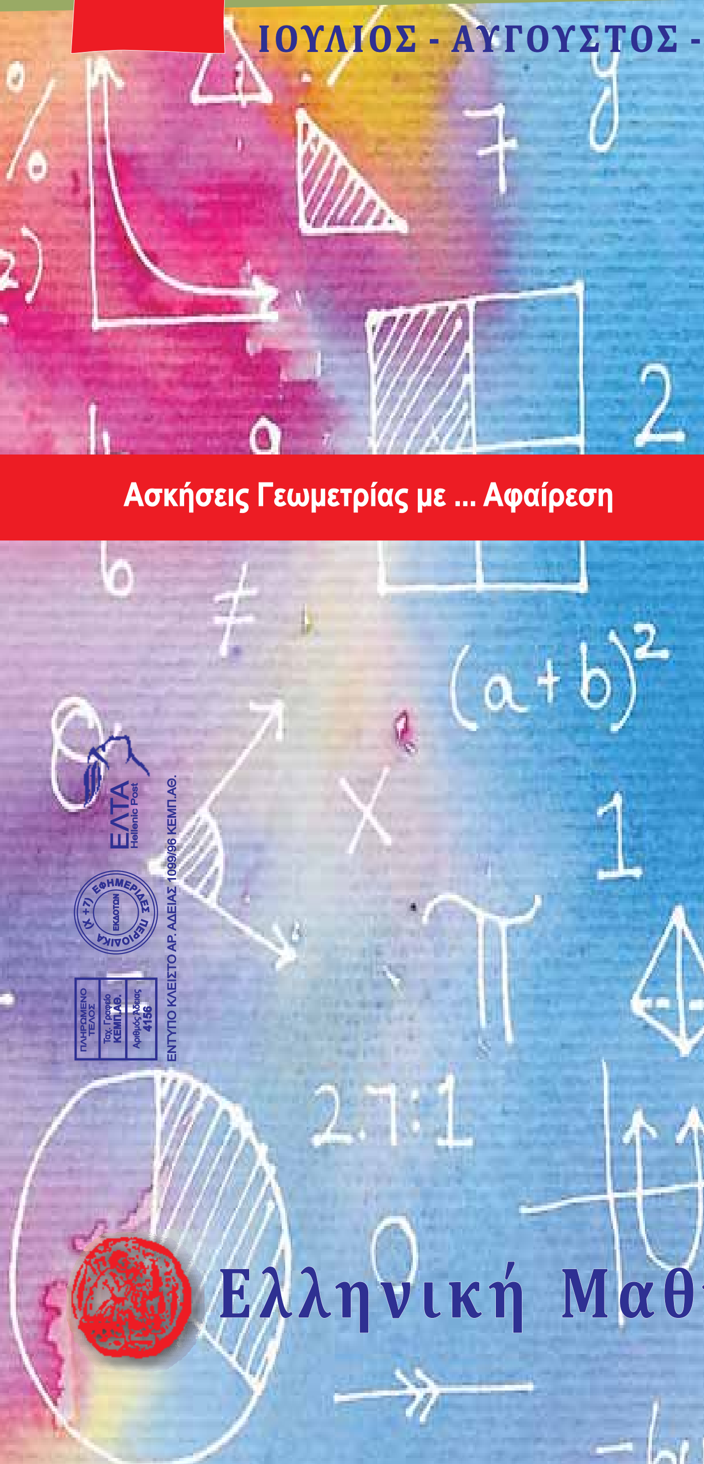
Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

Ευκλείδης Α′ 121

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΜΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021 ευρώ 3,00



5 μετάλλια

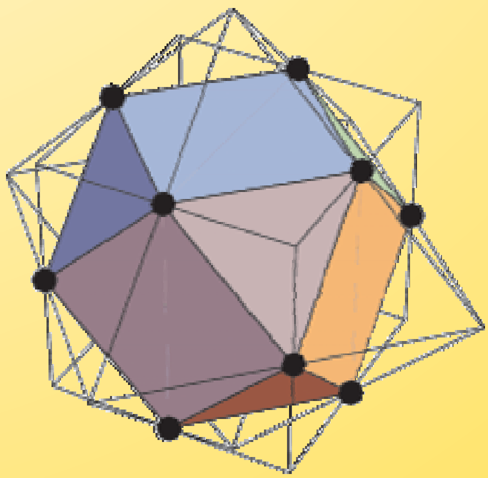
25th JBMO

φιλοξενήθηκε από τη **Μολδαβία**
29 Ιουνίου-5 Ιουλίου 2021

VIRTUAL

Ασκήσεις Γεωμετρίας με ... Αφαίρεση

Τα Μαθηματικά στην εποχή της Ελληνικής Επανάστασης
Βενιαμίν Λέσβιος (1759 ή 1762 1824)



ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ+7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 121

Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2021

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Ιωάννης Εμμανουήλ

Διευθυντής
Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Κεΐσογλου Στέφανος

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητές και Αγαπητοί Συνάδελφοι,

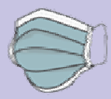
Ευχόμαστε σε όλες και όλους καλό ξεκίνημα στη νέα σχολική χρονιά, χωρίς τις δυσάρεστες εκπλήξεις της προηγούμενης.

Η Συντακτική Επιτροπή του Ευκλείδη Α συνεχίζει και φέτος την προσπάθεια να παρέχει επίκαιρο, ποιοτικό, πρωτοπόρο, ενδιαφέρον υλικό για τον μαθητή και τον εκπαιδευτικό.

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία άρθρων γενικότερου ενδιαφέροντος γύρω από τα Μαθηματικά, καθώς και άρθρα με θέματα εστιασμένα σε κάθε τάξη του Γυμνασίου ξεχωριστά, με ασκήσεις λυμένες και άλυτες, και με κάποια δύσκολα προβλήματα για απαιτητικούς λύτες.

Ελπίδα και στόχος μας ο Ευκλείδης Α΄ να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι τα Μαθηματικά είναι παράγοντας πολιτισμού, οξύνουν την σκέψη και την κρίση και είναι απαραίτητα στην καθημερινή μας δραστηριότητα.

Ελπίζουμε να καταφέρουμε να φέρουμε τους μαθητές πιο κοντά στα Μαθηματικά και να βοηθήσουμε τους διδάσκοντες στο έργο τους.



Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού
Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Τα Μαθηματικά στην εποχή της Ελληνικής Επανάστασης

Βενιαμίν Λέσβιος (1759 **ή** 1762 – 1824)

Γράφει ο Γιώργος Λαγουδάκος

Γεννήθηκε στο Μεγαλοχώρι Πλωμαρίου στη Λέσβο. Σε ηλικία δεκαεπτά ετών πήγε στο Άγιο όρος όπου χειροτονήθηκε μοναχός. Σπουδάζει στη σχολή του **Ιωάννη Οικονόμου** στο Άγιο όρος αλλά και στην Πάτμο και Χίο. Το 1789 επιστρέφει στο Άγιο Όρος και διδάσκει στις **Κυδωνιές** πλάι στον Ιωάννη Οικονόμου.

Το 1790 πηγαίνει στο **Πανεπιστήμιο της Πίζας** και μετά στην Πολυτεχνική σχολή του Παρισιού. Παρακολουθεί μαθήματα από τον **A. Lavoisier.** Στο Παρίσι γνωρίζεται με τον **Κοραή** και αρθρογραφεί στον **«Λόγιο Ερμή».** Πηγαίνει για ένα χρόνο στην Αγγλία και έρχεται σε επαφή με τον Άγγλο αστρονόμο **William Herschel** και το τηλεσκόπιό του στο Γκρίνουιτς.

Το 1799 επιστρέφει στις Κυδωνιές και διδάσκει. Η διδασκαλία του περιλαμβάνει μαθήματα φιλοσοφίας, φυσικομαθηματικών, αστρονομίας με παράλληλη διεξαγωγή πειραμάτων. Η σχολή αποκτά μεγάλη φήμη αλλά ο ίδιος κατηγορείται από την επίσημη εκκλησία ως άθεος, αφού υποστήριζε το ηλιοκεντρικό σύστημα αλλά και την ύπαρξη πλήθους άλλων ήλιων και πλανητών.

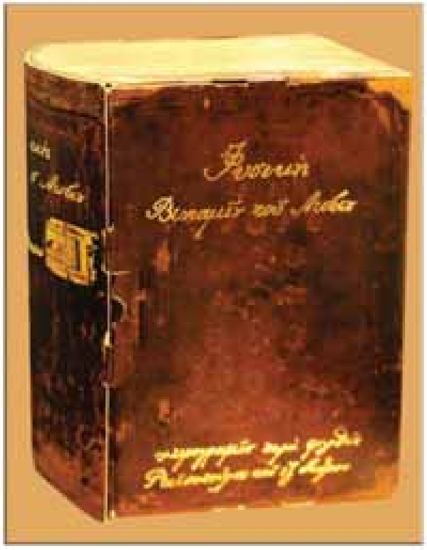
Χειρόγραφο του Βενιαμίν Λέσβιου με την υπογραφή του

Το 1803 καταδικάζεται ερήμην αλλά η πατριαρχική απόφαση δεν εκτελέστηκε μετά από τη μεσολάβηση επιφανών φίλων του. Συνεχίζει να διδάσκει στις Κυδωνιές μέχρι το 1812. Μετά αναχωρεί πρώτα στην Μυτιλήνη και μετά στην Κωνσταντινούπολη όπου εργάζεται ως οικοδιδάσκαλος στο σπίτι του γιατρού **Γεωργίου Δεσύλλα.** Απορρίπτει προτάσεις που είχε από διάφορα σχολεία και το 1817 πηγαίνει στην Βλαχία μετά από πρόσκληση του ηγεμόνα Ιωάννη Καρατζά για να αναδιοργανώσει την **Ακαδημία του Βουκουρεστίου.** Το 1818 αναγκάζεται να πάει στο Ιάσιο όπου εκεί μυείται στην Φιλική Εταιρεία.

Το 1820 τον βρίσκει να διδάσκει στην **Ευαγγελική Σχολή της Σμύρνης.**

Με την έναρξη της επανάστασης συμμετέχει ενεργά σε αυτή. Υπήρξε μέλος της Πελοποννησιακής Γερουσίας , πείρε μέρος στην Α΄ Εθνοσυνέλευση Επιδαύρου το 1821 αλλά και στην Β' Εθνοσυνέλευση Άστρους το 1823. Το 1824 πεθαίνει από τύφο στο Ναύπλιο.

Το συγγραφικό του έργο περιλαμβάνει Μαθηματικά, Φυσική, ηθική και Μεταφυσική. Τα περισσότερα είναι γραμμένα την περίοδο 1803-1812 όπου δίδασκε στις Κυδωνιές. Απορρίπτει το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα και εισάγει μία ουσία το **«πανταχηκίνητο»** την οποία θεωρεί ότι αποτελεί την αιτία της κίνησης.



Θεωρεί τα μαθηματικά ως την βασική επιστήμη πάνω στην οποία στη στηρίζεται η όποια φιλοσοφική σκέψη. Χρησιμοποιεί στην διδασκαλία του την δημώδη γλώσσα και εισάγει δικά του σημεία στίξης. Χρησιμοποιεί τα Αρχαία Ελληνικά για την απόδοση στα ελληνικά των νέων επιστημονικών όρων. Για τις επιλογές του αυτές επικρίθηκε και χαρακτηρίστηκε ως «**αγράμματος φιλόσοφος**».

Για τις ανάγκες τις διδασκαλίας των Μαθηματικών έγραψε δύο βιβλία, την Αριθμητική και την Γεωμετρία.

Η Γεωμετρία είναι ουσιαστικά μία παράθεση όρων και θεωρημάτων από τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε λίγα στοιχεία από το βιβλίο του « Στοιχεία Αριθμητικής»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΠΑΡΑ

ΒΕΝΙΑΜΙΝ ΛΕΣΒΙΟΥ.

ΤΟΜΟΣ Α'.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΟΥΣΤΡΙΑΣ,

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

ΕΚΤΕΘΕΝΤΑ

ΠΑΡΑ

ΒΕΝΙΑΜΙΝ ΛΕΣΒΙΟΥ.

ΤΟΜΟΣ Β'.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΟΥΣΤΡΙΑΣ,

Το βιβλίο είναι γραμμένο απλά και κατανοητά. Καλύπτει ολόκληρο το εύρος της λεγόμενης πρακτικής αριθμητικής με πολλά λυμένα παραδείγματα. Τα προβλήματα είναι αυτά που θα συναντήσει κάποιος στην καθημερινότητά του. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιεί είναι παρόμοιος με αυτόν που υπάρχει και στα σημερινά βιβλία αριθμητικής Δημοτικού. Αναλύει τις τεχνικές εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων στους ακεραίους αλλά και στα κλάσματα και δεκαδικούς. Παρουσιάζει τεχνικές εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας.

Στο κεφάλαιο περί αναλογίας παρουσιάζει αρχικά την απλή μέθοδο των τριών και μετά την απλή **«αντιπεπονθυίας»** μεθόδου των τριών όταν πρόκειται για ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Αλλά και την σύνθετη μέθοδο των τριών με την βοήθεια παραδειγμάτων …

Στη συνέχεια λύνει προβλήματα τόκων, προβλήματα «συντροφιάς», «μίξεως» κ.α.

Εν συντομία θα σας παρουσιάσω τρία ενδιαφέροντα σημεία του βιβλίου αυτού.

Στην εισαγωγή …. όπου εξηγεί την ανακάλυψη του δεκαδικού συστήματος από τους διάφορους πολιτισμούς και τον Ελληνικό τρόπο συμβολισμού των αριθμών

Ἡ τῆς ἀριθμητικῆς λοιπὸν ἀρχὴ, κατὰ μὲν τὸν
Στράβωνα (α), ἀποδίδεται εἰς τοὺς Φοίνικας, οἵτινες ὑ-
πῆρξαν οἱ πρῶτοι τοῦ κόσμου ἔμποροι, κατὰ δὲ τὸν Λα-
έρτιον Διονύσιον (β), ἡ μὲν Αἴγυπτος ὑπῆρξεν ἡ γεννή-
τρια αὐτῆς· ὁ δὲ πατὴρ αὐτῆς ὁ Θεὺς, ἢ Θὼτ, ἢ Ὄσι-
ρις, ὅστις ἦν ὁ αὐτὸς μὲ τὸν Ἑρμῆν τὸν Τρισμέγιςον..
κατὰ δ' ἄλλους αἱ Ἰνδίαι. Ἅπαντα δ' ὅμως τὰ ἔθνη,
πλὴν τῶν ἀρχαίων Σινῶν, οἵτινες εἶχον δύο χαρακτῆ-
ρας, καὶ ἑνὸς ἔθνους τῆς Θρᾴκης, ὅπερ κατὰ τὸν Ἀριςο-
τέλη εἶχε τέσσαρας, ἔχουσι διὰ περιόδου τὸν ἀριθμὸν
δέκα. Καὶ ὁ λόγος τούτου τοῦ φαινομένου ἀναντιῤῥήτως

εἶναι οὐδεὶς ἄλλος, ἢ ἡ ἰσάριθμος τῶν δέκα δακτύλων
ποσότης. Τὸ νὰ ἔχῃ ὅμως ἓν ἔθνος διὰ περιόδου ἀριθμη-
τικὴν τὰ δύο, ἢ τὰ τέσσαρα, τοῦτο ἐμφανίζει οὐδὲν ἄλ-
λο, ἢ τὸν μικρὸν νοῦν καὶ μνήμην αὐτοῦ.
Ὡς πρὸς τὰ γραπτὰ ὅμως σημεῖα τῶν ἀριθμῶν ἐν-
γένει τὰ ἔθνη τῆς Ἀσίας μετεχειρίσθησαν ὄχι ἄγνωςα
σημεῖα, ἀλλὰ τὸ ἀλφάβητον αὐτῶν· καὶ ὡς φαίνεται,
καὶ οἱ Ἕλληνες ἢ αὐτοὺς ἐμιμήθησαν, ἢ κατὰ συμβεβη-
κὸς μετεχειρίσθησαν τὸ αὐτό. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὰ τῶν
Ἑλλήνων γράμματα δὲν ἐξικνοῦνται μέχρι τῆς ἐκθέσεως
τῶν χιλίων, ὅπερ εἶναι ἀναγκαῖον εἰς τὴν ἀριθμητικὴν·
ὅθεν ἐπειδὴ καὶ δὲν φθάνουσι μέχρι τῶν εἴκοσι ἑπτὰ·
ἦν ἀνάγκη προσθέσεως τριῶν ἐπεισάκτων, καὶ ταῦτα εἶναι
ϛ', ϙ', ϡ': τουτέςιν εἰς τὸν τόπον τῶν 6, 90, 900. Λέ-

59. Ταῦτα λοιπὸν τὰ κλάσματα:
ἅπερ δηλονότι ἔχουσιν οὐδένα ἀριθμὸν,
ἐκτὸς τῆς μονάδος, κοινὸν μέτρον, εἶ-
ναι τὰ ἀσύμμετρα λεγόμενα (54), ἅ-
περ καὶ ἀνάγωγα ἤθελον ὀνομασθῆ,
ἔνθα δηλονότι πᾶς κόπος τοῦ ψηλαφί-
σματος ἢ ἀποπείρας ἤθελεν εἶναι μάταιος, ὅπερ βέβαια
χει νὰ ἐπακλουθήσῃ πάντοτε· ὅταν οἱ ὅροι ἑνὸς κλά-
σματος ἦναι πρῶτοι ἀριθμοί. Καὶ ὀνομάζονται πρῶτοι

13 | 19
2
6 | 13
12
1

Στην συνέχεια αναφέρεται στα ινδικά ψηφία …

7. Οἱ χαρακτῆρες ὅμως τῶν Ἀράβων, ἢ ὀρθότερον εἰπεῖν τῶν Ἰνδῶν, διά τε τὴν ἑαυτῶν ἁπλότητα, καὶ διὰ τὴν εὐκολίαν πρὸς τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας, εἶναι δῶρον οὐράνιον. Ὅθεν ἅπαντα τὰ ἔθνη τῆς Εὐρώπης δὲν ὤκνευσαν ἀπὸ τοῦ νὰ τοὺς οἰκειοποιηθῶσιν, ὡς καὶ ἡμεῖς δηλονότι τὴν σήμερον. Εἶναι ὅμως δόξα τῶν ἐνδόξων

Εκεί που αναφέρεται στους πρώτους αριθμούς …

ἀριθμοὶ ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσιν οὐδὲν ἄλλο κοινὸν μέτρον, ἢ τὴν μονάδα *): ὅ ἐςὶν ὅσοι διαιροῦνται μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ δι' ἑαυτῶν. Καὶ τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἑξῆς.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 169, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383. καὶ τ. ἑ.

Εἰς τούτους δὲ τοὺς ἀριθμοὺς οἱ γεωμέτραι ἐκαταγίνησαν ὄχι ὀλίγον, διὰ νὰ εὕρωσι δηλ. πῶς νὰ γινώσκῃ τις ἀμέσως (ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦναι πρῶτος, ἢ μή) πλὴν, ὡς φαίνεται, ἀπέτυχον. Ὅθεν εὐχαριςήθησαν μόνον εἰς τὸ νὰ δώσωσι πίνακας τῶν περιττῶν ἀριθμῶν. Πλὴν εἰς τὴν τοιαύτην ζήτησιν εὗρον προβλήματα ὡραῖα περὶ αὐτῶν (καὶ τοιοῦτον εἶναι τὸ, πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος εἶναι πηλίκον γινομένου ἐξ ἁπάντων τῶν πρὸ αὐτοῦ ἀριθμῶν θέσει μονάδος. Τὸ 5, φέρε εἰπεῖν, καταμετρεῖ ἐξηκριβωμένως τὸν ἀριθμὸν $25 = 4\times3\times2+1$ (καὶ ὁ ἀριθμὸς $6\times5\times4\times3\times2+1$ μετρεῖται ἄρτια ὑπὸ τοῦ 7.

Παρουσιάζοντας χωρίς να επιμείνει στην επίλυσή τους ενδιαφέροντα προβλήματα της θεωρίας αριθμών …

(Δες σελίδα 97)

102. Πολλάκις ὅμως συμβαίνει, ἐνῷ τις μεταβάλλει ἓν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν, νὰ πίπτῃ εἰς πηλίκα μερικὰ ὅμοια πρὸς ἄλληλα, ἅπερ καὶ περιοδικὰ κλάσματα

Στο σημείο που εξηγεί τα περιοδικά κλάσματα …

ὀνομάζω, ἔνθα δηλονότι λυτροῦται τις πλέον τοῦ κόπου τῆς διαιρέσεως, ἰδὼν ἅπαξ τὸν νόμον τῆς προόδου.

Οὕτω τὸ $\frac{1}{3} = 0,3333...$, καὶ τὰ $\frac{2}{3} = 0,6666...$, καὶ τὸ $\frac{1}{9} = 0,1111...$, ὅθεν καὶ τὸ $\frac{1}{99} = 0,010101...$, καὶ τὸ $\frac{1}{999} = 0,001001001...$, καὶ τὰ $\frac{3}{11} = 0,272727...$, καὶ τὰ $\frac{12}{37} = 0,324324...$, καὶ τὸ $\frac{1}{7} = 142857....$

Ἐνίοτε ὅμως ἡ περίοδος ἄρχεται ὄχι εὐθὺς ἀλλὰ μετὰ δύο, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας. Οὕτω τὰ $\frac{5}{12} = 0\ 41666....$ τὸ $\frac{1}{6} = 0,1666...$ καὶ τὰ $\frac{7}{12} = 0,58333...$, καὶ τὰ $\frac{16}{75} = 0,21333$. Δῆλον ὅμως ὅτι ὅσας περιόδους καὶ ἂν λάβη τις ποτὲ δὲν θέλει φθάσει εἰς τὴν ἀληθῆ σημασίαν τοῦ κλάσματος.

Και παρακάτω περιγράφει την αντίστροφη διαδικασία της μετατροπής ενός περιοδικού δεκαδικού σε κλάσμα …

Τὰ περιοδικὰ ὅμως δεκαδικὰ ἐπιςρέφονται ἄριςα εἰς τὰ ἀρχικὰ διὰ τῆς τῶν 9 διαιρέσεως. Πλὴν ἐπειδὴ καὶ ταῦτα εἶναι δύο εἰδῶν: ὅ ἐςι ἢ ἄρχονται ἐκ τοῦ κόμματος, ἢ μετέπειτα (102) τούτου ἕνεκεν καὶ ἡ μέθοδος ἤθελεν εἶναι διττή. Καὶ εἶναι αὕτη. Ἡμεῖς εἴδομεν

(αὐτόθι) ὅτι $\frac{1}{9} = 0,1111...$, καὶ $\frac{1}{99} = 0,010101...$, καὶ $\frac{1}{999} = 0,001001...$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥςε δύναταί τις νὰ ἐκλάβῃ ἑκάςην περίοδον δεκαδικῶν ὡς γινόμενον ἐξ ἑαυτῆς καὶ τῆς μονάδος διαιρουμένης διὰ τοσούτων 9, ἐξ ὅσων χαρακτήρων σύγκειται ἡ περίοδος. Οὕτως εἰς τὸ δεκαδικὸν $\frac{2}{3} = 0,666...$ (αὐτόθι), συγκειμένης τῆς περιόδου ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος, δύναταί τις νὰ τὴν ἐκβάλῃ ὡς γινόμενον ἐκ τοῦ 6 καὶ 0,111... ὅθεν $0,666... = 6 \times 0,111... = 6 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$.. ὡσαύτως καὶ τὸ $0,2727... = 27 \times 0,0101... = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$, ὡς εἴδομεν εἰς τὸν (αὐτόν).. καὶ τὸ $0,342342... = \frac{342}{999} = \frac{4}{111}$.. καὶ τὸ $0,571428571428... = \frac{571428}{999999} = \frac{392857}{592857} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$. Ἂν ὅμως καὶ ἡ περίοδος ἄρχηται ὄχι ἐκ τοῦ κόμματος τότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληφθῇ τὸ δεκαδικὸν ὡς κεφάλαιον, ἢ διαφορὰ περιοδικοῦ, καὶ μή. Οὕτω τὸ $0,58333.. = 0,33333... + 0,25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ ... καὶ τὸ $0,21333... = 0,33333... - 0,12 = \frac{1}{3} - \frac{3}{25} = \frac{16}{75}$ .. καὶ τὸ $0,1666... = 0,6666... - 0,5 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Πλὴν ἦν δυνατὸν ἀμέσως

Τα κλάσματα

Στυλιανός Μαραγκάκης - Ανδρέας Τριανταφύλλου

Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωριστεί σε **ν** $(\nu \neq 0)$ ίσα μέρη, καθένα από αυτά ονομάζεται νιοστό και συμβολίζεται με $\frac{1}{\nu}$.

Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από **λ** τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το **κλάσμα** $\frac{\lambda}{\nu}$ και διαβάζεται «**λάμδα νιοστά**» και είναι λ από τα ν κομμάτια, δηλαδή λ φορές το $\frac{1}{\nu}$. Οπότε $\lambda \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{\nu}$ (ν φυσικός αριθμός, όχι μηδέν). Ο αριθμός **λ** λέγεται **αριθμητής** και ο **ν παρονομαστής** του κλάσματος.

Τα περισσότερα προβλήματα στην έννοια του κλάσματος λύνονται με αναγωγή στη μονάδα.

Αναγωγή στη μονάδα

Όταν γνωρίζουμε το μέρος ενός μεγέθους π.χ. $\frac{\lambda}{\nu}$ και θέλουμε να βρούμε:

- όλο το μέγεθος
- ένα άλλο μέρος του π.χ. $\frac{\kappa}{\nu}$
- το μέρος του π.χ. $\frac{\mu}{\xi}$ $(\mu \neq \xi)$

❖ τότε: Προσπαθούμε να βρούμε το μέγεθος που εκφράζει το ένα από τα ίσα μέρη ολόκληρης της ποσότητας, δηλαδή την κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$

- για όλο το μέγεθος υπολογίζουμε το $\frac{\nu}{\nu} = \nu \cdot \frac{1}{\nu}$
- για το μέρος του μεγέθους $\frac{\kappa}{\nu}$ υπολογίζουμε το $\frac{\lambda}{\nu} = \lambda \cdot \frac{1}{\nu}$
- για το μέρος του μεγέθους $\frac{\mu}{\xi}$ έχουμε $\frac{\xi}{\xi} = \frac{\nu}{\nu}$ και $\frac{\mu}{\xi} = \mu \cdot \frac{1}{\xi}$

Παραδείγματα

1) Αν τα $\frac{3}{7}$ ενός ποσού είναι 150€, να βρείτε ολόκληρο το ποσό.

Λύση

Τα $\frac{3}{7}$ του ποσού είναι 150€, (δηλαδή τα 3 από τα 7 μέρη)

άρα το $\frac{1}{7}$ του ποσού είναι 150€ : 3 = 50€, (δηλαδή το 1 από τα 7 μέρη)

οπότε τα $\frac{7}{7}$ του ποσού είναι $50 \cdot 7 = 350$ €. (δηλαδή τα 7 από τα 7 μέρη)

2) Σε ένα εστιατόριο μια ημέρα παρατηρήθηκε ότι $\frac{\text{παραγγελίες μερίδων κρέατος}}{\text{παραγγελίες μερίδων ψαριών}}=\frac{5}{3}$ **Αν αυτή την ημέρα έγιναν 135 παραγγελίες μερίδων κρέατος, πόσες ήταν οι παραγγελίες μερίδων ψαριών;**

Λύση

Αφού $\frac{\text{παραγγελίες μερίδων κρέατος}}{\text{παραγγελίες μερίδων ψαριών}}=\frac{5}{3}$ έχουμε ότι σε κάθε 5 παραγγελίες μερίδων κρέατος έχουμε 3 παραγγελίες μερίδων ψαριών, δηλαδή σε κάθε $5+3=8$ παραγγελίες οι 5 είναι κρέατος και οι 3 ψαριών. Άρα τα $\frac{5}{8}$ είναι παραγγελίες κρέατος και τα $\frac{3}{8}$ είναι παραγγελίες ψαριών.

Επομένως τα $\frac{5}{8}$ των παραγγελιών είναι 135 παραγγελίες,

άρα το $\frac{1}{8}$ των παραγγελιών είναι 135 : 5 = 27 παραγγελίες,

οπότε τα $\frac{3}{8}$ των παραγγελιών είναι $3\cdot\frac{1}{8}=3\cdot 27=81$ παραγγελίες ψαριών

Ισοδύναμα κλάσματα

Ισοδύναμα ή ίσα ονομάζονται τα κλάσματα που αντιστοιχούν στο ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta},\beta\neq 0$ και $\frac{\gamma}{\delta},\delta\neq 0$ είναι ισοδύναμα γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Ισχύουν, αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ (χιαστή γινόμενα)

Αν $\alpha\delta=\beta\gamma$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ή $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

Κανόνας για την **κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων**

Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό $\lambda\neq 0$, προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο, δηλαδή

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta\cdot\lambda},\ \lambda\neq 0$ και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\lambda}{\beta:\lambda},\ \lambda\neq 0$

Η διαδικασία με την οποία διαιρούμε τους όρους ενός κλάσματος με κοινό τους διαιρέτη λέγεται **απλοποίηση**.

Ένα κλάσμα που δεν απλοποιείται άλλο λέγεται **ανάγωγο**.

Ένα κλάσμα μετατρέπεται σε ανάγωγο αν διαιρέσουμε τους όρους του με το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους (ΜΚΔ) ή εκτελέσουμε διαδοχικές διαιρέσεις με όλους τους κοινούς διαιρέτες των όρων του.

Δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, ονομάζονται **ομώνυμα**.

Δύο κλάσματα που **δεν** έχουν τον ίδιο παρονομαστή, ονομάζονται **ετερώνυμα**.

Για να μετατρέψουμε ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα κάνουμε τα εξής:

- Ελέγχουμε αν τα κλάσματα απλοποιούνται και αν ναι τα μετατρέπουμε σε ανάγωγα.
- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων ετερωνύμων κλασμάτων.
- Διαιρούμε το ΕΚΠ με τον καθένα από τους παρονομαστές.
- Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκαμε

Παραδείγματα

❖ **Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:** $\mathbf{\frac{8}{20}}$, $\mathbf{\frac{21}{35}}$

Λύση

Επειδή ΜΚΔ(8, 20) = 4, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{8}{20}$ με το 4 και έχουμε $\frac{8}{20}=\frac{8:4}{20:4}=\frac{2}{5}$

Επειδή ΜΚΔ (21, 35) = 7. διαιρούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{21}{35}$ με το 7 και έχουμε $\frac{21}{35}=\frac{21:7}{35:7}=\frac{3}{5}$

❖ **Να απλοποιήσετε το κλάσμα** $\mathbf{A=\frac{2^3+3\cdot\left(9\cdot3-3^3\right)+1}{4^2-\left(11\cdot6-3\right)^0}}$

Λύση

$A=\frac{2^3+3\cdot\left(9\cdot3-3^3\right)+1}{4^2-\left(11\cdot6-3\right)^0}$ εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και έχουμε

$$A=\frac{2^3+3\cdot\left(9\cdot3-27\right)+1}{4^2-\left(11\cdot6-3\right)^0}=\frac{2^3+3\cdot\left(27-27\right)+1}{4^2-\left(66-3\right)^0}=\frac{2^3+3\cdot\left(0\right)+1}{4^2-\left(63\right)^0}=\frac{2^3+0+1}{4^2-1}=\frac{8+1}{16-1}=\frac{9}{15}$$

Επειδή ΜΚΔ(9, 15) = 3. διαιρούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{9}{15}$ με το 3 και έχουμε $\frac{9}{15}=\frac{9:3}{15:3}=\frac{3}{5}$

❖ **Να κάνετε ομώνυμα τα κλάσματα:** $\mathbf{\frac{3}{8}}$ **και** $\mathbf{\frac{1}{6}}$

Λύση

Έχουμε ΕΚΠ(8, 6) = 24 και 24 : 6 = 4, 24 : 8 = 3.

Οπότε $\frac{3}{8}=\frac{3\cdot3}{8\cdot3}=\frac{9}{24}$ και $\frac{1}{6}=\frac{1\cdot4}{6\cdot4}=\frac{4}{24}$

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Το **άθροισμα δύο ή περισσότερων ομώνυμων κλασμάτων** είναι κλάσμα με αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή τον κοινό τους παρονομαστή δηλαδή

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$, αν $\beta\neq0$ $\qquad$ $\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{3+4}{8}=\frac{7}{8}$

Το **άθροισμα δύο ή περισσότερων ετερώνυμων κλασμάτων** βρίσκεται αν κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και εργαστούμε όπως προηγουμένως δηλαδή

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}+\frac{\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$, αν $\beta\cdot\delta\neq0$ $\qquad$ $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}=\frac{3\cdot3}{3\cdot4}+\frac{4\cdot5}{4\cdot3}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}=\frac{9+20}{12}=\frac{29}{12}$

Η **διαφορά δύο ομώνυμων κλασμάτων** είναι κλάσμα με αριθμητή τη διαφορά των αριθμητών και παρονομαστή τον κοινό τους παρονομαστή δηλαδή

$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$, αν $\beta\neq0$ $\qquad$ $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3-1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{2:2}{8:2}=\frac{1}{4}$

Το **διαφορά δύο ετερώνυμων κλασμάτων** βρίσκεται αν κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και εργαστούμε όπως προηγουμένως δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}-\frac{\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta},\ \text{αν }\beta\cdot\delta\neq 0 \qquad \frac{5}{3}-\frac{3}{4}=\frac{4\cdot 5}{4\cdot 3}-\frac{3\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{20}{12}-\frac{9}{12}=\frac{20-9}{12}=\frac{11}{12}$$

Παρατήρηση

Τα κλάσματα τα απλοποιούμε

- πριν κάνουμε πράξεις
- μετά τις πράξεις, στο αποτέλεσμα

Παραδείγματα

❖ **να κάνετε τις πράξεις** $\mathbf{\frac{7}{6}-1+\frac{3}{4}}$ $\qquad$ $\mathbf{3\frac{2}{5}+\frac{6}{10}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^{2021}}$

Λύση

- $\frac{7}{6}-1+\frac{3}{4}=\frac{7}{6}-\frac{1}{1}+\frac{3}{4}$ $[\text{ΕΚΠ}(6,1,4)=12]$, οπότε

$$\frac{\overset{2}{\smile}7}{6}-\frac{\overset{12}{\smile}1}{1}+\frac{\overset{3}{\smile}3}{4}=\frac{14}{12}-\frac{12}{12}+\frac{9}{12}=\frac{14-12+9}{12}=\frac{2+9}{12}=\frac{11}{12}$$

- $3\frac{2}{5}+\frac{6}{10}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^{2021}$ εκτελούμε τις πράξεις μέσα στην παρένθεση

$3\frac{2}{5}+\frac{6}{10}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^{2021}=3\frac{2}{5}+\frac{6}{10}+\left(\frac{\overset{3}{\smile}1}{2}+\frac{\overset{2}{\smile}1}{3}+\frac{\overset{1}{\smile}1}{6}\right)^{2021}=3\frac{2}{5}+\frac{6}{10}+\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)^{2021}=$ το μικτό αριθμό $3\frac{2}{5}$ τον γράφουμε ως άθροισμα φυσικού αριθμού με κλάσμα $3+\frac{2}{5}$ ή $\frac{3\cdot 5+2}{5}$ οπότε έχουμε $=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}+\frac{6}{10}+\left(\frac{3+2+1}{6}\right)^{2021}=\frac{\overset{10}{\smile}3}{1}+\frac{\overset{2}{\smile}2}{5}+\frac{\overset{1}{\smile}6}{10}+(1)^{2021}=$

$=\frac{30}{10}+\frac{4}{10}+\frac{6}{10}+(1)^{2021}=\frac{30+4+6}{10}+(1)^{2021}=\frac{40}{10}+1=4+1=5$

Ασκήσεις

- Απλοποιήστε τα κλάσματα $\frac{42}{75}$, $\frac{666}{111}$, $\frac{6666}{5555}$, $\frac{2781}{15843}$
- Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{2}{7}$ για να βρούμε $\frac{35}{63}$
- Ποιο κλάσμα πρέπει να αφαιρέσουμε από το $\frac{5}{9}$ για να βρούμε $\frac{50}{144}$
- Υπολογίστε το άθροισμα $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$
- Βρείτε τη διαφορά $\frac{2222}{3333}-\frac{2727}{4545}$
- Αν $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων $A=\frac{x+3y}{y}$ $\quad B=\frac{3x-2y}{3y}$

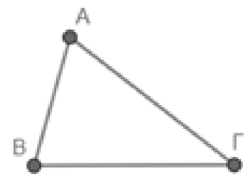
Οι γωνίες στα Ευθύγραμμα Σχήματα

Γιώργος Τσαπακίδης - Παναγιώτης Πετράκης (Μαθητής Α΄ Γυμνασίου)

Μεταξύ των δομικών στοιχείων της γεωμετρίας εξέχουσα θέση κατέχουν οι γωνίες. Η γεωμετρία μελετάει τις σχέσεις μεταξύ των δομικών στοιχείων των σχημάτων. Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής είναι η κατασκευή και η μέτρηση των γεωμετρικών μεγεθών (μέτρα γωνιών, μήκη, εμβαδά, όγκοι). Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε τη σύνδεση των γωνιών με ευθύγραμμα σχήματα, στηριζόμενοι στις βασικές προτάσεις:

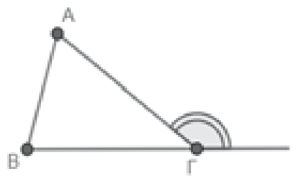
1η: Ευθεία που τέμνει δύο παράλληλες ευθείες σχηματίζει με αυτές εντός εναλλάξ γωνίες ίσες και τις εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

$$(\theta = \omega \Leftrightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2)$$



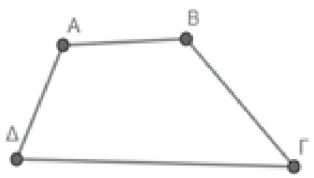
2η: Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180^o.

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o)$$



3η: Η εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών του τριγώνου.

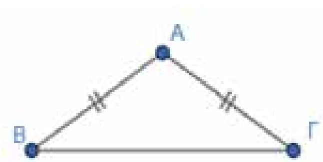
$$(\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B})$$



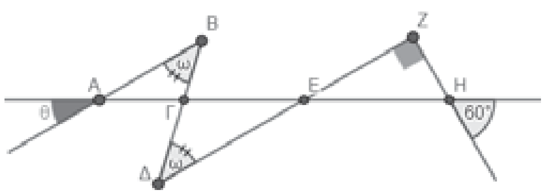
4η: Το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου είναι 360^o.

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o)$$

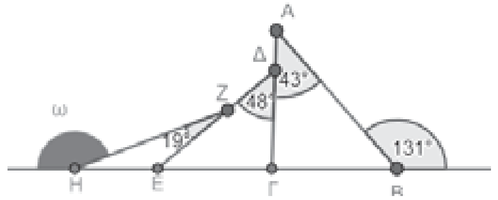
Γενίκευση: Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2\nu - 4$ορθές $= (2\nu - 4)90^o$.



5η: Αν $AB = A\Gamma$, τότε $\hat{A} = 180^o - 2\hat{B} = 180^o - 2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^o - 2\hat{A}}{2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
1.  $\theta =;$	$\hat{B} = \omega = \hat{\Delta} \Rightarrow AB \parallel \Delta Z$, άρα $Z\hat{E}H = B\hat{A}\Gamma = \theta$. $\overset{\triangle}{ZEH}$: $\theta + 90^o + 60^o = 180^o$ $\theta = 30^o$

2.



ω =;

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $131^o = 43^o + \widehat{A\Gamma B}$

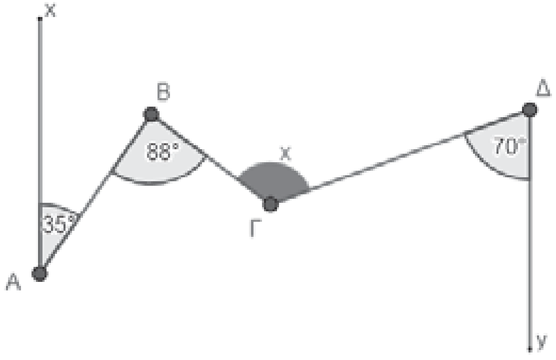
$\widehat{A\Gamma B} = 88^o$

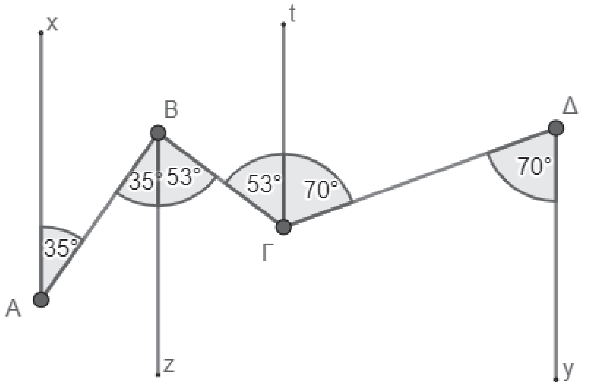
$\overset{\triangle}{\Gamma E\Delta}$: $88^o = 48^o + \widehat{\Delta E\Gamma}$

$\widehat{\Delta E\Gamma} = 40^o$

$\overset{\triangle}{ZEH}$: $40^o = 19^o + \omega$, $\omega = 21^o$.

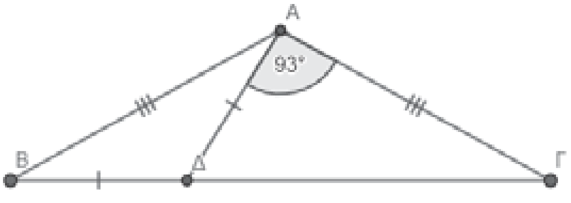
3. Αν Αx ∥ Δy τότε x =;





Φέρνουμε Αx ∥ Βz ∥ Γt ∥ Δy, έτσι
$x = 53^o + 70^o = 123^o$.

4. Αν ΑΒ = ΑΓ και ΔΑ = ΔΒ τότε πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$;



$AB = A\Gamma$ άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi$.

$\Delta A = \Delta B$ άρα $\widehat{BA\Delta} = \hat{B} = \varphi$.

Η $\widehat{A\Delta\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$,

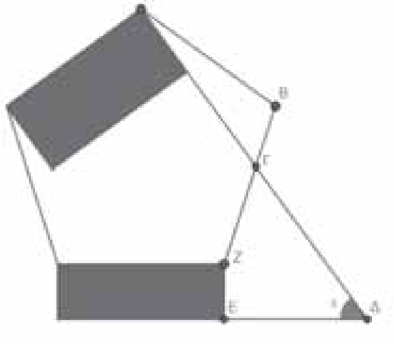
άρα $\widehat{A\Delta\Gamma} = \hat{B} + \widehat{BA\Delta} = 2\varphi$

$\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$: $93^o + 2\varphi + \varphi = 180^o$

$\varphi = 29^o$.

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi = 29^o$ και $\hat{A} = 93^o + \varphi = 112^o$.

5. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν 2 ορθογώνια και ένα κανονικό πεντάγωνο.



x =;

Κάθε γωνία του κανονικού πενταγώνου είναι: $\dfrac{(2\cdot 5-2)90^o}{2} = 108^o$

Στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουμε: $\hat{A} = 108^o - 90^o = 18^o$

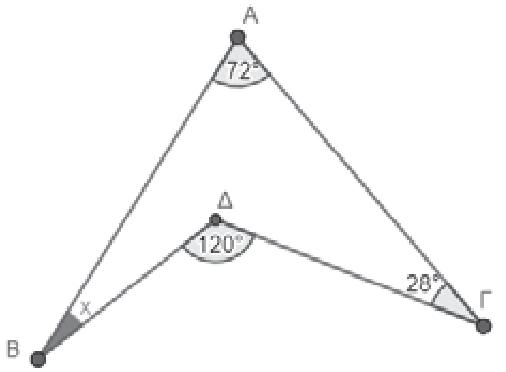
$\hat{B} = 108^o$, $\hat{\Gamma} = 180^o - 108^o - 18^o = 54^o$.

Στο ΓΔΕΖ είναι:

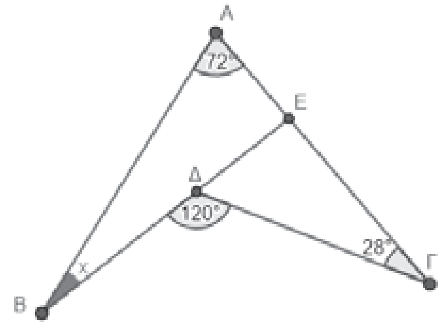
$54^o + x + 90^o + \left(360^o - 108^o - 90^o\right) = 360^o$

$x = 54^o$.

6.



x =;



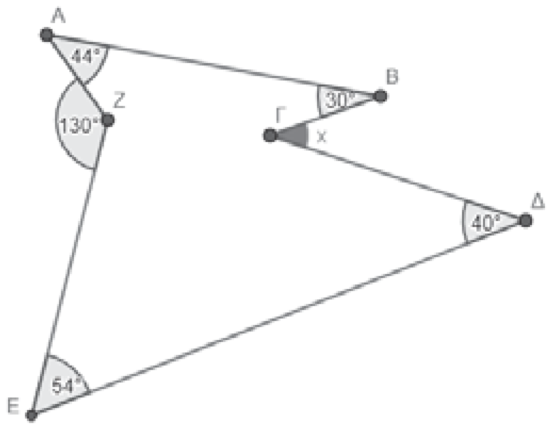
Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των ΒΔ και ΑΓ.

$\overset{\triangle}{\Gamma E \Delta}$: $120^o = 28^o + \Gamma\hat{E}\Delta$

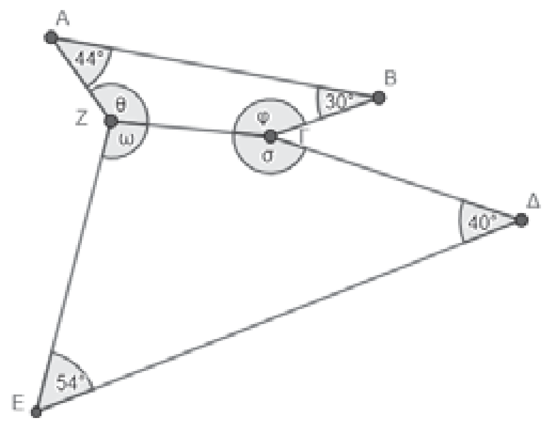
$\Gamma\hat{E}\Delta = 92^o$

$\overset{\triangle}{ABE}$: $72^o + x = 92^o$, $x = 20^o$.

7.



x =;



Στο ΑΒΓΖ: $\varphi + \theta + 44^o + 30^o = 360^o$ άρα $\varphi + \theta = 286^o (1)$.

Στο ΓΔΕΖ: $\omega + \sigma + 40^o + 54^o = 360^o$ άρα $\omega + \sigma = 266^o (2)$.

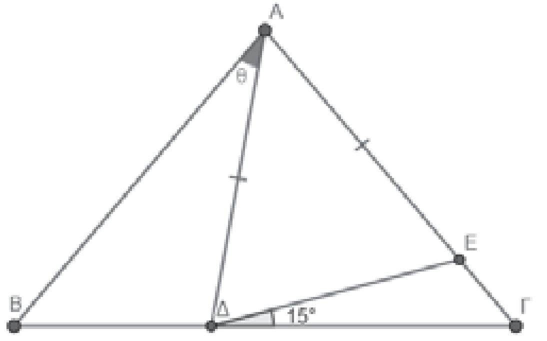
$(1) + (2)$: $\varphi + \theta + \omega + \sigma = 552^o$

$(\varphi + \sigma) + (\theta + \omega) = 552^o$

$(360^o - x) + (360^o - 130^o) = 360^o$

$x = 38^o$

8. Αν $AB = A\Gamma$ και $A\Delta = AE$ τότε $\theta =$;



Ισοσκελές $\overset{\triangle}{A\Delta E}$: $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = 15^o + \hat{\Gamma}$ (αφού η $A\hat{E}\Delta$ είναι εξωτερική γωνία του $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$) $= 15^o + \hat{B}$

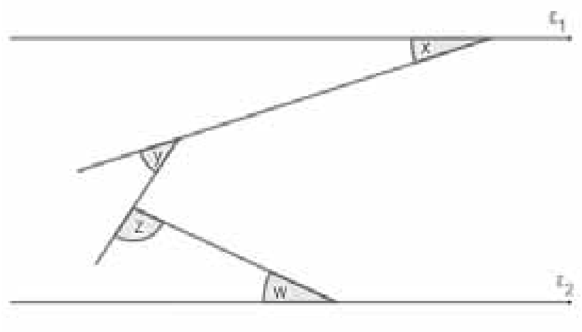
(από το ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$).

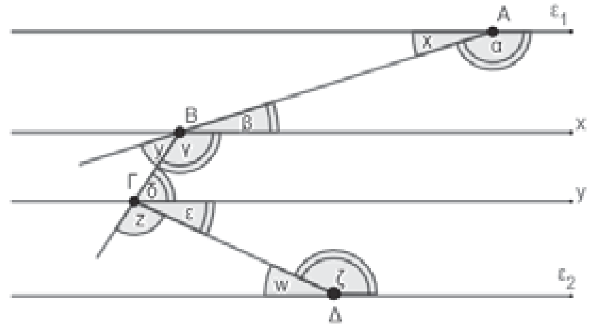
Η $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, άρα

$A\hat{\Delta}\Gamma = \theta + \hat{B} \Rightarrow A\hat{\Delta}E + 15^o = \theta + \hat{B}$

$\Rightarrow \hat{B} + 15^o + 15^o = \theta + \hat{B} \Rightarrow \theta = 30^o$.

9. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, τότε $x + y + z + w =$;





Φέρνουμε $B x \parallel \Gamma y \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

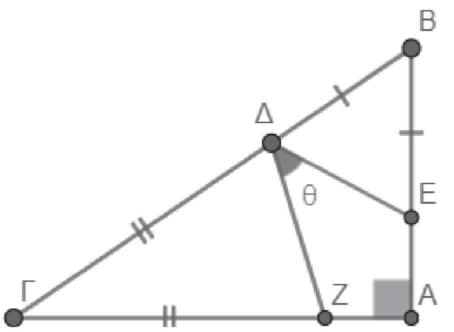
$x + y + z + w$

$= 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta - \gamma + 180^\circ - \delta - \varepsilon + 180^\circ - \zeta$

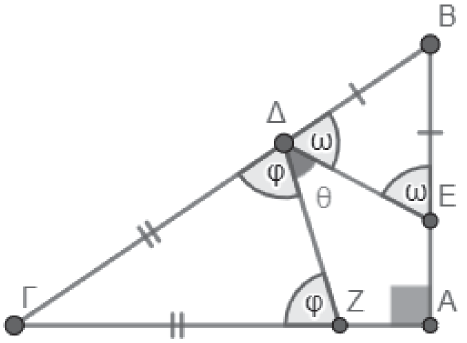
$= 720^\circ - (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) - (\varepsilon + \zeta)$

$= 720^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

10.



$\theta =$;



Ισοσκελές $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta Z}$: $\varphi = \dfrac{180^\circ - \hat{\Gamma}}{2}$

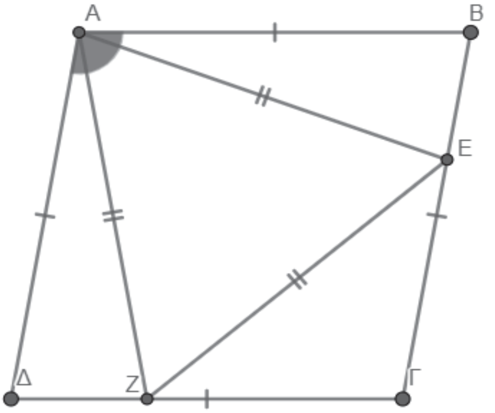
Ισοσκελές $\overset{\Delta}{B\Delta E}$: $\omega = \dfrac{180^\circ - \hat{B}}{2}$

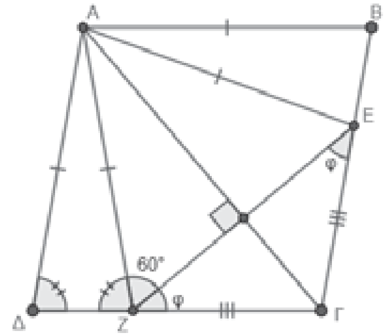
$Z\hat{\Delta}E = 180^\circ - (\varphi + \omega) = 180^\circ - \dfrac{360^\circ - \left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right)}{2}$

$= \dfrac{360^\circ - 360^\circ + 90^\circ}{2} = 45^\circ.$

11. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και το ΑΖΕ ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές ίσες με αυτές του ρόμβου. $B\hat{A}\Delta =$;

Το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ΑΓ, οπότε το $\overset{\Delta}{\Gamma E Z}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\varphi = \dfrac{180^\circ - \hat{\Gamma}}{2}$.





Από το ισοσκελές $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ έχουμε

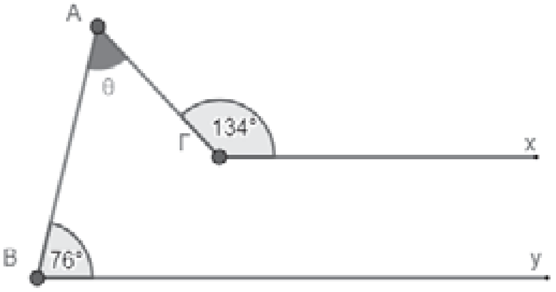
$A\hat{Z}\Delta = \hat{\Delta} = 180^o - \hat{\Gamma}$.

Είναι $A\hat{Z}\Delta + 60^o + \varphi = 180^o$

$$180^o - \hat{\Gamma} + 60^o + \frac{180^o - \hat{\Gamma}}{2} = 180^o$$

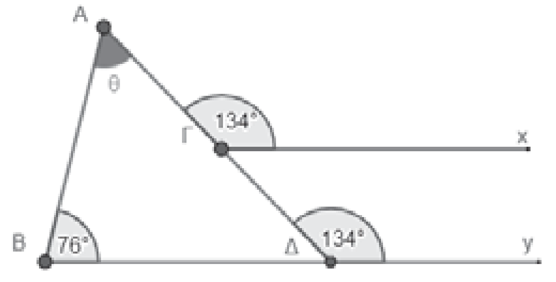
$540^o - 3\hat{\Gamma} = 240^o \Rightarrow B\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} = 100^o$.

12. Αν Γx ∥ By, τότε θ =;

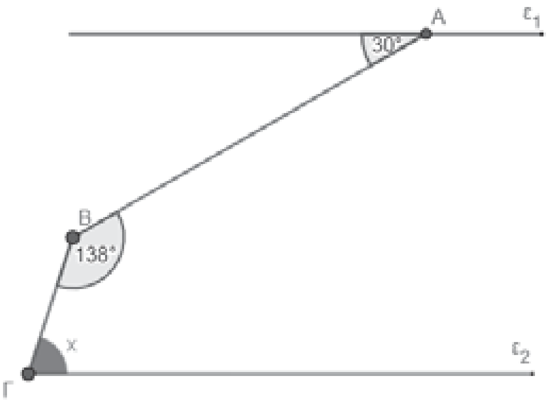


Αν Δ είναι η τομή των ΑΓ και By, τότε $A\hat{\Delta}y = 134^o$.

Η $A\hat{\Delta}y$ είναι εξωτερική γωνία στο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ άρα: $134^o = \theta + 76^o \Rightarrow \theta = 58^o$.

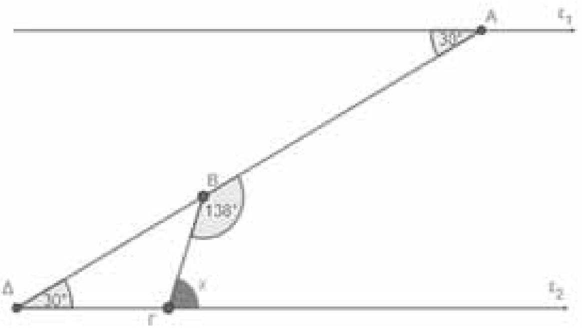


13. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, τότε x =;

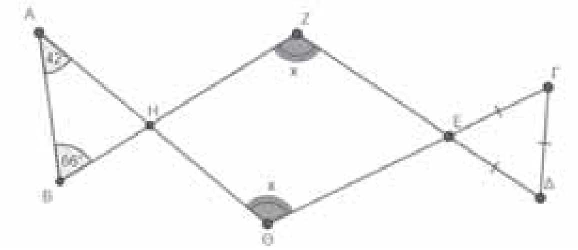


Έστω Δ η τομή των ΑΒ και ε_2.

Είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$ και $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^o - 138^o = 42^o$. Η x είναι εξωτερική γωνία του $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$, άρα $x = 30^o + 42^o = 72^o$.

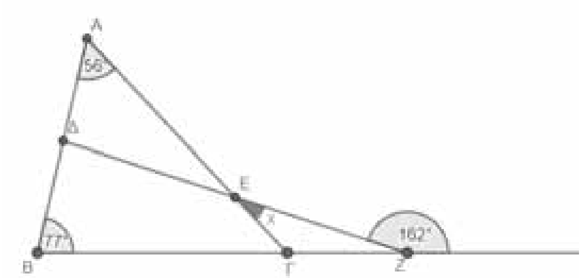


14. Αν το $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$ είναι ισόπλευρο τότε $x =;$



Το $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$ είναι ισόπλευρο, άρα $\hat{E} = 60^o$.
Στο $\overset{\Delta}{ABH}$ είναι
$\hat{H} = 180^o - 66^o - 42^o = 72^o$.
Στο τετράπλευρο ΕΘΗΖ είναι:
$2x + 60^o + 72^o = 360^o$
$x = 144^o$.

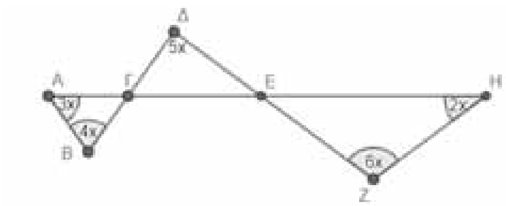
15.



$x =;$

Η $\hat{E\Gamma Z}$ είναι εξωτερική στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, άρα
$\hat{E\Gamma Z} = 56^o + 77^o = 133^o$.
Στο $\overset{\Delta}{\Gamma EZ}$ έχουμε:
$\hat{E\Gamma Z} + x = 162^o$
$133^o + x = 162^o$
$x = 29^o$.

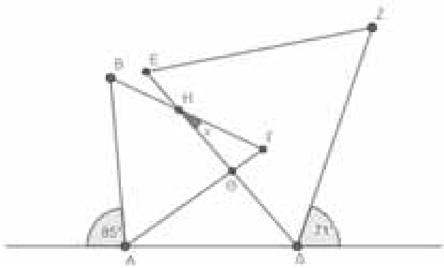
16.



$x =;$

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\hat{\Gamma} = 180^o - 7x$
$\overset{\Delta}{EZH}$: $\hat{E} = 180^o - 8x$
$\overset{\Delta}{\Gamma E\Delta}$: $5x + (180^o - 7x) + (180^o - 8x) = 180^o$
$10x = 180^o$, $x = 18^o$.

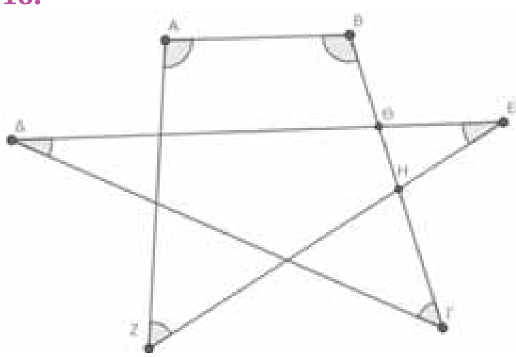
17. Αν τα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ είναι ισόπλευρα τότε



$x =;$

$\hat{\Theta A\Delta} = 180^o - 85^o - 60^o = 35^o$.
$\hat{\Theta\Delta A} = 180^o - 71^o - 60^o = 49^o$.
$\overset{\Delta}{\Theta A\Delta}$: $\hat{A\Theta\Delta} = 180^o - 49^o - 35^o = 96^o$.
$\overset{\Delta}{H\Theta\Gamma}$: $x = 180^o - 60^o - 96^o = 24^o$.

18.

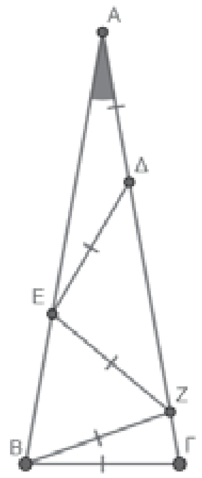


$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 45^o\kappa$, τότε $\kappa =;$

Στο ΑΒΗΖ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Z} + \hat{BHZ} = 360^o (1)$.
Η $\hat{BHZ}$ είναι εξωτερική γωνία στο $\overset{\Delta}{\Theta HE}$, άρα
$\hat{BHZ} = \hat{E} + \hat{H\Theta E} (2)$.
Η $\hat{H\Theta E}$ είναι εξωτερική γωνία στο $\overset{\Delta}{\Theta\Delta\Gamma}$, άρα
$\hat{H\Theta E} = \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} (3)$. Από τις (1), (2) και (3)
έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 360^o$, έτσι
$45^o\kappa = 360^o$, $\kappa = 8$.

<table>
<tr>
<td>

19.



Αν ΑΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΒ = ΒΓ και ΑΒ = ΑΓ τότε $\hat{A}$ =;

</td>
<td>

Ισοσκελές $\overset{\triangle}{\Delta A E}$: $\widehat{\Delta E A} = \hat{A} = x$.

$\widehat{E\Delta Z}$ εξωτερική γωνία στο $\overset{\triangle}{\Delta A E}$: $\widehat{E\Delta Z} = \hat{A} + \widehat{\Delta E A} = 2x$.

Ισοσκελές $\overset{\triangle}{E\Delta Z}$: $\widehat{EZ\Delta} = \widehat{E\Delta Z} = 2x$

$\widehat{ZEB}$ εξωτερική γωνία στο $\overset{\triangle}{ZAE}$: $\widehat{ZEB} = \hat{A} + \widehat{EZA} = 3x$.

Ισοσκελές $\overset{\triangle}{ZEB}$: $\widehat{ZBE} = \widehat{ZEB} = 3x$

$\widehat{BZ\Gamma}$ εξωτερική γωνία στο $\overset{\triangle}{ZAB}$: $\widehat{BZ\Gamma} = \hat{A} + \widehat{ZBA} = 4x$.

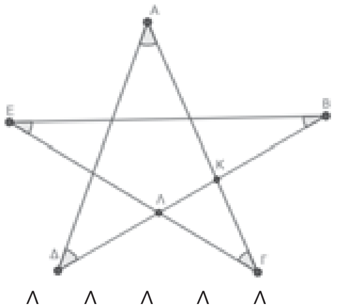
Ισοσκελές $\overset{\triangle}{Z\Gamma B}$: $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{BZ\Gamma} = 4x$

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: , $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ άρα

$x + 4x + 4x = 180^o$, έτσι $\hat{A} = x = 20^o$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

20.



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} =;$

</td>
<td>

$\overset{\triangle}{A\Delta K}$: $\hat{A} + \hat{\Delta} + \widehat{AK\Delta} = 180^o$ (1).

$\widehat{AK\Delta}$ εξωτερική στο $\overset{\triangle}{K\Gamma\Lambda}$, άρα $\widehat{AK\Delta} = \hat{\Gamma} + \widehat{K\Lambda\Gamma}$ (2).

$\widehat{K\Lambda\Gamma}$ εξωτερική στο $\overset{\triangle}{\Lambda BE}$, άρα $\widehat{K\Lambda\Gamma} = \hat{E} + \hat{B}$ (3). Από τις (1), (2), (3) έχουμε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^o.$$

</td>
</tr>
</table>

Βιβλιογραφία

1. D. C. Alexander, G. M. Koeberlein, Elementary Geometry, Brooks/Cole, USA. , 2007.
2. S. R. Clemens κ.α. Geometry, Addison - welsey Publishing Company, USA, 1982.
3. H. R. Jacobs, Geometry, W. H. Free and Company USA, 1974.
4. Μ. Λάμπρου, Καγκουρό, Τόμοι 14, Ηράκλειο.
5. S. Lang – G. Murrou, Geometr, Spinger – Verlog, New York, 1998.
6. D. Rayner, General Mathematics: Revision and Practice, Oxford University Press, Great Britain, 1988.
7. Περιοδικό Quantum, 44 τεύχη, Κάτοπτρο, Αθήνα.
8. Περιοδικό Φ, 7 τεύχη, Β. Βισκαρουδάκης, Αθήνα.

Οι Εξισώσεις 1ου Βαθμού στην επίλυση προβλημάτων

Για την λύση των προβλημάτων που , τα οποία μάλιστα έχει επικρατήσει να λέγονται και προβλήματα **''πρακτικής αριθμητικής''**, χρησιμοποιούμε φυσικά τις γνωστές **''τέσσερις''** πράξεις.

Ανάλογα φυσικά με την δυσκολία που παρουσιάζει το κάθε πρόβλημα, για να τα λύσουμε, απαιτούνται ιδιαίτερα δύσκολες και σύνθετες σκέψεις με αποτέλεσμα η λύση τους να μην είναι και τόσο απλή.

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε αυτή τη δυσκολία η λύση των προβλημάτων γίνεται επίσης με την βοήθεια εξισώσεων.

Θα λύσουμε στη συνέχεια 3 προβλήματα και με τους δύο τρόπους που αναφέραμε παραπάνω, προκειμένου να αντιληφθούμε την βοήθεια που μας παρέχουν οι εξισώσεις στην λύση των προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ο

Τα τρία εξαδέλφια ο Ορέστης, ο Ιάσονας και η Λυδία μοιράσθηκαν 1800ευρώ.Να βρεθεί το χρηματικό ποσό που πήρε κάθε παιδί αν γνωρίζετε ότι: Ο Ορέστης πήρε 100ευρώ περισσότερα από τον Ιάσονα, και η Λυδία πήρε 300ευρώ λιγότερα από το διπλάσιο ποσό των χρημάτων του Ιάσονα.

Λύση (Με πρακτική αριθμητική)

Αν ο Ορέστης πάρει 100ευρώ λιγότερα τότε θα πάρει όσα χρήματα πήρε και ο Ιάσονας αλλά στο διανεμόμενο ποσό θα περισσεύσουν 100ευρώ.

Αντίστοιχα αν η Λυδία πάρει 300ευρώ επί πλέον, τότε η Λυδία θα πάρει διπλάσιο χρηματικό ποσό από τον Ιάσονα, αλλά θα χρειασθούν 300ευρώ ακόμα για να γίνει το μοίρασμα των χρημάτων με αυτό τον τρόπο.

Στην περίπτωση όμως αυτή, δηλ εάν τα χρήματα μοιρασθούν με αυτόν τον τρόπο, το διανεμόμενο ποσό θα είναι μεν τετραπλάσιο του ποσού που παίρνει ο Ιάσονας, αλλά πρέπει και να αυξηθεί κατά 200ευρώ, αφού απαιτούνται 300ευρώ επί πλέον για το νέο τρόπο μοιράσματος σχετικά με της Λυδία ενώ περισσεύουν 100ευρώ από το μοίρασμα αυτό σχετικά με τον Ορέστη.

Στην περίπτωση λοιπόν αυτή το τετραπλάσιο ποσό από αυτό που πήρε ο Ιάσονας είναι 1800€ + 200€ = 2000€. Άρα ο Ιάσονας πήρε (2000€):4= 500€.

Ο Ορέστης πήρε 500€+100€ = 600€ και η Λυδία πήρε 2·(500€) –300€= 700€.

Λύση (Με εξίσωση)

Για λύσουμε ένα πρόβλημα με εξίσωση:

''Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα του Ελληνικού ή άλλου αλφαβήτου με την βοήθεια του οποίου αλλά και με παραστάσεις του, εκφράζουμε τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος''.

Αυτό όπως αντιλαμβάνεσθε απαιτεί ένα ''**υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών γνώσεων**''.

Αφού: ***''για ένα αριθμό που δεν γνωρίζουμε, χρησιμοποιούμε γράμμα''*** με το οποίο κάνουμε όλες τις επιτρεπόμενες πράξεις.

Προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημά μας, πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος θα συμβολίσουμε με την βοήθεια του αγνώστου. Η επιλογή αυτή είναι ένα από τα δυσκολότερα σημεία του προβλήματος.

Για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας σας συνιστούμε να μελετάτε αρκετά το πρόβλημα που θα λύσετε, προκειμένου να κατανοήσετε πως συνδέονται μεταξύ τους οι άγνωστες ζητούμενες ποσότητες του προβλήματος. Σκοπός είναι να πετύχουμε την απλούστερη έκφραση όλων των άλλων αγνώστων ποσοτήτων του προβλήματος.

Φυσικά μπορείτε να συμβολίσετε με την βοήθεια του αγνώστου οποιαδήποτε από τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή όμως ενδεχομένως να συναντήσετε δυσκολίες στην έκφραση των άλλων αγνώστων ποσοτήτων του.

Για την καλύτερη κατανόηση αυτού που εξετάζουμε, κρίνουμε σκόπιμο να εισάγουμε τον παρακάτω πίνακα, στον οποίο θα παρακολουθήσουμε την συμπλήρωση της 2ης γραμμής του. Σας προτείνουμε δε να τον συμπληρώσετε εργαζόμενοι ανάλογα.

Χρηματικό ποσό που πήρε κάθε παιδί

ΟΡΕΣΤΗΣ	ΙΑΣΟΝΑΣ	ΛΥΔΙΑ
x		
x+100	x	2x–300
		x

Αν λοιπόν συμβολίσουμε με x τα χρήματα που πήρε ο Ιάσονας, τότε ο Ορέστης πήρε x+100 και η Λυδία πήρε 2x–300, όπως φαίνεται και στον πίνακα.

Προκύπτει τότε η ισότητα:

x+x+100+2x–300=1800 η οποία λέγεται ¨**εξίσωση του προβλήματος**¨ την οποία και επιλύουμε. Έχουμε λοιπόν:

$x+x+100+2x-300=1800$ ή $4x= 1800-100+300$ ή $4x = 2000$ ή $x=\dfrac{2.000}{4} = 500$. Άρα ο Ιάσονας πήρε 500€ – ο Ορέστης 500€ +100€ = 600€ και η Λυδία πήρε (2·500–300) € =700€.

Πρόβλημα 2ο

Με τα χρήματα που είχα έκανα δύο αγορές. Για την πρώτη διέθεσα το ένα τρίτο των χρημάτων μου, ενώ για την δεύτερη το ένα πέμπτο των χρημάτων αυτών και επί πλέον 25ευρώ. Να βρεθεί πόσα χρήματα είχα αρχικά πριν από τις αγορές, αν γνωρίζετε ότι μετά τις αγορές που έκανα μου περίσσευσαν 45 €.

Λύση (Με πρακτική αριθμητική)

Από τα πρόβλημα προκύπτει ότι και για τις δύο αγορές διέθεσα:

Το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων μου και ακόμα 25€. Επομένως διέθεσα: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ των χρημάτων μου και 25€ ακόμα. Τώρα κάνουμε την σκέψη:

Εάν στην δεύτερη αγορά δεν διέθετα τα 25 επί πλέον ευρώ, τότε αυτά θα είχαν περισσεύσει στα χρήματά μου οπότε μετά τις αγορές θα είχα: 45€ και 25€ δηλ. 70€, ενώ θα είχα ξοδεύσει τα $\frac{8}{15}$ των χρημάτων μου.

Επομένως μετά τις αγορές θα μου απέμεναν τα $\frac{7}{15}$ των χρημάτων μου αφού, εάν από το ακέραιο ποσό των χρημάτων αφαιρέσω τα $\frac{8}{15}$ έχω: $1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$.

Άρα τα $\frac{7}{15}$ των χρημάτων μου είναι 70€. Τότε όμως τα χρήματα που είχα πριν τις αγορές που έκανα ήταν: $(70€):\frac{7}{15} = (70€)\cdot\frac{15}{7} = 150€$.

Λύση (Με εξίσωση)

Αφού μελετήσουμε αρκετά το πρόβλημα όπως είπαμε παραπάνω, είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα. Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε την άγνωστη ποσότητα με την οποία θα συμβολίσουμε με τον άγνωστο και στη συνέχεια να εκφράσουμε τις άλλες άγνωστες ποσότητες. Με την εμπειρία που θα αποκτήσουμε η επιλογή αυτή θα γίνεται ευκολότερα και δεν θα χρειάζεται η χρήση πίνακα.

Για το πρόβλημά μας αντιλαμβάνεσθε ότι η άγνωστη ποσότητα είναι μία, που είναι το χρηματικό ποσό που είχα πριν τις αγορές.

Θα συμβολίσουμε λοιπόν με x το άγνωστο ποσό των χρημάτων και θα εκφράσουμε με αυτό όλες οι άλλες ποσότητες του προβλήματος. Τότε: Στην 1η αγορά διέθεσα $\frac{x}{3}$€, στην 2η αγορά διέθεσα τα $\left(\frac{x}{5}+25\right)$€ και μου απέμειναν (x– 45)€.

Επομένως τα χρηματικά ποσά που διέθεσα, είναι: $\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+25\right)$€

Επειδή όμως αρχικά είχα x€ και μου απέμειναν 45€ , προφανώς διέθεσα (x –45)€.

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση: $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+25=x-45$ την οποία και επιλύουμε:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+25=x-45 \text{ ή } 15\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+25\right)=15\cdot(x-45) \text{ οπότε:}$$

$$5x+3x+375 = 15x–675 \text{ ή } 5x+3x–15x = –675–375 \text{ ή } –7x = –1050 \text{ ή } 7x = 1050 \text{ ή } x=\frac{1.050}{7}=150$$

Επομένως είχα 150€.

Από τα παραπάνω εύκολα διαπιστώνουμε ότι η λύση ενός προβλήματος με την βοήθεια των εξισώσεων γίνεται ευκολότερη και απλούστερη, αφού δεν απαιτούνται σύνθετες σκέψεις.

Πρόβλημα 3ο

Σε ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών οι 3 τηλεοράσεις κοστίζουν όσο 4 tablets και τα 5 tablets όσο τα 3 κινητά. Αν αγοράσει κάποιος 5 τεμάχια από το κάθε είδος θα πληρώσει 9.000€.Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία τηλεόραση, το ένα tablet, και το ένα κινητό. (Τα μοντέλα κάθε είδους είναι τα ίδια).

Λύση (Με πρακτική αριθμητική)

Αφού τα 5 τεμάχια από κάθε είδος κοστίζουν 9.000€ άρα μία τηλεόραση, ένα tablet και ένα κινητό κοστίζουν 9.000€ :5=1.800€.

Από το παραπάνω προκύπτει ότι 3 τηλεοράσεις, 3 tablets και 3 κινητά τηλέφωνα κοστίζουν 3×1.800€=5.400€.

Όμως οι 3 τηλεοράσεις ισοδυναμούν με 4 tablets ενώ τα 3 κινητά τηλέφωνα ισοδυναμούν με 5 tablets οπότε τα 4+3+5 = 12 tablets κοστίζουν 5.400€ και επομένως το ένα tablet κοστίζει 5.400€:12=450€ άρα τα 4 tablets κοστίζουν 1.800€ και επομένως και οι 3 τηλεοράσεις κοστίζουν 1.800€ άρα η μία τηλεόραση κοστίζει 600€.

Τελικά το ένα κινητό τηλέφωνο κοστίζει 1.800€ – 450€ – 600€ = 750€.

Λύση (Με εξίσωση)

Ας υποθέσουμε ότι η μία τηλεόραση κοστίζει x (ευρώ), τότε το ένα tablet κοστίζει $\frac{3}{4}x$ και το κινητό τηλέφωνο κοστίζει $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{5}{4}x$. Με βάση τα παραπάνω και σύμφωνα με την εκφώνηση θα έχουμε: $5\cdot x+5\cdot\frac{3}{4}x+5\cdot\frac{5}{4}x=9.000$ €.

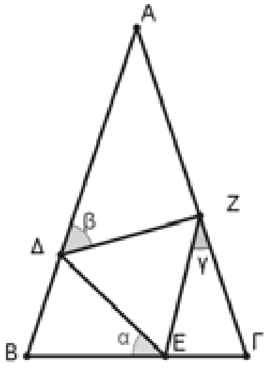
Η εξίσωση που προκύπτει είναι η $5x+\frac{15}{4}x+\frac{25}{4}x=9.000$ € δηλαδή 5x+10x=9.000€ και τελικά x=9.000€:15=600€ (κόστος τηλεόρασης). Τελικά το tablet θα κοστίζει $\frac{3}{4}\cdot 600$ €=450€ και το κινητό τηλέφωνο θα κοστίζει $\frac{5}{4}\cdot 600$ €=750€.

Β΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Για τον αριθμό α ισχύει $α^2=25^{64}\cdot 64^{25}$. Ποιο είναι το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού α;

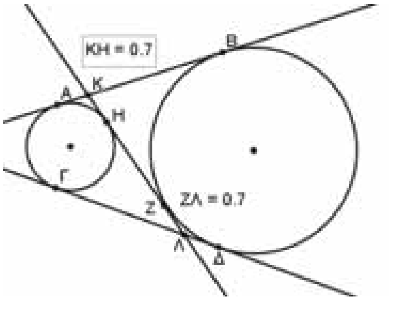
2) Στις πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) βρίσκονται οι κορυφές Δ, Ε, Ζ ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις γωνίες $\hat{α}, \hat{β}, \hat{γ}$.



3) Ο αριθμός α679β διαιρείται με το 72. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

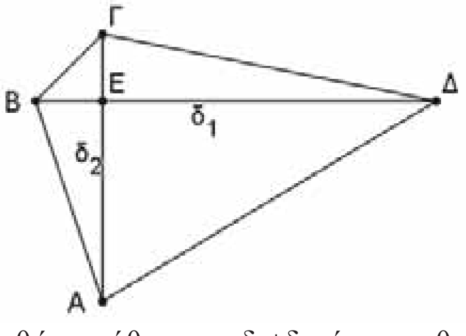
4) Έχουμε 2 κύκλους, τις εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες ΑΒ και ΓΔ και την ΗΖ κοινή εσωτερική εφαπτομένη που κόβει τις άλλες δύο στα σημεία Κ και Λ. Μετρώντας τα τμήματα ΚΗ και ΖΛ παρατηρούμε ότι έχουν το ίδιο μήκος. Να ελέγξετε αν αυτό ισχύει πάντα, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την θέση και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

5) Τον μήνα Μάρτιο σε μία περιοχή παρατήρησαν οι μετεωρολόγοι ότι για ένα διάστημα όταν έβρεχε το απόγευμα ο ουρανός ήταν καθαρός το πρωί. Όταν έβρεχε το πρωί ο ουρανός ήταν καθαρός το απόγευμα. Οι ημέρες κατά τις οποίες έβρεχε ήταν συνολικά 9, ενώ για 6 ημέρες ο ουρανός ήταν καθαρός το απόγευμα και για 7 ημέρες ήταν καθαρός το πρωί.
Πόσες ημέρες ήταν το διάστημα της παρατήρησης των μετεωρολόγων;



Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 120

1) Στα 4 ορθογώνια τρίγωνα υπολογίζουμε τα εμβαδά και τα προσθέτουμε.



$$\frac{ΒΕ\cdot ΓΕ}{2}+\frac{ΓΕ\cdot ΔΕ}{2}+\frac{ΒΕ\cdot ΑΕ}{2}+\frac{ΔΕ\cdot ΑΕ}{2}.$$

Βγάζοντας κοινούς παράγοντες στα κλάσματα έχουμε:

$$\frac{ΓΕ}{2}\cdot(ΒΕ+ΔΕ)+\frac{ΑΕ}{2}\cdot(ΒΕ+ΔΕ)=$$

$$=\frac{ΓΕ}{2}\cdot δ_1+\frac{ΑΕ}{2}\cdot δ_1= δ_1\cdot(\frac{ΓΕ}{2}+\frac{ΑΕ}{2})=\frac{δ_1\cdot δ_2}{2}$$

καθώς το άθροισμα $δ_1+δ_2$ είναι σταθερό η μέγιστη τιμή του γινομένου επιτυγχάνεται όταν $δ_1 = δ_2 = 24$. Τελικά το μέγιστο εμβαδόν του τετραπλεύρου θα είναι $\frac{24\cdot 24}{2}=288$ (cm^2).

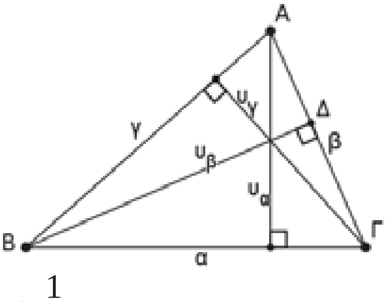
2) Έστω α, β οι πλευρές των δύο τετραγώνων με α>β. Τα εμβαδά των τετραγώνων είναι α^2 και β^2 αντίστοιχα.

Αφού $\frac{\alpha}{\beta}=\lambda$ άρα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\lambda^2$ και επομένως $\alpha^2=\lambda^2\cdot\beta^2$. Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\lambda^2\cdot\beta^2+\beta^2}{\lambda^2\cdot\beta^2-\beta^2}=\frac{\beta^2\cdot\left(\lambda^2+1\right)}{\beta^2\cdot\left(\lambda^2-1\right)}=\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}$$

3) Αν το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι Ε τότε $\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\beta\cdot\upsilon_\beta=\gamma\cdot\upsilon_\gamma=2E$.
Από αυτό προκύπτει ότι

$$\alpha=\frac{2E}{\upsilon_\alpha},\ \beta=\frac{2E}{\upsilon_\beta},\ \gamma=\frac{2E}{\upsilon_\gamma}$$



Είναι γνωστό ότι σε κάθε τρίγωνο θα πρέπει α<β+γ, β<α+γ και γ<α+β από όπου προκύπτει ότι θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$\frac{2E}{\upsilon_\alpha}<\frac{2E}{\upsilon_\beta}+\frac{2E}{\upsilon_\gamma}\ \text{ή}\ \frac{1}{\upsilon_\alpha}<\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}\ \text{ή}\ \frac{1}{5}<\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$$

η ανισότητα όμως αυτή δεν ισχύει άρα είναι αδύνατον να κατασκευαστεί τρίγωνο με ύψη 5, 12, 13 εκατοστά. Εδώ να σημειωθεί ότι δεν είναι αναγκαίο να ελεγχθούν οι άλλες 2 ανισότητες.

4) Ας υποθέσουμε ότι ο έμπορος πούλησε x κιλά ζάχαρη με κέρδος 7% και 100-x κιλά ζάχαρη με κέρδος 17%. Θα χρειαστεί να υποθέσουμε ότι ο έμπορος αγόρασε τη ζάχαρη (του κόστισε) α€ το κιλό. Τότε από τα x κιλά, με κέρδος 7%, θα εισπράξει σε ευρώ $x\cdot1{,}07\cdot\alpha$ ενώ από τα υπόλοιπα κιλά με κέρδος 17% θα εισπράξει $(100-x)\cdot1{,}17\cdot\alpha$. Τέλος η συνολική του είσπραξη (κέρδος 10%) θα είναι $100\cdot1{,}1\cdot\alpha$. Με βάση τα προηγούμενα θα ισχύει $x\cdot1{,}07\cdot\alpha+(100-x)\cdot1{,}17\cdot\alpha=100\cdot1{,}1\cdot\alpha$ από όπου προκύπτει ότι $117-0{,}1\cdot x=110$ άρα $x=70$.

5) Αρχικά ας υποθέσουμε ότι μία μηχανή τύπου Α χρειάζεται x ημέρες να κατασκευάσει όλα τα αντικείμενα όταν εργάζεται μόνη της. Τότε η μηχανή αυτή σε μία ημέρα παράγει το $\frac{1}{x}$ του συνόλου των αντικειμένων. Ας υποθέσουμε τώρα ότι μία μηχανή τύπου Β χρειάζεται y ημέρες να κατασκευάσει όλα τα αντικείμενα όταν εργάζεται μόνη της. Τότε η μηχανή αυτή σε μία ημέρα παράγει το $\frac{1}{y}$ του συνόλου των αντικειμένων. Με βάση τα προηγούμενα 3 μηχανές τύπου Α και 5 μηχανές τύπου Β παράγουν σε 3 ημέρες $3\cdot\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{y}\right)=\frac{19}{20}$ των αντικειμένων.

Επιπλέον 4 μηχανές τύπου Α και 18 μηχανές τύπου Β σε 2 ημέρες παράγουν $2\cdot\left(\frac{4}{x}+\frac{18}{y}\right)=\frac{14}{15}$ αντικείμενα.

Οι ισότητες αυτές δίνουν $\frac{72}{x}+\frac{120}{y}=\frac{152}{20}$ και $\frac{72}{x}+\frac{144}{y}=\frac{126}{15}$ αντίστοιχα.

Οι ισότητες αυτές με αφαίρεση κατά μέλη δίνουν $\frac{24}{y}=\frac{48}{60}$ από όπου προκύπτει y=30.

Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση

Αρδαβάνη Καλλιόπη – Μάλλιαρης Χρήστος

Στην Αλγεβρα λέμε ταυτότητα κάθε ισότητα που είναι αληθής για όλες τις τιμές των μεταβλητών της. Αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι οι :

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	Τετράγωνο αθροίσματος των α,β
$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	Τετράγωνο διαφοράς των α,β
$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$	Διαφορά τετραγώνων
$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	Κύβος αθροίσματος των α,β
$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$	Κύβος διαφοράς των α,β

Μερικοί τρόποι απόδειξης μιας σχέσης ισότητας Α = Β.

➢ Να αποδείξετε ότι:
$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$

Θα δείξουμε ότι: Α=…= Β πηγαίνοντας από το Α΄ μέρος στο Β΄ μέρος.

Α΄ μέρος: $(x+y)^2-2xy=x^2+2xy+y^2-2xy=x^2+y^2$
άρα σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε την ισότητα:

$$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$$

➢ Να αποδείξετε ότι:
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

Θα δείξουμε ότι Β=…=Α πηγαίνοντας από το Β΄ μέρος στο Α΄ μέρος.

Β΄ μέρος: $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2=x^3+y^3$
άρα σύμφωνα με μεταβατική και αντιμεταθετική ιδιότητα έχουμε την ισότητα:

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

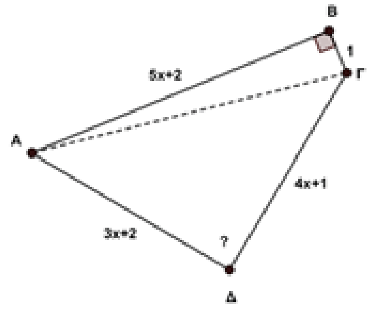
➢ Να αποδείξετε ότι:
$2(x+y)^2-2(x^2+y^2)=(x+y)^2-(x-y)^2$

Θα δείξουμε ότι Α=…=C και Β=…=C άρα Α=Β

Α΄ μέρος: $2(x+y)^2-2(x^2+y^2)=2(x^2+2xy+y^2)-2x^2-2y^2=$
$=2x^2+4xy+2y^2-2x^2-2y^2=\mathbf{4xy}$
Β΄ μέρος: $(x+y)^2-(x-y)^2=x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)=$
$=x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2=\mathbf{4xy}$
Άρα αποδείξαμε τη ζητούμενη ισότητα.

➔ Άσκηση 1

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β. Να δείξετε ότι και το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο στο Δ.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και θα έχουμε: $A\Gamma^2=AB^2+B\Gamma^2=(5x+2)^2+1^2=25x^2+20x+4+1=25x^2+20x+5$ άρα $A\Gamma^2=25x^2+20x+5$ (1)

Για να είναι το τρίγωνο ΑΔΓ ορθογώνιο στο Δ θα πρέπει να ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα

δηλαδή να ισχύει: $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$. Θα υπολογίσουμε το:
$ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = (3x+2)^2 + (4x+1)^2 = 9x^2 + 12x + 4 + 16x^2 + 8x + 1 = 25x^2 + 20x + 5 (2)$.
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$ άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Δ.

➔ **Άσκηση 2**

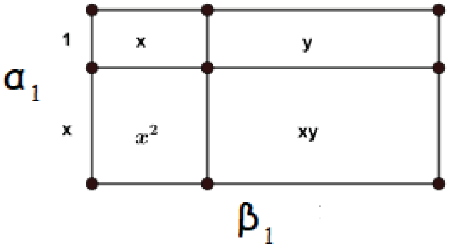
Δίνονται τα παρακάτω ορθογώνια. Να βρείτε:

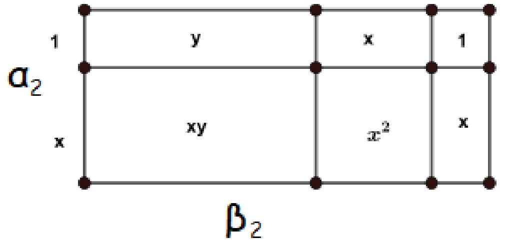
α) τα μήκη των πλευρών τους $α_1$, $β_1$ και $α_2$, $β_2$ και τα εμβαδά τους $Ε_1$, $Ε_2$ αντίστοιχα.

β) τις αντίστοιχες αλγεβρικές παραστάσεις Α , Β που εκφράζουν το εμβαδόν τους από το άθροισμα των μερών τους όπως φαίνονται στο σχήμα.

γ) να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β.

δ) να συγκρίνετε τις παραστάσεις Α και Β με τα εμβαδά $Ε_1$ και $Ε_2$ του α) ερωτήματος.





Λύση

α) $α_1=x+1$, $β_1=x+y$, $Ε_1=(x+1)(x+y)$ και $α_2=x+1$, $β_2=x+y+1$, $Ε_2=(x+1)(x+y+1)$

β) $Α=x+y+x^2+xy$ και $Β=y+x+1+xy+x^2+x$

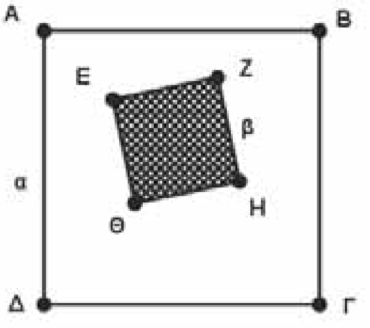
γ) $Α=x+y+x^2+xy= x+y+x(x+y)=(x+y)(1+x)$

$Β= y+x+1+xy+x^2+x=x+1+y+xy+x^2+x=(x+1)+y(1+x)+x(x+1)=(x+1)(1+y+x)$

δ) Παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις $Α=Ε_1$ και $Β=Ε_2$ και οι μεν Α,Β είναι σε ανοιγμένη μορφή ενώ οι $Ε_1$ και $Ε_2$ στην παραγοντοποιημένη μορφή.

➔ **Άσκηση 3**

Δίνονται τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ με πλευρές α, β αντίστοιχα (β<α).



α) να δείξετε ότι το εμβαδόν του λευκού χωρίου ισούται με (α–β)(α+β).

β) να δείξετε ότι τα μήκη α, β και $\sqrt{(α-β)(α+β)}$ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα α.

Λύση

α) Έστω ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι Ε τότε θα ισχύει:
$Ε = Ε_{ΑΒΓΔ} – Ε_{ΕΖΗΘ}$ (1). Αλλά $Ε_{ΑΒΓΔ} = α^2$ (2) και $Ε_{ΕΖΗΘ} = β^2$ (3)
Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε: $Ε = α^2–β^2 = (α–β)(α+β)$

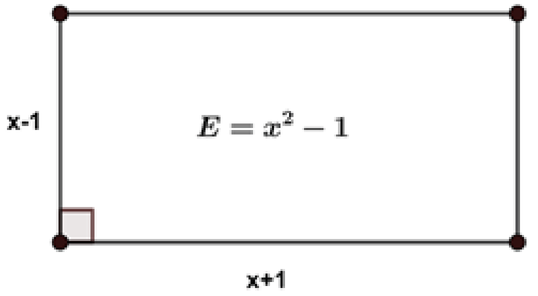
β) $α^2-β^2=Ε$ ή $α^2=β^2+Ε$ ή $α^2=β^2+\left(\sqrt{Ε}\right)^2$ ή $α^2=β^2+\left(\sqrt{(α-β)(α+β)}\right)^2$. Άρα τα μήκη α, β και $\sqrt{(α-β)(α+β)}$, αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την πλευρά α.

➔ **Άσκηση 4**

Δίνεται το ορθογώνιο σχήμα ΑΒΓΔ με πλευρές x–1, x+1 (x>10):

Σε αυτό μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε σε μία πλευρά 1 μονάδα ή 2 μονάδες και συγχρόνως να αφαιρέσουμε ή να προσθέσουμε στην άλλη πλευρά 1 μονάδα ή 2

μονάδες. Αν π.χ. προσθέσω στην μία πλευρά αφαιρώ από την άλλη όχι απαραίτητα τον ίδιο αριθμό.



Θέλουμε να βρούμε στα νέα ορθογώνια που δημιουργούνται ποιο από αυτά έχει το μικρότερο και ποιο το μεγαλύτερο εμβαδόν σε σχέση με το αρχικό.

Λύση

	Πλευρά 1η	**Πλευρά 2η**	**Εμβαδόν**
Αρχικό σχήμα	x–1	x+1	$E=(x-1)(x+1)=x^2-1$
1ο σχήμα	x–1**–1**=x–2	x+1**+1**=x+2	$E_1=(x-2)(x+2)=x^2-4$
2ο σχήμα	x–1**–1**=x–2	x+1**+2**=x+3	$E_2=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$
3ο σχήμα	x–1**–2**=x–3	x+1**+1**=x+2	$E_3=(x-3)(x+2)=x^2-x-6$
4ο σχήμα	x–1**–2**=x–3	x+1**+2**=x+3	$E_4=(x-3)(x+3)=x^2-9$
5ο σχήμα	x–1**+1**=x	x+1**–1**=x	$E_5=xx=x^2$
6ο σχήμα	x–1**+1**=x	x+1**–2**=x–1	$E_6=x(x-1)=x^2-x$
7ο σχήμα	x–1**+2**=x+1	x+1**–1**=x	$E_7=(x+1)x=x^2+x$
8ο σχήμα	x–1**+2**=x+1	x+1**–2**=x–1	$E_8=(x+1)(x-1)=x^2-1$

Πρέπει λοιπόν να συγκρίνουμε τις ποσότητες E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 και E_8. Με μια αρχική παρατήρηση εύκολα έχουμε την εξής διάταξη: $x^2-x-6 < x^2-x < x^2-9 < x^2-4 < x^2-1 < x^2 < x^2+x$, για όλα τα $x>10$, δηλαδή: $E_3<E_6<E_4<E_1<E_8<E_5<E_7$, μένει να βρούμε την ποσότητα $E_2= x^2+x-6$ πώς διατάσσεται μαζί με τις παραπάνω. ***ΘΥΜΑΜΑΙ ότι αν α–β>0 τότε α>β*** οπότε Το $E_5<E_2<E_7$ αφού για $x>10$ η διαφορά $E_2-E_5>0$ και $E_7-E_2>0$. Πιο συγκεκριμμένα $(x^2+x-6)-(x^2)=x-6>0$ για $x>10$ και $(x^2+x)-(x^2+x-6)= 6>0$. Συνεπώς έχουμε: $x^2-x-6<x^2-x<x^2-9<x^2-4<x^2-1<x^2<x^2+x-6<x^2+x$ ή $E_3<E_6<E_4<E_1<E_8<E_5<E_2<E_7$. Αρα το 3ο σχήμα έχει το μικρότερο εμβαδόν και το 7ο σχήμα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Το 5ο σχήμα έχει εμβαδόν ίσο με το αρχικό.

➔ **Άσκηση 5**

Να υπολογίσετε τα αποτελέσματα χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις

α) $\mathbf{2022^2-2021^2=}$

β) $\mathbf{1{,}73^2-1{,}72^2=}$

γ) $\mathbf{1{,}46^2-1{,}54^2=}$

δ) $\mathbf{(4{,}24-0{,}14)^2-(6{,}78-0{,}86)^2=}$

Λύση

α) $2022^2-2021^2=(2022-2021)(2022+2021)=1\bullet 4043=4043$

β) $1{,}73^2-1{,}72^2=(1{,}73-1{,}72)(1{,}73+1{,}72)=0{,}01\bullet 3{,}45=0{,}0345$

γ) $1{,}46^2-1{,}54^2=(1{,}46-1{,}54)(1{,}46+1{,}54)=-0{,}08\bullet 3=0{,}24$

δ) $(4{,}24-0{,}14)^2-(6{,}78-0{,}88)^2= (4{,}24-0{,}14-6{,}78+0{,}88)(4{,}24-0{,}14+6{,}78-0{,}88)=-1{,}8\bullet 10=-18$

➔ **Άλυτες Ασκήσεις**

Να αποδείξετε ότι:

α) $(a-1)^2(a+1)^2-a^4-1=-2a^2$

β) $\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

γ) $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

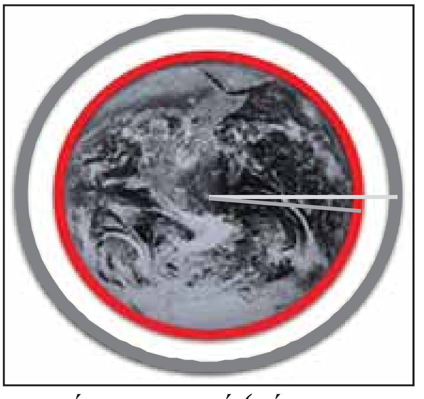
Μήκος του Κύκλου

Χαλμπέ Αικατερίνη – Εκπαιδευτική Αναγέννηση

Με αφορμή ένα πρόβλημα που ανατέθηκε από το σχολείο μας σχετικά με τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου, αποφάσισα να ασχοληθώ με την σχέση του μήκους ενός κύκλου με την ακτίνα του.

Έτσι, δημιουργώντας ένα νοητικό πείραμα, κατέληξα σε ένα, κατά τη γνώμη μου, δυσνόητο για τους περισσότερους μαθητές συμπέρασμα, το οποίο με προβλημάτιζε για πολύ καιρό, μέχρις ότου να δημιουργήσω μια πιο ξεκάθαρη γνώμη πάνω στο θέμα αυτό.

Το πείραμα έχει ως εξής:



Υποθέτουμε πως έχουμε ένα τεράστιο σκοινί (κόκκινη γραμμή),το οποίο έχει ακριβώς ίδιο μήκος με την περίμετρο της Γης, δηλαδή 40.075.000 μέτρα. Θεωρώντας πως η Γη είναι μια τέλεια σφαίρα, σε περίπτωση που δέσουμε το σχοινί αυτό γύρω από τη Γη ώστε να περνάει από τους δύο πόλους της, το σκοινί θα εφάπτεται ακριβώς πάνω στη Γη.

Σε περίπτωση, όμως, που προσθέσουμε 1 μέτρο στο μήκος του σκοινιού αυτού, πόση θα ήταν η απόσταση που θα απείχε το σκοινί (μπλε γραμμή) από την επιφάνεια της Γης;

Με άλλα λόγια ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τη διαφορά που θα έχει η πρώτη ακτίνα της Γης (πράσινη γραμμή) και η τελική ακτίνα (κίτρινη γραμμή), αφού θα έχει επιμηκυνθεί το μήκος της Γης κατά 1 μέτρο.

Σύμφωνα με τον τύπο του υπολογισμού του μήκους κύκλου ισχύει ότι: L=2πρ, όπου:

L: το μήκος του κύκλου π: ο αριθμός π (3,1415…) ρ: η ακτίνα του κύκλου

Για να βρούμε την αρχική ακτίνα, θα κάνουμε:

$L=2\pi\rho$

$2\pi\rho=40.075.000$

$\rho=40.075.000:2\pi$

$\rho=40.075.000:6,28$

$\rho=6.381.369,42$m

Για να βρούμε την τελική ακτίνα, θα κάνουμε:

$L'=2\pi\rho'$

$2\pi\rho'=40.075.001$

$\rho'=40.075.001:2\pi$

$\rho'=40.075.001:6,28$

$\rho'=6.381.369,58$m

Για να βρούμε τη διαφορά της τελικής από την αρχική ακτίνα, θα κάνουμε:

$\Delta=\rho'-\rho$

$\Delta=6.381.369,58-6.381.369,42$ $\Delta=0,16$m

- Την ίδια διαδικασία κάνουμε και με ένα μπαλάκι του τένις.

Υποθέτουμε πως έχουμε μία κλωστή, η οποία έχει ακριβώς ίδιο μήκος με την περίμετρο της μπάλας του τένις, δηλαδή 0,21 μέτρα. Θεωρώντας πως το μπαλάκι είναι μια τέλεια σφαίρα, σε

περίπτωση που δέσουμε την κλωστή αυτή γύρω από το μπαλάκι, ώστε να περνάει από τους δύο πόλους του, η κλωστή θα εφάπτεται ακριβώς πάνω στη μπάλα.

Σε περίπτωση, όμως, που προσθέσουμε 1 μέτρο στο μήκος της κλωστής αυτής, πόση θα ήταν η απόσταση που θα απείχε το σκοινί από την επιφάνεια της μπάλας;

Για να βρούμε την αρχική ακτίνα, θα κάνουμε:

L=2πρ

2πρ=0,21

ρ=0,21:2π

ρ=0,21:6,28

ρ=0,03m

Για να βρούμε την τελική ακτίνα, θα κάνουμε:

L΄=2πρ΄

2πρ΄ =1,21

ρ΄=1,21:2π

ρ΄=1,21:6,28

ρ΄=0,19m

Για να βρούμε τη διαφορά της τελικής από την αρχική ακτίνα, θα κάνουμε:

Δ=ρ΄-ρ

Δ=0,19-0,03

Δ=0,16m

- Την ίδια διαδικασία κάνουμε και με ένα τρίτο παράδειγμα, όπως μια μπάλα του μπάσκετ. Υποθέτουμε πως έχουμε ένα σκοινί, το οποίο έχει ακριβώς ίδιο μήκος με το μήκος της μπάλας του τένις, δηλαδή 0,75 μέτρα. Θεωρώντας πως το μπαλάκι είναι μια τέλεια σφαίρα, σε περίπτωση που δέσουμε το σχοινί αυτό γύρω από το μπαλάκι, ώστε να περνάει από τους δύο πόλους του, το σκοινί θα εφάπτεται ακριβώς πάνω στη μπάλα. Σε περίπτωση, όμως, που προσθέσουμε 1 μέτρο στο μήκος του σκοινιού αυτού, πόση θα ήταν η απόσταση που θα απείχε το σκοινί από την επιφάνεια της μπάλας;

Για να βρούμε την αρχική ακτίνα, θα κάνουμε:

L=2πρ 2πρ=0,75

ρ=0,75:2π

ρ=0,75:6,28

ρ=0,11m

Για να βρούμε την τελική ακτίνα, θα κάνουμε:

L΄=2πρ΄

2πρ΄ =1,75

ρ΄=1,75:2π

ρ΄=1,75:6,28

ρ΄=0,27m

Για να βρούμε τη διαφορά της τελικής από την αρχική ακτίνα, θα κάνουμε:

Δ=ρ΄-ρ

Δ=0,27-0,11

Δ=0,16m

Από τα παραπάνω παραδείγματα συνάγουμε το συμπέρασμα πως το μήκος κύκλου και η ακτίνα κύκλου είναι δύο έννοιες αλληλένδετες, αφού όταν αλλάζει η τιμή του ενός αλλάζει και του άλλου. Με άλλα λόγια, για κάθε μέτρο που αυξάνουμε το μήκος ενός κύκλου, η ακτίνα του αυξάνεται κατά 0,16 μέτρα. Δηλαδή, η διαφορά της ακτίνας του κύκλου δεν επηρεάζεται από το πόσο μεγάλος ή μικρός είναι ο κύκλος, αλλά από το πόσο αυξάνεται το μήκος του.

Τα περίεργα των κύβων.

Αλέξανδρος Βαρούχας

Παρατηρήστε το παρακάτω:

$$\left.\begin{array}{l}1^3=1\\2^3=8\end{array}\right\} 1+8=9=(1+2)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}1+8=9=(1+2)^2\\3^3=27\end{array}\right\} 9+27=36=(1+2+3)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}9+27=36=(1+2+3)^2\\4^3=64\end{array}\right\} 64+36=100=(1+2+3+4)^2$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο εξής: $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$

Επιβεβαιώστε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$$

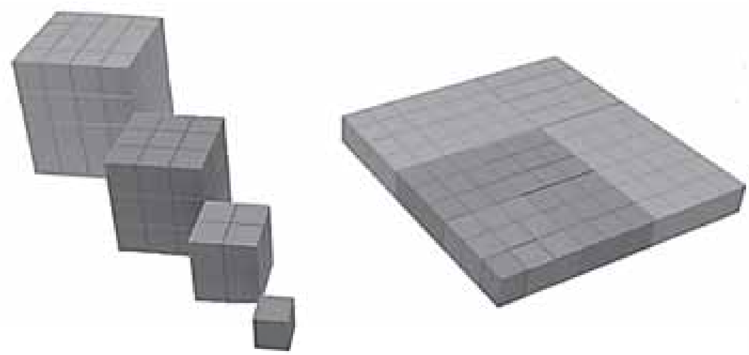
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=(1+2+3+4+5+6)^2$$

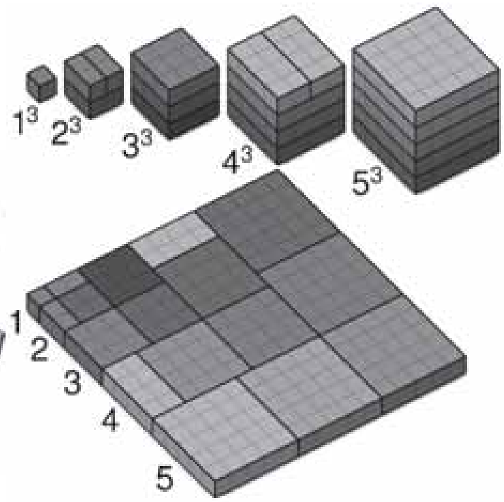
Η γενίκευση της παραπάνω παρατήρησης αποτελεί το Θεώρημα του Νικόμαχου:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=(1+2+3+\ldots+\nu)^2$$

Μία οπτικοποίηση του θεωρήματος φαίνεται στις παρακάτω εικόνες.

εικόνα 1 **εικόνα 2**





εικόνα 1
πηγή: https://www.google.com/search?source=univ&tbm=isch&q=nicomachus+theorem&client

εικόνα 2
πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Squared_triangular_number
Τρισδιάστατη απεικόνιση σε video από την :

https://www.youtube.com/watch?v=glearwgR1Ls&feature=share&fbclid=IwAR2kswD5qW1eQW-7YPAGVkyFADvS9r24tgI7JOvtU29Se4mAi89KX6Mxw60

Ας δούμε τώρα το θεώρημα του Νικομάχου συνδυαστικά με άλλες ιδιότητες των κύβων.

- Θεώρημα Νικομάχου: $\left(1+2+3+\ldots+\nu\right)^2 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3$

Εφαρμογές

Για ν = 2: $\left(1+2\right)^2 = 1^3+2^3 \Leftrightarrow 3^2 = 1+8 \Leftrightarrow 9=9$

Για ν = 3: $\left(1+2+3\right)^2 = 1^3+2^3+3^3 \Leftrightarrow 6^2 = 1+8+27 \Leftrightarrow 36=36$

Για ν = 4: $\left(1+2+3+4\right)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3 \Leftrightarrow 10^2 = 1+8+27+64 \Leftrightarrow 100=100$

- Μία άλλη εντυπωσιακή ιδιότητα των κύβων είναι και η εξής:

$1^3 = 1 = 1$

$2^3 = 8 = 3+5$

$3^3 = 27 = 7+9+11$

$4^3 = 64 = 13+15+17+19$

Παρατηρήστε ότι ο κύβος του 3 είναι ίσος με το άθροισμα 3 διαδοχικών περιττών αριθμών, ο κύβος του 4 είναι ίσος με το άθροισμα 4 διαδοχικών περιττών αριθμών και ούτω καθεξής.
Δοκιμάστε αν ισχύει το ίδιο με τα 5^3, 6^3, 7^3 και 8^3.
Δοκιμάστε επιπλέον να εξηγήσετε με μαθηματικό τρόπο γιατί συμβαίνει αυτό.

- Ας δούμε τώρα μία άλλη περίπτωση. Παρατηρήστε τις παρακάτω ισότητες:

$$1 = 0^3+1^3$$

$$2+3+4 = 1^3+2^3$$

$$5+6+7+8+9 = 2^3+3^3$$

$$10+11+12+13+14+15+16 = 3^3+4^3$$

Ποιος γενικός κανόνας φαίνεται να ισχύει
Μπορείτε να δόσετε μία εξήγηση με μαθηματικό τρόπο;

Για τον Νικόμαχο (el.wikipedia.org/wiki/Νικόμαχος_ο_Γερασηνός)

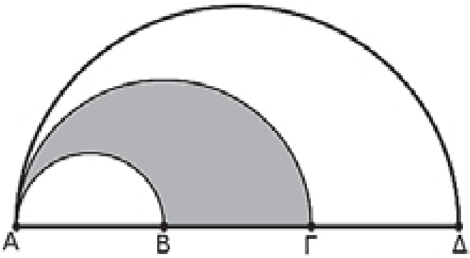
Ο **Νικόμαχος** από τα Γέρασα (π. 60 μ.Χ. - π. 120) ήταν ένας από τους τελευταίους αξιόλογους φιλοσόφους του ύστερου Πυθαγορισμού, αλλά κυρίως σπουδαίος μαθηματικός. Γεννήθηκε στα Γέρασα της Ρωμαϊκής επαρχίας της Συρίας (τώρα στην Ιορδανία) και έμεινε γνωστός για τα έργα του *Αριθμητική Εισαγωγή* και *Εγχειρίδιον Αρμονικής* στα Ελληνικά. Ως Νεοπυθαγόρειος έγραψε για τις μυστικές ιδιότητες των αριθμών.

Γ΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Αν $x=9+4\sqrt{5}$ και $x\cdot y=1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$

2) Χωρίζουμε το τμήμα ΑΔ σε τρία ίσα μέρη (ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ) και γράφουμε τρία ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ. Στο σχήμα που δημιουργείται να εξετάσετε τη σχέση που έχει το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους προς το λευκό.



3) Το έτος 1996 συνέβη το εξής περίεργο: σε κανέναν άνθρωπο επάνω στη γη, που είχε γεννηθεί τον $20^{\text{ο}}$ αιώνα, το άθροισμα των ψηφίων του έτους γέννησης δεν ήταν ίσο με την ηλικία του (την ημέρα των γενεθλίων του).
Πως μπορούμε να εξηγήσουμε το γεγονός αυτό;

4) Παρατηρήστε τις παρακάτω πράξεις και ιδιαίτερα τα αποτελέσματα στην τελευταία γραμμή:

$1\cdot 2$	$2\cdot 3$	$3\cdot 4$	$4\cdot 5$	$5\cdot 6$	$6\cdot 7$
2	6	12	20	30	42

$\dfrac{2+6}{2}$	$\dfrac{6+12}{2}$	$\dfrac{12+20}{2}$	$\dfrac{20+30}{2}$	$\dfrac{30+42}{2}$
4	**9**	**16**	**25**	**36**

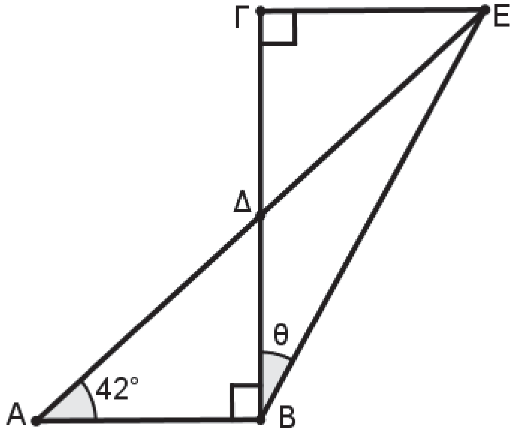
Να διατυπώσετε και να αποδείξετε έναν γενικό κανόνα που φαίνεται να ισχύει.

5) Δίνεται η ισότητα $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{5^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{1}{\nu^2}\right)=\dfrac{21}{40}$. Να υπολογίσετε τον ακέραιο αριθμό ν.

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 120

1) Η ισότητα μετά τις πράξεις και τη μετατροπή των σύνθετων κλασμάτων σε απλά γίνεται: $\sqrt{\alpha}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}=\dfrac{5}{2}$ και τελικά $\dfrac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}=\dfrac{5}{2}$. Η ισότητα αυτή οδηγεί στην εξίσωση $2\alpha-5\sqrt{\alpha}+2=0$ η οποία είναι δευτέρου βαθμού ως προς $\sqrt{\alpha}$. Η λύση της οδηγεί στις δύο τιμές $\alpha=4$ και $\alpha=\dfrac{1}{4}$.

2) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΓΕ και ΔΒΑ είναι ίσα (γιατί;).
Καθώς δεν υπάρχουν πληροφορίες για μήκη πλευρών και η δεδομένη γωνία των 42^0 δεν μας δίνει κάποια επιπλέον πληροφορία, καταφεύγουμε στους τριγωνομετρικούς πίνακες και υπολογίζουμε την εφ42^0= 0,9004.



Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004

Όμως από το σχήμα προκύπτει ότι εφ42^0= $\frac{ΒΔ}{ΑΒ}$ άρα $\frac{ΒΔ}{ΑΒ}$=0,9004 και επομένως $\frac{ΑΒ}{ΒΔ}=\frac{1}{0,9004}=1,1106$. Τέλος εφθ=$\frac{ΓΕ}{ΒΓ}=\frac{ΑΒ}{2ΒΔ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ΑΒ}{ΒΔ}=0,5553$

3) Παρατηρούμε ότι $\left(α^3+\frac{1}{α^3}\right)^2=α^6+2+\frac{1}{α^6}$. Με βάση αυτή την παρατήρηση έχουμε:

Π=$\frac{\left(α+\frac{1}{α}\right)^6-\left(α^6+\frac{1}{α^6}\right)-2}{\left(α+\frac{1}{α}\right)^3+\left(α^3+\frac{1}{α^3}\right)}=\frac{\left(\left(α+\frac{1}{α}\right)^3\right)^2-\left(α^3+\frac{1}{α^3}\right)^2}{\left(α+\frac{1}{α}\right)^3+\left(α^3+\frac{1}{α^3}\right)}$ εδώ μετά την εφαρμογή της ταυτότητας της διαφοράς τετραγώνων στον αριθμητή και την απλοποίηση του κλάσματος προκύπτει: Π=$\left(α+\frac{1}{α}\right)^3-\left(α^3+\frac{1}{α^3}\right)=3\left(α+\frac{1}{α}\right)$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει μελέτη των τιμών της παράστασης $\left(α+\frac{1}{α}\right)$ δηλαδή της $\frac{α^2+1}{α}$. Όμως αποδεικνύεται εύκολα ότι

$\frac{α^2+1}{α}\geq 2$ και επομένως Π≥6.

4) Έχουμε α+8γ=4+7β και 8α-γ=7-4β. Αν υψώσουμε στο τετράγωνο τα δύο μέλη των δύο ισοτήτων θα έχουμε: $(α+8γ)^2+(8α-γ)^2=(4+7β)^2+(7-4β)^2$.
Από την ανάπτυξη των ταυτοτήτων θα προκύψει: $65(α^2+γ^2)=65(1+β^2)$ οπότε $α^2+γ^2=1+β^2$ και τελικά $α^2-β^2+γ^2=1$

5) Παρατηρούμε ότι οι παρονομαστές είναι διαδοχικοί περιττοί αριθμοί δηλαδή έχουν τη γενική μορφή 2ν-1 και 2ν+1. Το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι: $\frac{1}{2ν-1}+\frac{1}{2ν+1}=\frac{4ν}{(2ν-1)(2ν+1)}=\frac{4ν}{4ν^2-1}$ και θα πρέπει να αποδειχτεί ότι $(4ν)^2+(4ν^2-1)^2=+(4ν^2+1)^2$ το οποίο αποδεικνύεται εύκολα αν αναπτύξουμε τις ταυτότητες.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

25η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων
29 Ιουνίου - 5 Ιουλίου 2021

Η 25η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων πραγματοποιήθηκε από 29 Ιουνίου ως 5 Ιουλίου 2021 **για δεύτερη φορά διαδικτυακά**, καθώς η διοργάνωση ήταν προσαρμοσμένη στις συνθήκες που επέβαλε η πανδημία από τον Covid-19 και τηρήθηκαν όλα τα σχετικά πρωτόκολλα. Κάθε μια από τις συμμετέχουσες χώρες διαγωνίστηκε στην έδρα της ακολουθώντας ειδικούς αυστηρούς κανόνες για το αδιάβλητο του διαγωνισμού αλλά και την ασφάλεια των συμμετεχόντων. Την ευθύνη της διοργάνωσης είχε το Υπουργείου Παιδείας, Πολιτισμού και Έρευνας της Δημοκρατίας της Μολδαβίας με τη βοήθεια Συμβουλευτικής Ομάδας μαθηματικών από τη Μολδαβία και τη Μαθηματική Εταιρεία Νοτιοανατολικής Ευρώπης.

Οι έξι Έλληνες μαθητές, που συμμετείχαν στην 25η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων, κατάφεραν να πάρουν **ένα Αργυρό και τέσσερα Χάλκινα Μετάλλια** σε ένα πολύ δύσκολο διαγωνισμό, συνεχίζοντας τη μεγάλη παράδοση των επιτυχιών των Ελληνικών ομάδων στις Βαλκανικές και Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει θερμά τους μαθητές της Ελληνικής ομάδας, οι οποίοι δημιουργούν υψηλές προσδοκίες για ακόμη μεγαλύτερες επιτυχίες τα επόμενα χρόνια και σημαντικές επιδόσεις στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα:

Πετράκης Διονύσιος	Γυμνάσιο Κανήθου Ευβοίας	Αργυρό Μετάλλιο
Γαλανόπουλος Κωνσταντίνος	2ο Γυμνάσιο Πύργου	Χάλκινο Μετάλλιο
Γαλαμάτης Κωνσταντίνος	Πειραματικό Σχολείο Παν. Θεσσαλονίκης	Χάλκινο Μετάλλιο
Ζαρογουλίδης Μάριος	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο Μετάλλιο
Εξάρχου Ευστάθιος	3ο Γυμνάσιο Κομοτηνής	Χάλκινο Μετάλλιο
Ραδαίος Μάρκος	1ο Γυμνάσιο Βούλας	Συμμετοχή

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός Σιλουανός Μπραζιτίκος, υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος και παρατηρητής ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος. Στην Βαλκανιάδα συμμετείχαν έντεκα χώρες της περιοχής της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, η ομάδα Β της Δημοκρατίας της Μολδαβίας και δέκα ακόμη φιλοξενούμενες χώρες από Ασία και Ευρώπη.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Βουλγαρία). Έστω n ($n \geq 1$) ένας ακέραιος. Θεωρούμε την εξίσωση

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor - n + 1 = (n+1)(1-nx),$$

όπου ο άγνωστος x είναι πραγματικός αριθμός.

(α) Να λύσετε την εξίσωση για $n = 8$.

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας ακέραιος n για τον οποίο η εξίσωση έχει τουλάχιστον 2021 λύσεις.

(Για κάθε πραγματικό αριθμό y συμβολίζουμε με $\lfloor y \rfloor$ τον μεγαλύτερο ακέραιο m έτσι ώστε $m \leq y$.)

Λύση (Βασισμένη στη λύση του Κωνσταντίνου Γαλανόπουλου). Έστω $k = \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor$. Τότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται $2k - n + 1 = (n+1)(1 - nx)$, ή ισοδύναμα, $2k = n\,(2 - (n+1)x)$, η οποία δίνει

$$(n+1)x = 2 - \frac{2k}{n} = \frac{2(n-k)}{n},$$

οπότε

$$x = \frac{2(n-k)}{n(n+1)}. \tag{1}$$

(α) Για $n = 8$, η (1) δίνει

$$x = \frac{2(8-k)}{8 \cdot 9} = \frac{8-k}{36}. \tag{2}$$

Εάν ήταν $k = 0$, τότε θα είχαμε $x = \frac{2}{9}$, οπότε $\lfloor \frac{1}{2x} \rfloor = \lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$, άτοπο. Άρα $k \neq 0$. Επίσης, αφού $x \neq 0$, είναι $k \neq 8$. Εξετάζοντας τα πρόσημα βρίσκουμε ότι $0 < k < 8$ και $x > 0$.

Αφού $k \leq \frac{1}{2x} < k+1$, είναι $k \leq \frac{36}{2(8-k)} < k+1$, και άρα

$$k \leq \frac{18}{8-k} < k+1.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $8 - k > 0$ βλέπουμε ότι η αριστερή ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $k^2 - 8k + 18 \geq 0$ που ισχύει για κάθε k αφού $k^2 - 8k + 18 = (k-4)^2 + 2$, ενώ η δεξιά ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $k^2 - 7k + 10 = (k-2)(k+5) < 0$, που ισχύει για $2 < k < 5$.

Έτσι, $k = 3$ ή $k = 4$. Για $k = 3$, από την (2) παίρνουμε $x = \frac{5}{36}$, και για $k = 4$ παίρνουμε $x = \frac{1}{9}$.

(β) Έστω ότι $x = \frac{2(n-k)}{n(n+1)}$ είναι λύση της δοθείσας εξίσωσης. Είναι $x \neq 0$, οπότε $k \neq n$. Αφού $k \leq \frac{1}{2x} < k+1$, ισχύει

$$k \leq \frac{n(n+1)}{4(n-k)} < k+1.$$

Εξετάζοντας τα πρόσημα βρίσκουμε ότι $0 \leq k < n$ και $x > 0$. Πολλαπλασιάζοντας με $n - k > 0$ βλέπουμε ότι η αριστερή ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$4k^2 - 4nk + n^2 + n \geq 0$$

που ισχύει για κάθε k αφού $4k^2 - 4nk + n^2 + n = (2k-n)^2 + n$, ενώ η δεξιά ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$4k^2 - 4(n-1)k + (n-1)^2 < n+1, \quad \text{ή} \quad (2k+1-n)^2 < n+1,$$

η οποία δίνει

$$\frac{n-1-\sqrt{n+1}}{2} < k < \frac{n-1+\sqrt{n+1}}{2}. \tag{3}$$

Αντίστροφα, γνωρίζουμε ότι αν k είναι ένας ακέραιος που ικανοποιεί την (3) με $0 < k < n$, τότε ο $x = \frac{2(n-k)}{n(n+1)}$ αποτελεί λύση της δοθείσας εξίσωσης. Έτσι, για να πάρουμε τουλάχιστον 2021 λύσεις πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 2021 θετικοί ακέραιοι στο διάστημα $\left(\frac{n-1-\sqrt{n+1}}{2}, \frac{n-1+\sqrt{n+1}}{2}\right)$. Απομένει να παρατηρήσουμε ότι για n τέτοιο ώστε $\sqrt{n+1} > 2021$ υπάρχουν τουλάχιστον 2021 θετικές ακέραιες τιμές του k που ικανοποιούν την (3), και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Σχόλιο: Ο Κωνσταντίνος θεώρησε στην λύση του $n > 3141592653589793238462^2 - 1$. Παρατηρήστε ότι $3141592653589793238462 = \lfloor 10^{21}\pi \rfloor$.

Πρόβλημα 2 (Βοσνία). Για κάθε σύνολο $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ που αποτελείται από πέντε διακεκριμένους θετικούς ακεραίους, συμβολίζουμε με S_A το άθροισμα των στοιχείων του και με T_A το πλήθος των τριάδων (i, j, k) με $1 \leqslant i < j < k \leqslant 5$ για τις οποίες ο $x_i + x_j + x_k$ διαιρεί το S_A.

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του T_A.

Λύση (Βασισμένη στη λύση του Διονύση Πετράκη). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Ισχυριζόμαστε ότι αν υπάρχει διαιρέτης του S_A της μορφής $x_i + x_j + x_k$ με $1 \leq i < j < k = 5$, τότε αυτός θα είναι ο $x_1 + x_2 + x_5$. Για τον ισχυρισμό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $j = 2$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε με εις άτοπο απαγωγή ότι ο $x_i + x_j + x_5$ με $j > 2$ διαιρεί το άθροισμα $S_A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. Τότε ισχύει

$$2(x_i + x_j + x_5) \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5,$$

διότι ο μεγαλύτερος γνήσιος διαιρέτης ενός φυσικού αριθμού n είναι μικρότερος ή ίσος του $n/2$, με την ισότητα να ισχύει όταν ο n είναι άρτιος.

Αφού $j > 2$ έπεται ότι $2(x_1 + x_3 + x_5) \leq 2(x_i + x_j + x_5) \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, οπότε

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq x_2 + x_4.$$

Η τελευταία, όμως, είναι αδύνατη αφού $x_2 < x_3$ και $x_4 < x_5$. Άρα ο παραπάνω ισχυρισμός μας αληθεύει.

Για $1 \leq i < j < k = 4$, έχουμε άλλους τέσσερις διαιρέτες, τους $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_4$, $x_1 + x_3 + x_4$, και $x_2 + x_3 + x_4$. Άρα $T_A \leq 5$.

Έστω $T_A = 5$. Τότε, αφού ο $x_1 + x_2 + x_5$ διαιρεί τον S_A, θα έχουμε $2(x_1 + x_2 + x_5) \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, και άρα

$$x_5 < x_1 + x_2 + x_5 \leq x_3 + x_4.$$

Ομοίως, αφού ο $x_2 + x_3 + x_4$ διαιρεί τον S_A, θα έχουμε $2(x_2 + x_3 + x_4) \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, οπότε

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq x_1 + x_5.$$

Αλλά $x_1 < x_2$ και $x_5 < x_3 + x_4$, οπότε $x_1 + x_5 < x_2 + x_3 + x_4$.

Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν και ο $x_1 + x_2 + x_5$ και ο $x_2 + x_3 + x_4$ να διαιρεί τον S_A, οπότε $T_A \leq 4$. Θα δείξουμε ότι η τιμή $T_A = 4$ είναι εφικτή. Για $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$ θέλουμε x_5 τέτοιο ώστε

$$4+6+8 = 18|20+x_5, \quad 2+6+8 = 16|20+x_5, \quad 2+4+8 = 14|20+x_5, \quad \text{και} \quad 2+4+6 = 12|20+x_5.$$

Αρκεί να ισχύει $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7|20 + x_5$. Για $x = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 - 20 = 988$ ισχύει $T_A = 4$.

Σχόλιο: Το πρόβλημα αυτό είναι παρόμοιο με το πρώτο πρόβλημα της 52ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας του 2011 (βλ. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β' 81/τ.1, σελ.13).

Πρόβλημα 3 (Βοσνία). Έστω ABC ένα οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο με περίκεντρο O και D το ίχνος του ύψους από την κορυφή A στην πλευρά BC. Οι ευθείες BC και AO τέμνονται στο σημείο E και έστω s η ευθεία που περνά από το σημείο E και είναι κάθετη στην ευθεία AO. Η ευθεία s τέμνει τις AB και AC στα K και L, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με ω τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AKL. Η ευθεία AD τέμνει ξανά τον ω στο σημείο X.

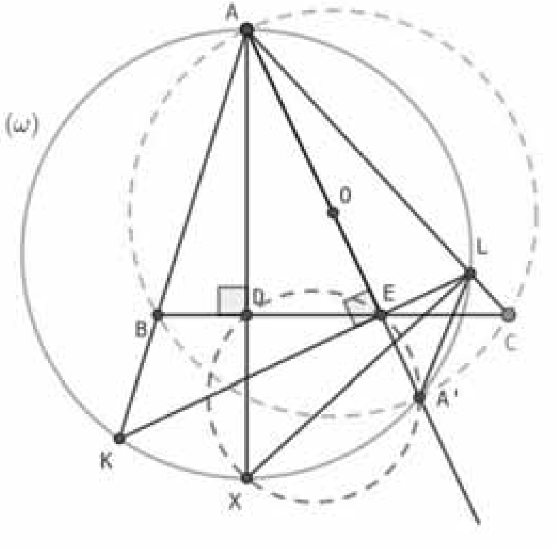
Να αποδείξετε ότι ο κύκλος ω και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABC και DEX έχουν ένα κοινό σημείο.

Λύση (1ος τρόπος - βασισμένος στη λύση του Διονύση Πετράκη). Παρατηρούμε ότι
$$B\widehat{A}D = 180^\circ - A\widehat{D}B - A\widehat{B}D = 180^\circ - 90^\circ - A\widehat{B}C = 90^\circ - A\widehat{B}C,$$
και
$$O\widehat{A}C = \frac{180^\circ - A\widehat{O}C}{2} = 90^\circ - \frac{2A\widehat{B}C}{2} = 90^\circ - A\widehat{B}C,$$
οπότε $B\widehat{A}D = O\widehat{A}C$.

Έστω A' το αντιδιαμετρικό σημείο του A στον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC. Θα δείξουμε ότι το A' είναι σημείο των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων KAL και DEX.

Για να δείξουμε ότι το A' είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KAL, αρκεί να δείξουμε ότι το $KALA'$ είναι εγγράψιμο. Πράγματι, είναι $E\widehat{L}C = 90^\circ + E\widehat{A}L$ ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο EAL, και αφού $E\widehat{A}L = O\widehat{A}C = 90^\circ - A\widehat{B}C$ έχουμε
$$K\widehat{L}C = E\widehat{L}C = 90^\circ + (90^\circ - A\widehat{B}C) = 180^\circ - A\widehat{B}C = K\widehat{B}C.$$
Άρα το τετράπλευρο $KBLC$ είναι εγγράψιμο. Αφού η $A\widehat{C}A'$ βαίνει σε διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου του ABC, έχουμε
$$A\widehat{C}A' = 90^\circ = A'\widehat{E}L.$$
Άρα το τετράπλευρο $A'ELC$ είναι εγγράψιμο. Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $A'ELC$ και $KBLC$ παίρνουμε
$$A\widehat{A'}L = E\widehat{A'}L = E\widehat{C}L = B\widehat{C}L = B\widehat{K}L,$$
οπότε το τετράπλευρο $KALA'$ είναι εγγράψιμο, όπως θέλαμε.

Για να δείξουμε ότι το A' είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου DEX, αρκεί να δείξουμε ότι το $DEA'X$ είναι εγγράψιμο. Αφού $X\widehat{D}E = 90^\circ$, αρκεί να δείξουμε ότι $X\widehat{A'}E = 90^\circ$, ή ισοδύναμα, $A\widehat{K}X = 90^\circ$. Πράγματι, από το εγγράψιμο $KBLC$ και το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AKXL$ έχουμε
$$A\widehat{K}X = A\widehat{K}L + L\widehat{K}X = B\widehat{K}L + L\widehat{A}X = D\widehat{C}A + C\widehat{A}D = 90^\circ,$$
στο ορθογώνιο τρίγωνο ADC. Άρα οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABC, AKL, και DXE έχουν κοινό σημείο το A'.



Σχήμα 1: 1ος τρόπος - Πρόβλημα 3

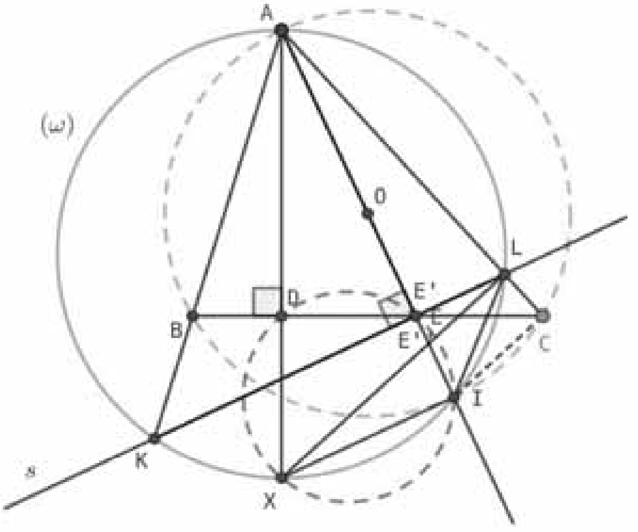
Λύση (2ος τρόπος). Έστω I το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του ABC και του (ω). Είναι $B\widehat{A}O = 90^\circ - \widehat{C} = D\widehat{A}C$, οπότε $B\widehat{A}D = E\widehat{A}C$.

Είναι $A\widehat{I}L = A\widehat{K}L = 90^\circ - K\widehat{A}E = 90^\circ - B\widehat{A}O = B\widehat{C}A$, οπότε το $E'LCI$ είναι εγγράψιμο, όπου E' είναι το σημείο τομής της BC με την AI. Ομοίως, $A\widehat{L}K = A\widehat{B}C = A\widehat{I}C$, οπότε το $E''LCI$ είναι εγγράψιμο, όπου E'' είναι το σημείο τομής της KL με την AI. Αφού τα E', E'' είναι σημεία τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του $\triangle LCI$ με την AI διαφορετικά από το I συμπίπτουν μεταξύ τους, και άρα με το E που είναι σημείο τομής της BC και της KL. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι το I ανήκει στην ευθεία AOE.

Αρκεί να δείξουμε ότι $X\widehat{I}E = 90^\circ$. Πράγματι, έχουμε

$$K\widehat{L}X = K\widehat{A}X = B\widehat{A}D = E\widehat{A}C = I\widehat{A}l = I\widehat{X}L.$$

Συνεπώς, $KL//XI$ και άρα $X\widehat{I}E = K\widehat{E}A = 90^\circ$, όπως θέλαμε.



Σχήμα 2: 2ος τρόπος - Πρόβλημα 3

Πρόβλημα 4 (Κύπρος). Έστω M ένα υποσύνολο του συνόλου των 2021 ακεραίων $\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε τρία στοιχεία (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) a, b, c του M έχουμε $|a + b - c| > 10$.
Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου M.

Λύση - Βασισμένη σε δημοσίευση στον ιστότοπο δημόσιας συζήτησης του Art of Problem Solving.

Θα αποδείξουμε ότι το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου M είναι 1006. Πράγματι, ένα παράδειγμα συνόλου με 1006 στοιχεία είναι το $M = \{1016, 1017, \ldots, 2021\}$, το οποίο είναι αποδεκτό διότι $a + b - c \geq 1016 + 1016 - 2021 = 11$ για κάθε $a, b, c \in M$.

Έστω $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$, και έστω ένα υποσύνολο M του A με τουλάχιστον 1007 στοιχεία που να ικανοποιεί την συνθήκη του προβλήματος. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{1007}\}$ με $a_1 < a_2 < \cdots < a_{1007}$. Θεωρούμε το παρακάτω σύνολο

$$M' = \{a_{1007} - a_{1006}, a_{1007} - a_{1005}, \ldots, a_{1007} - a_1, a_{1007} - a_1 + 1, a_{1007} - a_1 + 2, \ldots, a_{1007} - a_1 + 10\}.$$

Το M' είναι ένα καλώς ορισμένο ορισμένο υποσύνολο του A με 1016 στοιχεία. Από την συνθήκη του προβλήματος, τα σύνολα M και M' είναι ξένα μεταξύ τους. Τότε, όμως, είναι

$$|M| + |M'| = 1007 + 1016 = 2023 > 2021 = |A|,$$

άτοπο. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Σημείωση: *Η επιμέλεια των λύσεων έγινε από τον* ***Αχιλλέα Συνεφακόπουλο.***

38$^{\eta}$ ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y είναι τέτοιοι ώστε: $2(x+y)=1+xy$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}$.

Λύση: 1^{ος} τρόπος: Από την ανισότητα ΑΜ–ΓΜ έχουμε $A=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{xy}+\frac{2}{\sqrt{xy}}=\frac{2(xy+1)}{\sqrt{xy}}$.

Όμως από την συνθήκη έχουμε $xy+1=2(x+y)$, οπότε $\frac{2(xy+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{4(x+y)}{\sqrt{xy}}\geq\frac{4\cdot 2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=8$.

Η ισότητα ισχύει όταν $x=y$ και τότε η συνθήκη γίνεται $4x=1+x^2$, απ' όπου παίρνουμε

$$x=y=2+\sqrt{3} \text{ ή } x=y=2-\sqrt{3}$$

2^{ος} τρόπος: Θέτουμε $x+y=s$ και $xy=p$. Η συνθήκη δίνει ότι $2s=1+p$ και από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε $s^2\geq 4p$, οπότε $16p\leq 4s^2=(p+1)^2$ και κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε $p^2+1\geq 14p$. Από την άλλη έχουμε

$$A=x+y+\frac{x+y}{xy}=s+\frac{s}{p}=\frac{1}{2}\left(p+1+\frac{p+1}{p}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{p^2+1}{p}\right)\geq\frac{1}{2}(2+14)=8.$$

Για την ισότητα εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

Πρόβλημα 2

Η Άννα και ο Βασίλης παίζουν ένα παιγνίδι γράφοντας αριθμούς στον πίνακα ως εξής: Οι δύο παίκτες παίζουν ο ένας μετά τον άλλον και αν στον πίνακα είναι γραμμένος ο θετικός ακέραιος ν, ο παίκτης που έχει σειρά επιλέγει ένα πρώτο διαιρέτη ρ του ν και γράφει τον αριθμό $\nu+\rho$. Στον πίνακα είναι γραμμένος αρχικά ο αριθμός 2 και παίζει πρώτη η Άννα. Το παιγνίδι το κερδίζει εκείνος που θα μπορέσει πρώτος να γράψει ένα αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 31.
Να βρείτε ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης, δηλαδή ποιος μπορεί γράφοντας τους κατάλληλους αριθμούς να κερδίσει το παιγνίδι ανεξάρτητα από το πώς θα παίξει ο άλλος.

Λύση: Παρατηρούμε, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, ότι όποιος παίκτης καταφέρει να κάνει τον άλλον να γράψει το 12 μπορεί να κερδίσει το παιγνίδι με την ακόλουθη σειρά κινήσεων:
Συνεχίζει γράφοντας στον πίνακα το 12+3=15, γιατί αν γράψει το 12+2=14. Τότε ο αντίπαλος έχει δύο επιλογές:
(α) Να γράψει το 15+3=18, οπότε ο άλλος παίκτης θα γράψει το 18+3=21.
(Α1) Αν τώρα ο αντίπαλος γράψει το 21+7=28, τότε γράφουμε το 28+4=32 και κερδίζουμε το παιχνίδι.
(Α2) Αν ο αντίπαλος γράψει το 21+3=24, τότε γράφουμε το 24+3=27. Ο αντίπαλος αναγκαστικά γράφει το 27+3=30 και στο επόμενο βήμα χάνει.
(β) Να γράψει το 15+5=20, οπότε ο άλλος παίκτης θα γράψει το 20+5=25 και ο αντίπαλος αναγκαστικά γράφει το 25+5=30 και στο επόμενο βήμα χάνει.
Επομένως, αρκεί να βρούμε ποιος παίκτης μπορεί να υποχρεώσει τον άλλον να γράψει στον πίνακα τον αριθμό 12. Επειδή η Άννα παίζει πρώτη, έχει τη δυνατότητα να οδηγήσει το παιγνίδι στην ακόλουθη σειρά:

$$2 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 9 \xrightarrow{B} 12$$

Επομένως η Άννα έχει στρατηγική νίκης.
2^{ος} τρόπος. Υπάρχει και η ακόλουθη στρατηγικής νίκης για την Άννα. Αν η Άννα μετά το 6 του Βασίλη γράψει 8 αντί για 9, τότε ο Βασίλης στην επόμενη κίνηση γράφει (αναγκαστικά) το 10. Τότε η Άννα γράφει το 10+5=15 και συνεχίζουμε όπως παραπάνω.

Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος ν για τον οποίο ο αριθμός $A = 8^{\nu} + 47$ είναι πρώτος.

Λύση: Ο αριθμός $A = 8^{\nu} + 47$ δεν μπορεί να είναι πρώτος. Πράγματι, έχουμε:

Αν $\nu = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε: $A = 8^{2\kappa} + 47 = (63+1)^{\kappa} + 47 = \pi o\lambda.3 + 1 + \pi o\lambda.3 + 2 = \pi o\lambda.3$

Αν ν περιττός, τότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\nu = 4\kappa + 1$, οπότε έχουμε:

  $A = 8^{\nu} + 47 = (5+3)^{\nu} + 47 = \pi o\lambda.5 + 3^{\nu} + 47 = \pi o\lambda.5 + 3 \cdot 81^{\kappa} + 47$

  $= 3 \cdot (\pi o\lambda.5 + 1) + \pi o\lambda.5 + 2 = \pi o\lambda.5 + 3 + 2 = \pi o\lambda.5.$

- $\nu = 4\kappa + 3$, οπότε έχουμε:

  $A = 8^{4\kappa+3} + 47 = 8 \cdot 8^{4\kappa+2} + 47 = 8 \cdot 64^{2\kappa+1} + 47 = 8 \cdot (65-1)^{2\kappa+1} + 47$

  $= 8 \cdot \left(\pi o\lambda.13 + (-1)^{2\kappa+1}\right) + 47 = \pi o\lambda.13 - 8 + 39 + 8 = \pi o\lambda.13.$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ο αριθμός $A = 8^{\nu} + 47$ έχει ένα μικρότερό του διαιρέτη διαφορετικό από το 1, οπότε δεν μπορεί να είναι πρώτος.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < B\Gamma < A\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c). Ο κύκλος $c(A, AB)$ με (κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ) τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Δ και τον κύκλο (c) στο σημείο Η. Ο κύκλος $c(A, A\Gamma)$ με (κέντρο Α και ακτίνα ΑΓ) τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ και τον κύκλο (c) στο σημείο Ε. Οι ευθείες ΖΗ και ΕΔ τέμνονται στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΘΔΖ και ΘΕΗ είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση: Θα αποδείξουμε ότι $B\Gamma = \Delta Z$.

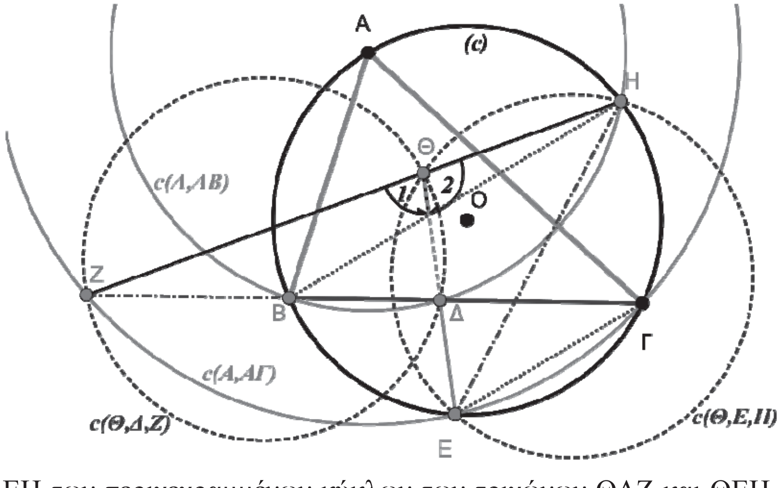
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΖΓ είναι ισοσκελή διότι ΑΒ = ΑΔ (ως ακτίνες του κύκλου $c(A, AB)$) και $A\Gamma = AZ$ (ως ακτίνες του κύκλου $c(A, A\Gamma)$).

Άρα τα τμήματα ΒΔ και ΓΖ έχουν το ίδιο μέσο και κατά συνέπεια $BZ = \Delta\Gamma$. Αρα είναι:

$$BZ + B\Gamma = \Delta\Gamma + B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = \Delta Z \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $B\Gamma = EH$. Η ΒΗ είναι η κοινή χορδή και Α,Ο η διάκεντρος των κύκλων (c) και $c(A, AB)$. Άρα η ΑΟ είναι μεσοκάθετος της ΒΗ. Η ΕΓ είναι η κοινή χορδή και Α,Ο η διάκεντρος των κύκλων (c) και $c(A, A\Gamma)$. Άρα η ΑΟ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

Δηλαδή τα τμήματα ΕΓ και ΒΗ έχουν την ίδια μεσοκάθετο οπότε το τετράπλευρο ΒΕΓΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Εφόσον το τετράπλευρο ΒΕΓΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι διαγώνιες του θα είναι ίσες, οπότε: $B\Gamma = EH \quad (2)$. Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\Delta Z = EH$.



Οι χορδές ΔΖ και ΕΗ των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΘΔΖ και ΘΕΗ αντίστοιχα είναι ίσες μεταξύ τους και φαίνοντε από το σημείο Θ από τις παραπληρωματικές γωνίες $\hat{\Theta}_1$ και $\hat{\Theta}_1$. Άρα οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΘΔΖ και ΘΕΗ είναι ίσες.

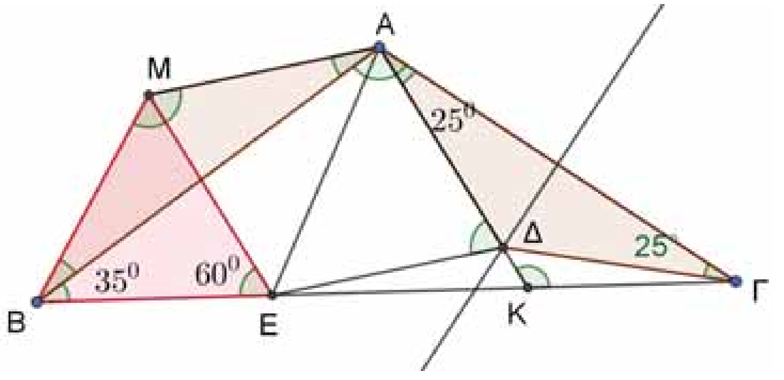
Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 120

Γ50. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 110^0$. Πάνω στη μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ και στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{A}\Gamma = 25^0$ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $BE = A\Delta$.

(α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\hat{E}\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ.

Λύση



Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΕΜ παράλληλο και ίσο με το ΑΔ και έστω Κ η τομή της ευθείας ΑΔ με την ευθεία ΒΓ. Τότε το τετράπλευρο ΑΜΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $B\hat{A}\Gamma = 110^0$ έπεται ότι

$$A\hat{K}\Gamma = 180^0 - \left(25^0 + 35^0\right) = 120^0,$$

οπότε $M\hat{E}B = 60^0$.

Επειδή $BE = A\Delta = EM$ και $M\hat{E}B = 60^0$, το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$MB = A\Delta \quad \text{και} \quad B\hat{M}E = 60^0.$$

Τα τρίγωνα ΑΔΓ (ισοσκελές) και ΑΜΒ είναι ίσα γιατί έχουν:

$$A\Gamma = AB,\ A\Delta = BM,\ M\hat{B}A = M\hat{B}E - E\hat{B}A = 60^0 - 35^0 = 25^0 = \Delta\hat{A}\Gamma.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με $MA = MB = A\Delta$, το παραλληλόγραμμο ΑΜΕΔ είναι ρόμβος και έχουμε:

$$B\hat{M}A = A\hat{\Delta}\Gamma = 180^0 - 2\cdot 25^0 = 130^0 \Rightarrow E\hat{M}A = B\hat{M}A - B\hat{M}E = 130^0 - 60^0 = 70^0,$$

οπότε $M\hat{E}\Delta = 110^0$ και $A\hat{E}\Delta = \frac{110^0}{2} = 55^0$, αφού η διαγώνιος ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{E}A$. Επειδή και $\Delta E = MA = MB = A\Delta$ το σημείο Δ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ.

Ασκήσεις για λύση

Γ51. Δύο ίσοι κύκλοι γ_1 και γ_2 τέμνονται στα σημεία Α και Β. Ο κύκλος γ με κέντρο Α τέμνει τον κύκλο γ_1 στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής του κύκλου γ με τον κύκλο γ_2 βρίσκονται πάνω στις ευθείες ΒΓ και ΒΔ.

Α67. Οι θετικοί παραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\alpha^{2014} + \beta^{2014} = \alpha^{2016} + \beta^{2016}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \le 2$.

Α68. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{(x+1)^4}{(x-1)^3} + \dfrac{x-1}{16} \ge \dfrac{(x+1)^2}{2(x-1)}$.

Συνδυαστική Ικανότητα

Σπύρος Φερεντίνος, Δημήτρης Παπαιωάννου

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιασθούν ορισμένα χαρακτηριστικά θέματα που αφορούν τη Συνδυαστική ικανότητα τα οποία τέθηκαν σε τάξεις του Γυμνασίου στον διαγωνισμό μαθηματικών ικανοτάτων της ΕΜΕ, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ, καθώς και η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε σε καθένα. Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να επιλεγεί διαφορετική στρατηγική (θα ήταν μια χρήσιμη εξάσκηση για τον μαθητή να το δοκιμάσει).

Σε κάθε ένα από τα θέματα η σωστή απάντηση είναι υπογραμμισμένη.

Η Συνδυαστική ικανότητα είναι μια πολύ χρήσιμη Μαθηματική ικανότητα που μας επιτρέπει να βρίσκουμε σύντομα συνδυασμούς και να μετράμε το πλήθος τους. Η ικανότητα αυτή αναπτύσσεται όταν αποκτήσουμε στρατηγικές να ¨σαρώσουμε¨ κατά κάποιον τρόπο συστηματικά όλες τις δυνατές περιπτώσεις (συνδυασμούς). Με λίγα λόγια θα λέγαμε ότι είναι η ικανότητα διάκρισης περιπτώσεων και οργάνωσης συνδυασμών

Αμέσως παρακάτω θα παρουσιασθούν ορισμένα παραδείγματα που αφορούν τη Συνδυαστική ικανότητα και βέβαια θα συνδεθούν με την αντίστοιχη στρατηγική επίλυσης, διότι όπως τονίσαμε σε προηγούμενο τεύχος του περιοδικού όλες οι μαθηματικές ικανότητες είναι συνδεδεμένη άρρηκτα με την κατάλληλη στρατηγική αντιμετώπισης .

Ακόμη στο τέλος του άρθρου θα παρουσιασθεί ένα παράδειγμα από το διαγωνισμό ΘΑΛΗΣ της ΕΜΕ με στόχο να φανεί ότι η Συνδυαστική ικανότητα (όπως και οι υπόλοιπες ικανότητες που εξετάζονται στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ) αποτελούν σκαλοπάτι που συνδέει το ΘΑΛΗ με τον ΠΥΘΑΓΟΡΑ.

Παραδείγματα Συνδυαστικής ικανότητας

Θέματα σε Εξετάσεις Πυθαγόρα

1) Πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε με τα ψηφία 4, 5, 0, αν χρησιμοποιήσουμε το καθένα από αυτά μόνο μια φορά.

Α) 3   <u>**Β) 4**</u>   Γ) 5   Δ) 6   Ε) 8

Απάντηση: Αρχικά, παρατηρούμε ότι το μηδέν μπροστά από έναν ακέραιο αριθμό δεν έχει κάποια αξία. Έτσι, οργανώνω την μέτρηση κρατώντας κάθε φορά έναν αριθμό σταθερό και αλλάζοντας τη σειρά των άλλων. Ξεκινάμε με πρώτο ψηφίο το 4 και βρίσκουμε όλους τους συνδυασμούς, δηλαδή 450 και 405. Στη συνέχεια τοποθετούμε πρώτο ψηφίο το 5 και βρίσκουμε όλους τους συνδυασμούς, δηλαδή 540 και 504. Συνεπώς σωστή είναι η απάντηση Β).

2) Ο Γιώργος έριχνε στον κουμπαρά του μόνο κέρματα των 2€ και χαρτονομίσματα των 5€. Όταν άνοιξε τον κουμπαρά του και μέτρησε τα χρήματα είδε ότι είχε 50€. Τα χαρτονομίσματα των 5€ θα μπορούσε να ήταν:

Α) 5   <u>**Β) 6**</u>   Γ) 7   Δ) 9   Ε) 11

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι ο Γιώργος έριχνε στον κουμπαρά του μόνο κέρματα των 2€ και χαρτονομίσματα των 5€. Συνεπώς θα πρέπει να σκεφτούμε τα πολλαπλάσια του 5 σε συνδυασμό με τα πολλαπλάσια του 2. Η μοναδική περίπτωση κατάλληλου συνδυασμού, που να δίνει άθροισμα 50, είναι τα χαρτονομίσματα να είναι ζυγός αριθμός.

3) Ο Γιώργος έχει 150€ σε νομίσματα των 2€, σε χαρτονομίσματα των 20€ και σε χαρτονομίσματα των 50€. Τι από τα παρακάτω μπορεί να συμβαίνει;

Α) τα χαρτονομίσματα των 20€ είναι περισσότερα από τα νομίσματα των 2€.

Β) τα νομίσματα των 2€ είναι λιγότερα από 5.

<u>**Γ) τα χαρτονομίσματα των 50€ είναι περισσότερα από τα χαρτονομίσματα των 20€**</u>

Δ) τα χαρτονομίσματα είναι συνολικά 6

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Απάντηση: Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε συνδυασμός νομισμάτων και χαρτονομισμάτων δεν θα πρέπει να ξεπερνά τα 150€ ενώ σύνολο του ποσού θα πρέπει να περιέχει και νομίσματα των 2€ και χαρτονομίσματα των 20€ και χαρτονομίσματα των 50€. Επίσης, τα νομίσματα των 2€ θα πρέπει να είναι 5 ή 10 ή 15 (πολλαπλάσια του 5) κ.λ.π. αφού 5 νομίσματα των 2€ αντιστοιχούν σε ποσό 10€, 10 νομίσματα των 2€ αντιστοιχούν σε ποσό των 10€, 15 νομίσματα των 2€ αντιστοιχούν σε 30€ κ.λ.π. Συνεπώς η απάντηση Β) απορρίπτεται αφού τα νομίσματα των 2€ δεν γίνεται να είναι λιγότερα από 5. Στη συνέχεια, θα πρέπει να απορρίψουμε και την απάντηση Α) αφού θα έπρεπε να έχουμε τουλάχιστον 6 χαρτονομίσματα των 20€ με 6·20€=120€ και 5·2€=10€, δηλαδή 120€+10€=130€ όπου τότε δεν θα μπορούσαμε να έχουμε κανένα χαρτονόμισμα των 50€! Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ούτε η απάντηση Δ) μπορεί να ισχύει αφού τότε το συνολικό ποσό θα ήταν πάνω από 150€. Τελικά η μόνη επιλογή που μπορεί να ισχύει είναι η Γ) όπου και παραθέτουμε το εξής παράδειγμα: $2\cdot 50€+1\cdot 20€+15\cdot 2€=100€+20€+30€=150€$.

4) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς μπορεί να είναι ένας από τρεις διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς που έχουν γινόμενο 720;

Α) 5 **<u>Β) 9</u>** Γ) 13 Δ) 20 Ε) κανένας από τους προηγούμενους

Απάντηση: Ξεκινάμε υπολογίζοντας το γινόμενο $5\cdot 6\cdot 7=210$ όπου είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να δώσει ένα γινόμενο που περιέχει τον αριθμό 5 από την απάντηση Α).Έπειτα, περνάμε στον αριθμό 9 από την απάντηση Β). Το μεγαλύτερο από τα γινόμενα που μπορεί να δώσει είναι το $9\cdot 10\cdot 11=990$ όπου παρατηρούμε ότι ξεπέρασε το 720 που μας δίνεται. Έτσι, δοκιμάζουμε το αμέσως μικρότερο γινόμενο που να περιέχει τον αριθμό 9 όπως $8\cdot 9\cdot 10=720$. Συνεπώς, η σωστή απάντηση είναι το Β).

5) Ποιος αριθμός θα πρέπει να μπει στο κουτάκι ώστε να ισχύει η ισότητα 99+99+99 = 27×ϒ

<u>Α) 11</u> Β) 9 Γ) 99 Δ) 81 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι υπάρχει τρεις φορές ο αριθμός 99 όπου μπορεί να εκφραστεί με τον εξής τρόπο 99=9·11. Επίσης ο αριθμός 27 δεξιά της ισότητας μπορεί να εκφραστεί ως 27=3·9. Επίσης, ισχύει ότι 99+99+99=3·99 δηλαδή 99+99+99=3·99=3·9·11=27·11. Συνεπώς, σωστή απάντηση είναι η Α).

6) Διαθέτουμε τις παρακάτω κάρτες

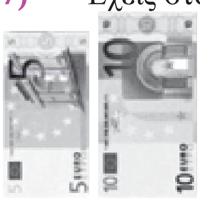
5	1	8	0

Πόσους άρτιους (ζυγούς) διψήφιους αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε;

Α) 2 Β) 3 Γ) 4 **<u>Δ) 5</u>** Ε) κανένα

Απάντηση: Αρχικά, γνωρίζουμε ότι άρτιοι (ζυγοί) αριθμοί είναι εκείνοι όπου τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6 ή 8. Συνεπώς, θα πρέπει να υπολογίσουμε πόσοι συνδυασμοί αριθμών μπορούν να κατασκευαστούν με το δεύτερο ψηφίο να είναι η κάρτα με τον αριθμό 0 ή 8. Δηλαδή, 58, 50, 18, 10, 80. Άρα σωστή απάντηση είναι η Δ).

7) Έχεις στο τραπέζι δύο χαρτονομίσματα, ένα των 5 ευρώ και ένα των 10 ευρώ.



Τα χρήματα αυτά τα παίρνουν δύο φίλοι σου, η Άννα και ο Βασίλης χωρίς να ξέρεις ποιος πήρε τι. Ζητάς στην Άννα να διπλασιάσει το ποσό που έχει και από τον Βασίλη να το τριπλασιάσει. Μετά σου ανακοινώσουν ότι το άθροισμα των χρημάτων που έχουν είναι 40 €.

Τι χαρτονόμισμα έχει πάρει ο καθένας από τους 2 φίλους;

<u>Α) η Άννα έχει πάρει 5 ευρώ και ο Βασίλης 10 ευρώ,</u>

Β) η Άννα έχει πάρει 10 ευρώ και ο Βασίλης 5 ευρώ

Γ) η Άννα έχει πάρει 5 ευρώ και ο Βασίλης 5 ευρώ,

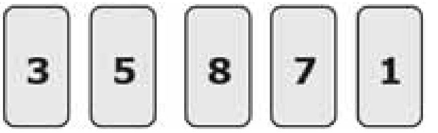
Δ) η Άννα έχει πάρει 10 ευρώ και ο Βασίλης 10 ευρώ,

Ε) δεν γνωρίζουμε

Απάντηση: Αρχικά, παρατηρούμε ότι οι απαντήσεις Γ και Δ είναι παράλογες αφού ο καθένας πήρε διαφορετικό χαρτονόμισμα. Εφόσον το ένα ποσό διπλασιάσθηκε και το άλλο ποσό τριπλασιάσθηκε, τα πιθανά αθροίσματα που θα προκύψουν θα είναι $2\cdot 5+3\cdot 10=40$ ή $3\cdot 5+2\cdot 10=35$. Επομένως, άρτιο άθροισμα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η Άννα έχει 5€ και ο

Βασίλης 10€, ενώ περιττό άθροισμα οδηγεί στο αντίστροφο συμπέρασμα.

8) Διαθέτουμε τις παρακάτω κάρτες



Πόσους διψήφιους αριθμούς που διαιρούνται με το 5 μπορούμε να φτιάξουμε;

Α) κανένα **Β) 4** Γ) 1 Δ) 5 Ε) δεν γνωρίζουμε

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι έχουμε μόνο μία κάρτα κατάλληλη για πολλαπλάσιο του 5 αφού για να διαιρείται ένας αριθμός με τον αριθμό 5 θα πρέπει να τελειώνει σε 0 ή 5. Συνεπώς, οι αριθμοί που μπορούν να σχηματιστούν και να τελειώνουν σε 5 είναι οι 15, 35, 75 και 85.

9) Το ΑΤΜ μιας τράπεζας, δηλαδή το μηχάνημα από το οποίο μπορείς να πάρεις χρήματα από τον λογαριασμό σου, μπορεί να δώσει μόνο χαρτονομίσματα των 50€ και των 20€.

Ο Μάριος, μαθητής της Β΄ Γυμνασίου, πήγε με τον πατέρα του σε ένα ΑΤΜ. Ο πατέρας του ζήτησε 130€.

Τι από τα παρακάτω είναι περισσότερο πιθανό να συμβεί;

Α) το μηχάνημα να του βγάλει 3 ακριβώς χαρτονομίσματα

Β) το μηχάνημα να του βγάλει 4 ακριβώς χαρτονομίσματα

Γ) το μηχάνημα να του βγάλει 5 ακριβώς χαρτονομίσματα

Δ) το μηχάνημα να εμφανίσει στην οθόνη του: «Απαγορεύεται το κάπνισμα»

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Απάντηση: Παρατηρώ ότι δεν υπάρχουν χαρτονομίσματα των 10€. Έτσι, επιχειρώ να κατασκευάσω τον αριθμό 130 με πολλαπλάσια του 50 και του 20. Μετά από δοκιμές καταλήγω ότι $1\cdot 50+4\cdot 20=130$€

10) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς μπορεί να είναι ένας από τρεις διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς που έχουν γινόμενο 720;

Α) 5 **Β) 9** Γ) 13 Δ) 20 Ε) κανένας από τους προηγούμενους

Απάντηση: Ξεκινάμε υπολογίζοντας το γινόμενο 5·6·7=210 όπου είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να δώσει ένα γινόμενο που περιέχει τον αριθμό 5 από την απάντηση Α). Έπειτα, περνάμε στον αριθμό 9 από την απάντηση Β). Το μεγαλύτερο από τα γινόμενα που μπορεί να δώσει είναι το 9·10·11=990 όπου παρατηρούμε ότι ξεπέρασε το 720 που μας δίνεται. Έτσι, δοκιμάζουμε το αμέσως μικρότερο γινόμενο που να περιέχει τον αριθμό 9 όπως 8·9·10=720.

11) Ο κ. Ανάργυρος είχε στο πορτοφόλι του 4 χαρτονομίσματα. Κανένα χαρτονόμισμα δεν είχε αξία μεγαλύτερη των 50€. Επισκέφτηκε ένα κατάστημα ρούχων, διάλεξε ρούχα συνολικής αξίας 250€ και πήγε στο ταμείο, πλήρωσε, πήρε τα ρούχα και έφυγε. Τι από τα παρακάτω είναι το πιο πιθανό να έχει συμβεί;

Α) να έχει πάρει ρέστα 20€ Β) να έχει πληρώσει τα 250€ με τα χρήματά του

Γ) να του έχουν δώσει δωρεάν τα ρούχα **Δ) να του έχει κάνει το κατάστημα έκπτωση 20%**

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι ο κ. Ανάργυρος είχε στο πορτοφόλι του 4 χαρτονομίσματα όπου κανένα από αυτά δεν είχε αξία πάνω από 50€. Δηλαδή το μεγαλύτερο ποσό που θα μπορούσε να έχει μαζί του ήταν 200€. Επειδή τα ρούχα που διάλεξε έιχαν αξία 250€, ο μόνος τρόπος να τα πλήρωσε θα ήταν το μαγαζί να του έκανε έκπτωση 20% όπου αντιστοιχεί σε $\frac{20}{100}\cdot 250=50$.

Συνεπώς πλήρωσε $250-50=200$€.

Θέμα από Θαλή

12) Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

Α) πιθανώς ναι **Β) με βεβαιότητα ναι** Γ) πιθανώς όχι Δ) με βεβαιότητα όχι Ε) δεν γνωρίζουμε

Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10. Πράγματι $10\cdot 2+8\cdot 10=100$.

Άγχος των Μαθηματικών ή Μαθηματικοφοβία.

Νικολόπουλος Γιάννης- Μαθηματικός-Ειδικός Παιδαγωγός

Συνηθισμένο φαινόμενο ειδικά στα χρόνια της οικονομικής κρίσης, οι γονείς ζητούν σχεδόν επιτακτικά από τα παιδιά τους: «κοίταξε να σπουδάσεις για να ζήσεις αξιοπρεπώς στη κοινωνία». Επιπλέον στην παρούσα εποχή της παγκοσμιοποίησης πολλά παιδιά όταν τελειώνουν τα Πανεπιστήμια επιζητούν την 'τύχη' τους και σε χώρες της Δυτικής Ευρώπης προκειμένου να ξεφύγουν από την ανεργία αλλά εκεί τα επαγγέλματα σχετίζονται με τις Θετικές Επιστήμες.

Πολλές έρευνες, αρκετοί γονείς και εκπαιδευτικοί έχουν αναγνωρίσει το 'άγχος' σαν ένα από ανθρώπινα συναισθήματα, το οποίο ασκεί σημαντική επιρροή στη μαθητική συμπεριφορά. Το Μαθηματικό Άγχος (ΜΑ), όπως είναι λογικό συνδέεται με το γενικό άγχος, ωστόσο προσδιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο φόβο για τα μαθηματικά. Προσεγγίζοντας το ΜΑ, παρατηρούμε μια μόνιμη αρνητική αντίδραση απέναντι στα μαθηματικά και στις μαθηματικές διαδικασίες (Ashcraft & Ridley, 2005) περικλείοντας ένα εύρος από συναισθηματικές αντιδράσεις που κυμαίνονται από ήπιες καταστάσεις, όπως ανησυχία ή αντιπάθεια μέχρι και πραγματικό φόβο.

Η κατανόηση των αιτιών του Μαθηματικό Άγχος ΜΑ, είναι ένα ζήτημα σημαντικό αλλά ταυτόχρονα και ιδιαίτερα πολύπλοκο, καθώς οι παράγοντες που επιδρούν σε κάθε άτομο ποικίλουν. Στην ομαδοποίηση των παραγόντων που προκαλούν ΜΑ, προέκυψαν οι ακόλουθες κατηγορίες: Οικογένεια, Κοινωνία, Δάσκαλος, Διδασκαλία και Αυτοεκτίμηση. Κατηγορίες, οι οποίες στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά:

1. Οι μαθητές τείνουν να υιοθετούν τη θετική ή αρνητική στάση των γονιών για τα μαθηματικά, εδώ να σημειώσουμε ότι οι πλειοψηφία των γονιών δεν έχει θετική προτίμηση/στάση.
2. Επίσης οι μαθητές τείνουν να υιοθετούν τη θετική ή την αρνητική στάση των εκπαιδευτικών (Δασκάλων-Μαθηματικών) για τα μαθηματικά. Όντως έχουν αρνητική επίδραση οι συνάδελφοι που δεν είναι πλήρως καταρτισμένοι, που διδάσκουν χωρίς όρεξη και δεν προετοιμάζονται για την διδασκαλία.
3. Αγχώνονται οι μαθητές και δεν μπορούν να δώσουν σε μια εξέταση, προφορική ή γραπτή ούτε τις υπάρχουσες γνώσεις τους. Αποτέλεσμα των αποτυχιών η χαμηλή αυτοεκτίμηση όπου ο ερχομός της φέρνει επαναλαμβανόμενες αποτυχίες.

Μια συνηθισμένη λέξη για το Μαθηματικό Άγχος είναι η λεγόμενη Μαθηματικοφοβία που αντιστοιχεί στην ανασφάλεια που αισθάνονται οι μαθητές για το μάθημα των μαθηματικών. Η Μαθηματικοφοβία δεν είναι παθολογική κατάσταση, προξενείτε από τις αρνητικές εμπειρίες των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών και επηρεάζει τη μαθηματική τους επίδοση μειώνοντας τη στο ελάχιστο. Ποια είναι τα κυριότερα αίτια της Μαθηματικοφοβίας;

Καταρχάς είναι η σπουδαιότητα των μαθηματικών σήμερα, που αποτελεί υπόβαθρο όλων των επιστημών, στολίζεται μάλιστα με το πέπλο της Ανωτερότητας και της Δυσκολίας, με βαθιά κοινωνική προκατάληψη,

Η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν συμβαδίζει συνήθως με τα στάδια νοητικής ανάπτυξης του παιδιού, στάδια που μας υποδηλώνουν την κατεκτημένη δεδομένη γνώση, που οφείλουν οι Δάσκαλοι-Μαθηματικοί να την σταθμίσουν/αξιολογήσουν για να προγραμματίσουν την επικείμενη γνώση.

Τα μαθηματικά δεν διδάσκονται σε σχέση με τη ζωή και το περιβάλλον και επομένως η μάθηση δεν βασίζεται στην κατανόηση δραστηριοτήτων της πραγματικότητας. Έτσι συνήθως έχουμε Διδασκαλία χωρίς Μάθηση.

Αυτές οι διαπιστώσεις δεν θα έχουν την αξία τους αν δεν τις αντιμετωπίσουμε δηλαδή αν δεν δημιουργήσουμε εκπαιδευτική παρέμβαση.

Το θεμελιωμένο επιστημονικά, «Άγχος των Μαθηματικών» λειτουργεί αντίστροφα από τα δύο αισθήματα της Ικανοποίησης και της Ηρεμίας. Εδώ έρχονται οι Νευροεπιστήμες να μας επιβεβαιώσουν ότι, όταν ο μαθητής βρίσκεται στο επίπεδο της Ηρεμίας και της Ικανοποίησης ειδικά την ώρα του μαθήματος τότε εισπράττει τα μέγιστα στην Μνήμη Εργασίας και αυτά απομνημονεύονται και διατηρούνται στην Μακρόχρονη Μνήμη.

Έχει παρατηρηθεί ότι όταν τα άτομα καταλαμβάνονται από αρνητικά στερεότυπα (αρνητικές πεποιθήσεις) σχετικά με την αναμενόμενη απόδοσή τους ή όταν βρίσκονται μπροστά σε μία εξεταστική κατάσταση που είναι ιδιαίτερα κρίσιμη για το μέλλον τους, ένα αγχογόνο περιβάλλον μπορεί να αντιστρέψει την επιτυχία τους κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Οι περισσότερες έρευνες υπογραμμίζουν ότι οι περιβαλλοντικές συνθήκες που ευνοούν το άγχος δημιουργούν στους εξεταζόμενους ανησυχίες για τις συνέπειες μιας αποτυχίας, παράμετρος που έχει βρεθεί να ανταγωνίζεται την λειτουργία της Μνήμης. Κατά συνέπεια, η απόδοση των ατόμων που βασίζεται περισσότερο στην Μνήμη για την επιτυχή εκτέλεση των μαθηματικών ασκήσεων, είναι αναμενόμενο να μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα όταν αυξάνεται η περιβαλλοντική πίεση (Beilock, 2008).

Πως θα αντιμετωπίσουμε το άγχος;

Οι διαπιστώσεις, δεν θα έχουν αξία για τους μαθητές, αν δεν τις αντιμετωπίσουμε δηλαδή αν δεν δημιουργήσουμε παρέμβαση που να ανατρέπει το άγχος:

1. Τα μαθηματικά είναι ανάγκη να βρίσκονται κοντά στον κόσμο του παιδιού και όχι να περιορίζονται, στο μάθημα, στο βιβλίο και σε αφηρημένες έννοιες.
2. Πρέπει να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές για συμμετοχή, παρατηρήσεις και ανακαλυπτικές διαδικασίες.
3. Περισσότερη γεωμετρία και μάλιστα των Στερεών για την κατανόηση του χώρου που ζουν καθημερινά τα παιδιά.
4. Αναγκαία μικρά και κατανοητά θέματα που με την βοήθεια του εκπαιδευτικού οδηγείται το παιδί σε σχετικές επιτυχίες και φροντίζουμε την επιβραβεύσει του, στη συνέχεια βήμα-βήμα κτίζεται η Αυτοεκτίμηση.
5. Διδασκαλία σύμφωνα με τις αρχές της Παιδαγωγικής, ο Δάσκαλος πρέπει να κατανοήσει στη φύση των μαθηματικών, να γνωρίζει το αντικείμενο να θέλγει η διδασκαλία και να προσελκύει τους μαθητές στην μαθηματική παιδεία. Οι καθηγητές, καλλιεργώντας σχέσεις με τους μαθητές και διαμορφώνοντας ένα θετικό ψυχολογικό κλίμα στις τάξεις, δημιουργούν υψηλό αίσθημα αυτάρκειας στους μαθητές και καλύτερες συνθήκες μάθησης και διδασκαλίας (Ματσαγγούρας, 2002).
6. Διαμορφώνεται μια σφαιρική αντίληψη στο εγκέφαλο του παιδιού, έτσι χαράσσονται ισχυρά ίχνη που διατηρούνται στην μακρόχρονη μνήμη του παιδιού. Η διάρκεια της συγκράτησης των πληροφοριών εξαρτάται από την ισχύ των μνημονικών ιχνών που δημιουργούνται κατά τη φάση της εκμάθησης (Παπαδάτος, 2010).

Έρευνες έδειξαν, ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ της χαμηλής ικανότητας των μαθητών στις οπτικές δεξιότητες και του "φόβου για τα Μαθηματικά". Άμεσο αποτέλεσμα αυτής της σύνδεσης είναι, οι "αδύνατοι" μαθητές να χρειάζονται περισσότερη ενασχόληση με σχήματα και στερεά γεωμετρικά αντικείμενα, όπως έχουν δείξει τόσο για τη βελτίωσή τους στη Γεωμετρία, όσο και για τη γενικότερη διόρθωση της επίδοσής τους στα Μαθηματικά.

Βιβλιογραφία

1) Ashcraft, M. H. & Ridley, K. S. (2005). Math anxiety and its cognitive consequences-A tutorial review. In J. I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition (pp. 315-327). New York: Psychology Press.
2) Beilock, S. L. (2008). Math Performance in Stressful Situations. First Published. Research Article https://doi.org/10.1111/j.1467-8721.2008.00602.x
3) Ματσαγγούρας, Η. (2002). Η διαθεματικότητα στη σχολική γνώση. Εννοιοκεντρική αναπλαισίωση και σχέδια εργασίας. Αθήνα, Εκδόσεις: Γρηγόρη
4) Παπαδάτος, Γ. (2010). Ψυχικές Διαταραχές και Μαθησιακές Δυσκολίες Παιδιών και Εφήβων. Αθήνα: Εκδόσεις GUTEBERRG.

Οι μαθητές δημιουργούν μαθηματικά παιχνίδια και κάνουν επανάληψη μέσα από αυτά

1ο Γυμνάσιο Αμαρουσίου Σχολικό έτος 2020-21 Β' Γυμνασίου

Κατερίνα Ρουμπή

Το παιχνίδι έχει μακρά ιστορία στην εκπαίδευση. Είναι μια σύνθετη διαδικασία. Περιλαμβάνει μια ευρεία γκάμα από συμπεριφορές, δράσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συμμετεχόντων. Επιτρέπει την έκφραση ιδεών και συναισθημάτων και την εξωτερίκευση ενεργητικότητας. Δίνει χαρά, συμβάλλει στη γνωστική ανάπτυξη και την επίλυση προβλημάτων και στην ανάπτυξη εσωτερικών κινήτρων. Ατομικό ή ομαδικό ενισχύει την επιμονή και την αυτοπεποίθηση.

Πώς μπορεί, λοιπόν, το παιχνίδι να λειτουργήσει δημιουργικά μέσα σε μία τάξη Μαθηματικών;

Ιδού η πρόκληση: Ζητήθηκε από τους μαθητές ενός τμήματος της Β τάξης να σχεδιάσουν παιχνίδια με μαθηματικό περιεχόμενο.

Αναλυτικά:

α) να σχεδιάσουν και να κατασκευάσουν ένα παιχνίδι (εσωτερικού ή εξωτερικού χώρου, επιτραπέζιο ή όχι, ατομικό ή ομαδικό, όχι όμως διαδικτυακό)

β) να γίνει ορθός καταμερισμός εργασιών και να είναι ξεκάθαρος ο ρόλος κάθε μαθητή στην ομάδα του και

γ) να φροντίσουν την καλαισθησία, την πρωτοτυπία και την κάθε λεπτομέρεια της κατασκευής τους

Από την πρώτη στιγμή το σύνολο των μαθητών έδειξε ενθουσιασμό!

1η φάση (1 διδακτική ώρα) : μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας, συζήτηση, καταιγισμός ιδεών, χωρισμός ομάδων και αρχικός σχεδιασμός του παιχνιδιού από κάθε ομάδα ξεχωριστα

Ξεκινήσαμε με συζήτηση.

Αφόρμηση: Τι έρχεται στο νου σας οταν ακούτε τη λέξη «παιχνίδι»;

Απαντήσεις: χαρά, γέλιο, μπάλα, ανταγωνισμός, έπαθλο, γήπεδο, επιτραπέζιο, ηλεκτρονικό, διαιτητής, πάρκο, βαθμολογία....

Οι απαντήσεις των μαθητών γράφτηκαν στον πίνακα και αμέσως μετά ζήτησα από τους μαθητές να σκεφτούν τρόπους με τους οποίους ένα παιχνίδι μπορεί να γίνει μαθηματικό παιχνίδι. Οι ιδέες πολλές και όσο προχωρούσε η ώρα γινόντουσαν ακόμα πιο ενδιαφέρουσες. Η συζήτηση συνεχίστηκε με συμμετοχή όλων ανεξαιρέτως των μαθητών! Δε γράψαμε τίποτε άλλο στον πίνακα.

Στο υπόλοιπο της διδακτικής ώρας χωρίστηκαν σε ομάδες τα παιδιά (από δύο έως τεσσερα άτομα). Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα προτείνω τέσσερις μαθητές ανά ομάδα, αριθμός ικανός για ποικιλία ιδεών και καταμερισμό εργασιών. Ομως και μία μαθήτρια που επέλεξε να εργαστεί μόνη της δημιούργησε με επιτυχία ένα παιχνίδι που παίζεται από ένα άτομο (το $6^{ο}$ παιχνίδι που παρουσιάζεται στο τέλος του άρθρου).

Κάθε ομάδα αποφάσισε, **με άκρα μυστικότητα**, το είδος του παιχνιδιού που θα φτιάξει και ξεκίνησε το σχεδιασμό (πλήθος παικτών, κανόνες, βαθμολογία, πότε ολοκληρώνεται το παιχνίδι κλπ). Η μυστικότητα αποτελεί κίνητρο και διατηρεί το στοιχείο της έκπληξης μέχρι την τελευταία διδακτική ώρα που είδαμε στην πράξη το κάθε παιχνίδι ξεχωριστά.

2η φάση (1-2 διδακτικές ώρες) : κατασκευή των παιχνιδιών, μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας

Κάθε ομάδα είχε φέρει μαζί τα υλικά που χρειάζονταν και ξεκίνησαν την κατασκευή. Με χαρτόνια, χαρτιά, χρώματα, ψαλίδια άρχισαν να παίρνουν μορφή οι ιδέες. Φτιάχτηκαν ταμπλώ, κάρτες ερωτήσεων, βιβλιαράκια οδηγιών. Το κομμάτι με τις Μαθηματικές ερωτήσεις (θεωρίας ή πράξεων) φρόντισα να μοιραστεί σε όλα τα μέλη των ομάδων και να μην το αναλάβει αποκλειστικά ένας μαθητής από κάθε ομάδα. Αριθμητικές πράξεις, γεωμετρικά σχέδια, διαγράμματα και γρίφοι με διάφορα επίπεδα δυσκολίας επιλέχθηκαν από τους μαθητές και στη συνέχεια λύθηκαν από τους ίδιους ώστε να υπάρχουν οι σωστές απαντήσεις στο βιβλίο οδηγιών και επίσης χρονομετρήθηκαν για τα παιχνίδια που ο χρόνος είναι παράμετρος νίκης. Κατά τη διάρκεια της κατασκευής εντοπίστηκαν προβλήματα και επανασχεδιάστηκαν κάποιες λεπτομέρειες. Αναπτύχθηκε το ομαδικό πνεύμα, ενισχύθηκε η ανάγκη της συνεργασίας και καλλιεργήθηκε η ικανότητα διαπραγμάτευσης.

3η φάση (1-2 διδακτικές ώρες) : «παίζουμε τα παιχνίδια»

Κάθε ομάδα ανέλαβε να μας παρουσιάσει το παιχνίδι της και οι υπόλοιπες ομάδες ακολούθησαν τις οδηγίες, ώστε να δούμε στην πράξη αν όλα λειτουργούν ομαλά. Οπου ήταν απαραίτητο σημειώνονταν διορθώσεις που αφορούσαν στους χρόνους και στο επίπεδο δυσκολίας των μαθηματικών ερωτήσεων.

Μετά από κάθε παρουσίαση ακολουθούσαν ερωτήσεις προς την ομάδα που παρουσίασε και σχόλια για τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία του παιχνιδιού.

Στο τέλος των παρουσιάσεων κάθε ομάδα έκανε την αυτοκριτική της: τι θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει διαφορετικά για καλύτερο αποτέλεσμα και καλύτερη συνεργασία.

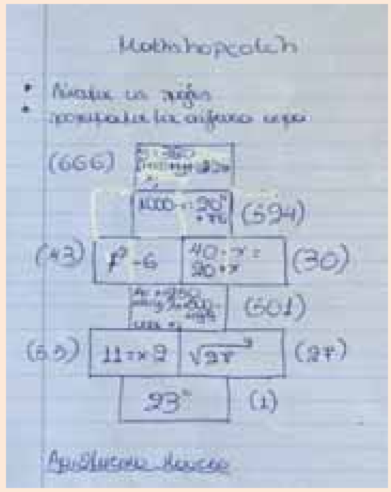
Συμπεράσματα: Μέσα από αυτήν την ομαδική εργασία οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να συνεργαστούν, να σχεδιάσουν, να προγραμματίσουν και να κάνουν επανάληψη Μαθηματικών εννοιών με ευχάριστο και δημιουργικό τρόπο. Η ανατροφοδότηση που έδωσαν οι μαθητές ήταν θετική. Η ελευθερία να θέσουν οι ίδιοι τους κανόνες και το επίπεδο της δυσκολίας, τους ενεργοποίησε χωρίς να καταφύγουν σε απλοικές μαθηματικές ερωτήσεις. Ο διπλός ρόλος που είχαν, δηλαδή και του υπεύθυνου δημιουργού/εμψυχωτή στην αρχή και του ανέμελου παιδιού που διασκεδάζει παίζοντας τα παιχνίδια στο τέλος, προσέφερε πολλά επίπεδα μάθησης, συνειδητής και ασυνείδητης.

Η συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε με ένα τμήμα της Β’ τάξης του 1^{ου} Γυμνασίου Αμαρουσίου την τελευταία εβδομάδα του σχολικού έτους 2020-21 και θα χρησιμοποιηθεί το Σεπτέμβρη της νέας χρονιάς για επανάληψη στα υπόλοιπα τμήματα.

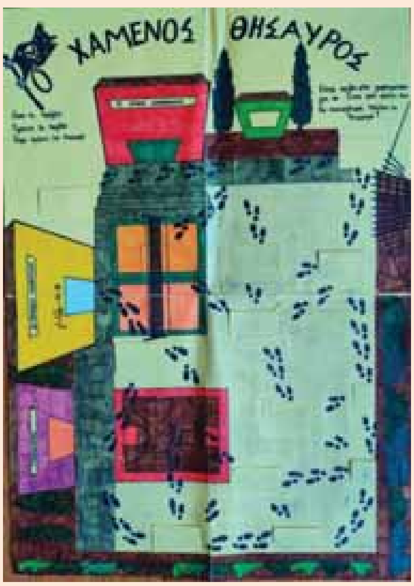
Το Blog του 1ου Γυμνασίου Αμαρουσίου όπου μπορείτε να βρείτε όλες τις εργασίες της σχολικής χρονιάς: https://blogs.sch.gr/1gymamar/?page_id=945

- **Ακολουθούν περιγραφές και φωτογραφίες έξι παιχνιδιών**

1^{ο} παιχνίδι: «Ο ταχύτερος κερδίζει». Ολοι οι παικτες αντιμετωπίζουν την ίδια μαθηματική ερώτηση. Ο ταχύτερος παταέι το κουδούνι και παίρνει έναν βαθμό εφόσον απάντησε σωστά, αλλιώς χάνει ένα βαθμό. Η ταχύτητα αυξάνει την αδρεναλίνη κι ένα μέρος των μαθητών κινητοποιείται.

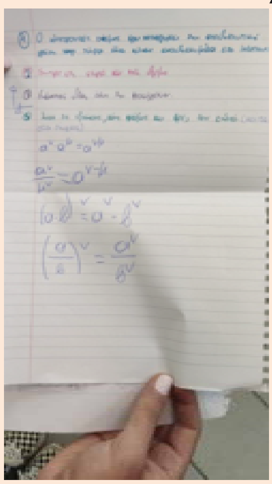


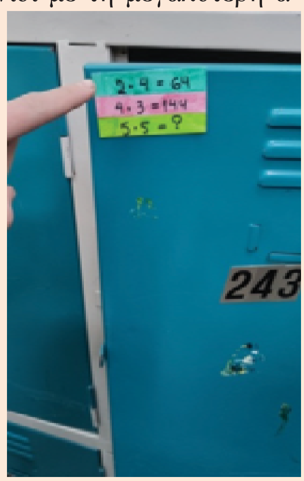
2^{ο} παιχνίδι : «Αριθμητικό κουτσό». Το γνωστό κουτσό! Κάθε φορά που βγαίνουμε στην αυλή η επιτυχία της διδακτικής ώρας είναι σίγουρη! Οι μαθητές που το σχεδίασαν, είχαν από πριν φτιάξει με κιμωλία τα κουτάκια στην αυλή και διασκεδάσαμε όλοι πολύ, παράλληλα με τις μαθηματικές συζητήσεις που προέκυψαν.



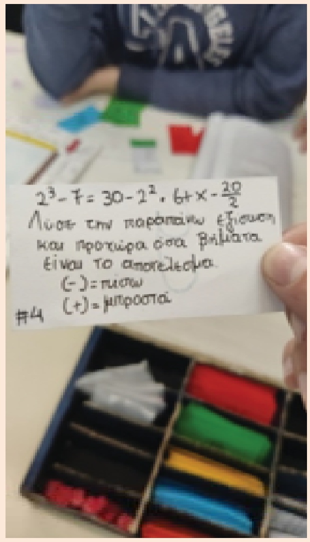
3^{ο} παιχνίδι: «Χαμένος θησαυρός». Ενας θησαυρός είναι πάντα μια καλή αφορμή για να ρισκάρεις μία λάθος απάντηση και τελικά να δικαιωθείς!

4^{ο} παιχνίδι: «escape classroom». Το παιχνίδι με τη μεγαλύτερη απήχηση! Μία αίθουσα διδασκαλίας μετατρέπεται σε δωμάτιο απόδρασης. Γρίφοι κρύβονται κάτω από θρανία και πίσω από πίνακες, μέσα σε ντουλαπάκια και ανάμεσα από βιβλία. Η ομάδα που σχεδίασε και έστησε αυτό το παιχνίδι υποδέχεται ομάδες τριών ατόμων και τους βοηθά αν χρειαστεί. Η ομάδα που «αποδρά» γρηγορότερα είναι και η νικήτρια!

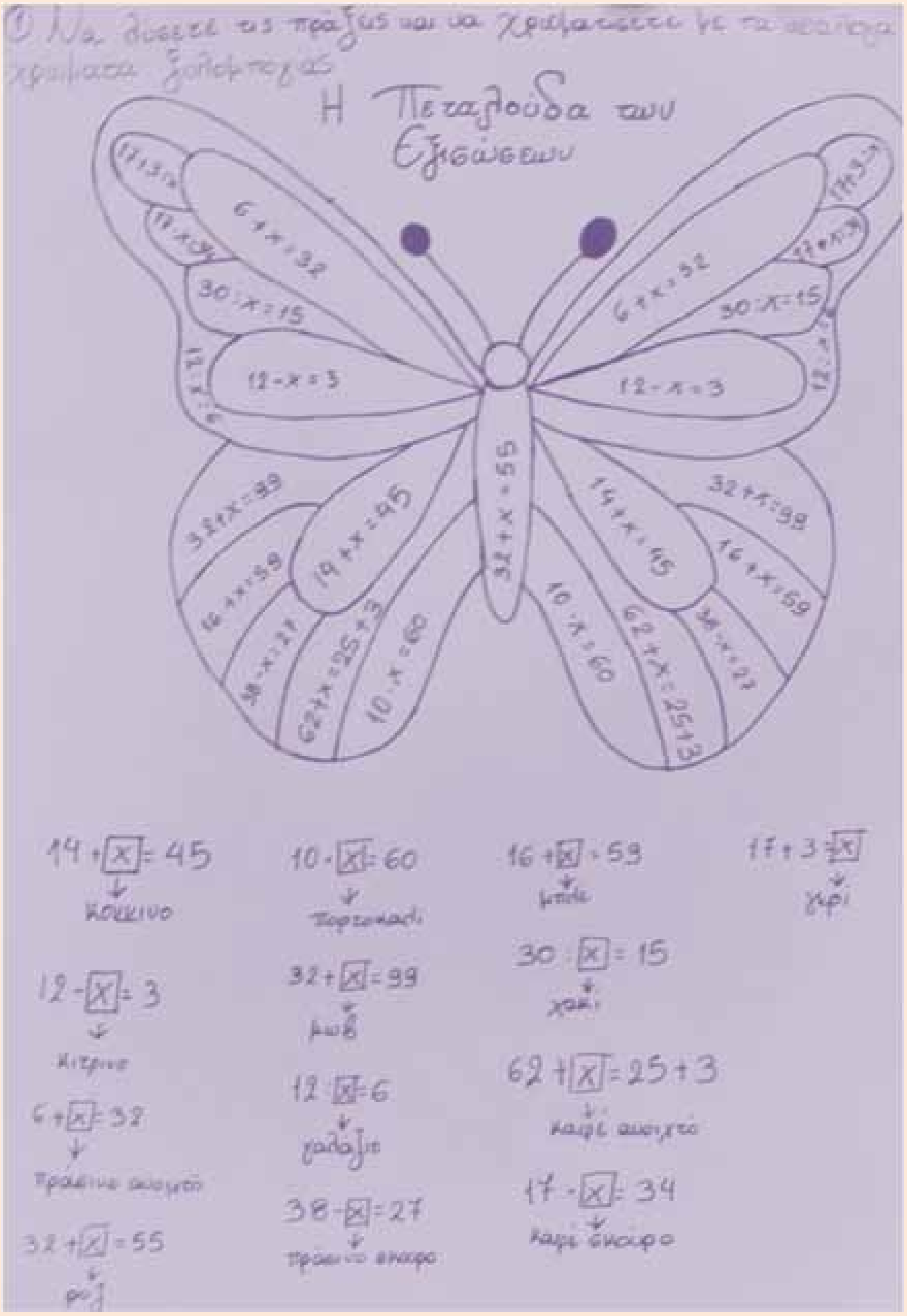




5ο παιχνίδι: «Αριθμούπολη». Εμπνευσμένη από τη γνωστή μας Μονόπολη. Αυτή η ομάδα κατασκεύασε όλα τα κομμάτια του παιχνιδιού μόνη της, μέχρι και τα πιόνια! Ολα χειροποίητα! Εκοψαν, κόλλησαν, χρωμάτισαν και εκτύπωσαν το βιβλίο με τις οδηγίες. Ξεκίνησαν το παιχνίδι και δε βγήκαν διάλειμμα και συνέχισαν και την επόμενη ώρα!



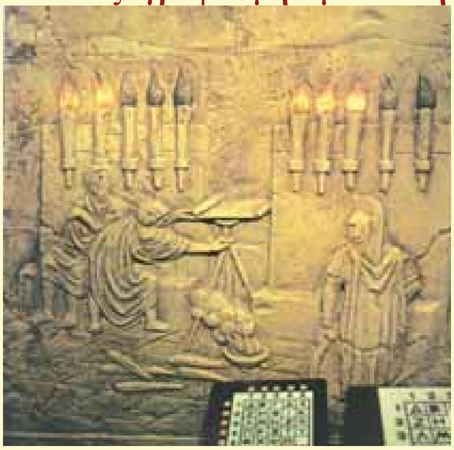
6ο παιχνίδι: «Ζωγραφική υπό μαθηματικές προυποθέσεις». Ατομικό, ζωγραφίζω με το ίδιο χρώμα τα κουτάκια που οι πράξεις τους έχουν το ίδιο αποτέλεσμα. Παιχνίδι σχεδιασμένο από μία μαθήτρια μόνο, που απευθύνεται σε έναν μόνο παίκτη χωρίς περιορισμό χρόνου.



Μαθηματικά ανάλεκτα

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Πως έγραφαν μηνύματα στην αρχαιότητα;



Παλαιότερα οι άνθρωποι δεν είχαν κινητά και δυνατότητα να στείλουν ηλεκτρονικά κωδικοποιημένα μηνύματα. Έτσι έγραφαν επιστολές τις οποίες μετέφεραν οι ταχυδρόμοι στους παραλήπτες. Όταν ήθελαν να στείλουν κωδικοποιημένα μηνύματα είχαν εφεύρει κατάλληλες συσκευές (μπορεί κανείς να δει ομοιώματα π.χ. στο μουσείο αρχαίας ελληνικής τεχνολογίας Κοτσανά).

Οι αρχαιολόγοι μάλιστα στις ανασκαφές βρίσκουν και κακόβουλα μηνύματα (κατάρες) γραμμένα σε φύλλα από μόλυβδο. Αυτοί που τα έγραφαν πήγαιναν και τα έριχναν κάπου κρυφά, σε ναούς, σε δημόσια χρηματοκιβώτια ή αλλού γιατί πίστευαν ότι έτσι «μαγικά», το πρόσωπο στο οποίο αναφέρονταν θα πάθαινε κακό.

Τι είναι το ISBN;

Για τον έλεγχο των εκατομμυρίων βιβλίων που εκδίδονται κάθε μέρα σε όλο τον κόσμο εφαρμόστηκε Διεθνής Πρότυπος Αριθμός Βιβλίου ISBN (International Standard Book Number).

Κάθε πνευματική εργασία, από τη στιγμή που ο δημιουργός της θελήσει να την εμπορευθεί, επιβάλλεται να αποκτήσει έναν ξεχωριστό αριθμό, που λέγετε ISBN.

Ακόμα έχουμε ISSN (διεθνής τυποποιημένος αριθμός περιοδικών εκδόσεων και λοιπών συνεχών πηγών), DOI (αναγνωριστικό ψηφιακού αντικειμένου) και ISMN (διεθνής αριθμός για μουσικές εκδόσεις).

Ο Διεθνής Πρότυπος Αριθμός Βιβλίου ISBN (International Standard Book Number) είναι ένας ραβδοκώδικας (barcode) που απαρτίζεται, σύμφωνα με το πρότυπο ISO-2108, από πέντε τμήματα αριθμών και γράφεται στο τελευταίο εξώφυλλο.

Σε κάθε έκδοση ανατίθεται ένας αριθμός ISBN από την Υπηρεσία Εκδόσεων και δεν έχει καμία σημασία ή νομική αξία σε ότι αφορά τα πνευματικά δικαιώματα για το εν λόγω έργο, ούτε σε ότι αφορά το περιεχόμενό του.

Όταν ο ISBN αποδοθεί σε ένα προϊόν δεν μπορεί ούτε να τροποποιηθεί, ούτε να αντικατασταθεί, ούτε και να ξαναχρησιμοποιηθεί.

Το δικό μας Εθνικό Κέντρο είναι στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Ελλάδας που το 1829 ίδρυσε ο Ιωάννης Καποδίστριας.

Από το 2007 ο ISBN αποτελείται από 13 ψηφία, τα οποία διακρίνονται σε πέντε τμήματα, των οποίων προηγείται το πρόθεμα ISBN και ένα κενό διάστημα:

1^{ο} τμήμα: κωδικός EAN (European article numbering) 978 ή 979 καθορίζει ότι πρόκειται για βιβλίο ή περιοδικό, κλπ.

2^{ο} τμήμα: αριθμός χώρας(960 για την Ελλάδα) στην οποία γίνεται η έκδοση.

3^{ο} τμήμα: αναγνώρισης ομάδας (το 92 είναι διεθνείς οργανισμοί),

4^{ο} τμήμα: αριθμός αναγνώρισης εκδότη (κωδικός συγγραφέα),

5^{ο} τμήμα: αριθμός αναγνώρισης τίτλου από την παραγωγή του εκδότη,

6ο τμήμα: αριθμός ελέγχου.

Για να υπολογίσουμε το ψηφίο ελέγχου πολλαπλασιάζουμε τα 12 πρώτα ψηφία του ISBN με συντελεστή 1 και 3 εναλλάξ. Το άθροισμα των γινομένων το διαιρούμε με τον αριθμό 10 και το υπόλοιπο της διαίρεσης το αφαιρούμε από το αριθμό 10.

Για παράδειγμα: αν ISBN 978-960-16-6015- το ψηφίο ελέγχου είναι-8 .

Απαντήσεις στους Γρίφους του τ. 120

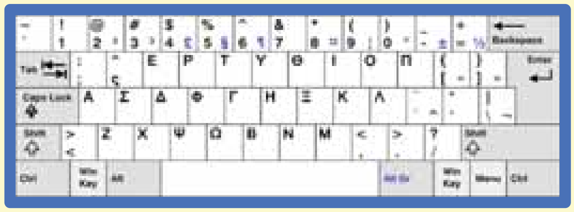
Τα διαστημόπλοια: Οι εκτοξεύσεις των διαστημοπλοίων γίνονται κοντά στον ισημερινό για να είναι μικρότερο το βάρος τους. Φεύγουν ανατολικά για να προστίθεται στην ταχύτητά τους η ταχύτητα των 1670 km/h περιστροφής της Γης, ώστε να αποκτήσουν ευκολότερα την ταχύτητα διαφυγής από την έλξη της Γης..

Το αντηλιακό: Αν το αντηλιακό εμποδίζει το 80% της ακτινοβολίας άρα εκτίθεσαι στο 20% και μπορείς να μείνεις 5 φορές περισσότερο στον ήλιο δηλαδή (5.20=100). Άρα εγώ μπορώ να μείνω 15 φορές περισσότερο χρόνο στον ήλιο και η Ηλέκτρα 30 φορές. Ποσοστό απορρόφησης της ακτινοβολίας του δικού μου αντηλιακού είναι $100-\frac{100}{15}=93{,}3\%$

και της Ηλέκτρας $100-\frac{100}{30}=96{,}7\%$.

Οι Ανεξεταστέοι: Οι ανεξεταστέοι είναι 50. Στα μαθήματα μετράμε 36+35+40+42=153 αν όλοι είχαν από 3 θα ήταν 3χ50=150. Άρα 153-150 =3 τουλάχιστον έχουν μείνει και στα 4 μαθήματα.

Το πληκτρολόγιο: Η θέση των γραμμάτων στο πληκτρολόγιο των Η/Υ είναι ίδια με αυτή που είχαν παλιά οι γραφομηχανές. Η θέση τους αυτή εξυπηρετούσε το «τυφλό σύστημα» γραφής QWERTY. Η συχνότητα που επαναλαμβάνεται στα κείμενα π.χ. το **Α** είναι μεγαλύτερη από αυτή του **Ξ**.



Έτσι έπρεπε το **Α** να πατηθεί με το μικρό δάκτυλο του αριστερού χεριού και το **Ξ** με το δείκτη του δεξιού, αντίθετα δηλαδή από την ευκολία λειτουργίας των δακτύλων για να μην μπερδεύονται οι μοχλοί των πλήκτρων. Παρέμεινε αυτή η σειρά γιατί οι δακτυλογράφοι συνέχισαν να εργάζονταν με το ίδιο «τυφλό σύστημα» στους Η/Υ.

Μαμά και κόρη: Ποτέ. Μόνο το δεξί θα πατά ταυτόχρονα ανά 4 βήματα της μαμάς και 6 της κόρης.

ΜΑΜΑ	Δ 1^o Α 2^o Δ 3^o Α 4^o Δ
ΚΟΡΗ	Δ 1^oΑ 2^o Δ 3^o Α 4^o Δ 5^o Α 6^o Δ

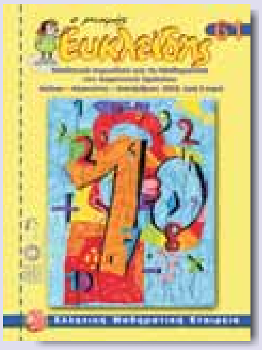
Το δέντρο: Αν Χ είναι το ύψος του δέντρου τότε $X^2=(X-2)^2+6^2$ δηλαδή Χ=10

Το βαρέλι: Ένα βαρέλι = 159 λίτρα, κάθε μέρα σε όλη τη Γη καταναλώνουμε 80-90 εκατομμύρια βαρέλια πετρελαίου. Το Brent είναι ελαφρύ μείγμα (38 API) με λίγο θείο, του Opec είναι βαρύ (22 API). Τα βαρέλια δημιουργήθηκαν για πρώτη φορά πριν 1500 χρόνια και αντικατέστησαν τους εύθραυστους αμφορείς. Έτσι το εμπόριο και η μεταφορά αγαθών, κρασί, ψάρια παστά, τυρί, φρούτα, αλάτι, παστά κρέατα, και άλλα αγαθά γινόταν με βαρέλια.

Ο Μαραθώνιος: α) δεύτερος β) ο δεύτερος είναι ο προ τελευταίος γ) στους δύο που έφτασαν στην κορδέλα ο προ τελευταίος είναι πρώτος.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 3€

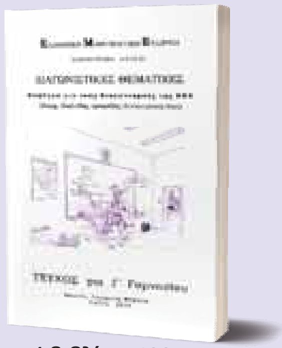
Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3,5€

Τιμή τεύχους: 10€

Διαγωνισμοί

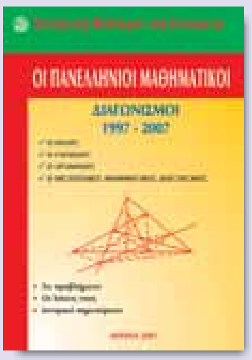
Τιμή βιβλίου: 12€



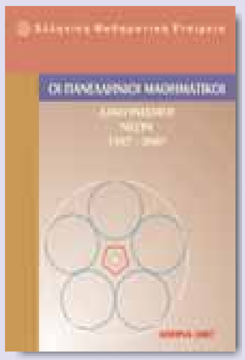
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

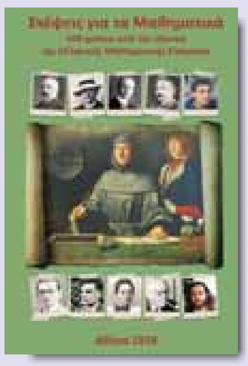


Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr