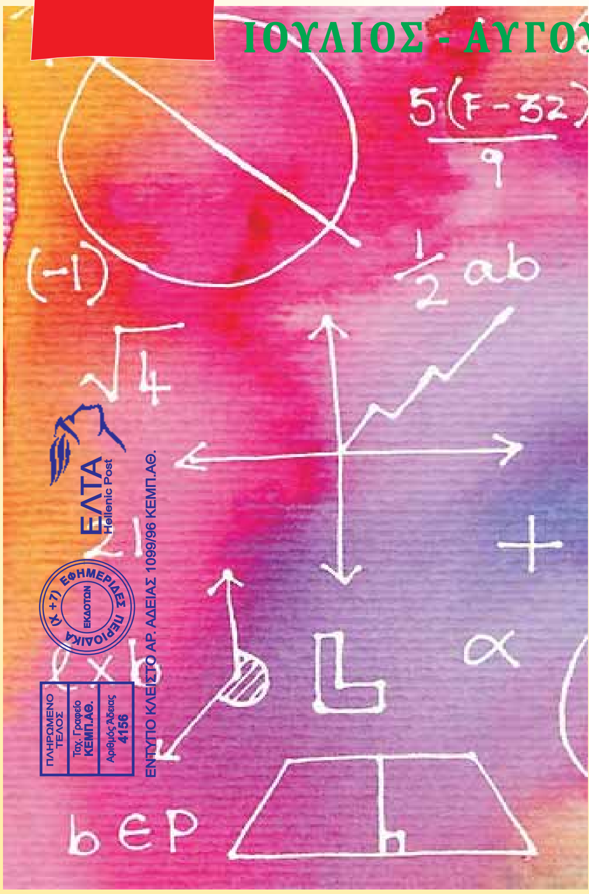
Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

Ευκλείδης Α' 125

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΜΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022 ευρώ 3,00



6 μετάλλια

26th JBMO

Έγινε στη **Βοσνία και Ερζεγοβίνη**
28 Ιουνίου-3 Ιουλίου 2022

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 125

Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2022

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ιωάννης Εμμανουήλ
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Ολόψυχα σας ευχόμαστε **ΚΑΛΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ.**

Να έχετε μια ήρεμη και καλή σχολική χρονιά με δημιουργικές δραστηριότητες.

Με αγάπη και συνεργασία με όλους τους συμμαθητές σας και καθηγητές.

Το περιοδικό όπως κάνει όλα αυτά τα χρόνια θα σας στηρίζει με άρθρα, με ενδιαφέροντα θέματα και ασκήσεις. Επικοινωνήστε με το περιοδικό, πείτε μας την άποψή σας, στείλτε μας τις εργασίες σας, και ότι άλλο πιστεύετε πως μπορεί να προβάλουμε στο περιοδικό.

Καλή σχολική Χρονιά.

Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Πρόυσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

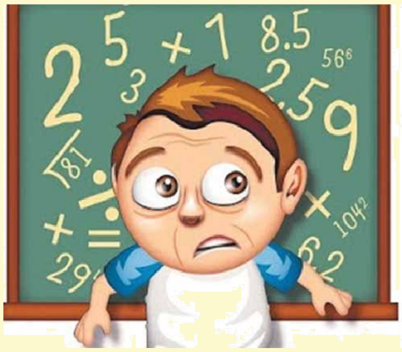
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Η Στάση των Μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά

Γιάννη Νικολόπουλου, Μαθηματικού-Ειδικού Παιδαγωγού

Ως συνέχεια του άρθρου μας για το «Άγχος των Μαθηματικών» [1], θα αναφερθούμε στη στάση ή την προτίμηση των παιδιών απέναντι στα Μαθηματικά. Η κοινωνία μας γνωρίζει τη σημαντική συμβολή των Μαθηματικών στην καθημερινότητα, και ειδικά η Μαθηματική κοινότητα ισχυρίζεται τον θετικό ρόλο των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της κοινωνίας.

Εντούτοις, κατανοεί ότι όσο περνάνε τα χρόνια, περισσότερα παιδιά απομακρύνονται από τα



Μαθηματικά και ψάχνει να δει τις αιτίες που δημιουργούν αυτό το φαινόμενο. Φταίει η επιλογή των σχολικών μαθηματικών, μήπως φταίει η διδασκαλία αυτών ή φταίει η περιορισμένη σύνδεση τους με τη ζωή; Γιατί κάποια παιδιά διακρίνονται στα μαθηματικά; Μήπως έχουν ειδικές ικανότητες, δηλαδή είναι χαρισματικά σε τούτο τον τομέα, μήπως είναι παιδιά μαθηματικών και το μήλο πέφτει κάτω από τη μηλιά;

Σαφώς υπάρχουν γενετικοί παράγοντες, όπως αναφέρουν οι Νευροεπιστήμες που δεν πρέπει να παραγνωρίσουμε, ωστόσο ο καθαρά παιδαγωγικός-ψυχολογικός παράγοντας του περιβάλλοντος διαμορφώνει τη στάση/προτίμηση που λειτουργεί καθοριστικά είτε θετικά, είτε αρνητικά στη μαθηματική εξέλιξη των παιδιών.

Τι εννοούμε ως «στάση» προς ένα διδακτικό αντικείμενο; «Εννοείται ένα διαρκές σύστημα με γνωστικό και συναισθηματικό στοιχείο και μια τάση προς την έκφραση συμπεριφοράς». Εδώ τη θέληση ή αλλιώς την επιθυμία των παιδιών να ασχοληθούν εν προκειμένω με τα μαθηματικά. Και πως μπορεί να προκύψει μια τέτοια επιθυμία την σημερινή εποχή που οι περισσότεροι θέλουν χωρίς κόπο να καρπωθούν τα επιτεύγματα της τεχνολογίας; Εδώ ευθύνεται η κοινωνία συνολικά (αρμόδιοι φορείς, ΜΜΕ, γονείς, δάσκαλοι…). Καλείται η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία σε εκπομπές τηλεοπτικών καναλιών για να εξηγήσει τον ρόλο και την αξία των Μαθηματικών τόσο στην ζωή όσο και στις επιστήμες; Γνωρίζουμε πως ΌΧΙ.

Η οικογένεια μόλις ακούσει ότι το παιδί έχει την επαύριον για το σχολείο μαθηματικά, αμέσως θα ακουσθούν οι κοινοτυπίες: «αυτά είναι δύσκολα», «αυτά είναι για λίγους», «και εγώ παιδί μου στο σχολείο δεν τα πήγαινα», «εδώ πρέπει να προσπαθήσεις πολύ» κ.τ.λ., έχει σκεφτεί η μητέρα ή ο πατέρας να πει στο παιδί ότι ο κύλινδρος που είναι μέσα το γάλα, η μπάλα που παίζει το παιδί είναι στερεά και μάλιστα γεωμετρικά; Έχουν πάρει το μικρό παιδί στο ταμείο για να του δείξουν την τιμή που αναγράφεται στο παιχνίδι και τα νομίσματα που πρέπει να προστεθούν για την αγορά του παιχνιδιού.

Αυτές οι παρατηρήσεις αναφέρονται γιατί δημιουργούν τη στάση και τη γνώμη του παιδιού για τα μαθηματικά στο περιβάλλον της ανάπτυξής του, κατόπιν ακολουθούν τα μαθητικά χρόνια της Α΄/βάθμιας εκπαίδευσης όπου εδώ παρατηρείται μια αρκετά προβληματική διδασκαλία. Εφόσον, οι περισσότεροι των δασκάλων εισέρχονται στα Παιδαγωγικά Τμήματα από θεωρητική κατεύθυνση και δεν έχουν καλή γνώση των Μαθηματικών, επιπλέον υπάρχουν κάποιοι που δεν ενδιαφέρονται να την αποκτήσουν.

Παιδί προβληματισμένο!

«Παιδί» χαρούμενο!

Ο Αρνητικός ρόλος των Δασκάλων-Μαθηματικών στη Στάση των μαθητών

Αναφέρεται από ερευνητές, για τον ρόλο του δάσκαλου-μαθηματικού, ότι εφόσον δεν γνωρίζει και δεν κατανοεί σε έκταση και βάθος τις μαθηματικές έννοιες τις οποίες θα κληθεί να διδάξει, είναι ένας ανεπαρκής δάσκαλος και είναι βέβαιο ότι, εκτός από τις λανθασμένες γνώσεις που μεταφέρει, επιπρόσθετα θα καλλιεργήσει στους μαθητές του και μια φοβία και μια αποστροφή προς το μάθημα.

Σχετικές έρευνες δείχνουν πως οι μελλοντικοί δάσκαλοι δεν είχαν, -ούτε έχουν, θα προσθέταμε- καλές σχέσεις με το διδακτικό αντικείμενο των μαθηματικών.

Συγκεκριμένα, έχει διαπιστωθεί, πως παρά τις προπτυχιακές και -πολλές φορές- τις μεταπτυχιακές τους σπουδές, εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν αποκτούν το απαραίτητο εύρος "παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου" για το διδακτικό αντικείμενο των μαθηματικών, προκειμένου να το διδάξουν αποτελεσματικά στους μαθητές τους.

Να σημειωθεί πως οι λόγοι που δημιουργούν αρνητικές αντιλήψεις/επιδράσεις στους μαθητές για τα μαθηματικά μπορεί να προκληθούν είτε μέσα από κάποιες αρνητικές εμπειρίες στη σχολική τους διαδικασία, είτε μέσα από τη μίμηση της στάσης απέναντι στα μαθηματικά σημαντικών για το άτομο προσώπων, για παράδειγμα είναι οι γονείς ή οι εκπαιδευτικοί, και την οποία συνήθως οι μαθητές αναπαράγουν [2].

Αυτοί οι παράγοντες οικιακού και σχολικού περιβάλλοντος έχουν αρνητική επίδραση.

Ο Θετικός Ρόλος των Δασκάλων-Μαθηματικών στη Στάση των Μαθητών

Ωστόσο δεν πρέπει να παραγνωρίσουμε και την άλλη πλευρά, αυτή που οι γονείς από την παιδική ηλικία δείχνουν την αξία της Αριθμητικής στα παιδιά τους, οι δάσκαλοι φροντίζουν σωστά την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων και οι μαθητές πλησιάζουν την ΕΜΕ μέσω των διαγωνισμών. Σχεδόν η πλειοψηφία των παιδιών που ακολουθούν αυτή τη «διαδρομή» βελτιώνουν την θετική προτίμησή τους στα μαθηματικά.

Ερευνητές και εκπαιδευτικοί ισχυρίζονται ότι, ο βαθμός αποδοχής ή απόρριψης της συμπεριφοράς του εκπαιδευτικού από τους μαθητές διαμορφώνει καθοριστικά και τις στάσεις αυτών απέναντι στο μάθημα. Ωστόσο ο δάσκαλος των μαθηματικών με όλη του τη συμπεριφορά και δράση παρεμβαίνει τόσο στα συναισθήματα όσο και στη λογική των μαθητών.

Τι Παρέμβαση χρειάζονται οι Μαθητές για την Αλλαγή της Αρνητικής Στάσης;

Καταρχάς, δεν γίνεται «διάγνωση» χωρίς την παρέμβαση αντιμετώπισης δηλαδή τη «θεραπεία». Εφόσον γίνει δεκτό ότι η θετική ή η αρνητική προτίμηση των μαθητών οφείλετε κυρίως σε περιβαλλοντικούς παράγοντες τότε είναι δυνατόν να υπάρξει και η ανάλογη αντιμετώπιση.

Μια ολοκληρωμένη, προσεκτικά σχεδιασμένη σχολική παρέμβαση, χρειάζεται και τη βοήθεια της σχολικής ψυχολόγου, που οφείλει να στοχεύει τόσο στην ενίσχυση των κινήτρων και των θετικών συναισθημάτων των μαθητών όσο και στην αντιμετώπιση των ψυχολογικών αιτιών που βρίσκονται πίσω από την εμφάνιση των αρνητικών συναισθημάτων τους απέναντι στα μαθηματικά.

Έτσι η διδασκαλία-παρέμβαση του Δάσκαλου-Μαθηματικού θα έβρισκε κατάλληλο έδαφος για την απόκτηση γνώσεων και την καλλιέργεια των γνωστικών στρατηγικών, ώστε οι μαθητές να καταφέρουν να ανταπεξέλθουν με υψηλές πιθανότητες επιτυχίας στις απαιτήσεις των σχολικών μαθηματικών. Η επιτυχία είναι συνδυασμός, αφενός γνώσης του διδακτικού αντικειμένου και παιδαγωγικής επάρκειας του Δάσκαλου-Μαθηματικού και αφετέρου καλής πρόσληψης και επεξεργασίας των μαθηματικών πληροφοριών από τους Μαθητές.

Αναφορές:

[1]: Ευκλείδης Α’ Τεύχος 121.
[2]: Ευκλείδης Γ’ Τεύχος 75.

Οι απαρχές των Μαθηματικών: Το κόκαλο του Ishango

Ιωάννης Ρίζος

Τα Μαθηματικά φαίνεται πως προέκυψαν από την ανάγκη για μετρήσεις και πρακτικούς υπολογισμούς. Απ' όσο γνωρίζουμε, δεν υπήρξε ποτέ κοινωνία χωρίς κάποια μορφή καταμέτρησης, δηλαδή αντιστοίχισης μιας συλλογής αντικειμένων με κάποιο εύκολα χειριζόμενο σύνολο δεικτών – είτε πρόκειται για πέτρες, είτε για κόμπους, είτε για εγκοπές

επάνω σε αντικείμενα. Την πεποίθησή μας αυτή τη στηρίζουμε κυρίως σε αρχαιολογικά ευρήματα, αλλά και σε παρατηρήσεις που κάνουν οι κοινωνικοί ανθρωπολόγοι επάνω σε φυλές οι οποίες, ακόμα και σήμερα, ζουν απομονωμένες. Αν λοιπόν θεωρήσουμε τα Μαθηματικά (και) ως κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα που σχετίζεται με αριθμητικές έννοιες ή χωρικές διαμορφώσεις, τότε μπορούμε να συμπεριλάβουμε στη μελέτη μας τα «προϊστορικά Μαθηματικά», τα οποία αναπτύχθηκαν σε περιόδους κατά τις οποίες δεν υπήρχε γραφή (ή ίσως και να υπήρχε κάποιο είδος γραφής αλλά δεν διασώθηκαν γραπτά μνημεία).

Στα βουνά της κεντρικής Αφρικής, στα σύνορα της Λαϊκής Δημοκρατίας του Κονγκό και της Ουγκάντα, βρίσκεται η λίμνη Edward, μία από τις πιο απομακρυσμένες πηγές του ποταμού Νείλου. Στις όχθες της λίμνης πριν από περίπου 20.000 χρόνια ζούσε μια κοινότητα ανθρώπων που ψάρευε, μάζευε τροφή ή καλλιεργούσε, ανάλογα με την εποχή του χρόνου. Ο οικισμός είχε μια σχετικά σύντομη διάρκεια ζωής λίγων αιώνων, πριν θαφτεί μετά από μία ισχυρή ηφαιστειακή έκρηξη. Εκείνοι οι παλαιολιθικοί άνθρωποι έμειναν γνωστοί ως «Ishango». Σήμερα στην περιοχή υπάρχει ένα μικρό χωριό με αυτό το όνομα.

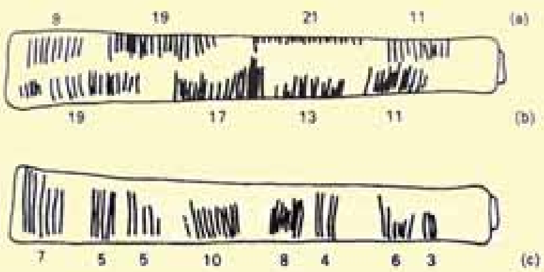
Οι αρχαιολογικές ανασκαφές στο χωριό Ishango το 1950 υπό τον Βέλγο γεωλόγο Jean de Heinzelin de Braucourt (1920-1998), έφεραν στο φως ανθρώπινα λείψανα, καθώς και εργαλεία για την αλιεία, το κυνήγι και την επεξεργασία της τροφής (π.χ. πέτρες άλεσης). Ωστόσο, το πιο ενδιαφέρον εύρημα ήταν ένα κόκαλο μήκους 10cm που πιθανά χρησίμευε ως λαβή εργαλείου, το οποίο σήμερα φυλάσσεται στο Μουσείο Φυσικής Ιστορίας, στις Βρυξέλλες (Muséum des Sciences Naturelles de Belgique).

Το κόκαλο, γνωστό ως «το κόκαλο του Ishango» («Ishango bone»), έχει σκούρο καφέ χρώμα και επάνω του φέρει ορισμένα ευδιάκριτα σημάδια, σαν χαρακιές. Στο ένα του άκρο υπάρχει στερεωμένο ένα κομμάτι χαλαζία, το οποίο ενδέχεται να χρησίμευε για χάραξη. Τα σημάδια στο κόκαλο του Ishango αποτελούνται από σειρές εγκοπών τοποθετημένες σε τρεις διακριτές ομάδες. Η ασύμμετρη ομαδοποίηση αυτών των εγκοπών, όπως φαίνεται στην εικόνα, καθιστά απίθανο να ήταν τοποθετημένες εκεί απλώς για διακοσμητικούς λόγους. Η πρώτη σειρά περιλαμβάνει τέσσερις ομάδες εγκοπών με 9, 19, 21 και 11 σημάδια. Στη δεύτερη σειρά υπάρχουν επίσης τέσσερις ομάδες αλλά με 19, 17, 13 και 11 σημάνσεις. Η τρίτη σειρά έχει οκτώ ομάδες εγκοπών: 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3. Οι δύο τελευταίες ομάδες (δηλ. 6, 3) είναι πιο κοντά μεταξύ τους, όπως και οι 8, 4 και 5, 5, 10, γεγονός που υποδηλώνει μια σκόπιμη διάταξη σε διακριτές υποομάδες.

Κατά συνέπεια, γεννάται το εξής ερώτημα: Εάν αυτές οι *ομάδες εγκοπών* δεν είναι διακοσμητικές, τότε γιατί τοποθετήθηκαν εκεί; Μια πιθανή εξήγηση θα μπορούσε να είναι ότι πρόκειται για *σημάδια καταμέτρησης*, δηλαδή βρισκόμαστε μπροστά στην αφετηρία του δρόμου που οδηγεί στην κατασκευή ενός *συστήματος αρίθμησης*.

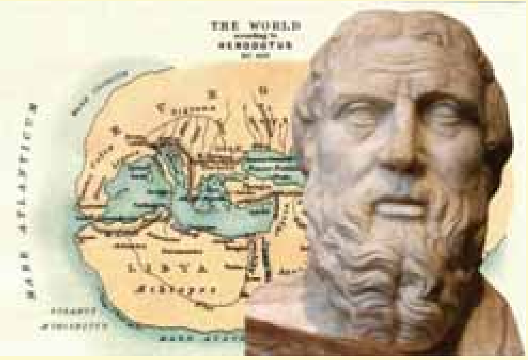
Μήπως όμως το κόκαλο του Ishango απεικονίζει κάτι περισσότερο από μια απλή καταμέτρηση; Ορισμένοι ερευνητές απαντούν θετικά, θεωρώντας πως υπάρχουν κάποια υποκείμενα αριθμητικά μοτίβα σε καθεμιά από τις σειρές (a), (b) και (c). Για παράδειγμα:

- Οι ενδείξεις στις σειρές (a) και (b) έχουν άθροισμα 60 (9+19+21+11 και 19+17+13+11 αντίστοιχα).
- Η σειρά (a) είναι αρκετά συμβατή με ένα σύστημα αρίθμησης με βάση το 10, αφού οι εγκοπές είναι ομαδοποιημένες ως 20+1, 20–1, 10+1, 10–1.
- Η γραμμή (b) περιέχει τους πρώτους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 10 και του 20.
- Η σειρά (c), όπου εμφανίζονται οι υποομάδες (5, 5, 10), (8, 4) και (6, 3), ίσως δείχνει κάποια εκτίμηση της έννοιας του διπλασιασμού.



Ο ίδιος ο de Heinzelin έγραψε το 1962 στο περιοδικό *Scientific American* (τόμ. 206, τεύχ. 6, σσ. 105-118) πως το κόκαλο του Ishango μπορεί να αναπαριστά «ένα είδος αριθμητικού παιχνιδιού, που επινοήθηκε από έναν λαό ο οποίος είχε ένα αριθμητικό σύστημα βασισμένο στο 10, καθώς και γνώση του διπλασιασμού και των πρώτων αριθμών». Στο ίδιο άρθρο εξέτασε το ενδεχόμενο το σύστημα αρίθμησης των Ishango να ταξίδεψε μέχρι την Αίγυπτο και να επηρέασε την ανάπτυξη του αριθμητικού της συστήματος, του πρώτου δηλαδή δεκαδικού συστήματος στον κόσμο.

Αν και οι αφρικανικές ρίζες του αιγυπτιακού πολιτισμού μαρτυρούνται από αρχαιολογικές ανακαλύψεις και πρώιμες γραπτές μαρτυρίες (λ.χ. από τον Ηρόδοτο), θεωρούμε πως οι υποθέσεις του de Heinzelin σχετικά με το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων των Ishango, βασισμένες στην παρατήρηση μόνο ενός οστού, είναι μάλλον υπερβολικές (ειδικά αυτές που αναφέρονται στους πρώτους αριθμούς). Ωστόσο δεν μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο οι οστέινες σημάνσεις να αποτελούν ένα σύστημα διαδοχικών σημειώσεων – για παράδειγμα, μια καταγραφή των διαφόρων φάσεων της σελήνης. Το εάν αυτή είναι μια πειστική ερμηνεία, θα εξαρτηθεί εν μέρει από τη διαπίστωση της σημασίας των σεληνιακών παρατηρήσεων στον



πολιτισμό των Ishango, και εν μέρει από το πόσο κοντά η σειρά των εγκοπών στο οστό ταιριάζει με τον αριθμό των ημερών που περιέχονται σε διαδοχικές φάσεις της σελήνης. Ένα τέτοιο σενάριο είναι, προς το παρόν τουλάχιστον, εικασία, ταιριάζει όμως με τα όσα γνωρίζουμε για τους σημερινούς λαούς που συνεχίζουν να ακολουθούν το πρότυπο της ζωής των Ishango (δηλαδή του κυνηγού-συλλέκτη). Παρ' όλα αυτά, μια πρόχειρη εξέταση του μοτίβου των εγκοπών στο κόκαλο Ishango δεν δείχνει κάποια προφανή κανονικότητα που μπορεί να συσχετιστεί *αδιαμφισβήτητα* με σεληνιακά φαινόμενα. Έτσι, ο αρχικός σκοπός –αν όντως υπάρχει τέτοιος– του κόκαλου του Ishango παραμένει αντικείμενο συζήτησης.

Αυτές οι εικασίες σχετικά με το κόκαλο του Ishango αναδεικνύουν τρεις σημαντικές πτυχές των πρώιμων Μαθηματικών. Πρώτον, η στενή σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Αστρονομίας έχει μακρά ιστορία και συνδέεται με την ανάγκη που ένιωθαν ακόμη και οι πρώτοι άνθρωποι να καταγράφουν τη ροή του χρόνου, τόσο από περιέργεια όσο και από πρακτική ανάγκη. Δεύτερον, αυτό που άλλαξε δραματικά με την πάροδο των χρόνων είναι η φύση των γεγονότων και των σχέσεων με τις οποίες έπρεπε να λειτουργήσουν οι άνθρωποι και όχι η ικανότητά τους να συλλογίζονται. Έτσι, η δημιουργία ενός περίπλοκου συστήματος διαδοχικής σημειογραφίας με βάση ένα σεληνιακό ημερολόγιο ήταν μέσα στις δυνατότητες των προϊστορικών ανθρώπων, των οποίων η επιθυμία να παρακολουθούν τις εναλλαγές των εποχών μεταφράστηκε σε παρατηρήσεις της μεταβαλλόμενης όψης της σελήνης. Τέλος, ελλείψει τεκμηρίων, οι εικασίες σχετικά με τις μαθηματικές ασχολίες των πρώτων ανθρώπων πρέπει να εξετάζονται υπό το πρίσμα της αληθοφάνειάς τους, της ύπαρξης πειστικών εναλλακτικών εξηγήσεων και της ποιότητας των διαθέσιμων στοιχείων.

Ένα μόνο οστό μπορεί κάλλιστα να καταρρεύσει κάτω από το βαρύ φορτίο των εικασιών που συσσωρεύονται πάνω του.

26η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων
Σαράγιεβο, Βοσνία και Ερζεγοβίνη
28 Ιουνίου - 3 Ιουλίου 2022

Η 26η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (ΒΜΟΝ) διεξήχθη στο Σαράγιεβο της Βοσνίας και της Ερζεγοβίνης, από 28 Ιουνίου έως 3 Ιουλίου 2022. Σε αυτή συμμετείχαν συνολικά εκατόν έξι μαθητές από δεκαοκτώ χώρες, έντεκα χώρες των Βαλκανίων που συμμετείχαν επίσημα και επτά επισκέπτριες χώρες από την Ευρώπη και την Ασία, οι οποίες συμμετείχαν ανεπίσημα.

Η Ελλάδα κατέλαβε την τέταρτη θέση της κατάταξης των επίσημων χωρών, η οποία αποτελεί μια από τις υψηλότερες θέσεις που έχει κατακτήσει ποτέ σε ΒΜΟΝ, πάνω από παραδοσιακές δυνάμεις στο χώρο των μαθηματικών διαγωνισμών.

Μετά την επιλογή τριών προβλημάτων τα οποία προτάθηκαν από την Ελλάδα - από τα συνολικά τέσσερα του διαγωνισμού, γεγονός ανεπανάληπτο σε Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα - ήρθε η ικανοποίηση της κατάκτησης μεταλλίων από όλους τους μαθητές μας.

Οι έξι μαθητές μας κατάφεραν να αποσπάσουν **τέσσερα Αργυρά** και **δύο Χάλκινα Μετάλλια** συνεχίζοντας τη μεγάλη παράδοση των επιτυχιών των Ελληνικών ομάδων στις Βαλκανικές και Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες και δημιουργώντας υψηλές προσδοκίες για ακόμη μεγαλύτερες επιτυχίες τα επόμενα χρόνια.

Δουλεύοντας σκληρά και συστηματικά τις τελευταίες εβδομάδες, μελετώντας ατελείωτες ώρες εν μέσω απολυτήριων εξετάσεων και παρακολουθώντας το εντατικό πρόγραμμα των διαδικτυακών μαθημάτων της ΕΜΕ, έφτασαν σε μια μεγάλη επιτυχία για τους ίδιους και τους γονείς τους, την ΕΜΕ και τη χώρα μας. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία τους συγχαίρει θερμά. Συγκεκριμένα:

Τσουρέκας Κυριάκος	Σχολή Μωραΐτη	Αργυρό Μετάλλιο
Καβαλλάρης Ανδρέας	Εράσμειος Ελληνογερμανική Σχολή	Αργυρό Μετάλλιο
Αποστολίδης Χρήστος	1ο Γυμνάσιο Αλεξανδρούπολης	Αργυρό Μετάλλιο
Ηλιάδης Σωκράτης	Πρότυπο Αναβρύτων	Αργυρό Μετάλλιο
Νίκου Προμηθέας - Παναγιώτης	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο Μετάλλιο
Κωνσταντινίδης Τιμολέων	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο Μετάλλιο

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος και υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος. Στον κ. Συνεφακόπουλο οφείλεται η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Κροατία). Να βρεθούν όλα τα ζεύγη (a,b) θετικών ακέραιων αριθμών τέτοιων ώστε

$$11ab \le a^3 - b^3 \le 12ab.$$

Λύση (1ος τρόπος - Βασισμένος στη λύση του Χρήστου Αποστολίδη). Έστω a,b θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$11ab \le a^3 - b^3 \le 12ab.$$

Αφού $a^3 - b^3 \ge 11ab > 0$, ισχύει ότι $a^3 > b^3$ και άρα $a > b$. Συνεπώς είναι $a = b + x$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό x. Έχουμε

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - 12ab &= (b+x)^3 - b^3 - 12(b+x)b \\ &= (b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3) - b^3 - 12b^2 - 12bx \\ &= 3(x-4)b^2 + 3x(x-4)b + x^3 \le 0. \end{aligned}$$

Αν $x \ge 4$, τότε $3(x-4) \ge 0$ και $3x(x-4) \ge 0$. Αφού $b > 0$, θα είναι

$$3(x-4)b^2 + 3x(x-4)b + x^3 \ge 4^3 > 0,$$

άτοπο. Συνεπώς είναι $0 < x < 4$, και αφού ο x είναι ακέραιος, οι πιθανές τιμές του είναι το 1, το 2, και το 3. Έχουμε, λοιπόν, τις περιπτώσεις:

- $x = 1$. Τότε η ανισότητα $11ab \le a^3 - b^3$ με $a = b+1$ δίνει $11(b+1)b \le (b+1)^3 - b^3 = 3b^2 + 3b + 1$, ή ισοδύναμα, $8b^2 + 8b - 1 \le 0$, ή ισοδύναμα, $(b+\frac{1}{2})^2 \le \frac{3}{8}$. Τότε, όμως, θα είναι $(b+\frac{1}{2})^2 < 1$, και άρα $-1 < b + \frac{1}{2} < 1$, ή ισοδύναμα $-\frac{3}{2} < b < \frac{1}{2}$, άτοπο, αφού ο b είναι θετικός ακέραιος.

- $x = 2$. Τότε η ανισότητα $11ab \le a^3 - b^3$ με $a = b+2$ δίνει $11(b+2)b \le (b+2)^3 - b^3 = 6b^2 + 12b + 8$, ή ισοδύναμα, $5b^2 + 10b - 8 \le 0$, ή ισοδύναμα, $(b+1)^2 \le \frac{13}{5}$. Τότε, όμως, θα είναι $(b+1)^2 < \frac{20}{5} = 4$, και άρα $-2 < b+1 < 2$, ή ισοδύναμα $-3 < b < 1$, άτοπο, αφού ο b είναι θετικός ακέραιος.

- $x = 3$. Τότε η ανισότητα $11ab \le a^3 - b^3$ με $a = b+3$ δίνει $11(b+3)b \le (b+3)^3 - b^3 = 9b^2 + 27b + 27$, ή ισοδύναμα, $2b^2 + 6b - 27 \le 0$, ή ισοδύναμα, $(b+\frac{3}{2})^2 \le \frac{63}{4}$. Τότε, όμως, θα είναι $(b+\frac{3}{2})^2 < \frac{64}{4} = 16$, και άρα $-4 < b + \frac{3}{2} < 4$, ή ισοδύναμα $-\frac{11}{2} < b < \frac{5}{2}$. Αφού ο b είναι θετικός ακέραιος, οι πιθανές τιμές του σε αυτή την περίπτωση είναι το 1 και το 2.

  Για $b = 1$ είναι $a = b + 3 = 4$ και $a^3 - b^3 - 12ab = 4^3 - 1^3 - 12 \cdot 1 \cdot 4 = 15 > 0$, άτοπο. Για $b = 2$ είναι $a = b + 3 = 5$ και $a^3 - b^3 - 12ab = 5^3 - 2^3 - 12 \cdot 2 \cdot 5 = -3 < 0$. Άρα το ζεύγος $(a,b) = (5,2)$ αποτελεί λύση.

Συνεπώς, το μοναδικό ζεύγος (a,b) που ικανοποιεί τη συνθήκη είναι το $(a,b) = (5,2)$.
(2ος τρόπος - Βασισμένος στη λύση του Σωκράτη Ηλιάδη). Είναι

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)\left((a-b)^2 + 3ab\right),$$

οπότε η δοθείσα ανισότητα με $d = a - b$ και $p = ab$ γράφεται

$$11p \le d(d^2 + 3p) \le 12p. \qquad (1)$$

Αφού οι αριθμοί a,b είναι θετικοί, είναι $p > 0$ και $d^2 + 3p > 0$, οπότε είναι $d > 0$. Αν ήταν $d \ge 4$, τότε θα είχαμε $d^3 + 3dp > 3dp \ge 12p$, άτοπο. Συνεπώς, $d \le 3$. Έχουμε, λοιπόν, τις περιπτώσεις:

- $d = 1$. Τότε η (1) δίνει $11p \le 1 + 3p$ ή ισοδύναμα, $p \le \frac{1}{8}$, άτοπο, αφού ο p είναι θετικός ακέραιος.

- $d = 2$. Τότε η (1) δίνει $11p \le 8 + 6p \le 12p$ ή ισοδύναμα, $\frac{8}{6} \le p \le \frac{8}{5}$, άτοπο, αφού ο p είναι θετικός ακέραιος.
- $d = 3$. Τότε η (1) δίνει $11p \le 27 + 9p \le 12p$ ή ισοδύναμα, $9 \le p \le \frac{27}{2}$. Αφού $a, b > 0$, παρατηρούμε ότι
$$a + b = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab} = \sqrt{d^2 + 4p} = \sqrt{9 + 4p}.$$
Η μοναδική τιμή του ακέραιου p με $9 \le p \le 13$ για την οποία το άθροισμα $9 + 4p$ είναι τέλειο τετράγωνο είναι το $p = 10$, για την οποία παίρνουμε $a + b = \sqrt{9 + 4 \cdot 10} = \sqrt{49} = 7$. Τότε βλέπουμε εύκολα ότι $a = 5$ και $b = 2$.

Συνοψίζοντας, προκύπτει μία και μοναδική λύση για $d = 3$ και $p = 10$, η οποία είναι η $(a, b) = (5, 2)$.

(3ος τρόπος - Βασισμένος σε δημοσίευση στον ιστότοπο δημόσιας συζήτησης του Art of Problem Solving. Προφανώς είναι $a > b > 0$. Αν $a \ge b + 4$, τότε
$$a^3 - b^3 - 12ab = 3ab(a - b - 4) + (a - b)^3 > 0,$$
άτοπο. Αν $a \le b + 2$, τότε
$$a^3 - b^3 - 11ab = (a - b)^3 - ab\,(11 - 3(a - b)) \le 8 - 5ab \le -2 < 0,$$
αφού $ab \ge 2$, άτοπο. Συνεπώς, $a = b + 3$. Αφού $(b + 3)^3 - b^3 = 9b(b + 3) + 27$, έχουμε
$$11b(b + 3) \le 9b(b + 3) + 27 \le 12b(b + 3).$$
Άρα $9 \le b(b + 3) \le 27/2$, η οποία δίνει $b = 2$, αφού ο b είναι ακέραιος. Συνεπώς, $(a, b) = (5, 2)$.

Πρόβλημα 2 (Ελλάδα). Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε $AH = HD$, όπου H είναι το ορθόκεντρο του ABC και $D \in BC$ είναι το ίχνος του ύψους από την κορυφή A. Έστω ℓ η ευθεία η οποία διέρχεται από το H και εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BHC. Έστω S και T τα σημεία τομής της ℓ με την AB και την AC, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε τα μέσα των BH και CH με M και N, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες SM και TN είναι παράλληλες.

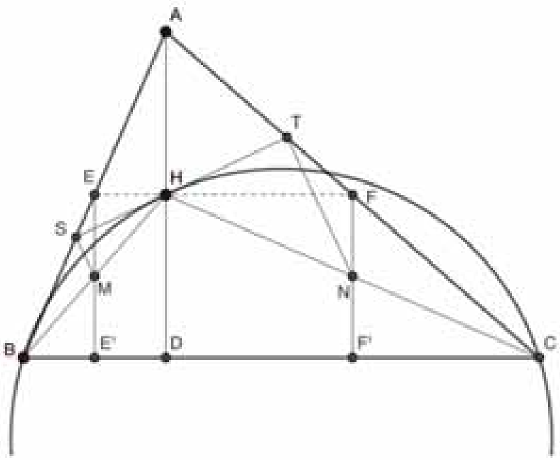
Λύση (1ος τρόπος - Βασισμένος στη λύση του Ανδρέα Καβαλλάρη). Από το H φέρουμε παράλληλη στην BC η οποία τέμνει τις πλευρές AB και AC στα σημεία E και F, αντίστοιχα (Βλ. Σχήμα 1).

Αφού το H είναι το μέσο της AD και η HE είναι παράλληλη στην πλευρά DB του τριγώνου ADB, το E είναι το μέσο της AB. Έτσι, το τρίγωνο AHB, η EM συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, και άρα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά, δηλ. $EM//AD$. Αφού η AD είναι κάθετη στην BC, έπεται ότι η ευθεία EM είναι επίσης κάθετη στην BC, έστω στο E'.

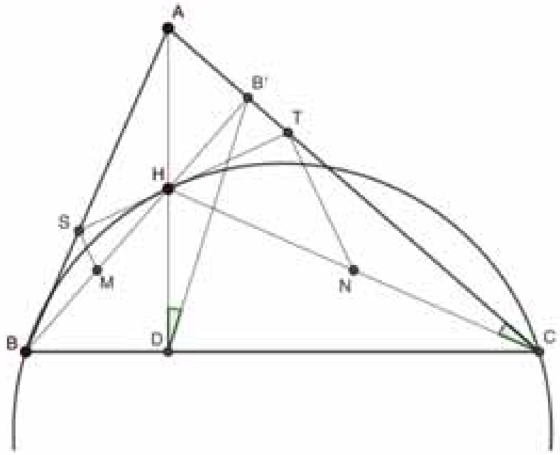
Από την ισότητα γωνίας χορδής και εφαπτομένης παίρνουμε ότι $S\widehat{H}B = H\widehat{C}B =$, και αφού η $A\widehat{S}H$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο SBH έχουμε
$$A\widehat{S}H = S\widehat{H}B + S\widehat{B}H = H\widehat{C}B + A\widehat{B}H = (90^\circ - A\widehat{B}C) + (90^\circ - B\widehat{A}C) = A\widehat{C}B.$$
Αφού οι γωνίες $E\widehat{M}H$ και $A\widehat{C}B$ είναι οξείες με κάθετες πλευρές, είναι ίσες. Συνεπώς $E\widehat{M}H = A\widehat{S}H$, οπότε το τετράπλευρο $ESMH$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Άρα $M\widehat{S}H = M\widehat{E}H = 90^\circ$ που σημαίνει ότι $MS \perp ST$.

Ομοίως, το F είναι το μέσο της AC, και η FN είναι κάθετη στην BC, έστω στο F'. Με παρόμοιο τρόπο, όπως παραπάνω, δείχνουμε ότι $A\widehat{T}H = A\widehat{B}C = H\widehat{N}F$, και συμπεραίνουμε ότι το $HTFN$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Έτσι, $H\widehat{T}N = H\widehat{F}N = 90^\circ$ που σημαίνει ότι $NT \perp ST$.

Συνεπώς, οι ευθείες SM και TN είναι μεταξύ τους παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ST.



Σχήμα 1: Πρόβλημα 2 - 1ος τρόπος



Σχήμα 2: Πρόβλημα 2 - 2ος τρόπος

(2ος τρόπος - Βασισμένος σε δημοσίευση στον ιστότοπο δημόσιας συζήτησης του Art of Problem Solving.). Έστω B' το ίχνος του ύψους από το B στην πλευρά AC (Βλ. Σχήμα 2). Αφού $H\widehat{B'}C = 90^\circ = H\widehat{D}C$, το τετράπλευρο $HB'CD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, και άρα $A\widehat{D}B' = H\widehat{C}T$.

Επιπλέον, είναι $D\widehat{A}B' = 90^\circ - A\widehat{C}D = H\widehat{B}C = T\widehat{H}C$, από γωνία χορδής και εφαπτομένης. Συνεπώς, τα τρίγωνα $AB'D$ και HTC είναι όμοια. Αφού οι $B'H$ και TN είναι αντίστοιχες διάμεσοι των δύο όμοιων τριγώνων, έπεται ότι $H\widehat{T}N = A\widehat{B'}H = 90^\circ$. Δηλ. $NT \perp HT$.

Ομοίως, δείχνουμε ότι $MS \perp SH$, και το συμπέρασμα έπεται όπως στον 1ο τρόπο παραπάνω.

(3ος τρόπος - Βασισμένος σε λύση μαθητή της Βοσνίας και Ερζεγοβίνης). Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα CHT και CAH είναι όμοια μεταξύ τους, αφού έχουν μια γωνία κοινή και $C\widehat{H}T = H\widehat{B}C = 90^\circ - A\widehat{C}B = H\widehat{A}C$, από γωνία χορδής εφαπτομένης και αφού το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC. Άρα $\frac{HT}{CH} = \frac{AH}{AC}$, και αφού $CH = 2HN$ και $AD = 2AH$, η τελευταία γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{HT}{HN} = \frac{AD}{AC}.$$

Αφού $D\widehat{A}C = N\widehat{H}T$, τα τρίγωνα DAC και NHT είναι όμοια, οπότε $H\widehat{T}N = 90^\circ$. Ομοίως, δείχνουμε ότι $M\widehat{S}H = 90^\circ$ και το συμπέρασμα έπεται όπως στους παραπάνω τρόπους.

Πρόβλημα 3 (Ελλάδα). Να βρεθούν όλες οι τετράδες θετικών ακέραιων (p, q, a, b), όπου οι p και q είναι πρώτοι αριθμοί και $a > 1$, έτσι ώστε

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Λύση (Βασισμένη στη λύση του Κυριάκου Τσουρέκα). Αν $p^a = 1 + 5q^b$ για κάποιους πρώτους αριθμούς p, q και κάποιους θετικούς a, b, τότε είναι $p = 2$ ή $q = 2$. Πράγματι, αν ήταν $p > 2$ και $q > 2$, τότε ο p^a θα ήταν περιττός για κάθε θετικό ακέραιο a, ενώ το άθροισμα $5q^b + 1$ θα ήταν άρτιος αριθμός για κάθε θετικό ακέραιο b. Άρα, η ισότητα $p^a = 1 + 5q^b$ θα ήταν αδύνατη.

Έχουμε τις περιπτώσεις:

- $p = 2$. Τότε $q > 2$ και $2^a \equiv 1 \pmod 5$. Όμως, $2^a \equiv 2, 4, 3, 1 \pmod 5$ για $a \equiv 1, 2, 3, 0 \pmod 4$, αντίστοιχα. Άρα πρέπει $a \equiv 0 \pmod 4$, δηλ. $a = 4k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Τότε η ισότητα $2^{4k} - 1 = 5q^b$ γράφεται ισοδύναμα

$$(2^k - 1)(2^k + 1)(2^{2k} + 1) = 5q^b.$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω είναι γινόμενο περιττών. Αν $d = \text{ΜΚΔ}(2^k-1, 2^k+1)$, τότε ο d είναι περιττός διαιρέτης της διαφοράς $(2^k+1)-(2^k-1)=2$, και άρα $d=1$. Αν $d_1 = \text{ΜΚΔ}(2^k-1, 2^{2k}+1)$, τότε ο d_1 είναι περιττός διαιρέτης της διαφοράς $2^{2k}+1-(2^k-1)(2^k+1)=2$, και άρα $d_1=1$. Ομοίως, αν $d_2 = \text{ΜΚΔ}(2^k+1, 2^{2k}+1)$, τότε ο d_2 είναι περιττός διαιρέτης της διαφοράς $2^{2k}+1-(2^k-1)(2^k+1)=2$, και άρα $d_2=1$.

Επομένως, οι αριθμοί 2^k-1, 2^k+1 και $2^{2k}+1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο, και άρα ο q^b διαιρεί ακριβώς έναν από αυτούς. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

* $q^b \,/\, 2^k-1$. Τότε $2^k-1=mq^b$ για κάποιο θετικό ακέραιο m, και άρα

$$m(2^k+1)(2^{2k}+1)=5.$$

Η ισότητα αυτή είναι αδύνατη, όμως, αφού ο 5 είναι πρώτος και οι ακέραιοι 2^k+1 και $2^{2k}+1$ είναι μεγαλύτεροι από το 1.

* $q^b \,/\, 2^k+1$. Τότε $2^k+1=mq^b$ για κάποιο θετικό ακέραιο m, και άρα

$$m(2^k-1)(2^{2k}+1)=5.$$

Αφού ο 5 είναι πρώτος και $2^{2k}+1>1$, πρέπει $m=2^k-1=1$ και $2^{2k}+1=5$, που συναληθεύουν για $k=1$. Τότε $a=4\cdot 1=4$, και $q^b=2^1+1=3$, που ισχύει αν και μόνο αν $q=3$ και $b=1$. Συνεπώς, έχουμε τη λύση $(p,q,a,b)=(2,3,4,1)$.

* $q^b \,/\, 2^{k+1}-1$. Τότε $2^{2k}+1=mq^b$ για κάποιο θετικό ακέραιο m, και άρα

$$(2^k-1)(2^k+1)m=5.$$

Αφού ο 5 είναι πρώτος και $2^k+1>1$, πρέπει $2^k-1=1$, και άρα $k=1$, οπότε από την παραπάνω ισότητα θα είναι $3m=5$, άτοπο.

Άρα, αν $p=2$, έχουμε τη λύση $(p,q,a,b)=(2,3,4,1)$.

• $q=2$. Πρέπει

$$p^a=1+5\cdot 2^b.$$

Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

* <u>a άρτιος</u>. Τότε $a=2k$ και $p^{2k}-1=5\cdot 2^b$, ή ισοδύναμα,

$$(p^k-1)(p^k+1)=5\cdot 2^b.$$

Οι αριθμοί p^k-1 και p^k+1 είναι άρτιοι. Αν $d=\text{ΜΚΔ}(p^k-1, p^k+1)$, τότε ο d είναι άρτιος διαιρέτης της διαφοράς $(2^k+1)-(2^k-1)=2$, και άρα $d=2$. Επειδή $p^k-1<p^k+1$, $2<5\cdot 2^{b-1}$ και

$$5\cdot 2^b = 2\cdot(5\cdot 2^{b-1}) = (2\cdot 5)\cdot 2^{b-1} = 2^{b-1}\cdot(2\cdot 5),$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $p^k-1=2$ και $p^k+1=5\cdot 2^{b-1}$. Τότε $5\cdot 2^{b-1}=4$, αδύνατο.
2. $p^k-1=2\cdot 5$ και $p^k+1=2^{b-1}$. Τότε $2^{b-1}=12$, αδύνατο.
3. $p^k-1=2^{b-1}$ και $p^k+1=2\cdot 5$. Τότε $p^k=9$ και $2^{b-1}=8$, που ισχύουν αν και μόνο αν $p=3$, $k=2$, και $b=4$.

Άρα αν ο a είναι άρτιος, η μοναδική λύση με $q=2$ είναι η $(p,q,a,b)=(3,2,4,4)$.

* a περιττός. Αφού $a > 1$ είναι $a \geq 3$. Επίσης, ΜΚΔ$(2, a) = 1$ και $p^a - 1^a = 5 \cdot 2^b$. Έχουμε ότι $2 / p - 1$, και άρα από το LTE (lifting the exponent) έχουμε ότι $v_2(p^a - 1^a) = v_2(p-1)$. Όμως, $v_2(p^a - 1) = v_2(5 \cdot 2^b) = b$, και άρα $v_2(p-1) = b$. Έτσι, $p - 1 \geq 2^b$, ή ισοδύναμα, $p \geq 1 + 2^b$. Τότε, όμως, έπεται ότι

$$p^a \geq p^3 \geq (1+2^b)^3 = 1 + 3 \cdot 2^b + 3 \cdot 2^{2b} + 2^{3b} > 1 + 5 \cdot 2^b = p^a,$$

άτοπο.

Συνεπώς, έχουμε τις δύο λύσεις $(p, q, a, b) = (2, 3, 4, 1)$ και $(p, q, a, b) = (3, 2, 4, 4)$.

Πρόβλημα 4 (Ελλάδα). Αποκαλούμε έναν άρτιο θετικό ακέραιο αριθμό n *καλό* αν το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ μπορεί να διαμερισθεί σε $\frac{n}{2}$ υποσύνολα με δύο στοιχεία τέτοια, ώστε το άθροισμα των στοιχείων σε κάθε υποσύνολο να είναι δύναμη του 3. Για παράδειγμα, το 6 είναι καλός, διότι το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ μπορεί να διαμερισθεί στα υποσύνολα $\{1, 2\}$, $\{3, 6\}$ και $\{4, 5\}$. Να βρεθεί το πλήθος των καλών θετικών ακέραιων οι οποίοι είναι μικρότεροι από το 3^{2022}.

Λύση. Για κάποιον καλό θετικό ακέραιο n και μια δοθείσα διαμέριση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ σε $\frac{n}{2}$ υποσύνολα με δύο στοιχεία τέτοια, ώστε το άθροισμα των στοιχείων σε κάθε υποσύνολο να είναι δύναμη του 3, λέμε ότι οι $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι *ζευγάρι* αν και οι δυο ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο.

Έστω x ένας καλός αριθμός και k ο (μοναδικός) μη-αρνητικός ακέραιος τέτοιος ώστε $3^k \leq x < 3^{k+1}$. Ας υποθέσουμε ότι ο x είναι ζευγάρι με τον $y < x$. Τότε $x + y = 3^s$ για κάποιο θετικό ακέραιο s. Αφού

$$3^s = x + y < 2x < 2 \cdot 3^{k+1} < 3^{k+2},$$

έπεται ότι $s < k + 2$. Από την άλλη, η ανισότητα

$$x + y \geq 3^k + 1 > 3^k$$

δίνει $s > k$. Συνεπώς $s = k + 1$, και άρα $x + y = 3^{k+1}$. Η τελευταία ισότητα, σε συνδυασμό με την $x > y$, μας δίνει ότι $x > \frac{3^{k+1}}{2}$.

Με παρόμοιο τρόπο, όπως παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε ακέραιος z από το κλειστό διάστημα $[3^{k+1} - x, x]$ είναι ζευγάρι με τον $3^{k+1} - z$. Συγκεκριμένα, για κάθε τέτοιο z, ο μεγαλύτερος από τους z και $3^{k+1} - z$ είναι μεγαλύτερος από $\frac{3^{k+1}}{2}$, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από 3^k, οπότε οι αριθμοί z και $3^{k+1} - z$ ανήκουν αναγκαστικά στο ίδιο υποσύνολο. Με άλλα λόγια, κάθε ακέραιος αριθμός στο διάστημα $[3^{k+1} - x, x]$ είναι ζευγάρι με κάποιον άλλον ακέραιο αριθμό από το ίδιο διάστημα. Έτσι, όλοι οι θετικοί ακέραιοι που είναι μικρότεροι από τον $3^{k+1} - x$ σχηματίζουν ζευγάρια μεταξύ τους, οπότε ο αριθμός $3^{k+1} - x - 1$ είναι είτε καλός, είτε ισούται με το 0. Επίσης, ο αριθμός 3^k πρέπει να είναι ζευγάρι με τον $2 \cdot 3^k$, οπότε $x \geq 2 \cdot 3^k$.

Έπειτα αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι $a_n = 2^n - 1$, όπου a_n είναι το πλήθος των καλών θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από τον 3^n. Για $n = 1$, ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής, αφού το 2 είναι ο μοναδικός καλός θετικός ακέραιος μικρότερος του 3. Έστω τώρα ότι $a_n = 2^n - 1$ για κάποιο θετικό ακέραιο n. Θα δείξουμε ότι $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Για να το αποδείξουμε αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι το πλήθος των καλών θετικών ακέραιων μεταξύ του $2 \cdot 3^n$ και του 3^{n+1} είναι ακριβώς ίσο με $a_{n+1} - a_n$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ο $3^{n+1} - 1$ είναι καλός. Για κάθε καλό αριθμό $2 \cdot 3^n \leq x < 3^{n+1} - 1$, ο αριθμός $3^{n+1} - x - 1$ είναι επίσης καλός και είναι γνήσια μικρότερος από τον 3^n. Επίσης, για κάθε θετικό ακέραιο $y < 3^n$, προφανώς υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός x τέτοιος ώστε $2 \cdot 3^n \leq x < 3^{n+1} - 1$ και $3^{n+1} - x - 1 = y$. Επομένως, έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = a_n + 1 \iff a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1,$$

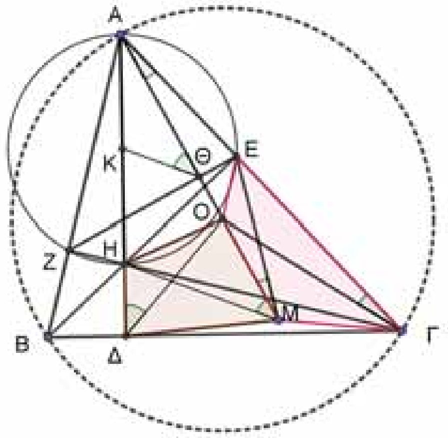
ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Συνοψίζοντας, υπάρχουν $2^{2022} - 1$ καλοί θετικοί ακέραιοι μικρότεροι από το 3^{2022}.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 124Α

Γ58. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Θεωρούμε το σημείο Μ συμμετρικό της κορυφής Α ως προς την ευθεία ΕΖ. Να αποδείξετε ότι:
(α) Τα σημεία Ο, Μ, Γ και Ε είναι ομοκυκλικά.
(β) Τα σημεία Ο, Η, Δ και Μ είναι ομοκυκλικά. *ΜΟ Ρουμανίας, 2016*

Λύση



(α) Επειδή Μ συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΕΖ έπεται ότι ΑΕ = ΕΜ, οπότε:
$$E\widehat{A}O = E\widehat{M}O. \qquad (1)$$
Επειδή Ο περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ότι ΟΑ = ΟΓ και
$$E\widehat{A}O = E\widehat{\Gamma}O \qquad (2)$$
Από τις (1) και (2) έπεται ότι $E\widehat{M}O = E\widehat{\Gamma}O$, οπότε το τετράπλευρο ΕΟΜΓ είναι εγγράψιμο και τα σημεία Ο, Μ, Γ και Ε είναι ομοκυκλικά.

(β) Επειδή $H\widehat{Z}A = H\widehat{E}A = 90^0$ τα σημεία Α, Ζ, Η και Ε ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το μέσο Κ του τμήματος ΑΗ. Αν Θ είναι το μέσο του ΑΜ πάνω στο τμήμα ΕΖ, τότε το τμήμα ΘΚ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΗΜ, οπότε ΘΚ ∥ ΗΜ. Άρα έχουμε:
$$H\widehat{M}O = K\widehat{\Theta}A \qquad (3)$$
Επίσης, από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΕ προκύπτει η ισότητα γωνιών ομόλογων στοιχείων τους (ύψος από την κορυφή Α και τα τμήματα ΔΟ και ΘΚ):
$$H\widehat{\Delta}O = K\widehat{\Theta}A \qquad (4)$$
Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι $H\widehat{M}O = H\widehat{\Delta}O$, οπότε το τετράπλευρο ΗΔΜΟ είναι εγράψιμο και τα σημεία Ο, Η, Δ και Μ είναι ομοκυκλικά

Α71. Οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha,\beta \geq 1 \geq \gamma \geq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=3$. Να αποδείξετε ότι:
(α) $2 \leq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \leq 3$.
(β) $\dfrac{24}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\dfrac{25}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \geq 14$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

ΜΟ Ρουμανίας, 2016

Λύση

(α) Για να δημιουργήσουμε τις παραστάσεις $\alpha+\beta+\gamma$ και $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, έχοντας υπόψη τις υποθέσεις $\alpha,\beta \geq 1 \geq \gamma \geq 0$, θεωρούμε την ανισότητα

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\geq 0 \Leftrightarrow 1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\geq 0$$

$$\overset{\alpha+\beta+\gamma=3}{\Longrightarrow} \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geq \alpha\beta\gamma+2\geq 2, \text{ αφού } \alpha\beta\gamma\geq 0.$$

Επίσης, από την ανισότητα

$$3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\leq(\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]\geq 0, \text{ που ισχύει, έχουμε}$$

$$3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\leq(\alpha+\beta+\gamma)^2=9,$$

από την οποία έπεται ότι: $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leq 3$.

(β) Έχουμε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$
$$=3\left[9-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)\right]$$

και αφού από το ερώτημα (α) $\alpha\beta\gamma+2\leq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \Rightarrow \alpha\beta\gamma\leq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-2$, έπεται ότι:

$$3\left[9-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)\right]\leq 3\left[7-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right].$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{24}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}\geq\frac{8}{7-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)},$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{8}{7-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}+\frac{25}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\geq 14 \Leftrightarrow 7\left[2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-5\right]^2\geq 0,$$

που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma+2 \text{ και } \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{5}{2}, \text{ οπότε } \alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}.$$

Όμως $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma+2 \Rightarrow (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=0$, οπότε ένας τουλάχιστον από τους $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ θα ισούται με 1.

Αν είναι x, y οι άλλοι δύο αριθμοί, τότε

$$\left\{x+y+xy=\frac{5}{2},\ xy=\frac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow \left\{x+y=2,\ xy=\frac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow x=1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως, αν λάβουμε υπόψη τις υποθέσεις, καταλήγουμε στην τριάδα:

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

A72. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha\beta\gamma\geq 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3+2\beta^3+6}+\frac{1}{\beta^3+2\gamma^3+6}+\frac{1}{\gamma^3+2\alpha^3+6}\leq\frac{1}{3}.$$

ΜΟ Ρουμανίας, 2016

Λύση

Επειδή

$$\alpha^3+\beta^3+1=\alpha^3+\beta^3+1^3\geq 3\alpha\beta\cdot 1=3\alpha\beta \text{ και } \beta^3+1+1\geq 3\beta$$

έχουμε:

$$\alpha^3+2\beta^3+6=\left(\alpha^3+\beta^3+1\right)+\left(\beta^3+1\right)+3\geq 3\alpha\beta+3\beta+3=3\left(\alpha\beta+\beta+1\right).$$

Ομοίως, παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\beta^3+2\gamma^3+6\geq 3\left(\beta\gamma+\gamma+1\right) \text{ και } \gamma^3+2\alpha^3+6\geq 3\left(\gamma\alpha+\alpha+1\right).$$

Έτσι, έχουμε

$$\frac{1}{\alpha^3+2\beta^3+6}\leq\frac{1}{3\left(\alpha\beta+\beta+1\right)},\ \frac{1}{\beta^3+2\gamma^3+6}\leq\frac{1}{3\left(\beta\gamma+\gamma+1\right)} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\gamma^3+2\alpha^3+6}\leq\frac{1}{3\left(\gamma\alpha+\alpha+1\right)},$$

οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha\beta+\beta+1}+\frac{1}{\beta\gamma+\gamma+1}+\frac{1}{\gamma\alpha+\alpha+1}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha\beta+\beta+1}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta}+\frac{\beta}{\beta\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta}\leq 1.$$

Επειδή $\alpha\beta\gamma\geq 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{\alpha\beta+\beta+1}+\frac{\alpha\beta}{\beta+1+\alpha\beta}+\frac{\beta}{1+\alpha\beta+\beta}\leq 1\Leftrightarrow\frac{\alpha\beta+\beta+1}{\alpha\beta+\beta+1}\leq 1,$$

που ισχύει.

Α73. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι τέτοιοι ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+1}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha+1}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+1}\leq 1.$$

Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\frac{1}{\beta+\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+\beta+1}\geq 1.$

ΜΟ Ρουμανίας, 2016

Λύση

Έστω $\displaystyle A=\frac{1}{\beta+\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+\beta+1}$. Από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+1}+1+\frac{\beta}{\gamma+\alpha+1}+1+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+1}+1\leq 4\Rightarrow\left(\alpha+\beta+\gamma+1\right)A\leq 4. \qquad (1)$$

Από την ανισότητα αριθμητικού – αρμονικού μέσου λαμβάνουμε:

$$A=\frac{1}{\beta+\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+\beta+1}\geq\frac{3^2}{\left(\beta+\gamma+1\right)+\left(\gamma+\alpha+1\right)+\left(\alpha+\beta+1\right)}\Rightarrow$$

$$A\geq\frac{9}{2\left(\alpha+\beta+\gamma+1\right)+1}\overset{(1)}{\Longrightarrow}A\geq\frac{9}{2\cdot\frac{4}{A}+1}\Rightarrow A\geq\frac{9A}{8+A}\Rightarrow 9\leq 8+A\Rightarrow A\geq 1.$$

Δ15. Χρωματίζουμε τα μοναδιαία τετράγωνα ενός $n\times n$, με $n\geq 2$, πίνακα μαύρα ή άσπρα έτσι ώστε κάθε μαύρο τετράγωνο να έχει τουλάχιστον τρία γειτονικά άσπρα τετράγωνα. Δύο τετράγωνα είναι γειτονικά, αν έχουν μία κοινή πλευρά. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό μαύρων τετραγώνων. *ΜΟ Ρουμανίας, 2016*

Λύση

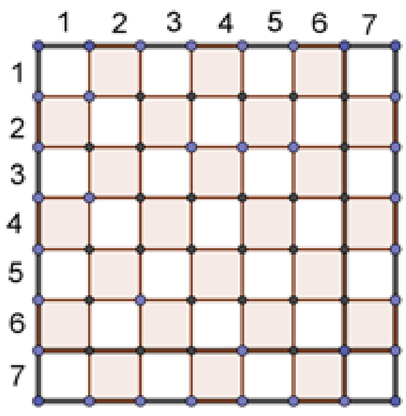
Πρώτα θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τις πιθανές θέσεις των μαύρων τετραγώνων.

- Τα γωνιακά μοναδιαία τετράγωνα πρέπει να είναι άσπρα, γιατί έχουν μόνο δύο γειτονικά τετράγωνα.
- Τα συνοριακά μοναδιαία τετράγωνα του πίνακα έχουν μόνο τρία γειτονικά τετράγωνα, οπότε δεν πρέπει εκεί να υπάρχουν δύο γειτονικά μαύρα τετράγωνα.
- Οποιοδήποτε τετράγωνο 2×2 πρέπει να περιέχει το πολύ δύο μαύρα μοναδιαία τετράγωνα, αφού διαφορετικά ένα μαύρο μοναδιαίο τετράγωνο θα είχε ήδη δύο γειτονικά μαύρα τετράγωνα σε σύνολο τεσσάρων το πολύ γειτονικών τετραγώνων. οπότε απομένουν μόνο δύο θέσεις για άσπρα τετράγωνα.

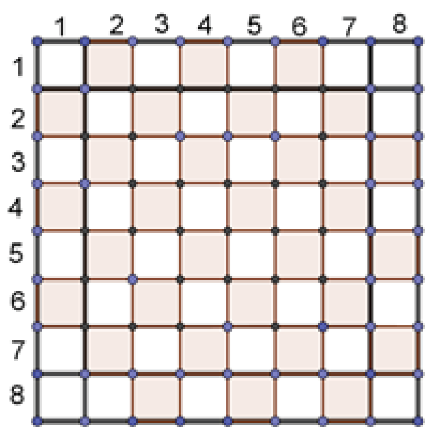
Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. ***Έστω n περιττός***. Τότε χρωματίζοντας τον πίνακα , όπως μία σκακιέρα, αρχίζοντας από άσπρα γωνιακά τετράγωνα, ικανοποιούμε τη συνθήκη του προβλήματος και έχουμε χρωματίσει $\frac{n^2-1}{2}$ μαύρα μοναδιαία τετράγωνα. Άρα το μέγιστο πλήθος των μαύρων τετραγώνων είναι τουλάχιστον $\frac{n^2-1}{2}$.

   Επιπλέον, θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να έχουμε στον πίνακα το πολύ $\frac{n^2-1}{2}$ μαύρα τετράγωνα. Για το σκοπό αυτό χωρίζουμε τον πίνακα σε τέσσερις υποπίνακες, ως εξής: Ένα τετράγωνο $(n-1)\times(n-1)$ πάνω αριστερά, ένα μοναδιαίο τετράγωνο κάτω δεξιά, ένα ορθογώνιο $1\times(n-1)$ κάτω αριστερά και ένα ορθογώνιο $(n-1)\times 1$ πάνω δεξιά. Επειδή ο $n-1$ είναι άρτιος, χωρίζουμε το $(n-1)\times(n-1)$ τετράγωνο σε 2×2 τετράγωνα καθένα από τα οποία μπορεί να περιέχει το πολύ 2 μαύρα τετράγωνα. Τα δύο ορθογώνια μπορούν να περιέχουν το πολύ $\frac{n-1}{2}$ μαύρα τετράγωνα, οπότε συνολικά μπορούμε να έχουμε το πολύ $\frac{(n-1)^2}{2}+2\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{2}$ μαύρα τετράγωνα. Στο σχήμα 1 φαίνεται ο χρωματισμός που περιγράψαμε για $n=7$.



$n=7$
Σχήμα 1



$n=8$
Σχήμα 2

Επομένως, **αν n περιττός,** τότε ο μέγιστος δυνατός αριθμός των μαύρων τετραγώνων είναι $\frac{n^2-1}{2}$.

2. **Έστω n άρτιος.** Τότε χρωματίζουμε τον πίνακα, όπως μία σκακιέρα, αρχίζοντας από άσπρα γωνιακά τετράγωνα μιας διαγωνίου. Όμως, τα άλλα δύο γωνιακά τετράγωνα είναι μαύρα, οπότε τα χρωματίζουμε άσπρα. Αυτός ο χρωματισμός ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος και περιέχει $\frac{n^2-4}{2}$ μαύρα μοναδιαία τετράγωνα. Άρα το μέγιστο πλήθος των μαύρων τετραγώνων είναι τουλάχιστον $\frac{n^2-4}{2}$.

   Θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να έχουμε στον πίνακα το πολύ $\frac{n^2-4}{2}$ μαύρα τετράγωνα. Για το σκοπό αυτό χωρίζουμε τον πίνακα σε εννέα υποπίνακες, ως εξής:

   Ένα κεντρικό $(n-2)\times(n-2)$ τετράγωνο, τέσσερα γωνιακά τετράγωνα, δύο συνοριακά ορθογώνια $(n-2)\times 2$ και άλλα δύο συνοριακά ορθογώνια $2\times(n-2)$. Χρησιμοποιούμε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, για τον $(n-2)\times(n-2)$ πίνακα τα 2×2 τετράγωνα και τελικά καταλήγουμε ότι μπορούμε να έχουμε στον πίνακα το πολύ

$$\frac{(n-2)^2}{2}+4\cdot\frac{n-2}{2}+4\cdot 0=\frac{n^2-4}{2}$$

   Μαύρα τετράγωνα. Στο σχήμα 2 φαίνεται ο χρωματισμός που περιγράψαμε για $n=8$. Επομένως, αν n άρτιος, τότε ο μέγιστος αριθμός των μαύρων τετραγώνων είναι

$$\frac{n^2-4}{2}.$$

Ασκήσεις για λύση

Γ59. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΒΜ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και τη διάμεσο ΒΜ στο σημείο Ν έτσι ώστε $\mathrm{A\hat{N}M}=90^0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma\Delta=2\cdot\Delta\mathrm{M}.$$

Α74. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha>-1$, $\beta>-1$ και $\alpha+\beta=1$ ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}\geq\frac{2}{3}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

“ΘΑΛΗΣ”: Θέματα για εμβάθυνση

Γεώργιος Μπατέλης

Άσκηση άλγεβρας 1

Πόσες τριάδες θετικών ακεραίων (α, b, c) με α+b≤3 και b+c≤3 ικανοποιούν την εξίσωση $\dfrac{\alpha+2b^{-1}}{\alpha+c^{-1}}=2\dfrac{c}{b}$;

Λύση

Η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\alpha+\frac{2}{b}}{\alpha+\frac{1}{c}}=2\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{\frac{\alpha b+2}{b}}{\frac{\alpha c+1}{c}}=2\frac{c}{b}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha b+2}{\alpha c+1}=2 \Leftrightarrow \alpha b+2=2\alpha c+2 \Leftrightarrow b=2c.$$

Άρα θα είναι b+c≤3 ⇔ 3c≤3⇔c=1.

Τότε b+c≤3 ⇔ b≤2, δηλαδή b=1 ή b=2.

Για b=2 θα είναι α+b≤3 ⇔ α≤1, δηλαδή α=1, οπότε (α, b, c)=(1, 2, 1).

Για b=1 θα είναι α+b≤3⇔α≤2, δηλαδή α=1 ή α=2, οπότε (α, b, c)=(1, 1, 1) ή (2, 1, 1).

Σύνοψη (α, b, c)=(1,2,1) ή (1, 1, 1) ή (2, 1, 1).

Έλεγχος

Η συνθήκη b=2c ικανοποιείται μόνο από το (1,2,1) που ικανοποιεί και τις συνθήκες α+b≤3, b+c≤3.

Δημιουργία προβλήματος

Ένας τρόπος για να δημιουργήσετε ένα παρόμοιο πρόβλημα είναι να προκύψει μια σχέση από την εξίσωση μεταξύ δύο από τους α, b, c ώστε να την εκμεταλλευτείτε με τη υπόλοιπη υπόθεση. Προσπαθήστε τώρα με αυτήν την συμβουλή να φτιάξετε ένα παρόμοιο πρόβλημα.

Παραλλαγή

Πόσες τετράδες θετικών ακεραίων (α, b, c, d) με α+b+c≤7 και b+c+d≤7 ικανοποιούν τις εξισώσεις $\dfrac{d+2b^{-1}}{d+\alpha^{-1}}=2\dfrac{\alpha}{c}$ (1) και $\dfrac{\alpha+2b^{-1}}{\alpha+c^{-1}}=2\dfrac{c}{b}$ (2).

Σύντομη υπόδειξη

Από την εξίσωση (1) έχουμε c=2α (3).

Από την εξίσωση (2) έχουμε b=2c και λόγω της (3) θα είναι c=2(2α)=4α.

Άρα α+b+c≤7 ⇔ 7α≤7 ⇔ α=1, επομένως c=2, b=4 και από τη σχέση b+c+d≤7 θα είναι d=1.

Άσκηση άλγεβρας 2

Αν $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{3}{\gamma}=\dfrac{4}{\delta}=\dfrac{5}{\varepsilon}$, ***όπου α, β, γ, δ, ε∈N* με α+β+γ+δ+ε=15 (1) να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ, δ, ε.***

Λύση

Έχω $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{3}{\gamma}=\dfrac{4}{\delta}=\dfrac{5}{\varepsilon}=\lambda \Rightarrow$ λα=1, λβ=2, λγ=3, λδ=4, λε=5 οπότε η (1) γίνεται:

λα+λβ+λγ+λδ+λε=15λ⇒λ(α+β+γ+δ+ε)=15λ⇒λ=1 (λόγω της (1)).

Άρα α=1, β=2, γ=3, δ=4 και ε=5.

Επέκταση

Αν $\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{3}{\gamma}=\dfrac{4}{\delta}=\varepsilon$ (1) α+β+γ=8 (2) και δ+ε=4 (3), να βρεθούν τα α, β, γ, δ, ε.

Σύντομη υπόδειξη

Από την (1) προκύπτουν οι σχέσεις: αβ=10, βγ=6, 4γ=3δ, δε=4 κ.ο.κ.

Εκμεταλλευόμενος κάποιες από τις παραπάνω σχέσεις και τις (2), (3) θα προσπαθήσω να βρω τα α, β, γ, δ, ε.

Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της (2) επί β και έχουμε:

$\alpha\beta+\beta^2+\beta\gamma=8\beta\Leftrightarrow 10+\beta^2+6=8\beta \Leftrightarrow \beta^2-8\beta+16=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\beta-4)^2=0 \Leftrightarrow \beta=4$, οπότε $\alpha=\dfrac{5}{2}$ και $\gamma=\dfrac{3}{2}$.

Όμοια η (3) $\Leftrightarrow \delta^2+\delta\varepsilon=4\delta \Leftrightarrow \delta^2-4\delta+4=0 \Leftrightarrow$
$(\delta-2)^2=0 \Leftrightarrow \delta=2$, άρα ε=2.

Οι λύσεις είναι δεκτές διότι επαληθεύουν τις σχέσεις.

Σχόλιο: *Η άσκηση θα μπορούσε να έχει λιγότερα δεδομένα.*

Πράγματι η συνθήκη (2) μπορεί να παραλειφθεί. Αυτό διότι από την συνθήκη (3) και την (1) έχουμε $\frac{5}{\alpha}=2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{2}$, β=4 και $\gamma=\frac{3}{2}$.

Όμοια μπορούμε να παραλείψουμε την σχέση (3) και να κρατήσουμε την (2).

Πρόβλημα 1

Οι πόλεις Άλφα και Βήτα συνδέονται με γραμμή λεωφορείου. Από κάθε πόλη ξεκινούν ταυτόχρονα λεωφορεία κάθε μία ώρα, ολόκληρο το 24ωρο και το ταξίδι ανάμεσα στις δυο πόλεις διαρκεί 8 ώρες ακριβώς. Ένα λεωφορείο που ξεκινάει από τη πόλη Άλφα, πόσα λεωφορεία της ίδιας γραμμής θα συναντήσει μέχρι να φτάσει στην πόλη Βήτα;

(Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά, 11/11/1989, Γ Γυμνασίου)

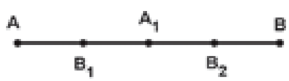
Σκέψη

Θα δημιουργήσουμε ένα πιο απλό πρόβλημα για να κατανοήσουμε καλύτερα την λύση του προβλήματος. Παίρνουμε περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η το ταξίδι να διαρκεί 1 ώρα άρα έχουμε μία συνάντηση την στιγμή που ξεκινάει το Α, μία στο μέσον της διαδρομής A_1 και μία στο Β.

Σύνολο 1+2=3 συναντήσεις (1 ώρα +2).

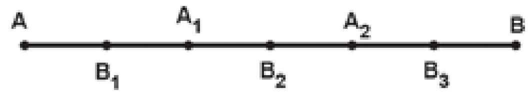
Περίπτωση 2η το ταξίδι να διαρκεί 2 ώρες άρα έχουμε 2 συναντήσεις στις 2 αφετηρίες και 3 συναντήσεις ενδιάμεσα, όπως φαίνεται από το σχήμα.



Σύνολο:
2+3=5 συναντήσεις
(2 ώρες + 3).

Περίπτωση 3η το ταξίδι να διαρκεί 3 ώρες:

Θα έχουμε 2 συναντήσεις στις 2 αφετηρίες και 5 συναντήσεις ενδιάμεσα, όπως φαίνεται από το σχήμα.



Σύνολο 3+4=7 (3 ώρες +4) συναντήσεις.

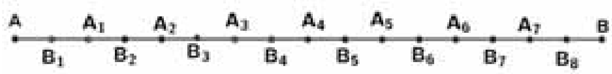
Επέκταση στις 10 ώρες:

Θα είναι 10+11=21 και γενικά στις ν ώρες θα είναι ν+(ν+1).

Λύση του αρχικού προβλήματος

Τη διαδρομή ΑΒ τη χωρίζουμε σε 8 ίσα διαστήματα που διανύουν τα λεωφορεία σε 1 ώρα. Όταν το λεωφορείο ξεκινά από την πόλη Α την ίδια στιγμή φτάνει ένα άλλο λεωφορείο που ξεκίνησε πριν 8 ώρες από την πόλη Β. Μετά μισή ώρα θα συναντήσει στη θέση B_1 αυτό που ξεκίνησε από το A_1. Μετά 1 ώρα θα συναντήσει στη θέση A_1 αυτό που ξεκίνησε από την A_2. **Έτσι θα συναντήσει λεωφορεία στα σημεία Α, A_1, A_2,..., A_7, Β και στα σημεία B_1, B_2, B_3,..., B_8.**

Θα συναντήσει συνολικά 9+8=17 λεωφορεία.



Πρόβλημα 2

Μια ομάδα μαθητών παίζουν ένα παιχνίδι.

- ***Ο Ανδρέας πολλαπλασιάζει όλους τους θετικούς ακεραίους από το 1 μέχρι το 1821.***
- ***Ο Βασίλης πολλαπλασιάζει τα τετράγωνα όλων των ακεραίων από το 1 ως το 1821.***
- ***Ο Γιάννης προσθέτει το διπλάσιο του αριθμού που βρήκε ο Ανδρέας με τον αριθμό 4.***
- ***Ο Δημήτρη; αφαιρεί τον αριθμό 2 από το αποτέλεσμα που βρήκε ο Ανδρέας και πολλαπλασιάζει το νέο αποτέλεσμα με τον αριθμό που βρήκε ο Γιάννης.***
- ***Η Ελένη πολλαπλασιάζει επί 2 τον αριθμό του Δημήτρη και προσθέτει τον αριθμό 17.***

- ***Ο Στράτος υψώνει τον αριθμό που βρήκε ο Βασίλης στον κύβο.***
- ***Η Ζενεβιέβ προσθέτει τους αριθμούς που βρήκαν η Ελένη και ο Στράτος. Χ+1***
  Να αποδείξετε ότι ο αριθμός που βρήκε η Ζενεβιέβ είναι το τέλειο τετράγωνο ενός περιττού αριθμού.

Λύση

Ο Ανδρέας έγραψε $A=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1821$.

Ο Βασίλης έγραψε $B=1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 1821^2=A^2$.

Ο Γιάννης έγραψε $\Gamma=A^2+2A+4$.

Ο Δημήτρης έγραψε

$$\Delta=(A-2)(A^2+2A+4)$$

$$=A^3+2A^2+4A-2A^2-4A-8=A^3-8.$$

Η Ελένη έγραψε

$$E=2(A^3-8)+17=2A^3-16+17=2A^3+1.$$

Ο Στράτος έγραψε $\Sigma T=(A^2)^3=A^6$.

Η Ζενέβιεβ έγραψε $Z=A^6+2A^3+1=(A^3+1)^2$.

Ο αριθμός $Z=(A^3+1)^2$ είναι τέλειο τετράγωνο, αρκεί να είναι και ο αριθμός A^3+1 περιττός.

Είναι

$A^3+1=1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot 1821^3+1=2(1^3\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot 1821^3)+1$

που είναι περιττός.

Πρόβλημα 3

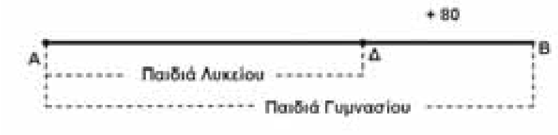
Σε έναν διαγωνισμό της ΕΜΕ σε μία επαρχιακή πόλη, τα παιδιά του Γυμνασίου ήταν 80 περισσότερα από τα παιδιά του Λυκείου. Αν τα παιδιά το Γυμνασίου αυξηθούν κατά 30 και τα παιδιά του Λυκείου ελαττωθούν κατά 20 τότε τα παιδιά του Γυμνασίου θα είναι διπλάσια από τα παιδιά του Λυκείου. Πόσα είναι τα παιδιά του Γυμνασίου και πόσα του Λυκείου;

(Αντίστοιχη Περιοδικό Ευκλείδης Α τεύχος 106 σελίδα 18)

Λύση (Με αναπαράσταση)

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να λύσουμε το πρόβλημα.

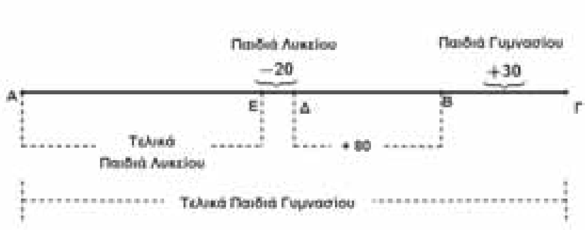
Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ευθύγραμμα τμήματα για να αναπαραστήσουμε τα δεδομένα μας.



$AE+E\Gamma=A\Gamma \overset{A\Gamma=2AE}{\Rightarrow} AE+E\Delta+\Delta B+B\Gamma=2AE \Rightarrow$

$\Rightarrow AE+20+80+30=2AE \Rightarrow AE=130.$

Αφού στο τέλος τα παιδιά του Λυκείου είναι 130, στην αρχή πριν ελαττωθούν κατά 20 ήταν 150.



Άρα τα παιδιά του Γυμνασίου βάσει της αρχικής αναπαράστασης ήταν 150+80=230.

Μαγικά τετράγωνα

Παρατηρήστε το παρακάτω τετράγωνο. Το άθροισμα των αριθμών σε κάθε οριζόντια γραμμή είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη και επίσης ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε μία από τις δύο διαγώνιες.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

(Πχ,, στο πρώτο σχήμα δεξιά συμβαίνει να είναι:

2+7+6=9+5+1=2+9+4=4+5+6 κ.λ.π.).

*Τέτοια τετράγωνα ονομάζονται "**μαγικά**"*

Σε κάποιο άλλο μαγικό τετράγωνο τα νούμερα έσβησαν, εκτός από το 7 και το 13 που βρίσκονται στις θέσεις που δείχνει το δεύτερο σχήμα που ακολουθεί δεξιά. Δείξτε ότι απαραιτήτως σε κάποια από τις θέσεις του μαγικού

		7
13		

αυτού τετραγώνου υπάρχει ο αριθμός 1, ανεξάρτητα από τα ποια είναι τα υπόλοιπα νούμερά του. (Θαλής 19/10/1996)

Λύση

Αν α και β, όπως στο σχήμα, οι αριθμοί που συμπληρώνουν τη $2^η$ γραμμή του "**μαγικού**" τετραγώνου, τότε το σταθερό άθροισμα των γραμμών, στηλών και διαγωνιών του μαγικού τετραγώνου είναι 13+α+β.

		7
13	α	β
6+β	1	6+α

Τότε το κάτω αριστερά τετράγωνο είναι 6+β (για να συμπληρωθεί το 13+α+β στη διαγώνιο), ενώ το κάτω δεξιά είναι 6+α (για να συμπληρωθεί το άθροισμα της τελευταίας στήλης).

Η τελευταία γραμμή έχει 6+β+6+α=12+α+β και της λείπει ο αριθμός 1 για να συμπληρωθεί το επιθυμητό 13+α+β.

Άρα το μεσαίο κάτω τετράγωνο είναι υποχρεωτικά 1.

Επέκταση

Με την προϋπόθεση ότι οι αριθμοί α, β είναι ακέραιοι, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

α) Τι μορφή πρέπει να έχουν τα δύο κενά κουτάκια; Βρείτε μία τιμή για τα τους αριθμούς α, β.

Λύση

Στο πάνω αριστερά τετράγωνο πρέπει να έχω α–6, ώστε το άθροισμα της πρώτης στήλης να είναι

$$(α–6)+13+(6+β)=α+β+13$$

που είναι το επιθυμητό.

α-6	12+β	7
13	α	β
6+β	1	6+α

Αναγκαστικά το πρώτο τετράγωνο της δεύτερης στήλης θα έχει την τιμή 12+β, ώστε το άθροισμα της πρώτης γραμμής να είναι

$$(α–6)+(12+β)+7=α+β+13.$$

Τότε η αριστερή διαγώνιος δίνει άθροισμα

$$(α–6)+α+(6+α)=3α$$

Που πρέπει να κάνει 13+α+β.

Άρα 3α =13+α+β⇒2α=13+β.

Για β=1 έχω α=7 με άθροισμα 21.

1	13	7
13	7	1
7	1	13

β) Μπορείτε να φτιάξετε ένα άλλο μαγικό τετράγωνο; Τι αριθμός βολεύει να είναι το β;

Λύση

Όπως φαίνεται από το προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να φτιάξουμε άπειρα μαγικά τετράγωνα (για παράδειγμα β=3, α=8 με άθροισμα 24).

Προσοχή ο β πρέπει να είναι περιττός αριθμός διότι ο α είναι ακέραιος.

γ) Αν ήθελα άθροισμα 2022 τι τιμές θα έβαζα στα α, β;

Λύση

Θέλω

α+β+13 = 2022⇒ α+β=2009.

Η αριστερή διαγώνιος δίνει άθροισμα 3α, οπότε:

3α=2022 ⇒ α=674,

άρα β=1335.

668	1347	7
13	674	1335
1341	1	680

δ) Τι μορφή πρέπει να επιλέγουμε για τα αθροίσματα;

Λύση

Επειδή το άθροισμα της αριστερής διαγώνιου είναι 3α θα πρέπει το άθροισμα να διαιρείται με το 3.

Τα θέματα αντλήθηκαν από την έκδοση της ΕΜΕ «ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ»

Α΄ Τάξη

Ασκήσεις Α΄ Γυμνασίου

Κουτσούρης Λέοντας

1) Α. Δίνεται τα παρακάτω κλάσματα. Να εξετάσετε ποια από αυτά απλοποιούνται.

α) $\dfrac{1515}{5151}$ **β)** $\dfrac{72}{108}$ **γ)** $\dfrac{3+4}{3\cdot 4}$

δ) $\dfrac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot y}$ $x,y\neq 0$ **ε)** $\dfrac{x+y+z}{x\cdot y\cdot z}$ $x,y,z\neq 0$

ζ) $\dfrac{(x+y)\cdot z}{(x+y)\cdot w}$ **η)** $\dfrac{(x+y)\cdot w}{(x+z)\cdot w}$

θ) $\dfrac{3^7}{3^5}$ **ι)** $\dfrac{2^5\cdot 5^7}{2\cdot 5^4}$ **κ)** $\dfrac{2^{10}7^8}{2^{10}7^8}$ **λ)** $\dfrac{2^2+3^2}{5^2}$

Β. Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα.

α) $\dfrac{10\cdot\alpha+10}{10}$ **β)** $\dfrac{3\cdot\alpha+6}{3}$ **γ)** $\dfrac{49-7\cdot\alpha}{7}$

2) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{5^2+3-3\cdot 3^2}{3\cdot 5-2^3}+\frac{2\cdot 5^0-12\cdot(3^2+3)}{7^2:(2^2+3)}$$

$$B=\frac{3\cdot(5^2-4\cdot 5)}{7^2-6\cdot 2^3+14}-\frac{5^4:5^3-2^2}{13^0+7^0}$$

α) Να υπολογίσετε τις παραπάνω παραστάσεις Α,Β

β) Να ελέγξετε ποια από τις παραστάσεις Α και Β είναι μεγαλύτερη;

γ) Να βρείτε ένα κλάσμα ανάμεσα στα Α, Β

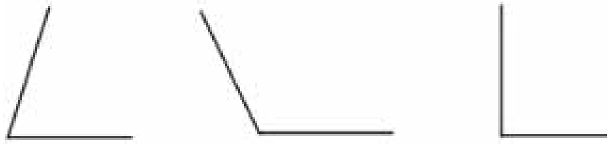
δ) Να υπολογιστεί η παράσταση $\Gamma=\dfrac{A+1}{B-1}$

3) Να υπολογίσετε και να αντιστοιχίσετε τις τιμές των παραστάσεων στις παρακάτω γωνίες και να τις χαρακτηρίσετε.

$$\varphi=2\cdot(3+2)^2+(5-3)^2:2$$

$$\kappa=(9^2-1)\cdot(5-2^2)^{2022}+\frac{(2\cdot 5)^2}{11-1^{1453}}$$

$$\omega=6\cdot 3^2-\left[2^3-(3^2-6)+2\cdot 5^2-2\cdot 3^2\right]+1821^0$$

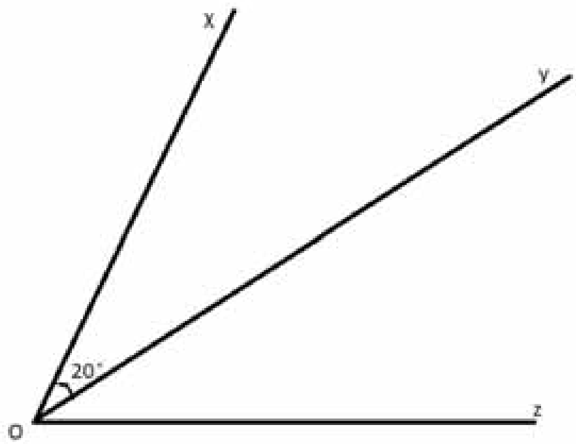


4) Αν 3α+5β=18 και οι γωνίες $x\hat{O}y=20°$, $y\hat{O}z=3(\alpha+\beta)+2(\beta+1)$

α) Να βρείτε τη γωνία $y\hat{O}z$

β) Να εξετάσετε αν οι παραπάνω γωνίες είναι εφεξής και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

γ) Να εξετάσετε αν η Oy είναι διχοτόμος της $x\hat{O}z$;



5) Α. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ=40cm, ΑΓ είναι $\dfrac{1}{5}$ μεγαλύτερο από το ΑΒ, η ΓΔ είναι τα $\dfrac{3}{4}$ της ΑΓ. Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ.

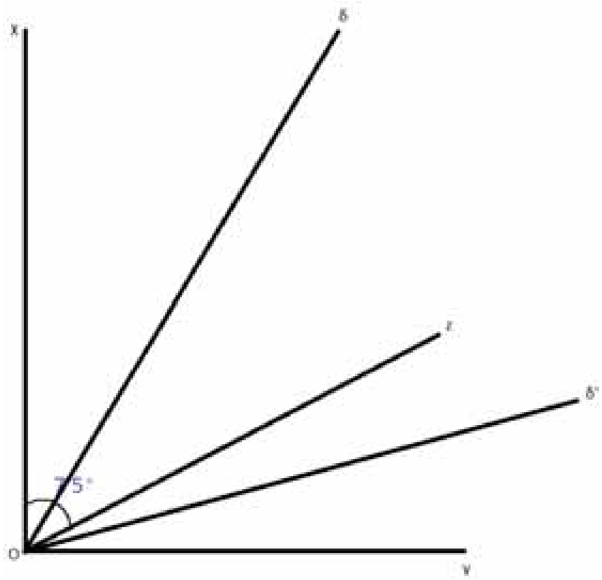
Β. Να βρείτε σε μοίρες τις παρακάτω γωνίες:

α) $\frac{1}{3}$ της ορθής γωνίας

β) τα $\frac{2}{5}$ μιας πλήρης γωνίας

γ) τα $\frac{5}{6}$ μιας ευθείας

6) Στο παρακάτω σχήμα οι ημιευθείες Οχ και Οy είναι κάθετες. Επίσης $x\widehat{O}z=75^o$ και οι Οδ, Οδ' είναι διχοτόμοι των γωνιών $x\widehat{O}z$ και $z\widehat{O}y$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την γωνία $\delta\widehat{O}\delta'$.



7) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

Α= 99+112+29+38+41+1

Β= 44+77+56+62+28+23

Γ=1821+113+24+1453+126+37+179+1547

8) Αν $\alpha = 5\cdot 6\cdot 7 - 7$

$$\beta = 7\cdot 2\left(9-3^2\right)$$

$$\gamma = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{44\cdot 5\cdot 6}.$$

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α,β,γ

β) Να βρείτε τους αντίστροφους των παραπάνω αριθμών

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$M = \left(1819^{\beta} + \beta^{1821} + \alpha^{\gamma}\right)\cdot(\gamma-\beta)^{1453}$$

9) α) Αν $x = 11:(5^{50}+6^{60})^0 - 2^3$,

$y = \left(9:3\right)^2 - 8\cdot 10^0$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

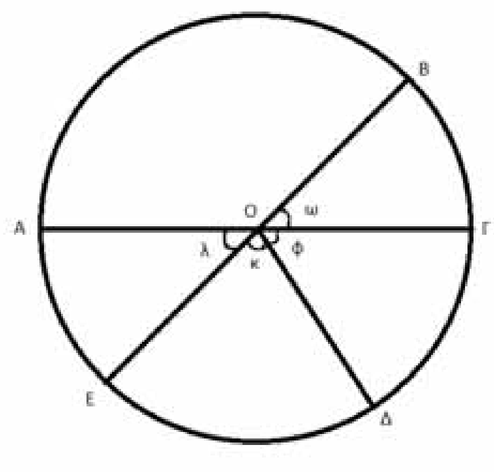
$$A = x^y + y^x + (x-2\cdot y)^{2022} + 2022^{x-3\cdot y}$$

$$B = \frac{2^2\cdot\frac{1}{3}+2}{\frac{4}{3}-1} : \left(\frac{1821}{2022}\cdot\frac{2022}{1821}\right)^4$$

β) Να στρογγυλοποιήσετε στην πλησιέστερη δεκάδα τους αριθμούς Α και Β.

10) Δίνεται κύκλος κέντρου (Ο,ρ) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου $\varphi = \frac{3}{15}$ των $180°$ και το τόξο ΑΒ είναι τα $\frac{3}{2}$ των$100°$.

Να βρω τις γωνίες φ,ω,λ,κ.



Οι γωνίες και τα μέτρα τους

Βαρβάρα Καμπουρίδη

Από τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου συναντάς τη γωνία ως μαθηματική έννοια αλλά βασισμένη αρχικά, στις πρώτες τάξεις, στην παρουσία της στην καθημερινή ζωή, όπως για παράδειγμα, στους δείχτες του ρολογιού, στο άνοιγμα των δαχτύλων του χεριού, κλπ. Στις μεγαλύτερες τάξεις η γωνία προσεγγίζεται θεωρητικά ως προς τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητές της κι αργότερα και ως στοιχείο των σχημάτων.

Σημαντικοί ψυχολόγοι και ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών συμφωνούν πως η έννοια της γωνίας αναπτύσσεται στο παιδί πριν από τις έννοιες του σημείου, της ευθείας και του ευθύγραμμου τμήματος[1]. Κατά ένα παράξενο λόγο σε πολλά σχολεία ελληνικά και μη, η γωνία διδάσκεται μετά από το σημείο, την ευθεία, το ευθύγραμμο τμήμα.

Με τα μικροπειράματα https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5731 https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2071 μπορείς να πειραματιστείς με τις μεταβολές -μετασχηματισμούς των γωνιών και να κατανοήσεις καλύτερα τις δυναμικές διαστάσεις της γωνίας.

Πού χρησιμοποιείται η γωνία στη ζωή και πώς εφαρμόζονται οι ιδιότητές της για να διευκολύνουν την καθημερινότητα των ανθρώπων;

Οι σχεδιαστές επίπλων και οι επιπλοποιοί την χρησιμοποιούν για να υπολογίσουν με ακρίβεια πόρτες, καρέκλες, τραπέζια κλπ, οι αθλητές για να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους, οι καλλιτέχνες για τη δημιουργία των έργων τους, οι κατασκευαστές πάρκιν στο σχεδιασμό των θέσεων παρκαρίσματος ώστε να εξοικονομούνται περισσότερες θέσεις χωρίς να εμποδίζονται οι απαραίτητες μανούβρες. Οι πιλότοι των αεροπλάνων και των πλοίων είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούν τη γωνία σε συνδυασμό με τα δεδομένα της ταχύτητας του ανέμου και της ταχύτητας του σκάφους για να καθορίσουν την πορεία τους.

Οι γωνίες στο σχεδιασμό και την κατασκευή κτιρίων εξασφαλίζουν μαζί με άλλους παράγοντες τη στατικότητα των κτιρίων.

Και στο ποδόσφαιρο η μεταβίβαση της μπάλας στον επόμενο παίκτη γίνεται "υπό γωνία".

Προθέρμανση:

- Εντόπισε τις γωνίες σε καθένα από τα γράμματα της λέξης MATH (*συντομογραφία για τα μαθηματικά στην αγγλική γλώσσα*) και

  α) μέτρησε πόσες είναι ορθές, πόσες οξείες, πόσες αμβλείες

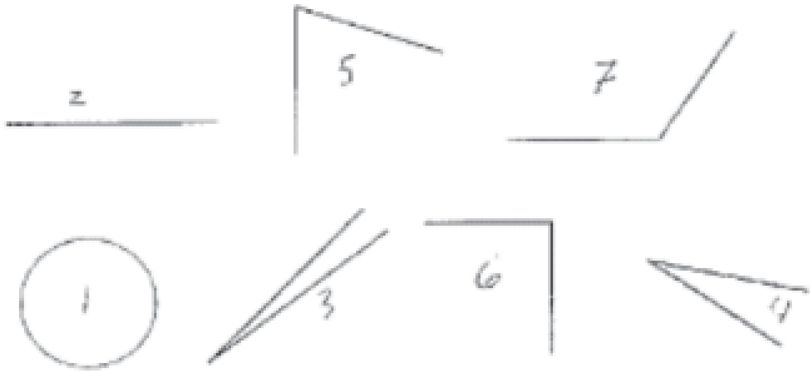
  β) ποια σχέση έχουν μεταξύ τους οι γωνίες σε κάθε γράμμα (ίσες, συμπληρωματικές, παραπληρωματικές)

- Ζητήθηκε από τους μαθητές ενός τμήματος της Α' Γυμνασίου να κατατάξουν τις παρακάτω γωνίες από την μικρότερη στη μεγαλύτερη αριθμώντας τες από το 1 ως το 7 (1 η μικρότερη, 7 η μεγαλύτερη). Αυτή είναι η απάντηση ενός μαθητή:

Συμφωνείς ή διαφωνείς και γιατί;

Ασκήσεις:

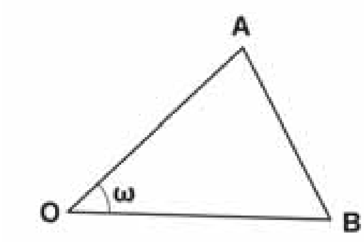
(Υπόδειξη: Μπορείς να γράφεις κάτω από κάθε άσκηση ποιο μέρος της θεωρίας που διδάχτηκες χρησιμοποίησες; Σύνοψη της απαραίτητης θεωρίας θα βρεις και στο τέλος του άρθρου).



1. Στο διπλανό τρίγωνο πόσες μοίρες μπορεί να είναι η γωνία ω; Κύκλωσε το πιο πιθανό μέτρο:

20° 45° 120° 135°

Μία από τις παραπάνω απαντήσεις μάς δίνει το μέτρο της παραπληρωματικής της γωνίας ω. Κύκλωσε με διπλό κύκλο.

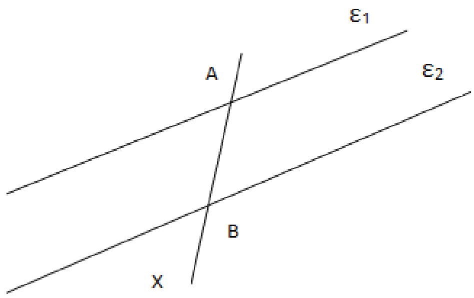


2. Ποια είναι η πιο πλήρης έκφραση για το διπλανό σχήμα:

α) Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται από την ευθεία x.

β) Ο παράλληλες ευθείες $ε_1 \backslash\backslash ε_2$ τέμνονται από την ευθεία x.

γ) Οι παράλληλες ευθείες $ε_1 \backslash\backslash ε_2$ τέμνονται από την ευθεία x στα σημεία A και B αντίστοιχα.



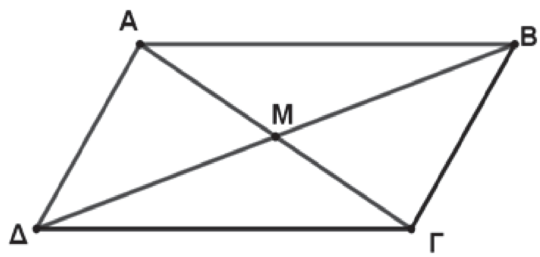
3. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν;

α) ΑΒΔ αμβλυγώνιο

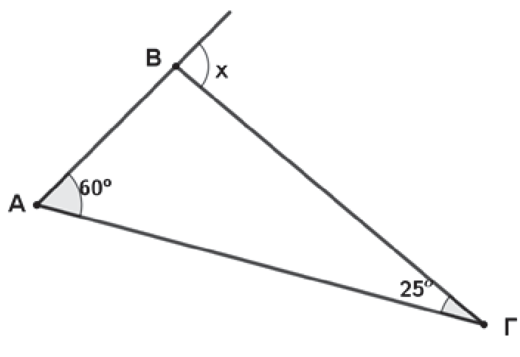
β) ΔΒΓ οξυγώνιο

γ) ΑΒΜ οξυγώνιο

δ) ΑΜΔ αμβλυγώνιο

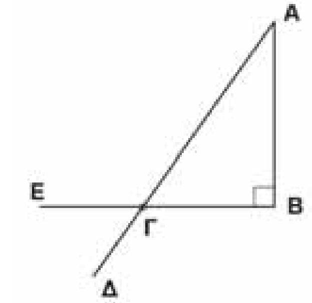


4. Τα μέτρα των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Γ}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι 55° και 65° αντίστοιχα. Ποιες από τις παρακάτω δεν μπορούν να είναι η εξωτερική γωνία της $\widehat{A}$; Κύκλωσε ανάλογα: Α: 115° Β: 110° Γ: 85° Δ: 130°



5. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, ποιο είναι το μέτρο της γωνίας Χ;

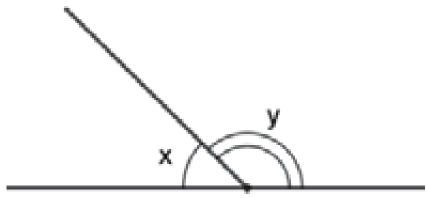
$\widehat{X}$ = ...



6. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{B}$ ορθή) η γωνία $\widehat{A}$ είναι 40°.

Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΕΓΔ}$; Κύκλωσε το σωστό:

Α: 30° Β: 50° Γ: 120° Δ: 130°

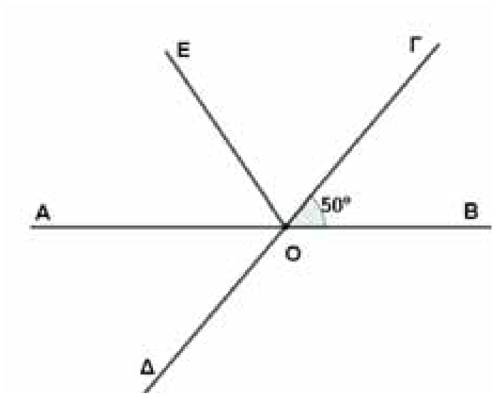


7. Στο σχήμα:

α) Αν $\widehat{x}$= 45°, ποιο είναι το μέτρο της $\widehat{y}$;

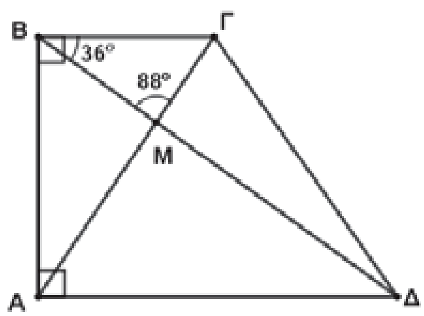
$\widehat{y} =$

β) Αν $\widehat{x}$= 2. $\widehat{y}$, κατασκεύασε το ανάλογο σχήμα και υπολόγισε το μέτρο της $\widehat{x}$ και της $\widehat{y}$; $\widehat{x} =$ $\widehat{y} =$



8. Οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ο. Φέρουμε την ημιευθεία ΟΕ έτσι ώστε οι $\widehat{ΑΟΕ}$ = $\widehat{ΑΟΔ}$. Ποιο είναι το μέτρο της $\widehat{ΕΟΓ}$; Κύκλωσε το σωστό:

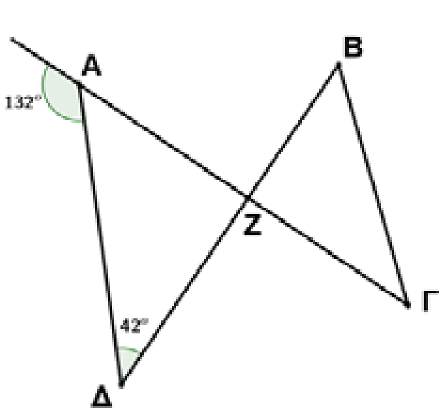
Α: 50° Β: 60° Γ: 70° Δ: 80°



9. Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο ποιο είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΒΑΜ}$; Κύκλωσε το σωστό:

Α: 34° Β: 64° Γ: 56° Δ: 92°

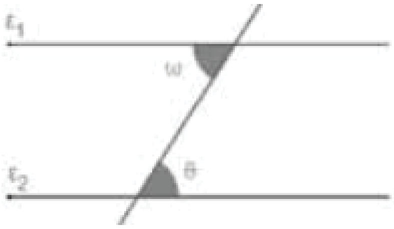
Τι είδους τρίγωνο είναι το ΒΜΑ, οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο;



10. Στο διπλανό σχήμα να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΒΖΓ}$. Κύκλωσε τη σωστή απάντηση: 80° 90° 100° 110°

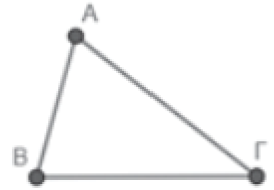
Τι συμπεραίνεις για τις ευθείες ΑΓ και ΒΔ; Μπορείς να διατυπώσεις μία ακριβή πρόταση για τη σχέση τους;

Για τη λύση των ασκήσεων μπορείς να ανατρέχεις στην παρακάτω σύνοψη της σχετικής θεωρίας. Η σύνοψη της θεωρίας και μια ποικιλία ασκήσεων με γωνίες σε σχήματα βρίσκονται στο άρθρο των Γ. Τσαπακίδη - Π.Πετράκη "Οι γωνίες στα Ευθύγραμμα Σχήματα", Ευκλείδης Α' 121 (2021) τ.1/10.



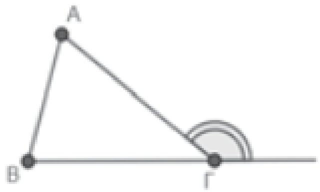
1η: Ευθεία που τέμνει δύο παράλληλες ευθείες σχηματίζει με αυτές εντός εναλλάξ γωνίες ίσες και τις εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

$$(\theta = \omega \Leftrightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2)$$



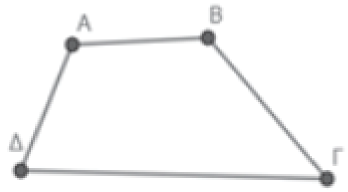
2η: Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180^o.

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o)$$



3η: Η εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών του τριγώνου.

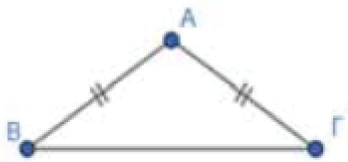
$$(\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B})$$



4η: Το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου είναι 360^o.

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o)$$

Γενίκευση: Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2\nu - 4$ορθές $= (2\nu - 4)90^o$.



5η: Αν $AB = A\Gamma$, τότε $\hat{A} = 180^o - 2\hat{B} = 180^o - 2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^o - 2\hat{A}}{2}$.

(Από το άρθρο των Γ. Τσαπακίδη - Π.Πετράκη "Οι γωνίες στα Ευθύγραμμα Σχήματα", Ευκλείδης Α' 121 (2021) τ.1/10)

Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να ανατρέχει ο μαθητής που ενδιαφέρεται για τη σωστή προτετοιμασία του για το σχολείο και τους διαγωνισμούς και σε προηγούμενα τεύχη του Ευκλείδη Α' ώστε να αποκτά μεγαλύτερη εμπειρία λύνοντας όσο περισσότερες ασκήσεις μπορεί.

---

[i] Journal of Research in Education, Volume 29, Issue 1

Ευχαριστίες στο συνάδελφο Χρήστο Μπατέλη για τα σχήματα και τις διορθώσεις.

Β΄ Τάξη — Ασκήσεις Β΄ Γυμνασίου

Κουτσούρης Λέοντας

1) Αν $x=\left[2\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{8}\right)-\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)\right]:16^{-1}$ και

$$y=\sqrt{\sqrt{81}}+\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+6\sqrt{5}:\frac{\sqrt{5}}{4}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=3(-1)^{x}+2(-1)^{y+1}+7^{5x+\frac{y}{3}}$$

2) i) Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $3\sqrt{7}\cdot x=\frac{14}{\sqrt{7}}+\sqrt{28}\cdot x$

β) $2^{-8}\cdot 2^{7}\left(x-\sqrt{25}\right)+\left(3^{-2}\right)^{3}\cdot 3^{5}=\frac{2x}{\sqrt{36}}$

γ) $\frac{2\left(x+2+\frac{3}{2}y\right)}{3}-\frac{20-x}{9}+y=$

$=\frac{18y+5x-1}{18}-\frac{3x-13-6y}{6}$

δ) $\frac{\sqrt{16}\cdot\sqrt{7+\sqrt{9-\sqrt{25}}}\cdot x}{6}=$

$=\frac{\sqrt{22+\sqrt{2+\sqrt{49}}}\cdot x}{\sqrt{100}}+3\sqrt{\frac{45}{5}}$

ε) $-3\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{5}\right)-1=\frac{\frac{3x+7}{7}-\frac{x+2}{2}}{7^{-1}}$

ζ) $-2x-\frac{3x-6}{3}=-5-\left(2-\frac{-5x}{3}\right)$

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να είναι αόριστη.

$$\alpha x+\frac{9x-\alpha}{3}=4x-\frac{1}{3}$$

iii) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος 20cm και πλάτος 5cm. Πόσο πρέπει να αυξηθεί το πλάτος του ώστε να διπλασιάσει το εμβαδόν του.

3) Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{x-3}{2x-5}=\frac{2}{5}.$$

Η μία κάθετη πλευρά του είναι 2 cm μικρότερη της υποτείνουσας να υπολογίσετε την άλλη κάθετη πλευρά.

4) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει:

$AB=8\left(x^{2}+2\right)+2x^{2},\ B\Gamma=2\left(y^{2}-4\right),$

$\Delta\Gamma=-6x^{2}+41,\ A\Delta=y^{2}+161$

α) Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του

β) Να βρεθεί το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά την ΑΓ.

5) Αν $x=(-2)^{3}-(-1)^{7}$,

$$y=(x-18)(-8-x),\quad \omega=\sqrt{3x+y}$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{-4\left(\sqrt{x+7}-2\right)+2\left(\sqrt{y-9}-1\right)-2(\sqrt{\omega+2}-4)}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$$

β) Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο όπου η μικρή βάση είναι ίση με την τιμή της παράστασης Α και το ύψος είναι ίσο με το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά 2cm να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του τραπεζίου.

6) α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha=\left[\left(\frac{2500}{700}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{700}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2500}{8}\right)^{-2}\right]:2^{-1}$$

$$\beta=\left(\frac{300^{10}}{80^{10}}\cdot\frac{300^5}{80^5}\cdot\frac{300^4}{80^4}\cdot\frac{80^{19}}{300^{19}}\right):2^{-3}$$

$$\gamma=\sqrt{\left(\frac{805}{80,5}\right)^2+\frac{60^3}{30^3}+\frac{(-40)^3}{20^3}}$$

Στη συνέχεια να εξετάσετε αν το τρίγωνο με πλευρές τα α,β,γ από τις παραπάνω παραστάσεις είναι ορθογώνιο.

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου με πλευρές α,β,γ ισούται με το μισό από του εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου με βάση 16cm να βρείτε τα μήκη των ίσων πλευρών του.

7) α) Να υπολογίσετε τα x,y,α,β

i) $3^{2x-8}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$

ii) $\frac{7^{y+1}}{7^{4y}}=7^{-2}$

iii) $5^{-2\alpha}\cdot5^{\alpha+8}=1$

iv) $\beta=\frac{\alpha}{x}$

β) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων Α, Β αξιοποιώντας τα x,y του προηγούμενου ερωτήματος.

$$A=2xy\sqrt{4y^2}\qquad B=\sqrt{\frac{16x}{49y^3}}$$

8) α) Έστω

$$x=\left(-6\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}\cdot\frac{\sqrt{0,16}}{0,2}\right):\sqrt{25}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=(2x-4)\cdot2^{\chi}-3\cdot3^{-\chi}-(x+7)\cdot x+x^2$$

β) Αν y ο αντίστροφος του x να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

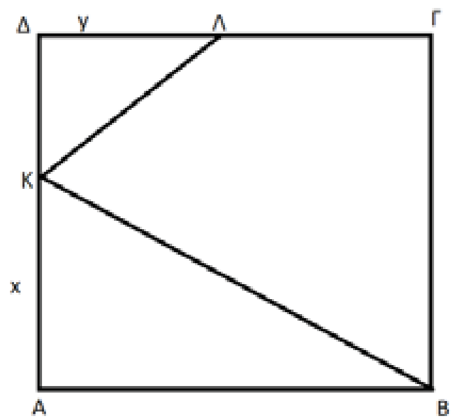
$$B=\sqrt{x^3y^4\sqrt{x^{19}y^{17}}}+\sqrt{y^2\sqrt{x^{24}y^{20}}}$$

$$\Gamma=\frac{\sqrt{B}^2-\sqrt{2-A}}{\sqrt{|A+B+x|}}$$

9) Στο παρακάτω τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α=4cm, ΔΛ=y και ΚΑ=x όπως φαίνεται στο σχήμα ισχύουν

(ΑΚΒ) = $\frac{3}{8}$ (ΑΒΓΔ), (ΚΔΛ)= $\frac{1}{6}$ (ΚΑΒ).

Να βρείτε τα x, y



Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών – Πυθαγόρειο Θεώρημα

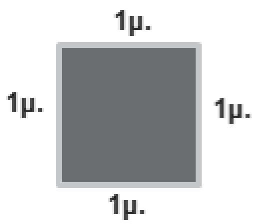
Στυλιανός Μαραγκάκης – Ανδρέας Τριανταφύλλου

Εμβαδό ενός επίπεδου σχήματος είναι ο αριθμός που εκφράζει το αποτέλεσμα της σύγκρισής του με ένα άλλο επίπεδο σχήμα το οποίο θεωρούμε **μονάδα μέτρησης**.

Μονάδες μέτρησης επιφανειών

Για να μετρήσουμε επιφάνειες χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το **τετραγωνικό μέτρο** (τ.μ.).

Μπορούμε να φανταστούμε το τ.μ. σαν μια επιφάνεια με σχήμα τετραγώνου που έχει πλευρά 1 μέτρο.

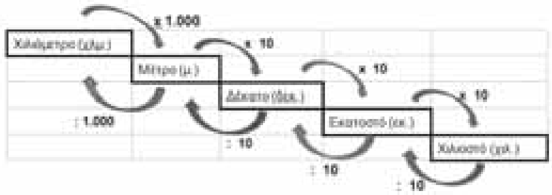


Όπως συμβαίνει με όλες τις μονάδες, έτσι και για τη μέτρηση επιφανειών χρησιμοποιούμε μια μονάδα μέτρησης ανάλογη με το μέγεθος της επιφάνειας που θέλουμε να μετρήσουμε.

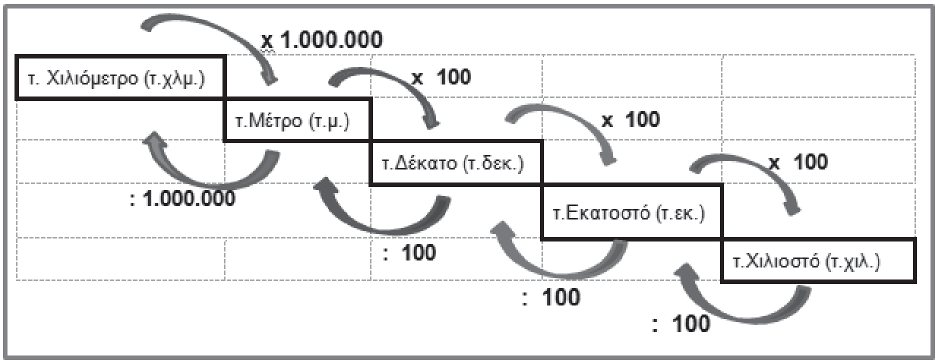
π.χ. για να μετρήσουμε την επιφάνεια ενός σπιτιού χρησιμοποιούμε το τ.μ., για να μετρήσουμε ένα κομμάτι ύφασμα ή το θρανίο μας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τ.δεκ., τ.εκ. κ.λπ.

Υποδιαιρέσεις και πολλαπλάσια του τ.μ.

Επειδή για τη μέτρηση μήκους χρησιμοποιούμε τις μονάδες



Για τη μέτρηση επιφανειών χρησιμοποιούμε τις μονάδες



Μεγαλύτερη μονάδα μέτρησης του τετραγωνικού μέτρου είναι το στρέμμα και το τετραγωνικό χιλιόμετρο (τ.χμ).
Το στρέμμα (στρ)=1.000 τ. μ.
Το τετραγωνικό χιλιόμετρο (τ. χμ.)= 1.000.000 τ. μ.

Για να κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις επιφάνειας, πρέπει οι μετρήσεις να εκφράζονται στην ίδια υποδιαίρεση ή πολλαπλάσιο του μέτρου, δηλαδή στην ίδια μονάδα μέτρησης μήκους και με αριθμούς της ίδιας μορφής.

Π. χ. $2\text{τ.μ. και } 5\text{τ.δεκ.} + 1\frac{15}{100}\text{τ.μ.} = 2\frac{5}{100}\text{τ.μ.} + 1\frac{15}{100}\text{τ.μ.} = 3\frac{20}{100}\text{τ.μ. ή } 3{,}20\text{τ.μ.}$

Δραστηριότητες

1.Γράψε τους παρακάτω συμμιγείς αριθμούς ως δεκαδικούς και αντίστροφα:

3 τ. μ. 15 τ. δεκ. 5 τ.εκ = ... **3 τ. μ. 9 τ. εκ. = ...**

14 τ. μ. 5 τ. δεκ.= .... **15 τ. εκ. 5 τ. χιλ. = ...**

0,00576 τ. δεκ.= .... **5,089 τ. μ. = ...**

Λύση (ενδεικτικές)

3 τ. μ. 15 τ. δεκ. 5 τ.εκ = 3 τ.μ. + 15 : 100τ.μ. + 5 :10000τ.μ. = 3,1505τ.μ.
15 τ. εκ. 5 τ. χιλ. = 15τ.εκ. + 5 : 100τ.εκ. = 15,05 τ.εκ.
5,089 τ. μ. = 5 τ.μ. 8τ.δεκ 90τ.εκ

2. Βάλε το σύμβολο της ισότητας ή της ανισότητας που ταιριάζει:

2,6 τ. μ. .... 250 τ.δεκ. **0,05 τ. εκ. .... 50 τ. δεκ.** **0,0705 τ.μ. .... 705 τ. δεκ.**

5 τ. εκ. .... 500 τ.χιλ. **1,45 τ. μ. .... 1450 τ. εκ.** **250 τ. εκ. .... 25 τ. δεκ.**

Λύση (ενδεικτικές)

2,6 τ. μ. … 250 τ.δεκ. 2,6 τ. μ. … 250:100 τ.μ. άρα 2,6 τ. μ. > 2,5 τ.μ.
0,05 τ. εκ. … 50 τ. δεκ. 0,05 τ. εκ. … 50x100 τ.εκ. άρα 0,05 τ. εκ. < 5.000 τ.εκ.

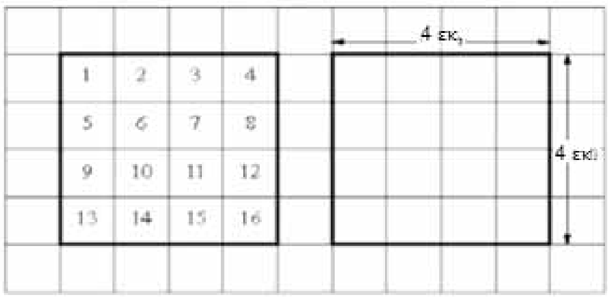
3. Να μετατρέψετε σε τ.εκ. τα παρακάτω μεγέθη:		
13 τ.μ.	**175 τ.δεκ.**	**456 τ.μ.**
136τ.μ.	**2 τ.χλμ.**	**1850 τ.χιλ.**

Λύση (ενδεικτικές)

13 τ.μ. = 13 x 10.000 τ.εκ = 130.000 τ.εκ.
456τ.μ. = 456 x 10.000 τ.εκ. = 4.560.000 τ.εκ.
2 τ.χλμ. = 2 x 10.000.000.000 τ.εκ. = 20.000.000.000τ.εκ.
1.850 τ.χιλ. = 1850 : 100 τ.εκ. = 18,5 τ.εκ.

Εμβαδά παραλληλογράμμων

Εμβαδόν τετραγώνου

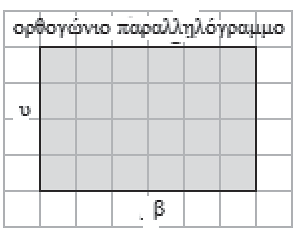


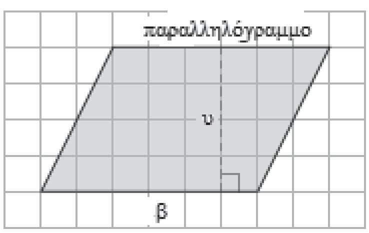
Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 4 εκ.. Μπορούμε να το χωρίσουμε σε 4 x 4 = 16 «τετραγωνάκια» πλευράς 1 εκ. καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 τ.εκ. Άρα, **το τετράγωνο έχει εμβαδόν 16τ.εκ.**

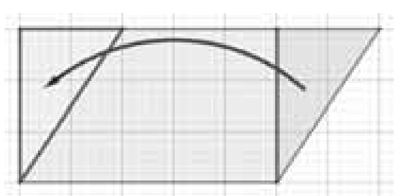
Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α είναι ίσο με α^2.

Εμβαδόν ορθ. παραλληλόγραμμου και εμβαδόν παραλληλόγραμμου

Το β αναπαριστά τη βάση και το υ το αντίστοιχο ύψος του σχήματος







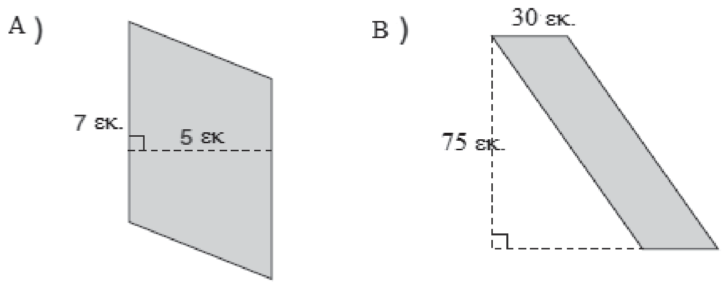
Εμβαδόν ορθογωνίου **Εμβαδόν παραλληλογράμμου**

Ε ορθογωνίου = $\beta \cdot \upsilon$ … **… Ε παραλληλογράμμου = $\beta \cdot \upsilon$**

Αν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος α και πλάτος β το εμβαδόν του είναι Εορθ.= α•β

Δραστηριότητες

Να υπολογίσετε το εμβαδόν των διπλανών παραλληλογράμμων

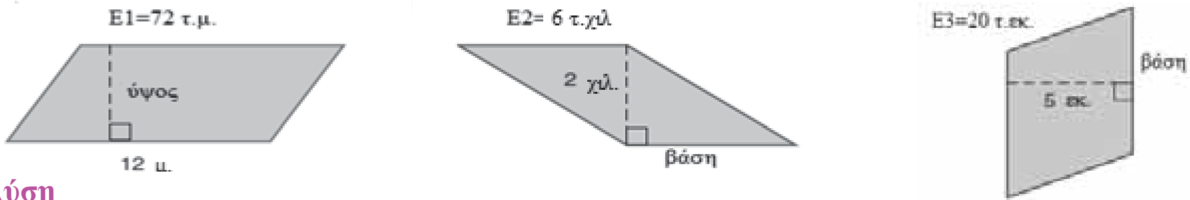


Λύση

A) Θεωρούμε ως βάση τη κατακόρυφη εκ., οπότε το αντίστοιχο σε αυτή ύψος είναι 5 εκ.
Ε ορθογωνίου = 7 εκ. x 5 εκ. =**35 τ.εκ.**

B) Στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρά των 7 πλευρές είναι ίσες. Οπότε η κάτω πλευρά του παραλληλόγραμμου είναι 30εκ. και το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή 75εκ.
Ε ορθογωνίου = 30 εκ. x 75 εκ. =**2.250 τ.εκ.**

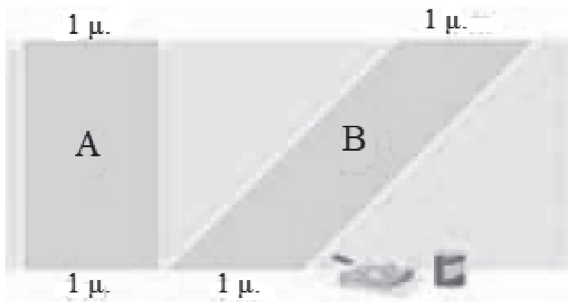
Να υπολογίσετε το ύψος ή τη βάση των παρακάτω παραλληλογράμμων



Λύση

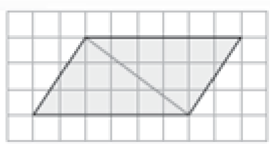
Επαραλ/γράμμου = β•υ Άρα 72τ.μ. = 12μ.•ύψος οπότε $\upsilon = \frac{72}{12} = 6\mu.$	Επαραλ/γράμμου = β•υ Άρα 6 τ.χιλ.. = βάση• 2χιλ. οπότε $\beta = \frac{6}{2} = 3\,\chi\iota\lambda.$	Επαραλ/γράμμου = β•υ Άρα 20τ.εκ. = βάση.• 5εκ. Οπότε $\beta = \frac{20}{5} = 4\,\varepsilon\kappa..$

Η Μαρία αγόρασε χρώματα για να ζωγραφίσει στον τοίχο του δωματίου της σχέδια. Ισχυρίζεται ότι για το σχέδιο Β χρειάζεται περισσότερο χρώμα από το σχέδιο Α.
(Συμφωνώ/ Διαφωνώ)………………………..
Εξηγώ…………………………………………………
…………………………………………..
…………………………………………...………..

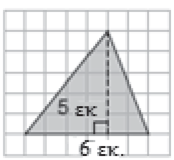


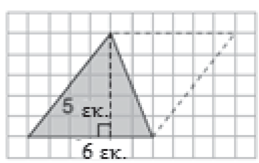
Εμβαδόν τριγώνου

Όταν σε ένα παραλληλόγραμμο φέρουμε μια διαγώνιό του, δημιουργούμε δυο ίσα τρίγωνα. Το εμβαδόν των δύο τριγώνων είναι το ίδιο με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου που τα περιέχει.



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός τριγώνου, από τα άκρα μιας πλευράς φέρνουμε παράλληλες προς τις άλλες 2 πλευρές του, σχηματίζοντας ένα





παραλληλόγραμμο που περιέχει το τρίγωνο.

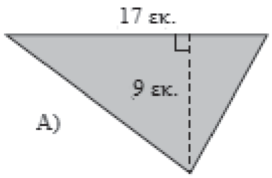
Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου είναι Ε = βάση • ύψος, δηλαδή Ε=6 •5 = 30τ.εκ.

Οπότε, το εμβαδόν του τριγώνου είναι το $\frac{1}{2}$ των 30τ.εκ. = 15τ.εκ.

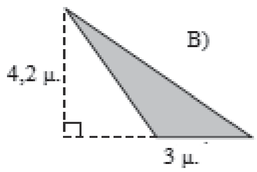
Άρα **Ετριγώνου** = $\frac{1}{2}$(βάση • ύψος)

Δραστηριότητες

Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων



Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο, το ύψος μπορεί να σχεδιαστεί έξω από το τρίγωνο.



Λύση

Αν η βάση του τριγώνου είναι η επάνω πλευρά του των 17εκ., τότε το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή είναι 9 εκ.

Άρα Ετριγ. = $\frac{1}{2}$(βάση • ύψος),

επομένως Ετριγ. = $\frac{1}{2}$(17εκ.• 9εκ.), δηλαδή

Ετριγ. = $\frac{1}{2}$(153τ.εκ) = 76,5 τ.εκ.

Αν η βάση του τριγώνου είναι η κάτω πλευρά του των 3 μ., τότε το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή είναι 4,2μ.

Άρα Ετριγ. = $\frac{1}{2}$(βάση • ύψος),

επομένως Ετριγ. = $\frac{1}{2}$(3μ.• 4,2μ.), δηλαδή

Ετριγ. = $\frac{1}{2}$(12,6τ.μ.) = 6,3 τ.μ.

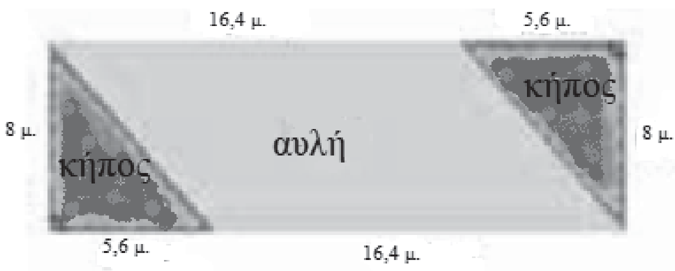
Ένα εστιατόριο διαμόρφωσε μια αυλή και 2 τριγωνικούς κήπους, στο πίσω μέρος του καταστήματος όπως στο σχήμα.

Να βρείτε:

Α) το εμβαδόν της αυλής

Β) το συνολικό εμβαδόν της αυλής και των κήπων

Γ) πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν των 2 κήπων;



Λύση

Α) Παρατηρούμε ότι η αυλή έχει σχήμα παραλληλόγραμμου με βάση 16,4μ. και ύψος 8μ. Οπότε Επαραλληλόγραμμου = β•υ = 16,4 • 8 = 131,2 τ.μ.

Β) Η επιφάνεια της αυλής με του 2 κήπους έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με βάση 16,4μ. +5,6μ. και ύψος 8μ.

Οπότε Εορθ. παραλληλόγραμμου = β•α = 22 • 8 = 176 τ.μ.

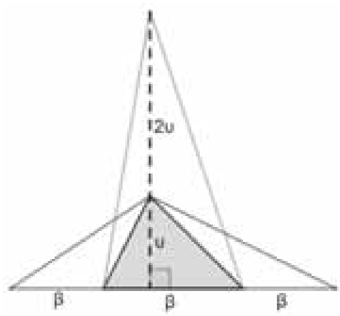
Γ) α. Επειδή ο κάθε κήπος είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5,6μ. και 8μ., θα έχουμε Ε κήπων = 2 •Ε κήπου = $2\cdot\frac{5,6\cdot 8}{2} = 44,8\tau.\mu.$

β. Αν από το συνολικό εμβαδόν αυλής και κήπων αφαιρέσουμε το εμβαδόν της αυλής θα έχουμε Εορθ. παραλληλόγραμμου – Ε παραλληλόγραμμου = 176 – 131,2 = 44,8 τ.μ.

Σχεδιάστε οποιοδήποτε τρίγωνο σε τετραγωνισμένο χαρτί

Α) Τι συμβαίνει με το εμβαδόν του τριγώνου σε κάθε περίπτωση;
i) όταν η βάση διπλασιάζεται
ii) όταν τόσο το ύψος όσο και η βάση διπλασιάζονται
iii) όταν τόσο το ύψος όσο και η βάση τριπλασιάζονται
Β) Τι θα μπορούσατε να κάνετε στο τρίγωνο που σχεδιάσατε για να τριπλασιάσετε το εμβαδόν του;

Λύση



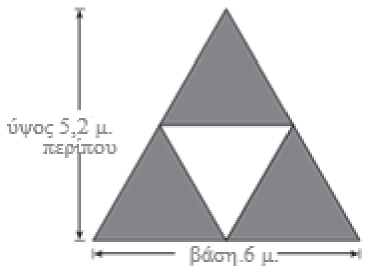
i) Επειδή **Ετριγ.** = $\frac{1}{2}$(β • υ), όταν η βάση διπλασιαστεί θα έχουμε

Ε΄τριγ. = $\frac{1}{2}$(2β • υ) = 2• $\frac{1}{2}$(β • υ) = 2•**Ετριγ.**, δηλαδή το εμβαδόν διπλασιάζεται.

ii) Ε΄τριγ. = $\frac{1}{2}$(2β • 2υ) = 4• $\frac{1}{2}$(β • υ) = 4•**Ετριγ.**, δηλαδή το εμβαδόν τετραπλασιάζεται.

iii) Ε΄τριγ. = $\frac{1}{2}$(3β • 3υ) = 9• $\frac{1}{2}$(β • υ) = 9•**Ετριγ.**, δηλαδή το εμβαδόν εννεαπλασιάζεται.

Β) θα μπορούσα να τριπλασιάσω το μήκος της βάσης του ή …………………… .



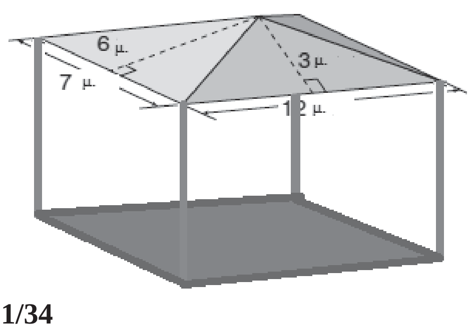
Το διπλανό τρίγωνο έχει μήκος βάσης 6 μ., ύψος περίπου 5,2 μ. και αποτελείται από 4 ίσα τρίγωνα.
Τρία από αυτά είναι βαμμένα πράσινα.
Α) Πόσο είναι το εμβαδόν που πρέπει να βαφτεί;
Β) Αν το χρώμα πωλείται σε δοχεία του 1 λίτρου και 1 λίτρο χρώμα καλύπτει 5,5 τ.μ., πόσα δοχεία χρώματος χρειάζονται για το βάψιμο όλου του τριγώνου;

Λύση

Α) Αφού το τρίγωνο αποτελείται από 4 ίσα μικρά τρίγωνα, το καθένα από αυτά θα έχει εμβαδόν το ¼ του μεγάλου, δηλ Ε μικρού τριγ. $=\frac{1}{4}\cdot\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\frac{\beta\cdot\upsilon}{8}$. Οπότε Ε μικρού τριγ. $=\frac{6\cdot5{,}2}{8}=3{,}9\tau.\mu.$, περίπου.

Β) το εμβαδόν όλου του τριγώνου είναι $=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\frac{6\cdot5{,}2\cdot}{2}=15{,}6\tau.\mu.$

Επομένως για το βάψιμο όλου το τριγώνου χρειάζονται 3 δοχεία χρώματος, αφού 3•5,5τ.μ.=16,5τ.μ.



Σε ένα τοπικό πάρκο υπάρχει ένα κιόσκι με στέγη σε σχήμα ορθογώνιας πυραμίδας, όπως στο σχήμα.
Α) Ποια είναι η συνολική επιφάνεια και των τεσσάρων τμημάτων της στέγης του;
Β) Αν ένα φύλλο κόντρα πλακέ έχει σχήμα ορθογώνιο 240 εκ. x 120 εκ., πόσα φύλλα θα χρειαστούν για να καλυφθεί η στέγη;

Λύση

Α) Το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας της στέγης, είναι διπλάσιο από το άθροισμα των εμβαδών των δύο τμημάτων που φαίνονται, οπότε:

$$\text{Ε} = 2(\text{Ε}(+ \text{Ε}2) = 2(\frac{7\cdot 6}{2} + \frac{12\cdot 3}{2}) = 2(21+18) = 78\tau.\mu.$$

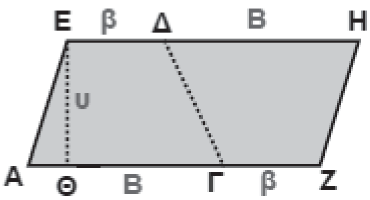
Β) Ένα φύλλο κόντρα πλακέ έχει εμβαδόν Ε΄= 240 εκ. x 120 εκ.=2,4μ. x 1,2μ.=2,88τ.μ.

Οπότε θα χρειαστούν $\frac{78}{2{,}88} = \frac{7800}{288} = 27{,}083 \cong 28$ φύλλα κόντρα πλακέ.

Εμβαδόν τραπεζίου

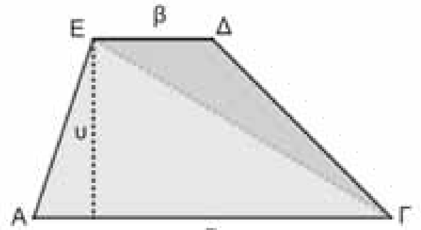
Έστω το τραπέζιο ΑΓΔΕ που έχει μεγάλη βάση ΑΓ = Β, μικρή βάση ΕΔ = β και ύψος ΕΘ = υ.

Α τρόπος: Θεωρώντας άλλο ένα ίσο τραπέζιο με το ΑΓΔΕ σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΖΗΕ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το παραλληλόγραμμο που σχηματίσαμε έχει βάση (Β + β) και ύψος υ. Επομένως: (ΑΖΗΕ) = (Β+β) • υ.



Άρα **Εμβαδόν τραπεζίου** = $\frac{(\text{Β}+\beta)\cdot\upsilon}{2}$.

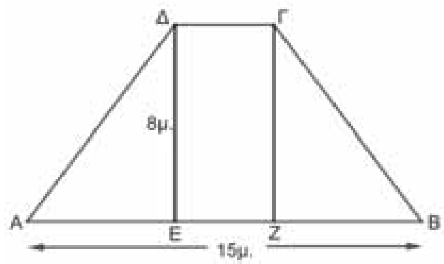
Β τρόπος: Φέρνοντας τη διαγώνιο ΓΕ του τραπεζίου, αυτό χωρίζεται σε 2 τρίγωνα.



Οπότε $(\text{ΑΓΔΕ}) = (\text{ΑΓΕ}) + (\text{ΕΓΔ}) = \frac{\text{Β}\cdot\upsilon}{2} + \frac{\beta\cdot\upsilon}{2} = \frac{(\text{Β}+\beta)\cdot\upsilon}{2}$

Ασκήσεις

Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, η μεγάλη βάση είναι ΑΒ=15μ. και το ύψος του είναι υ=8μ. Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου ΓΔΕΖ είναι 32τ.μ., να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου.



Λύση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΓΔΕΖ είναι 32τ.μ., οπότε ΕΖ•8μ.=32τ.μ., άρα ΕΖ=4μ.

Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές έχουμε ΑΕ=ΖΒ, οπότε ΑΒ=ΕΖ+2ΑΕ, δηλαδή 2ΑΕ=ΑΒ–ΕΖ και 2ΑΕ=15 – 4=11μ.. Άρα ΑΕ=ΖΒ=5,5μ.

Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε $\text{Ε}_{\text{ΑΒΓΔ}}=\text{Ε}_{\text{ΓΔΕΖ}}+\text{Ε}_{\text{ΑΕΔ}}+\text{Ε}_{\text{ΒΓΖ}}$,

$$\text{Ε}_{\text{ΑΒΓΔ}} = 15\cdot 8 + \frac{5{,}5\cdot 8}{2} + \frac{5{,}5\cdot 8}{2} = 90 + 22 + 22 = 134\tau.\mu.$$

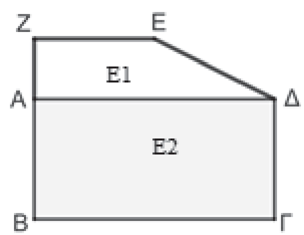
Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τραπεζίου, αν η μεγάλη βάση του είναι 6 δεκ. το ύψος του είναι υ=2 δεκ. και η μικρή βάση είναι τα δυο τρίτα της μεγάλης βάσης.

Λύση

Έχουμε Β=6 δεκ., υ=2 δεκ. και β=$\frac{2}{3}$Β, επομένως β=$\frac{2}{3}$6δεκ.= δεκ

Άρα $\text{Ε} = \frac{\text{Β}+\beta}{2}\upsilon = \frac{6+4}{2}\cdot 2 = 10\tau.\delta\varepsilon\kappa.$

Αν ΖΕ=30 εκ., ΒΓ=100 εκ., ΑΒ=40 εκ. και ΑΖ=30 εκ., να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού σχήματος σε τετραγωνικά δέκατα.



Λύση

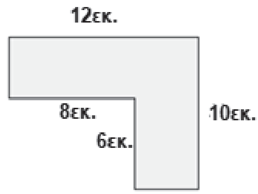
Έχουμε Ε=Ε2+Ε1

Το Ε1 είναι ορθογώνιο, άρα Ε1= 100εκ.•40εκ.=4.000τ.εκ.

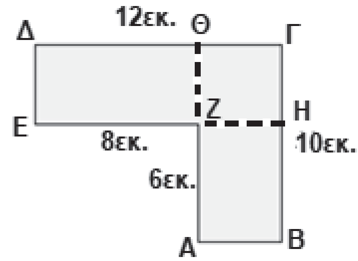
Το Ε2 είναι ορθογώνιο τραπέζιο, άρα

$$E2 = \frac{100\varepsilon\kappa. + 35\varepsilon\kappa.}{2} \cdot 30\varepsilon\kappa. = 135\varepsilon\kappa. \cdot 15\varepsilon\kappa. = 2.025\tau.\varepsilon\kappa. = 2.025 : 100\tau.\delta\varepsilon\kappa. = 20{,}25\tau.\delta\varepsilon\kappa.$$

Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος



Λύση



Φέρνουμε τις διακεκομμένες γραμμές, προεκτάσεις των πλευρών στο εσωτερικό του σχήματος

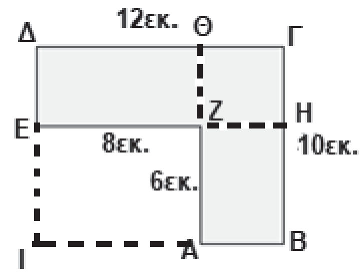
Παρατηρούμε ότι τα σχήματα ΑΒΓΘ και ΕΗΓΔ είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Επομένως ΑΒ=ΘΓ και ΘΓ=ΔΓ–ΔΘ=ΔΓ–ΕΖ,

οπότε ΑΒ= 12εκ. –8εκ. =4εκ.

Όμοια ΔΕ=ΓΗ=ΒΓ–ΒΗ=ΒΓ–ΑΖ=10εκ.–6εκ.=4εκ.

Οπότε η περίμετρος του σχήματος ΑΒΓΔΕΖ είναι 4εκ.+10εκ.+12εκ.+4εκ+8εκ.+6εκ.= 44εκ.



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του σχήματος χρειάζεται να το χωρίσουμε σε γνωστού εμβαδού σχήματα:

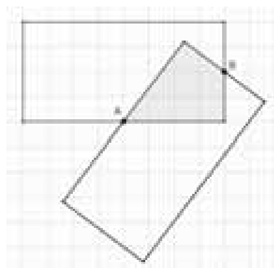
Α) $E_{ΑΒΓΔΕΖ}=E_{ΑΒΗΖ} + E_{ΓΔΕΗ}$ ή $E_{ΑΒΓΔΕΖ}=E_{ΑΒΓΘ} + E_{ΔΕΖΘ}$

Β) $E_{ΑΒΓΔΕΖ}=E_{ΑΒΗΖ} + E_{ΓΘΖΗ} + E_{ΔΕΖΘ}$

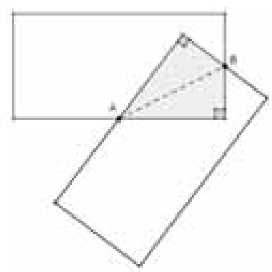
Γ) $E_{ΑΒΓΔΕΖ}=E_{ΙΒΓΔ} – E_{ΙΑΖΕ}$

....

Το διπλανό σχήμα κατασκευάστηκε από δύο ίδια ορθογώνια. Το μήκος κάθε ορθογώνιου είναι 0,2 μ. και το πλάτος του 10εκ.. Τα Α και Β είναι τα σημεία στα μέσα των πλευρών των ορθογωνίων.
Πόση είναι η περίμετρος και το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος;
Πόση είναι η περίμετρος όλου του σχήματος; (εξωτερικά;)
Πόσο είναι το εμβαδόν όλου του σχήματος; (η επικάλυψη στο σκιασμένο σχήμα δε υπολογίζεται)



Λύση



Τα Α και Β είναι τα σημεία στα μέσα των πλευρών των ορθογωνίων, οπότε χωρίζουν τις πλευρές σε δύο τμήματα των 10εκ. και 5εκ. αντίστοιχα.

Επομένως η περίμετρος του σκιασμένου σχήματος είναι 2x10+2x5=30εκ.

Το σκιασμένο σχήμα αν φέρουμε το τμήμα ΑΒ χωρίζεται σε δυο ίσα τρίγωνα.

Το κάθε τρίγωνο από αυτά έχει τις κάθετες πλευρές του 10εκ. και 5εκ., επομένως, αφού το εμβαδόν καθενός τους είναι (10x 5)/2=25τ.εκ. το σκιασμένο σχήμα έχει εμβαδόν 50τ.εκ.

Η περίμετρος όλου του σχήματος είναι ίση με την περίμετρο των 2 ορθογώνιων μείον την περίμετρο του σκιασμένου σχήματος, δηλαδή 2x[2x(20εκ.+10εκ.)]– 30εκ. =120εκ.–30εκ. = 90εκ. Το εμβαδόν όλου του σχήματος είναι ίσο με το εμβαδόν των 2 ορθογώνιων μείον το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.

Δηλαδή 2 x[20εκ.x10εκ.]–50τ.εκ. = 400τ.εκ. – 50τ.εκ. =350τ.εκ.

Η Παραγοντοποίηση Αλγεβρικής Παράστασης και εφαρμογές της

Αρδαβάνη Καλλιόπη - Μάλλιαρης Χρήστος

Ας δούμε μερικούς τρόπους παραγοντοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης και στη συνέχεια που μπορεί να την εφαρμόσουμε και γιατί.

Α. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. **Εφαρμόζω την επιμεριστική ιδιότητα:** $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta+\gamma)$ παίρνοντας κοινό παράγοντα από ΟΛΟΥΣ τους όρους

$$x^2\cdot y-x\cdot y^2+x\cdot y=x\cdot y\cdot(x-y+1)$$
$$3\cdot\alpha^2\cdot\beta^2-6\cdot\alpha^3\cdot\beta^3=3\cdot\alpha^2\cdot\beta^2\cdot(1-2\cdot\alpha\cdot\beta)$$

2. **Ομαδοποίηση:** Παίρνω τον κοινό παράγοντα αφού χωρίσω τους όρους της παράστασης σε ομάδες. Δοκιμάζω όλες τις περιπτώσεις ($1^{ος}-2^{ος}$ ή $1^{ος}-3^{ος}$ ή $1^{ος}-4^{ος}$). Μερικές φορές ο κοινός παράγοντας βγαίνει από έναν μόνο συνδυασμό.
   - $\alpha\cdot x+\alpha\cdot y-\beta\cdot x-\beta\cdot y=\alpha\cdot(x+y)-\beta\cdot(x+y)=$
     $=(x+y)\cdot(\alpha-\beta)$ ($1^{ος}-2^{ος}$)

   ή
   - $\alpha\cdot x+\alpha\cdot y-\beta\cdot x-\beta\cdot y=x\cdot(\alpha-\beta)+y\cdot(\alpha-\beta)=$
     $=(\alpha-\beta)\cdot(x+y)$ ($1^{ος}-3^{ος}$)

   Προσοχή: $-\alpha+\beta=-(\alpha-\beta)$ και $-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)$
3. **Ταυτότητα:** Μπορεί ΟΛΗ η παράσταση να είναι μια ταυτότητα:
   - $9\cdot x^2-4=(3\cdot x)^2-2^2=(3\cdot x-2)\cdot(3\cdot x+2)$
     $4\cdot x^2+12\cdot x+9=(2\cdot x)^2+2\cdot(2\cdot x)\cdot 3+3^2=(2\cdot x+3)^2$
4. **Τριώνυμο:** Η παράσταση μπορεί να είναι τριώνυμο της μορφής
   - $x^2+(\alpha+\beta)\cdot x+\alpha\cdot\beta=(x+\alpha)\cdot(x+\beta)$
   - $x^2+7\cdot x+6=x^2+(6+1)\cdot x+6\cdot 1=(x+1)\cdot(x+6)$
   - $x^2+x-12=x^2+[4+(-3)]\cdot x+4\cdot(-3)=(x+4)\cdot(x-3)$
5. **Διάσπαση:** Διασπώ έναν όρο σε άθροισμα ή διαφορά των άλλων δύο και συνεχίζω με ομαδοποίηση.
   - $x^2+7\cdot x+6=x^2+x+6\cdot x+6=x\cdot(x+1)+6\cdot(x+1)=$
     $=(x+1)\cdot(x+6)$
6. **Συνδυασμός:** Μπορεί να έχω συνδυασμό ομάδων και ταυτοτήτων.
   - $x^2+\alpha^2-\beta^2-2\cdot\alpha\cdot x=(x^2-2\cdot\alpha\cdot x+\alpha^2)-\beta^2$
     $=(x-\alpha)^2-\beta^2=(x-\alpha-\beta)\cdot(x-\alpha+\beta)$.
   - $x^2+y^2-2\cdot x\cdot y-\alpha^2-\beta^2-2\cdot\alpha\cdot\beta$
     $=(x^2+y^2-2\cdot x\cdot y)-(\alpha^2+\beta^2+2\cdot\alpha\cdot\beta)$
     $=(x-y)^2-(\alpha+\beta)^2=(x-y+\alpha+\beta)\cdot(x-y-\alpha-\beta)$.
7. **Προσθαφαίρεση:** Προσθέτω και αφαιρώ μια κατάλληλη ποσότητα και συνεχίζω με συνδυασμό ομάδων και ταυτοτήτων.

   $4\cdot x^4+y^4-13\cdot x^2\cdot y^2=$
   $=4\cdot x^4+y^4-4\cdot x^2\cdot y^2+4\cdot x^2\cdot y^2-13\cdot x^2\cdot y^2=$
   $=[(2\cdot x^2)^2+(y^2)^2-2\cdot(2\cdot x^2)\cdot y^2]-9\cdot x^2\cdot y^2=$

$= (2 \cdot x^2 - y^2)^2 - (3 \cdot x \cdot y)^2 =$
$= (2 \cdot x^2 - y^2 - 3 \cdot x \cdot y) \cdot (2 \cdot x^2 - y^2 + 3 \cdot x \cdot y)$

8. **Κάνω πράξεις:** Αν δεν βλέπω τίποτε από τα παραπάνω κάνω πράξεις και παραγοντοποιώ τη νέα μορφή της παράστασης.
    - $(x+1)^2 - 4 \cdot x - 25 = x^2 + 2 \cdot x + 1 - 4 \cdot x - 25 =$
      $= (x^2 - 2 \cdot x + 1) - 5^2 = (x-1)^2 - 5^2 =$
      $= (x - 1 - 5) \cdot (x - 1 + 5) = (x - 6) \cdot (x + 4)$

Μερικές λυμένες ασκήσεις:

- $2 \cdot x^4 + 50 + 20 \cdot x^2 = 2 \cdot (x^4 + 25 + 10 \cdot x^2) =$
  $= 2 \cdot [(x^2)^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x^2] = 2 \cdot (x^2 + 5)^2$
- ➢ Αν δεν έβγαζα κοινό παράγοντα το 2 δεν θα έβλεπα την ταυτότητα
- $(3 \cdot x - y)^2 - 6 \cdot (3 \cdot x - y) + 9 = (3 \cdot x - y - 3)^2$ **(γιατί;)**
- $x^4 + x^2 + \frac{1}{4} = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$
- $9 \cdot (2 \cdot y - 1)^2 - 25 \cdot (y - 2)^2 =$
  $= [3 \cdot (2 \cdot y - 1)]^2 - [5 \cdot (y - 2)]^2 =$
  $= [3 \cdot (2 \cdot y - 1) + 5 \cdot (y - 2)] \cdot [3 \cdot (2 \cdot y - 1) - 5 \cdot (y - 2)] =$
  $= (6 \cdot y - 3 + 5 \cdot y - 10) \cdot (6 \cdot y - 3 - 5 \cdot y + 10) =$
  $= (11 \cdot y - 13) \cdot (y + 7)$
- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$ **(γιατί;)**
- $(x^2 + 1)^2 - 4 \cdot x^2 = (x^2 + 1)^2 - (2 \cdot x)^2 =$
  $= (x^2 + 1 - 2 \cdot x) \cdot (x^2 + 1 + 2 \cdot x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$
- $3 - 2 \cdot \sqrt{2} = 2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$
- $x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x + 3 \cdot y - 4 = (x - y)^2 - 3 \cdot (x - y) - 4 =$
  $= (x - y)^2 + (-4 + 1) \cdot (x - y) + (-4) \cdot 1 =$
  $= (x - y - 4) \cdot (x - y + 1)$
- ➢ Παρατηρήσατε τη μορφή τριωνύμου; $\omega^2 + (-4+1)\omega + (-4)1 = (\omega - 4)(\omega + 1)$
- $x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x^2 = (x^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2} \cdot x\right)^2 =$
  $= \left(x^2 + 1 - \sqrt{2} \cdot x\right) \cdot \left(x^2 + 1 + \sqrt{2} \cdot x\right)$
- $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) =$
  $= (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$

Β. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. Κάνω πράξεις με το μυαλό μου:
    - $997^2 - 3^2 = (997 + 3) \cdot (997 - 3) = 1000 \cdot 994 = 994000$
2. Απλοποιώ μια παράσταση κλασματική: με $x \neq 0, -1, 1$
    - $\frac{(x+1)^2 - 4 \cdot x^2}{x - x^3} = \frac{(x+1)^2 - (2 \cdot x)^2}{x - x^3} = \frac{(x + 1 - 2 \cdot x) \cdot (x + 1 + 2 \cdot x)}{x \cdot (1 - x^2)} = \frac{(1 - x) \cdot (3x + 1)}{x \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)} = \frac{3 \cdot x + 1}{x \cdot (1 + x)}$
3. Βρίσκω το ΕΚΠ παραστάσεων:
    - ΕΚΠ $(x^2 - 4, x^2 + 4 \cdot x + 4) =$ ΕΚΠ $((x - 2) \cdot (x + 2), (x + 2)^2) =$
      $= (x - 2) \cdot (x + 2)^2$
4. Βρίσκω το ΜΚΔ παραστάσεων:
    - ΜΚΔ $(x^2 - 4, x^2 + 4 \cdot x + 4) =$ ΜΚΔ $((x - 2) \cdot (x + 2), (x + 2)^2) =$
      $= (x + 2)$

5. Προσθέτω κλασματικές παραστάσεις: με $x \neq 2,-2$
   - $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4\cdot x+4}=\frac{1}{(x+2)\cdot(x-2)}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{x+2}{(x+2)^2\cdot(x-2)}+\frac{x-2}{(x+2)^2\cdot(x-2)}=$
     $=\frac{x+2+x-2}{(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{x+x}{(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{2\cdot x}{(x+2)^2\cdot(x-2)}$
6. Πολλαπλασιάζω κλασματικές παραστάσεις: με $x \neq 2,-2,3$
   - $\frac{3\cdot x-9}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+4\cdot x+4}{(x-3)^2}=\frac{3\cdot(x-3)\cdot(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-3)^2}=\frac{3\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$
7. Λύνω εξισώσεις $2^{ου}$ αλλά και μεγαλύτερου βαθμού:
   - $(x^2-4)\cdot(x^2+4\cdot x+4)=0$ άρα $(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+2)^2=0$ άρα $(x-2)\cdot(x+2)^3=0$ οπότε $(x-2=0$ ή $x+2=0)$ άρα ($x=2$ ή $x=-2$ τριπλή ρίζα).
   - $x^2=9$ άρα $x^2-9=0$ οπότε $(x-3)\cdot(x+3)=0$ άρα ($x=3$ ή $x=-3$).
   - $x^3-4\cdot x=0$ άρα $x\cdot(x^2-4)=0$ οπότε $x\cdot(x-2)\cdot(x+2)=0$ άρα ($x=0$ ή $x=2$ ή $x=-2$)

Γ. Ένα πρόβλημα διαφορετικό…

Ο κύριος Κώστας είναι ο μανάβης της γειτονιάς μου και επειδή δεν έχει ζυγαριά, πουλάει τα φρούτα του με τον εξής κανόνα:
Για κάθε σύμφωνο που έχει το όνομα του φρούτου που επιλέγει ο πελάτης θα πληρώσει y λεπτά του ευρώ, ενώ για κάθε φωνήεν που έχει το όνομα του φρούτου που επιλέγει ο πελάτης θα πληρώσει x λεπτά του ευρώ.
Αν για ένα ροδάκινο ο πελάτης πληρώνει 28 λεπτά του ευρώ, πόσα χρήματα θα πληρώσει ένας πελάτης που θέλει να αγοράσει ένα αχλάδι, ένα μήλο, ένα ροδάκινο και ένα πεπόνι;
(Απ: 84 λεπτά του ευρώ)
Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί πρόταση του συνάδελφου Ευθυμιόπουλου Παναγιώτη.

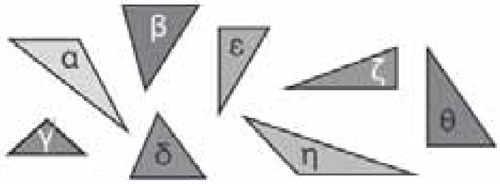
Δ. Ένας γρίφος…

Σε μία παρέα παιδιών Γυμνασίου, Ο Γιώργος, μαθητής Λυκείου κάνει ¨μαγικά¨. Βρίσκει γρήγορα αποτελέσματα πράξεων και μάλιστα πιο γρήγορα από τα κουμπιουτεράκια των μικρών μαθητών. Για παράδειγμα λέει:

- $1003^2-3^2=1006000$
- $992^2-8^2=984000$
- $87^2-13^2=7400$
- $850^2+2\cdot 850\cdot 150+150^2=1000000$
- ……….

Όλοι τον αποκαλούν ¨μάγο¨ μέχρι που ένας μαθητής της Γ΄ τάξης Γυμνασίου λέει *βρήκα το κόλπο του Γιώργου*, μπορώ κι εγώ τώρα να γίνω ¨μάγος¨. *Εσείς το βρήκατε*;

Ίσα Τρίγωνα



Σίσκου Μαρία

Αν δυο τρίγωνα είναι ίσα τότε και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.
Πότε όμως είναι ίσα δυο τρίγωνα;
Για να ορίσουμε ότι δύο τρίγωνα ως ίσα αρκεί να ισχύει ένα από τα παρακάτω κριτήρια.

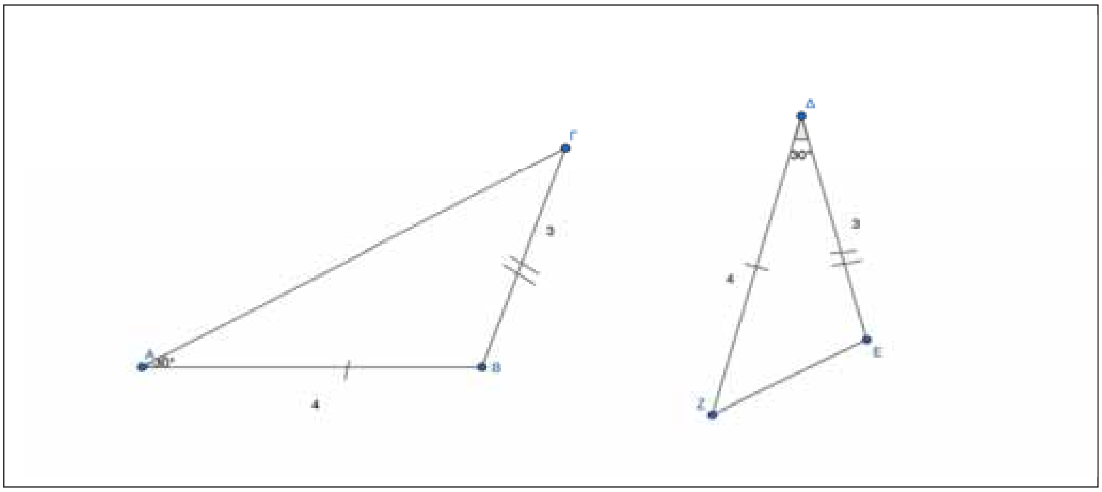
- **Κριτήρια ισότητας τριγώνων.**

Π-Γ-Π	Γ-Π-Γ	Π-Π-Π
• Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία και την περιεχόμενη σ΄αυτές γωνία ίση.	• Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ΄αυτή γωνίες ίσες μια προς μία.	• Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω κριτήρια ας ελέγξουμε μαζί μερικά τρίγωνα για να διαπιστώσουμε αν είναι ίσα ή όχι. Για την ακρίβεια ας δούμε μαζί κάποιες περιπτώσεις που τα τρίγωνα δεν είναι ίσα ή εάν είναι, ένας μαθητής θα μπορούσε να κάνει λάθος.

- **Περίπτωση 1η.**

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ΑΒ=ΔΖ, ΒΓ=ΔΕ και Α=Δ=30. Είναι ίσα τα τρίγωνα;



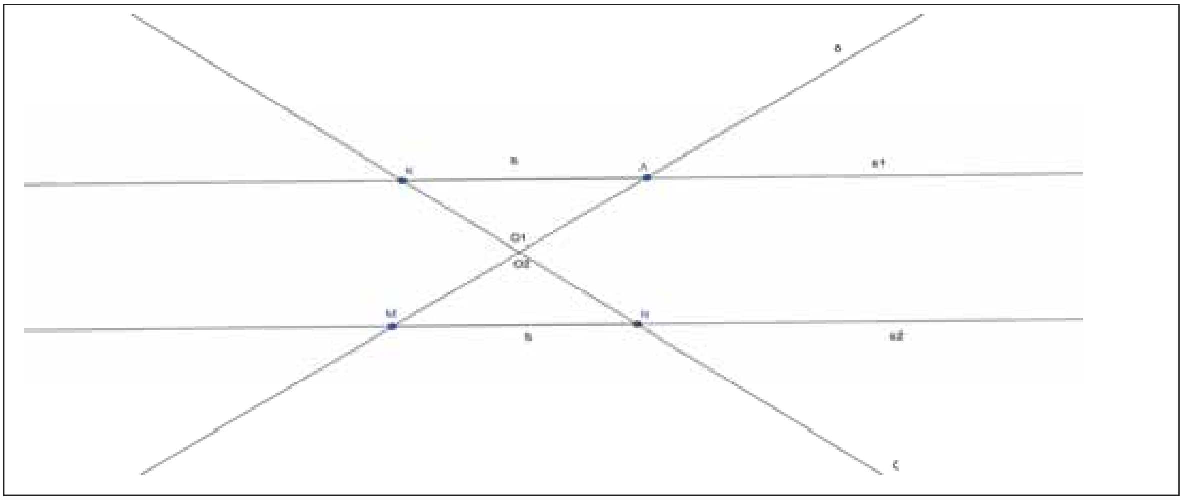
Διαβάζοντας κάποιος τα δεδομένα χωρίς να δει το σχήμα μπορεί εύκολα να κάνει το λάθος και να θεωρήσει πως τα τρίγωνα είναι ίσα. Σχεδιάζοντας όμως τα δύο τρίγωνα εύκολα θα διαπιστώσει πως τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα εφόσον το ένα είναι αμβλυγώνιο και το άλλο είναι οξυγώνιο.

Μπορείτε να βρείτε γιατί εφόσον τα τρίγωνα έχουν ίσες δυο πλευρές και μια γωνία παρόλα αυτά δεν είναι ίσα;

Η απάντηση είναι απλή. Διότι η γωνία που έχουν τα τρίγωνα ίση δεν είναι η περιεχόμενη στις ίσες πλευρές.

- **Περίπτωση $2^{η}$.**

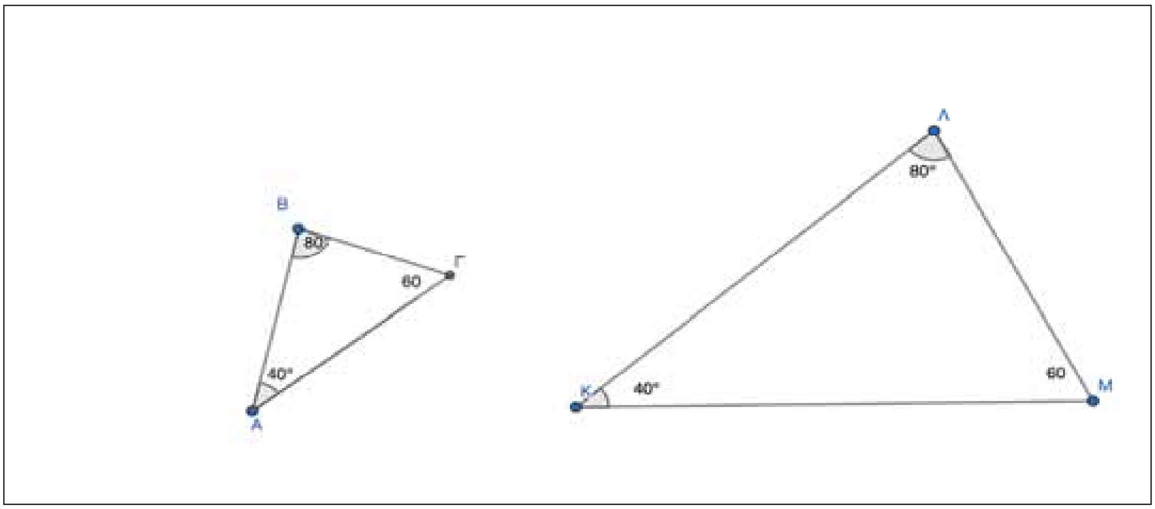
Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $ε_1//ε_2$ οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες δ και ζ. Αν ΚΛ=ΜΝ=5 και $Ο_1$=$Ο_2$=100 είναι τα τρίγωνα ΚΛΟ και ΜΝΟ ίσα;



Τα τρίγωνα είναι ίσα διότι Κ=Ν , Μ=Λ ως εντός εναλλάξ ($ε_1//ε_2$) και ΚΛ=ΜΝ. Οπότε σύμφωνα με το δεύτερο κριτήριο έχουν ίσες μια πλευρά και τις προσκείμενες σ’ αυτή γωνίες ίσες , αντίστοιχα. Προσοχή, θα ήταν λάθος να πούμε Κ=Λ, $Ο_1$=$Ο_2$ και ΚΛ=ΜΝ γιατί οι $Ο_1$, $Ο_2$ γωνίες δεν πρόσκεινται στις ΚΛ και ΜΝ.

- **Περίπτωση $3^{η}$.**

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν Α=Κ=40, Β=Λ=80 και Γ=Μ= 60. Είπαμε παραπάνω ότι δύο τρίγωνα που είναι ίσα έχουν ίσα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους. Έτσι έχουν ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Εφόσον αυτά τα τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες θα είναι ίσα;



Είναι εύκολα αντιληπτό ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα. Για την ακρίβεια το ΚΛΜ είναι η μεγέθυνση του ΑΒΓ. Άρα να τονίσουμε εδώ ότι δυο τρίγωνα όταν έχουν όλες τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες θα είναι ίσα αλλά δεν είναι ίσα όταν έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες.

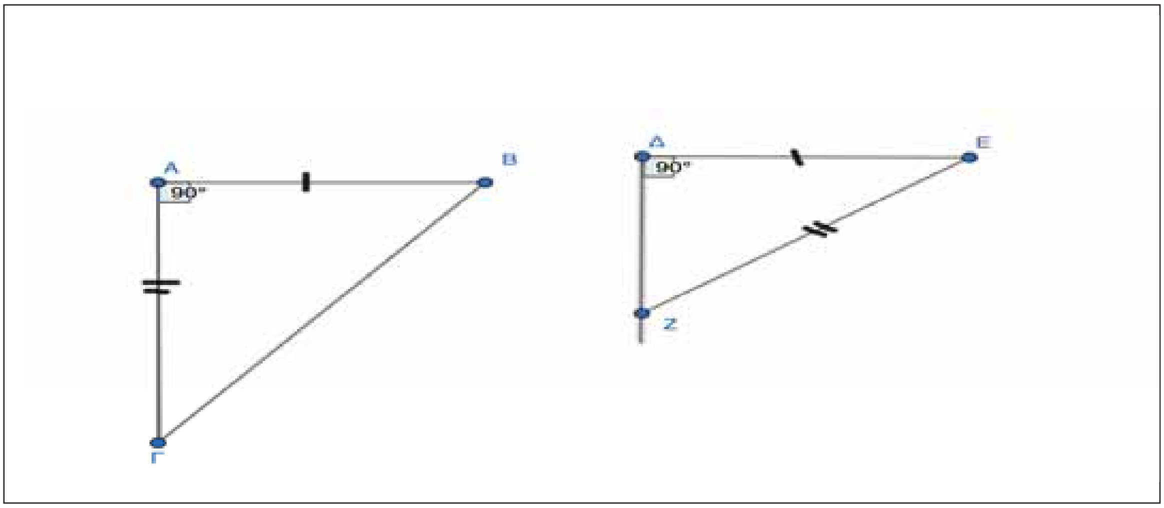
Μια ειδική κατηγορία για την ισότητα τριγώνων αποτελούν τα ορθογώνια τρίγωνα. Ο λόγος είναι ότι εφόσον έχουν ήδη την ορθή γωνία ίση αρκούν άλλα δύο στοιχεία για να ορίσουμε δύο τρίγωνα ίσα.

- **Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.**

π-π	π-γ
• Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες.	• Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν πλευρα και μια οξεία γωνία ίσες μια προς μία.

- **Περίπτωση 1η.**

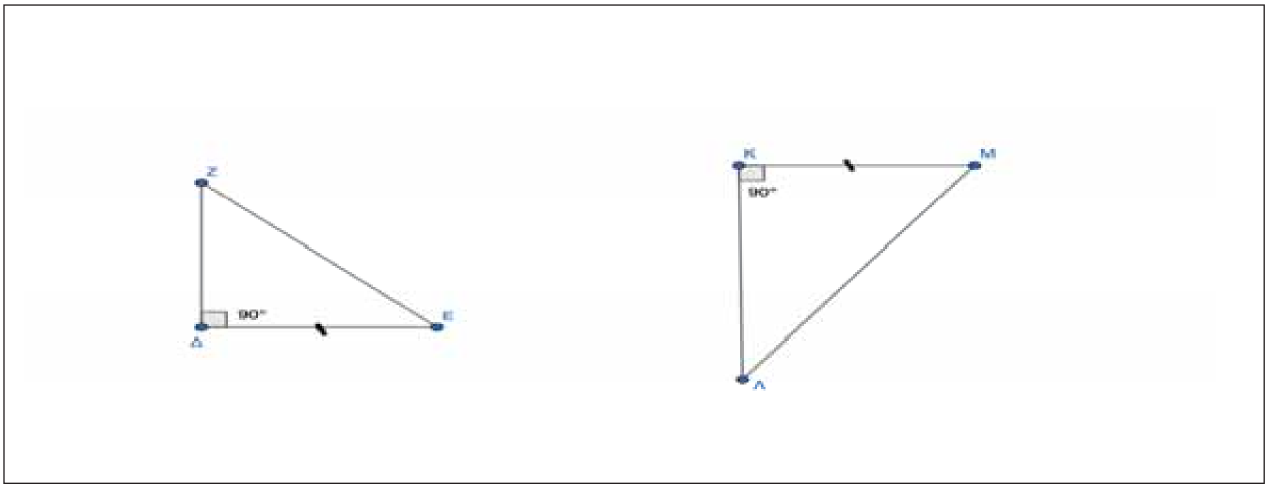
Τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα έχουν ΑΒ=ΔΕ και ΑΓ=ΕΖ. Είναι ίσα τα τρίγωνα;



Τα τρίγωνα δεν είναι ίσα διότι δεν έχουν τις αντίστοιχες πλευρές ίσες. Έχουν την υποτείνουσα ίση με μια κάθετη πλευρά.

- **Περίπτωση 2η.**

Τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα έχουν ΔΕ=ΚΛ και Δ=Κ=90. Είναι ίσα τα τρίγωνα;



Τα τρίγωνα δεν είναι ίσα γιατί η γωνία που είναι ίση είναι η ορθή γωνία. Έτσι είναι ορθογώνια ουσιαστικά και έχουν μόνο μια πλευρά ίση. Δεν έχουν και μια οξεία γωνία που χρειάζεται για να είναι ίσα.

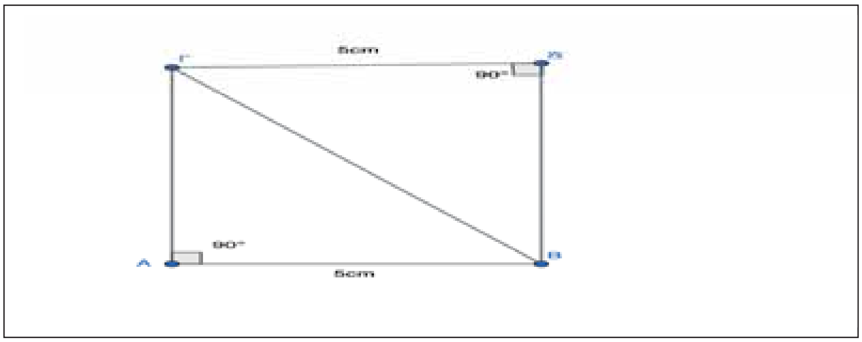
Εφαρμογές-Ασκήσεις:

1) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ.
Να σχεδιάσετε το σχήμα και να αποδείξετε ότι:
(a) Οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.
(b) Οι διχοτόμοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες.
(c) Τα ύψη ΒΗ και ΓΘ είναι ίσα.

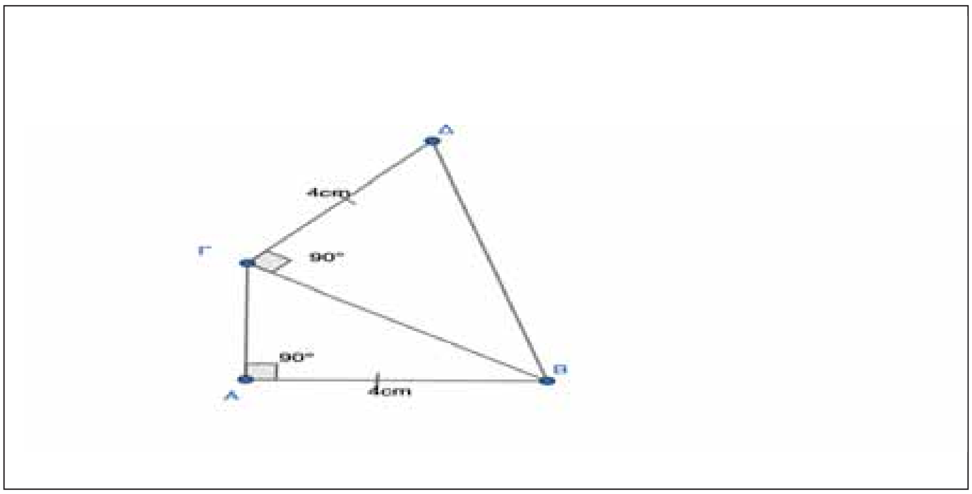
2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ=4 cmκαι Μ μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ κατά 2cm. (ΒΒ΄=ΓΓ΄=2cm)
(i) Να σχεδιάσετε τα σχήμα.
(ii)Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΒ΄ και ΑΜΓ΄.
(iii)Να συγκρίνετε τα τμήματα ΜΒ΄ και ΜΓ΄.

3) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΒΓ κατά ΒΔ=ΓΖ=ΑΒ.
(a) Να σχεδιάσετε το σχήμα και να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΖ
(b) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΖ
(c) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

4) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.



5) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ .Είναι ίσα αυτά τα τρίγωνα;



Το μηδέν:

το τίποτε που δίνει αξία στα πάντα.

Φώτης Κουνάδης

Μηδέν = **μηδὲ** + **ἕν** , δηλαδή ούτε ένα.

Αρχικά στα διάφορα συστήματα αρίθμησης υπήρχαν μόνο οι θετικοί αριθμοί. Οι αριθμοί δηλαδή που χρησίμευαν για να καταδεικνύουν το σύνολο των υλικών, των αγαθών άψυχων και ζωντανών που κατείχε ο άνθρωπος. Δεν υπήρχε επομένως η αναγκαιότητα της εισαγωγής του μηδενός, ενός αριθμού δηλαδή που δεν μπορεί να μετρήσει τίποτε από τα παραπάνω αφού εκφράζει μια ανύπαρκτη ποσότητα.

Δεν είναι καθόλου βέβαιο ποιοι ανακάλυψαν πρώτοι το μηδέν και το εισήγαγαν στο αριθμητικό τους σύστημα. Η ιδέα φαίνεται πάντως ότι ανήκει στους Ινδιάνους Μάγια, φυλή της κεντρικής Αμερικής που πριν συνθλιβούν από τους Ισπανούς κατακτητές είχαν αναπτύξει έναν αξιοζήλευτο πολιτισμό, με σημαντικές και καινοτόμες επιστημονικές, κατασκευαστικές και καλλιτεχνικές δραστηριότητες.

Οι Ινδιάνοι αυτοί προκειμένου να συγκρατούν τα αριθμητικά αποτελέσματα από τις συναλλαγές τους χρησιμοποιούσαν ένα σχοινί με το οποίο έκαναν διάφορους κόμπους. Η θέση αλλά και το χρώμα του κάθε κόμπου παρίστανε και έναν διαφορετικό αριθμό. Στη θέση που θα έπρεπε να τοποθετήσουν τον αριθμό που εμείς σήμερα ονομάζουμε μηδέν, άφηναν ένα κενό πάνω στο σχοινί.

Αλλά οι Μάγια δεν ταξίδευαν και έτσι δεν μπορούσαν να διαδώσουν τις όποιες ανακαλύψεις τους στον δυτικό κόσμο.

Ταξίδευαν όμως οι Άραβες. Έτσι περίπου το 780 μ.Χ. έχουμε από αυτούς την έννοια του μηδενός και στην Ευρώπη.

Το σύμβολο που στις μέρες μας αποτυπώνει αριθμητικά το μηδέν είναι το **0** που μοιάζει με κύκλο. Για την προέλευσή του υπάρχουν πολλές εκδοχές.

Κατά μία εκδοχή προέρχεται από το Ελληνικό γράμμα όμικρον (ο), αρχικό της λέξης *οὐδέν* που σημαίνει τίποτε.

Κατά μία δεύτερη εκδοχή το σημερινό σύμβολο είναι Ινδικής προέλευσης. Αυτή η θεωρία βασίζεται στο γεγονός ότι στο Βουδισμό συναντάμε την έννοια της απομάκρυνσης- απόρριψης των ανθρώπινων επιθυμιών και την αντικατάστασής τους από το απόλυτο κενό, όπου ο κύκλος (σχήμα στο οποίο δεν μπορούμε να καταλάβουμε ποια είναι η αρχή του και ποιο το τέλος του) που χρησιμοποιείται για το μηδέν, παριστάνει τον κύκλο της ζωής.

Μερικές ιδιότητες του μηδενός.

► Το μηδέν είναι συγχρόνως φυσικός, ακέραιος, ρητός και πραγματικός αριθμός.

► Το μηδέν θεωρείται άρτιος αφού ο επόμενός του που είναι το 1 είναι περιττός.

► Τα πρόσημα + ή – δεν αλλάζουν την αξία του αριθμού αφού $+0 = 0$ και $-0 = 0$.

► Στην *πρόσθεση* ισχύει η ιδιότητα $\alpha + 0 = \alpha$, δηλαδή το 0 όταν προστεθεί σε έναν αριθμό δεν τον μεταβάλλει και λέγεται *ουδέτερο στοιχείο* της πράξης.

► Στην *αφαίρεση* ισχύει η ιδιότητα $\alpha - \alpha = 0$, δηλαδή όταν αφαιρέσουμε έναν αριθμό από τον εαυτό του το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν.

► Στον *πολλαπλασιασμό* έχουμε την ιδιότητα $\alpha \cdot 0 = 0$, δηλαδή οποιοσδήποτε αριθμός όταν πολλαπλασιαστεί με μηδέν το αποτέλεσμα είναι μηδέν.

► Στη διαίρεση ισχύουν ότι:

$0 : \alpha = 0$,δηλαδή όταν ο διαιρετέος είναι 0 το πηλίκο είναι 0, ενώ

$\alpha : 0$, δεν ορίζεται.

(Άρα προκειμένου να εκτελέσουμε μια διαίρεση θα πρέπει ο *διαιρέτης να μην είναι μηδέν*).

► Στις δυνάμεις ισχύει ότι $\alpha^0=1$, με $\alpha \neq 0$, δηλαδή η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν ισούται με τη μονάδα.

► Οι πράξεις 0:0 και 0^0 δεν είναι επιτρεπτές και χαρακτηρίζονται ως απροσδιόριστες μορφές, αφού δε μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το αποτέλεσμα τους.

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

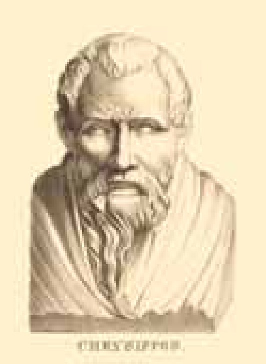
Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

> **Το ΝΑΙ και το ΟΧΙ αν και είναι οι πιο σύντομες από όλες τις λέξεις, χρειάζεται να τις σκεφτεί κανείς πολύ προηγουμένως.** **Πυθαγόρας**

«Πέθανα στα γέλια»,

μα μπορεί ο άνθρωπος να πεθάνει από τα γέλια;

Το γέλιο λένε ομορφαίνει και παρατείνει τη ζωή. Όμως ένας φιλόσοφος, Χρύσιππος ο Σολεύς λέγετε ότι πέθανε από τα γέλια. Πιθανόν να πέθανε από υπερβολή κατανάλωση κρασιού ή κάποια άλλη αιτία που δεν μπορούσαν να γνωρίζουν εκείνη την εποχή, είχε πει ο Διογένης ο Λαέρτιος. Πέθανε το 207 π.Χ. σε ηλικία 73 ετών.



Ο Χρύσιππος πέθανε γιατί άρχισε να γελά χωρίς σταματημό επειδή όπως έλεγαν ήταν μεθυσμένος και έδωσε κρασί σε ένα γαϊδουράκι το οποίο παραπατούσε και προσπαθούσε να σταθεί στα πόδια του μεθυσμένο και αυτό. Ο Χρύσιππος γεννήθηκε στην Κύπρο και καταγόταν από την Μικρά Ασία. Ήταν σπουδαίος φιλόσοφος και είχε μεγάλη φήμη στη διαλεκτική. Πίστευε ότι οι άνθρωποι πρέπει να έχουν αρετή και οφείλουν να συμμορφώνονται με τους νόμους της Λογικής. Ακόμα ότι για να είναι ευτυχισμένος ο άνθρωπος πρέπει να έχει απάθεια σε κάθε επιθυμία και στις εξωτερικές επιδράσεις.

Βιβλίο

Η ονομασία αυτή μάλλον προήλθε από την παραθαλάσσια πόλη **Βύβλο των Φοινίκων** που είχε εμπορικές σχέσεις με την Αίγυπτο και προμήθευε όλες τις χώρες με κατεργασμένο πάπυρο.

Τετράδιο

Στην αρχαιότητα την περγαμηνή και τον πάπυρο τα είχαν σε φύλλα ή σε κύλινδρο. Όταν χρησιμοποιούσαν φύλλα τα ένωναν και έτσι δημιουργούσαν ένα είδος βιβλίου που ονομαζόταν **Κώδικας** (Codex στα Λατινικά). Συνήθως είχαν τέσσερα δίφυλλα με ονομασία τετράς,(σήμερα τετράδιο). Το τετράδιο είχε οκτώ φύλλα και δεκαέξι σελίδες,(σημερινό 16σέλιδο).

Τα πρώτα βιβλία που τυπώθηκαν σε χαρτί

- Η **Βίβλος** που τύπωσε ο Γουτεμβέργιος σε 180 αντίτυπα το 1455.
- Τα «**Άπαντα**» **του Ομήρου το** 1488 **στη** Φλωρεντία.
- Η "**Γραμματική**" του Κωνσταντίνου Λάσκαρη, το 1476 στο Μιλάνο.
- Το 1825 **Εθνικός μας Ύμνος** , στα Ελληνικά και στα Ιταλικά.

Από την μαγεία των αριθμών

1/9=0,1111111111...
2/9=0,2222222222...
3/9=0,3333333333...
4/9=0,4444444444...
5/9=0,5555555555...
6/9=0,6666666666...
7/9=0,7777777777...
8/9=0,8888888888...

Περιοδικοί αριθμοί

1/7=0,142857142857...
2/7=0,285714285714...
3/7=0,428571428571...
4/7=0,571428571428...
5/7=0,714285714285...
6/7=0,857142857142...
1/11=0,09090909. . .
2/11=0,18181818 ...
3/11=0,27272727...
4/11=0,36363636...
1/13=0,07623076923 . . .
1/21= 0,047619

Ένα μαγικό αποτέλεσμα

Μετρήστε πόσα περιοδικά ψηφία έχει ένας αριθμός και κάνετε το εξής:
Γράψτε ένα κλάσμα με αριθμητή τόσες μονάδες όσα είναι τα περιοδικά ψηφία του αριθμού και παρονομαστή τον ίδιο που μας έδωσε τον περιοδικό αριθμό. Π.χ. Τι παρατηρείτε;
1/11=0,09090909. . .
Έχει δύο περιοδικά ψηφία άρα βάζω στον αριθμητή δύο μονάδες 11/11=1

Ο συνάδελφος **Αλέξανδρος Μόσχος** με αφορμή κάποιο βιβλίο γρίφων που διάβασε μας έστειλε γρίφους και την άποψή του για την αξία των διασκεδαστικών μαθηματικών και γρίφων αφού είναι το μέσο που μπορεί να μας φέρει κοντά στα μαθηματικά και να εξοικειωθούμε με αυτά χωρίς φόβο. Γράφει:

«Η χρήση των μαθηματικών σπαζοκεφαλιών, των διασκεδαστικών μαθηματικών και των μαθηματικών παιχνιδιών σπάνε την αυστηρότητα της μαθηματικής διδασκαλίας. Τα καθιστούν περισσότερο προσιτά , ευχάριστα , ελκυστικά στον μαθητή.
Αρκεί βέβαια αυτή η ενασχόληση να είναι εναρμονισμένη με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους και να προάγουν την μαθηματική κατανόηση. Πρόκειται για προβλήματα ασυνήθιστα που χρησιμοποιούν σκηνές από το ζωικό βασίλειο ή από την καθημερινή μας ζωή. Άλλοτε απλά είναι πρωτότυπα ή ακόμη κι όμορφα με συναρπαστικά εύκολες κι ευρηματικές λύσεις.»

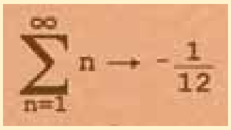
Ο συνάδελφος Αλέξανδρος Μόσχος μας έστειλε κάποιους από τους Γρίφους που έχουμε δημοσιεύσει παλαιότερα αλλά και πάλι κάποιοι θα δημοσιευθούν.

Γ Ρ Ι Φ Ο Ι

Πρώτοι αριθμοί

Γράψτε αριθμούς που να έχουν από μια φορά όλα τα ψηφία. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι; (δηλαδή διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα)

Το άθροισμα



Η Ελένη έγραψε έναν 5ψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είχαν άθροισμα 20. Ύστερα παίζοντας έγραψε με τα ίδια ψηφία όλους τους 5ψήφιους. Μήπως ξέρετε πιο είναι το άθροισμα όλων των αριθμών που έγραψε η Ελένη;

Το ελικόπτερο

Ένας πιλότος που θέλει να πάει στην Ιταλία σκέφτηκε ότι αφού η Γη περιστρέφεται από δυτικά στα Ανατολικά αν σηκωθεί ψηλά και περιμένει στάσιμος μέχρι να έρθει από κάτω του η Ιταλία τότε θα κατέβει χωρίς να ταξιδέψει. Συμφωνείτε;

Η παρέα των Πιθήκων

Μια παρέα πιθήκων διασκέδαζε. Από τη θορυβώδη παρέα το ένα όγδοο στο τετράγωνο χοροπηδούσε στο δάσος, οι υπόλοιποι 12 φώναζαν όλοι μαζί στην κορυφή του λόφου. Από πόσους πιθήκους αποτελείται αυτή συμπαθητική παρέα; (L.Rodet 1878)

Το Δώρο της γιαγιάς

Ο Αλέξανδρος στα γενέθλιά του πήρε δώρα. Όμως το δώρο της γιαγιάς ήταν χρήματα. Την άλλη μέρα πήγε στο σχολείο έδωσε 2€ να φάει κάτι στο κυλικείο. Στο σχόλασμα έδωσε τα μισά από αυτά που έμειναν για να αγοράσει ένα βιβλίο και 3€ για ένα παγωτό. Την άλλη μέρα έδωσε πάλι 2€ στο κυλικείο τα μισά από τα υπόλοιπα για ένα τετράδιο και με τα τελευταία 2€ πήρε ένα περιοδικό. Πόσα χρήματα ήταν το δώρο της γιαγιάς;

Οι Τουρίστες

Το καλοκαίρι, **σε ένα νησί του Αιγαίου που διαθέτη λιγότερα από** 200 **ξενοδοχεία**, **στις** 10 **Αυγούστου φιλοξενήθηκαν** 39.999 **τουρίστες**. Όλα τα ξενοδοχεία του νησιού τη βραδιά εκείνη είχαν τον ίδιο αριθμό τουριστών. Οι τουρίστες ενός ξενοδοχείου ήταν όλοι σε ένα σύλλογο αστρονόμων. Πήραν 4 πούλμαν και μέχρι αργά τη νύχτα πήγαν στην κορυφή του βουνού και παρατηρούσαν τα άστρα. Πόσα ήταν τα ξενοδοχεία και πόσους τουρίστες είχε το καθένα;

Οι πύργοι και η πηγή

Δύο πουλιά κάθονται στις κορυφές δύο πύργων που απέχουν μεταξύ τους 50 μέτρα, με 30 μέτρα ύψος ο Α και 40 μέτρα ύψος ο Β . Μεταξύ των πύργων υπάρχει μια μικρή πηγή. Τα πουλιά φεύγουν ταυτόχρονα με την ίδια ταχύτητα και φτάνουν ταυτόχρονα στην πηγή. Πόσα μέτρα απέχει η πηγή από κάθε πύργο; (*Το πρόβλημα του Λεονάρδου της Πίζας που πήρε από Άραβα*).

Το Γεράκι και ο ποντικός

Στη κορυφή ενός κυπαρισσιού με 15 μέτρα ύψος στέκεται ένα Γεράκι και στη ρίζα του έχει τη φωλιά του ένας ποντικός. Το Γεράκι βλέπει τον ποντικό να γυρνάει στη φωλιά του σε απόσταση 45 μέτρων από αυτή. Το Γεράκι του επιτίθεται και το πιάνει σε ένα σημείο που έχει την ίδια απόσταση από την κορυφή του δένδρου και από το σημείο που τον είδε το Γεράκι. Πόσο απέχει αυτό το σημείο από τη φωλιά του;

Απαντήσεις στους Γρίφους τεύχους 124

Τα πουλιά

Καναρίνια 6 επί 2/3 Ευρώ, Παπαγάλοι 6 επί 1/3 Ευρώ και Περιστέρια 18 επί 4/3 Ευρώ.
Το πρόβλημα έχει και άλλες λύσεις.

Το λάθος του ταμία

Αυτό το λάθος δείχνει ότι το ακέραιο μέρος της επιταγής είναι διψήφιο. Η επιταγή έγραφε 20,50 και ο ταμίας πλήρωσε 50,20 Ευρώ η Αργυρώ ξόδεψε 9,20 της έμειναν 41 Ευρώ που 41:2=20,50.

Αλλαγή χρημάτων

Ο ταμίας έδωσε 5 μονόευρα, 50 2ευρα και 19 5ευρα.

Μάντεψε τι νούμερο παπούτσια φοράει

Από τον 4ψήφιο αριθμό που σας είπε τα δύο πρώτα ψηφία είναι το νούμερο των παπουτσιών του και τα άλλα δύο η ηλικία του. π.χ. 5*43(νούμερο παπουτσιών)= 215, 215+50= 265, 265*20= 5300, 5300+1022= 6322, 6322-1995(χρονολογία γέννησης)= 4327
Ή αλλιώς (5*43+50)*20+1022-1995= 4327(δηλαδή, νούμερο παπούτσια 43, ηλικία 27).

Η σειρά των αριθμών

Αρκεί να φέρουμε το 23 μπροστά, 4567….212223 ή 234567….22.

Ο όγκος

Το οινόπνευμα είναι 0,633 λίτρα ενώ το λάδι 0,549 λίτρα.

Το μπουκάλι

Θα γεμίσει και θα περισσέψουν 168 γραμμάρια.

Ο αριθμός

Είναι ο δεκαδικός αριθμός 5,6.

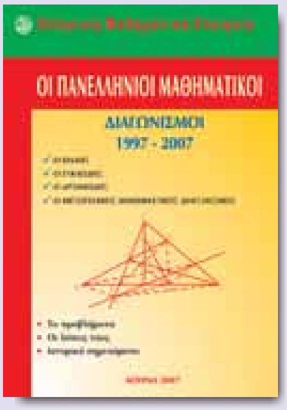
Βλέπω τον κύβο

Ζητάμε δηλαδή να βρούμε μια θέση από την οποία βλέπουμε όσο το δυνατό περισσότερες πλευρές του κύβου. Από εξωτερικό σημείο βλέπουμε μέχρι τρείς, από σημείο στο εσωτερικό του κύβου βλέπουμε και τις έξι.

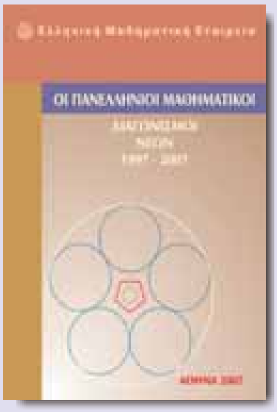
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές



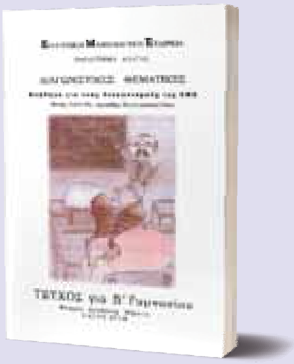
Νέα τιμή βιβλίου: 15€



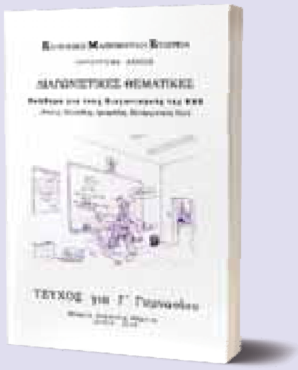
Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

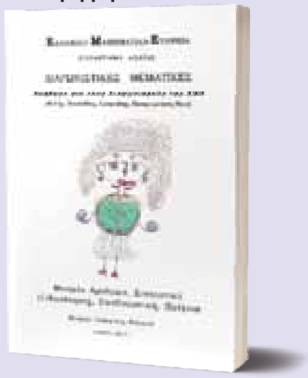
Διαγωνισμοί



Τιμή βιβλίου: 12€



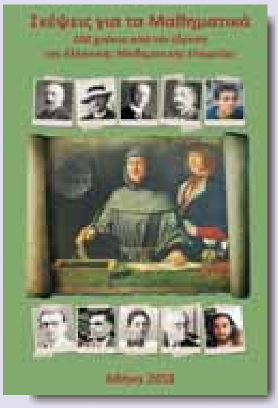
Τιμή βιβλίου: 12€



Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο

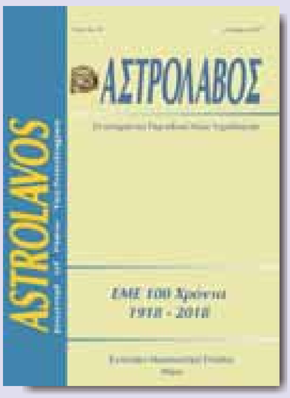


Τιμή βιβλίου: 15€

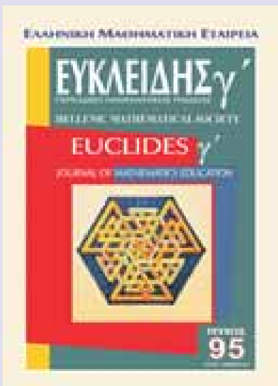
Τιμή βιβλίου: 25€

Τιμή βιβλίου: 20€

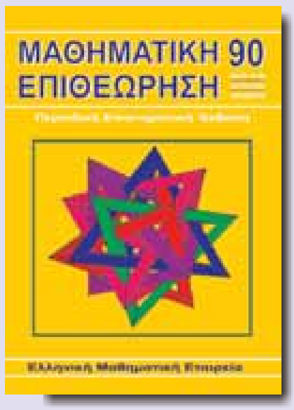
Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr