x μπορούν να είναι 2 ή 4. Στην $4^{\eta}$ γραμμή υπάρχει το 2 , άρα x=4 και β=2. Το z υποχρεωτικά είναι 3 γιατί στη $2^{\eta}$ και $3^{\eta}$ στήλη υπάρχει το 3, το y=4, άρα το τελευταίο κουτάκι κάτω δεξιά είναι 5.
Συνεχίζοντας όμοια συμπληρώνουμε τον πίνακα

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | α=3 | 2 |
| | 2 | | 5 | y=4 |
| | | 3 | β=2 | 1 |
| 2 | | | x=4 | z=3 |
| | 3 | γ | 1 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 5 | 4 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 5 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 5 |

**ΜΔ4.** Τα αγόρια είναι $\frac{1}{3}\cdot 24 = 8$. Άρα τα κορίτσια είναι 24-8=16 και το $\frac{1}{4}$ που φοράνε γυαλιά είναι $\frac{1}{4}\cdot 16 = 4$ κορίτσια. Συνεπώς δεν φοράνε γυαλιά 16-4=12 κορίτσια.

**ΜΔ5.** Από τον κύβο θα πάρουμε 10.10.10=1000 μικρούς κύβους.
Για τον τοίχο χρειαζόμαστε 40 μικρούς για το μήκος και 25 για το ύψος, δηλ 40.25=1000 συνολικά. Άρα φτάνουν.

**ΜΔ6.** -2,-1,1,2,3

## «Προχωρημένα θέματα για όλους».

## ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΤΕΥΧΟΣ 118

Η φίλη μας Αγγελική Ζαμπούνη από το 3$^{o}$ Γυμνάσιο Καλαμαριάς μας έστειλε ενδιαφέρουσες και τεκμηριωμένες λύσεις σε θέματα Β΄ Γυμνασίου του τεύχους 118.

Αγγελική Ζαμπούνη Β' Γυμνασίου 3ο Γυμνάσιο Καλαμαριάς

1) • $a + \frac{25}{100}a = \frac{125a}{100}$

• $\frac{125a}{100} + \frac{25}{100}\left(\frac{125a}{100}\right) = \frac{125a + 31,25a}{100} = \frac{156,25a}{100}$

• $\frac{156,25a}{100} - \frac{25}{100}\left(\frac{156,25a}{100}\right) = \frac{156,25a - 39,0625a}{100} = \frac{117,1875a}{100}$

• $\frac{117,1875a}{100} - \frac{25}{100}\left(\frac{117,1875a}{100}\right) \simeq \frac{87,89a}{100}$ άρα το ποσό α μεταβλήθηκε κατά περίπου 13%

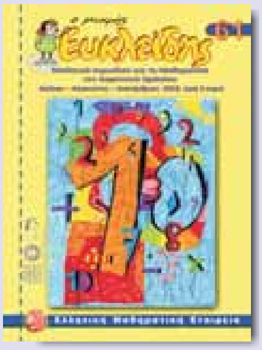
5) $1521 <=> 253\cdot 6 + 3$
Και αφού μας δίνεται ο περιορισμός καταλήγουμε ότι: οι σειρές θα είναι 253 και τα αυγά σε κάθε μια 6

Ευχαριστούμε πολύ Αγγελική. Συνέχισε την προσπάθειά σου.

**Η συντακτική επιτροπή του Ευκλείδη Α΄ σας εύχεται Καλό Καλοκαίρι**

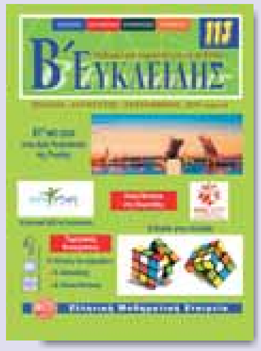
# Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

## Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 3€

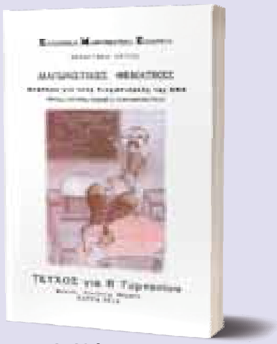

Τιμή τεύχους: 3€




Τιμή τεύχους: 3,5€


Τιμή τεύχους: 10€

## Διαγωνισμοί



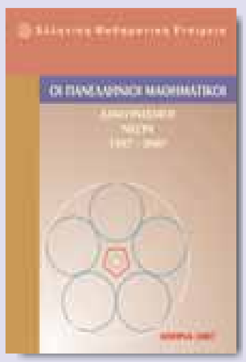
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

## Ολυμπιάδες


Τιμή βιβλίου: 30€

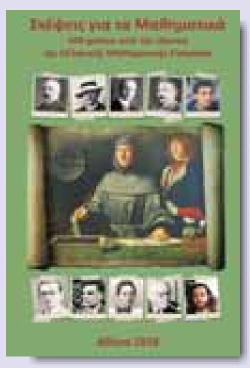



Τιμή βιβλίου: 20€


Τιμή βιβλίου: 25€

## Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€


Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr