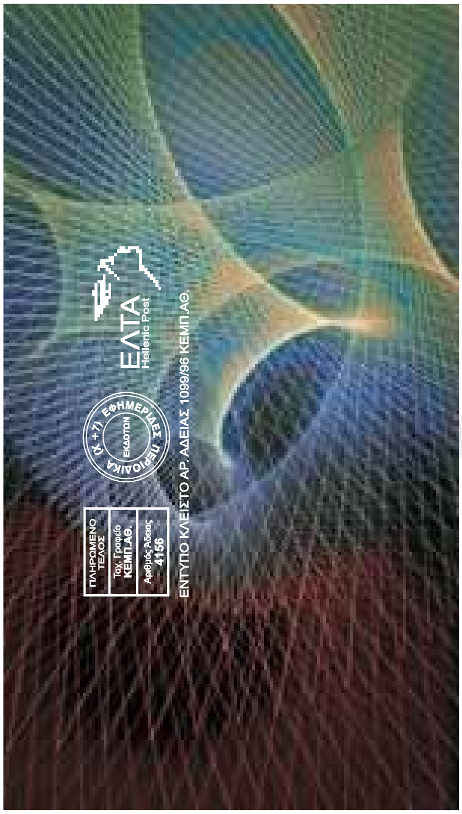
129

Μαθηματικό περιοδικό για το

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

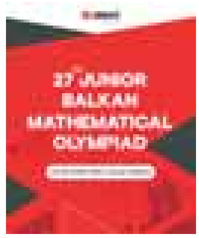
Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023 ευρώ 3



QR Code

4 μετάλλια



27^{th} JBMO

Έγινε στην **Αλβανία**
23 -28 Ιουνίου 2023

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 129

Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2023

Τιμή Τεύχους 3,00 Εύρω

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης: Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Ολόψυχα σας ευχόμαστε **ΚΑΛΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ**.

Ολόψυχα σας ευχόμαστε η νέα σχολική χρονιά 2023-24 να είναι καλή και δημιουργική. Τα σχολικά χρόνια είναι τα καλύτερα της ζωής του ανθρώπου γιατί χτίζονται αληθινές φιλίες και μελλοντικές συνεργασίες. Φροντίστε ώστε να υπάρχει αγάπη και συνεργασία με όλους τους συμμαθητές σας και τους καθηγητές.

Το περιοδικό μας θα είναι ο φίλος σας στα μαθηματικά, θα σας στηρίζει με άρθρα, με ενδιαφέροντα θέματα και ασκήσεις, όπως κάνει πάντα για πολλά-πολλά χρόνια. Επικοινωνήστε με το περιοδικό, πείτε μας την άποψή σας, στείλτε μας τις εργασίες σας, τις απορίες σας και ότι άλλο θέλετε.

Καλή πρόοδο, Καλή σχολική Χρονιά.

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Τα Μαθηματικά και οι Αριθμοί

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Για να διατυπώσουμε τις έννοιες και τις σχέσεις στα μαθηματικά, χρησιμοποιούμε σύμβολα γράμματα και αριθμούς. Τα σύμβολα αυτά σταδιακά χρησιμοποιούνται και καθιερώνονται από κάποιους μεγάλους μαθηματικούς. Οι αριθμοί όμως είναι τα πρώτα σύμβολα που χρειάστηκε ο άνθρωπος για να γράψει το αποτέλεσμα των μετρήσεων του. Ένα άλογο, δύο πρόβατα, τρία πιθάρια, πως να συμβολίσει το ένα , δύο, τρία; Ανά τους αιώνες και σε διαφορετικές χώρες υπήρξαν διάφορα σύμβολα, τα οποία οι αρχαιολόγοι φέρνουν στην επιφάνεια.

Στην αρχαία Ελλάδα γνωρίζουμε ότι αναπτύχθηκαν η φιλοσοφία, η αστρονομία, η ιατρική, τα μαθηματικά. Ο Πυθαγόρας που έδινε μεγάλη σημασία στους αριθμούς ποια σύμβολα χρησιμοποιούσε; Οι Πυθαγόρειοι μελετούσαν και γνώριζαν την γραφή των Φοινίκων, των Βαβυλωνίων, των Αιγυπτίων και δημιούργησαν την Ελληνική γραφή των αριθμών. Χρησιμοποιούσαν τα **24** γράμματα της αλφαβήτου και **τρία** σύμβολα από την γραφή των Φοινίκων τα εξής:

ς(στίγμα), ϟ΄(κόππα) και ϡ(σαμπί)

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Με αυτά τα 27 σύμβολα μπορούσαν να γράψουν κάθε αριθμό.

Για να ξεχωρίζουν οι αριθμοί πολλές φορές τα τόνιζαν πάνω δεξιά

π.χ. 21=κα΄ 587=φπζ΄ 999= ϡϟθ΄ .

Για τις χιλιάδες χρησιμοποιούσαν τα ίδια σύμβολα μόνο που τα τόνιζαν κάτω αριστερά π.χ. 1000=, α. 2000=, β. κλπ ή σήμερα έχουμε 28 Οκτώβρη 2023 έγραφαν βη- ι - ,ββγ .

Βέβαια και σήμερα πολλές φορές χρησιμοποιούμε την Ελληνική γραφή των αριθμών. Όταν αριθμούμε α)…., β)…., γ)…. Σε εκκλησιαστικά βιβλία, σε αρίθμηση νόμων και πολλά άλλα. Άλλωστε η Ελληνική γραφή έχει επικρατήσει σε πολλά πράγματα παγκοσμίως αφού εκείνα τα χρόνια ήταν όπως τα Αγγλικά σήμερα. Γλώσσα της επιστήμης, του εμπορίου, της επικοινωνίας γενικότερα.

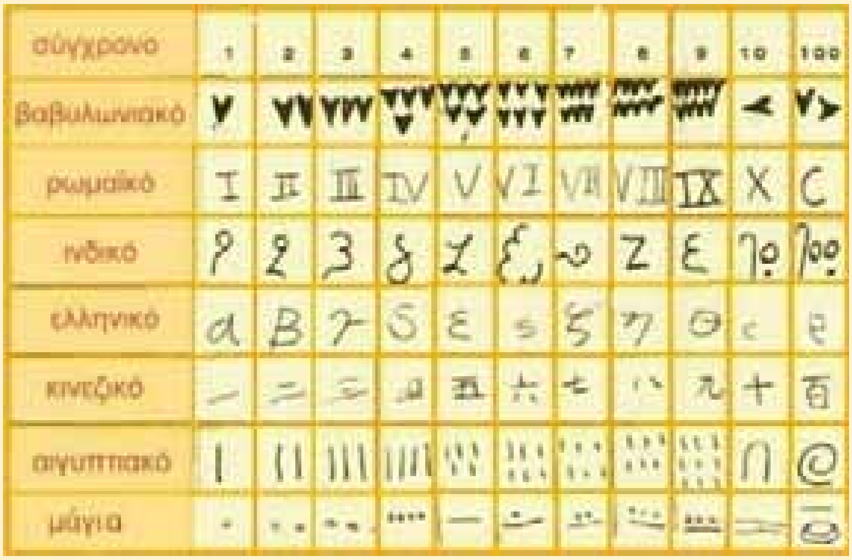
Με την επικράτηση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας εισήχθη και η Ρωμαϊκή γραφή των αριθμών. Τα σύμβολα είναι από το Λατινικό Αλφάβητο. Στην αρχή ήταν 5 και στη συνέχεια έγιναν 7.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

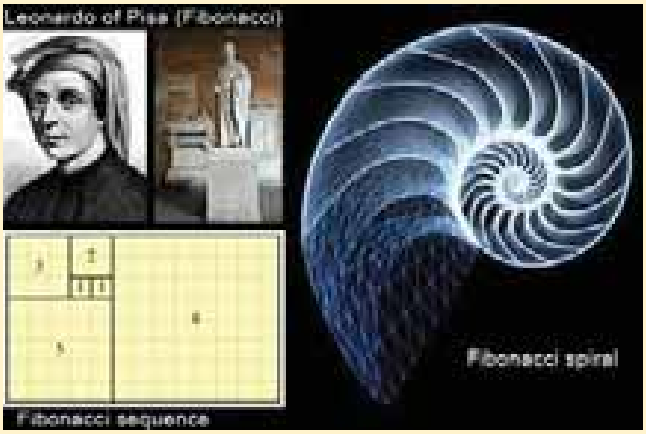
Χρησιμοποιούνται με κανόνες επανάληψης μέχρι τρεις φορές ενός συμβόλου π.χ. **XXX=30** ή με μείωση της αξίας ενός μεγάλου με την τοποθέτηση αριστερά του ενός μικρού και αντίστοιχα προστίθεται όταν είναι δεξιά του. **IX=9 XI=11. Η 28η -10- 2023 είναι: XXVIII- X-MMXXIII.**

Τα σύμβολα **V, L** και **D** δεν επαναλαμβάνονται. Το **I** μπορεί να αφαιρεθεί μόνο από τα **V** και **X**. Το **X** μόνο από τα **L** και **C**. Το **C** μόνο από τα **D** και **M**. Τα **V, L** και **M** δεν αφαιρούνται.

Σύμβολα της Ρωμαϊκής γραφής επίσης χρησιμοποιούνται και σήμερα σε ρολόγια, σε καλλιτεχνική γραφή, κλπ.



Το μηδέν δεν υπήρχε ως έννοια και ως σύμβολο στους αριθμούς ούτε της Ελληνικής ούτε της Λατινικής γραφής.



Ο Ιταλός μαθηματικός **Λεονάρντο της Πίζας** το 12ο αιώνα εισάγει στην Ευρώπη το αραβικό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Το **αραβικό** ή **ινδο-αραβικό** σύστημα αρίθμησης είναι το σημερινό μας σύστημα αρίθμησης των 10 ψηφίων το πιο διαδεδομένο πλέον σύστημα σε όλο τον κόσμο. Με την εισαγωγή αυτού του συστήματος έχουμε και την εισαγωγή του μηδέν συμβολικά 0 (το αρχικό γράμμα της λέξης ουδέν).

ΕΥΡΕΣΗ ΕΚΠ

Μαρία Παππά

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)

Τρία παιδιά τρέχουν σε ένα στίβο. Το 1ο παιδί κάνει 1 γύρο κάθε 6 λεπτά, το 2ο κάθε 12 λεπτά και το 3ο κάθε 15 λεπτά. Μετά από πόσα λεπτά θα συναντηθούν για πρώτη φορά; Η απάντηση είναι το **ΕΚΠ**.

Τι είναι όμως το ΕΚΠ;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζω το **μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια** των αριθμών, **όχι όμως το μηδέν.**

Πως όμως μπορούμε να το υπολογίσουμε; Στη συνέχεια θα δείξουμε τρεις τρόπους εύρεσης του ΕΚΠ.

Θέλουμε να βρούμε το ΕΚΠ(6, 12, 15).

Αρχικά βρίσκουμε κάποια από τα πολλαπλάσια των 6, 12, 15. (Τα πολλαπλάσια είναι άπειρα..)

$Π_6$ = {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, 114, 120,…}

$Π_{12}$ = {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120,…}

$Π_{15}$ = {0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, …}

Κοινά πολλαπλάσια (6, 12, 15) = {0, 60, 120,…}

ΕΚΠ = 60 (το μικρότερο μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο)

Αναλύουμε καθένα από τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Θυμίζουμε ότι πρώτοι αριθμοί είναι οι αριθμοί διαφορετικοί από τη μονάδα που διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους.

Ας αρχίσουμε:

6	2
3	3
1	$2 \cdot 3$

12	2
6	2
3	3
1	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

15	3
5	5
1	$3 \cdot 5$

Το **ΕΚΠ** είναι το γινόμενο **των κοινών** και **μη κοινών** παραγόντων στη **μεγαλύτερη** δύναμη.

Υπάρχει το 2 και η μεγαλύτερη δύναμη είναι η 2^{η} , δηλαδή 2^2. Υπάρχει το 3 αλλά και το 5. Οπότε: $ΕΚΠ = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 15 = \mathbf{60}$.

6	12	15	2
3	6	15	2
3	3	15	3
1	1	5	5
1	1	1	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Εύρεση ΜΚΔ

Θέλουμε να στείλουμε στη φίλη μας που εορτάζει μια ανθοδέσμη. Ο κήπος έχει 12 λευκά, 18 κόκκινα και 24 ροζ. Κόψαμε όλα τα λουλούδια και τα δέσαμε σε όσο γινόταν λιγότερα μπουκέτα κατά χρώμα, με ίδιο αριθμό λουλουδιών σε όλα τα χρώματα. Με τα μπουκέτα δημιουργήσαμε την ανθοδέσμη βάζοντας όσο γινόταν περισσότερα λουλούδια ίσα σε αριθμό από κάθε χρώμα. Πόσα είναι όλα τα λουλούδια στην ανθοδέσμη;

Λύση

Τα λουλούδια σε κάθε μπουκέτο είναι ο ΜΚΔ (μέγιστος κοινός διαιρέτης), έτσι (12, 18, 24)=6. Στην ανθοδέσμη θα βάλουμε από 2 μπουκέτα από όλα τα χρώματα, σύνολο 36 λουλούδια.

Και τι ακριβώς είναι ο ΜΚΔ;

Ο **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες. Ας δούμε πως βρίσκουμε τον ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών.

Θέλουμε να βρούμε τον ΜΚΔ(12, 18, 24).

Αρχικά βρίσκουμε τους διαιρέτες καθενός από τους αριθμούς 12, 18 και 24.

Διαιρέτες του 12: $\Delta_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Διαιρέτες του 18: $\Delta_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Διαιρέτες του 24: $\Delta_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Κοινοί διαιρέτες: {1, 2, 3, 6}. Ο **ΜΚΔ** είναι ο **μεγαλύτερος** από τους κοινούς διαιρέτες. Άρα ο **ΜΚΔ(12, 18, 24) = 6.**

Αναλύουμε καθένα από τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ο **Μ.Κ.Δ.** είναι το γινόμενο από **τους κοινούς** παράγοντες στη **μικρότερη** δύναμη.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2^2 \cdot 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \cdot 3^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2^3 \cdot 3 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι και στα τρία γινόμενα υπάρχουν και 2 και 3. Θα κρατήσουμε τη **μικρότερη** δύναμη. Δηλαδή:

$$ΜΚΔ(12,18,24) = 2 \cdot 3 = \mathbf{6}.$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να βρούμε το Μ.Κ.Δ. **μεγαλύτερων** αριθμών.

Θέλουμε να βρούμε το **ΜΚΔ (20, 82, 158).**

Βήμα 1

Γράφουμε τους αριθμούς σε σειρά 20, 82 και 158.

20 82 158

Βήμα 2

Βρίσκουμε τον μικρότερο και τον γράφουμε από κάτω.

20	82	158
20		

Βήμα 3

Διαιρούμε τους άλλους αριθμούς με τον μικρότερο να γράφουμε από κάτω τους το υπόλοιπο της διαίρεσης.

20	82	158	82 : 20 = 4 και υπόλοιπο 2
0	2	18	158 : 20 =7 και υπόλοιπο 18

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο:

20	82	158	18 : 2 = 9 και υπόλοιπο 0
0	2	18	
0	**2**	0	

ΜΚΔ είναι ο αριθμός που μένει. Άρα, **ΜΚΔ = 2.**

Άσκηση 1

Να βρείτε το ΕΚΠ των αριθμών:

Α) 3, 5, 10 **Β)** 18, 30 **Γ)** 2, 3, 10 **Δ)** 2, 3, 6

Άσκηση 2

Να βρείτε το ΜΚΔ των αριθμών:

Α) 16 και 40 **Β)** 36 και 48 **Γ)** 7, 28 **Δ)** 7, 28, 49

Άσκηση 3

Τρία λεωφορεία με αφετηρία την ίδια πλατεία εκτελούν τη συγκοινωνία σε 3 διαφορετικά σημεία της πόλης Το πρώτο εκτελεί μια διαδρομή σε 15 min, το δεύτερο σε 24 min και το τρίτο σε 48 min. Αν στις 11 ακριβώς ξεκινήσουν μαζί, ύστερα από πόσο χρόνο θα ξεκινήσουν και πάλι μαζί και πόσες διαδρομές θα έχει κάνει το καθένα στον ενδιάμεσο χρόνο ;

Άσκηση 4

Σε ένα σχολείο μαζεύτηκαν 150 κιλά αλεύρι και 70 κιλά ζάχαρη για να δοθούν στις οικογένειες που τα χρειάζονται. Πόσες ομοιόμορφες σακούλες μπορούμε να φτιάξουμε και πόσα προϊόντα από το καθένα θα έχουν;

Άσκηση 5

Ο Μάριος μετράει τους βόλους που έχει στη συλλογή του. Αν τους βάλει σε δυάδες ή τριάδες δεν περισσεύει κανένας βόλος. Αν οι βόλοι είναι περισσότεροι από 30 αλλά λιγότεροι από 40, πόσους βόλους έχει;

Ασκήσεις Α΄ Γυμνασίου

Επιμέλεια: Μαντζακίδου Χριστίνα - Παράρτημα ΕΜΕ Σερρών

Θέμα 1

Σε μια θεατρική παράσταση έχουν παρευρεθεί 720 θεατές που αποτελούνται από γυναίκες, άνδρες και παιδιά. Τα $\frac{3}{8}$ των θεατών ήταν γυναίκες ενώ το 60% των υπόλοιπων ήταν άνδρες.

α. Να βρείτε πόσες ήταν οι γυναίκες και πόσοι ήταν οι άνδρες.

β. Να βρείτε ποσά παιδιά παρακολούθησαν την θεατρική παράσταση, καθώς και το ποσοστό τους στο σύνολο των θεατών.

γ. Αν το κανονικό εισιτήριο κοστίζει 24€, ενώ τα παιδιά έχουν έκπτωση 25%, να βρείτε πόσα ευρώ ήταν τα έσοδα της θεατρικής παράστασης.

Απάντηση

α. Τα $\frac{3}{8}$ των θεατών ήταν γυναίκες, οπότε είναι $\frac{3}{8}\cdot 720=\frac{2.160}{8}=270$ γυναίκες.

Οι υπόλοιποι είναι: $720-270=450$ άνδρες και παιδιά.

Το 60% των υπόλοιπων ήταν άνδρες, οπότε είναι

$$60\%\cdot 450=\frac{60}{100}\cdot 450=\frac{27.000}{100}=270 \text{ άνδρες}$$

β. Είναι: $270+270=540$ ανδρές και γυναίκες

Άρα, $720-540=180$ παιδιά.

Το ποσοστό τους στο σύνολο των θεατών είναι:

$$\frac{180}{720}=\frac{18}{72}=\frac{18:18}{72:18}=\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\%$$

γ. Άδρες και γυναίκες μαζί είναι 540 άτομα, οπότε $540\cdot 24€=12.960€$

Τα παίδια έχουν έκπτωση 25% οπότε η έκπτωση είναι:

$$25\%\cdot 24=\frac{25}{100}\cdot 24=\frac{25:25}{100:25}\cdot 24=\frac{1}{4}\cdot 24=\frac{24}{4}=6€$$

Συνεπώς, η τελική τιμή είναι: $24-6=18€$

Αλλά, τα παίδια είναι 180 και πληρώνουν:

$$180\cdot 18=3.240€$$

Τα συνολικά έσοδα ήταν:

$$12.960+3.240=16.200€$$

Θέμα 2

Ένα σχολείο διαθέτει ένα ποσό χρημάτων για τρεις δραστηριότητές του. Για την εκπαιδευτική εκδρομή ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων, για την αγορά βιβλίων ξόδεψε το $\frac{1}{2}$ των υπόλοιπων χρημάτων. Τέλος, για την σχολική εορτή χρησιμοποιήθηκαν τα μισά χρήματα που περίσσεψαν μετά από την αγορά των βιβλίων. Αν τελικά έμειναν στο σχολείο 100€, να βρείτε:

α. Πόσα χρήματα είχε αρχικά το σχολείο.

β. Πόσα χρήματα ξόδεψε το σχολείο για κάθε δραστηριότητα.

Απάντηση

α. Για την εκπαιδευτική εκδρομή ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων.

Άρα έχουν μείνει $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ των χρημάτων.

Για την αγορά βιβλίων ξόδεψε το $\frac{1}{2}$ των υπόλοιπων χρημάτων, οπότε:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{2:2}{6:2}=\frac{1}{3}$$

των χρημάτων έχουν χρησιμοποιηθεί για την αγορά βιβλίων.

Για την εκδρομή και τα βιβλία έχουν ξοδεψει $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ των χρημάτων.

Άρα έχουν μείνει $\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Για την σχολική εορτή χρησιμοποιήθηκαν τα μισά χρήματα, άρα το $\frac{1}{2}$ των χρημάτων που περίσσεψαν μετά από την αγορά των βιβλίων: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ των χρημάτων έχουν χρησιμοποιηθεί για την σχολική εορτή.

Συνολικά έχουν ξοδέψει:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

και τους έχουν μείνει:

$\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ που είναι 100€, άρα όλα τα χρήματα που είχαν αρχικά είναι $100\cdot 6=600$€.

β. Για την εκπαιδευτική εορτή:

$$\frac{1}{3}\cdot 600=\frac{600}{3}=200\text{€}.$$

Για την αγορά βιβλίων:

$$\frac{1}{3}\cdot 600=\frac{600}{3}=200\text{€}.$$

Για την σχολική εορτή:

$$\frac{1}{6}\cdot 600=\frac{600}{6}=100\text{€}.$$

Θέμα 3

Σε ένα γυμνάσιο του νομού Σερρών οι μαθητές τις Α΄ Τάξης είναι 84, ενώ οι μαθητές της Β΄ Τάξης είναι το 40% όλων των μαθητών. Αν γνωρίζουμε ότι οι μαθητές τις Α΄ Τάξης αποτελούν τα $\frac{7}{20}$ των μαθητών όλου του σχολείου να βρείτε:

α. Πόσοι είναι μαθητές όλου του σχολειού.

β. Πόσους μαθητές έχει η Γ΄ Τάξη του γυμνασίου.

γ. Αν από τους μαθητές της Α΄ Τάξης οι 45 πήραν μέρος στον τοπικό μαθητικό διαγωνισμό «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ» της Ε.Μ.Ε. του παραρτήματος Σερρών. Να βρείτε το ποσοστό τους στο σύνολο όλων των μαθητών του γυμνάσιου.

Απάντηση

α. Τα $\frac{7}{20}$ είναι 84 μαθήτες.

Το $\frac{1}{20}$ είναι $84:7=12$ μαθητές.

Τα $\frac{20}{20}$ είναι $12\cdot 20=240$ μάθητές.

Επομένως οι μαθητές όλου του σχολείου είναι 240.

β. Πρέπει πρώτα να βρούμε τους μαθητές της Β΄ Τάξης.

Είναι: $40\%\cdot 240=\frac{40}{100}\cdot 240=\frac{9.600}{100}=96$ μαθητές έχει η Β΄ Τάξη.

Οι μαθητές της Α΄ Τάξης και της Β΄ Τάξης είναι: $96+84=180$ μαθητές

Οπότε, οι υπόλοιποι $240-180=60$ μαθητές είναι της Γ΄ Τάξης.

γ. Το ποσοστό των μάθητων της Α΄ Γυμνασίου που πήραν μέρος στον διαγώνισμο στο σύνολο όλων των μαθητών του γυμνάσιου είναι:

$$\frac{45}{240}=\frac{45:3}{240:3}=\frac{15}{80}=\frac{15:5}{80:5}=$$
$$=\frac{3}{16}=0{,}1875=\frac{18{,}75}{100}=18{,}75\%$$

των μαθητών.

Θέμα 4

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{3}{5}\cdot\left(3-1\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{7}{2}-2\frac{3}{4}\right)$$

$$B=6\cdot3^2-7^2\cdot\left(3^2-2^3\right)^{2023}$$

$$\Gamma=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{6}\right):\frac{3}{5}$$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραπάνω παραστάσεων.

β. Αν $\Gamma=\frac{5}{2}$, να λυθεί η εξίσωση $x\cdot10=\Gamma$

γ. Αν $A=\frac{3}{10}$ και $B=5$, να συγκρίνετε τα κλάσματα A και $\frac{1}{B}$ και να βρεθεί ένα κλάσμα μεταξύ των κλασμάτων αυτών.

Απάντηση

α. Είναι:

$$A=\frac{3}{5}\cdot\left(3-1\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{7}{2}-2\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(3-\frac{1\cdot4+1}{4}\right)-\left(\frac{7}{2}-\frac{2\cdot4+3}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{1}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{7}{2}-\frac{11}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{12}{4}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{14}{4}-\frac{11}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}-\frac{3}{4}=\frac{21}{20}-\frac{3}{4}=\frac{21}{20}-\frac{15}{20}$$

$$=\frac{6}{20}=\frac{6:2}{20:2}=\frac{3}{10}$$

$$B=6\cdot3^2-7^2\cdot\left(3^2-2^3\right)^{2023}=$$

$$=6\cdot3^2-7^2\cdot(9-8)^{2023}=6\cdot3^2-7^2\cdot1^{2023}$$

$$=6\cdot9-49\cdot1=54-49=5$$

$$\Gamma=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{6}\right):\frac{3}{5}=\left(\frac{24}{18}+\frac{1}{6}\right):\frac{3}{5}=$$

$$=\left(\frac{24}{18}+\frac{1\cdot3}{6\cdot3}\right):\frac{3}{5}=\left(\frac{24}{18}+\frac{3}{18}\right):\frac{3}{5}$$

$$=\frac{27}{18}:\frac{3}{5}=\frac{27:9}{18:9}:\frac{3}{5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}=\frac{5}{2}$$

β. Είναι: $x\cdot10=\Gamma$

$$x\cdot10=\frac{5}{2}$$

$$x=\frac{5}{2}:10$$

$$x=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}$$

$$x=\frac{5:5}{20:5}$$

$$x=\frac{1}{4}$$

γ. Συγκρίνω τα κλάσματα $A=\frac{3}{10}$ και $\frac{1}{B}=\frac{1}{5}$.

Παρατηρώ ότι είναι ετερώνυμα με διαφορετικούς αριθμητές, οπότε για να τα συγκρίνω πρέπει να γίνουν ομώνυμα.

Είναι $\frac{1}{5}=\frac{1\cdot2}{5\cdot2}=\frac{2}{10}<\frac{3}{10}$.

Άρα ισχύει $\frac{1}{5}<\frac{3}{10}$, συνεπώς $\frac{1}{B}<A$.

Για να βρεθεί ενα κλάσμα ανάμεσα στα $\frac{2}{10},\frac{3}{10}$ θα χρησιμοποιήσουμε ισοδύναμα και ομώνυμα κλάσματα, για παράδεισμα:

$$\frac{2}{10}=\frac{2\cdot10}{10\cdot10}=\frac{20}{100}$$

και $\frac{3}{10}=\frac{3\cdot10}{10\cdot10}=\frac{30}{100}$.

Ισχύει $\frac{20}{100}<\frac{30}{100}$ και ένα κλασμα ανάμεσα σε αυτά είναι το $\frac{25}{100}$

αφού $\frac{20}{100}<\frac{25}{100}<\frac{30}{100}$

ή $\frac{2}{10}<\frac{1}{4}<\frac{3}{10}$

ή $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{3}{10}$

Θέμα 5

Δίνονται οι παραστάσεις

$\boldsymbol{\alpha=\left(3^2-2^2\right)\cdot 3-6^2:3+2}$ **και**

$\boldsymbol{\beta=3\cdot\left(3\cdot 2^2+4\right)-\left(5^2-7^1\right):1^{2023}}$

α. Να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{\alpha=5}$ και $\boldsymbol{\beta=30}$.

β. Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ.$\boldsymbol{(\alpha,\beta)}$ και το Ε.Κ.Π.$\boldsymbol{(\alpha,\beta)}$ όπου α, β είναι τα αποτελέσματα του Α ερωτήματος.

γ. Να βρείτε την τιμή την παράστασης $\boldsymbol{\gamma=\alpha\cdot\frac{6}{\beta}+1\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{3}}$.

Απάντηση

α. Είναι:

$$\alpha=\left(3^2-2^2\right)\cdot 3-6^2:3+2$$
$$=(9-4)\cdot 3-6^2:3+2$$
$$=5\cdot 3-6^2:3+2$$
$$=5\cdot 3-36:3+2$$
$$=15-12+2$$
$$=5$$

$$\beta=3\cdot\left(3\cdot 2^2+4\right)-\left(5^2-7^1\right):1^{2023}$$
$$=3\cdot(3\cdot 4+4)-(25-7):1^{2023}$$
$$=3\cdot(12+4)-18:1^{2023}$$
$$=3\cdot 16-18:1^{2023}\pi$$
$$=3\cdot 16-18:1$$
$$=48-18$$
$$=30$$

β. Για να βρούμε τον Μ.Κ.Δ.(α,β) και το Ε.Κ.Π.(α,β) πρέπει να αναλύσουμε το $\alpha=5$ και το β=30 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα $5=5^1$ και $30=2^1\cdot 3^1\cdot 5^1$

Οπότε, είναι: Μ.Κ.Δ.$(5,30)=5^1=5$

Ε.Κ.Π$(5,30)=2^1\cdot 3^1\cdot 5^1=2\cdot 3\cdot 5=30$

γ. Είναι:

$$\gamma=\alpha\cdot\frac{6}{\beta}+1\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{3}$$
$$=5\cdot\frac{6}{30}+1\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{30}{30}+\frac{1\cdot 5+2}{5}-\frac{1}{3}$$
$$=1+\frac{7}{5}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1\cdot 15}{1\cdot 15}+\frac{7\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}$$
$$=\frac{15}{15}+\frac{21}{15}-\frac{5}{15}$$
$$=\frac{15}{15}+\frac{21}{15}-\frac{5}{15}$$
$$=\frac{36}{15}-\frac{5}{15}$$
$$=\frac{31}{15}$$

Α΄ Τάξη

Τα μαθηματικά ως οικογενειακή υπόθεση

Βαρβάρα Καμπουρίδη

Η Μαρία κρατάει το μωρό της θείας της και κερδίζει 12 ευρώ την $1\frac{1}{2}$ ώρα. Πόσα κερδίζει την ώρα;

Υπολογίζω: $1\frac{1}{2}$ ώρα είναι 3 μισάωρα.

Τα 12 ευρώ είναι 3x4 ευρώ. Άρα η $\frac{1}{2}$ ώρα αντιστοιχεί σε 4 ευρώ. Επομένως, 1 ώρα αντιστοιχεί σε 2x4=8 ευρώ.

Απαντώ στην ερώτηση: Την ώρα κερδίζει 8 ευρώ

1. Η Μαρία ποτίζει τα λουλούδια του μπαλκονιού της. Το ποτιστήρι χωράει 5 λίτρα και γεμίζει από την βρύση σε $\frac{1}{3}$ του λεπτού. Ποια είναι η ροή της βρύσης;

Υπολογίζω: Σε $\frac{1}{3}$ του λεπτού 5 λίτρα, άρα

Απαντώ στην ερώτηση:

2. Το συνεργείο χρειάστηκε 3 μέρες για να βάψει τα $\frac{2}{3}$ του σπιτιού της Μαρίας. Ποια ήταν η ημερήσια απόδοσή του;

3. Η Μαρία βγάζει φωτοαντίγραφο της 4σέλιδης εργασίας της σε $\frac{1}{5}$ του λεπτού. Πόσες σελίδες το λεπτό αντιγράφει το μηχάνημα;

4. Η Μαρία πηγαίνει στο σπίτι της φίλης της που απέχει $\frac{1}{5}$ χμ. με το ποδήλατό της σε 2,5 λεπτά. Ποια είναι η ταχύτητά της το λεπτό;

5. Η θερμοκρασία του καφέ της μητέρας της Μαρίας χάνει $\frac{3}{4}$ ενός βαθμού κάθε 2 λεπτά της ώρας. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να χάσει έναν βαθμό;

Ο αδελφός της Μαρίας έφαγε τα $\frac{4}{5}$ μιας ρυζοκοφρέτας. Τι ποσοστό της ρυζοκοφρέτας έφαγε;

Υπολογισμός:

Τα $\frac{4}{5}$ του 100 είναι 80. Άρα έφαγε 80% της ρυζοκοφρέτας.

Αλλιώς: $\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0{,}8 = 0{,}80 = \frac{80}{100}$ άρα έφαγε 80% της ρυζοκοφρέτας.

1. Στην τάξη της Μαρίας τα $\frac{3}{4}$ των παιδιών έχουν αδέλφια. Τι ποσοστό της τάξης έχει αδέλφια;

2. Το $\frac{1}{3}$ του ελεύθερου χρόνου της η Μαρία το αφιερώνει στη μουσική. Τι ποσοστό του ελεύθερου χρόνου της αφιερώνει η Μαρία στη μουσική;

3. Ο αδελφός της Μαρίας έγραψε διαγώνισμα στα μαθηματικά και είχε 4 λανθασμένες απαντήσεις στις 20 ερωτήσεις. α) τι ποσοστό αποτυχίας είχε στο διαγώνισμα; β) τι ποσοστό επιτυχίας;
   Υπολογισμός: 4 λανθασμένες στις 20 είναι 2 στις 10,….

4. Στο κυλικείο του σχολείου υπάρχουν 30 σάντουιτς από τα οποία τα 12 είναι γαλοπούλας και τα υπόλοιπα ζαμπόν. Α) τι ποσοστό των σάντουιτς είναι γαλοπούλας και τι ποσοστό ζαμπόν;

Η μητέρα της Μαρίας αγόρασε μία μπλούζα με έκπτωση 10% και πλήρωσε 36 ευρώ. Ποια ήταν η αρχική τιμή της μπλούζας;

Υπολογίζω:

Αφού με έκπτωση 10% αγόρασε την μπλούζα 36 ευρώ, τα 36 ευρώ αντιστοιχούν στο 90% της αρχικής τιμής.

$90\% = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ αντιστοιχούν σε 36 ευρώ

Άρα $\frac{1}{10}$ αντιστοιχεί σε 36 : 9 = 4 ευρώ

Επομένως τα $\frac{10}{10}$ αντιστοιχούν σε 4x10 =40 ευρώ.

Απάντηση στην ερώτηση: Η αρχική τιμή της μπλούζας ήταν 40 ευρώ.

1. Η Μαρία αγόρασε μια αφίσα για το δωμάτιό της με έκπτωση 75% και πλήρωσε 5 ευρώ. Ποια ήταν η αρχική τιμή της αφίσας;

2. Η οικογένεια της Μαρίας παρήγγειλε φαγητό σε πακέτο αξίας 40 ευρώ. Έδωσαν 4% για τη μεταφορά του και 2% φιλοδώρημα. Πόσο κόστισε τελικά το φαγητό;

Δες τα ζευγάρια των αριθμών στους παρακάτω πίνακες και σημείωσε τον πίνακα που όλα τα ζευγάρια είναι μεταξύ τους ισοδύναμα, όπως στο παράδειγμα:

1	$\frac{3}{4}$	$1: \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$
2	$\frac{6}{4}$	$2 : \frac{6}{4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
8	6	$8 : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
ν		

4	$\frac{12}{7}$	
6	$\frac{18}{7}$	
14	6	

6	$\frac{21}{8}$	
8	$\frac{14}{4}$	
17	7	

$\frac{36}{14}$	6	
$\frac{27}{7}$	9	
9	21	

Η Μαρία είχε στο πρώτο διαγώνισμα 5 σωστές απαντήσεις. Στο δεύτερο διαγώνισμα με τον ίδιο αριθμό ερωτήσεων αύξησε τις σωστές απαντήσεις σε 9. Σε τι ποσοστό αύξησε την επίδοση της;

Υπολογίζω: Οι 5 σωστές έγιναν 9 άρα αύξηση 4
Οι 10 σωστές αυξάνονται κατά 8
Άρα οι 100 κατά 80, δηλαδή αύξηση 80%

Απάντηση στην ερώτηση: Η Μαρία αύξησε την επίδοση της κατά 80%

1. Η Μαρία μείωσε τον χρόνο της στο τρέξιμο των 100 μέτρων από 15 δευτερόλεπτα σε 14. Σε τι ποσοστό πέτυχε καλύτερο χρόνο;
2. Η τιμή του μπουκαλιού ενός λίτρου γάλακτος αυξήθηκε από 2,5 ευρώ σε 2,7 ευρώ. Πόσο τοις % αυξήθηκε η τιμή του λίτρου;
3. Η θερμοκρασία από 25 βαθμούς στις 10.00 το πρωί έφθασε στους 30 βαθμούς στις 2.00 μετά το μεσημέρι. Σε τι ποσοστό αυξήθηκε;

Σημείωση: Οι λύσεις στα προβλήματα και τις ασκήσεις είναι ενδεικτικές.

Μία άσκηση για τον Μέγιστο κοινό διαιρέτη

Από Μαρία Παππά

Αν είναι $ΜΚΔ(3\cdot 53\cdot 17,\chi)=5$ και $ΕΚΠ(3\cdot 53\cdot 17,\chi)=3\cdot 53\cdot 17\cdot 115$ πόσο είναι το χ ;

Απάντηση

Ο ΜΚΔ ανάμεσα σε 2 ή περισσότερους αριθμούς είναι το γινόμενο των κοινών παραγόντων στη μικρότερη δυναμη.

Το ΕΚΠ ανάμεσα σε 2 ή περισσότερους αριθμούς είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων στη μεγαλύτερη δυναμη.

Αφού ο ΜΚΔ είναι το 5, υπάρχει στο χ το 5 σίγουρα και επειδή στο ΜΚΔ δεν υπάρχει το 115 αλλά υπάρχει στο ΕΚΠ, σίγουρα στο χ θα υπάρχει και αυτό. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το χ είναι ίσο με: 5·115.

Απάντηση

Ο ΜΚΔ ανάμεσα σε 2 ή περισσότερους αριθμούς είναι το γινόμενο των κοινών παραγόντων στη μικρότερη δυναμη.

Το ΕΚΠ ανάμεσα σε 2 ή περισσότερους αριθμούς είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων στη μεγαλύτερη δυναμη.

Αφού ο ΜΚΔ είναι το 5, υπάρχει στο χ το 5 σίγουρα και επειδή στο ΜΚΔ δεν υπάρχει το 115 αλλά υπάρχει στο ΕΚΠ, σίγουρα στο χ θα υπάρχει και αυτό. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το χ είναι ίσο με: 5·115.

Ασκήσεις Α΄ Γυμνασίου

Αγγελική Γ. Δανιήλογλου

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι αριθμοί:

$\kappa = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha$ **και**

$\lambda = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$

i) Να γράψετε τους αριθμούς κ, λ σε πιο σύντομη μορφή.

ii) Να υπολογίσετε τους αριθμούς κ, λ και να γράψετε το αποτέλεσμα σε μορφή δύναμης όταν $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

iii) Για τις τιμές των κ, λ που βρήκατε στο ii) ερώτημα να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (25\kappa + 7 - 8\lambda)^2 + 84$

ΛΥΣΗ

i) $\kappa = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 5\alpha$ και

$\lambda = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta = 2^4 \cdot \beta^5$

ii) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$, έχουμε ότι $\kappa = 5$ και $\lambda = 2^4$

iii) Η παράσταση $A = (25 \cdot 5 + 7 - 8 \cdot 2^4)^2 + 84 =$

$(125 + 7 - 128)^2 + 84 = 4^2 + 84 = 16 + 84 = 100$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ο γυμναστής ενός σχολείου ετοιμάζει τους μαθητές για την παρέλαση. Αν τους τοποθετήσει σε τριάδες ή σε πεντάδες ή σε επτάδες, δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι είναι οι μαθητές του σχολείου, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 300 και 400;

ΛΥΣΗ

Αφού τους τοποθετεί ανά 3, ανά 5 ή ανά 7 και δεν περισσεύει κανένας, το πλήθος των μαθητών θα είναι πολλαπλάσιο του 3 του 5 και του 7. Άρα το πλήθος των μαθητών θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ$(3,5,7) = 105$ και αφού είναι μεταξύ 300 και 400 θα είναι 315.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $x = 2^6 - (7^2 + 3^2)$ **και** $y = 3^4 - 4 \cdot 2^4 - \left[\left(3^2 + 1^{2024}\right) + 5\right]$, **να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης** $A = x^2(y^4 - x) - x^2 : y$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι

$x = 2^6 - (7^2 + 3^2) = 64 - (49 + 9) = 64 - 58 = 6$

$y = 3^4 - 4 \cdot 2^4 - \left[\left(3^2 + 1^{2024}\right) + 5\right] =$

$81 - 64 - (10 + 5) = 81 - 64 - 15 = 2$

Άρα

$A = x^2(y^4 - x) - x^2 : y = 6^2(2^4 - 6) - 6^2 : 2 =$

$360 - 18 = 342$

ΑΣΚΗΣΗ 4

i) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = \frac{8}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{2} : \frac{5}{3} - \frac{23}{6}$ **και**

$B = 13 - 3 \cdot (3^2 - 2^3) - \frac{29}{3}$

ii) Αν το $A = \frac{2}{3}$ και $B = \frac{1}{3}$, να βρείτε ένα κλάσμα το οποίο να βρίσκεται μεταξύ των A, B.

ΛΥΣΗ

i) $A = \frac{8}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{2} : \frac{5}{3} - \frac{23}{6} = \frac{8}{3} + \frac{10}{3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{23}{6} =$

$\frac{18}{3} - \frac{3}{2} - \frac{23}{6} = \frac{36}{6} - \frac{9}{6} - \frac{23}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$B = 13 - 3 \cdot (3^2 - 2^3) - \frac{29}{3} =$

$13 - 3 \cdot (9 - 8) - \frac{29}{3} = 10 - \frac{29}{3} = \frac{1}{3}$

ii) Παρατηρούμε ότι $B < A$, άρα ζητάμε ένα κλάσμα μεταξύ του $\frac{1}{3}$ και του $\frac{2}{3}$.

Αναζητάμε ισοδύναμα κλάσματα του $\frac{1}{3} < \kappa = \frac{\dots}{\dots} < \frac{2}{3}$, δηλαδή μεταξύ $\frac{2}{6} < \kappa = \frac{\dots}{\dots} < \frac{4}{6}$. Άρα βρίσκουμε το $\kappa = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένας υπάλληλος ξοδεύει τον μήνα από τον μισθό του τα $\frac{2}{5}$ για φαγητό, το $\frac{1}{4}$ για ενοίκιο, το $\frac{1}{10}$ για ατομικά έξοδα και του

περισσεύουν 300 ευρώ.
α) Συγκρίνοντας τα κλάσματα του μισθού που ξοδεύει, να βρείτε που ξοδεύει τα περισσότερα και που τα λιγότερα.
β) Να υπολογίσετε τον μισθό του.
γ) Ποιο είναι το ποσοστό του μισθού που του περισσεύει;

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε να συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ και αφού τα κάνουμε ισοδύναμα, τα κλάσματα $\frac{8}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{2}{20}$ που προκύπτουν είναι ομώνυμα. Μεγαλύτερο είναι το $\frac{8}{20}$, δηλαδή ξοδεύει περισσότερα για φαγητό.

β) Ξοδεύει συνολικά $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}+\frac{2}{20}=\frac{15}{20}$. Δηλαδή του περισσεύουν τα $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ του μισθού που αντιστοιχούν σε 300 ευρώ. Άρα ο μισθός του είναι 1200 ευρώ.

γ) Του περισσεύει το $\frac{1}{4}$ του μισθού, δηλαδή $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=25\%$ του μισθού.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η Σίφνος δέχτηκε το περασμένο καλοκαίρι 14.850 τουρίστες. Οι Ευρωπαίοι ήταν τα $\frac{3}{5}$ του συνόλου των τουριστών και οι Αμερικανοί τα $\frac{5}{9}$ των Ευρωπαίων. Οι υπόλοιποι ήταν Ασιάτες. Πόσοι ήταν οι Ασιάτες στο σύνολο των τουριστών;

ΛΥΣΗ

Οι Αμερικανοί είναι τα $\frac{5}{9}$ των Ευρωπαίων, δηλαδή $\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ του συνόλου.

Άρα οι Ασιάτες θα είναι το $1-\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\right)=1-\left(\frac{5}{9}+\frac{3}{9}\right)=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$ του συνόλου των τουριστών, δηλαδή $14.850\cdot\frac{1}{9}=$ 1650

ΑΣΚΗΣΗ 7

Στις παρακάτω ασκήσεις να κυκλώσετε την σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

1) Ανοίγεις ένα βιβλίο και παρατηρείς ότι οι δύο αριθμοί των σελίδων που έχεις μπροστά σου έχουν άθροισμα 49. Τι αριθμό έχει η επόμενη σελίδα;
α) 50 β) 48 γ) 24
δ) 25 ε) 26

2) Το άθροισμα των 100 πρώτων θετικών ακεραίων, δηλαδή το 1+2+3+4+…….+99+100, είναι ίσο με 5.050. Με ποιον από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσο το άθροισμα των 200 πρώτων θετικών ακεραίων;
α) 10.100 β) 15.050 γ) 15.150
δ) 20.100 ε) 21.500

3) Η Άννα είναι ταμίας της τάξης της και πήγε σε ένα κατάστημα για να αγοράσει διακοσμητικά της σχολικής αίθουσας για την γιορτή που θα έκανε η τάξης της. Το κατάστημα είχε διακοσμητικά των 4€, των 6€ και των 8€ το ένα οπότε η Άννα αγόρασε 7 συνολικά διακοσμητικά και από τα τρία είδη. Πόσα χρήματα μπορεί να πλήρωσε;
α) 26€ β) 42€ γ) 47€
δ) 51€ ε) 61€

4) Σε μια επιχείρηση ο λόγος των ανδρών υπαλλήλων προς τις γυναίκες υπαλλήλους είναι $\frac{3}{5}$ και το σύνολο των εργαζομένων στην επιχείρηση είναι 1600 άτομα. Πόσοι είναι οι άνδρες εργαζόμενοι;
α) 600 β) 1200 γ) 1700
δ) 700 ε) 650

5) Πάνω μου έχω 30 € περισσότερα από σένα. Αν σου δώσω 8 €, πόσα ευρώ παραπάνω θα έχω από σένα;
α) 22 β) 16 γ) 15
δ) 13 ε) 14

Ασκήσεις Α΄ Γυμνασίου

Κουτσουρής Λέοντας

1) Να διατάξετε τις παρακάτω κλασματικές μονάδες σε αύξουσα σειρά

α) $\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}$ β) $\frac{1}{36},\frac{1}{63},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{51},\frac{1}{\substack{10\\*0}}$ γ) $\frac{1}{12},\frac{1}{14},\frac{1}{16},\frac{1}{18},\frac{1}{13},\frac{1}{15},\frac{1}{17},\frac{1}{19}$ δ) $\frac{1}{360},\frac{1}{90},\frac{1}{180},\frac{1}{45}$

Υπόδειξη : 2 ή περισσότερα κλάσματα με ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή

2) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

α	β	Ε.Κ.Π.(α,β)	Μ.Κ.Δ.(α,β)	α·β	Ε.Κ.Π.(α,β)· Μ.Κ.Δ.(α,β)
4	8				
6	5	-			
2	10				
3	33				
6	16				

Υπόδειξη: αναλύω σε γινόμενο πρώτων αριθμών το ζεύγος τιμών, για το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο επιλέγω όλους τους διαιρέτες ενώ για το μέγιστο κοινό διαιρέτη επιλέγω μόνο τους αριθμούς που διαιρούν ταυτόχρονα και τους δυο

6	16	2 •
3	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3

Ε.Κ.Π.(α,β)= $2^4 \cdot 3$, $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha,\beta) = 2$

3) Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό που όταν διαιρεθεί με το 2, το 3, το 4 και το 5 αφήνει κάθε φορά υπόλοιπο 1.

Υπόδειξη: Να παρατηρήσουμε ότι οι αριθμοί 2,3,4 και 5 διαιρέτες του αριθμού και οι διαιρέσεις έγινα διαδοχικά.

4) Αν $\chi = [(4\cdot7+5)\div11]\cdot10-18, y=(4\chi-\chi\div4)\div45$, $\omega=(\chi\cdot y)\div2+6^2-22$, να βρείτε το Ε.Κ.Π.(χ,y,ω) και Μ.Κ.Δ.(χ,y,ω).

Λύση

$\chi = [(28+5)\div11]\cdot10-18$
$\chi = (33\div11)\cdot10-18$
$\chi = 3\cdot10-18$
$\chi = 30-18$

$\chi = 12$
$y = (4\cdot12-12\div4)\div45$
$y = (48-3)\div45$
$y = 45\div45$
$y = 1$

$\omega = 12\cdot1\div2+36-22$
$\omega = 12\div2+36-22$
$\omega = 4+36-22$
$\omega = 40-22$
$\omega = 18$

18	12	1	2
9	6	1	2
9	3	1	3
3	1	1	3
1	1	1	

Ε.Κ.Π.(12,1,18)= $2\cdot2\cdot3\cdot3=36$ Μ.Κ.Δ.(12,1,18)= 1

Ασκήσεις Β΄ Γυμνασίου

Επιμέλεια: Μαντζακίδου Χριστίνα - Παράρτημα ΕΜΕ Σερρών

Θέμα 1

Για την δημιουργία πηλού χρησιμοποιούμε άργιλο και νερό. Αν γνωρίζουμε ότι ο πυλός που δημιουργείτε έχει κατά 20% μεγαλύτερο βάρος από τον άργιλο και ότι κατά την διάρκεια του ψησίματος μειώνεται 25%, να βρείτε πόσα κιλά αργίλου θα χρειαστούμε για να φτιάξουμε διάφορα αγαλματίδια συνολικού βάρους 765 κιλών.

Απάντηση

Έστω x το βάρος του αργίλου που θα χρησιμοποιήσουμε.

Το βάρος του πυλού αρχικά αυξάνεται κατά 20%.

Άρα έχουμε:

Αύξηση: $20\%\cdot x=\frac{20}{100}\cdot x=0,2\cdot x$

Τελική τιμή:

$x+0,2\cdot x=1,2\cdot x$ το βάρος του πυλού.

Έπειτα κατά την διάρκεια του ψησίματος μειώνεται 25%.

Μείωση:

$$25\%\cdot 1,2x=\frac{25}{100}\cdot 1,2\cdot x=0,25\cdot 1,2\cdot x=0,3\cdot x.$$

Τελική τιμή:

$1,2\cdot x-0,3\cdot x=0,9\cdot x$ το βάρος του πυλού.

Επειδή τα αγαλματίδια έχουν συνολικό βάρος 765 κιλά θα έχουμε:

$$0,9\cdot x=765$$

$$\frac{0,9\cdot x}{0,9}=\frac{765}{0,9}$$

$$x=850 \text{ κιλά}$$

Άρα, θα χρειαστούμε 850 κιλά αργίλου.

Θέμα 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{\sqrt{25}+\sqrt{4}+\sqrt{1}}$, $\beta=\sqrt{(-6)^2}-\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{(-1)^2}$ και $\gamma=\sqrt{14+\sqrt{6-\sqrt{4}}}$.

α. Να υπολογίσετε τους αριθμούς α,β και γ.

β. Να βάλετε τους αριθμούς α,β,γ σε αύξουσα σειρά.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές τα α,β και γ.

Απάντηση

α. Είναι:

$$\alpha=\sqrt{\sqrt{25}+\sqrt{4}+\sqrt{1}}=\sqrt{5+2+1}=\sqrt{8}$$

$$\beta=\sqrt{(-6)^2}-\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{36}-2+\sqrt{1}=6-2+1=5$$

$$\gamma=\sqrt{14+\sqrt{6-\sqrt{4}}}=\sqrt{14+\sqrt{6-2}}=\sqrt{14+\sqrt{4}}=\sqrt{14+2}=\sqrt{16}=4$$

β. Ισχύει ότι $\sqrt{8}<4<5$, $(\alpha<\gamma<\beta)$, αφού ισοδύναμα ισχύει ότι $\sqrt{8}<\sqrt{16}<\sqrt{25}$

γ. Για να εξετάσουμε αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές τα α, β και γ θα χρησιμοποιήσουμε το Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\beta=5$, επομένως έχουμε: $\beta^2=5^2=25$

$$\alpha^2+\gamma^2=\left(\sqrt{8}\right)^2+4^2=8+16=24$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών $\sqrt{8},4,5$.

Θέμα 3

Να βρείτε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων:

α. $\dfrac{2(x+1)}{3}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x+2(x+2)}{6}-\dfrac{x}{3}$.

β. $-3[2(x+5)-1]+4x-2(x+6)=-17x$

Απάντηση

α. Το Ε.Κ.Π.$(2,3,6)$=6 οπότε:

$$\frac{2(x+1)}{3}-\frac{x}{2}=\frac{x+2(x+2)}{6}-\frac{x}{3}$$

$$6\cdot\frac{2(x+1)}{3}-6\cdot\frac{x}{2}=6\cdot\frac{x+2(x+2)}{6}-6\cdot\frac{x}{3}$$

$$\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{2(x+1)}{\cancel{3}}-\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}=\overset{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{x+2(x+2)}{\cancel{6}}-\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{x}{\cancel{3}}$$

$$2\cdot 2(x+1)-3\cdot x=1\cdot[x+2(x+2)]-2\cdot x$$

$$4(x+1)-3x=x+2(x+2)-2x$$

$$4x+4-3x=x+2x+4-2x$$

$$4x-3x-x=4-4$$

$$0x=0,\ \text{ταυτότητα}.$$

Άρα, η εξίσωση έχει άπειρες ρίζες.

β. Είναι:

$$-3[2(x+5)-1]+4x-2(x+6)=-17x$$

$$-3\cdot 2(x+5)+3\cdot 1+4x-2x-12=-17x$$

$$-6\cdot(x+5)+3+4x-2x-12=-17x$$

$$-6x-30+3+4x-2x-12=-17x$$

$$-6x+4x-2x+17x=30-3+12$$

$$13x=39$$

$$\frac{13x}{13}=\frac{39}{13}$$

$$x=3$$

Θέμα 4

Το οικόπεδο ΑΒΓΔΕΖ του παρακάτω σχήματος αποτελείται από ένα τραπέζιο ΑΒΕΖ και το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με

$AZ//BE,\ \hat{A}=90^o,\ AB=B\Gamma=60m$

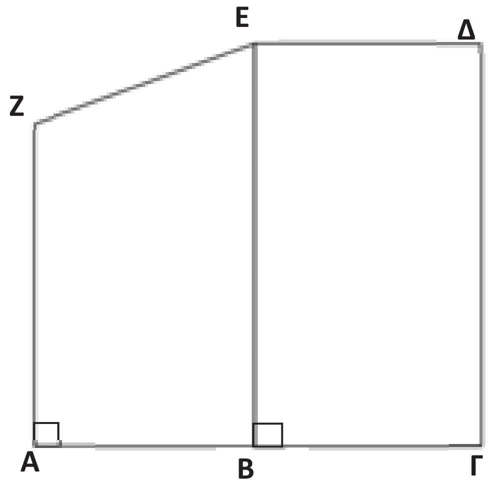
και $AZ=40m$.

Το εμβαδόν του αγρού είναι $10.200m^2$.

α. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ.

β. Σκοπεύουμε να καλύψουμε την επιφάνεια του ορθογωνίου ΒΓΔΕ με πλάκες χλοοτάπητα σχήματος τετραγώνου και μήκους 4m . Να βρείτε πόσες πλάκες χλοοτάπητα θα χρειαστούμε.

γ. Αν γνωρίζουμε ότι το κόστος είναι 8,24€ ανά πλάκα να υπολογίσετε πόσο θα κοστίσει τελικά.



Απάντηση

α. Έστω x πλευρά ΓΔ. Το ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο άρα και η ΒΕ θα είναι x.

Το ολικό εμβαδόν είναι $10.200m^2$ οπότε θα έχουμε:

$$E_{\text{ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ}}+E_{\text{ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ}}=10.200$$

$$\frac{(AZ+BE)\cdot AB}{2}+B\Gamma\cdot\Gamma\Delta=10.200$$

$$\frac{(40+x)\cdot 60}{2}+60\cdot x=10.200$$

$$(40+x)\cdot 30+60x=10.200$$

$$1.200+30x+60x=10.200$$

$$30x+60x=10.200-1.200$$

$$90x=9.000$$

$$\frac{90x}{90}=\frac{9.000}{90}$$

$$x=100$$

Άρα $BE=\Gamma\Delta=100m$

β. Είναι: $E_{B\Gamma\Delta E}=B\Gamma\cdot\Gamma\Delta=60\cdot 100=6.000m^2$

$E_{\text{ΠΛΑΚΑΣ}}=4^2=16m^2$

Άρα, $6.000:16=375$ πλάκες θα χρειαστούν.

γ. Το συνολικό κόστος είναι:

$375 \cdot 8,24 = 3.090€$.

Θέμα 5

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές

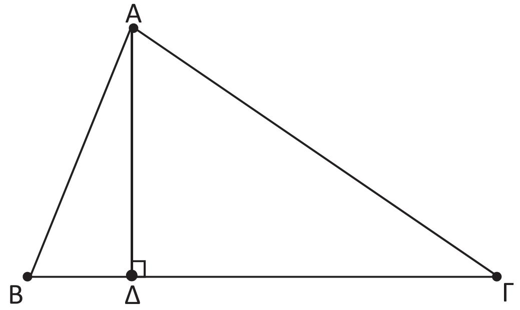
$AB = 4cm$, $A\Gamma = 4\sqrt{3}cm$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$.

α. Να βρείτε τις πλευρές ΑΔ, ΒΔ και ΔΓ.

β. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ΑΒΔ.

(δίνεται $\eta\mu 30^o = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon\varphi 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$)



Απάντηση

α. Είναι:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$$

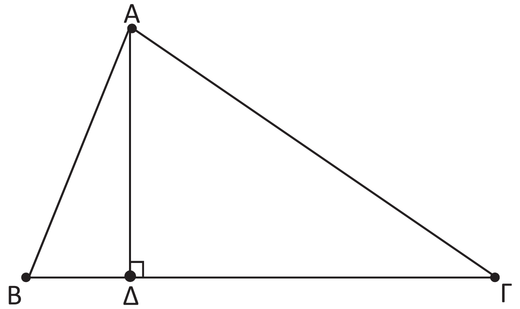
$$\eta\mu 30^o = \frac{A\Delta}{4\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{A\Delta}{4\sqrt{3}}$$

$$2 \cdot A\Delta = 1 \cdot 4\sqrt{3}$$

$$\frac{2 \cdot A\Delta}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$A\Delta = 2\sqrt{3}cm$$



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$$

$$4^2 = \left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + B\Delta^2$$

$$16 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + B\Delta^2$$

$$16 = 4 \cdot 3 + B\Delta^2$$

$$16 = 12 + B\Delta^2$$

$$16 - 12 = B\Delta^2$$

$$4 = B\Delta^2$$

$$B\Delta = \sqrt{4}$$

$$B\Delta = 2cm$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$\left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 = \left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$4^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$16 \cdot 3 = 4 \cdot 3 + \Delta\Gamma^2$$

$$48 = 12 + \Delta\Gamma^2$$

$$48 - 12 = \Delta\Gamma^2$$

$$36 = \Delta\Gamma^2$$

$$\Delta\Gamma = \sqrt{36}$$

$$\Delta\Gamma = 6cm$$

β. Έχουμε ότι

$AB = 4cm$, $A\Gamma = 4\sqrt{3}cm$, $B\Gamma = 6 + 2 = 8cm$

Εφαρμόζοντας το Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος θα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = 8^2 = 64$$

$$A\Gamma^2 + AB^2 = \left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = 4^2 \cdot 3 + 16$$

$$= 16 \cdot 3 + 16 = 48 + 16 = 64$$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

γ. Είναι:

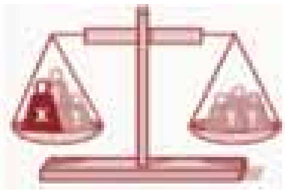
$$E_{A\Delta\Gamma} = \frac{A\Delta \cdot \Delta\Gamma}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{\cancel{2}} = 6 \cdot \sqrt{3}cm^2$$

$$E_{AB\Delta} = \frac{B\Delta \cdot A\Delta}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}} = 2 \cdot \sqrt{3}cm^2$$

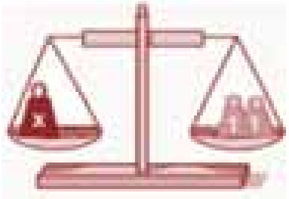
$$E_{A\Delta\Gamma} = 6 \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot E_{AB\Delta}$$

Β΄ Τάξη Ισοδύναμες εξισώσεις

Στυλιανός Μαραγκάκης - Ανδρέας Τριανταφύλλου



Εάν έχουμε μια εξίσωση, μπορούμε να πάρουμε μια ισοδύναμη εξίσωση εκτελώντας την ίδια πράξη και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Για παράδειγμα, αν έχουμε 8x + 4 = 20, μπορούμε να προσθέσουμε τον αριθμό 3 και στα δύο μέλη της, και να πάρουμε 8x + 7 = 23 .



Η νέα εξίσωση θα ισχύει για τις ίδιες ακριβώς τιμές του x με την παλιά εξίσωση. Αυτή η παρατήρηση βοηθάει να λύσουμε μεθοδικά εξισώσεις.

Για παράδειγμα, η εξίσωση 8x + 4 = 20 ισοδυναμεί με την εξίσωση 8x = 16 (αφαίρεσε 4 και από τα δύο μέλη), και αυτό ισοδυναμεί με x = 2 (διαίρεσε και τα δύο μέλη με 8). Η τελευταία εξίσωση είναι αληθής μόνο αν ο x έχει την τιμή 2, οπότε αυτό σημαίνει ότι η λύση της εξίσωσης 8x + 4 = 20 είναι x = 2.

Την παραπάνω διαδικασία τη γράφουμε ως εξής:

$$\begin{array}{rcl} & 8x+4=20 & \\ -4 & \downarrow & -4 \\ & 8x=16 & \\ \div 8 & \downarrow & \div 8 \\ & x=2 & \end{array}$$

Ακολουθούν τρεις προσπάθειες επίλυσης της εξίσωσης $4x-8=40$ (1).
Η καθεμιά έχει ένα λάθος.

Προσπάθεια 1

$$\begin{array}{rcl} & 4x-8=40 & \\ +8 & \downarrow & +8 \\ & 4x=48 & \\ -4 & \downarrow & -4 \\ & x=44 & \end{array}$$

Προσπάθεια 2

$$\begin{array}{rcl} & 4x-8=40 & \\ +8 & \downarrow & -8 \\ & 4x=32 & \\ \div 4 & \downarrow & \div 4 \\ & x=8 & \end{array}$$

Προσπάθεια 3

$$\begin{array}{rcl} & 4x-8=40 & \\ \div 4 & \downarrow & \div 4 \\ & x-8=10 & \\ +8 & \downarrow & +8 \\ & x=18 & \end{array}$$

- Μπορείς να αποδείξεις ότι αυτές οι προσπάθειες δεν είναι οι σωστές λύσεις για την παραπάνω εξίσωση (1);
- Για κάθε μία προσπάθεια βρες, το λάθος που έγινε.
- Μπορείς να λύσεις με την παραπάνω μέθοδο την εξίσωση $4x-8=40$;

Βασική Διαδικασία επίλυσης εξίσωσης	Δύο εξισώσεις είναι **ισοδύναμες** αν μπορείτε να φτάσετε από τη μία στην άλλη επαναλαμβάνοντας κάποια από τα παρακάτω βήματα: • προσθέτοντας έναν αριθμό και στα δύο μέλη • αφαιρώντας έναν αριθμό και από τα δύο μέλη • πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με έναν αριθμό διαφορετικό από το μηδέν • διαιρώντας και τα δύο μέλη με έναν αριθμό διαφορετικό από το μηδέν

<table>
<tr><td></td><td>• εναλλάσσοντας το αριστερό με το δεξιό μέλος της εξίσωσης, ώστε ο άγνωστος να βρεθεί στο αριστερό μέλος.</td></tr>
<tr><td></td><td>• Για να λύσεις μια εξίσωση μεθοδικά, βρες μια ισοδύναμη εξίσωση που κάθε φορά είναι απλούστερη.
Για παράδειγμα:
$$\begin{tikzcd} 5x+2=32 \arrow[d, "-2"', "-2"] \\ 5x=30 \arrow[d, "\div 5"', "\div 5"] \\ x=6 \end{tikzcd}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>• Για να ελέγξεις μια λύση, αντικατάστησε την τιμή του αγνώστου, εκτέλεσε τις πράξεις και έλεγξε αν η ισότητα είναι αληθής.
Για παράδειγμα: Αριστερό μέλος : $5\cdot 6+2=30+2=32$
Δεξιό μέλος : 32</td></tr>
</table>

Παραδείγματα:

$$\begin{tikzcd} 40-6x=22 \arrow[d, "-40"', "-40"] \\ -6x=-18 \arrow[d, "\div -6"', "\div -6"] \\ x=3 \end{tikzcd}$$

Για να «διώξω» το 40, αφαιρώ το 40 και από τα 2 μέλη.

Για να απλοποιήσω το – 6x, διαιρώ με το – 6 και τα 2 μέλη.

Έλεγχος: $40-6\cdot(3)=40-18=22$

$$\begin{tikzcd} 2u+17=27 \arrow[d, "-17"', "-17"] \\ 2u=10 \arrow[d, "\div 2"', "\div 2"] \\ u=5 \end{tikzcd}$$

Για να «διώξω» το 17, αφαιρώ το 17 και από τα 2 μέλη.

Για να απλοποιήσω το $2u$, διαιρώ με το 2 και τα δύο μέλη.

Έλεγχος: $2\cdot(5)+17=10+17=27$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Για κάθε εξίσωση συμπλήρωσε το κενό, ώστε να δημιουργηθεί ισοδύναμη εξίσωση

$$\begin{tikzcd} 5x=13 \arrow[d, "+2"', "+2"] \\ 5x+2=\_\_ \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 10-2x=27 \arrow[d, "+5"', "+5"] \\ 15-2x=\_\_ \end{tikzcd}$$

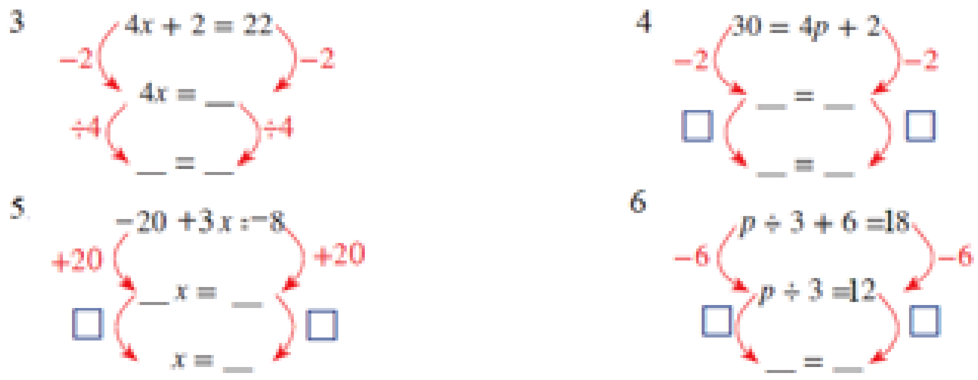
- Για να λύσεις την εξίσωση 10x + 5 = 45, ποια από τις παρακάτω πράξεις θα εφαρμόσεις πρώτα και στα 2 μέλη; (επιλέγω με ✓)

Διαίρεση με το 5 ☐ Αφαίρεση 5 ☐ Διαίρεση με το 10 ☐ Αφαίρεση 45 ☐

- Αντίγραψε και συμπλήρωσε τα παρακάτω για να λύσεις μεθοδικά κάθε δοσμένη εξίσωση.

1
$$\begin{tikzcd} 10x=50 \arrow[d, "\div 10"', "\div 10"] \\ x=\_\_ \end{tikzcd}$$

2
$$\begin{tikzcd} q+5=12 \arrow[d, "-5"', "-5"] \\ \_\_=\_\_ \end{tikzcd}$$



- Λύσε τις παρακάτω εξισώσεις μεθοδικά. Έλεγξε τη λύση, αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου στην εξίσωση.

Α. $9x+14=32$	Β. $9x-6=39$
Γ. $13=5y-2$	Δ. $6+3y=18$
Ε. $23=5x+8$	Στ. $44=10x-6$
Ζ. $8x-8=8$	Η. $4y+8=12$

- Οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν λύση ακέραιο αριθμό. Λύσε τις παρακάτω εξισώσεις μεθοδικά, δίνοντας κάθε λύση ως κλάσμα.

Α. $2x+4=33$	Β. $3x+5=6$
Γ. $12=10y+7$	Δ. $10+3y=15$
Ε. $10-2x=3$	Στ. $-11=-2x-16$
Ζ. $5x+9=23$	Η. $15=12+2y$

- Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψεις μια εξίσωση και να τη λύσεις συστηματικά.

α. Το άθροισμα του p και του 8 είναι 15. β. Το γινόμενο των q και 3 είναι 12.

γ. Τέσσερα αφαιρούνται από το διπλάσιο της τιμής του k και το αποτέλεσμα είναι 18

δ. Όταν το x τριπλασιαστεί και προστεθεί 4, το αποτέλεσμα είναι 34 .

- Τα παρακάτω σχήματα είναι ορθογώνια. Λύσε συστηματικά τις εξισώσεις που δημιουργούνται, και βρες την τιμή των μεταβλητών, σε μονάδες μήκους.

- Πρέπει να πληρωθεί ένας λογαριασμός εστιατορίου 100 €. Ο κ. Στέλιος βάζει το ένα τρίτο του ποσού που έχει στο πορτοφόλι του, αφήνοντας 60 € να πληρωθούν από τα άλλα άτομα στο τραπέζι.

  α. Γράψε μια εξίσωση για να περιγράψεις αυτήν την κατάσταση, αν το x αντιπροσωπεύει τα χρήματα που έχει στο πορτοφόλι του ο κ. Στέλιος πριν πληρώσει.

  β Λύσε την εξίσωση συστηματικά και, βρες πόσα χρήματα ο κ. Στέλιος στο πορτοφόλι του, πριν πληρώσει.

Προτεινόμενη άσκηση για τη Β΄ Γυμνασίου

Επιμέλεια: Ασημάκης Παναγιώτης, Καψή Θέμις, Φουσέκη Παναγιώτα

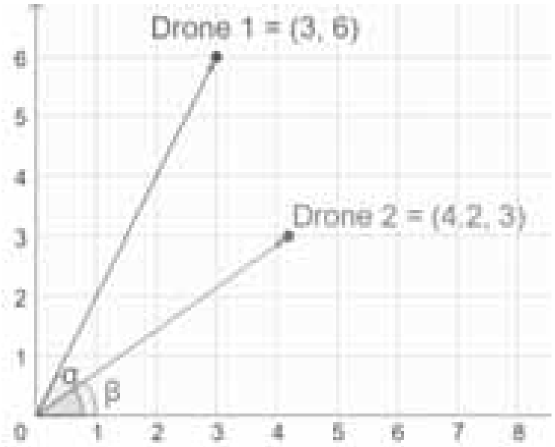
Διοργανώνεται ένα πάρτυ σε χώρο στον οποίο η μία πλευρά του είναι ανοιχτή. Οι γονείς προκειμένου να μην φύγει κάποιο παιδί από τον χώρο, κάλεσαν μια εταιρεία με drones για να επιβλέπουν τον χώρο, ώστε να μην απομακρυνθεί κάποιο παιδί και να καταγράφουν την περιοχή σε live streaming. Το drone 1 είναι σταθερό και ακίνητο στο σημείο με συντεταγμένες (3, 6) ενώ το drone 2 κινείται παράλληλα στο έδαφος με σταθερό ύψος 3.

Τα δύο drones προκειμένου να αναμεταδίδουν διαφορετικές εικόνες και όχι την ίδια, πρέπει οι γωνίες α και β, που φαίνονται στο σχήμα, να μην είναι ίσες.

Ο διοργανωτής προβληματίζεται και τελικά ισχυρίζεται ότι είναι αδύνατο τα δύο drones να σχηματίσουν την ίδια γωνία ως προς το σημείο που αντιστοιχεί στο O(0,0), αφού βρίσκονται συνέχεια σε διαφορετικά ύψη.

Οι ημιάξονες Ox και Oy αναπαριστούν έδαφος και τοίχο αντίστοιχα, όπου δεν μπορούν και δεν πρέπει να ακουμπήσουν τα drones.

https://www.geogebra.org/calculator/yaebcsed



Μπείτε στην εφαρμογή https://www.geogebra.org/calculator/yaebcsed μετακινήστε το drone 2 και πείτε αν συμφωνείτε ότι είναι αδύνατο να σχηματιστεί η ίδια γωνία.

Αν βρήκατε ότι μπορεί οι γωνίες α και β να είναι ίσες, για ποιες συντεταγμένες των δύο drones συμβαίνει αυτό ;

Μπορείτε με βάση τριγωνομετρικούς πίνακες ή το κομπιουτεράκι σας , να υπολογίσετε τη γωνία τότε;

Υπάρχει άλλη γωνία που να σχηματίζεται και για τα δύο drones από κοινού; Γιατί;

Γ΄ Τάξη

Ασκήσεις Γ΄ Γυμνασίου

Επιμέλεια: Μαντζακίδου Χριστίνα - Παράρτημα ΕΜΕ Σερρών

Θέμα 1

α. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\mathbf{x^3-4x,\ x^2-4x+4,\ x^2-5x+6,\ 2x^2-6x.}$$

β. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

$$A=\frac{x^3-4x}{x^2-4x+4},\quad B=\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}\ .$$

γ. Να υπολογιστεί το γινόμενο $A\cdot B$.

Απάντηση

α. Είναι:

- $x^3-4x=x\cdot(x^2-4)=x\cdot(x^2-2^2)=x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$
- $x^2-4x+4=x^2-2\cdot2\cdot x+2^2=(x-2)^2$
- $x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=$
  $=x(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x-3)$
- $2x^2-6x=2x(x-3)$

β. Η παράσταση A ορίζεται αν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν, δηλαδή:

$x^2-4x+4\neq0$

$(x-2)^2\neq0$

$x-2\neq0$

$x\neq2$

Άρα, για $x\neq2$ είναι:

$$A=\frac{x^3-4x}{x^2-4x+4}$$

$$=\frac{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x\cdot\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{(x-2)^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{x\cdot(x+2)}{x-2}$$

Η παράσταση B ορίζεται αν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν, δηλαδή:

$2x^2-6x\neq0$

$2x(x-3)\neq0$

$2x\neq0$ και $x-3\neq0$

$x\neq0$ και $x\neq3$

Άρα, για $x\neq0$ και $x\neq3$ είναι:

$$B=\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}=\frac{(x-2)(x-3)}{2x(x-3)}$$

$$=\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{2x\cancel{(x-3)}}=\frac{x-2}{2x}$$

γ. Για $x\neq0, x\neq2$ και $x\neq3$ είναι:

$$A\cdot B=\frac{x^3-4x}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$$

$$=\frac{x(x+2)}{x-2}\cdot\frac{x-2}{2x}=\frac{x(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot2x}$$

$$=\frac{\cancel{x}(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cdot2\cancel{x}}=\frac{x+2}{2}$$

Θέμα 2

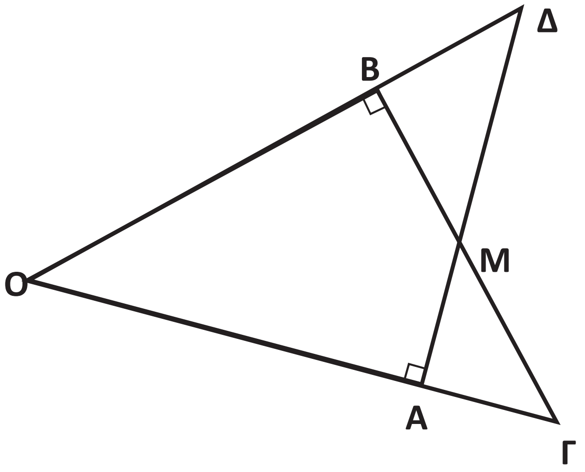
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε

$$\mathbf{OA=OB,\ \Gamma B\perp O\Delta\ \text{και}\ A\Delta\perp O\Gamma.}$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές.

β. Το σημείο Μ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΓΔ.

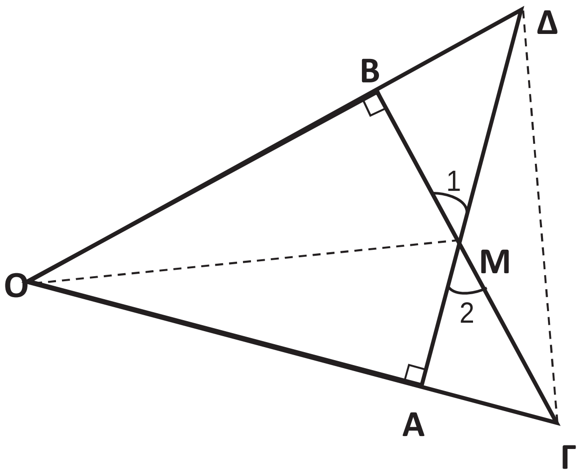


Απάντηση

α. Αρκεί να δείξουμε ότι ΟΓ = ΟΔ.

Γνωρίζουμε ότι ΟΒ = ΟΑ, μένει να αποδείξουμε ότι ΒΔ = ΑΓ.

Φέρνουμε τις βοηθητικές γραμμές ΟΜ και ΓΔ.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΟΜΑ

1. ΟΒ = ΟΑ (από υπόθεση)

2. ΟΜ κοινή πλευρά

Τα τρίγωνα ΟΜΒ, ΟΜΑ είναι ορθογώνια και έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, επομένως είναι ίσα.

Άρα θα ισχύει ότι: ΜΒ = ΜΑ

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΓΜΑ

1. ΜΒ = ΜΑ (αποδείχθηκε προηγουμένως)

2. $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΓΜΑ είναι ορθογώνια και έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, επομένως είναι ίσα.

Άρα θα ισχύει ότι: ΒΔ = ΑΓ

Έχουμε ότι: $ΟΑ = ΟΒ,\ ΑΓ = ΒΔ$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$ΟΑ + ΑΓ = ΟΒ + ΒΔ$

$ΟΓ = ΟΔ$

Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές.

β. Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

Στο **α.** ερώτημα δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΓΜΑ είναι, άρα θα ισχύει και ΜΔ = ΜΓ.

Επομένως, το Μ ισαπέχει από τα άκρα του ΓΔ άρα θα ανήκει στην μεσοκάθετο του .

Θέμα 3

α. Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{7}{x^2-4} + \frac{5}{x^2-2x} - \frac{4x+15}{x^2+2x}$$

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση.

β. Δίνεται η παράσταση $B = \dfrac{\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-16}}{\dfrac{5x^2-2x-3}{x^2-4x}}$.

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση.

Απάντηση

α. 1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές:

$$x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$$

$$x^2-2x=x\cdot(x-2)$$

$$2x^2+4x=2x\cdot(x+2)$$

Η παράσταση της

$A=\dfrac{7}{x^2-4}+\dfrac{5}{x^2-2x}-\dfrac{4x+15}{2x^2+4x}$ ορίζεται

αν οι παρονομαστές δεν είναι μηδέν, δηλαδή:

- $x^2-4\neq 0$

  $(x-2)(x+2)\neq 0$

  $x-2\neq 0$ και $x+2\neq 0$

  $x\neq 2$ και $x\neq -2$

- $x^2-2x\neq 0$

  $x\cdot(x-2)\neq 0$

  $x\neq 0$ και $x-2\neq 0$

  $x\neq 0$ και $x\neq 2$

- $2x^2+4x\neq 0$

  $2x\cdot(x+2)\neq 0$

  $2x\neq 0$ και $x+2\neq 0$

  $x\neq 0$ και $x\neq -2$

Πρέπει $x\neq -2$, $x\neq 0$ και $x\neq 2$

2. Είναι: $A=\dfrac{7}{x^2-4}+\dfrac{5}{x^2-2x}-\dfrac{4x+15}{2x^2+4x}$

$$=\frac{7}{(x-2)(x+2)}+\frac{5}{x(x-2)}-\frac{4x+15}{2x(x+2)}$$

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι: ΕΚΠ $=2x(x-2)(x+2)$, οπότε:

$$A=\frac{7\cdot 2x}{2x(x-2)(x+2)}+\frac{5\cdot 2(x+2)}{2x(x-2)(x+2)}-\frac{(4x+15)\cdot(x-2)}{2x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{14x+(10x+20)-(4x^2+15x-8x-30)}{2x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{14x+10x+20-4x^2-15x+8x+30}{2x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{-4x^2+17x+50}{2x(x-2)(x+2)}=\frac{-4x^2-8x+25x+50}{2x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{-4x(x+2)+25(x+2)}{2x(x-2)(x+2)}=\frac{(x+2)(-4x+25)}{2x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{\cancel{(x+2)}(-4x+25)}{2x(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{-4x+25}{2x(x-2)}$$

β. 1. Επειδή έχουμε ένα σύνθετο κλάσμα θα πρέπει ο παρονομαστής του να μην είναι μηδέν καθώς και οι παρονομαστές του αριθμητή και του παρονομαστή να μην είναι μηδέν. Δηλαδή, πρέπει:

$$\frac{5x^2-2x-3}{x^2-4x}\neq 0,\qquad x^2-16\neq 0,\qquad x^2-4x\neq 0$$

Παραγοντοποιούμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές:

- $5x^2-2x-3=5x^2-5x+3x-3$

  $=5x(x-1)+3(x-1)$

  $=(x-1)(5x+3)$

- $2x^2-x-1=2x^2-2x+x-1$

  $=2x(x-1)+(x-1)$

  $=(x-1)(2x+1)$

- $x^2-16=x^2-4^2$

$$=(x-4)(x+4)$$

- $x^2-4x=x(x-4)$

Άρα θα έχουμε:

- $\dfrac{5x^2-2x-3}{x^2-4x}\neq 0$

$5x^2-2x-3\neq 0$

$(x-1)(5x+3)\neq 0$

$x-1\neq 0$ και $5x+3\neq 0$

$x\neq 1$ και $x\neq -\dfrac{3}{5}$

- $x^2-16\neq 0$

$(x-4)(x+4)\neq 0$

$x-4\neq 0$ και $x+4\neq 0$

$x\neq 4$ και $x\neq -4$

- $x^2-4x\neq 0$

$x(x-4)\neq 0$

$x\neq 0$ και $x-4\neq 0$

$x\neq 0$ και $x\neq 4$

Άρα πρέπει

$x\neq -4,\quad x\neq -\dfrac{3}{5},\quad x\neq 0,\quad x\neq 1$ και $x\neq 4$

.

2. Είναι: $B=\dfrac{\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-16}}{\dfrac{5x^2-2x-3}{x^2-4x}}$

$$=\frac{(2x^2-x-1)(x^2-4x)}{(x^2-16)(5x^2-2x-3)}$$

$$=\frac{(x-1)(2x+1)x(x-4)}{(x-4)(x+4)(x-1)(5x+3)}$$

$$=\frac{\cancel{(x-1)}(2x+1)x\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)\cancel{(x-1)}(5x+3)}$$

$$=\frac{x(2x+1)}{(x+4)(5x+3)}$$

Θέμα 4

Έστω τα πολυώνυμα :

$$\mathbf{A(x)=-x(3x+2)-(x-1)(x+1)-(x\sqrt{6}-1)(-1-x\sqrt{6})}$$

$$\mathbf{B(x)=(3x-2)^2-(4x-3)(2x-1)}$$

α. Να δείξετε ότι $\mathbf{A(x)=2x^2-2x}$ και $\mathbf{B(x)=(x-1)^2}$.

β. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε να ορίζεται η αλγεβρική παράσταση $\mathbf{\Gamma(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\mathbf{\Delta(x)=(x-1)\Gamma(x)}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{\Delta(x)=2+2(x-1)}$

Απάντηση

α. Είναι:

$$A(x)=-x(3x+2)-(x-1)(x+1)-(x\sqrt{6}-1)(-1-x\sqrt{6})$$

$$=-3x^2-2x-(x^2-1^2)-(x\sqrt{6}-1)\cdot\left[-(x\sqrt{6}+1)\right]$$

$$=-3x^2-2x-x^2+1-(x\sqrt{6}-1)\cdot(x\sqrt{6}+1)$$

$$=-3x^2-2x-x^2+1+(x\sqrt{6})^2-1^2$$

$$=-3x^2-2x-x^2+1+x^2\sqrt{6}^2-1$$

$$=-3x^2-2x-x^2+1+6x^2-1=2x^2-2x$$

$$B(x)=(3x-2)^2-(4x-3)(2x-1)$$

$$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2-(4x\cdot 2x-4x\cdot 1-3\cdot 2x+3\cdot 1)$$

$$=9x^2-12x+4-(8x^2-4x-6x+3)$$

$=9x^2-12x+4-8x^2+4x+6x-3$

$=x^2-2x+1=(x-1)^2$

β. Θα πρέπει ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν, δηλαδή $B(x)\neq 0$

$$(x-1)^2\neq 0$$

$$x-1\neq 0$$

$$x\neq 1$$

Για $x\neq 1$ είναι:

$$\Gamma(x)=\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{2x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{2x}{x-1}$$

γ. Για $x\neq 1$ είναι:

$$\Delta(x)=(x-1)\Gamma(x)=(x-1)\cdot\frac{2x}{x-1}=$$

$$=\cancel{(x-1)}\cdot\frac{2x}{\cancel{x-1}}=2x$$

Για $x\neq 1$ είναι: $\Delta(x)=2+2(x-1)$

$$2x=2+2x-2$$

$$2x-2x=2-2$$

$0x=0$ που είναι ταυτότητα για κάθε $x\neq 1$.

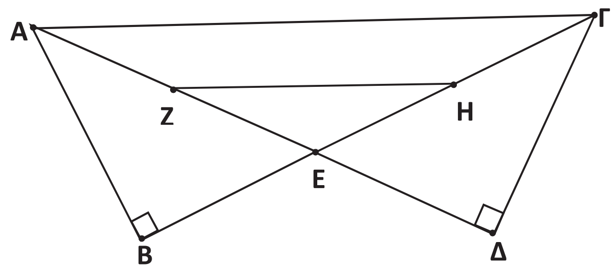
Θέμα 5

Στο παρακάτω σχήμα θεωρούμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ και Ε το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΑ. Αν Ζ το μέσο της ΑΕ και Η το μέσο της ΕΓ και ΑΒ = ΔΓ:

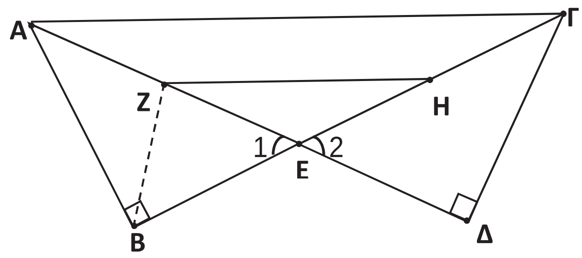
α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, καθώς και ότι το ΖΗ είναι παράλληλο στο ΑΓ.

γ. Αν ΒΖ = 10 cm και ΑΓ = 20cm να βρείτε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΖΗΓ.



Απάντηση



α. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ

1. ΑΒ = ΓΔ (από υπόθεση)

2. $\hat{E}_1=\hat{E}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ορθογώνια και έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, επομένως είναι ίσα.

β. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα θα ισχύει ΑΕ = ΕΓ.

Επομένως το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

Μένει να δείξουμε ότι το ΖΗ είναι παράλληλο στο ΑΓ.

Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Το Ζ είναι μέσο της ΑΕ και το Η είναι μέσο της ΕΓ άρα $ZH \parallel A\Gamma$ και $ZH=\dfrac{A\Gamma}{2}$.

γ. Είναι: $A\Gamma = 20cm$ οπότε

$$ZH = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{20}{2} = 10cm$$

Η ΒΖ είναι διάμεσος που καταλήγει στην υποτείνουσα.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Άρα, $BZ = \dfrac{AE}{2}$

$$AE = 2 \cdot BZ$$

$$AE = 2 \cdot 10$$

$$AE = 20cm$$

Άρα $AZ = 10cm$ και $H\Gamma = 10cm$ ως μισά ίσως πλευρών (ΑΕ = ΕΓ).

Συνεπώς, η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΖΗΓ είναι:

$$\Pi_{AZH\Gamma} = AZ + A\Gamma + \Gamma H + ZH = 10 + 20 + 10 + 10 = 50cm$$

Προτεινόμενη άσκηση για τη Γ΄ Γυμνασίου

Μαρία Παππά

Υπολογίστε την παράσταση: $\mathbf{A} = \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}}\right)^{48}$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $\alpha > 0$, *είναι* $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Αυτό μπορεί να γίνει $(\sqrt{\alpha})^2 = \left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha$

Γνωρίζουμε: αν $\alpha > 0$: $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$.

$$A = \left[\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}}\right)^2\right]^{24} = \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}\right)^{24} = \left[\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}\right)^2\right]^{12} = \left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^{12}$$

$$= [\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^2]^6 = \sqrt{5}^6 = [\left(\sqrt{5}\right)^2]^3 = 5^3 = 125$$

Άλλος τρόπος είναι να συγκεντρώσεις τις ρίζες σε μια και να απλοποιήσεις δείκτη με εκθέτη.

$$\left(\sqrt[8]{5}\right)^{48} = \left(\sqrt{5}\right)^6 = 5^3 = 125.$$

Ασκήσεις Γ΄ Γυμνασίου

Χρήστος Π. Τσιφάκης - Αγγελική Γ. Δανιήλογλου

ΑΣΚΗΣΗ 1η:

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σ ή Λ** αν είναι σωστές ή λανθασμένες.

i) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει: $\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ **Σ Λ**

ii) Αν $\alpha\le 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha^2}=-\alpha$ **Σ Λ**

iii) Ισχύει $-\sqrt{(-3)^2}=3$ **Σ Λ**

iv) $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta^{-1}}$, με $\beta\ne 0$ **Σ Λ**

v) $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ με $\alpha,\beta>0$ **Σ Λ**

ΑΣΚΗΣΗ 2η:

Α. Αν $\alpha=6\cdot 10^5$ και $\beta=8\cdot 10^5$ τότε ο αριθμός $A=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ισούται με

i) 10^{-6} **ii)** 10^5

iii) 10^6 **iv)** 10 **v)** $\sqrt{10}$

κυκλώστε την σωστή απάντηση.

Β. Αν $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Ο αριθμός φ είναι ο λόγος της «χρυσής τομής» και ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του Φειδία), τότε

i) $\varphi+1=\dfrac{1}{\varphi}$ **ii)** $\varphi-1=\dfrac{1}{\varphi}$

iii) $\varphi^2=\varphi+1$ **iv)** $2\varphi+1=\sqrt{5}$

κυκλώστε την σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΗ 3η:

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\mathbf{A=\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}}$

ii) $\mathbf{B=\sqrt{20+\sqrt{21+2\sqrt{1+\sqrt{9}}}}}$

iii) $\mathbf{\Gamma=\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{3}}+\sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{3}}}$

ΛΥΣΗ

i) $A=\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}=\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{7+2}}}=$
$=\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{9}}}=\sqrt{14+\sqrt{1+3}}=\sqrt{14+\sqrt{4}}=$
$=\sqrt{14+2}=\sqrt{16}=4$

ii) $B=\sqrt{20+\sqrt{21+2\sqrt{1+\sqrt{9}}}}=$
$=\sqrt{20+\sqrt{21+2\sqrt{1+3}}}=$
$=\sqrt{20+\sqrt{21+2\sqrt{4}}}=\sqrt{20+\sqrt{21+4}}=\sqrt{20+\sqrt{25}}=$
$=\sqrt{20+5}=\sqrt{25}=5$

iii) $\Gamma=\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{3}}+\sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{|1+\sqrt{3}|}{\sqrt{3}}+\dfrac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{3}}\overset{\sqrt{3}>1}{=}$

$=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$

ΑΣΚΗΣΗ 4η:

Αν $\alpha,\beta>0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A=\dfrac{\sqrt{\alpha^3\cdot\beta}+\sqrt{\alpha\cdot\beta^3}}{\sqrt{\alpha\beta}}$

ii) $B=\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

ΛΥΣΗ

i) $A=\dfrac{\sqrt{\alpha^3\cdot\beta}+\sqrt{\alpha\cdot\beta^3}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha^2\cdot\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta\cdot\beta^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}=$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta^2}\cdot\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{|\alpha|\cdot\sqrt{\alpha\beta}+|\beta|\cdot\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=$$

$$\frac{\alpha\cdot\sqrt{\alpha\beta}+\beta\cdot\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{(\alpha+\beta)\cdot\cancel{\sqrt{\alpha\beta}}}{\cancel{\sqrt{\alpha\beta}}}=\alpha+\beta$$

ii) $B=\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\cdot\beta^2}}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2\cdot\beta^2}}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2}{|\alpha\beta|}\overset{\alpha,\beta>0}{=}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5η:

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\mathbf{A=\frac{\sqrt{\sqrt{16}+2^{(\sqrt{4})^{\sqrt{9}}}}}{4^4}}\qquad \mathbf{B=\sqrt{\frac{4^{10}+8^{10}}{4^{11}+8^4}}}$$

ΛΥΣΗ

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt{16}+2^{(\sqrt{4})^{\sqrt{9}}}}}{4^4}=\frac{\sqrt{4+2^{(\sqrt{4})^3}}}{4^4}=\frac{2+2^{(2)^3}}{4^4}=$$

$$\frac{2+2^8}{(2^2)^4}=\frac{2(1+2^7)}{2^8}=\frac{1+2^7}{2^7}=\frac{129}{128}$$

$$B=\sqrt{\frac{4^{10}+8^{10}}{4^{11}+8^4}}=\sqrt{\frac{(2^2)^{10}+(2^3)^{10}}{(2^2)^{11}+(2^3)^4}}=\sqrt{\frac{2^{20}+2^{30}}{2^{22}+2^{12}}}=$$

$$\sqrt{\frac{2^{20}\cancel{(1+2^{10})}}{2^{12}\cancel{(1+2^{10})}}}=\sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}}=\sqrt{2^8}=2^4=16$$

ΑΣΚΗΣΗ 6η:

i) Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}}$

ii) Να βρείτε την πλευρά και την περίμετρο ενός τετραγώνου, που έχει εμβαδόν $\mathbf{E=\left(3+2\sqrt{2}\right)\,m^2}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε ότι: $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=$

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$$

ii) Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται από τον τύπο $E=\alpha^2$, όπου α είναι η πλευρά του.

Έτσι έχουμε $\alpha^2=\left(3+2\sqrt{2}\right)\,m^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2\,m^2$

Άρα $\alpha=\left(1+\sqrt{2}\right)\,m$ και τότε η περίμετρος θα είναι $\Pi=4\alpha=4\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(4+4\sqrt{2}\right)m$

ΑΣΚΗΣΗ 7η:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$. Αν ονομάσουμε τις πλευρές του α,β,γ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\mathbf{K=\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\beta^2}$$

$$\Lambda=\left(\sqrt{\beta\cdot\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\right)^2+\left(\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\right)^2+\left(\sqrt{\gamma\cdot\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)^2$$

ΛΥΣΗ

$$K=\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\beta^2=\alpha\sqrt{\alpha^2}-\beta^2=\alpha^2-\beta^2=\gamma^2$$

$$\Lambda=\left(\sqrt{\beta\cdot\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\right)^2+\left(\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\right)^2+\left(\sqrt{\gamma\cdot\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)^2=$$

$$\beta\cdot\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}+\left(\sqrt{\alpha^2}\right)^2+\gamma\cdot\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=$$

$$\beta^2+\alpha^2+\gamma^2=2\alpha^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 8η:

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\mathbf{-2x+\sqrt{2}=4x-2\sqrt{2}}$

ii) $\mathbf{3\left(x+\sqrt{2}\right)=4x-5\left(2\sqrt{18}+x\right)}$

iii) $\mathbf{\sqrt{80}x+12=-\frac{x}{\sqrt{5}}-3}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε ότι $-2x+\sqrt{2}=4x-2\sqrt{2}$, δηλαδή $-2x-4x=-2\sqrt{2}-\sqrt{2}$, δηλαδή $-6x=-3\sqrt{2}$, δηλαδή $x=\frac{-3\sqrt{2}}{-6}$, δηλαδή $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ii) $3\left(x+\sqrt{2}\right)=4x-5\left(2\sqrt{18}+x\right)$, δηλαδή

$3x+3\sqrt{2}=4x-10\sqrt{18}-5x$, δηλαδή

$3x+5x-4x=-10\sqrt{18}-3\sqrt{2}$, δηλαδή

$4x=-10\sqrt{9\cdot 2}-3\sqrt{2}$, δηλαδή

$4x=-30\sqrt{2}-3\sqrt{2}$, δηλαδή

$4x=-33\sqrt{2}$, δηλαδή $x=\dfrac{-33\sqrt{2}}{4}$

iii) $\sqrt{80}x+12=-\dfrac{x}{\sqrt{5}}-3$, δηλαδή

$\sqrt{80}x+\dfrac{x}{\sqrt{5}}=-3-12$, δηλαδή

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{80}x+\cancel{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{x}{\cancel{\sqrt{5}}}=-15\cdot\sqrt{5}$, δηλαδή

$\sqrt{400}x+x=-15\cdot\sqrt{5}$, δηλαδή

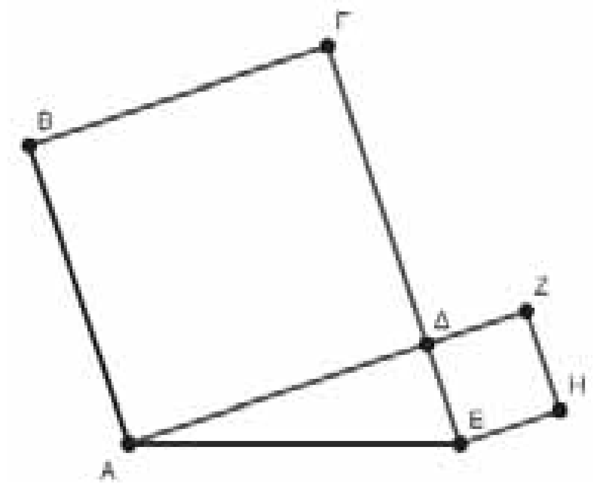
$20x+x=-15\cdot\sqrt{5}$, δηλαδή

$21x=-15\cdot\sqrt{5}$, δηλαδή

$x=\dfrac{-15\cdot\sqrt{5}}{21}$, δηλαδή $x=\dfrac{-5\cdot\sqrt{5}}{7}$

ΑΣΚΗΣΗ 9η:

Στο σχήμα, το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $E_{ΑΒΓΔ}=80\ cm^2$ και το εμβαδόν του τετραγώνου ΔΕΗΖ είναι $E_{ΔΕΗΖ}=45\ cm^2$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ ισούται με $12\sqrt{5}$ cm.



ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι ίσο με $E=ΑΔ^2$ δηλαδή $ΑΔ^2=80$ άρα

$$ΑΔ=\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

Όμοια το εμβαδόν του ΔΕΖΗ ισούται με $E_{ΔΕΖΗ}=ΔΕ^2$, δηλαδή $ΔΕ^2=45$, άρα

$$ΔΕ=\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και έχουμε

$$ΑΕ^2=ΑΔ^2+ΔΕ^2=80+45=125$$

Άρα $ΑΕ=\sqrt{125}=\sqrt{25\cdot 5}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

Έτσι η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΕ είναι

$$Π=ΑΔ+ΔΕ+ΑΕ=4\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}=12\sqrt{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10η:

Αν το $x=3\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=A-2\cdot B$, όπου $A=x^3-3x^2+3x-1$ και $B=x^2-2x+5\sqrt{2}$

ΛΥΣΗ

Για $x=3\sqrt{2}$ η παράσταση Α γίνεται:

$A=x^3-3x^2+3x-1=$

$\left(3\sqrt{2}\right)^3-3\left(3\sqrt{2}\right)^2+3\left(3\sqrt{2}\right)-1=$

$3^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3-3\cdot 3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+9\sqrt{2}-1=$

$27\cdot 2\sqrt{2}-27\cdot 2+9\sqrt{2}-1=$

$54\sqrt{2}-54+9\sqrt{2}-1=63\sqrt{2}-55$

και η παράσταση

$B=x^2-2x+5\sqrt{2}=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\left(3\sqrt{2}\right)+5\sqrt{2}=$

$18-6\sqrt{2}+5\sqrt{2}=18-\sqrt{2}$

Άρα η παράσταση Κ ισούται

$K=A-2\cdot B=63\sqrt{2}-55-2\left(18-\sqrt{2}\right)=$

$63\sqrt{2}-55-36+2\sqrt{2}=65\sqrt{2}-91$

JBMO

Albania 2023

27η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων
Τίρανα, Αλβανία
23 - 28 Ιουνίου 2023

Η **27η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (BMON)** πραγματοποιήθηκε από 23 έως 28 Ιουνίου 2023 στα Τίρανα της Αλβανίας. Συνολικά συμμετείχαν δεκαεννιά ομάδες από δεκαοκτώ χώρες. Από τις δεκαοκτώ χώρες, οι δέκα ήταν χώρες των Βαλκανίων (Αλβανία, Βοσνία και Ερζεγοβίνη, Βουλγαρία, Κύπρος, Δημοκρατία της Βόρειας Μακεδονίας, Ελλάδα, Μολδαβία, Ρουμανία, Σερβία, και Τουρκία), ενώ προσκλήθηκαν άλλες οκτώ (Αζερμπαϊτζάν, Κροατία, Γαλλία, Καζακστάν, Κιργιστάν, Σαουδική Αραβία, Τατζικιστάν, και Τουρκμενιστάν). Η Αλβανία, ως η διοργανώτρια χώρα, συμμετείχε και με μια δεύτερη ομάδα ανάμεσα σε αυτές των προσκεκλημένων χωρών. Το Μαυροβούνιο, αν και είχε δηλώσει συμμετοχή, δεν έλαβε μέρος τελικά.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, μέσω των διαγωνισμών «ΘΑΛΗΣ» και «ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» μεταξύ των μαθητών και μαθητριών που συμμετείχαν και διακρίθηκαν, επέλεξε τα παρακάτω έξι μέλη της ελληνικής αποστολής:

Καραγεωργίου Λάζαρος	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Αργυρό Μετάλλιο
Τσουρέκας Μιχαήλ	Μουσικό Σχολείο Ιλίου	Αργυρό Μετάλλιο
Ζάχου Ιωάννα	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χάλκινο Μετάλλιο
Μπερούκας Κωνσταντίνος	1ο Γυμνάσιο Πύργου Ηλείας	Χάλκινο Μετάλλιο
Κράτσα Λυδία	Σχολή Μωραΐτη	Συμμετοχή
Μπερκουτάκης Νεκτάριοσ-Ραφαήλ	4ο Γυμνάσιο Πύργου Ηλείας	Συμμετοχή

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, τέσσερις μαθητές μας κατάφεραν να αποσπάσουν **δύο Αργυρά** και **δύο Χάλκινα Μετάλλια** συνεχίζοντας τη μεγάλη παράδοση των επιτυχιών των Ελληνικών ομάδων στις Βαλκανικές και Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες και δημιουργώντας υψηλές προσδοκίες για ακόμη μεγαλύτερες επιτυχίες τα επόμενα χρόνια.

Δουλεύοντας σκληρά και συστηματικά τις τελευταίες εβδομάδες, μελετώντας ατελείωτες ώρες εν μέσω απολυτήριων εξετάσεων και παρακολουθώντας το εντατικό πρόγραμμα των διαδικτυακών μαθημάτων της ΕΜΕ, έφτασαν σε μια μεγάλη επιτυχία για τους ίδιους και τους γονείς τους, την ΕΜΕ και τη χώρα μας. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει θερμά όλα τα μέλη της ομάδας για την σκληρή τους προσπάθεια, τη συμμετοχή και την επιτυχία τους.

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, στον οποίο οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν, και υπαρχηγός ο μεταπτυχιακός φοιτητής του Πανεπιστημίου Princeton Κυπριανός - Ιάσονας Προδρομίδης.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Βόρεια Μακεδονία). Να βρείτε όλα τα ζεύγη (a,b) θετικών ακέραιων αριθμών τέτοια ώστε οι αριθμοί $a!+b$ και $b!+a$ να είναι και οι δύο δυνάμεις του 5. Προφανώς η μέγιστη δύναμη του 5 που διαιρεί τον $a!$ είναι το k.

Λύση (1ος τρόπος - Βασισμένος στη λύση του Λάζαρου Καραγεωργίου). Έστω a,b θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $a!+b=5^x$ και $b!+a=5^y$ για κάποιους ακέραιους $x,y\geq 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $a\geq b$, οπότε $b|a!$.

Τότε $b|a!+b=5^x$, οπότε $b=5^k$ για κάποιο ακέραιο $0\leq k<x$. Αφού $5^y=b!+a>b!\geq b=5^k$, έπεται ότι $y>k$, και άρα $b=5^k|5^y=b!+a$. Έτσι $b=5^k|a$. Είναι $a!=5^x-b=5^x-5^k=5^k(5^{x-k}-1)$. Αν $a\geq 10$, τότε $5^{k+1}|5a$ και $5a|a!$. Δηλ. $5^{k+1}|a!$, άτοπο, αφού $\text{ΜΚΔ}(5^{x-k}-1,5)=1$. Άρα $a<10$ και $5^k|a$. Έχουμε τις περιπτώσεις

- $a=1$. Απορρίπτεται, αφού τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $a!+b=1!+1=2\neq 5^x$ για ακέραιο x.
- $a=2$. Απορρίπτεται, αφού τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $a!+b=2!+1=3\neq 5^x$ για ακέραιο x.
- $a=3$. Απορρίπτεται, αφού τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $a!+b=3!+1=7\neq 5^x$ για ακέραιο x.
- $a=4$. Τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $a!+b=4!+1=25=5^2$. Έτσι $x=2$ και $b!+a=1+4=5$, οπότε $y=1$.
- $a=5$. Τότε είναι $k=0$ ή $k=1$. Για $k=0$ είναι $b=1$, και $b!+a=1!+5=6\neq 5^y$ για ακέραιο y. Για $k=1$ είναι $b=5$, και $b!+a=5!+5=125=5^3$, οπότε $y=3$, και $a!+b=5!+5=5^3$, οπότε $x=3$.
- $a=6$. Απορρίπτεται, αφού τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $b!+a=1!+6=7\neq 5^y$ για ακέραιο y.
- $a=7$. Απορρίπτεται, αφού τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $b!+a=1!+7=8\neq 5^y$ για ακέραιο y.
- $a=8$. Απορρίπτεται, αφού τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $b!+a=1!+8=9\neq 5^y$ για ακέραιο y.
- $a=9$. Απορρίπτεται, αφού τότε είναι $k=0$, $b=1$, και $b!+a=1!+9=10\neq 5^y$ για ακέραιο y.

Άρα τα ζεύγη (a,b) θετικών ακέραιων αριθμών με $a\geq b$ είναι το $(a,b)=(4,1)$ και το $(a,b)=(5,5)$. Επειδή υποθέσαμε ότι $a\geq b$, θα πρέπει να θεωρήσουμε και τις μεταθέσεις αυτών, οπότε παίρνουμε και το ζεύγος $(a,b)=(1,4)$.

Σχόλιο. Μπορούμε να συντομεύσουμε την παραπάνω λύση, εάν εργαστούμε όπως στη λύση της **Ιωάννας Ζάχου**:

Ο αριθμός $\dfrac{a!}{b}+1$ είναι φυσικός με $b\left(\dfrac{a!}{b}+1\right)=5^x$, οπότε $\dfrac{a!}{b}+1=5^\lambda$, όπου λ μη αρνητικός ακέραιος με $k+\lambda=x$.

Αν $a\geq 5$, τότε $k\geq 1$, αφού αλλιώς, θα είχαμε $\lambda=x>0$ και $5^\lambda=\dfrac{a!}{b}+1\equiv 0+1\equiv 1 \pmod 5$, άτοπο. Αφού $b=5^k|a$, έπεται ότι $v_5(a)\geq k\geq 1$ και άρα απορρίπτονται οι περιπτώσεις $6\leq a\leq 9$.

(2ος τρόπος) Έστω a,b θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $a!+b=5^x$ και $b!+a=5^y$ για κάποιους ακέραιους $x,y\geq 1$.

Εάν $a\geq 5$, τότε $5|a!$. Αφού $5|a!$ και $5|5^x$, έπεται ότι $5|b$. Άρα $b\geq 5$ και με το ίδιο επιχείρημα έπεται ότι $5|a$. Έτσι $a=5c$ και $b=5d$ για κάποιους θετικούς ακέραιους c,d.

Έστω ότι $c>1$. Τότε $v_5(a!)>1$. Αφού $a!+b=5^x$, έχουμε $v_5(b)=v_5(a!)$. Όμως, καθώς $v_5(b)>1$, έχουμε ότι $v_5(b!)>v_5(b)$. Τότε $y=v_5(b!+a)=\min\{v_5(b!),v_5(a)\}=v_5(a)<y$, άτοπο. Επομένως, έχουμε $c=1$. Λόγω συμμετρίας συμπεραίνουμε ότι $y=1$, οπότε παίρνουμε τη λύση $(a,b)=(5,5)$.

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση $a<5$. Τότε $b<5$ λόγω του παραπάνω επιχειρήματος.

Ελέγχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $a=1$, τότε $1!+b\equiv 0 \pmod 5$, οπότε $b=4$. Αφού $1!+4=5$, έχουμε τη λύση $(a,b)=(1,4)$.
- Αν $a=2$, τότε $2!+b\equiv 0 \pmod 5$, οπότε $b=3$. Αφού $3!+2=8\not\equiv 0 \pmod 5$, το $(a,b)=(2,3)$ δεν αποτελεί λύση.
- Αν $a=3$, τότε $3!+b\equiv 0 \pmod 5$, οπότε $b=4$. Αφού $4!+3=27\not\equiv 0 \pmod 5$, το $(a,b)=(3,4)$ δεν αποτελεί λύση.
- Αν $a=4$, τότε $4!+b\equiv 0 \pmod 5$, οπότε $b=1$. Αφού $4!+1=5^2$, έχουμε έχουμε τη λύση $(a,b)=(4,1)$.

Συνεπώς, οι μοναδικές λύσεις για τα ζεύγη (a,b) είναι οι $(5,5)$, $(1,4)$ και $(4,1)$.

Πρόβλημα 2 (Σερβία). Να αποδείξετε ότι για όλους τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z, οι οποίοι δεν είναι όλοι ίσοι με 0, ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\frac{2x^2-x+y+z}{x+y^2+z^2}+\frac{2y^2+x-y+z}{x^2+y+z^2}+\frac{2z^2+x+y-z}{x^2+y^2+z}\geq 3.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x,y,z) για τις οποίες ισχύει η ισότητα.

Λύση (1ος τρόπος - Βασισμένος στη λύση του Λάζαρου Καραγεωργίου). Θέτουμε $a=x+y^2+z^2$, $b=y+x^2+z^2$ και $c=z+x^2+y^2$. Αφού οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x,y και z δεν είναι όλοι ίσοι με 0, έπεται ότι $a,b,c>0$. Η προς απόδειξη ανισότητα παίρνει την μορφή

$$\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geq 3.$$

Από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου - Γεωμετρικού Μέσου έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}&=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-3\\&\geq 6\sqrt[6]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}}-3\\&=3,\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=\frac{a}{b}=\frac{c}{b}=\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $a=b=c$ ή, ισοδύναμα $x+y^2+z^2=y+x^2+z^2=z+x^2+y^2$.

Από την $x+y^2+z^2=y+x^2+z^2$, μεταφέροντας όλους τους όρους στο πρώτο μέλος παίρνουμε $y^2-x^2+x-y=0$. Κάνοντας παραγοντοποίηση παίρνουμε

$$(y-x)(y+x-1)=0. \tag{1}$$

Ομοίως, η $x+y^2+z^2=z+x^2+y^2$ δίνει $z^2-x^2-(z-x)=0$, ή ισοδύναμα

$$(z-x)(z+x-1)=0, \tag{2}$$

και η $y+x^2+z^2=z+x^2+y^2$ δίνει $z^2-y^2-(z-y)=0$, ή ισοδύναμα

$$(z-y)(z+y-1)=0. \tag{3}$$

Εάν $x=y=z$, τότε παίρνουμε τις τριάδες (x,y,z) της μορφής (a,a,a) με $a>0$. Εάν δεν ισχύει ότι $x=y=z$, τότε ακριβώς μια από τις παραστάσεις $y+x-1$, $z+x-1$, και $z+y-1$ είναι διαφορετική του μηδενός, ενώ οι άλλες δύο είναι ίσες με 0. Για παράδειγμα, εάν $y+x-1\neq 0$, τότε η (1) δίνει

$y = x \neq z$ και οι εξισώσεις (2), (3) δίνουν $z = 1 - x$, με τις τριάδες (x, y, z) για τις οποίες ισχύει η ισότητα σε αυτή την περίπτωση να είναι της μορφής $(b, b, 1 - b)$ με $0 \leq b \leq 1$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει για τις τριάδες (x, y, z) της μορφής (a, a, a) με $a > 0$ και τις τριάδες, $(b, b, 1 - b)$, $(b, 1 - b, b)$ και $(1 - b, b)$με $0 \leq b \leq 1$.

(2ος τρόπος - Βασισμένος στη λύση του Μιχαήλ Τσουρέκα). Παρατηρούμε ότι η προς απόδειξη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\left(\frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + 2\right) + \left(\frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} + 2\right) + \left(\frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} + 2\right) \geq 9.$$

Κάνοντας τις πράξεις και βγάζοντας κοινό παράγοντα την παράσταση

$$A = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = (x + y^2 + z^2) + (x^2 + y + z^2) + (x^2 + y^2 + z),$$

η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$A\left(\frac{1}{x + y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z}\right) \geq 9.$$

Η τελευταία, όμως, έπεται από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, αφού

$$\frac{1}{x + y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z} \geq \frac{(1 + 1 + 1)^2}{(x + y^2 + z^2) + (x^2 + y + z^2) + (x^2 + y^2 + z)} = \frac{9}{A}.$$

Η περίπτωση της ισότητας αντιμετωπίζεται όπως στον 1ο τρόπο.

(3ος τρόπος - Βασισμένος στις ιδέες της Λυδίας Κράτσα και στη λύση ενός μαθητή της Βοσνίας Ερζεγοβίνης). Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(\frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} - 1\right) + \left(\frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} - 1\right) + \left(\frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} - 1\right) \geq 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{2x^2 - x + y + z - x - y^2 - z^2}{x + y^2 + z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z - x^2 - y - z^2}{x^2 + y + z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z - x^2 - y^2 - z}{x^2 + y^2 + z} \geq 0.$$

Είναι

$$2x^2 - x + y + z - x - y^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (x^2 - z^2) - (x - y) - (x - z) = (x - y)(x + y - 1) + (x - z)(x + z - 1).$$

Ομοίως,

$$2y^2 + x - y + z - x^2 - y - z^2 = (y - x)(y + x - 1) + (y - z)(y + z - 1),$$

και

$$2z^2 + x + y - z - x^2 - y^2 - z = (z - x)(z + x - 1) + (z - y)(z + y - 1).$$

Με $a = x + y^2 + z^2$, $b = y + x^2 + z^2$ και $c = z + x^2 + y^2$, το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας γράφεται

$$(x - y)(x + y - 1)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + (x - z)(x + z - 1)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + (y - z)(y + z - 1)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right).$$

Έχουμε

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} = \frac{x^2 - y^2 - x + y}{ab} = \frac{(x - y)(x + y - 1)}{ab},$$

και ομοίως

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{(x - z)(x + z - 1)}{ac} \quad \text{και} \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{(y - z)(y + z - 1)}{bc}.$$

Συνεπώς, η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{(x-y)^2(x+y-1)^2}{ab}+\frac{(x-z)^2(x+z-1)^2}{ac}+\frac{(y-z)^2(y+z-1)^2}{bc}\geq 0,$$

η οποία αληθεύει, αφού το αριστερό της μέλος είναι άθροισμα μη αρνητικών αριθμών, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν

$$(x-y)(x+y-1)=(x-z)(x+z-1)=(y-z)(y+z-1)=0.$$

Οι λύσεις του τελευταίου συστήματος εξισώσεων δίνει τις τριάδες (x,y,z) για τις οποίες ισχύει η ισότητα όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3 (Γαλλία). Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν εναλλάξ το παρακάτω παιχνίδι σε ένα 100×100 πλέγμα, με την Αλίκη να ξεκινάει πρώτη. Αρχικά το πλέγμα είναι κενό. Επιλέγουν με τη σειρά τους έναν αριθμό από το 1 έως και το 100^2, ο οποίος δεν είναι ακόμα γραμμένος σε κάποιο από τα κελιά, και επιλέγουν ένα κενό κελί και τον τοποθετούν στο κελί αυτό. Όταν δεν έχει απομείνει κάποιο κενό κελί, η Αλίκη υπολογίζει το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, και η βαθμολογία της είναι το μεγαλύτερο από αυτά τα 100 αθροίσματα. Ο Βασίλης υπολογίζει το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη, και η βαθμολογία του είναι το μεγαλύτερο από αυτά τα 100 αθροίσματα. Η Αλίκη κερδίζει εάν η βαθμολογία της είναι μεγαλύτερη από τη βαθμολογία του Βασίλη και ο Βασίλης κερδίζει εάν η βαθμολογία του είναι μεγαλύτερη από τη βαθμολογία της Αλίκης. Αλλιώς, δεν κερδίζει κανείς. Να βρεθεί εάν κάποιος από τους παίκτες έχει στρατηγική νίκης, και εάν ναι, να προσδιοριστεί ποιος από τους δύο.

Λύση. Έστω (i,j) το κελί στην i-οστή γραμμή και την j- οστή στήλη για κάθε $1\leq i,j\leq n$. Ο Βασίλης συσχετίζει τα ακόλουθα ζευγάρια κελιών: $(i,2k+1)$, $(i,2k+2)$ για $1\leq i\leq 100$ και $0\leq k\leq 49$ εκτός από αυτά που προκύπτουν για $(i,k)=(100,0)$ και $(100,1)$, οπότε συσχετίζει τα ζευγάρια $(100,1)$, $(100,3)$ και $(100,2)$, $(100,4)$.

Κάθε φορά που η Αλίκη γράφει τον αριθμό j σε ένα κελί, ο Βασίλης γράφει τον αριθμό 100^2+1-j στο άλλο κελί του ζευγαριού. Μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι μετά από οποιαδήποτε κίνηση του Βασίλη, για κάθε ζευγάρι κελιών, είτε υπάρχει γραμμένος αριθμός σε κάθε κελί του ζευγαριού αυτού είτε σε κανένα από τα κελιά του, και ότι εάν ο αριθμός j έχει γραφτεί, τότε έχει γραφτεί και ο 100^2+1-j. Έτσι, ο Βασίλης έχει τη δυνατότητα να εφαρμόσει την παραπάνω στρατηγική του (αφού δεν ισχύει η ισότητα $j=100^2+1-j$). Στο τέλος, το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής είναι ίσο με $50(100^2+1)$, οπότε ο Βασίλης σίγουρα δεν χάνει με αυτή τη στρατηγική.

Ας υποθέσουμε, με εις άτοπο απαγωγή, ότι η Αλίκη μπορεί να αποτρέψει το Βασίλη να κερδίσει εάν εφαρμόσει την παραπάνω στρατηγική. Έστω c_j το άθροισμα των αριθμών σε κάθε j-οστή στήλη για $1\leq j\leq 100$. Τότε $c_j\leq 50(100^2+1)$. Αθροίζοντας τις ανισότητες αυτές για $j=1,2,\ldots,100$ παίρνουμε

$$100\cdot 50(100^2+1)\geq c_1+c_2+\cdots+c_{100}=1+2+\cdots+100^2=\frac{100^2(100^2+1)}{2}=100\cdot 50(100^2+1).$$

Άρα ισχύει η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα, οπότε είναι $c_1=c_2=\cdots=c_{100}=50(100^2+1)$. Εάν a είναι ο γραμμένος αριθμός στο κελί $(100,1)$ και b είναι ο αριθμός στο κελί $(100,2)$, τότε $c_1-a+c_2-b=99(100^2+1)$, οπότε $a+b=100(100^2+1)-99(100^2+1)=100^2+1$. Αλλά, από την υπόθεση, σύμφωνα με τη στρατηγική του Βασίλη, ο b έχει επίσης γραφτεί στο κελί $(100,3)$, άτοπο. Επομένως, ο Βασίλης έχει στρατηγική νίκης.

Πρόβλημα 4 (Βουλγαρία). Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με περίκεντρο O. Έστω D το ίχνος του ύψους από το A στη BC και έστω M το μέσο του OD. Τα σημεία O_b και O_c είναι τα περίκεντρα των τριγώνων AOC και AOB, αντίστοιχα. Αν $AO = AD$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, O_b, M και O_c είναι ομοκυκλικά.

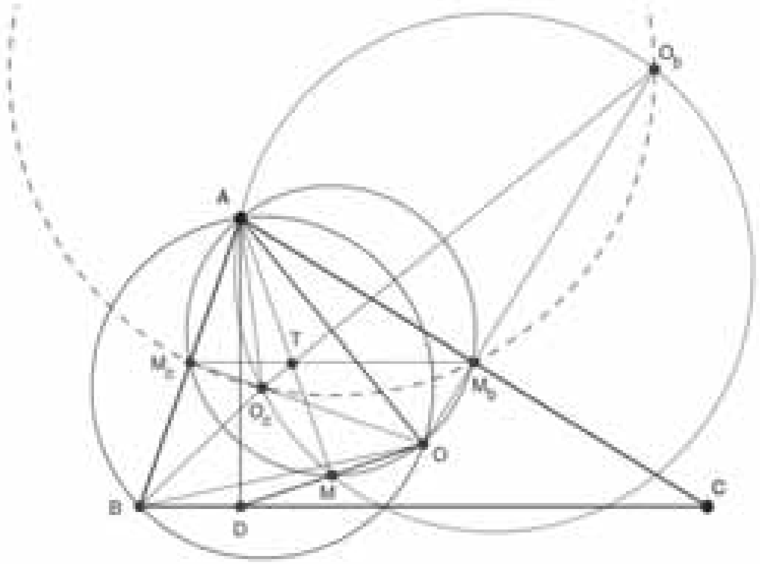
Λύση (1ος τρόπος). Αφού το τρίγωνο ABC είναι οξυγώνιο και $AO = AD$, το περίκεντρό του O δεν μπορεί να είναι το μέσο της πλευράς BC και άρα $AB \neq AC$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $AB < AC$.

Έστω M_b το μέσο της πλευράς AC και έστω M_c το μέσο της πλευράς AB. Τότε τα σημεία M_c, O_c και O είναι συνευθειακά, όπως και τα σημεία O_b, M_b και O. Αφού $AO = AD$, είναι $A\widehat{M}O = 90^\circ$. Επίσης, $A\widehat{M_b}O = A\widehat{M_c}O = 90^\circ$, οπότε τα σημεία A, M_c, M, O, και M_b είναι ομοκυκλικά.

Παρατηρούμε ότι η AM είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος OD, η O_bO_c είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AO, και η M_cM_b είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AD. Συνεπώς, οι τρεις ευθείες αυτές συντρέχουν στο περίκεντρο του τριγώνου ADO, έστω T.

Τα σημεία A, O_b, M και O_c είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν $AT \cdot TM = O_bT \cdot O_cT$. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο AM_bMM_c έχουμε $AT \cdot TM = M_bT \cdot M_cT$. Αρκεί, έτσι, να δείξουμε ότι $M_bT \cdot M_cT = O_bT \cdot O_cT$ ή, ισοδύναμα, ότι τα σημεία M_b, M_c, O_b, O_c είναι ομοκυκλικά.

Υποθέτουμε ότι $A\widehat{O}B < 90^\circ$ και $A\widehat{O}C > 90^\circ$, οπότε το O_c βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου AOB και το O_b στο εξωτερικό του τριγώνου AOC. (Οι άλλες περιπτώσεις μπορούν να εξεταστούν ανάλογα, ενώ αν $A\widehat{O}B = 90^\circ$ ή $A\widehat{O}C = 90^\circ$, τότε $M_b \equiv O_b$ ή $M_c = O_c$ οπότε τελειώσαμε αυτόματα).



Σχήμα 1: Πρόβλημα 4 -1ος τρόπος

Έχουμε

$$M_c\widehat{M_b}O_b = A\widehat{M_b}O_b + A\widehat{M_b}M_c = 90^\circ + A\widehat{M_b}M_c = 90^\circ + A\widehat{C}B.$$

Επίσης, αφού η O_bO_c είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AO, διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{O_c}O$, οπότε ισχύει

$$O\widehat{O_c}O_b = \frac{A\widehat{O_c}O}{2} = \frac{180^\circ - A\widehat{O_c}M_c}{2} = 90^\circ - \frac{A\widehat{O_c}M_c}{2}.$$

Αφού το O_c είναι το περίκεντρο του τριγώνου AOB είναι $A\widehat{O_c}M_c = 2A\widehat{O}M_c = A\widehat{O}B$, και αφού το O

είναι το περίκεντρο του AOB είναι $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$. Συνεπώς, έχουμε

$$M_c\widehat{O_c}O_b = 180^\circ - O\widehat{O_c}O_b = 90^\circ + \frac{A\widehat{O_c}M_c}{2} = 90^\circ + \frac{A\hat{O}B}{2} = 90^\circ + A\hat{C}B = M_c\widehat{M_b}O_b,$$

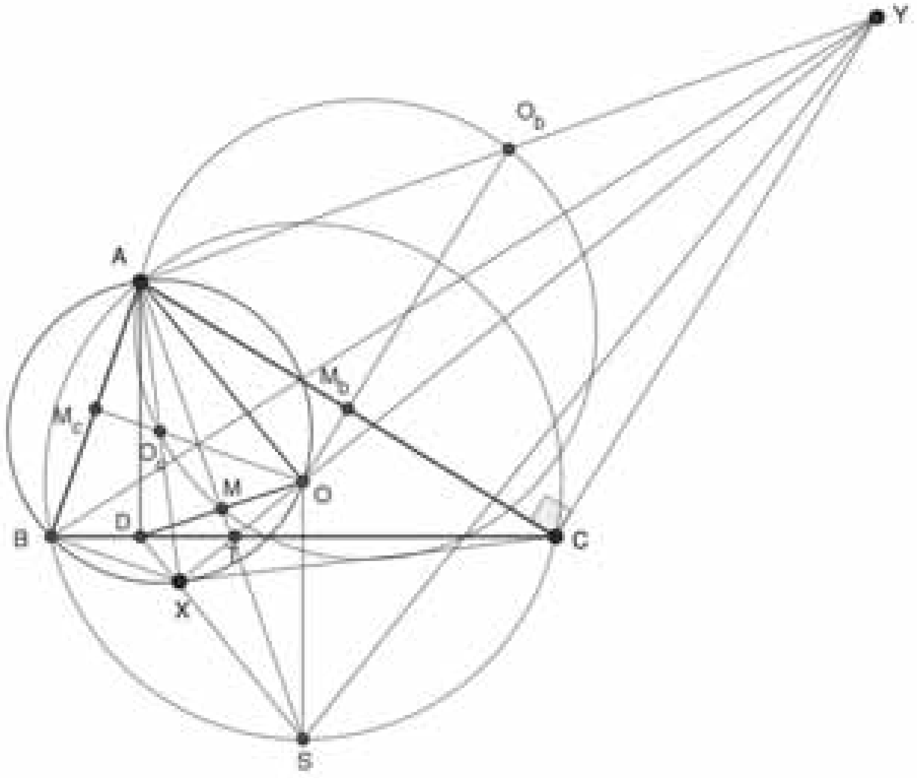
οπότε το τετράπλευρο $O_bM_bO_cM_c$ είναι εγγράψιμο, όπως θέλαμε.

(2ος τρόπος - Βασισμένος στη λύση του Ορέστη Λιγνού στον ιστότοπο δημόσιας συζήτησης mathematica.gr). Έστω X το αντιδιαμετρικό σημείο του A στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOB και έστω Y το αντιδιαμετρικό σημείο του A στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOC.

Έστω S το συμμετρικό του A ως προς το M. Τότε οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AOSD$ διχοτομούνται και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες: $DA = AO$. Συνεπώς το τετράπλευρο $AOSD$ είναι ρόμβος. Αφού $OS = OA$, το S είναι το μέσο του μείζονος τόξου BC του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο $BXCY$ είναι εγγράψιμο. Πράγματι, τα σημεία X, O και Y είναι συνευθειακά, αφού $A\hat{O}X = A\hat{O}Y = 90^\circ$. Έχουμε

$$\begin{aligned} B\hat{X}Y &= B\hat{X}O && (\text{αφού } X, O, Y \text{ συνευθειακά}) \\ &= 180^\circ - B\hat{A}O && (\text{αφού } BXOA \text{ εγγράψιμο}) \\ &= 90^\circ + B\hat{C}A && \left(\text{αφού } B\hat{A}O = 90^\circ - \frac{A\hat{O}B}{2} = 90^\circ - B\hat{C}A\right) \\ &= A\hat{C}Y + B\hat{C}A && (\text{αφού } A\hat{C}Y = A\widehat{M_b}O_b = 90^\circ) \\ &= B\hat{C}Y. \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Πρόβλημα 4 - 2ος τρόπος

Επιπλέον, αν T είναι το σημείο τομής της XY με την BC, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ADT και AOT είναι ίσα. Άρα το T ανήκει και στη διχοτόμο της γωνίας $D\hat{A}O$, η οποία είναι η διαγώνιος AS του ρόμβου

$DAOS$. Από τη δύναμη του σημείου T ως προς τους περιγεγραμμένους κύκλους των τετράπλευρων $ABSC$ και $BXCY$, έχουμε

$$TA \cdot TS = TB \cdot TC = TX \cdot TY.$$

Συνεπώς, το τετράπλευρο $AXSY$ είναι επίσης εγγράψιμο. Αφού O_c, M, O_b είναι τα μέσα των AX, AS και AX, έπεται ότι και το τετράπλευρο AO_bMO_c είναι εγγράψιμο, όπως θέλαμε.

(3ος τρόπος - Εμπνευσμένος από τη λύση του Ανδρέα Βαρβεράκη στον ιστότοπο δημόσιας συζήτησης mathematica.gr). Έστω C_K ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AO_cO_b, κέντρου K. Αρκεί να δείξουμε ότι το M βρίσκεται στον C_K.

Έστω H το σημείο τομής της ευθείας AO με τον C_K και έστω E το σημείο τομής της μεσοκάθετου O_bO_c του ευθύγραμμου τμήματος AO με το AO. Τότε το τρίγωνο AO_bO είναι ισοσκελές με $AO_b = OO_b$ και $O\widehat{A}O_b = A\widehat{O}O_b$, και από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο HO_cAO_b έχουμε

$$H\widehat{O_c}O_b = H\widehat{A}O_b = O\widehat{A}O_b = A\widehat{O}O_b = A\widehat{O}M_b = A\widehat{B}C,$$

αφού τα σημεία O, M_b, O_b είναι συνευθειακά. Επίσης, έχουμε

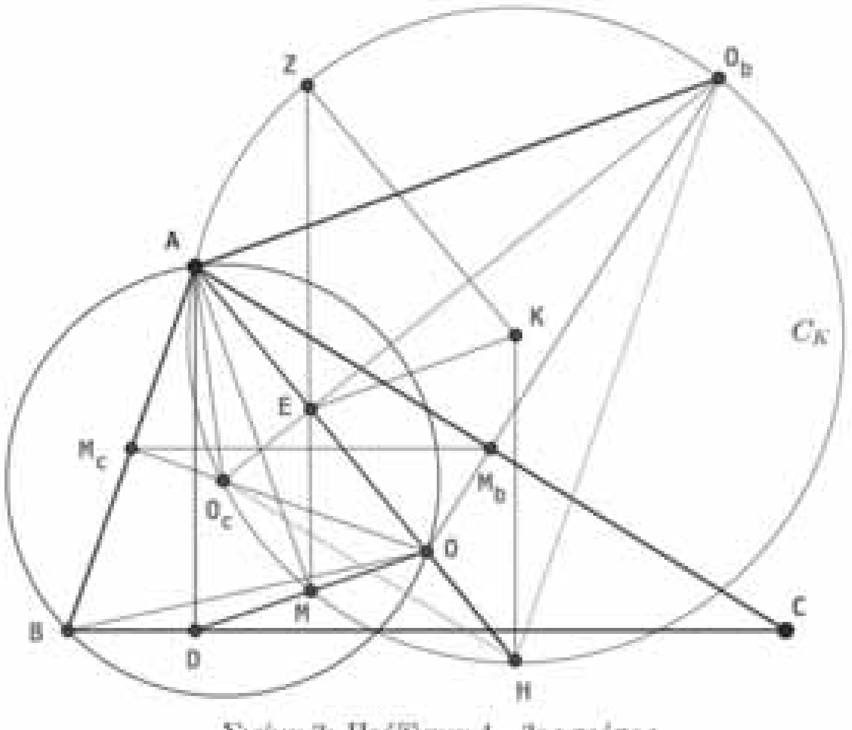
$$O_c\widehat{H}O_b = 180^\circ - O_c\widehat{A}O_b = 180^\circ - \left(O_c\widehat{A}O + O\widehat{A}O_b\right) = 180^\circ - \left(A\widehat{C}B + A\widehat{B}C\right) = B\widehat{A}C,$$

αφού $O_c\widehat{A}O = A\widehat{O}M_c = A\widehat{C}B$. Συνεπώς, τα τρίγωνα ABC και HO_cO_b είναι όμοια με $O_c\widehat{O_b}H = \widehat{C}$. Έτσι, $O_c\widehat{K}H = 2\widehat{C} = A\widehat{O}B$, οπότε $B\widehat{A}O = O_c\widehat{H}K$. Αφού $B\widehat{A}D = 90^\circ - A\widehat{B}C = O_c\widehat{H}E$, είναι

$$D\widehat{A}O = B\widehat{A}O - B\widehat{A}D = O_c\widehat{H}K - O_c\widehat{H}E = E\widehat{H}K,$$

οπότε $HK//AD$. Από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων O_cEH, BDA και των ισοσκελών τριγώνων AOB, O_cKH έπεται ότι $EH/AD = O_cH/AB = HK/AO$, και άρα $EH = HK$.

Αφού το τμήμα EM συνδέει τα μέσα των πλευρών AO, DO του τριγώνου DAO, είναι $ME//AD$, και άρα $ME//HK$. Εάν Z είναι το σημείο της ευθείας ME τέτοιο ώστε $KZ//HE$, τότε το παραλληλόγραμμο $ZKHE$ είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ($EH = HK$). Άρα $KZ = KH$, που σημαίνει ότι το Z ανήκει στον C_K. Αφού $EA = EM$ και $EZ = EH$, το τραπέζιο $AMHZ$ είναι ισοσκελές, οπότε τα σημεία A, M, H, και Z είναι ομοκυκλικά, και άρα ανήκουν όλα στον C_K. Συνεπώς, το M βρίσκεται στον C_K, όπως θέλαμε.



Σχήμα 3: Πρόβλημα 4 - 3ος τρόπος

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 128

Ν47. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε θετικό διαιρέτη δ του ν, ο $\delta + 1$ είναι διαιρέτης του $\nu + 1$.

ΜΟ Ολλανδίας 2022

Λύση.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο $\nu = 1$ ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα, ενώ ο $\nu = 2$ δεν την ικανοποιεί. Επίσης κάθε περιττός πρώτος ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι κάθε σύνθετος ν δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

Έστω ο σύνθετος θετικός ακέραιος $\nu = \alpha\beta, 1 < \alpha \leq \beta < \nu$ έχει αυτή την ιδιότητα. Τότε $\beta|\nu$, οπότε $\beta + 1|\nu + 1$, δηλαδή υπάρχει $\gamma \in \mathbb{N}, \gamma > 1$, αφού $\beta < \nu$, έτσι ώστε

$$\gamma(\beta + 1) = \nu + 1 = \alpha\beta + 1 \Leftrightarrow \gamma - 1 = (\alpha - \gamma)\beta \Rightarrow \beta|\gamma - 1,$$

οπότε $\beta \leq \gamma - 1 \Rightarrow \gamma \geq \beta + 1$. Τότε

$$\alpha\beta + 1 = \gamma(\beta + 1) \geq (\beta + 1)^2 = \beta^2 + 2\beta + 1 \Rightarrow \alpha \geq \beta + 2,$$

που αντιφάσκει προς την υπόθεση $\alpha \leq \beta$.

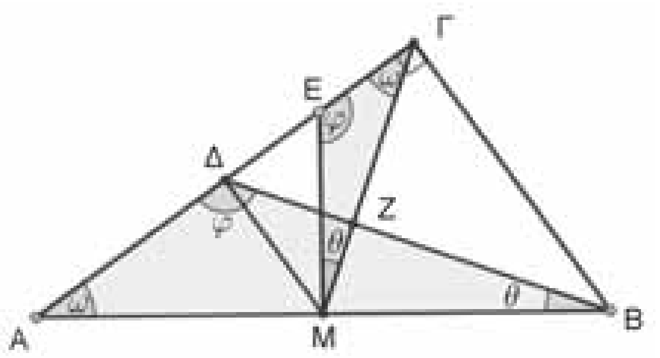
Γ62. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 90^0$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς την πλευρά ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Έστω Ε το μέσο του τμήματος ΓΔ. Αν οι ευθείες ΒΔ και ΓΜ είναι μεταξύ τους κάθετες, να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΓΜΕ και ΑΒΔ είναι όμοια

(β) Οι ευθείες ΕΜ και ΑΒ είναι μεταξύ τους κάθετες.

ΜΟ Ολλανδίας 2022

Λύση



(α) Επειδή η ΓΜ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ προς την υποτείνουσα, έχουμε ότι:

ΓΜ = ΑΜ ⇒ ΑΜΓ ισοσκελές τρίγωνο

$\Rightarrow \hat{A} = M\hat{\Gamma}\Delta = \omega$.

Επίσης από τη σχέση ΜΔ ∥ ΒΓ έπεται ότι

$M\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 = \hat{\Gamma}$ και Δ μέσο ΑΓ.

Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΜΔ είναι όμοια με ομόλογες διαμέσους ΒΔ και ΜΕ προς τις πλευρές τους ΑΓ και ΓΔ, αντίστοιχα.

Επομένως θα έχουμε και την ισότητα των γωνιών $A\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{E}M = \varphi$. Άρα τα τρίγωνα ΓΜΕ και ΑΒΔ έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

(β) Από τα όμοια τρίγωνα ΓΜΕ και ΑΒΔ προκύπτει η ισότητα $E\hat{M}\Gamma = M\hat{B}\Delta$, οπότε λόγω της καθετότητας των ευθειών ΓΜ και ΒΔ έχουμε:

$$E\hat{M}B = E\hat{M}\Gamma + \Gamma\hat{M}B = \theta + 90^0 - \theta = 90^0 \Rightarrow EM \perp AB.$$

Ν48. Να βρείτε πόσα ζεύγη ακέραιων (μ, ν) με $1 \leq \mu, \nu \leq 2022$ υπάρχουν, τα οποία ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη: Για κάθε θετικό ακέραιο N, υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος κ και ακέραιος $\delta > N$ έτσι ώστε οι $\frac{\mu-\kappa^2}{\delta}$ και $\frac{\nu+2\kappa}{\delta}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

ΜΟ Ιαπωνίας 2022

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε ότι πρέπει $\delta|\mu-\kappa^2$ και $\delta|\nu+2\kappa$, οπότε

$$\delta|2(\mu-\kappa^2) \text{ και } \delta|(\nu+2\kappa)\kappa \Rightarrow \delta|2(\mu-\kappa^2)+(\nu+2\kappa)\kappa \Rightarrow \delta|2\mu+\kappa\nu.$$

Τότε όμως

$$\delta|\nu(\nu+2\kappa)-2(2\mu+\kappa\nu) \Rightarrow \delta|\nu^2-4\mu.$$

Επειδή $1 \leq \mu \leq 2022$ και $1 \leq \nu \leq 2022$, έπεται ότι:

$$1 \leq \nu^2 \leq 2022^2 \text{και} \quad -8087 \leq -4\mu \leq -4,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-8087 \leq \nu^2-4\mu \leq 2022^2-4.$$

Επειδή πρέπει για κάθε θετικό ακέραιο N, να υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος κ και ακέραιος $\delta > N$ έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{\mu-\kappa^2}{\delta}$ και $\frac{\nu+2\kappa}{\delta}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι, έπεται ότι πρέπει

$$\nu^2-4\mu=0 \Leftrightarrow \quad \nu^2=4\mu,\ 1 \leq \mu,\nu \leq 2022.$$

Άρα πρέπει:

$$\nu=2\rho \text{ και } \mu=\frac{\nu^2}{4}, \rho \in \{1,2,\dots,1011\} \Leftrightarrow (\mu,\nu)=(\rho^2,2\rho), \qquad \rho \in \{1,2,\dots,1011\}.$$

Επαλήθευση. Αν $(\mu,\nu)=(\rho^2,2\rho)$, $\rho \in \{1,2,\dots,1011\}$. Τότε

$$\mu-\kappa^2=\rho^2-\kappa^2=(\rho+\kappa)(\rho-\kappa) \text{ και } \nu+2\kappa=2(\rho+\kappa),$$

οπότε, αν πάρουμε $\delta=\rho+\kappa$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το $\kappa > |N-\rho|$ έτσι ώστε για κάθε N θετικό να ισχύει $\delta=\rho+\kappa > N$.

Ασκήσεις για λύση

N49. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο ν που είναι τέτοιος ώστε οι ακέραιοι $10+\nu$ και 10ν να είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα.

N50. Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{2012}$ περιττοί θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_{2012}^2-1}$$

είναι άρρητος.

Α76. Οι αριθμοί α,β και γ είναι θετικοί πραγματικοί τέτοιοι ώστε $\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν δύο από τους αριθμούς α,β και γ είναι ίσοι, τότε ένας τουλάχιστον από τους α,β και γ είναι άρρητος.

(β) Υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων (μ,ν,ρ) έτσι ώστε: $\mu^2+\mu\nu+\mu\rho-\nu\rho=0$.

QR code και μαθηματικά

Παντελής Γρυπάρης, Παναγιώτης Χριστόπουλος

Κάθισα σε ένα εστιατόριο με την παρέα μου και ζήτησα τον κατάλογο των φαγητών(το menu). Ο σερβιτόρος μου έδειξε ότι πάνω στο τραπεζομάντηλο ήταν τυπωμένο ένα τετράγωνο που αποτελείτο από μικρά άσπρα και μαύρα τετραγωνάκια. Έκανα σάρωση με το κινητό μου και ω! του θαύματος, αποκαλύφτηκε ο κατάλογος του καταστήματος. Τι ήταν αυτό το μαγικό σχέδιο; Το όνομά του είναι QR code (ή Quick Response code). Είναι ένα σχέδιο που περιέχει κωδικοποιημένες πληροφορίες. Οι πληροφορίες είναι κωδικοποιημένες στο δυαδικό σύστημα όπως τα bit με το 0 και 1 στον υπολογιστή μας και όχι μόνο. Η διαφορά είναι ότι στο QR code αντί για τα ψηφία 0,1, έχουμε μικρά τετραγωνάκια μαύρα και άσπρα που συνδυάζονται μεταξύ τους μέσα σε μια μεγαλύτερη εικόνα σαν την παρακάτω.

Γραμμωτοί κώδικες

Εδώ και πολλά χρόνια έχουμε τους γραμμωτούς κώδικες (barcodes) που είναι σε όλα σχεδόν τα προϊόντα. Τους συναντάμε σε όλα τα προϊόντα, σε έγγραφα, σε εισιτήρια, κ.α. Ένας γραμμωτός κώδικας είναι μια έξυπνη, απλή και πρακτική ιδέα, για ταξινόμηση των προϊόντων.

Σχεδόν όλα τα προϊόντα φέρουν έναν γραμμωτό κώδικα (Universal Product Code) δηλαδή μια σειρά κάθετων ασπρόμαυρων λωρίδων με διαφορετικό πλάτος, με ένα σύνολο αριθμών που εκτυπώνονται κάτω από αυτές. Εδώ οι πληροφορίες βρίσκονται και στις λωρίδες και στον αριθμό που είναι κάτω. Τα barcode scanners διαβάζουν ακολουθίες ασπρόμαυρων γραμμών (barcode) οι οποίες μετατρέπονται, με τη βοήθεια ενός κεντρικού υπολογιστή, σε ένα μοναδικό αριθμό της ταυτότητας του αντικειμένου.

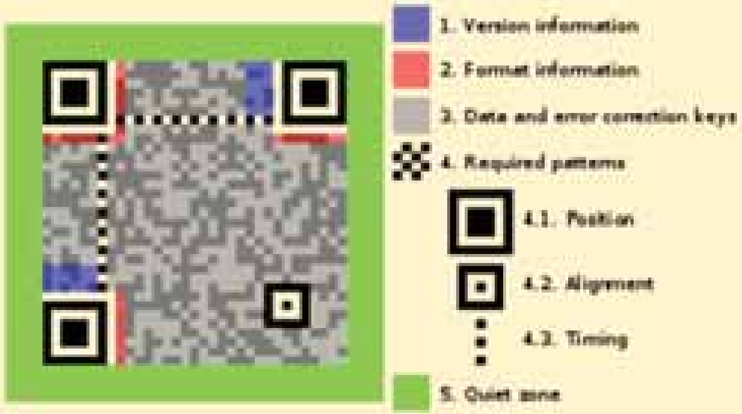
Κώδικας QR

Ο **κώδικας** QR είναι ένας κώδικας δύο διαστάσεων, που δημιουργήθηκε στην Ιαπωνία σε αυτοκινητοβιομηχανία το 1994 από τον Μασαχίρο Χάρα, (Ευρωπαϊκό Βραβείο Κοινού 2014).

Ο κώδικας QR αποτελείται από έναν τετραγωνικό πίνακα μαύρων και λευκών τετραγώνων που αναπαριστούν τα κωδικοποιημένα δεδομένα σε δυαδική μορφή. Μια ειδική σήμανση σε τρεις από τις τέσσερις γωνίες του τετραγώνου παρέχει προσανατολισμό. Τα δεδομένα στον κώδικα QR επεκτείνονται με έναν κώδικα διόρθωσης σφαλμάτων, δηλαδή ότι η απώλεια έως και 30% του κώδικα είναι ανεκτή και μπορεί ακόμα να αποκωδικοποιηθεί.

Ως κώδικας δύο διαστάσεων έχει δυνατότητα για πολλούς συνδυασμούς. Ο αριθμός των διαφορετικών QR codes είναι πολύ-πολύ μεγάλος. Ένας τυπικός QR code αποτελείται από ένα πλέγμα τετραγώνων που περιέχουν μαύρα και άσπρα κελιά. Η διάσταση του πλέγματος μπορεί να ποικίλει από 21x21 έως 177x177 κελιά. Αν π.χ. ήταν 2x2=4 επειδή κάθε κελί μπορεί να είναι μαύρο ή άσπρο, σημαίνει ότι υπάρχουν $2^{\wedge 4}$ =16 διαφορετικά πιθανά πλέγματα QR code, τα:

1. άσπρο-άσπρο-άσπρο-άσπρο
2. άσπρο-άσπρο-άσπρο-μαύρο
3. άσπρο-άσπρο-μαύρο-άσπρο
4. άσπρο-άσπρο-μαύρο-μαύρο
5. ……………………. κοκ



Άρα όταν το πλέγμα είναι 177x177 =31329 κελιά τότε τα διαφορετικά QR code είναι $2^{\wedge 31329}$ αριθμός τεράστιος(πολλά 3σεκατομμύρια). Οι πληροφορίες που περιέχονται στο QR code μπορεί να είναι διευθύνσεις ιστοσελίδων, αριθμοί τηλεφώνου, κείμενα, κωδικοί σε κάρτες, στοιχεία ταυτότητας, πληροφορίες στα βιβλία ως παραπομπές που με σάρωση ο αναγνώστης βλέπει και άλλες πηγές. Για παράδειγμα, μπορεί να δείτε ένα QR code σε έντυπο για μια ταινία αν το σαρώσετε θα δείτε το trailer της ταινίας στο κινητό σας. Όταν δείτε ένα QR code σε ένα προϊόν στο κατάστημα και το σαρώσετε έχετε όλες τις πληροφορίες σχετικά με το προϊόν. Υπάρχει ακόμα και σε επίσημα έγγραφα, όπως σε μία υπεύθυνη δήλωση ή σε πιστοποιητικά νόσησης ή εμβολιασμού.

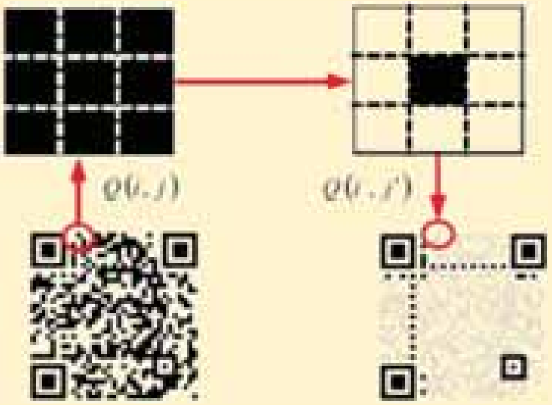
Σε γενικές γραμμές, το QR code είναι ένας τρόπος να μεταφέρουμε πληροφορίες γρήγορα και εύκολα χρησιμοποιώντας την κάμερα ενός κινητού τηλεφώνου ή μιας άλλης συσκευής.

Στα νέα σχολικά βιβλία θα περιέχονται και QR Code.

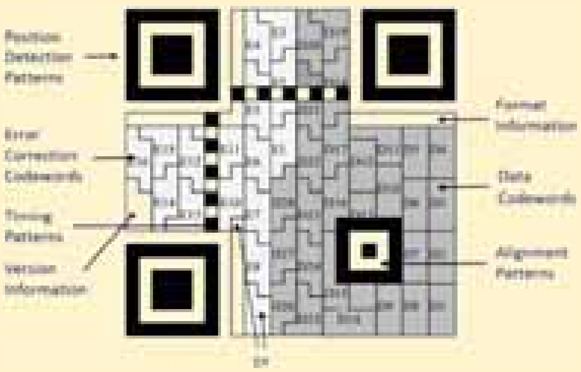
Ο κώδικας QR έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να παρέχει μεγάλη ευελιξία και δυνατότητες προσαρμογής σε διάφορες εφαρμογές, επιτρέποντας την αποθήκευση διαφορετικών τύπων δεδομένων, όπως κείμενο, URL, αριθμούς, αρχεία κ.ά.

Δημιουργία κωδικού

Για να δημιουργήσουμε έναν κωδικό QR, χρειάζεται:



1. Το μήκος του κειμένου και ο βαθμός διόρθωσης σφαλμάτων, για να καθορίσουμε το μέγεθος του κώδικα QR.
2. Ξεκινάτε με μια λευκή περιοχή στην οποία τοποθετούμε σταδιακά όλα τα στοιχεία του κωδικού QR.
3. Τοποθετούμε τα μοτίβα θέσης, τα μοτίβα ευθυγράμμισης και οι γραμμές συγχρονισμού που δεν εξαρτώνται από το κείμενο.
4. Μια ακολουθία bit παράγεται από το κείμενο και μια ακολουθία bit για διόρθωση σφαλμάτων.
5. Ακολουθεί σχεδιασμός συμβολοσειράς ψηφίων κειμένου και ψηφίων διόρθωσης σφάλματος από τα δεξιά προς τα αριστερά.
6. Για να περιέχει το σύμβολο περίπου τον ίδιο αριθμό μαύρων και λευκών εικονοστοιχείων ώστε να αποφευχθούν μοτίβα που δυσχεραίνουν την ανάγνωση, τοποθετούμε διαδοχικά οκτώ διαφορετικές μάσκες πάνω στο σύμβολο και επιλέγουμε αυτή που δίνει το καλύτερο αποτέλεσμα.
7. Ολοκληρώνουμε με την αναγραφή στο σύμβολο του αριθμού αναγνώρισης της χρησιμοποιούμενης μάσκας.



Γεννήτρια Κώδικα QR

Γρήγορος και εύκολος τρόπος για να δημιουργήσουμε έναν κωδικό QR είναι να χρησιμοποιήσουμε μια διαδικτυακή γεννήτρια κωδικών QR. Ένα σενάριο μετατρέπει τα κείμενα σε κώδικα και δημιουργεί το γραφικό. Οι κωδικοί QR μπορούν να δημιουργηθούν όχι μόνο ως γραφικά εικονοστοιχείων, αλλά μπορούν επίσης να αποτελούνται από κατάλληλα στοιχεία Unicode.

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

«Απλά είναι τα λόγια της αλήθειας» Αισχύλος

«Η παιδεία είναι πανηγύρι της ψυχής, γιατί στην παιδεία υπάρχουν πολλά θεάματα και ακούσματα της ψυχής.» Σωκράτης

ΤΑ ΠΑΡΑΞΕΝΑ ΚΑΙ Η ΜΑΓΕΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Διαγράψτε τα ίδια ψηφία από αριθμητή και παρονομαστή και τα κλάσματα παράξενο αλλά απλοποιούνται! 34/136=4/16, 67/268=7/28, 83/332=8/32, 98/392=8/32. Τα προσθέτω και έχω την μονάδα 4/16+7/28+8/32+8/32= 1/4+1/4+1/4+1/4=4/4=1.

- **Κάθε αριθμός είναι ίσος με ένα πολλαπλάσιο του** 9 **συν το άθροισμα των ψηφίων του σε μονοψήφιο αριθμό**.
  π.χ. ο αριθμός 39 **είναι** 4x9=36 **συν** 3+9=12, 1+2=3, 36+3=39.
- **Αν από έναν οποιονδήποτε αριθμό αφαιρέσετε το άθροισμα των ψηφίων του αυτός που μένει είναι πολλαπλάσιο του** 9.
- **Επίσης αν δύο αριθμοί αποτελούνται από τα ίδια ψηφία η διαφορά τους είναι πολλαπλάσιο του** 9,
  π.χ 752-257=495=55**χ**9 **και** 752-527=225=25**χ**9

Πολλαπλασιάστε τον αριθμό 123456789 **με τα πολλαπλάσια του** 9 **και έχετε**:

123456789x9 = 1111111101 123456789x18=2222222202 123456789x27=3333333303
123456789x36=4444444404 123456789x45=5555555505 123456789x54=6666666606
123456789x63=7777777707 123456789x72=8888888808 123456789x81=9999999909

Η μαγεία των αριθμών της μονάδας

$1^2 = 1$
$11^2 = 121$
$111^2 = 12321$
$1111^2 = 1234321$
$11111^2 = 123454321$
$111111^2 = 12345654321$
$1111111^2=1234567654321$
$11111111^2=123456787654321$
$111111111^2=12345678987654321$

Αθροίσματα και δυνάμεις

$1=1^2$

$1+2+1=2^2$

$1+2+3+2+1=3^2$

$1+2+3+4+3+2+1=4^2$

$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$

$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2$

$1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1=7^2$

$1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1=8^2$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1=9^2$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=10^2$

Τα βάζω όψη, τα βάζω ανάποδα, αποτέλεσμα το ίδιο

13χ93=31χ39,   36χ84=63χ48

Αρμονία

(1+1/2).3= 1+1/2+3

(1+1/3).4=1+1/3+4

(1+1/4).5=1+1/4+5

(4+1/2):3=4+1/2-3

(5+1/3):4=5+1/3-4

(6+1/4):5=6+1/4-5

Η μαγεία του 37

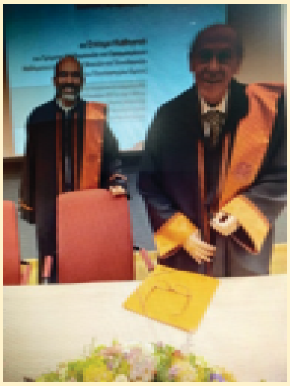
$3^2+7^2=37+3x7$ $3^3+7^3=37x(3+7)$

$$\frac{111}{1+1+1}=37$$
$$\frac{222}{2+2+2}=37$$
$$\frac{333}{3+3+3}=37$$
$$\frac{444}{4+4+4}=37$$
$$\frac{555}{5+5+5}=37$$
$$\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}=37$$
$$\frac{999}{9+9+9}=37$$

$$\frac{111}{1+1+1}=37$$
$$\frac{222}{2+2+2}=37$$
$$\frac{333}{3+3+3}=37$$
$$\frac{444}{4+4+4}=37$$
$$\frac{555}{5+5+5}=37$$
$$\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}=37$$
$$\frac{999}{9+9+9}=37$$

ΜΙΑ ΣΕΛΙΔΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΚΑΙΡΟΤΗΤΑ

Στις 10 **του Οκτώβρη** 2023 το Πανεπιστήμιο της Κρήτης αναγόρευσε το **Νομπελίστα καθηγητή Δημήτριο Χριστοδούλου**, ομότιμο Καθηγητή του Ομοσπονδιακού Ινστιτούτου Τεχνολογίας της Ζυρίχης (ETH), σε Επίτιμο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης.



Η αναγόρευση του τιμώμενου έγινε από τον Πρύτανη του Πανεπιστημίου Κρήτης Καθηγητή Γεώργιο Μ. Κοντάκη στο **Αμφιθέατρο «Νίκος Πετρίδης»** του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Ο καθηγητής Μιχάλης Δαφέρμος παρουσίασε την προσωπικότητα και το έργο του καθηγητή Δημήτρη Χριστοδούλου.

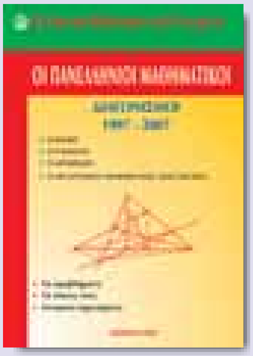
Έγιναν χαιρετισμοί από τον Κοσμήτορα Εμμανουήλ Στρατάκη και από τον πρόεδρο του τμήματος Άλκη Τερσένοβ. Ακολούθησε συνέδριο που είχε οργανωθεί προς τιμή του κυρίου Δ. Χριστοδούλου και συμμετείχαν μαθητές του και μαθητές των μαθητών του από όλο τον κόσμο. Ο κ. Δ. Χριστοδούλου μίλησε με θέμα «Οι Διαφορικές εξισώσεις στην ιστορική τους εξέλιξη». Συγχαρήκαμε τον καθηγητή ο οποίος μας είπε:

«**Ευχαριστώ πολύ για τις ευχές σας Αγαπητέ κ. Χριστόπουλε. Ήταν πολύ ευχάριστο για μένα να βλέπω πως οι νεότερες γενιές προοδεύουν ακολουθώντας τα αχνάρια που είχα ανοίξει πριν δεκαετίες. Είχα και την ιδιαίτερη χαρά να παρουσιάσει στην τελετή το έργο μου ο πιο λαμπρός μου μαθητής ο Μιχάλης Δαφέρμος**».

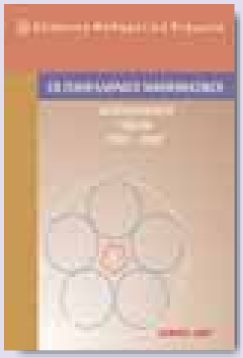
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

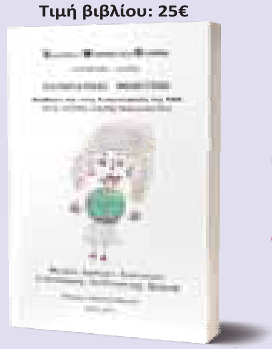
Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

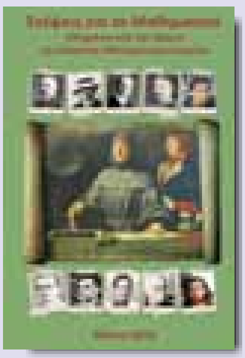


2η έκδοση

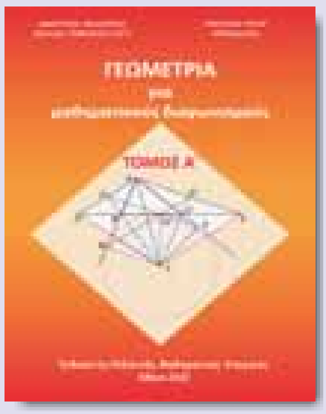
Τιμή βιβλίου: 18€

Βιβλία της ΕΜΕ

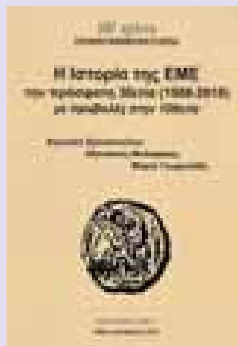
Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 15€



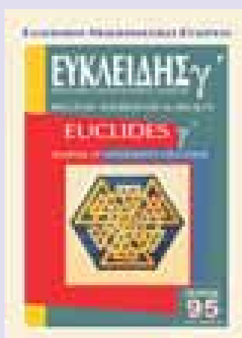
Τιμή βιβλίου: 25€



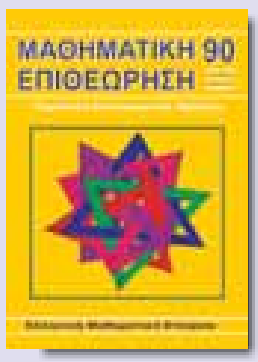
Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr