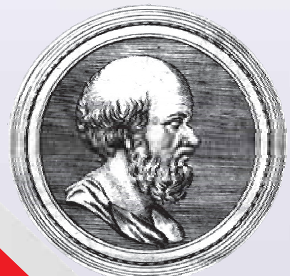
Μαθηματικό περιοδικό για το

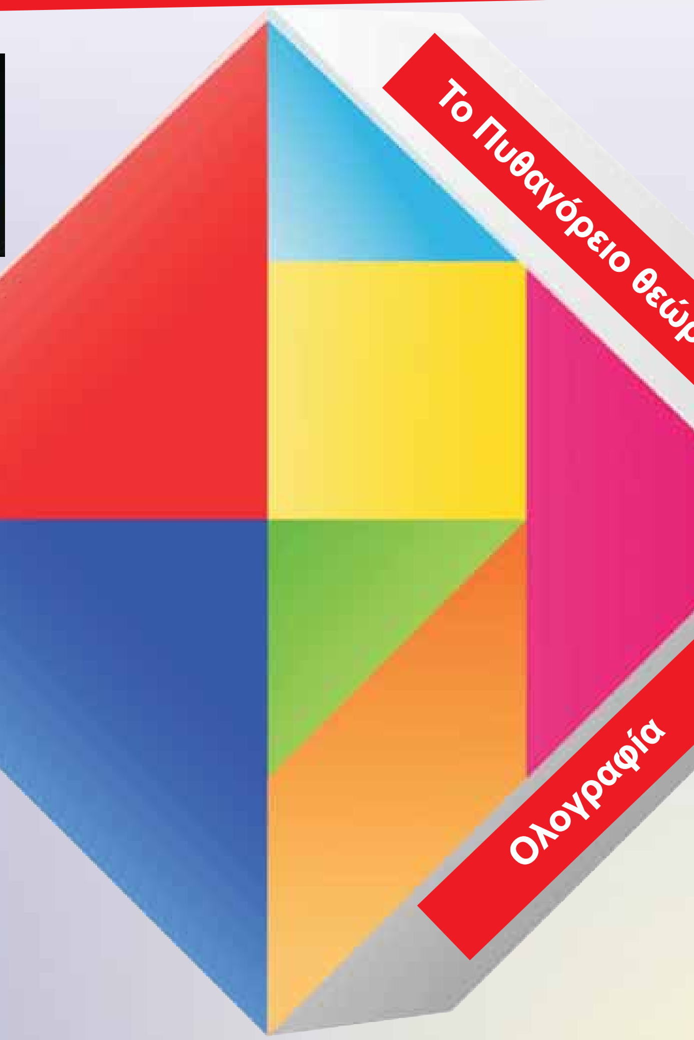
Ευκλείδης Α' Γυμνάσιο

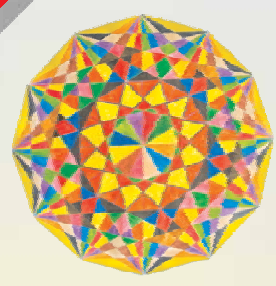
114

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019 ευρώ 3,00



Το Πυθαγόρειο θεώρημα





Ολογραφία

Η μέτρηση της περιμέτρου της Γης τον 3ο π.Χ. Αιώνα
Ο Ερατοσθένης και το Πείραμα

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 114
Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2019
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34, 106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Επιμέλεια Έκδοσης:
Κεϊσογλου Στέφανος
Τριανταφύλλου Ανδρέας

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 7998

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί/ές αναγνώστες .

Αρχικά ευχόμαστε σε όλες και όλους να είναι **ευτυχισμένο και δημιουργικό το 2020**. Συνεχίζουμε και εφέτος την προσπάθεια να παρέχουμε όσο το δυνατόν π**ερισσότερο ποιοτικό, πρωτότυπο και ενδιαφέρον υλικό**.

Όπως θα διαπιστώσετε υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία από άρθρα **επιστημονικού**, αλλά και **γενικότερου ενδιαφέροντος**, που σχετίζονται με τα **Μαθηματικά**. Στόχος μας είναι να **δείξουμε πτυχές των Μαθηματικών** που αφορούν τόσο στη **σχέση** τους με τον **κόσμο** όσο και με την ίδια τη **Μαθηματική εκπαίδευση**.

Τα **Μαθηματικά** είναι ένα **πολιτιστικό προϊόν** και σε αυτό θα πρέπει να έχουν **πρόσβαση** όλοι οι πολίτες **οποιασδήποτε ηλικίας**. Ο **Ευκλείδης Α΄** θα **συμβάλλει** σε αυτήν την **προοπτική**.

Εκ μέρους της Συντακτικής επιτροπής του περιοδικού
Η ομάδα συντονισμού του περιοδικού.

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία - Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ).
τηλ.: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Α΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=ευρώ 12,00).
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 10,00
Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ. Γραφείο Αθήνα 54 Τ.Θ. 30044
2. Στην ιστοσελίδα της Ε.Μ.Ε., όπου υπάρχει δυνατότητα τραπεζικής συναλλαγής με την τράπεζα EUROBANK
3. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Η μέτρηση της περιμέτρου της Γης τον 3^{o} π.Χ. Αιώνα Ο Ερατοσθένης και το Πείραμα

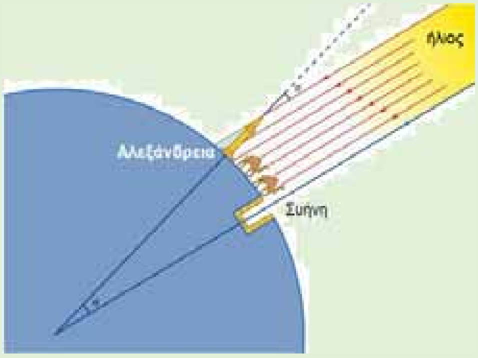
Ειρήνη Κυριακή Χρόνη

Σκοπός του κειμένου είναι η κατανόηση του πειράματος του μεγάλου μαθηματικού Ερατοσθένη του Κυρηναίου από παιδιά νεαρής ηλικίας, με απλό και ευχάριστο τρόπο, η επανάληψη του πειράματος με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού κάτω από τις εκάστοτε συνθήκες, και φυσικά η σύλληψη της μαθηματικής σκέψης.

Το κείμενο αυτό αποτελεί μια σύντομη, σαφή και ακριβή παρουσίαση του τρόπου με τον οποίο ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, σχεδόν 2.300 χρόνια πριν, υπολόγισε την περίμετρο της Γης, χρησιμοποιώντας δυο ράβδους.

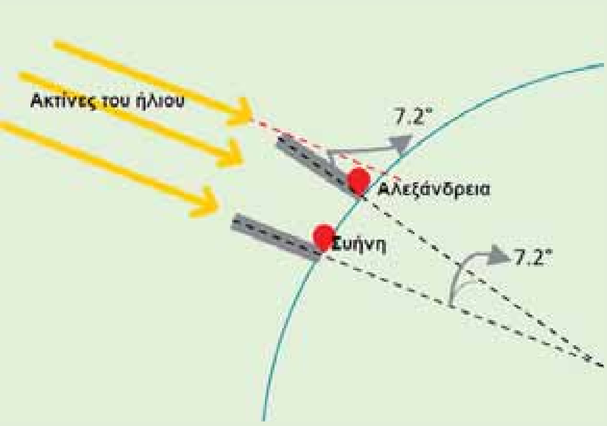
Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός και αστρονόμος, για αρκετά χρόνια δούλεψε στην βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας και εκεί έπεσε στα χέρια του ένας πάπυρος.

Ο πάπυρος ανέφερε ότι την $21^{η}$ Ιουνίου, στις 12 το μεσημέρι στην πόλη Συήνη της Αίγυπτου, σημερινή πόλη Ασουάν, ο ήλιος καθρεφτίζεται ακριβώς στον πυθμένα ενός πηγαδιού, και γενικά ακτίνες του φωτίζουν κατακόρυφα, με αποτέλεσμα να μη δημιουργούνται σκιές. Απόρησε, αν το ίδιο συνέβαινε ταυτόχρονα και σε άλλες περιοχές.



Έτσι, σαν σωστός μελετητής, αποφάσισε να κάνει ένα πείραμα.

Το πείραμα του Ερατοσθένη βασίστηκε στη μέτρηση του ύψους του ήλιου, την ίδια ημερομηνία και ώρα (12μ.μ.), σε δύο διαφορετικές τοποθεσίες.



Αρχικά στερέωσε μια ράβδο στην Συήνη και μία στην Αλεξάνδρεια που βρίσκεται 5040 στάδια (περίπου 800χλμ) μακριά.

Στη συνέχεια μέτρησε τη γωνία που δημιουργείται μεταξύ σκιάς και ράβδου. Η γωνία στην ράβδο της Αλεξάνδρειας ήταν περίπου 7°ενώ στη Συήνη δεν σχηματιζόταν γωνία σκιάς. Επιπλέον υπολόγισε ότι, αφού η διαφορά των δύο σκιών ήταν $7{,}2^{o}$ τότε και οι δύο πόλεις απέχουν $7{,}2^{o}$ από τις 360^{o} της Γης.

Δεδομένου ότι η απόσταση των πόλεων ήταν ΑΣ=5020στάδια[1]= 800χλμ, με απλή μέθοδο των τριών, μέτρησε την περιφέρεια Sτης Γης, ως εξής:

$$\mathbf{7{,}2/360=5020/S \Rightarrow 7{,}2\cdot S=5020\cdot 360 \Rightarrow 7{,}2\cdot S=1.807.200 \Rightarrow S=1.807.200\div 7{,}2}$$

Οπότε η περίμετρος της γής είναι S=251.000στάδια. Έτσι, χωρίς τα τεχνολογικά μέσα που διαθέτει σήμερα η ανθρωπότητα, ο Ερατοσθένης με δυο ράβδους και όρεξη για πειραματισμό, υπολόγισε την περίμετρο της Γης περίπου στα 40.000χλμ.

Ήξερες ότι ο Ερατοσθένης…

- υπολόγισε επίσης την απόσταση από τη Γη, της Σελήνης σε 780.000 στάδια, και του Ήλιου σε 804.000.000 στάδια.
- Επέλεξε, όχι τυχαία, αυτές τις πόλεις. Αλεξάνδρεια και Συήνη, γιατί βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό.
- Για να υπολογίσει με ακρίβεια την απόσταση των δυο πόλεων, προσέλαβε βηματιστές.
- Είχε απόκλιση της τάξης του 2% στις μετρήσεις του, αφού η πραγματική περίμετρος της Γης είναι 40.048 χλμ.
- Όταν ολοκλήρωσε το πείραμά του, σχεδίασε ένα χάρτη της γης όπως πίστευε πως ήταν.
- Θεωρείται ο πρώτος γεωγράφος.
- Και άλλοι επανέλαβαν το πείραμα του Ερατοσθένη. Μάλιστα σχεδίασαν χάρτες στους οποίους η Γη καλυπτόταν μόνο από την Ευρώπη, την Ασία και την Αφρική. Έναν τέτοιο χάρτη ακολούθησε ο Κολόμβος, και ανακάλυψε την Αμερική.

Το Μάρτιο του 2018, κατά την εαρινή ισημερία, περίπου 850 σχολεία της χώρας μας καθώς και τα ελληνικά σχολεία του Βουκουρεστίου και της Αλεξάνδρειας, επανέλαβαν τους συλλογισμούς και τους υπολογισμούς του μεγάλου επιστήμονα.

Μετρήσεις μετά τον Ερατοσθένη

Η ιδέα της μέτρησης της Γης συνεχίστηκε στο μυαλό των επιστημόνων, αλλά δεν υπήρξε βελτίωση στην ακρίβεια των μετρήσεων μέχρι την εποχή του Γαλιλαίου και τη χρήση του τηλεσκοπίου για αστρονομικούς σκοπούς.

Λίγα χρόνια αργότερα, μια ομάδα της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών στο Παρίσι αποφάσισε να μετρήσει την ακτίνα της γης. Ο Picard, στον οποίο είχε ανατεθεί η αποστολή, επιχείρησε να μετρήσει όσο το δυνατόν ακριβέστερα την απόσταση μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό και των οποίων τα γεωγραφικά πλάτη διέφεραν κατά 1ο. Στη συνέχεια, η απόσταση που μετρήθηκε πολλαπλασιάστηκε επί 360, έτσι υπολογίστηκε η περίμετρος της γήινης σφαίρας. Το μήκος του τόξου που μετρήθηκε ήταν 6 χλμ. Από την La Fert-Alais, μια μικρή πόλη βόρεια του Παρισιού στη μία πλευρά, και 20 χλμ. νότια της Amiens στην άλλη πλευρά. Το πρόβλημα ήταν να χρησιμοποιηθεί ένα μήκος ως μονάδα που θα γινόταν αποδεκτό από όλους.

[1]Το στάδιο ήταν ίσο με 159 μέτρα (άλλοι λένε 157 μέτρα), κατά την Ελληνιστική εποχή στην Αίγυπτο το στάδιο διέφερε από περιοχή σε περιοχή, αλλά και από εποχή σε εποχή.

Η ιδέα του Picard ήταν πολύ έξυπνη: Χρησιμοποίησε ένα εκκρεμές το οποίο ταλαντώνει. Δυστυχώς, δεν γνώριζε ότι οι μετρήσεις των κινήσεων του εκκρεμούς ποικίλουν ανάλογα με το γεωγραφικό πλάτος, το οποίο κατέστρεψε όλες τις προσπάθειές του.

Εν πάση περιπτώσει, με μια αυστηρή μέθοδο και μια ανησυχία για την ακρίβεια που παραμένουν παραδειγματικά, έθεσε ως στόχο να δημοσιεύσει το 1671 μια έκδοση περίπου 30 σελίδων με τίτλο Mesure de la Terre. Το μήκος ενός μεσημβρινού καθορίστηκε μεταξύ 111 και 112 km, που αντιστοιχεί σε μια ακτίνα της γης 6372 km. Η γη είχε μετρηθεί επιτέλους με μεγαλύτερη ακρίβεια, αλλά παρέμειναν πολλά να ανακαλυφθούν.

Ο Ερατοσθένης είχε υπολογίσει την μεσημβρινή περιφέρεια και σήμερα έχει υπολογιστεί το σφάλμα της μέτρησής του σε περίπου 2% έως 0,3%. Εκπληκτικά μικρό για εκείνη την εποχή, όπου δεν υπήρχαν οι υπολογιστές και τα Laser.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι:

Η περιστροφή της γης, οι μεταβολές της εσωτερικής πυκνότητας και οι εξωτερικές παλιρροιακές δυνάμεις, κάνουν το σχήμα της Γης να αποκλίνει συστηματικά από μια τέλεια σφαίρα. Αυτό σημαίνει ότι η περίμετρος της Γης εξαρτάται από τον τόπο. Αν μετρήσετε την περιφέρεια γύρω από τον ισημερινό της Γης, παίρνετε 40.075 χιλιόμετρα. Αλλά αν μετρήσετε από πόλο σε πόλο, θα έχετε 40.007 χιλιόμετρα. Αυτό συμβαίνει επειδή η Γη δεν είναι τέλεια σφαίρα. Διογκώνεται γύρω από τον ισημερινό επειδή περιστρέφεται στον άξονά του.

Η πλέον ακριβής μέτρηση πραγματοποιήθηκε τον Σεπτέμβριο του 1957, στο Ακαδημαϊκό Συνέδριο Γεωδαισίας του Τορόντο. Εκεί έγινε αξιολόγηση τα αποτελέσματα των μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν τους 3 τελευταίους αιώνες και προέκυψε ότι η μέση ακτίνα της γης είναι 6.378.245 m.

Πηγές:

- *Δαπόντες, Ν., Τσοβόλας, Σ., Κωτσάνης, Γ., Δάλκος, Γ.& Καραστάθης, Β.(2003). ΓΑΙΑ ΙΙ - Διασυνδεόμενοι Μικρόκοσμοι Πολυμέσων για τη Διαθεματική Διερεύνηση της Γης Βιβλίο Δραστηριοτήτων, (σσ.4-16) ΕΠΕΑΕΚ*
- *Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν.& Φερεντίνος, Σ. (2011) Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικά Α' Γυμνασίου:* Οι φυσικοί αριθμοί Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα *(σσ.29) .Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων Πολιτισμού και Αθλητισμού, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεις «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»*
- *https://www.astro.noa.gr/gr/eratosthenes/*
- Το πείραμα του Ερατοσθένη για τον Υπολογισμό της Ακτίνας της Γης - 2018: Εαρινά Επιστημονικά Ανθεστήρια! (2018).
- *https://panekfe.gr/downloads/ekfe/2018-ekfe-serrwn-apologismos-peirama-eratosthenes.pdf*
- *How to measure the size of the earth (2002).*
- *http://www.eso.org/public/outreach/eduoff/aol/market/collaboration/erathostenes/*

Το Πυθαγόρειο θεώρημα

όπως απεικονίζεται στα γραμματόσημα διάφορων χωρών του Κόσμου

Ανδρέας Πούλος

Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι από τα διασημότερα θεωρήματα των στοιχειωδών Μαθηματικών. Έχει διαπιστωθεί ότι οι απόφοιτοι Γυμνασίου ή Λυκείου αν τους ζητηθεί να θυμηθούν κάποιο από τα «επώνυμα» θεωρήματα της διδακτέας ύλης, σε μεγάλο ποσοστό αναφέρουν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Το ίδιο το θεώρημα είναι γνωστό με διάφορα ονόματα: «Πυθαγόρειο Θεώρημα», «Θεώρημα της υποτείνουσας», «Θεώρημα της εκατόμβης», αλλά και ως «πρόταση 47 του 1^{ου} βιβλίου των Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Ένας εξαιρετικά μεγάλος αριθμός άρθρων, εργασιών και βιβλίων έχει γραφεί για το Πυθαγόρειο θεώρημα, την ιστορία του, τις γενικεύσεις του στη Γεωμετρία, στην Άλγεβρα και στη θεωρία των Αριθμών, για τη σχέση του με τη Τέχνη, με την Τεχνολογία, με την Ιστορία του Πολιτισμού κλπ.

Ακόμα και στα περιοδικά μας στον «Ευκλείδη Α και Β», αλλά σε ανακοινώσεις στα Συνέδρια της Ε.Μ.Ε., οι αναφορές στο Πυθαγόρειο θεώρημα είναι πολύ συχνές. Συνεπώς, τίθεται το ερώτημα, τι νέο είχε να προσφέρει ένα ακόμα άρθρο για το Πυθαγόρειο θεώρημα; Ως απάντηση στο ερώτημα, προβάλλουμε μια ειδική οπτική γωνία, **πώς απεικονίζεται και για ποιους λόγους αυτό το διάσημο θεώρημα στα γραμματόσημα που έχουν εκδώσει τα Ταχυδρομεία των διάφορων χωρών.**

Θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν αρκετοί και διαφορετικοί λόγοι και αφορμές εκτός από τους προφανείς, δηλαδή της προβολής της αξίας των Μαθηματικών.

Ταξινομούμε τους λόγους για τους οποίους οι μαθηματικοί-συλλέκτες γραμματοσήμων καταγράφουν και συλλέγουν θέματα που αφορούν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

1. Θέματα αναμνηστικά με αφορμή κάποιο διεθνές συνέδριο Μαθηματικών.
2. Θέματα για να τιμηθεί η προσωπικότητα του Πυθαγόρα ακόμα και ως έργα τέχνης.
3. Θέματα που σχετίζονται με γενικεύσεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
4. Θέματα που απεικονίζουν διάσημους μαθηματικούς τύπους.
5. Προσωπικότητες που έκαναν μία η περισσότερες αποδείξεις της ορθότητας του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
6. Θέματα που αφορούν τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών για ιδεολογικούς και πολιτικούς λόγους.

Η ταξινόμηση των θεμάτων που αφορούν το Πυθαγόρειο θεώρημα δεν έχει νόημα να είναι ιεραρχική, δηλαδή να έχει μια σειρά σπουδαιότητας. Αυτό μας επιτρέπει να κάνουμε εδώ μία τυχαία παρουσίαση θεμάτων που αφορούν το διάσημο θεώρημα.

Το πρώτο γραμματόσημο που παρουσιάζουμε είναι έκδοση των Ταχυδρομείων της Νικαράγουα, χώρας της Λατινικής Αμερικής, του έτους 1971. Η Νικαράγουα εξέδωσε μια σειρά 10 γραμματοσήμων που απεικονίζουν δέκα αντίστοιχους διάσημους «παγκόσμιους νόμους» των Μαθηματικών και της Φυσικής. Προφανώς, από αυτή τη δεκάδα δεν μπορούσε να απουσιάζει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Μάλιστα, στο θέμα εικονίζεται δεξιά από τον τύπο $A^2 + B^2 = C^2$ η πρόσοψη ενός αρχαίου ελληνικού ναού και ο διαβήτης ως όργανο γεωμετρικών κατασκευών σύμφωνα με το πρότυπο του Ευκλείδη, δηλαδή την «κατασκευή» γεωμετρικών σχημάτων μόνο με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη.

Η δεύτερη θεματική ομάδα γραμματοσήμων σχετίζεται με τον ίδιο τον Πυθαγόρα ως προσωπικότητας του παγκόσμιου πολιτισμού, φιλοσόφου, μαθηματικού, πανεπιστήμονα, πολιτικού - θρησκευτικού ηγέτη και θεωρητικού της Μουσικής.

Ένα γραμματόσημο που παριστά τον Πυθαγόρα εξέδωσε το κρατίδιο του Άγιου Μαρίνου το έτος 1983. Είναι θέμα από μια σειρά που εκδόθηκε προς τιμή διάσημων επιστημόνων και διανοητών.

Στο άνω δεξί μέρος του θέματος υπάρχει και η σχηματική αναπαράσταση του ομώνυμου θεωρήματος, που εκφράζεται ως σχέση εμβαδών μεταξύ των τετραγώνων που έχουν για πλευρές, τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου.

Στην ομάδα γραμματοσήμων που αφορούν το πρόσωπο του Πυθαγόρα ανήκουν και τα γραμματόσημα που εξέδωσαν τα Ελληνικά Ταχυδρομεία το έτος 1955.

Πρόκειται για δύο θέματα από σειρά τεσσάρων γραμματοσήμων. Απεικονίζουν τον Πυθαγόρα σε νόμισμα της νήσου Σάμου, της γενέθλιας νήσου του μεγάλου σοφού. Είναι η μία όψη από χάλκινο νόμισμα της εποχής του αυτοκράτορα Τραϊανού (98-117 μ.Χ.). Τα γράμματα στο νόμισμα είναι σε ελληνικό αλφάβητο.

Νόμισμα των Αβδήρων με τον Πυθαγόρα   Νόμισμα της Σάμου με τον Πυθαγόρα

Νομίσματα που απεικονίζουν τον Πυθαγόρα, δεν είχε εκδώσει μόνον η Σάμος. Η φήμη του ήταν τόσο μεγάλη, ώστε και τα Άβδηρα είχαν εκδώσει ασημένιο στατήρα γύρω στο 400 π.Χ. (για την ακρίβεια την περίοδο από 415 έως 395 π.Χ.). Σε αυτό φαίνεται καθαρά ένα πορτραίτο του, ίδιο με αυτό του γραμματοσήμου του Αγίου Μαρίνου. Επίσης, το νησί της Σάμου κατά τη διάρκεια της Ρωμαϊκής εποχής είχε εκδώσει νόμισμα με τον Πυθαγόρα, όμοιο με αυτό της αρχαιοελληνικής περιόδου.

Τα άλλα δύο θέματα της σειράς των Ελληνικών Ταχυδρομείων του έτους 1955 αφορούν το ίδιο το Πυθαγόρειο θεώρημα και το νησί της Σάμου.

Η συγκεκριμένη σειρά των Ελληνικών Ταχυδρομείων του έτους 1955 είναι περιζήτητη από τους συλλέκτες. Το θέμα με το Πυθαγόρειο θεώρημα υπάρχει σε πολλά σχολικά εγχειρίδια Γεωμετρίας διάφορων χωρών. Προφανώς, υπάρχει και στα ελληνικά σχολικά βιβλία, αν και πολλοί αναγνώστες τους – μικροί και μεγάλοι – μάλλον δεν το θυμούνται. Στο άλλο θέμα με τον χάρτη σημειώνεται η θέση της αρχαίας πόλης της Σάμου, η οποία συμπίπτει με το Τηγάνι. Από το 1955 η μικρή αυτή κωμόπολη ονομάστηκε Πυθαγόρειο, μετά από πρόταση της Διεθνούς Ένωσης Πυθαγορείων όταν οργάνωσαν εκεί διεθνές Συνέδριο. Η πρόταση της νέας ονομασίας έγινε δεκτή από το Ελληνικό Κράτος. Μνημεία του Πυθαγόρειου όπως το διάσημο Ευπαλίνειο όρυγμα κηρύχθηκαν από την ΟΥΝΕΣΚΟ το 1992 ως μνημεία του παγκόσμιου πολιτισμού. Το $1^{ο}$ Συνέδριο των Πυθαγορείων πραγματοποιήθηκε το 1955 στην Αθήνα, στις Βρυξέλλες και στη Σάμο. Με αφορμή αυτό το Συνέδριο εκδόθηκε η σειρά γραμματοσήμων για τον Πυθαγόρα από τα Ελληνικά Ταχυδρομεία.

Ένας άλλος τύπος θέματος είναι αυτό που αφορά το Πυθαγόρειο θεώρημα και τον Πυθαγόρα σε γραμματόσημα που έχουν σχέση με την Τέχνη.

Εδώ έχουμε σχεδόν μοναδικό παράδειγμα τέτοιων γραμματοσήμων την τοιχογραφία του Ιταλού καλλιτέχνη της Αναγέννησης Ραφαήλ. Αυτή υπάρχει στο Βατικανό, φιλοτεχνήθηκε μεταξύ των ετών 1510-1511 και απεικονίζει εκτός των άλλων σοφών και επιστημόνων και τον Πυθαγόρα. Στην τοιχογραφία ο Σάμιος σοφός απεικονίζεται στο αριστερό μέρος και σε πρώτο πλάνο να γράφει σε κάποιον πάπυρο. Είναι αυτός με την γενειάδα, τα λίγα μαλλιά και με τον λευκό χιτώνα.

Γραμματόσημα με θέμα την αποκαλούμενη «Σχολή των Αθηνών» στα οποία να εικονίζεται ο Πυθαγόρας έχουν εκδοθεί από αρκετές χώρες. Δίνουμε δύο παραδείγματα. Το ένα είναι έκδοση του κράτους του Βατικανού του 1986 και το δεύτερο του Αφρικανικού κράτους της Σιέρρα Λεόνε έκδοση του 1983.

Πυθαγόρας, κράτος Βατικανού 1986

Πυθαγόρας, Σιέρρα Λεόνε, 1983

Μία άλλη θεματική ομάδα είναι αυτή των γραμματοσήμων που απεικονίζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα είτε ως διάσημο θεώρημα – ανακάλυψη των Μαθηματικών είτε σε σύνδεση με την Τεχνολογία.

Στην ομάδα αυτή ανήκει η έκδοση των Ιαπωνικών Ταχυδρομείων του έτους 1984. Αφορά τις εφαρμογές των Μαθηματικών στην Τεχνολογία. Στο θέμα υπάρχουν τα σύμβολα των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, διαγράμματα της Στατιστικής, τυπικά γραφήματα της θεωρίας Γράφων και η σχηματική παράσταση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Το ίδιο θεώρημα εμφανίζεται και στην έκδοση του Σουρινάμ, κράτους της Λατινικής Αμερικής.

Η έκδοση αυτή πραγματοποιήθηκε το 1972 και αφορούσε την εκπαίδευση. Για την εκπαίδευση στα Μαθηματικά επιλέχθηκε το θεώρημα του Πυθαγόρα.

Είναι ενδιαφέρον ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα, όπως και πολλά θέματα που αφορούν στην Ιστορία των Μαθηματικών, έχει και πολιτικές και ιδεολογικές όψεις και προεκτάσεις. Για παράδειγμα, η Τουρκία το έτος 1950 είχε εκδώσει ένα γραμματόσημο για τον Πέρση μαθηματικό και φιλόσοφο Αλ Φαραμπί (872-950 μ.Χ.) με τον τίτλο «Μεγάλος Τούρκος Φιλόσοφος». Οι λόγοι αυτής της έκδοσης είναι οφθαλμοφανείς. Οι Τούρκοι ήθελαν να παρουσιάσουν ένα πολιτιστικό παρελθόν και μια αίγλη, ανεξάρτητα από την ιστορική αλήθεια. Η αναφορά που κάνουμε δεν είναι άσχετη. Για το Πυθαγόρειο θεώρημα η ιστορική βιβλιογραφία έχει βρει δεδομένα που δείχνουν ότι και λαοί πριν τους Έλληνες, όπως οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι κλπ. γνώριζαν την πρακτική σημασία του θεωρήματος, τόσο στο υπολογισμό μηκών, όσο και στη χάραξη κάθετων ευθειών. Στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών είναι γνωστές οι έριδες για την πατρότητα του θεωρήματος. Από την άλλη μεριά όμως είναι γνωστό σε όλους ότι οι Έλληνες ήταν οι πρώτοι που καθιέρωσαν την έννοια της απόδειξης, ως αιτιολογημένου λόγου που βασίζεται και άλλες επίσης αποδεδειγμένες προτάσεις ή αξιώματα. Αυτός είναι και ο λόγος που ονομάζεται θεώρημα, η ανακάλυψη της σχέσης των μηκών των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου. Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη μάλιστα υπάρχει και η απόδειξη ότι αυτή η σχέση ισχύει μόνο για τα ορθογώνια τρίγωνα, κάτι που άλλους πολιτισμούς δεν είχε κάποια θεωρητική ή πρακτική αξία.

Το κράτος Π.Γ.Δ.Μ. ή όπως ονομάζεται σήμερα ως «Βόρεια Μακεδονία», το 1988 εξέδωσε θέμα που αναφέρεται στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Ενδιαφέρουσα είναι η σημειολογία της έκδοσης. Οι ιθύνοντες των Ταχυδρομείων της τότε Π.Γ.Δ.Μ. αν και «Μακεδόνες» και «απόγονοι» του Μεγάλου Αλεξάνδρου, θεώρησαν καλό να τιμήσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με μια Βαβυλωνιακή πινακίδα.

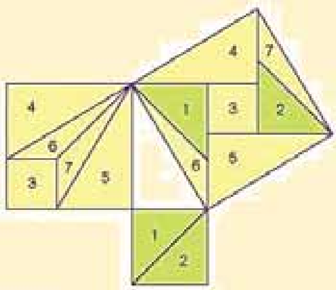
Μία θεματική ομάδα ταξινόμησης γραμματοσήμων σχετικών με το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι αυτή που αφορά εκδόσεις με αφορμή διεθνή συνέδρια ή και άτομα που ασχολήθηκαν με αποδείξεις του διάσημου θεωρήματος. Δίνουμε κάποια παραδείγματα.

Το 2014 η Δημοκρατία της Κορέας με αφορμή το Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών I.C.M. εξέδωσε μια σειρά γραμματοσήμων. Το τρίτο θέμα της αναμνηστικής έκδοσης αναφέρεται στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Μάλιστα, στο σχήμα απεικονίζεται το πρώτο βήμα της απόδειξης που υπάρχει στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, ο χωρισμός δηλαδή του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα σε δύο ορθογώνια που το καθένα έχει εμβαδόν ίσο με τα αντίστοιχα εμβαδά των άλλων δύο τετραγώνων.

Η Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας το έτος 2002 εξέδωσε ένα γραμματόσημο στο οποίο εικονίζεται ο Κινέζος μαθηματικός Lui Hui (3^o αιώνας μ.Χ.) στη σειρά επιστήμονες της αρχαίας Κίνας. Το έτος 263 μ.Χ. εξέδωσε ένα βιβλίο με τίτλο «Τα εννέα κεφάλαια της τέχνης των Μαθηματικών», στο οποίο γίνεται χρήση αρνητικών αριθμών.

Επίσης, έδωσε μια εικονική απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος και έκανε πλήθος αστρονομικών παρατηρήσεων.

Η σχηματική «απόδειξη» του Λούι Χούι για το Πυθαγόρειο θεώρημα.



Τέλος, οι γενικεύσεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος είναι ένα θέμα που περιλαμβάνεται στις συλλογές των μαθηματικών γραμματοσήμων. Η αποκαλούμενη εικασία του Φερμά είναι μία γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος που σχετίζεται με τη θεωρία των Αριθμών. Ενώ υπάρχουν τριάδες ακεραίων αριθμών A, B, C που ικανοποιούν τη σχέση $A^2 + B^2 = C^2$ όπως είναι οι πολύ γνωστές $3^2 + 4^2 = 5^2$ και $5^2 + 12^2 = 13^2$ δεν υπάρχουν τριάδες ακεραίων που ικανοποιούν τη σχέση $A^3 + B^3 = C^3$ και γενικότερα τη σχέση $A^n + B^n = C^n$ για οποιονδήποτε ακέραιο $n > 2$. Η απόδειξη αυτής της εικασίας παρέμεινε αναπάντητη για περισσότερο από 300 χρόνια. Προφανώς, έχει βρει μια θέση στα γραμματόσημα με θέμα τα Μαθηματικά ή ορθότερα ως παράδειγμα της πολιτιστικής και πνευματικής αξίας των Μαθηματικών.

Το πρώτο παράδειγμα είναι έκδοση των Γαλλικών Ταχυδρομείων του 2001 με αφορμή τα 400 χρόνια από τη γέννηση του Πιέρ ντε Φερμά. Σε αυτό εκτός από το πορτραίτο του εικονίζεται και η διάσημη εικασία που σχετίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Το δεύτερο παράδειγμα είναι έκδοση της Τσεχίας του 2000 με αφορμή το Διεθνές έτος Μαθηματικών.

Στο θέμα αυτό εικονίζεται η εικασία που σχετίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Φαίνεται ότι τη διατύπωσε ο Φερμά το 1670 και στη κόκκινη λωρίδα ότι ο μαθηματικός Άντριου Ουάιλς το 1995 απέδειξε πλήρως και ορθά ότι πράγματι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί που να ικανοποιούν την εξίσωση αυτή.

Βιβλιογραφικές αναφορές:

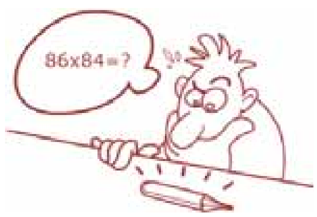
- Πούλος Ανδρέας (2018). Ο κόσμος των Μαθηματικών μέσω των γραμματοσήμων. Θεσσαλονίκη. Αυτοέκδοση.
- Sakellariou George (1055). First World Congress of Pythagorean Organizations: Proceedings of the Congress held in Athens, Samos, and Brussels, July - August 1955.
- https://www.yumpu.com/en/document/read/6221870/pythagoras-and-the-pythagoreans-department-of-mathematics

Νοεροί Υπολογισμοί

Νάνσυ Κυριακοπούλου

Δε θα ήταν πολύ χρήσιμο, αν μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε 2 αριθμούς σε πολύ λίγο χρόνο, χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής; Σε αυτό το άρθρο θα παρουσιάσουμε κάποιους τρόπους γρήγορων υπολογισμών με τον νου μας!

Πολλαπλασιασμός 2 αριθμών



Συνθήκες:

1. Τα αντίστοιχα πρώτα ψηφία πρέπει να είναι ίδια, π.χ. **2**7 με **2**3, **35**7 με **35**3.
2. Τα τελευταία ψηφία (μονάδες) πρέπει να έχουν άθροισμα 10, π.χ. 2**7** με 2**3** (**7**+**3**=**10**).

Διαδικασία:

1. Παίρνουμε τα ψηφία που είναι ίδια και πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με τον επόμενό του. Π.χ. στο **2**7·**2**3 παίρνουμε το **2** και το πολλαπλασιάζουμε με τον επόμενό του, δηλαδή το 3. Το **2**·3=**6** είναι το πρώτο ψηφίο του αποτελέσματος.
2. Πολλαπλασιάζουμε τις μονάδες των αριθμών. Το αποτέλεσμα αποτελεί το τελευταίο διψήφιο μέρος του αριθμού. Π.χ. στο 2**7**·2**3**, το 3·7=**21** είναι το τελευταίο μέρος του αριθμού.
3. Οπότε 27·23=621.

Προσοχή:

Όταν οι μονάδες είναι 1 και 9, τότε το τελευταίο διψήφιο μέρος του αριθμού είναι το **09**.

Οπότε για να πολλαπλασιάσουμε το 61·69, πολλαπλασιάζουμε το 6·7=42 και το 1·9=09, οπότε 61·69=4.209.

Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε το τετράγωνο των αριθμών που τελειώνουν σε 5!

Π.χ. 35·35=1.225 (3·4=12 και 5·5=25) 45·45=2.025 (4·5=20 και 5·5=25)

16·14=;	52·58=;	93·97=;
25·25=;	66·64=;	17·13=;
31·39=;	78·72=;	26·24=;
47*43=;	89*81=;	32*38=;
55*55=;	65*65=;	75*75=;

Για εξάσκηση:

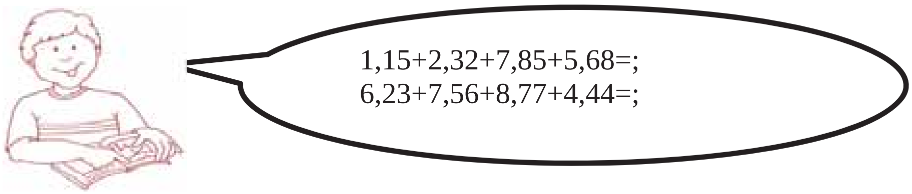
Πρόσθεση 4 δεκαδικών αριθμών

Συνθήκη: Τα δεκαδικά μέρη των 2 αριθμών να έχουν άθροισμα 100.
Διαδικασία: Παρατηρούμε τα δεκαδικά μέρη των αριθμών. Αν βρούμε ζεύγος αριθμών, των οποίων τα δεκαδικά μέρη κάνουν 100, τότε επιλέγουμε να προσθέσουμε αυτούς τους αριθμούς μαζί. Π.χ. στο άθροισμα

2,**75**+3,<u>28</u>+6,**25**+4,<u>72</u>

θα επιλέξουμε να προσθέσουμε τον 1^o με τον 3^o και τον 2^o με τον 4^o αριθμό, διότι **75+25=100** και <u>28+72=100</u>. Οπότε, (2,**75**+6,**25**)+(3,<u>28</u>+4,<u>72</u>)=9+8=17.

Για εξάσκηση:



Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις

Διαδικασία: Παρατηρούμε τους όρους και κάνουμε τις απαραίτητες μετατροπές, ώστε να προκύψουν πολλαπλάσια του 10. Π.χ. 2,5·19·40

$$2{,}5\,\frac{10}{4}\cdot 19\cdot 40 =$$
$$\frac{10}{\cancel{4}}\cdot 19\cdot \cancel{40}10 =$$
$$100\cdot 19 = 1.900$$

Π.χ. 24:25=;
1/25 = 4/100, οπότε:
$$\frac{24}{25}=\frac{24\cdot 4}{100}=\frac{96}{100}=0{,}96$$

Π.χ. 88·125=;
125=1.000:8, οπότε:
88·125 = 88·(1.000:8) = (88:8)·1.000 =
11·1.000 = 11.000

Για εξάσκηση:

25·22·4=;
5·38·20=;
13:25=;
208·125=;

Διαίρεση με πολλαπλάσια του 2

Σκέφτομαι ότι:

:4	το μισό του μισού
:8	το μισό του μισού του μισού
:16	το μισό του μισού του μισού του μισού

Διαδικασία:

- Για να διαιρέσουμε με το 4, βρίσκουμε το μισό του μισού του αριθμού. Π.χ. για να υπολογίσουμε το 76:4, υπολογίζουμε το μισό του 76 που είναι το 38 και μετά το μισό του 38 που είναι το **19**. Οπότε 76:4=19.
- Για να διαιρέσουμε με το 8, βρίσκουμε το μισό του μισού του μισού του αριθμού. Π.χ. για να υπολογίσουμε το 256:8, υπολογίζουμε το μισό του 256 που είναι το 128 και μετά το μισό του 128 που είναι το 64 και μετά το μισό του 64 που είναι το **32**. Οπότε 256:8=32.

Εξάσκηση: 448:4=; 184:8=; 112:4=;

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση με διάσπαση αριθμού

Διαδικασία:

- Για να πολλαπλασιάσουμε 2 αριθμούς, μπορούμε να σπάσουμε τον έναν σε 2 άλλους, χρησιμοποιώντας την πλησιέστερη δεκάδα.
  Π.χ. $38\cdot15=38\cdot(10+5)=$
  $38\cdot10 + 38\cdot5=38\times10 + (38\cdot10) :2 = 380+380:2=380+190=570$
- **Διαφορά τετραγώνων**. Π.χ. $38*42=(40-2)\cdot(40+2)= 40^2-2^2=1.600-4=1.596$
- Για να διαιρέσουμε 2 αριθμούς, μπορούμε να σπάσουμε τον διαιρετέο σε 2 άλλους, χρησιμοποιώντας την πλησιέστερη δεκάδα.
  Π.χ. 357:17=(340+17):17=
  (340:17)+ (17:17)=20+1=21

***Για εξάσκηση*:**

$23\cdot48=$;	$35\cdot69=$;
442:13=;	324:12=;
$27\cdot33=$;	$56\cdot64=$;

Υπολογισμός της τρίτης δύναμης ενός αριθμού

Θέλουμε το 23^3

1) 2^3 $2^2\cdot3$ $2\cdot3^2$ 3^3 (κατάταξη των ψηφίων του αριθμού με συνδυασμό δυνάμεων)
2) 8 12 18 27 (αριθμητικά αποτελέσματα)
3) 24 36 (διπλασιασμός του δεύτερου και τρίτου αποτελέσματος)
4) 12 1 6 7 (κατακόρυφες προσθέσεις σε κάθε στήλη (ξεκινάμε από την πρώτη δεξιά) αλλά τις δεκάδες τις μεταφέρουμε στη αμέσως προηγούμενη στήλη)

Ο αριθμός 12.167 είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

***<u>Για εξάσκηση</u>*:**

58^3=; 36^3=; 79^3=;

Ποσοστά

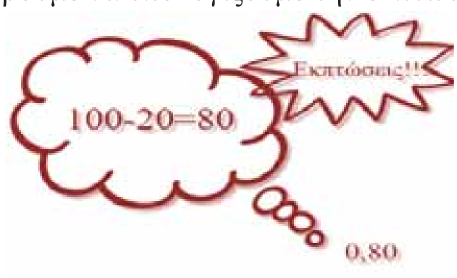
Ένα απίθανο τέχνασμα! Το 44% του 25 είναι ακριβώς ίσο με το 25% του 44 δηλαδή το ¼ του 44. Αυτό συμβαίνει σε οποιοδήποτε ποσοστό του 25. Π.χ. Το 52% του 25 ισούται με το 25% του 52, δηλαδή με το ¼ του 52 που είναι το 13.

- **Αύξηση ποσού**.

Για να υπολογίσουμε πόσο γίνεται ένα ποσό, όταν αυξάνεται κατά π.χ. 20% το πολλαπλασιάζουμε επί 1,20, δηλαδή επί 1,2. Π.χ.

- Αν αυξήσουμε το 30 κατά 20%, τότε γίνεται 30·1,2=36.
- Αν αυξήσουμε το 25 κατά 40%, τότε γίνεται 25·1,4=35.

- **Μείωση ποσού**. Έτσι μπορούμε να υπολογίζουμε την έκπτωση σε ένα προϊόν!



Για να υπολογίσουμε πόσο γίνεται ένα ποσό, όταν μειώνεται κατά π.χ. 20% το πολλαπλασιάζουμε επί 0,80, δηλαδή επί 0,8. Π.χ.

- Αν μειώσουμε το 30 κατά 20%, τότε γίνεται 30·0,8=24.
- Αν μειώσουμε το 25 κατά 40%, τότε γίνεται 25·0,6=15.
- Έκπτωση 30% σε προϊόν που κοστίζει 60€. Τελική τιμή προϊόντος που κοστίζει 60€ και έχει έκπτωση 30%: 60·0,7=42€

***<u>Για εξάσκηση</u>*:**

Το 88% του 25 Το 76% του 25

Αύξηση του 40 κατά 30%

Μείωση του 40 κατά 30%

Οι εικόνες προσώπων προέρχονται από την: clipart-library.com

Ποσοστά ένας άγνωστος γνωστός (Μέρος 2^{ο})

Γράφει ο Σπύρος Φερεντίνος

Στόχος 2: **Να μετατρέπουμε ένα κλάσμα σε ποσοστό και αντίστροφα** (σύνδεση του ποσοστού με τα κλάσματα).

Για παράδειγμα

1. Μετατροπή κλάσματος σε ποσοστό όπου:
   ή πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με ένα αριθμό ώστε ο παρανομαστής να γίνει 100.

$$\frac{3}{20}=\frac{3.5}{20.5}=\frac{15}{100}=15\%,\qquad \frac{5}{8}=\frac{5.12,5}{8.12,5}=\frac{62,5}{100}=62,5\%$$

   ή διαιρούμε τον αριθμητή δια του παρανομαστή και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με 100.

$$\frac{1}{8}=0,125 \text{ και } 0,125\ .\ 100 = 12,5\%$$

2. Μετατροπή ποσοστού σε κλάσμα όπου ως αριθμητή θέτουμε το ποσοστό και ως παρανομαστή το 100 ή και το 1000 (εάν δεν θέλουμε ο αριθμητής να περιέχει ένα δεκαδικό ψηφίο).

$$11\% = \frac{11}{100},\qquad 24,5\% = \frac{24,5}{100}=\frac{245}{1000}$$

Στόχος 3: **Να μετατρέπουμε ένα δεκαδικό σε ποσοστό αντίστροφα** (σύνδεση του ποσοστού με τους δεκαδικούς).

$$0,35=\frac{35}{100}=35\%$$

$$42\%=\frac{42}{100}=0,42$$

Στόχος 4: **Να συνδέουμε την έννοια του ποσοστού με την έννοια των ομωνύμων κλασμάτων** (κοινός παρανομαστής το 100 ή 1000 κλπ).

Στο στόχο αυτό υπάγεται μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων όπως το ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 που διατυπώθηκε στην αρχή του άρθρου και συνήθως αφορούν τη σύγκριση κλασμάτων.

Στόχος 5: **Να υπολογίζουμε το ποσοστό ενός συγκεκριμένου αριθμού**. Ο υπολογισμός στην περίπτωση αυτή γίνεται με πολλαπλασιασμό του αριθμού επί το ποσοστό γραμμένο σε μορφή κλάσματος με παρανομαστή το 100.

Για παράδειγμα

Το 30% του 360 είναι $\frac{30}{100}\ .\ 360 = \frac{10800}{100} = 108$.

Στο στόχο αυτό υπάγεται μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων όπως το ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 που αφορά το εμβαδόν ενός σπιτιού.

Στόχος 6: **Να συνδέουμε το ποσοστό με την έννοια της πιθανότητας.**

Η έννοια της πιθανότητας παρουσιάζεται για πρώτη φορά στοιχειωδώς στο βιβλίο της Ε΄ Δημοτικού. Η έννοια του ποσοστού αναπτύσσεται με αναλυτικό τρόπο στο βιβλίο της ΣΤ΄ Δημοτικού, ενώ η παρουσίαση του ποσοστού στην Α΄ Γυμνασίου είναι επαναληπτική, άρα όχι ιδιαίτερα αναπτυγμένη.

Η έννοια της πιθανότητας είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στην καθημερινή ζωή. Τα παραδείγματα είναι πάρα πολλά. Πχ εάν ρίξουμε ένα ζάρι μια φορά η πιθανότητα να φέρουμε 2 είναι $\frac{1}{6}$ που περίπου είναι 16,66%. Η πιθανότητα γενικά παριστάνεται από ένα κλάσμα όπου ο αριθμητής του είναι οι ευνοϊκές περιπτώσεις (αυτές που επιθυμούμε ή αναμένουμε να πραγματοποιηθούν) και ο παρανομαστής όλες οι δυνατές περιπτώσεις (ότι είναι δυνατό να συμβεί). Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε το 10 εάν τραβήξουμε ένα τυχαίο χαρτί από τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας. Η πιθανότητα αυτή είναι $\frac{4}{52}$ διότι η τράπουλα περιέχει τέσσερα 10άρια (αυτό που επιθυμούμε να πραγματοποιηθεί) και το σύνολο των χαρτιών μιας τράπουλας είναι 52.

Εάν η πιθανότητα γραφεί ως κλάσμα με παρανομαστή το 100, όπως αρκετές φορές συμβαίνει, τότε εκφράζεται με τα ίδια σύμβολα όπως το ποσοστό, με τη διαφορά ότι η πιθανότητα είναι μια πρόβλεψη που όσο περισσότερο πλησιάζει το 100% τόσο μεγαλώνει η βεβαιότητα. πραγματοποίησης του γεγονότος στο οποίο αναφέρεται και όσο πλησιάζει προς το 0% τόσο μικραίνει η βεβαιότητα πραγματοποίησης.

Για παράδειγμα

- *Η πιθανότητα να βρέξει αύριο είναι 98 %.*
- *Η πιθανότητα να βρέξει αύριο είναι 2%.*

Η πιθανότητα να βρέξει αύριο είναι 2%. ουσιαστική σημαίνει ότι είναι πολύ μικρή η πιθανότητα να βρέξει αύριο, επομένως μπορεί να μας οδηγήσει στην απόφαση ότι μάλλον δεν χρειάζεται να πάρω ομπρέλα μαζί μου. Αντίθετα η έκφραση *η πιθανότητα να βρέξει αύριο είναι 98%* σημαίνει ότι είναι σχεδόν βέβαιο ότι αύριο θα βρέξει.

Στο παραπάνω παράδειγμα που ανήκει στο πεδίο της Μετεωρολογίας η πιθανότητα στηρίζεται σε πληροφορίες που διαθέτουν οι Μετεωρολόγοι και βέβαια όσο πιο ακριβείς είναι οι πληροφορίες τόσο πιο αξιόπιστο είναι το αποτέλεσμα – πρόβλεψη. Όπως θα δούμε και παρακάτω στο θέμα της αξιοπιστίας μιας πιθανότητας μεγάλη σημασία έχουν οι πληροφορίες βάσει των οποίων παράγεται η πιθανότητα – πρόβλεψη.

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει και τη διαφορά των εννοιών πιθανότητας και ποσοστού.

- *Ο Γιώργος με πιθανότητα 60% θα πάρει άριστα στα Μαθηματικά.*
- *Ο βαθμός του Γιώργου στα Μαθηματικά αυξήθηκε κατά 60%.*

Στην 1η περίπτωση έχουμε μια πρόβλεψη πραγματοποίησης για την ακρίβεια της οποίας δεν υπάρχουν κάποιες πληροφορίες, ενώ στη 2η γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιος είναι ο νέος βαθμός του Γιώργου στα Μαθηματικά (εάν βέβαια γνωρίζουμε τον προηγούμενο βαθμό).

Η πιθανότητα σε μορφή ποσοστού εμφανίζεται σε πολλές περιπτώσεις της καθημερινής ζωής.

Για παράδειγμα, ένας χειρουργός ανακοινώνει σε ένα ασθενή ότι η πιθανότητα να πετύχει η εγχείρηση Α είναι περίπου 90%. Από πού προήλθε αυτό το 90%; Ο πλέον συνηθισμένος τρόπος είναι να έχει πραγματοποιηθεί η εγχείρηση Α πολλές φορές και να έχει προκύψει ένα κλάσμα όπου ο αριθμητής είναι οι ευνοϊκές περιπτώσεις (επιτυχία στην εγχείρηση) και ο παρανομαστής όλες οι δυνατές περιπτώσεις (όλες οι εγχειρήσεις τύπου Α που πραγματοποιήθηκαν). Αν υποθέσουμε ότι το κλάσμα είναι το $\frac{1340}{1500}$ που σημαίνει ότι στις 1500 εγχειρήσεις οι 1340 ήταν επιτυχημένες, τότε $\frac{1340}{1500}$= 0,8933….ή περίπου 0,90 = $\frac{90}{100}$=90%. Από το παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ότι, εφόσον η πιθανότητα δεν είναι 100%, δεν υπάρχει βεβαιότητα για την έκβαση της εγχείρησης και είναι δυνατό εάν ο ασθενής υποστεί τη συγκεκριμένη εγχείρηση το αποτέλεσμα να είναι αποτυχία. Είναι φανερό ότι η απόφαση του ασθενή για το κατά πόσο θα υποστεί τη συγκεκριμένη, εγχείρηση, πέραν των άλλων κριτηρίων (εμπιστοσύνη στο χειρουργό, δαπάνη κλπ) θα εξαρτηθεί και από το γεγονός ότι η εγχείρηση αυτή έγινε πολλές φορές και συνήθως ήταν επιτυχημένη.

Υπενθύμιση: Στο Δημοτικό μάθαμε ότι το παραπάνω κλάσμα ($\frac{1340}{1500}$) ονομάζεται συχνότητα εμφάνισης ενός γεγονότος.

Βέβαια υπάρχουν και πολλές περιπτώσεις που η έννοια της πιθανότητας δεν στηρίζεται στη συχνότατα. Για παράδειγμα η άποψη του Γιώργου που αναφέρθηκε παραπάνω ότι *με πιθανότητα 60% θα πάρει άριστα στα Μαθηματικά.*
Πιστεύεται ότι η άποψη του Γιώργου είναι το ίδιο έγκυρη και αξιόπιστη με την ανακοίνωση του χειρουργού ότι η πιθανότητα να πετύχει η εγχείρηση Α είναι περίπου 90%;
Το θέμα των πιθανοτήτων θα κλείσει με την εξής ερώτηση: *Γνωρίζουμε ότι το ποσοστό σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να ξεπεράσει το 100%, ισχύει το ίδιο και για την πιθανότητα; Ποια είναι η άποψή σας;*

Στόχος 7: Να υπολογίζουμε τα ποσοστά που αντιστοιχούν σε διαδικασίες – έννοιες της καθημερινής ζωής πχ αύξηση, ελάττωση, κέρδος, ζημιά, έκπτωση, κλπ.

Ο 7ος στόχος, στον οποίο θα σταθούμε και περισσότερο, είναι και ο πλέον σημαντικός γιατί ουσιαστικά αναφέρεται στην επίλυση προβλημάτων που αντιστοιχούν σε διάφορες καταστάσεις και δραστηριότητες της καθημερινής ζωής που περιέχουν ποσοστά.
Για την κατανόηση του στόχου αυτού θα παραθέσουμε ορισμένα προβλήματα που συνδέονται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Πρόβλημα 1: Εύρεση τελικής τιμής
Ένα ποδήλατο που κοστίζει 300€ πωλείται από το κατάστημα με έκπτωση 30%. Ποια είναι η τιμή του ποδηλάτου μετά την έκπτωση;
Βασική στρατηγική: Για να βρούμε την τελική τιμή βρίσκουμε πρώτα το ποσό της έκπτωσης πολλαπλασιάζοντας την αρχική τιμή επί το ποσοστό της έκπτωσης και αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την αρχική τιμή.
Απάντηση
Η μείωση της τιμής του ποδηλάτου λόγω της έκπτωσης θα είναι $300 \cdot \frac{30}{100} = 90$€. Επομένως η τιμή του ποδηλάτου μετά την έκπτωση θα είναι 300 – 90 = 210€
Παρατήρηση με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε εάν η τιμή ενός προϊόντος αυξηθεί κατά κάποιο ποσοστό, με τη μόνη διαφορά ότι προσθέτουμε στην αρχική τιμή το ποσό της αύξησης.
Πρόβλημα 2: Εύρεση αρχικής τιμής
Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών πουλάει μια συγκεκριμένη μάρκα κινητού τηλεφώνου 110€ και το ποσοστό κέρδους του είναι 8%. Πόσο αγοράζει το κάθε κινητό τηλέφωνο;
Βασική στρατηγική: Για να βρούμε την αρχική τιμή όταν γνωρίζουμε την τελική τιμή και το ποσοστό του κέρδους (ή της ζημιάς) εφαρμόζουμε τη μέθοδο των τριών.
Απάντηση
Το πρόβλημα θα λυθεί με μέθοδο των τριών. Αν το κατάστημα είχε αγοράσει το τηλέφωνο 100€ θα το πούλαγε 108€ εφόσον το κέρδος του είναι 8%. Πόσα θα πρέπει να είχε αγοράσει το τηλέφωνο ώστε να το πουλάει 110€. Σχηματίζουμε την παρακάτω αναλογία, όπου χ είναι η τιμή αγοράς του τηλεφώνου:

100	108
x	110

$\frac{100}{x} = \frac{108}{100}$ ή 108. x = 100 . 110 ή x = $\frac{1100}{108}$ = 101,85€

Παρατήρηση Θα μπορούσε το πρόβλημα να λυθεί με απευθείας σχηματισμό της αναλογίας $\frac{100}{x} = \frac{108}{100}$, χωρίς αναφορά στη μέθοδο των τριών (μέθοδος αναλογιών).

Πρόβλημα 3: Εύρεση του μέρους ενός όλου και μετατροπή σε ποσοστό.

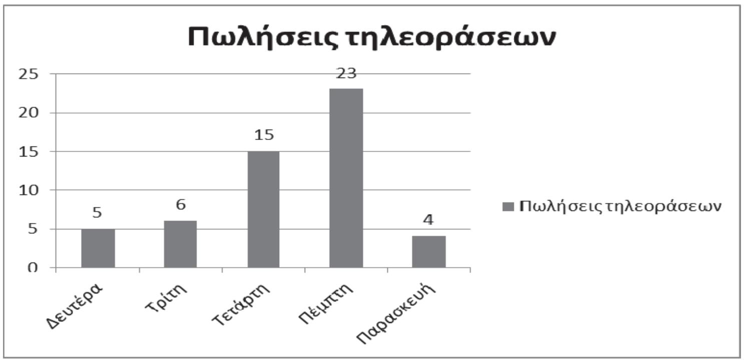
Σε μια σχολική τάξη με 25 μαθητές οι 8 πήραν άριστα σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που πήραν άριστα στα Μαθηματικά;

Βασική στρατηγική: Προκειμένου να βρούμε το μέρος ενός όλου εκτελούμε τη διαίρεση του μέρος δια του όλου και μετατρέπουμε το αποτέλεσμα σε ποσοστό.

Απάντηση

$$8:25 = 0,32 = \frac{32}{100} = 32\%$$

Πρόβλημα 4: Εύρεση του ποσοστού μιας μεταβολής (αύξηση ή μείωση, κέρδος ή ζημιά κλπ).



Το διπλανό διάγραμμα δείχνει τις πωλήσεις τηλεοράσεων που πραγματοποιήθηκαν από ένα μαγαζί στο διάστημα μιας εβδομάδας. Σε τι ποσοστό αυξήθηκαν οι πωλήσεις από τη Δευτέρα έως την Τρίτη;

Βασική στρατηγική Για να βρούμε το ποσοστό μιας μεταβολής αφαιρούμε από την τελική την αρχική τιμή και διαιρούμε το αποτέλεσμα με την αρχική τιμή και μετατρέπουμε το αποτέλεσμα σε ποσοστό.

Απάντηση

$$6 - 5 = 1, \quad \frac{1}{5} = 0,2 = \frac{20}{100} = 20\%$$

Πρόβλημα 4: Σύνδεση μεταβολής διαστάσεων επιπέδου σχήματος με ποσοστό μεταβολής εμβαδού ή περιμέτρου

Σε ένα ορθογώνιο αυξάνονται το μήκος και το πλάτος κατά 20%. Σε ποιο ποσοστό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου;

Βασική στρατηγική: Αρχικά θα βρούμε το νέο εμβαδόν του ορθογωνίου υπολογίζοντας το νέο μήκος και το νέο πλάτος και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το ποσοστό αύξησης του αρχικού εμβαδού.

Απάντηση

Εάν x είναι το μήκος και y το πλάτος του ορθογωνίου, τότε το νέο μήκος Χ θα είναι $x+\frac{20}{100}\cdot x = x + 0,2x = 1,2x$ και αντίστοιχα το νέο πλάτος είναι Y θα είναι 1,2y, άρα το νέο εμβαδόν E_2 θα είναι $E_2 = X\cdot\Psi = 1,2x\cdot 1,2y = 1,44x\cdot y = 1,44E$ (E =εμβαδόν αρχικού ορθογωνίου) , άρα $E_2 = 1,44E = E + 0,44E = E + \frac{44}{100}E = E + 44\%$ του E.

Πρόβλημα 5: Σύνδεση ποσοστού με την έννοια του τόκου

Ποσό 500€ κατατέθηκε στην τράπεζα με τόκο 2% το έτος; Σε τι ποσοστό θα αυξηθεί το αρχικό ποσό μετά από 2 έτη, εάν οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο στο τέλος του κάθε έτους;

Βασική στρατηγική: Θα βρούμε το νέο κεφάλαιο στο τέλος του 1ου χρόνου προσθέτοντας τον τόκο στο αρχικό κεφάλαιο και στη συνέχεια θα κάνουμε το ίδιο και για το τέλος του 2ου χρόνου για να βρούμε το τελικό κεφάλαιο. Αφαιρώντας από το τελικό το αρχικό κεφάλαιο θα υπολογίσουμε το ποσοστό της αύξησης.

Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι στο τέλος του 1ου έτους ο τόκος θα είναι 2% του 500 ή $\frac{2}{100}$. 500 = 10€, άρα το κεφάλαιο θα γίνει 510€ και θα τοκισθεί πάλι για ένα έτος με επιτόκιο 2% και ο τόκος θα είναι $\frac{2}{100}$. 510 =10,2€, άρα το τελικό κεφάλαιο μετά από 2 έτη θα είναι 500 + 10 + 10,2 = 520,2€. Επομένως η αύξηση του κεφαλαίου θα είναι 520,2€. -

500€ = 20,2€ και το ποσοστό της αύξησης θα είναι $\frac{20,2}{500}$ =0,0404 = 4,04%.

Παρατήρηση: Πρόσθεση ή αφαίρεση σε ποσοστά γίνονται μόνο όταν τα ποσοστά αναφέρονται στο ίδιο ποσό.

Ασκήσεις

1) Σε ένα κουτί υπάρχουν 10 άσπρα σφαιρίδια, 44 πράσινα και 26 μαύρα. Ποιο είναι το ποσοστό των άσπρων σφαιριδίων στο σύνολο των σφαιριδίων;

2) Ποιο είναι το ποσοστό του αριθμού των εμφανίσεων του γράμματος Α στο σύνολο των γραμμάτων της φράσης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ;

3) Ένα προϊόν αρχικής αξίας Κ αυξήθηκε κατά 10%, στη συνέχεια αυξήθηκε πάλι κατά 10% Ποια είναι η τελική τιμή του προϊόντος; Κυκλώστε μια από τις απαντήσεις

Α) Κ + 20% του Κ, Β) Μεγαλύτερη από Κ + 20% του Κ, Γ) Κ - 20% του Κ, Ε) Τίποτα από τα προηγούμενα

4) Το 101% των μαθητών ενός σχολείου ως άθλημα προτιμά το ποδόσφαιρο. Η έκφραση αυτή είναι α) λάθος, β) εν μέρει σωστή, γ) σωστή; Κυκλώστε μια από τις απαντήσεις.

5) Ο Γιάννης απάντησε σωστά στο 80% των 20 ερωτήσεων ενός διαγωνίσματος. Η Ελένη απάντησε σωστά σε 15 από τις 20 ερωτήσεις του ίδιου διαγωνίσματος. Όλες οι ερωτήσεις του διαγωνίσματος ήταν ισοδύναμες βαθμολογικά. Ποιος από τις δύο είχε τη μεγαλύτερη βαθμολογία στο διαγώνισμα;

6) Να εκφραστεί το 9% σε κλάσμα και σε δεκαδικό.

7) Να εκφραστούν τα $\frac{3}{4}$ σε δεκαδικό και σε ποσοστό %.

8) Να εκφραστούν τα 35 λεπτά του ευρώ ως ποσοστό, ως δεκαδικός και ως κλάσμα.

9) Ένα έπιπλο κοστίζει 400 ευρώ μετά από έκπτωση 25%. Ποιά είναι η αρχική τιμή του ρολογιού;

10) Ένα γλυκό 250 γραμμαρίων περιέχει 15% ζάχαρη. Πόσα γραμμάρια ζάχαρη περιέχει το γλυκό;

11) Ο Γιάννης έβαλε 4 γκολ σε 5 αγώνες ποδοσφαίρου και ο Πέτρος έβαλε 7 γκολ σε 8 αγώνες ποδοσφαίρου. Ποιός θεωρείς ότι είναι ο περισσότερο εύστοχος παίκτης από τους δύο;

12) Ένα προϊόν έχει ως αρχική τιμή 235 ευρώ, αλλά στην τιμή αυτή δεν συμπεριλαμβάνεται το ΦΠΑ που είναι 19%. Πόσο θα πληρώσει τελικά ο αγοραστής;

13) Σε ένα ορθογώνιο αυξάνονται το μήκος και το πλάτος κατά 30% . Σε ποιο ποσοστό θα αυξηθεί η περίμετρος του ορθογωνίου;

14) Ποσό 800€ κατατέθηκε στην τράπεζα με τόκο 3% το έτος; Σε τι ποσοστό θα αυξηθεί το αρχικό ποσό μετά από 2,5 έτη, εάν οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο στο τέλος του κάθε έτους;

15) Τι κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε σε μια τράπεζα για να πάρουμε στο τέλους του έτους μαζί με τους τόκους 3210€, αν το επιτόκιο είναι 7%;

ΤΡΙΓΩΝΟ-ΜΕΤΡΙΑ

Αρδαβάνη Καλλιόπη - Μάλλιαρης Χρήστος

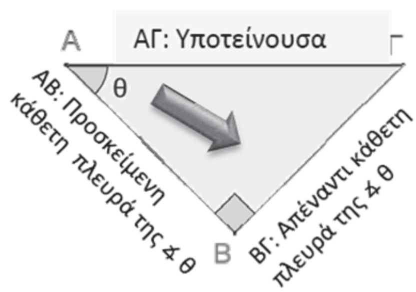
Η Τριγωνομετρία ασχολείται με την ακριβή μέτρηση των στοιχείων των τριγώνων. Είναι ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε από πολύ παλιά, από τους αρχαίους Έλληνες. Με στόχο να υπολογίσουν τις αποστάσεις μεταξύ των πλανητών-που είναι αδύνατον να μετρηθούν άμεσα- προσπάθησαν να τις υπολογίσουν από τις γωνίες που σχημάτιζαν μεταξύ τους.

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος, ο Πτολεμαίος, ο Ίππαρχος και άλλοι, που ασχολήθηκαν με την Αστρονομία, βρήκαν σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών τριγώνων.

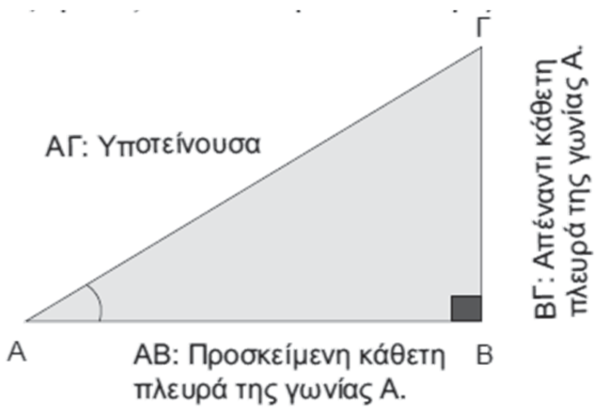
Περίπου δύο χιλιάδες χρόνια πριν δημιουργήθηκαν τριγωνομετρικοί πίνακες, δηλαδή πίνακες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη) γωνιών.

Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αυτών αριθμών δεν ήταν καθόλου απλός. Άρχισε να απλοποιείται μετά τον $17^{ο}$ αιώνα μ.Χ και στις ημέρες μας είναι πανεύκολος με τη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Σκοπός αυτών των πινάκων ήταν να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί της Αστρονομίας.

- Ονομασία πλευρών ορθογωνίου τριγώνου σε σχέση με μια οξεία γωνία του.



- **Τριγωνομετρικός αριθμός οξείας γωνίας** ορθογωνίου τριγώνου είναι ο λόγος του μήκους δύο πλευρών του τριγώνου



Λεκτικά	Τύπος
ημίτονο της $\widehat{A} = \dfrac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{A}}{\text{υποτείνουσα του τριγώνου}}$	$\eta\mu A = \dfrac{B\Gamma}{A\Gamma}$
συνημίτονο της $\widehat{A} = \dfrac{\text{Μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς της } \hat{A}}{\text{υποτείνουσα του τριγώνου}}$	$\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{AB}{A\Gamma}$
εφαπτομένη της $\widehat{A} = \dfrac{\text{Μήκος απέναντι κάθετης πλευράς της } \hat{A}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της } \hat{A}}$	$\varepsilon\varphi A = \dfrac{B\Gamma}{AB}$

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι καθαροί αριθμοί, δεν έχουν δηλαδή μονάδα μέτρησης.
- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας μπορούν να υπολογιστούν και με τη βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων.
- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μπορούν να υπολογιστούν και με τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.
- Στην υπολογιστική μηχανή οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας υπολογίζονται με τη βοήθεια των πιο κάτω εντολών:

Εντολή Υπολογιστικής	Τριγωνομετρικός Αριθμός
sin	Ημίτονο
cos	Συνημίτονο
tan	Εφαπτομένη

- Με την υπολογιστική μηχανή μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ως εξής:

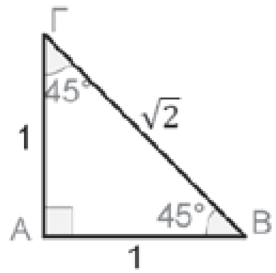
Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$\eta\mu\ 30°$	sin 3 0 =	*sin* 30 0.5
$\sigma\upsilon\nu\ 42°$	cos 4 2 =	*cos* 42 0.7431448255
$\varepsilon\varphi\ 70°$	tan 7 0 =	*tan* 70 2.747477419

Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 45^o χωρίς τη χρήση τριγωνομετρικών πινάκων αλλά και χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Λύση

Για να κατασκευάσω τη γωνία των 45^o, κατασκευάζω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ=ΑΓ=1.
Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $ΒΓ = \sqrt{2}$

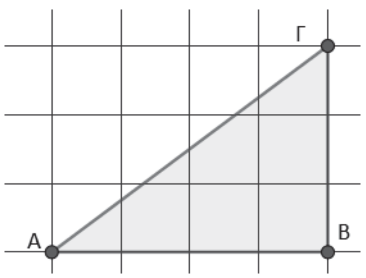


$$ημΓ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \Rightarrow ημ45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$συνΒ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \Rightarrow συν45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$εγΒ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow εφ45^o = \frac{1}{1} \Rightarrow εφ45^o = 1$$

2. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών Α, Γ. Τι παρατηρείτε;



Λύση

Από το σχήμα έχουμε ΑΒ=4 ΒΓ=3 και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ΑΓ=5 άρα

$$ημΑ = \frac{3}{5} \qquad ημΓ = \frac{4}{5}$$

$$συνΑ = \frac{4}{5} \qquad συνΓ = \frac{3}{5}$$

$$εφΑ = \frac{3}{4} \qquad εφΓ = \frac{4}{3}$$

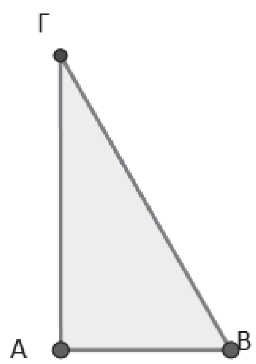
Παρατηρούμε: ημΑ=συνΓ, συνΑ=ημΓ και εφΑ·εφΓ=1

3. Να κατασκευάσετε γωνία, η οποία να έχει ημίτονο ίσο με 0.5

Λύση

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετη πλευρά ΑΒ=2 cm και υποτείνουσα ΒΓ=4 cm.
Τότε η γωνία Γ είναι η ζητούμενη αφού

$$ημΓ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{2}{4} = 0.5$$



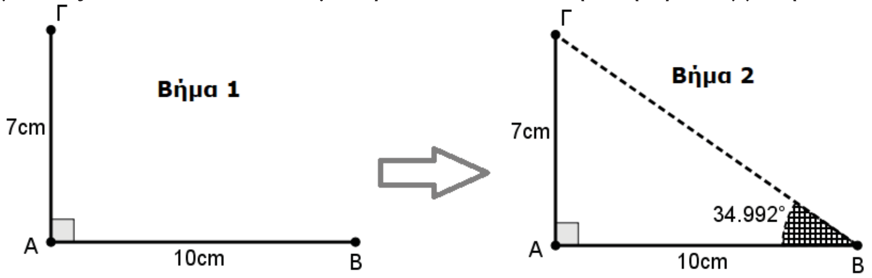
Υπάρχουν άλλα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια γωνία Γ; Πόσα; Κατασκευάστε ένα ακόμη.

4. Με τη βοήθεια του παρακάτω τριγωνομετρικού πίνακα να κατασκευάσετε μία γωνία ίση με 35^0 με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια.

Γωνία (σε μοίρες)	εφαπτομένη
24	0,4452
25	0,4663
26	0,4877
27	0,5095
28	0,5317
29	0,5543
30	0,5774
31	0,6009
32	0,6249
33	0,6494
34	0,6745
35	0,7002
36	0,7265
37	0,7536

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι η άσκηση ζητά την κατασκευή της γωνίας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Με βάση τον τριγωνομετρικό πίνακα, αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας των 35^0 είναι 0,7 με αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση.



Οι εικόνες δείχνουν τα δύο βήματα κατασκευής της γωνίας.

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ=25cm. Αν συνΒ $=\dfrac{3}{5}$ να βρείτε:

α) τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ

Λύση

α) συνΒ $=\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}$ άρα $\dfrac{3}{5}=\dfrac{ΑΒ}{25}$ άρα ΑΒ=15 cm

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε ότι ΑΓ=20 cm

β) $ημΓ=\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}=\dfrac{15}{25}=\dfrac{2}{3}$

$συνΓ=\dfrac{ΑΓ}{ΒΓ}=\dfrac{20}{25}=\dfrac{4}{5}$

$εφΓ=\dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}=\dfrac{20}{15}=\dfrac{4}{3}$

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ, ύψος ΑΔ=2cm και γωνία $Β=30^o$. Να υπολογίσετε τις πλευρές του.

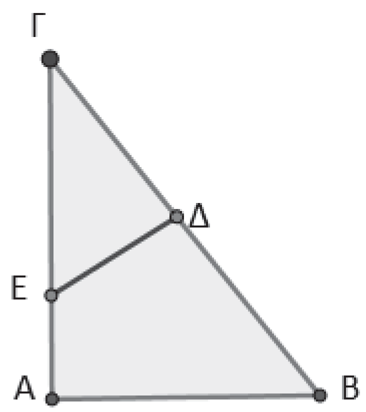
2. Στο διπλανό σχήμα δίνονται

$Α=90^o$, $Δ=90^o$, ΓΔ=4cm, ΔΕ=3cm και ΓΑ=7 cm

Να βρείτε :

α) τα ημΓ, συνΓ, εφΓ

β) την πλευρά ΑΒ



3. Αν στη λυμένη άσκηση 4 δεν δίνεται ο τριγωνομετρικός πίνακας με τις εφαπτόμενες των γωνιών αλλά με τα ημίτονα των γωνιών, πως θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί η κατασκευή της γωνίας των 35^0 με προσέγγιση εκατοστού;

Ένα Πρόβλημα,
πολλές προσεγγίσεις λύσης του

Ανδρέας Τριανταφύλλου

Πρόβλημα

Όταν ο Νίκος κάνει βολή στο μπάσκετ, είτε βάζει καλάθι με το σουτ, είτε αστοχεί. Στη διάρκεια της προπόνησης, για κάθε βολή που ο Νίκος βάζει καλάθι, παίρνει 5 βαθμούς από τον προπονητή του. Για κάθε χαμένη βολή, ο προπονητής του, του αφαιρεί 2 βαθμούς. Ο Νίκος κάνει συνολικά 28 βολές, και καταλήγει να πάρει μηδενική βαθμολογία (0 βαθμοί). Πόσες εύστοχες βολές έκανε ο Νίκος;

Λύση

1^{ος} τρόπος

Θα κάνουμε δοκιμές, δηλαδή θα εξετάσουμε περιπτώσεις συνδυασμού βολών που πέτυχε ο Νίκος καλάθι, και βολών που αστόχησε, με τη βοήθεια ενός πίνακα στον οποίο θα εμφανίζονται οι βαθμοί που πήρε ή έχασε, και η συνολική του βαθμολογία.

Επιτυχείς βολές	Βαθμοί που πήρε	Βολές που απέτυχε	Βαθμοί που έχασε	Τελική βαθμολογία
20	100	8	16	100-16=84
16	80	12	24	80-24=56
14	70	14	28	70-28=42
12	60	16	32	60-32=28
10	50	18	36	50-36=14
8	40	20	40	40-40=0

Προσπαθώντας να δοκιμάσουμε διαφορετικούς συνδυασμούς αποτυχημένων βολών και βολών που μπήκε καλάθι, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, βλέπουμε ότι ο Νίκος έχει μηδενική βαθμολογία, ακόμα και αν βάλει καλάθι σε 8 βολές και χάσει 20 βολές.

2ος τρόπος

Κάνουμε μερικές παρατηρήσεις:

Πρώτον, ο Νίκος πρέπει να έχει βάλει καλάθι για ζυγό αριθμό βολών. Εάν έβαζε καλάθι για μονό αριθμό βολών, θα είχε κερδίσει έναν μονό αριθμό βαθμών, αφού ο πολλαπλασιασμός οποιουδήποτε περιττού αριθμού με το 5, παράγει έναν περιττό αριθμό. Αλλά πάντα θα χάνει ένα ζυγό αριθμό βαθμών, αφού ο πολλαπλασιασμός οποιουδήποτε αριθμού με το 2, παράγει ένα ζυγό αριθμό. Ένας μονός αριθμός μείον έναν ζυγό αριθμό, δεν θα είναι **ποτέ** μηδέν.
Έτσι, ο Νίκος δεν μπορούσε να μηδενιστεί βαθμολογικά, ακόμη και βάζοντας καλάθι έναν μονό αριθμό βολών.

Δεύτερον, ο Νίκος έβαλε καλάθι λιγότερο από 14 βολές (τις μισές από τις 28 βολές). Αν έβαζε καλάθι 14 βολές, ο Νίκος θα είχε κερδίσει $14 \cdot 5 = 70$ βαθμούς, αλλά θα έχανε μόνο $2 \cdot 14 = 28$ βαθμούς. Οπότε δεν θα είχε μηδενιστεί.
Με το παραπάνω σκεπτικό, έχουμε μειώσει τον αριθμό των δυνατών επιτυχημένων βολών στις {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12}.

Δεν χρειάζονται αρκετοί συνδυασμοί και χρόνος, για να προσδιοριστεί η σωστή λύση, όπως κάναμε μόλις παραπάνω, στον πίνακα ελέγχουμε τις περιπτώσεις επιτυχημένων βολών 12, 10, 8. Αυτή είναι, ότι ο Νίκος μηδενίστηκε, βάζοντας καλάθι 8 βολές και χάνοντας 20 βολές.

3ος τρόπος

Ας συμβολίσουμε με α τον αριθμό των επιτυχημένων βολών, και με β τον αριθμό των βολών που αστόχησε ο Νίκος και δεν μπήκε καλάθι.

Τότε το $5\cdot\alpha$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που κέρδισε ο Νίκος για επιτυχημένες βολές, και το $2\cdot\beta$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που έχασε ο Νίκος από τις αποτυχημένες βολές.

Θέλουμε τον Νίκο να έχει τελικά μηδενική βαθμολογία, οπότε πρέπει $5\cdot\alpha=2\cdot\beta$. Αυτό γενικά γράφεται $5\alpha=2\beta$. (1)

Δεδομένου ότι ο συνολικός αριθμός των βολών είναι 28, θα έχουμε $\alpha+\beta=28$. (2)

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) με το 5, παίρνουμε α $\alpha=\frac{2}{5}\beta$, ή αλλιώς $\alpha=0,4\beta$.

Αντικαθιστώντας το 0,4β για το α στη δεύτερη εξίσωση, παίρνουμε: $0,4\beta+\beta=28\ \Rightarrow$

$1,4\beta=28\Rightarrow 14\beta=280\Rightarrow \beta=\frac{280}{14}\Rightarrow \beta=20$. Δεδομένου ότι το β αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αποτυχημένων βολών, ο Νίκος έχασε 20 βολές. Και αφού ο Νίκος προσπάθησε συνολικά 28 βολές και έχασε 20 βολές, πέτυχε καλάθι σε $28-20=8$ βολές. Συνεπώς, ο Νίκος έβαλε καλάθι σε 8 βολές, χάνοντας 20 βολές.

4ος τρόπος

Ας συμβολίσουμε με x τον αριθμό των βολών στις οποίες ο Νίκος έβαλε καλάθι. Αφού ο Νίκος προσπάθησε συνολικά 28 βολές και πέτυχε καλάθι σε x βολές, αστόχησε $28-x$ βολές.

Τότε το 5x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που κέρδισε ο Νίκος για επιτυχημένες βολές, και το $2\cdot(28-x)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που έχασε ο Νίκος από τις αποτυχημένες βολές.

Θέλουμε ο Νίκος να έχει τελικά μηδενική βαθμολογία, οπότε πρέπει

$$5x-2(28-x)=0.$$

Εκτελούμε τις πράξεις, και έχουμε $5x-56+2x=0\ \Rightarrow\ 5x+2x=56\ \Rightarrow\ 7x=56\ \Rightarrow\ x=8$. Άρα ο Νίκος έβαλε καλάθι σε 8 βολές, και έχασε 28 – 8 = 20 βολές.

5ος τρόπος

Ας συμβολίσουμε με x τον αριθμό των βολών στις οποίες ο Νίκος έβαλε καλάθι, και με y τον αριθμό των βολών στις οποίες απέτυχε να βάλει καλάθι.

Τότε το 5x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που κέρδισε ο Νίκος για επιτυχημένες βολές, και το 2y αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βαθμών που έχασε ο Νίκος από τις αποτυχημένες βολές. Αφού ο Νίκος πραγματοποίησε συνολικά 28 βολές, θα έχουμε:

$$x+y=28\ \ (1)$$

Ο Νίκος έχει τελικά μηδενική βαθμολογία, οπότε πρέπει:

$$5x-2y=0\ \ (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$\left\{\begin{matrix} x+y=28 \\ 5x-2y=0 \end{matrix}\right\}$ το οποίο μπορούμε να επιλύσουμε, λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς y, και αντικαθιστώντας την τιμή του y στη δεύτερη, οπότε δημιουργείται μια εξίσωση με μόνο ένα άγνωστο, το x.

Πηγή : https://cemc.math.uwaterloo.ca/resources/potw.php

Μια αληθινή σχολική ιστορία από το Γυμνάσιο Ανδρίτσαινας.

Χρήστος Ζαφειρόπουλος

Δόθηκε προς επίλυση στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου του Γυμνασίου Ανδρίτσαινας το εξής κλασικό πρόβλημα:

Ποιόν αριθμό πρέπει να αφαιρέσουμε από τους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{8}{3}$ και $\frac{5}{4}$ ώστε τα δύο κλάσματα να γίνουν ίσα μεταξύ τους;

Από τους περισσότερους μαθητές δόθηκε η εξής συνήθη ορθή απάντηση που προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης $\frac{8-x}{3}=\frac{5-x}{4}$ και η οποία είναι η εξής:

$$\frac{8-x}{3}=\frac{5-x}{4} \Leftrightarrow 4\cdot(8-x)=3\cdot(5-x) \Leftrightarrow 32-4x=15-3x \Leftrightarrow -4x+3x=-32+15 \Leftrightarrow -x=-17 \Leftrightarrow \mathbf{x=17}$$

Εκτός από δύο περιπτώσεις τριών μαθητών, τους οποίους ας τους αποκαλούμε Α, Β και Γ.

- Οι μαθητής Α και η μαθήτρια Β έδωσαν την εξής λύση:

Μετατρέπουμε τα δύο κλάσματα σε ομώνυμα και αφαιρούμε τους αριθμητές. Δηλαδή, μετέτρεψαν τα κλάσματα $\frac{8}{3}$ και $\frac{5}{4}$ στα ισοδύναμά τους $\frac{32}{12}$ και $\frac{15}{12}$ και αφαιρώντας τους αριθμητές έχουμε 32-15=17

- Ενώ ο Γ, πολλαπλασίασε χιαστί τα δύο κλάσματα και αφαίρεσε τα δύο γινόμενα.

Δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας χιαστί τα κλάσματα $\frac{8}{3}$ και $\frac{5}{4}$ έχουμε: $8\cdot4=32$ και $3\cdot5=15$ και αφαιρώντας τα γινόμενα έχουμε 32-15=**17.**

Και το ερώτημα που προκύπτει είναι για το αν τα τρία τα παιδιά Α, Β και Γ έχουν δίκιο.

Για να απαντήσουμε με τα παιδιά στο παραπάνω ερώτημα γενικεύσαμε τις παραπάνω λύσεις με τη βοήθεια παραμέτρων. Έστω ότι έχουμε τα κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{c}{d}$. Η νέα εκφώνηση του προβλήματος είναι: Ποιόν αριθμό πρέπει να αφαιρέσουμε από τους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{a}{b}$ και $\frac{c}{d}$ (με $d \neq 0$ *και* $b \neq 0$) ώστε τα δύο κλάσματα να γίνουν ίσα μεταξύ τους;

- Για την τυπική λύση έχουμε: $\frac{a-x}{b}=\frac{c-x}{d} \Leftrightarrow d\cdot(a-x)=b\cdot(c-x) \Leftrightarrow d\cdot a-d\cdot x=b\cdot c-b\cdot x \Leftrightarrow d\cdot x-b\cdot x=d\cdot a-b\cdot c \Leftrightarrow (d-b)\cdot x=d\cdot a-b\cdot c \Leftrightarrow x=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d-b}$ όταν $d\neq b$.

- Για την λύση των Α και Β έχουμε: Μετατρέπουμε τα κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{c}{d}$ σε ισοδύναμα ομώνυμα $\frac{a\cdot d}{d\cdot b}$ και $\frac{b\cdot c}{d\cdot b}$ και αφαιρώντας τους αριθμητές έχουμε $a\cdot d-b\cdot c$. Επομένως η λύση αυτή είναι σωστή όταν η διαφορά των παρονομαστών ισούται με 1, δηλαδή d-b=1.

- Για την λύση του Γ έχουμε: Πολλαπλασιάζοντας χιαστί τα κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{c}{d}$ προκύπτουν τα γινόμενα $a\cdot d$ και $b\cdot c$, τα οποία αν τα αφαιρέσουμε προκύπτει: $a\cdot d-b\cdot c$. Επομένως η λύση αυτή είναι σωστή όταν η διαφορά των παρονομαστών ισούται με 1, δηλαδή d-b=1.

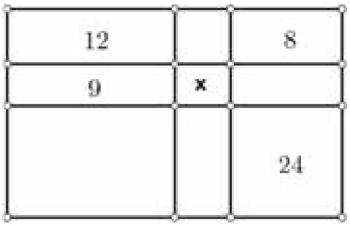
Διερεύνηση: Προσπαθήστε να διερευνήσετε μόνοι σας πιθανές λύσεις του αντίστοιχου προβλήματος: Ποιόν αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{8}{3}$ και $\frac{5}{4}$ ώστε τα δύο κλάσματα να γίνουν ίσα μεταξύ τους;

Β΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Αν για τον θετικό ακέραιο αριθμό x ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\sqrt{x}} < \frac{21}{4}$ να υπολογίσετε την τιμή του x.

2) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν $114cm^2$ και είναι χωρισμένο σε 9 μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα από τα οποία είναι γνωστά τα εμβαδά των 4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν x του κεντρικού ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (*Παγκύπριος διαγωνισμός 2016*)



3) Η ηλικία του Γιώργου είναι ίση με το τριπλάσιο της ηλικίας που θα έχει μετά από τρία χρόνια μείον το τριπλάσιο της ηλικίας που είχε πριν τρία χρόνια. Πόσων χρόνων είναι ο Γιώργος;

4) Παρατηρήστε τις παρακάτω πράξεις και τα αποτελέσματά τους
$6^2 - 5^2 = 11$, $56^2 - 45^2 = 1111$, $556^2 - 445^2 = 111111$, $5556^2 - 4445^2 = 11111111$
Ποιο είναι το αποτέλεσμα των πράξεων: $55556^2 - 44445^2$;
Μπορείτε να βγάλετε ένα γενικό κανόνα;

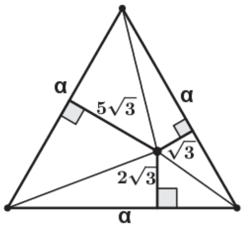
5) Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές ΑΒ=ΑΓ=25cm και ΒΓ=30cm. Το ισοσκελές τρίγωνο ΚΛΜ έχει πλευρές ΚΛ=ΚΜ=25cm και ΛΜ=40cm. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των δύο τριγώνων.

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 113

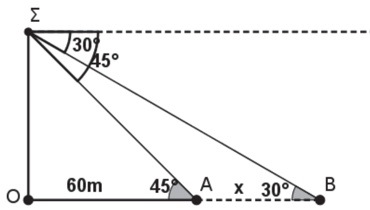
1) Ο αριθμός 3^{19} διαιρείται με 9 άρα θα πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του (έστω x το άγνωστο ψηφίο) 1+1+x+2+2+6+1+4+6+7 = 30+x να είναι πολλαπλάσιο του 9 άρα x=6.

2) Αν α ο αριθμητής και β ο παρονομαστής τότε θα ισχύει $\frac{1,2\cdot\alpha}{0,2\cdot\beta} = 4,8$ άρα $6\cdot\frac{\alpha}{\beta} = 4,8$ και $\frac{\alpha}{\beta} = 0,8$ άρα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$

3) Έστω α η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου. Αν ενώσουμε τις κορυφές του τριγώνου με το σημείο δημιουργούνται τρία τρίγωνα. Το άθροισμα των εμβαδών τους δίνει το εμβαδόν του μεγάλου τριγώνου, άρα $\frac{\sqrt{3}\alpha}{2} + \frac{2\sqrt{3}\alpha}{2} + \frac{5\sqrt{3}\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}\alpha^2}{4}$ από όπου προκύπτει ότι α=16 (εκατοστά)



4) Στο τρίγωνο ΟΣΑ έχουμε ΟΣ=60·εφ45^0=60. Στο τρίγωνο ΟΣΒ έχουμε ΟΣ=(60+x)·εφ30^0 δηλαδή ΟΣ=$\frac{\sqrt{3}}{3}$(60+x) από όπου προκύπτει ότι x=43,92m περίπου. Άρα η ταχύτητα του πλοίου είναι $\frac{43,92}{5}\cdot\frac{18}{5} = 32km/h$

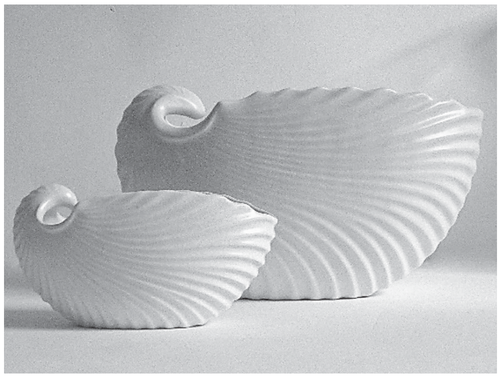


5) α) 24 αφού 4×3×2×1=24.
β) Το 1 εμφανίζεται 6 φορές σε κάθε θέση, το ίδιο και τα 2, 3, 4. Από αυτό προκύπτει ότι:
6×1×1.000 + 6×1×100 + 6×1×10 + 6×1 = 6.666
6×2×1.000 + 6×2×100 + 6×2×10 + 6×2 = 13.332
6×3×1.000 + 6×3×100 + 6×3×10 + 6×3 = 19.998
6×4×1.000 + 6×4×100 + 6×4×10 + 6×4 = 26.664 Συνολικά 66.660

Η Ομοιότητα με Δραστηριότητες

Νίκος Τζίφας – Γιώργος Λαγός

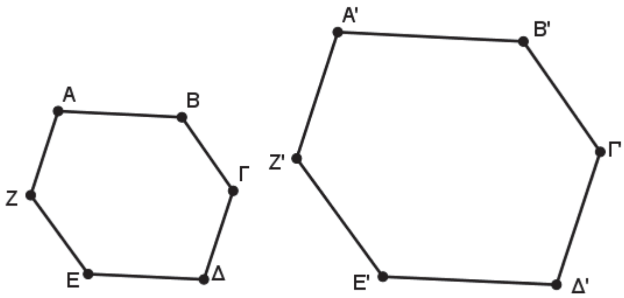
Καθημερινά συναντάμε ανθρώπους, ζώα και αντικείμενα τα οποία μοιάζουν, ή καλύτερα είναι όμοια. Παρατηρήστε τις δύο παρακάτω εικόνες. Τα δύο σκυλάκια, πραγματικά μοιάζουν, αλλά τα δύο αντικείμενα δεν μοιάζουν απλά, το ένα είναι μικρογραφία του άλλου. Αυτή ακριβώς η μορφή ομοιότητας, μας ενδιαφέρει στα Μαθηματικά.



Ας έρθουμε τώρα στο θέμα μας. Για να γίνει αντιληπτό ποια είναι η ουσία της **μαθηματικής ομοιότητας**, προτείνουμε τις παρακάτω δραστηριότητες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ $1^{η}$

Στο παρακάτω σχήμα, το εξάγωνο Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄ είναι μεγέθυνση του ΑΒΓΔΕΖ . Γι αυτό τα πολύγωνα λέγονται όμοια, και τα συμβολίζουμε ΑΒΓΔΕΖ ≈ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄ .



ΒΗΜΑ $1^{ο}$ Χρησιμοποίησε διαφανές χαρτί, για να συγκρίνεις όλες τις αντίστοιχες γωνίες. Με ποιό τρόπο συγκρίνονται οι αντίστοιχες γωνίες ;

ΒΗΜΑ $2^{ο}$Μέτρησε το μήκος της κάθε πλευράς σε κάθε εξάγωνο.

ΒΗΜΑ $3^{ο}$ Βρες τους λόγους των μηκών των αντίστοιχων πλευρών. Πώς συνδέονται οι λόγοι των μηκών δύο αντίστοιχων πλευρών;

Από την έρευνα αυτή, να βγάλεις ένα μαθηματικό ορισμό για τα όμοια πολύγωνα.

Γνωρίζοντας ότι

α) Οι πλευρές που ορίζονται από τις κορυφές δύο ίσων γωνιών λέγονται **ομόλογες πλευρές.**

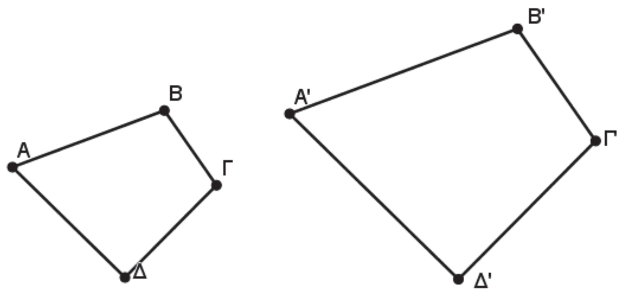
β) Ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών λέγεται **λόγος ομοιότητας** των ομοίων σχημάτων, και συνήθως συμβολίζεται με το **γράμμα λ**.

Οπότε έχουμε τον ορισμό:

Δύο πολύγωνα (στην περίπτωσή μας εξάγωνα) **λέγονται όμοια, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.**

Η σχέση ΑΒΓΔ≈ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ στα τετράπλευρα του διπλανού σχήματος σημαίνει ότι:

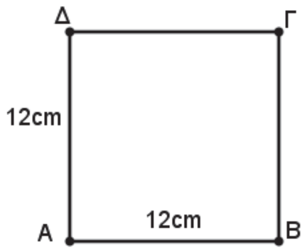
$$\left\{\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'\\ \hat{\Delta}=\hat{\Delta}'\end{array}\right\} \text{και } \frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Delta A}{\Delta'A'}$$

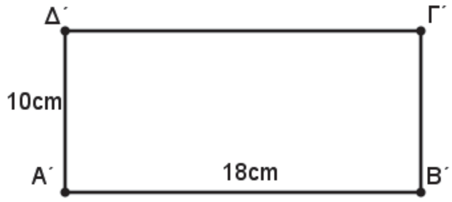


ΕΡΩΤΗΜΑ

Τίθεται τώρα το ερώτημα: «**Χρειάζονται και οι δύο συνθήκες (ίσες γωνίες και ανάλογες πλευρές), ώστε να είναι σίγουρα δύο πολύγωνα όμοια;»**

Στο παρακάτω σχήμα, το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 12cm, και το ορθογώνιο πλάτος 10cm και μήκος 18cm.

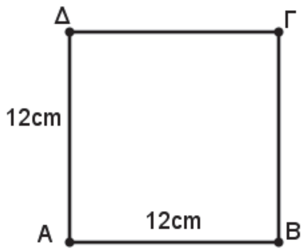


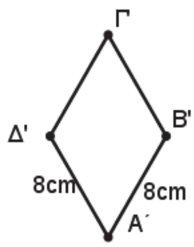


Οι γωνίες τους είναι όλες ίσες με 90^0αλλά

$$\frac{12}{10}\neq\frac{12}{18}$$

Επίσης στο παρακάτω σχήμα, το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 12cm, και ο ρόμβος Α΄Β΄Γ΄Δ΄ πλευρά 8cm, και γωνίες δύο οξείες 60^0, και δύο αμβλείες 120^0





Οπότε

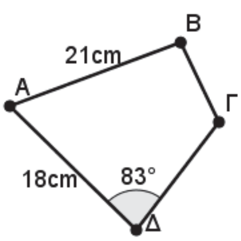
$$\frac{12}{8}=\frac{12}{8}$$

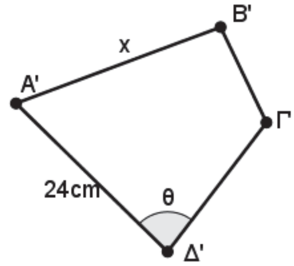
αλλά τα δύο σχήματα δεν είναι όμοια.

Δεν μπορούμε λοιπόν να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν μόνο οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες, ή μόνο οι ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Χρησιμοποιήσετε τον ορισμό των ομοίων πολυγώνων, για να βρείτε τα μέτρα των πλευρών και των γωνιών που λείπουν στα δύο όμοια τετράπλευρα του διπλανού σχήματος;





ΛΥΣΗ

Τα τετράπλευρα είναι όμοια, οπότε $\frac{18}{24}=\frac{21}{x}$ ή $18\cdot x=21\cdot 24$, άρα $x=28cm$.

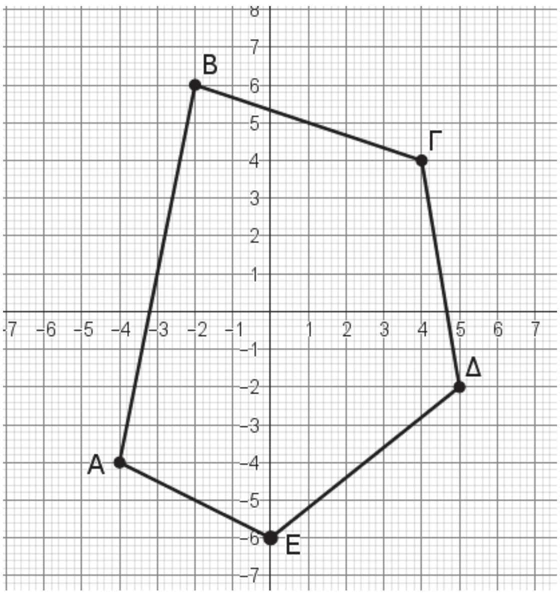
Επίσης στα όμοια τετράπλευρα οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες, οπότε $\theta=83^0$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

ΒΗΜΑ 1^o Για να κατασκευάσεις το πεντάγωνο του διπλανού σχήματος σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, αρχικά αντίγραψε αυτό το πεντάγωνο στο δικό σου ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

ΒΗΜΑ **2^{o}** Κατόπιν πολλαπλασίασε κάθε ζευγάρι των συντεταγμένων των κορυφών, με τους αριθμούς $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $2, 3$. Κάθε ένας από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **συντελεστής κλίμακας**.

ΒΗΜΑ **3^{o}** Τοποθέτησε τις νέες συντεταγμένες στο δικό σου ορθοκανονικό σύστημα, και σχεδίασε τα τέσσερα νέα πεντάγωνα που προκύπτουν.



ΒΗΜΑ **4^{o}** Σύγκρινε τις αντίστοιχες γωνίες των νέων πενταγώνων, με τις γωνίες του αρχικού.
Τί συμπεραίνεις;

ΒΗΜΑ **5^{o}** Μέτρησε τις πλευρές καθενός από τα πεντάγωνα με ένα διαβήτη, ή με ένα αριθμημένο χάρακα. Το μήκος κάθε πλευράς κάθε νέου πενταγώνου, πόσο έχει αυξηθεί ή ελαττωθεί, σε σχέση το μήκος κάθε αντίστοιχης πλευράς του αρχικού πενταγώνου;

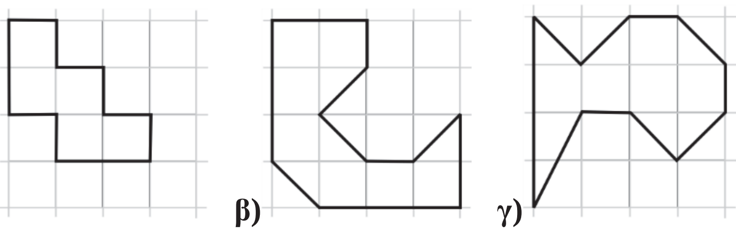
ΒΗΜΑ **6^{o}** Σύγκρινε τα αποτελέσματα, για όλα τα ζεύγη των συντεταγμένων. Είσαι έτοιμος να βγάλεις ένα συμπέρασμα;

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Εάν ένα πολύγωνο είναι όμοιο με ένα άλλο πολύγωνο……………………………………..
…………………………………………………………………………………………

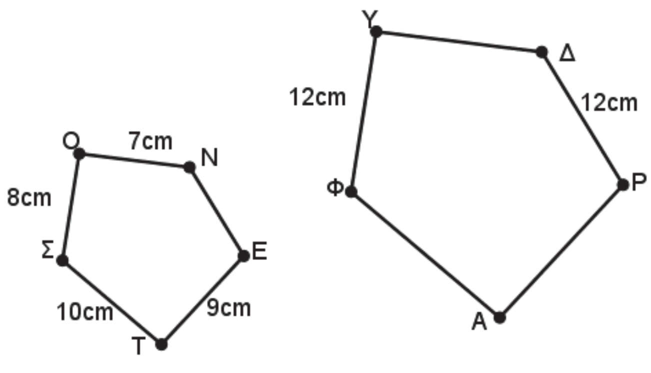
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1) Για καθένα από τα σχήματα α), β), και γ), σχεδίασε σε τετραγωνισμένο χαρτί, ένα όμοιο αλλά όχι ίσο σχήμα.

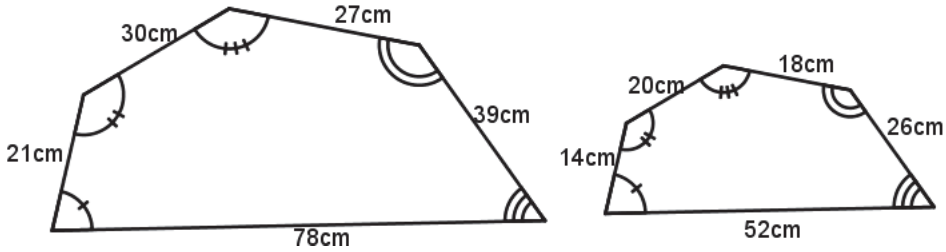


α) **β)** **γ)**

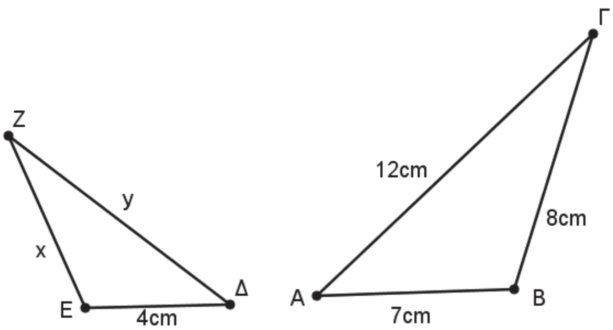
2) Αν ΣΤΕΝΟ≈ ΦΑΡΔΥ να υπολόγισε τα τμήματα ΝΕ, ΦΑ, ΑΡ, ΔΥ.



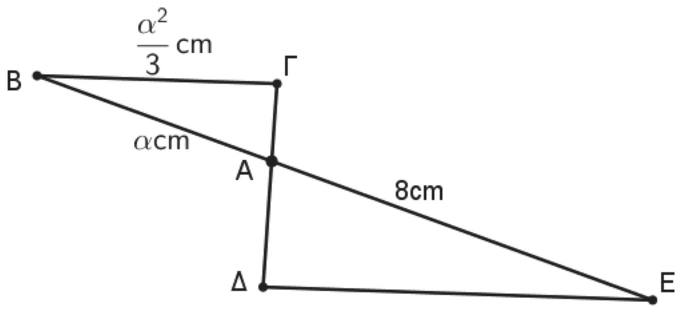
3) Είναι τα παρακάτω πολύγωνα όμοια; Εξήγησε το γιατί.



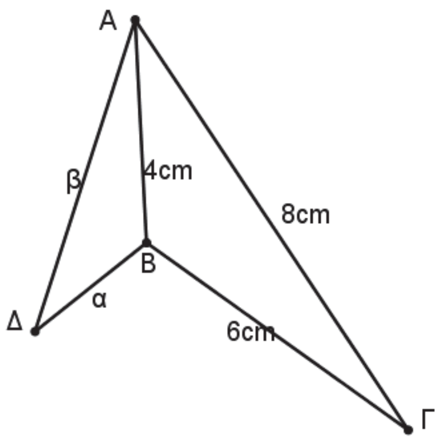
4) Αν τα τρίγωνα ΑΝΓ και ΔΕΖ είναι όμοια να υπολογίσεις τα x και y.



5) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ καιΒΓ ανήκουν σε παράλληλες ευθείες. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Α. Να εκφράσεις το μήκος του ΔΕ, με βάση την παράμετρο α.



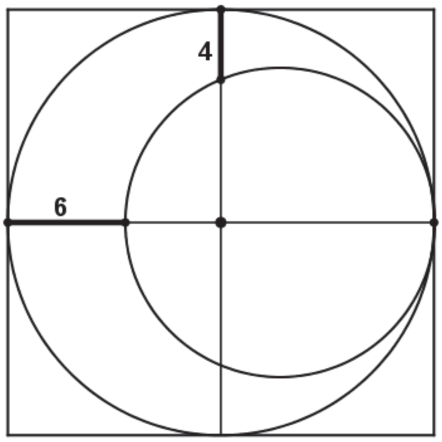
6) Αν τα δύο τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια, να υπολογίσεις τα μήκη των α και β.



Γ΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

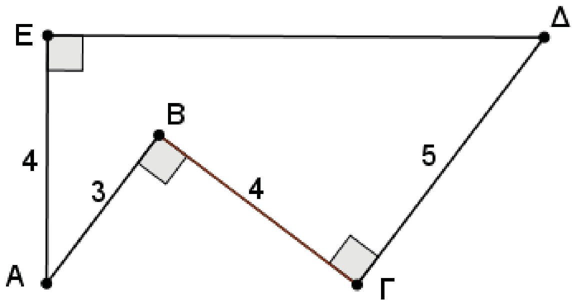
Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου με βάση τις μετρήσεις.

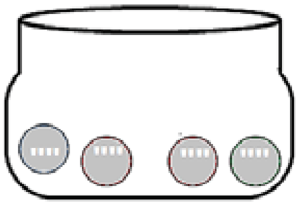


2) Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύει $\alpha\cdot y=\beta\cdot x$ να δείξετε ότι η παράσταση $\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$ δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2 για οποιεσδήποτε μη μηδενικές τιμές των α, β, x, y

3) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΔ



4) Ας υποθέσουμε ότι σε ένα δοχείο υπάρχουν 4 σφαιρίδια.
Σε κάθε ένα από τα σφαιρίδια είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος αριθμός.
Εκτελεί κάποιος την εξής διαδικασία: παίρνει στην τύχη 3 από αυτά, προσθέτει τους αριθμούς τους, καταγράφει το αποτέλεσμα σε ένα χαρτί και στη συνέχεια τοποθετεί και πάλι τα σφαιρίδια μέσα στην κάλπη.



Συνεχίζει για αρκετή ώρα οπότε τα διαφορετικά αθροίσματα που έχει γράψει στο χαρτί είναι 186, 206, 215, 194.

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος από τους 4 αριθμούς που είναι γραμμένοι πάνω στα σφαιρίδια;

5) Παρατηρήστε το άθροισμα: 2+22+222+2.222+22.222+222.222+……….. και φανταστείτε ότι το πλήθος των προσθετέων είναι 203. Να επινοήσετε μία διαδικασία με την οποία θα μπορείτε να υπολογίσετε τα 4 τελευταία ψηφία του αθροίσματος αυτού.
Εφαρμόστε την ίδια διαδικασία για περιπτώσεις στις οποίες το επαναλαμβανόμενο ψηφίο δεν είναι το 2 αλλά ένα άλλος μονοψήφιος μη μηδενικός αριθμός. Ακόμη επιλέξτε να υπολογίσετε όχι μόνο τα 4 τελευταία ψηφία αλλά τα 5 τελευταία ψηφία ή τα 6.

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 113

1) Ισχύει: $\alpha^2=11-2\beta\cdot\gamma$, $\beta^2=11-2\alpha\cdot\gamma$ και $\gamma^2=11-2\alpha\cdot\beta$ επομένως $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=33-2\beta\cdot\gamma-2\alpha\cdot\gamma-2\alpha\cdot\beta$ οπότε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot\gamma+2\alpha\cdot\gamma+2\alpha\cdot\beta=33$ άρα $(\alpha+\beta+\gamma)^2=33$ οπότε $\alpha+\beta+\gamma=\sqrt{33}$ ή $-\sqrt{33}$ αλλά οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί (γιατί;) οπότε $\alpha+\beta+\gamma=\sqrt{33}$

2) Αφού $\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\dfrac{1}{2}$ άρα $2\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ οπότε $\sqrt{\alpha}=3\sqrt{\beta}$ και επομένως $\alpha=9\beta$

Η ζητούμενη παράσταση $\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$ είναι πλέον ισοδύναμη με την $\dfrac{(9\beta)^2+9\beta\cdot\beta+\beta^2}{(9\beta)^2-9\beta\cdot\beta+\beta^2}=\dfrac{91\beta^2}{73\beta^2}=\dfrac{91}{73}$

3) Εδώ θα πρέπει να επινοήσουμε, όχι στην τύχη, την αντιστροφή των κλασμάτων $\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta}=2$, $\dfrac{\alpha\cdot\gamma}{\alpha+\gamma}=5$ και $\dfrac{\beta\cdot\gamma}{\beta+\gamma}=4$ και να πάρουμε τις σχέσεις $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha\cdot\gamma}=\dfrac{1}{5}$ και $\dfrac{\beta+\gamma}{\beta\cdot\gamma}=\dfrac{1}{4}$ γιατί τώρα η διάσπαση κάθε κλάσματος οδηγεί σε απλούστερες σχέσεις ιδιαίτερα χρήσιμες, δηλαδή $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{5}$ και $\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{4}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $2\cdot(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{19}{20}$ και επομένως $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{19}{40}$.

Η τελευταία αυτή σχέση αν συνδυαστεί με κάθε μία από τις 3 χρήσιμε ισότητες μας δίνει $\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{19}{40}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{40}$ άρα γ=-40

$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{19}{40}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{11}{40}$ άρα $\beta=\dfrac{40}{11}$ και τέλος $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{19}{40}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{40}$ άρα $\alpha=\dfrac{40}{9}$.

4) Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη όλες τις σχέσεις προκύπτει $x^2\cdot y^2\cdot z^2=900$ και επομένως $x\cdot y\cdot z=30$. Με βάση αυτή την ισότητα και τις τρεις δοσμένες ισότητες προκύπτει ότι z=5, x=2 και y=3.

5) Αν x μονάδες είναι το μέτρο της υποτείνουσας του τριγώνου και y το μέτρο της άλλης καθέτου τότε $x^2-y^2=11^2=121$ και από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι $(x-y)\cdot(x+y)=121$. Οι μόνοι διαιρέτες του 121 είναι οι 1, 11 και 121 επομένως θα έχουμε τις περιπτώσεις: [x-y=1 και x+y=121] (1) ή [x-y=11 και x+y=11] (2). Από τις (1) προκύπτει x=61 και y=60 ενώ από τις (2) προκύπτει x =11 και y=0 που είναι αδύνατον. Τελικά η περίμετρος του τριγώνου είναι 11+61+60=132 (μονάδες μέτρησης).

80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

9 Νοεμβρίου 2019

Τα θέματα και οι λύσεις τους

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Λύση

Έχουμε

$$A=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right)=\left(\left(\frac{-16}{-8}\right)^5+\left(\frac{-12}{6}\right)^5+1\right)\cdot\left(\left(\frac{-16}{8}\right)^3+\left(\frac{-12}{-6}\right)^3+2019\right)$$

$$=\left(2^5+(-2)^5+1\right)\cdot\left((-2)^3+2^3+2019\right)=\left(2^5-2^5+1\right)\cdot\left(-2^3+2^3+2019\right)=1\cdot 2019=2019.$$

Πρόβλημα 2

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω ότι ο ταξιδιώτης είχε μαζί του την πρώτη μέρα x ευρώ. Τότε την πρώτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{3}$ ευρώ και του έμειναν $x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$ ευρώ. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{x}{6}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$ ευρώ. Την τρίτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{10}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$ ευρώ. Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{5}=240\Leftrightarrow\frac{2x}{5}=\frac{240}{1}\Leftrightarrow 2x=1200\Leftrightarrow x=\frac{1200}{2}\Leftrightarrow x=600 \text{ ευρώ}.$$

$2^{ος}$ τρόπος (χωρίς εξίσωση)

Την πρώτη μέρα του μένουν τα $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ μέρους των χρημάτων του.

Τη δεύτερη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ μέρους των χρημάτων του και του μένει το $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ μέρους των χρημάτων.

Την τρίτη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$ μέρους των χρημάτων του και του μένουν τα $\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ μέρους των χρημάτων που είναι 240€. Άρα το $\frac{1}{5}$ είναι $240:2=120€$, και επομένως τα χρήματα που είχε ήταν $120\cdot 5=600€$.

$3^{ος}$ τρόπος

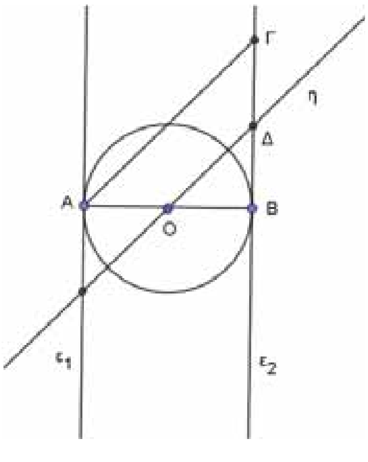
Επειδή την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας, του απέμειναν τα $\frac{4}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας που ήταν 240 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας $240\cdot\frac{5}{4}=300$ ευρώ.

Επειδή την δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει από την πρώτη μέρα, του απέμειναν τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας που ήταν 300 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας $300\cdot\frac{4}{3}=400$ ευρώ.

Επειδή την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του, του απέμειναν τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που του είχε μαζί του που ήταν 400 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι είχε μαζί του στο ξεκίνημα της πρώτης μέρας $400\cdot\frac{3}{2}=600$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΑΒ, κέντρο Ο και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα Α και Β της διαμέτρου ΑΒ. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΟΒΔ.

(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του τμήματος ΒΓ.

(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΟΔΓ.

Λύση

(α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $A\hat{B}\Gamma = 90^0$, $AB = B\Gamma$, επομένως οι γωνίες της βάσης του $A\Gamma$ είναι 45^0 η καθεμία. Στο τρίγωνο $O\Delta B$, έχουμε $\Delta\hat{B}O = 90^0$, $\Delta\hat{O}B = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $\Gamma\hat{A}O = 45^0$ και $O\hat{\Delta}B = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $A\hat{\Gamma}B = 45^0$.

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι το τρίγωνο $OB\Delta$ είναι ισοσκελές και από την υπόθεση $B\Gamma = AB$ έχουμε: $\Delta B = OB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Επομένως το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$.

(γ) Το τετράπλευρο $AO\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο αφού οι πλευρές του $AO, \Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο B και οι πλευρές του $A\Gamma, O\Delta$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης ισχύει $AO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$. Επομένως, το τετράπλευρο $AO\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Λύση

Για να ισούται ένα κλάσμα με ακέραιο πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή του. Από τους 26 δεδομένους ακέραιους πρώτοι, δηλαδή αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Οι 6 μικρότεροι από αυτούς, 2, 3, 5, 7, 11, 13, μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το $\dfrac{23}{1} = 23$. Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιος, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12.

Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: $\dfrac{26}{13}, \dfrac{25}{5}, \dfrac{23}{1}, \dfrac{22}{11}, \dfrac{21}{7}, \dfrac{20}{10}, \dfrac{18}{9}, \dfrac{15}{3}, \dfrac{14}{2}$ (υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)

$\dfrac{24}{8}, \dfrac{16}{4}, \dfrac{12}{6}$ (υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών).

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathbf{A = \left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9} + \frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2 + 20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-10} + 100\right).}$$

Λύση

Έχουμε ότι $A = \left(\left(\dfrac{(-32)^9}{4^9} + \dfrac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2 + 20\right)\cdot\left(\dfrac{(-10)^{10}}{2^{10}} - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-10} + 100\right)$

$$=\left(\left(\left(\frac{-32}{4}\right)^{9}+\left(\frac{-16}{-2}\right)^{9}\right)\cdot(-2019)^{2}+20\right)\cdot\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left((-8)^{9}+(+8)^{9}\right)\cdot(-2019)^{2}+20\right)\cdot\left((-5)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left(-8^{9}+8^{9}\right)\cdot(-2019)^{2}+20\right)\cdot(0+100)=\left(0\cdot(-2019)^{2}+20\right)\cdot(+100)=20\cdot100=2000.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ.

Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις. Τότε δεν απάντησε σωστά σε $12-x$ ερωτήσεις, οπότε το τελικό κέρδος του, έστω Κ, θα είναι:

$$K=600+80x-40(12-x)\Leftrightarrow K=600+80x-480+40x\Leftrightarrow K=120+120x .$$

Επομένως, για την εύρεση του x πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$120+120x=1320\Leftrightarrow 120x=1320-120\Leftrightarrow 120x=1200\Leftrightarrow x=10.$$

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και στα δύο ερωτήματα.

Λύση.

(α) Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής $\frac{\nu+1}{\nu}=1+\frac{1}{\nu}$, οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu+1}{\mu}$, $\frac{\nu+1}{\nu}$ έχουμε:

$$\frac{\mu+1}{\mu}>\frac{\nu+1}{\nu}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\mu}>1+\frac{1}{\nu}\Leftrightarrow\frac{1}{\mu}>\frac{1}{\nu}\Leftrightarrow\mu<\nu .$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

2^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα γράφονται ως:

$$\frac{2020}{2019}=1+\frac{1}{2019}=1\frac{1}{2019}$$

$$\frac{2021}{2020}=1+\frac{1}{2020}=1\frac{1}{2020}$$

.
.
.

$$\frac{3022}{3021}=1+\frac{1}{3021}=1\frac{1}{3021}$$

Όμως $\frac{1}{2019}>\frac{1}{2020}>\ldots>\frac{1}{3021}$, οπότε μεγαλύτερο κλάσμα το πρώτο, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

(β) Παρατηρούμε ότι τα αντίστροφα των δεδομένων κλασμάτων

$$\frac{4021}{4020},\frac{4022}{4021},\frac{4023}{4022},\frac{5021}{5020},\frac{5022}{5021},\frac{5023}{5022},$$

είναι της ιδίας μορφής με αυτά του ερωτήματος (α). Σύμφωνα με το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι μεγαλύτερο κλάσμα είναι το πρώτο και μικρότερο το τελευταίο. Επομένως, για τα αντίστροφα τους το συμπέρασμα είναι ότι μεγαλύτερο είναι το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{5023}{5022}$, και μικρότερο το πρώτο, δηλαδή το $\frac{4021}{4020}$.

Πρόβλημα 4

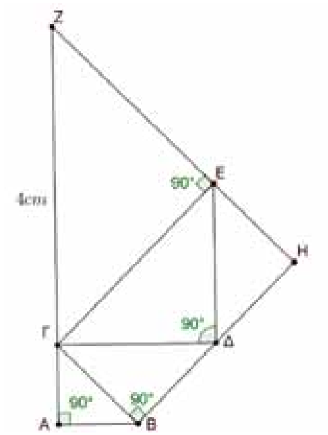
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma, \Delta\hat{B}\Gamma, E\hat{\Delta}\Gamma$ και $Z\hat{E}\Gamma$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $AB=A\Gamma$, $B\Gamma=B\Delta$, $\Delta\Gamma=\Delta E$, $E\Gamma=EZ$ και $\Gamma Z=4$ cm.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



Λύση

(α) Αν $AB=A\Gamma=x$, τότε από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$B\Gamma^2=x^2+x^2=2x^2 \Rightarrow B\Gamma=x\sqrt{2}=B\Delta.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma\Delta^2=\left(x\sqrt{2}\right)^2+\left(x\sqrt{2}\right)^2=4x^2 \Rightarrow \Gamma\Delta=2x=\Delta E.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΕ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma E^2=(2x)^2+(2x)^2=8x^2 \Rightarrow \Gamma E=2\sqrt{2}x=EZ.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΕΖ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma Z^2=\left(2\sqrt{2}x\right)^2+\left(2\sqrt{2}x\right)^2=16x^2 \Rightarrow \Gamma Z=4x,$$

οπότε $\Gamma Z=4x=4 \Rightarrow x=1$ cm.

(β) Επειδή τα τρίγωνα $BA\Gamma, \Delta B\Gamma, E\Delta\Gamma$ και $ZE\Gamma$ είναι ορθογώνια ισοσκελή οι οξείες γωνίες τους είναι ίσες με $\frac{180^0-90^0}{2}=45^0$. Επομένως, έχουμε:

$$A\hat{\Gamma}Z = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}Z = 4\cdot 45^0 = 180^0,$$

οπότε τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΗ έχει τρεις γωνίες του ορθές, αφού $\Gamma\hat{B}\Delta = 90^0$, $B\hat{\Gamma}E = B\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{\Delta}E = 45^0 + 45^0 = 90^0$ και $\Gamma\hat{E}H = 180^0 - \Gamma\hat{E}Z = 180^0 - 90^0 = 90^0$. Επομένως και η τέταρτη γωνία του θα είναι ορθή, οπότε αυτό είναι ορθογώνιο και έχει εμβαδό

$$E_{(B\Gamma EH)} = B\Gamma\cdot\Gamma E = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4\ cm^2.$$

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 113

Α58. Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4} \geq 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας αρκετές φορές για διάφορα ζεύγη θετικών αριθμών α, β την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου στη μορφή: $\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta},\ \alpha,\beta>0$, έχουμε:

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4} = x^4+\frac{1}{x^4}+y^4+\frac{1}{y^4}+z^4+\frac{1}{z^4} =$$

$$=\left(x^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(y^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^4+\frac{1}{x^4}\right) \geq 2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right) = \left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right) \geq 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Α59. Αν x, y, z, a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x+y+z=\alpha+b+c$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{\alpha+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+\alpha}+\frac{\alpha}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z} > 2.$

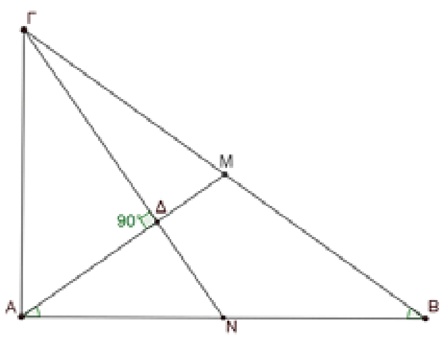
Λύση. Προσπαθώντας να εκμεταλλευτούμε την ισότητα $x+y+z=\alpha+b+c$, γράφουμε:

$$\frac{x}{\alpha+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+\alpha}+\frac{\alpha}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z} > \frac{x}{\alpha+b+c}+\frac{y}{b+c+\alpha}+\frac{z}{c+\alpha+b}+\frac{\alpha}{x+z+y}+\frac{b}{x+y+z}+\frac{c}{y+z+x}$$

$$=\frac{x+y+z}{\alpha+b+c}+\frac{\alpha+b+c}{x+y+z}=1+1=2.$$

Γ40. Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A}=90^0$ και $AB=\sqrt{2}\cdot A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοί του ΑΜ και ΓΝ τέμνονται κάθετα.

Λύση.

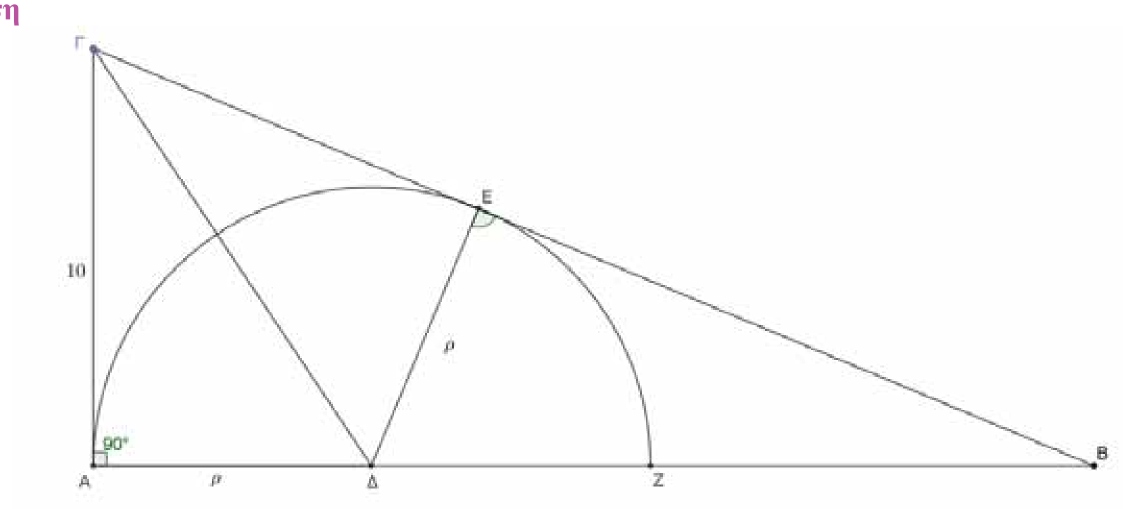


Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και ΑΜ διάμεσος έπεται ότι $AM=\frac{B\Gamma}{2}=MB$, οπότε προκύπτει η ισότητα γωνιών: $M\hat{A}B = M\hat{B}A$. Επιπλέον, από την υπόθεση $AB = \sqrt{2}\cdot A\Gamma$ έχουμε: $A\Gamma^2 = \frac{AB^2}{2} = AB\cdot\frac{AB}{2} = AB\cdot AN \Rightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AN}{A\Gamma}$, από την οποία προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΝΓ είναι όμοια. Επομένως έχουν: $A\hat{\Gamma}N = A\hat{B}\Gamma = N\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{N}A = B\hat{\Gamma}A$ οπότε: $\Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}N + \Delta\hat{N}A = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}A = 90^0$.

Γ41. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^0$ και $AB = 24$, $B\Gamma = 26$. Μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ εγγράφουμε ημικύκλιο που έχει τη διάμετρό του πάνω στη ΑΒ, περιέχει το σημείο Α και εφάπτεται της ΒΓ. Βρείτε το μήκος της ακτίνας του ημικυκλίου.

Λύση



Σχήμα 2

Από τις υποθέσεις τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί είναι ορθογώνια με $\hat{A} = \hat{E} = 90^0$ και έχουν τη γωνία στην κορυφή Γ κοινή. Επομένως θα έχουμε την αναλογία: $\frac{\Delta E}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$,

όπου $\Delta E = \rho$, $A\Gamma = \sqrt{B\Gamma^2 - AB^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10$, $\Delta B = AB - \rho = 24 - \rho$, $B\Gamma = 26$.

Άρα είναι $\frac{\rho}{10} = \frac{24-\rho}{26} \Rightarrow 26\rho = 240 - 10\rho \Rightarrow 36\rho = 240 \Rightarrow \rho = \frac{20}{3}$.

Ασκήσεις για λύση

Α60. Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους οι οποίοι έχουν άθροισμα ψηφίων 11 και ο αριθμός που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και των μονάδων είναι μεγαλύτερος κατά 594 από τον αρχικό αριθμό.

Α61. Αν α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3$, $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 10$, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Γ42. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma\hat{A}B = 20^0$. Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και $\Gamma\hat{\Delta}B = 40^0$, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\hat{B}\Gamma$.

Ν38. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (μ, ν) που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mu\nu + 5\mu + 2\nu = 121.$$

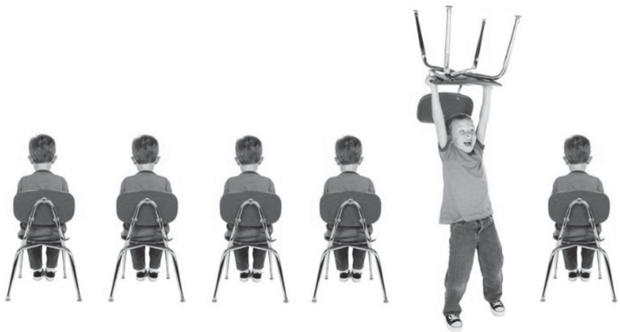
Η Ελλειμματική Προσοχή μια τροχοπέδη στα Μαθηματικά

Νικολόπουλος Γιάννης
Μαθηματικός-Ειδικός Παιδαγωγός

Πιστεύουμε, ότι η εν λόγω μειονεξία είναι παρούσα σε κάθε σχολική τάξη τουλάχιστον σε δύο-τρία παιδιά, ίσως σε διαφορετικό βαθμό, για τούτο το λόγο ενημερώνουμε τους συναδέλφους για να έχουν μια πρώτη εικόνα πως λειτουργούν αυτά τα παιδιά.

Τι είναι η μειονεξία της Ελλειμματικής Προσοχής;

Έχουμε ακούσει ή παρατηρήσει ανήσυχα παιδιά, ατίθασα παιδιά, απρόσεκτα παιδιά. Συνήθως αυτά τα παιδιά έχουν διαγνωσθεί με ΔΕΠ-Υ (Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής-Υπερκινητικότητα). Τι είναι η ΔΕΠ-Υ και πως προσδιορίζεται; Από την αλλοίωση/μείωση του επίπεδου της προσοχής… επίσης την αποδιοργάνωση και / ή την υπερκινητικότητα-παρορμητικότητα» Που οφείλεται η ΔΕΠ-Υ; Σε συνδυασμό γενετικών αλλά και περιβαλλοντικών παραγόντων.



(Η ανωτέρω εικόνα όχι τυχαία δείχνει ότι αρκετά παιδιά έχουν ΔΕΠ-Υ)

Το κύριο ζήτημα που μας απασχολεί από τη Μαθησιακή πλευρά είναι η Ελλειμματική Προσοχή. Η πλευρά της Υπερκινητικότητας, σε όποια παιδιά συνυπάρχει συνήθως στα περισσότερα αγόρια, είναι πεδίο του παιδοψυχίατρου και όχι του ειδικού παιδαγωγού.

Η Απροσεξία και η Αποδιοργάνωση συνεπάγεται την αδυναμία να παραμείνουν στην εργασία, στο στόχο για αρκετό και αναγκαίο διάστημα. Η Υπερκινητικότητα-Παρορμητικότητα πάντα συνεπάγεται υπερδραστηριότητα και συχνά ενώ παραμελούν την σχολική εργασία τους παρεμβαίνουν στις δραστηριότητες των άλλων ανθρώπων (συμμαθητών, εκπαιδευτικών) του περιβάλλοντος τους.

Πως επιδρούν αυτές οι μειονεξίες στα Μαθηματικά;

Από τις ανωτέρω μειονεξίες αυτές που σαφέστατα παίζουν αρνητικό ρόλο στα Μαθηματικά, στη Φυσική … είναι η Απροσεξία, η Αποδιοργάνωση και η Παρορμητικότητα. Στην απροσεξία οφείλονται μειωμένες προσλήψεις των δεδομένων ενός προβλήματος ή μιας απόδειξης και λόγω αυτής της ελλειμματικότητας η περιορισμένη δυνατότητα της απάντησης. Αν υποθέσουμε ότι ο μαθητής καταφέρει να μείνει συγκεντρωμένος και να αντιληφθεί τα δεδομένα τότε ακολουθεί η Αποδιοργάνωση/Αταξία της σκέψης δηλαδή πως θα αρχίσουμε, σε ποια θεωρία θα στηριχθούμε, ποιο τύπο θα χρειασθούμε και που θα στοχεύουμε. Μάλιστα οι σύγχρονες έρευνες και θέσεις της Νευροεπιστήμης διαπιστώνουν Έλλειμμα Αυτοελέγχου. Εδώ πρέπει να τονίσουμε για τα παιδιά στη Β΄/θμια που έχουν καλό ή πολύ καλό Δ.Ν. (Δείκτη Νοημοσύνης) και έχουν υποστηριχθεί στο σπίτι, στο σχολείο και σε κάποια ενισχυτική διδασκαλία (φροντιστήριο), αν δεν είχαν Έλλειμμα Αυτοελέγχου θα είχαν άριστες επιδόσεις. Χρειάζονται μια σειρά μεθοδικών κινήσεων για να ανταποκριθούν και να αξιοποιήσουν το ικανό μυαλό τους.

Ποιες είναι οι Υποστηρικτικές Διδακτικές Δράσεις;

(Γραφείο μαθητή με τέτοια ακαταστασία έχει συνήθως Ελλειμματική Προσοχή)

Έμφαση στην κατανόηση εννοιών επίσης κάλεσμα με φιλικό και όχι εξεταστικό τρόπο για συμμετοχή στην παράδοση του Μαθήματος. Για παράδειγμα εφαρμογή της Δομημένης Διερευνητικής Μάθησης. Σημειώσεις με βασικά σημεία και σύντομες παρουσιάσεις. Τα παιδιά ανταποκρίνονται σε μάθημα παραστατικό και βιωματικό. Χρησιμοποίηση Εννοιολογικών Χαρτών, παροχή οδηγιών με σαφήνεια και συντομία.

Προσοχή σε διάφορες προτάσεις που σχετίζονται με την απομνημόνευση μεθόδων γιατί μπορεί περισσότερο να ταλαιπωρούν παρά να βοηθούν. Δεν κριτικάρουμε αλλά κάθε Μαθησιακή Δυσκολία χρειάζεται και την αντίστοιχη Διδασκαλία. Για παράδειγμα: Θέλουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα και προτείνεται να μάθουν τα παιδιά την λέξη ΚΟΣΜΟΣ και οφείλουν να απομνημονεύσουν ότι **Κ** σημαίνει Κυκλώνω, **Ο** σημαίνει Ομαδοποιώ, **Σ** σημαίνει Σχεδιάζω, **Μ** σημαίνει Μαντεύω, **Ο** σημαίνει Ολοκληρώνω και **Σ** σημαίνει Συλλογίζομαι. Παρατηρήσεις: 1. Αρκετά δύσκολη η ανωτέρω απομνημόνευση, 2. Στο Κυκλώνω πρέπει να μάθουμε στα παιδιά με Μαθησιακές ή μη Δυσκολίες ότι είναι σωστό να Κυκλώνουν τους Αριθμούς και τις

Αριθμολέξεις (π.χ. τριπλάσιο) και να τοποθετούν σε ορθογώνια τις λέξεις κλειδιά (π.χ. πόσες μοίρες είναι η γωνία χOψ), 3. Τα παιδιά με Ελλειμματική Προσοχή δεν πρέπει να οδηγούνται σε κατευθύνσεις όπως το Μαντεύω ή το Συλλογίζομαι γιατί θα αρχίσουν την νοητική περιπλάνηση (mind wondering) και θα χάσουν το συγκεκριμένο και το στόχο. Βέβαια δεν αποκλείουμε σε κάποιες Μαθησιακές Δυσκολίες πρακτικές σαν την παραπάνω να δίνουν αποτελέσματα αλλά δεν είναι κατάλληλες για την ΔΕΠ-Υ.

Παρακάτω θα αναπτύξουμε δύο παραδείγματα αναλυτικά ένα στη γεωμετρία και ένα στην άλγεβρα υποδειγματικά για παιδιά με ΔΕΠΥ.

Σχετικά με την γεωμετρία: Ο Μαθηματικός ζήτησε να βρουν οι μαθητές την περίμετρο ενός ισοσκελούς τριγώνου με πλευρές 3 cm και 7 cm.

Ανάγνωση: Μια-δύο φορές ανάγνωση για κατανόηση των λέξεων π.χ. Περίμετρος (το άθροισμα γύρω-γύρω των πλευρών), Ισοσκελές (ίσα σκέλη, δηλαδή αν εξαιρέσουμε τη βάση, δύο πλευρές ίσες). Αφού έχουμε ανακαλέσει στην Μνήμη μας τις ερμηνείες αυτών των λέξεων αρχίζουμε την παρατήρηση ειδάλλως ρωτάμε να μας επαναλάβουν τις ‘άγνωστες’ λέξεις που αποτελούν κλειδιά.

Παρατήρηση: Αφού είναι ισοσκελές θα πρέπει οι δύο πλευρές να είναι ίσες πιθανώς να είναι 3 cm, 3 cm και η βάση 7 cm. Αλλιώς 7 cm, 7 cm και η βάση 3 cm. Άρα μάλλον θα υπάρχουν δύο λύσεις (περιπτώσεις).

Εφαρμογή: Σε σχήμα με τα γεωμετρικά όργανα εφαρμόζω την αρχική μου σκέψη/παρατήρηση και βλέπω ότι δεν υπάρχει τρίγωνο με τις προϋποθέσεις (3 cm, 3 cm, 7 cm) και ανακαλώ από την μνήμη μου την αναγκαία τριγωνική ανισότητα που μας εξασφαλίζει την ύπαρξη τριγώνου. Τριγωνική ανισότητα: Αν οι πλευρές είναι α, β, γ τότε $α + β > γ$ όπου α, β οι μικρότερες πλευρές του τριγώνου. Εν προκειμένω $3 + 3 = 6 < 7$. Άρα η πρώτη επιλογή είναι ΛΑΘΟΣ άρα η δεύτερη παρατήρηση/σκέψη είναι ΣΩΣΤΗ.

Απάντηση: Εδώ τα παιδιά με ΔΕΠ-Υ επηρεάζονται από την Παρορμητικότητά τους έτσι αισθάνονται ότι βρήκαν τη λύση αλλά δεν δίνουν την απάντηση. Γιατί τελικά η περίμετρος είναι το άθροισμα των πλευρών: $7 + 7 + 3 = 17$. Άρα $Π = 17$ cm.

Πως θα επιτύχουμε την Κατανόηση των Εννοιών;

Πολύ σημαντική παράμετρος η ανάγνωση και κατανόηση κάθε έννοιας, στη συνέχεια η παρατήρηση και καταγραφή σε πίνακα δεδομένων-ζητουμένων, η κατηγοριοποίηση του προβλήματος στην αντίστοιχη θεματολογία, η δημιουργία σχήματος αναγκαίου τόσο στην γεωμετρία όσο και στην άλγεβρα και τελικά η απάντηση-λύση.

Εδώ να εξηγήσουμε τι σημαίνει η **Κατηγοριοποίηση** του προβλήματος. Διαβάζουμε ότι ένας ποδοσφαιριστής (Μ.) στα 10 πέναλτι που εκτελεί επιτυγχάνει 7 γκολ, ενώ ένας άλλος (Κ.) έχει εκτελέσει στα 4 τελευταία χρόνια 25 πέναλτι και έχει επιτύχει τα 20. Ποιος έχει μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας; Μόλις ολοκληρωθεί μια εύκολη και προσιτή ειδικά για τα αγόρια ανάγνωση οφείλουμε να κατατάξουμε/κατηγοριοποιήσουμε το πρόβλημα. Εδώ αναγκαίο να γνωρίζουμε την λέξη **ποσοστό** για να ανακαλέσουμε από την μακρόχρονη μνήμη τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε αυτά τα προβλήματα. Είμαστε υποχρεωμένοι να φτιάξουμε σε κλάσματα τις εκφράσεις: 7 στα 10 (7/10) και 20 στα 25 (20/25) και να τα μετατρέψουμε με παρονομαστή το 100. Δηλαδή: 70/100 και 80/100. Ακολουθεί η απάντηση/λύση ότι ο Κ. έχει καλύτερο ποσοστό ευστοχίας/επιτυχίας 80%. Σημείωση ο μαθητής πρέπει να διαβάζει όλα τα προβλήματα φωνακτά για να κερδίσει και τις δύο αισθητήριες οδούς (ακουστική και οπτική) με αυτόν τον τρόπο έχει εγρήγορση σαν τον ηθοποιό που διαβάζει και συγχρόνως απαγγέλει τον ρόλο του. Μια σημαντική υπόδειξη. Κυριαρχεί μια αντίληψη να μεταφέρουμε το διδασκόμενο θέμα κάπως απλοϊκά με κίνδυνο να δώσουμε λαθεμένη αντίληψη στους μαθητές όλης της τάξης. Για παράδειγμα: «Εξίσωση είναι η ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή Χ και οφείλουμε να βρούμε τον άγνωστο Χ». Έλα όμως που η ΙΣΟΤΗΤΑ ισχύει πάντα για όλες τις τιμές της μεταβλητής Χ. Κατάλληλη διδασκαλία η βιωματική όπου θα δείξουμε την εξίσωση σαν μια ζυγαριά.

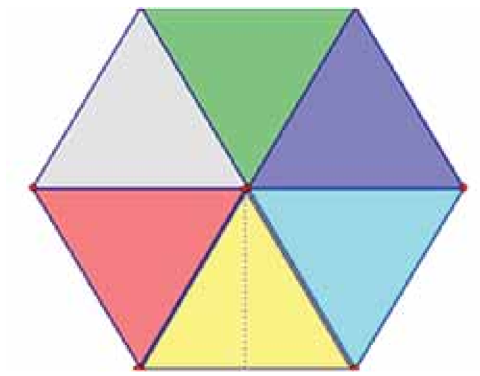
Άλλο παράδειγμα σχετικά με την αμβλεία γωνία. Κάποιοι για να περιορίσουν τον ορισμό ονομάζουν: «Την γωνία που είναι περισσότερο από 90°» Έλα που το σωστό είναι: «Αμβλεία είναι η γωνία που υπερβαίνει τις 90° αλλά είναι λιγότερο από 180°». Τελικά η κατανόηση των εννοιών πρέπει να είναι ακριβείς και τα παιδιά με Ελλειμματική Προσοχή μπορούν να κατανοήσουν το δεύτερο και σωστό ορισμό της αμβλείας γωνίας ειδικά αν σχεδιάσουμε στον πίνακα με μαρκαδόρους διαφορετικών χρωμάτων την οξεία, την ορθή, την αμβλεία και την ευθεία γωνία.

Η Πολυαισθητηριακή, η Βιωματική, η STEM διδασκαλία και η χρήση προσομοιώσεων είναι αρκετά καλές διδακτικές πρακτικές για τα παιδιά με Ελλειμματική Προσοχή. Μερικές ακόμη προτάσεις εφικτές: Μην θέτουμε συγχρόνως πολλά δεδομένα/νόμους. Μην φορτώνουμε με ασκήσεις το μάθημα. Καλούμε τα παιδιά να βρουν παραδείγματα.

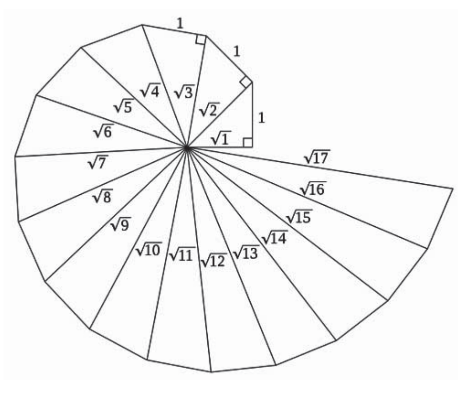
Παραδείγματα ασκήσεων που κεντρίζουν το ενδιαφέρον παιδιών με ΔΕΠ-Υ:

Να βρεθεί το Εμβαδόν του Χαρταετού.

Γνωρίζουμε ότι η πλευρά του κάθε τριγώνου είναι 6 cm και τα έγχρωμα τρίγωνα από τα οποία αποτελείται είναι συγχρόνως ισόπλευρα και ίσα.



Στο διπλανό σχήμα η Πυθαγόρεια Σπείρα. Όλα τα τρίγωνα ορθογώνια. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τελευταίου τριγώνου και να το συγκρίνετε με το εμβαδόν του αρχικού ισοσκελούς τριγώνου.



Ολογραφία

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

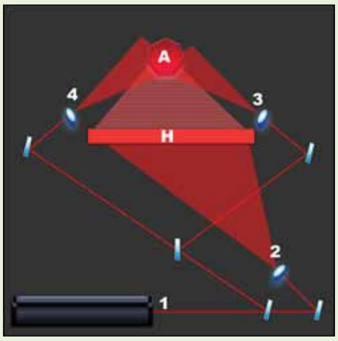
Η **Ολογραφία** (Όλο και Γραφή), είναι μια τεχνική για την καταγραφή των φωτεινών κυμάτων που ανακλώνται από ένα αντικείμενο.

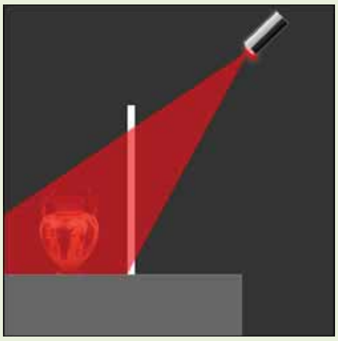
Αποτέλεσμα της καταγραφής αυτής είναι το **ολόγραμμα** που όταν φωτισθεί με κατάλληλο τρόπο, αναπαράγει ένα ακριβές τρισδιάστατο είδωλο του αντικειμένου. **Ολόγραμμα είναι μια φωτογραφία τρισδιάστατη.** Ο παρατηρητής ενός ολογράμματος, μπορεί να βλέπει το ολογραφικό είδωλο από διαφορετικές οπτικές γωνίες γι' αυτό πιστεύει ότι το ολόγραμμα είναι το πραγματικό αντικείμενο.

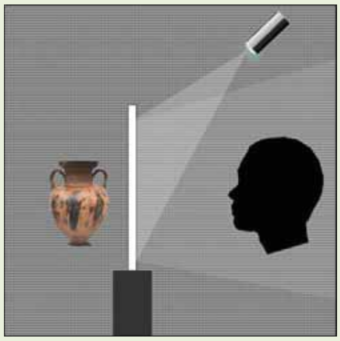
Η τεχνική της ολογραφικής καταγραφής είναι τελείως διαφορετική από τη φωτογραφική. Κατά τη φωτογράφηση, ο φακός της φωτογραφικής μηχανής δημιουργεί ένα είδωλο του αντικειμένου πάνω στο φιλμ, μετατρέποντας έτσι τις αρχικές τρείς διαστάσεις σε δύο. Το Ολόγραμμα δίνει τρισδιάστατη αναπαράσταση επειδή καταγράφει και αναπαράγει τις ίδιες ακτίνες φωτός που ανακλά ένα αντικείμενο και στο ανθρώπινο μάτι.

Η αίσθηση των τριών διαστάσεων επιτείνεται από τις ανακλάσεις του φωτός στην περιοχή του ολογραφικού ειδώλου, τις φωτοσκιάσεις, την απόδοση της επιφανειακής υφής των υλικών αλλά κυρίως από την οριζόντια και κατακόρυφη οπτική παράλλαξη.

Στην ολογραφία το αντικείμενο φωτίζεται από κατάλληλη φωτεινή πηγή laser. Το ανακλώμενο από το αντικείμενο φως του laser προσπίπτει σε ειδική φωτοευαίσθητη πλάκα χωρίς να παρεμβάλλεται φακός. Σε αντίθεση με τη φωτογραφία η φωτοευαίσθητη πλάκα δέχεται ακόμη μια δέσμη φωτός τη «δέσμη αναφοράς» που προέρχεται από την ίδια πηγή laser.







Τα δύο σύνολα φωτεινών αχτίνων (από το αντικείμενο και τη δέσμη αναφοράς) στη περιοχή της πλάκας αλληλεπιδρούν και το αποτέλεσμα αυτής της αλληλεπίδρασης είναι το **ολόγραμμα** που αποθηκεύεται στην φωτοευπαθή πλάκα. Η αναπαραγωγή του ειδώλου γίνεται φωτίζοντας το ολόγραμμα με κατάλληλη φωτεινή πηγή.

Οι αρχές της ολογραφίας ανακαλύφθηκαν το 1948 από τον Ουγγρικής καταγωγής Dennis Gabor (Ντενίς Γκέιμπορ 1900-1979) που τιμήθηκε για την ανακάλυψη αυτή με πολλά βραβεία και το 1971 με βραβείο Nobel. Η μέθοδος Gabor παρέμεινε ανεκμετάλλευτη για πολλά χρόνια λόγω έλλειψης κατάλληλης μονοχρωματικής φωτεινής πηγής απαραίτητης για την εγγραφή του ολογραφήματος. Το 1962, μετά την ανακάλυψη του **laser**, οι Αμερικάνοι E. Leith και J.Upatnieks κατόρθωσαν να δημιουργήσουν τρισδιάστατα είδωλα. Όμως η μέθοδος των Leith & Upatnieks απαιτούσε τη χρήση laser και για την αναπαραγωγή του ειδώλου.

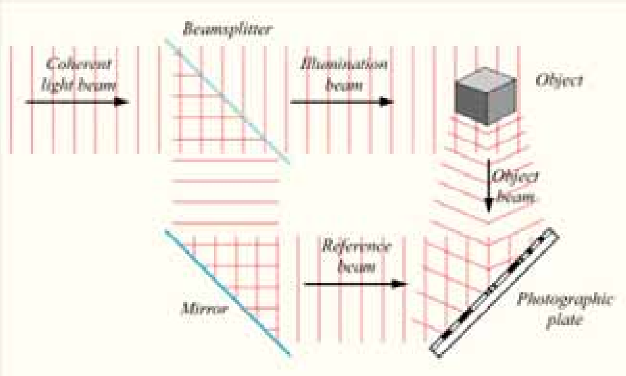
Ο Ρώσος **Y.N. Denisyuk** έδωσε μεγάλη ώθηση στην ολογραφία, ανακάλυψε μια μέθοδο καταγραφής ολογραμμάτων που αναπαράγονται τα τρισδιάστατα είδωλά τους με απλό φωτισμό από κοινές πηγές σημειακού φωτισμού ή από τον ήλιο.

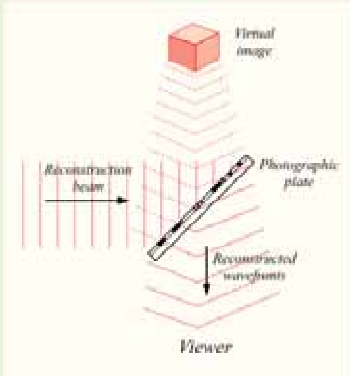
Η εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων και η ανάπτυξη της ψηφιακής φωτογραφίας και βίντεο σε υψηλή ανάλυση επιτρέπει πλέον την κατασκευή ψηφιακών συνθετικών ολογραμμάτων που αποτυπώνουν βάθος, λεπτομέρειες και παράλλαξη. Ακόμα η ανάπτυξη ειδικών ευαίσθητων στο φως παγχρωματικών υλικών έδωσε την δυνατότητα **πολύχρωμων ολογραμμάτων**.

Πάντως σύντομα φαίνεται ότι θα βάλουμε στο μουσείο την σημερινή φωτογραφία αφού το επόμενο στάδιο της τεχνολογικής προόδου αναμένεται να δώσει την μαζική παραγωγή των **ολογραμμάτων**.

Επομένως, στο εξής ότι θα βλέπουμε δεν θα είναι πάντα το πραγματικό αντικείμενο ή πρόσωπο αλλά το είδωλό του ή καλύτερα το ολόγραμμά του. Με το ολόγραμμα που είναι 3διάστατη εικόνα δεν θα είμαστε σε θέση να καταλάβουμε αν έχουμε μπροστά μας το πραγματικό αντικείμενο ή όχι, κάτι που σήμερα με την 2διάστατη φωτογραφία δεν συμβαίνει.

Επίκαιρη είναι πλέον μια παλιά λαϊκή παροιμία «Απ’ ότι ακούς, μην πιστεύεις τίποτα και από ότι βλέπεις τα μισά».

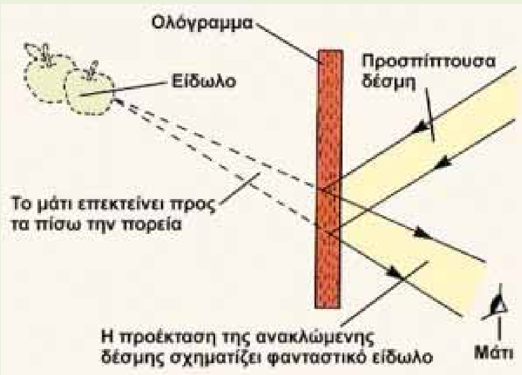


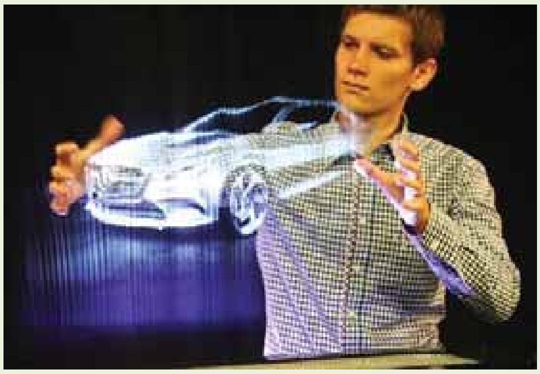


Πως γίνονται τα ολογράμματα;

Έχουμε καταρχήν μία ισχυρή πηγή εκπομπής ακτίνων λέιζερ. Η εκπομπή της ακτίνας περνά από ένα Διάφραγμα (κυκλικού σχήματος) και στη συνέχεια προσκρούει σε Διασπαστή ακτίνας υπό γωνία (τετράγωνο πλαίσιο το σχήμα του). Η απόσταση Διαφράγματος και Διασπαστή Ακτίνος είναι ο αριθμός 2 (και πολλαπλάσιά του). Σε ίση απόσταση που διαθλάται η ακτίνα λέιζερ συναντά ένα Φακό Αποκλίσεως ο οποίος μεταφέρει την ακτίνα σε κάτοπτρο. Από εκεί αντανακλάται πάνω στο αντικείμενο που θέλουμε να μεταφέρουμε την εικόνα του σε ολόγραμμα ως ΟΛΟΓΡΑΦΙΚΟ ΑΠΟΤΥΠΩΜΑ. Σε απόλυτη ευθεία της λέιζερ και σε απόσταση (6χ2=12) συναντά το δεύτερο κάτοπτρο, το οποίο αντανακλά κι αυτό σε (2) τον δεύτερο Φακό Αποκλίσεως ο οποίος καταλήγει στο ολόγραμμα. Η χρήση των διπλών κατόπτρων και διπλών Φακών Αποκλίσεως γίνεται για να μας δώσει τρισδιάστατη εικόνα.

Ολόγραμμα Ανάκλασης





Σχηματισμός του ειδώλου στο ολόγραμμα ανάκλασης.

Το ολόγραμμα ανάκλασης δημιουργείται καθώς η δέσμη αναφοράς και η αντικειμενική δέσμη προσβάλλουν ένα παχύ φιλμ, η μία δέσμη από εμπρός και η άλλη από πίσω. Το φαινόμενο της συμβολής δημιουργεί και πάλι φωτεινούς και σκοτεινούς κροσσούς πάνω στο φιλμ. Η ανάκλαση των φωτεινών ακτίνων από τους κροσσούς δημιουργεί τρισδιάστατο είδωλο. Σε αντίθεση με τα ολογράμματα μεταβίβασης, τα ολογράμματα ανάκλασης μπορούν να εμφανιστούν και στο συνηθισμένο φως της ημέρας. Ήδη χρησιμοποιούνται συχνά στις πιστωτικές κάρτες για να διασφαλίζονται από το ενδεχόμενο πλαστογραφίας.

Μια ολογραφική πυραμίδα είδαν τελευταία στη Μόσχα χιλιάδες Μοσχοβίτες και όχι μόνο. Αν τώρα αντί για πυραμίδα βάλουν μια εικόνα του Σωκράτη ή του Χριστού θα φέρουν σύγχυση και ταραχή στον κόσμο αφού το είδωλο αυτό δεν διαφέρει σε τίποτα από μια ζωντανή παρουσία. Το ίδιο αν μέσα στο σπίτι μας αντί για φωτογραφίες έχουμε το ολόγραμμα αγαπημένων προσώπων εν ζωή ή όχι. Φανταστείτε τι πανικό θα φέρει ένα ολόγραμμα στην πλατεία της γειτονιάς σας με στρατό και άρματα ή μια οποιαδήποτε άλλη τρομακτική εικόνα.

Γεωμετρικά και Καλλιτεχνικά Πολύγωνα

Γυμνάσιο Λ.Τ. Λεχαίου Κορινθίας

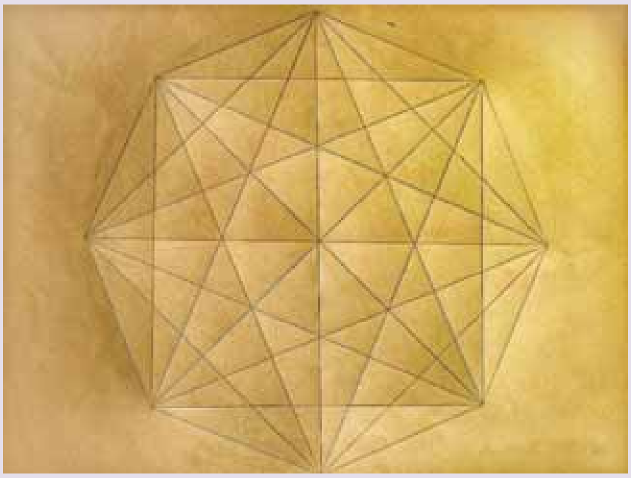
Το σχολικό έτος 2018-19 στη Β Γυμνάσιου διδαχτήκαμε την κατασκευή κανονικού πολυγώνου με κανόνα και διαβήτη. Με αφορμή αυτό ξεφύγαμε από τον τομέα της άλγεβρας και ασχοληθήκαμε με κάτι πιο ευχάριστο και δημιουργικό, κάτι που κίνησε ιδιαίτερα το ενδιαφέρον όλων μας.

Η διαδικασία κατασκευής πολύγωνων ήταν μια ξεχωριστή εμπειρία , παρόλο που στηρίζεται σε έναν μόνο τύπο και δεν έχει πολλούς υπολογισμούς ή πράξεις. Συμμετείχαν ενεργά οι περισσότεροι μαθητές και μαθήτριες και το αποτέλεσμα θεωρούμε ότι ήταν ικανοποιητικό και ως προς το αισθητικό κομμάτι άλλα και ως προς το κατασκευαστικό.

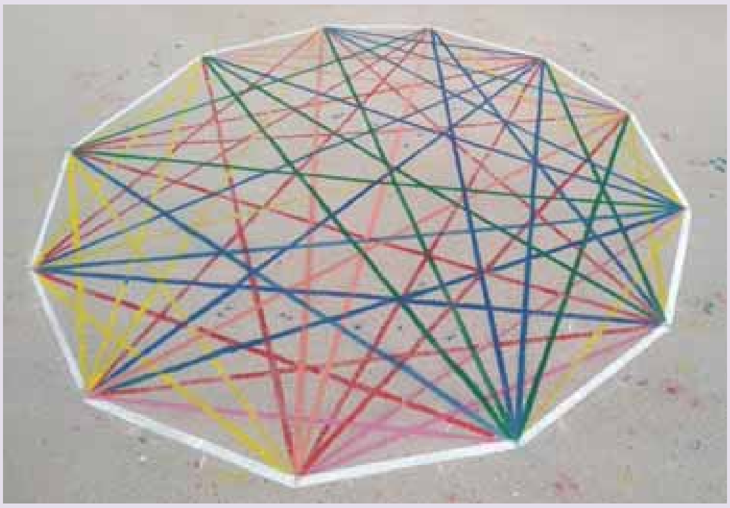
Με τις πολλές κατασκευές των κανονικών πολύγωνων που κάναμε στο μάθημα, παρατηρήσαμε και εστιάσαμε σε κάποια συγκεκριμένα σημεία των μαθηματικών που μέχρι τώρα μόνο μας δυσκόλευαν. Διαπιστώσαμε πώς μπορεί ένα μικρό λάθος στην αρχή να επηρεάσει το τελικό αποτέλεσμα αρνητικά. Επίσης πειραματιστήκαμε, σχεδιάζοντας πολύγωνα διαφόρων ειδών και συμπεράναμε ότι ήταν σημαντικό να ξεκινήσουμε και να τελειώσουμε ακολουθώντας μια συγκεκριμένη διαδικασία, έναν αλγόριθμο δηλαδή.

Εντέλει, το τελικό αποτέλεσμα συνέβαλε στο να παρέμβουμε και εικαστικά στα πολύγωνα, δημιουργώντας μικρά γεωμετρικά και συμμετρικά έργα τέχνης.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στην Β Γυμνασίου διδαχτήκαμε τα κανονικά πολύγωνα και τον κύκλο. Ένα πολύ ενδιαφέρον τμήμα αυτού του θέματος είναι ο σχεδιασμός και η κατασκευή ενός κανονικού πολυγώνου με ό,τι προβλήματα αλλά και προεκτάσεις μπορεί αυτή να έχει. Στο μάθημα αυτό κληθήκαμε όχι μόνο να φτιάξουμε μια κατασκευή αλλά και να την διαχειριστούμε είτε ως σωστό ή λάθος αποτέλεσμα είτε σε σχέση με το επίπεδο και τον περιγεγραμμένο κύκλο καθώς και να φανταστούμε πιθανές «υπερκατασκευές» με βάση αυτό.



Αρχικά με τον διδάσκοντα καθηγητή μας συζητήσαμε το πώς προκύπτει ο τύπος του μέτρου εγγεγραμμένης γωνίας ($ω = 360^o/ν$) και προσέξαμε την διαφορά μεταξύ κανονικών και μη κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο. Στην συνέχεια μας ζητήθηκε να δημιουργήσουμε ένα κανονικό εξάγωνο χωρίς όμως την χρήση του παραπάνω τύπου (κατασκευάσαμε 6 διαδοχικές πλευρές ίσες με την ακτίνα του κύκλου). Το εντυπωσιακό αποτέλεσμα που σε όλες και όλους πέτυχε μας κίνησε το ενδιαφέρον και την περιέργεια για το πώς καταφέραμε να το κάνουμε κανονικό και αν τελικά δεν χρειάζεται να μετράμε και για τα υπόλοιπα πολύγωνα. Ωστόσο η εφαρμογή του τύπου ($\omega_6=60^o$) οδήγησε σε ισόπλευρα τρίγωνα κάτι που μας έκανε να αντιληφθούμε ότι το αποτέλεσμα δεν ήταν τυχαίο.



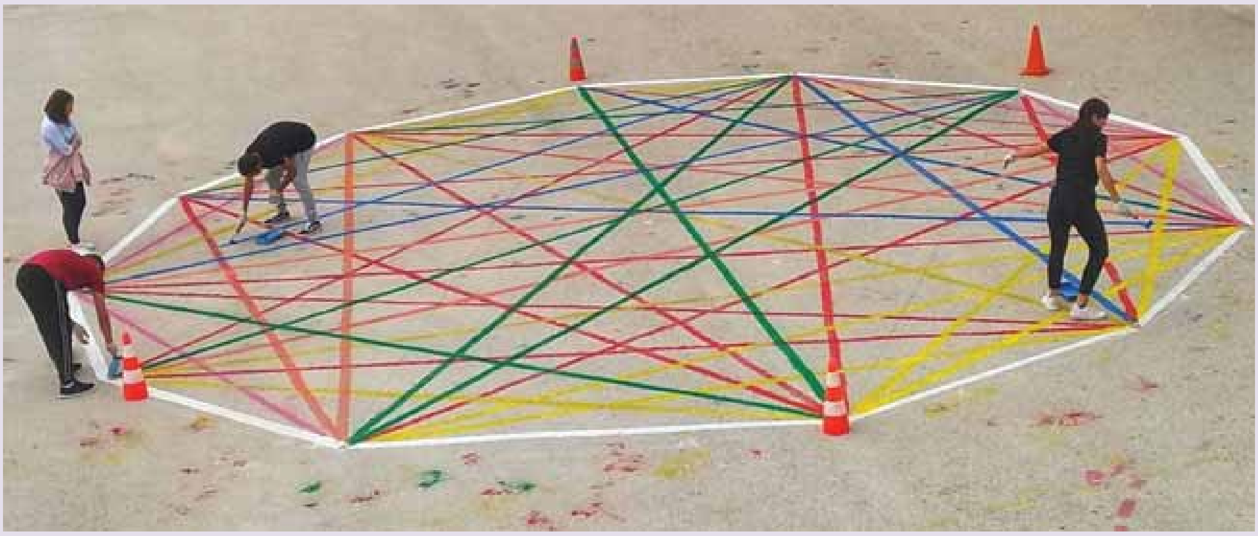
Έτσι μετρώντας την πρώτη γωνία και κατασκευάζοντας σχήματα με περισσότερες πλευρές παρατηρήσαμε πως προκύπτουν επίσης πολύ όμορφα σχήματα υπό ορισμένες προϋποθέσεις. 1ον δεν πρέπει να κάνεις λάθος στην μέτρηση της αρχικής επίκεντρης γωνίας. Λίγες μοίρες αστοχίας στην πρώτη μέτρηση οδηγούσε σε λάθος πολύγωνο. Σχεδιάσαμε πολλά 17γωνα αντί για 18γωνα και 19γωνα αντί για 20γωνα. Επιπλέον σε μικρότερο αριθμό πλευρών το σφάλμα, μας έδινε την εντύπωση πως η τελευταία πλευρά είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τις υπόλοιπες. Συμφωνήσαμε με τον καθηγητή μας πως η ακρίβεια μέτρησης με το μοιρογνωμόνιο ήταν απαραίτητη προϋπόθεση αλλά παράλληλα αναρωτηθήκαμε αν υπάρχει άλλος τρόπος μέτρησης γωνίας. Ύστερα μας άλλαξε κουβέντα λέγοντας κάτι για μια πεταλούδα που κουνάει τα φτερά της στην Κίνα η οποία προκαλεί καταιγίδα στη Νέα Υόρκη και κάτι για Χάος κι εκεί αρχίσαμε να χάνουμε την επικοινωνία μαζί του.

Έπειτα (μετά από αυτό το σύντομο διάλειμμα) παρατηρήσαμε ότι ήταν τεχνικά αδύνατο να κατασκευάσουμε μεγάλα πολύγωνα σε μικρό σχήμα. Σκεφτήκαμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε χαρτί μεγέθους Α3 για να πετύχουμε ένα όμορφο 20γωνο ενώ κάποιοι συμμαθητές μας «βανδάλισαν» το θρανίο τους σχεδιάζοντας απευθείας πάνω σε αυτό.

Ο καθηγητής μας, συζήτησε με κάποιους μαθητές το ενδεχόμενο να σχεδίαζαν το συγκεκριμένο σχήμα στο προαύλιο του σχολείου στο οποίο υπήρχε αρκετός χώρος προσπαθώντας να λύσουν και άλλες «γεωμετρικές απορίες» όπως για παράδειγμα πώς θα φτιάξουμε τον κύκλο και τις ευθείες σε ένα τόσο μεγάλο σχήμα. Ομολογούμε πως είχε ενδιαφέρον να βλέπεις συμμαθητές μας που δεν ενδιαφέρονται και τόσο για την Άλγεβρα και γενικότερα τα μαθηματικά να σκέφτονται πώς θα κατασκευάσουν τέτοια σχήματα σε μεγάλη κλίμακα. Κάποιοι θεώρησαν πως τα «ράμματα» θα ήταν καλή πρακτική για την παραπάνω "υπερκατασκευή" και κάπως έτσι φτάσαμε στο αποτέλεσμα που βλέπετε.

Μόνο που δεν είχαμε υπολογίσει πως θα χρειάζονταν 230 μέτρα νήματος ενώ η εσωτερική βαφή του θα ήταν εκτός προϋπολογισμού .Γενικότερα υπήρξε ένα έντονο ενδιαφέρον για το μάθημα αυτό.

Τέλος πολλοί από εμάς σχεδιάσαμε και τις διαγώνιες των σχημάτων μας, δημιουργώντας έτσι υπέροχα σχήματα με τρισδιάστατη υφή ενώ στα πολύγωνα με τις πολλές πλευρές χρειάστηκε αρκετός χρόνος για να το ολοκληρώσουμε.

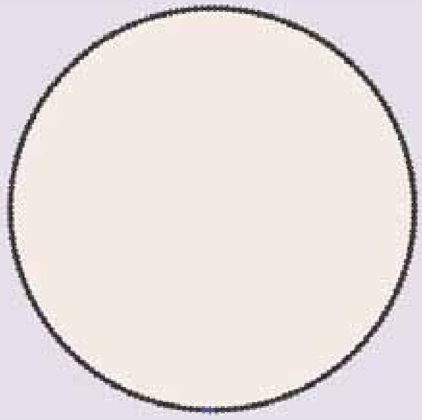


Παρατηρήσαμε πόσα όμοια αλλά και καινούργια σχήματα προέκυπταν στο εσωτερικό του αρχικού πολυγώνου ενώ κάποιοι δημιούργησαν υπέροχες χρωματικές απεικονίσεις των σχημάτων μας, ζωγραφίζοντας όλα τα λευκά πολύγωνα, από τον απλό χαρταετό μέχρι το χαώδες 18γωνο.

Δεν καταφέραμε βέβαια να φτιάξουμε σχέδια σαν τα υπέροχα αραβουργήματα της Αλάμπρα αλλά νομίζουμε πως υπήρξε μια από τις πιο ενδιαφέρουσες προεκτάσεις του μαθήματος αυτού και πολλά από τα σχέδια που κάναμε θα τα κρατήσουμε ενθύμιο μιας τάξης που έφυγε.

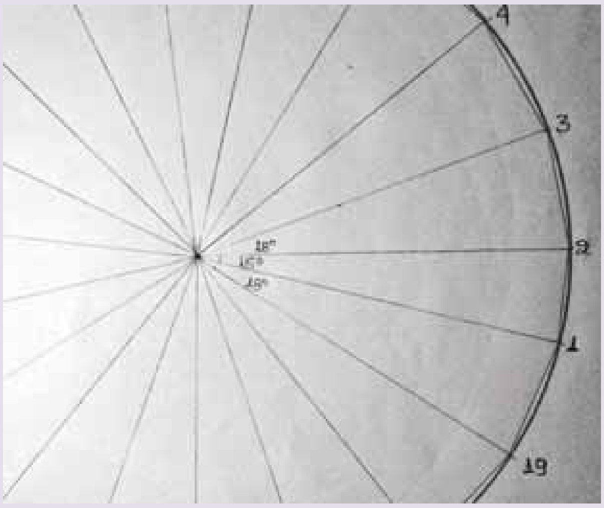
Στο τέλος του μαθήματος συζητήσαμε και για το ενδεχόμενο το μήκος του πολυγώνου να γίνει ίσο με το μήκος του κύκλου.

Ο καθηγητής, μας έδειξε ένα 200γωνο κατασκευασμένο στον υπολογιστή με ειδικό λογισμικό το οποίο έμοιαζε υπερβολικά με κύκλο.



Ωστόσο όταν το μεγεθύναμε αρκετά ώστε να φαίνεται μια πλευρά του, παρατηρήσαμε πως δεν είχε ταυτιστεί με τον περιγεγραμμένο κύκλο.

Ακόμη μας ανέφερε και ένα εγγεγραμμένο κύκλο που βρίσκεται εντός του πολυγώνου.

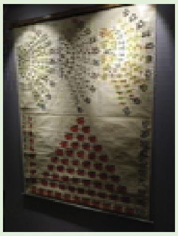


« *Είναι κάτι που θα το μάθετε στο μέλλον*» μας είπε κι έτσι πήρε αναβολή κι αυτό το μυστήριο. Επομένως το μάθημα αυτό της γεωμετρίας φάνηκε ενδιαφέρον σε όλους και φυσικά με την βοήθεια του καθηγητή μας το αγάπησαν όλοι. Ευελπιστούμε να υπάρξει ξανά ένα τέτοιο μάθημα που θα μας προσελκύσει και θα μας ενθουσιάσει όπως αυτό.

Μαθητές: Αργυροπούλου Δήμητρα, Δερμάνη Καλλιόπη, Κλενιάτη Αργυρώ, Μητσοπούλου Δήμητρα-Βασιλική, Ξενοπούλου Ιωάννα,
Επιβλέπων Καθηγητής: Χρισταράς Βασίλης

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΑΣ ΔΙΑΣΚΕΔΑΖΟΥΝ

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος




Από το σχολείο του περασμένου αιώνα.

«Όλοι οι άνθρωποι από τη φύση τους επιθυμούν την γνώση» **ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ**

«Η άγνοια είναι η ρίζα και ο μίσχος όλου του κακού»

ΠΛΑΤΩΝ (μαθητής του Σωκράτη και δάσκαλος του Αριστοτέλη).

ΓΡΙΦΟΙ

- **Η ψηφοφορία:** Σε ένα σχολείο ψήφισαν οι μαθητές για μια εκδρομή. Οι μαθητές που ψήφισαν «ΝΑΙ» ήταν περισσότεροι κατά το ένα πέμπτο των μαθητών που ψήφισαν «ΟΧΙ». Από λάθος εννέα ψήφοι «ΟΧΙ» προσμετρήθηκαν ως «ΝΑΙ». Έτσι στο «ΝΑΙ» υπήρχαν μόνο 3 ψήφοι και στο «ΟΧΙ» περισσότεροι από τα «ΝΑΙ». Πόσοι μαθητές του σχολείου ψήφισαν συνολικά;
- **Η πλαστελίνη:** Η Κατερίνα είχε 300 gr πλαστελίνη, έδωσε ένα μικρό κομμάτι στον αδελφό της και με την υπόλοιπη έφτιαξε 20 ίδιες πίτες. Η φίλη της η Δήμητρα τις χάλασε για να φτιάξει με την ίδια πλαστελίνη 26 ίδια κουλουράκια. Πόση πλαστελίνης χάρισε η Κατερίνα στον αδελφό της;
- **Ο ορειβάτης:** Ο ορειβάτης ανεβαίνει στην κορυφή του βουνού με ταχύτητα 250 μέτρα την ώρα και ξανακατεβαίνει από την ίδια διαδρομή με ταχύτητα 750 μέτρα την ώρα. Για να ανέβει και να κατέβει έκανε συνολικά οκτώ ώρες. Τι ύψος έχει το βουνό;
- **Η κληρονομιά:** Ο Αργύρης κληρονόμησε ένα μακρινό του θείο. Αφού εισέπραξε την κληρονομιά και πήγε στο σπίτι του δεν μπορούσε να θυμηθεί τι του είπε ο συμβολαιογράφος.
  Η περιουσία του θείου ήταν: «35 εκατομμύρια και του άφησε το 60%; ή ήταν 60 εκατομμύρια και του άφηνε το 35% ;». Η μικρή του κόρη όμως του είπε κάτι και ησύχασε. Τι του είπε;
- **Το γινόμενο:** Το γινόμενο του 3ψήφιου ΑΒΓ επί το 2ψήφιο ΔΕ είναι: 7632 Ποιοι είναι οι αριθμοί; (τα Α,Β,Γ,Δ,Ε και 7632 είναι διαφορετικά ψηφία και όλα από 1 μέχρι 9)
- **Το άθροισμα:** Από 6 διαδοχικούς αριθμούς οι 3 τελευταίοι έχουν άθροισμα 36. Ποιο είναι το άθροισμα των 3 πρώτων;
- **Τα έσοδα :** Το 2019 τα έσοδα μιας εταιρείας μειώθηκαν 20%. Το 2020 για να έχει τα αρχικά της έσοδα, πόσο τις εκατό πρέπει να αυξήσει τα έσοδα του 2019;

Απαντήσεις τεύχους 113

ΜΔ1. Αφού σε 40sec διανύουμε 1km σε μία ώρα που έχει 3600 διανύουμε 90km. Άρα οδηγούμε με 90km/h .

ΜΔ2. Δημιουργείται ορθογώνιο τρίγωνο και με εφαρμογή του Π.Θ. στο ΑΒΓ έχουμε

$(\text{ΒΓ}) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$

ΜΔ3. Αν ο τριψήφιος είναι αβγ και ο αντεστραμμένος γβα, η διαφορά είναι (100α+10β+γ)-(100γ+10β +α)=(100α-α)+(γ-100γ)=99α-99γ=99(α-γ) πολλαπλάσιο του 99.

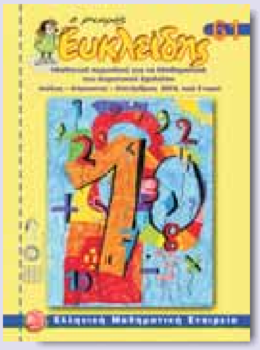
ΜΔ4. Το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισόπλευρο γιατί όλες οι πλευρές του είναι ίσες ως διαγώνιοι ίσων τετραγώνων, άρα $\widehat{\Delta\text{ΒΖ}} = 60^\circ$.

ΜΔ5. Αν τα σκαμπό είναι x και οι καρέκλες y μαζί έχουν 3x+4y πόδια. Όταν κάθισαν όλες, τα πόδια των κοριτσιών είναι (x+y) $\cdot$ 2, άρα όλα τα πόδια μαζί είναι 5x+6y=33. Το 3 διαιρεί το 33 και το 6 άρα πρέπει να διαιρεί και το 5x συνεπώς x=3,6,9, ….και επιπλέον 5x<33, άρα x=3 ή 6. Αν x=3 τότε και y=3, αν x=6 τότε y= $\frac{3}{6}$ απορρίπτεται γιατί x και y είναι ακέραιοι. Συνεπώς τα κορίτσια είναι 3+3=6 και οι φίλες της Μαιρούλας είναι 5.

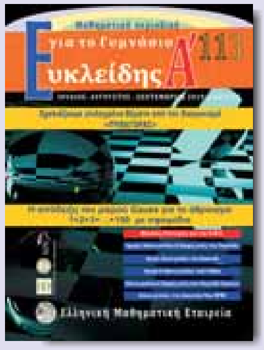
ΜΔ6.

	1	2	3	4	5
1	4	5		1	6
2	2	2	5		0
3		8	3	4	
4	1		1	9	0
5	1	2	0		2

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

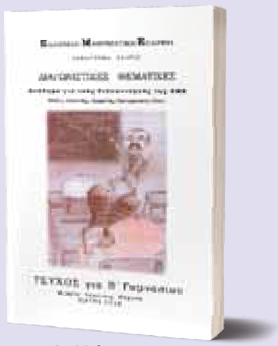


Τιμή τεύχους: 3€

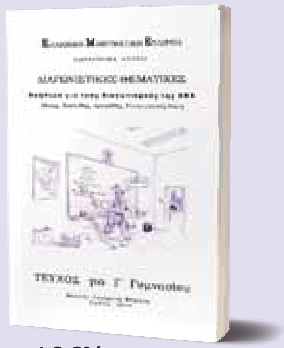


Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3,5€



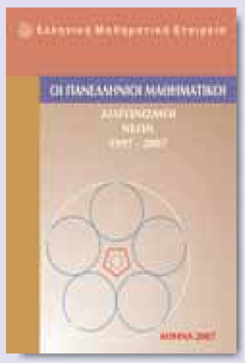
Τιμή βιβλίου: 12€



Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

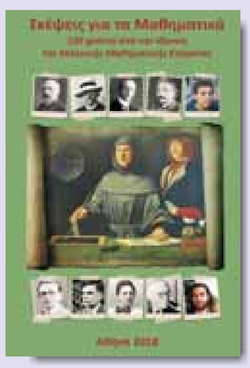
Τιμή βιβλίου: 30€



Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr