ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

125

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022 ευρώ 3,5

Η βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας το πρώτο Πανεπιστήμιο στην Ιστορία

Το όραμα και η ίδρυση του Πανεπιστημίου της Σμύρνης

6 μετάλλια

26th JBMO

Έγινε στη **Βοσνία και Ερζεγοβίνη**
28 Ιουνίου-3 Ιουλίου 2022

5 μετάλλια

63th IMO

Έγινε στη **Νορβηγία**
6-16 Ιουλίου 2022

6 μετάλλια

39th BMO

Έγινε στην **Κύπρο**
4-9 Μαΐου 2022

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 125 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2022 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

... να πούμε
καλή σχολική χρονιά
με αισιοδοξία
και με πείσμα
στους δύσκολους καιρούς ...

Και όπως λέει και ο ποιητής

... με το μελτέμι
που δυναμώνει τη νύχτα
με τη νύχτα
που δυναμώνει τη σιωπή ...
(...)
πρέπει να
προχωρήσουμε

Ποιήματα [1948-1954]
Τίτος Πατρίκιος - Αθήνα
ποιητής [1928 -]

Η επιτροπή σύνταξης του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	11 Νοεμβρίου	2022
Ευκλείδης:	Δεν θα γίνει	
Αρχιμήδης:	18 Φεβρουαρίου	2022

$$2022 = 20^2+(2\cdot 20)^2+22$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Εμμανουήλ Ιωάννης

Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.** Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Το Βιβλίο τα Μαθηματικά και η Αλεξάνδρεια

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ο καλύτερος φίλος μας είναι αυτός που θέλουμε τη συντροφιά του, είναι αυτός που δεν μας κουράζει, που μας συμβουλεύει, που μας κάνει ***καλύτερους ανθρώπους****, που μας δημιουργεί* ***ευχάριστη συντροφιά****, που είναι πάντα δίπλα μας. Ένας τέτοιος πολύ καλός φίλος είναι το Βιβλίο. Το βιβλίο χωρίς να μας ενοχλεί μας συντροφεύει παντού, στο σπίτι, στο σχολείο, στη δουλειά, στη θάλασσα, στο ταξίδι. Είναι ο σοφός φίλος που μας μαθαίνει τα πάντα για την ζωή και τον κόσμο. Μας «λέει» από ιστοριούλες μέχρι πολύ σοβαρά επιστημονικά θέματα.* **Ποια είναι όμως η ιστορία του φίλου μας;**

Ο άνθρωπος χιλιετίες πριν σχεδίαζε και ζωγράφιζε διάφορες εικόνες ζώων, φυτών και αντικειμένων στους βράχους των σπηλαίων που ζούσε. Οι πρώτες απεικονίσεις αρχικά ήταν σχέδια, ύστερα αγάλματα, για να ακολουθήσει η ζωγραφική, η φωτογραφία, ο κινηματογράφος και σήμερα ο ψηφιακός κόσμος.

Ο άνθρωπος δημιούργησε προφορικό και γραπτό λόγο. **Όμως είχε την ανάγκη να επικοινωνήσει με όσο το δυνατό περισσότερους ανθρώπους.** Έτσι έφτασε στη δημιουργία του βιβλίου.

Με το πέρασμα των αιώνων οι άνθρωποι σκάλιζαν γράμματα σε πέτρα ή έγραφαν σε πηλό και ύστερα τον έψηναν για να στερεοποιηθεί. Έγραφαν ή σφράγιζαν στα μέταλλα, στο δέρμα ζώου, αργότερα στον πάπυρο, μέχρι **που** στην **Κίνα δημιούργησαν το χαρτί.** Αν και πέρασαν πολλά χρόνια μέχρι να τελειοποιηθεί, το χαρτί διευκόλυνε πάρα πολύ την γραφή. Μας έδωσε την δυνατότητα να γράφονται περισσότερα βιβλία και φυσικά να γίνονται πολλά αντίγραφά τους.

Ο πάπυρος

Στην αρχαιότητα έγραφαν σε **πάπυρο,** που ήταν παρόμοιο με το χοντρό χαρτί. Ο πάπυρος ήταν σε φύλλα ή σε ρολό, από υλικό προερχόμενο από το φυτό πάπυρος. Το φυτό αναπτύσσεται στο **Νείλο και οι Αιγύπτιοι** όπως προκύπτει από ευρήματα με ιερογλυφική γραφή το χρησιμοποίησαν πριν **4.000 χρόνια**, αλλά κύλινδροι παπύρου εικονίζονται σε παραστάσεις ναών που είναι παλαιότεροι. Οι Αιγύπτιοι με τον πάπυρο κατασκεύαζαν σχεδίες, σχοινιά, καλάθια, κ.ά.

Οι **Έλληνες** έπαιρναν τον πάπυρο από την **Αίγυπτο** και μάλιστα στην αρχαία ελληνική γραμματεία η ονομασία **πάπυρος** ήταν για το φυτό ενώ το υλικό της γραφής από αυτόν είχε την ονομασία **Βύβλος** ή **Βίβλος**. Η ονομασία αυτή μάλλον προήλθε από την παραθαλάσσια πόλη Βύβλο των Φοινίκων που είχε εμπορικές σχέσεις με την Αίγυπτο και προμήθευε τις χώρες με κατεργασμένο πάπυρο. Σε πάπυρο έγιναν, από μοναχούς στα μοναστήρια, πάρα πολλά χειρόγραφα με υγρό μελάνι και φτερό χήνας.

Η περγαμηνή

Άλλο υλικό στο οποίο έγραφαν ήταν η περγαμηνή. Υλικό γραφής που παρασκευάζεται από **δέρμα** (πρόβατο, κατσίκι ή βόδι). Άρχισε να χρησιμοποιείται από τον **2ο π.Χ.** αιώνα και μάλιστα έγινε να αντικαταστήσει τον πάπυρο όταν σταμάτησε η εισαγωγή του από την Αίγυπτο με απαγόρευση του Πτολεμαίου. Το όνομα προήλθε από την αρχαία **Πέργαμο** όπου γινόταν η παραγωγή της.

Το Παλίμψηστο

Επειδή δεν υπήρχαν ή κόστιζαν ακριβά οι πάπυροι και οι περγαμηνές τις έσβηναν και ξαναέγραφαν κάτι καινούργιο. Ιδιαίτερα μετά τον 5ο αιώνα έσβηναν τα αρχαία κείμενα και έγραφαν νεότερα έργα. Ο τρόπος που τα έσβηναν ήταν να ξύσουν τον πάπυρο ή την περγαμηνή, έτσι οι περγαμηνές που ξύνονταν και ξαναγραφόντουσαν ονομάζονται παλίμψηστα (από το ρήμα ψάω=ξύνω).


Φύλλο από το παλίμψηστο του Αρχιμήδη

Βρέθηκαν πολλά αρχαία κείμενα και ζωγραφικοί πίνακες σε περγαμηνές και πάπυρους που επικαλύφθηκαν με άλλο κείμενο ή εικόνα σε μεταγενέστερη εποχή. Πολλά παλίμψηστα δημιουργήθηκαν τον 7ο αιώνα. Ένα σημαντικό παλίμψηστο που βρέθηκε τα τελευταία χρόνια είναι το **Παλίμψηστο του Αρχιμήδη.** Το 1998, πήρε μέρος και η Ελλάδα για να το αποκτήσει σε δημοπρασία στη Νέα Υόρκη. Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη τελικά το **αγόρασε ανώνυμος** συλλέκτης για 2.000.000 δολάρια.

Είναι ίσως το σημαντικότερο επιστημονικό χειρόγραφο που πουλήθηκε σε δημοπρασία. Με τη σύγχρονη τεχνολογία(ακτίνες Χ και φωτογράφηση σε διάφορα μήκη κύματος) διαβάστηκε το 2006 το αρχικό κείμενο που υπήρχε στο παλίμψηστο και ήταν έργα του Αρχιμήδη. Έτσι είδαμε τα μυστικά της μεγαλύτερης μαθηματικής ιδιοφυΐας του αρχαίου κόσμου σε έκθεση που έγινε στο Μουσείο Τέχνης της Βαλτιμόρης με τίτλο «**Lost and Found: The Secrets of Archimedes**». Τα έργα που είχαν ξυστεί τον 10ο αιώνα για να γραφούν **εκκλησιαστικοί ύμνοι** ήταν αποσπάσματα από τις πραγματείες του Αρχιμήδη: Περί των μηχανικών θεωρημάτων, Περί των επιπλεόντων σωμάτων, την επιστολή με τον τίτλο Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη κ.ά. Πιστεύεται ότι η πρώτη αντιγραφή στο παλίμψηστο έγινε από κάποια αρχαιότερη πηγή. Σε παλίμψηστα υπάρχουν έργα του Κικέρωνα, του Πλινίου, του Τερεντίου, κ. ά.

Οι κύλινδροι και οι Κώδικες

Την περγαμηνή και τον πάπυρο τα είχαν σε φύλλα ή σε κύλινδρο. Όταν χρησιμοποιούσαν φύλλα τα ένωναν και έτσι δημιουργούσαν ένα είδος βιβλίου που ονομαζόταν Κώδικας (σωμάτιο ή Codex στα Λατινικά). Ο πιο παλιός Ελληνικός κώδικας που σώζεται είναι από τον 4ο μ.Χ. αιώνα και λέγεται Σιναϊτικός Κώδικας είναι ένα χειρόγραφο της Αγίας Γραφής στην Ελληνική γλώσσα. Υπάρχουν ακόμα δύο ο Αλεξανδρινός και ο Βατικανός. Παλαιότερα έκαναν κώδικες από μικρούς ξύλινους πίνακες που τους ένωναν με ιμάντα.

Δύο τύπους του κώδικα είχαν α) με ένα μόνο τεύχος και πολλά φύλλα, διπλωμένα στη μέση και δεμένα, β) με περισσότερα τεύχη ενωμένα και διπλωμένα στα δύο. Επειδή συνήθως είχαν τέσσερα δίφυλλα τεύχη είχαν ονομασία **τετράς**, (σήμερα τετράδιο). Το τετράδιο είχε οκτώ φύλλα και δεκαέξι σελίδες, (σημερινό 16σέλιδο). Υπήρχαν και χειρόγραφα με διαφορετικό αριθμό σελίδων.

Όταν τελείωναν με τη δημιουργία των τευχών, γινόταν το χαράκωμα της περγαμηνής με κάθετες και οριζόντιες γραμμές, που καθόριζαν το χώρο της στήλης του κειμένου και των περιθωρίων. Το γράψιμο γινόταν πριν από τη βιβλιοδεσία και ο γραφέας, έπρεπε να υπολογίσει την ποσότητα της ύλης και να καθορίσει τα τεύχη και τις σελίδες. Ακόμα έκαναν και αρίθμηση των σελίδων στο μέσο του πάνω μέρους. Στα **Μαθηματικά** αλλά και σε άλλα έργα έκαναν και εικονογράφηση των κωδίκων.

Το χαρτί

Η ώθηση για τη διάδοση της γνώσης σε όλους τους ανθρώπους έγινε με το χαρτί και την τυπογραφία. Όλοι σήμερα χρησιμοποιούμε χαρτί για να γράψουμε, για περιτύλιγμα, για φίλτρα, για καθαριότητα, για εκτύπωση φωτογραφιών, κ.ά. Πως γίνεται το χαρτί;

Το χαρτί είναι βιομηχανικό είδος και αποτελείται από ίνες κυτταρίνης (φυτικές από βαμβάκι, λινάρι, ξύλο), αλλά και από τεχνητές ή ορυκτές ίνες. Τα υλικά με χημική κατεργασία απαλλάσσονται από κάποιες ουσίες, προστίθενται κάποια προϊόντα όπως ρητίνη και κόλλες, ύστερα διυλίζονται και μπαίνουν στην χαρτοποιητική μηχανή η οποία με την προσθήκη βοηθητικών προϊόντων παρασκευάζει τα διάφορα είδη χαρτιού.

Το χαρτί δεν έγινε από την μια μέρα στην άλλη. Οι Κινέζοι είχαν κατασκευάσει χαρτί από ύφασμα κάποιους αιώνες πριν από το 105 μ.Χ., που δημιούργησε χαρτί σαν το σημερινό ο Τσάι Λουν αξιωματούχος της αυλής της δυναστείας των Χαν. Ο Τσάι Λουν κατασκεύαζε χαρτί με υλικά όπως τον φλοιό δέντρων, ίνες κάνναβης, κουρέλια και μετάξι.

Στο Σινικό τείχος το 1907 βρέθηκαν επιστολές από το έτος 137 γραμμένες σε χαρτί. Το χαρτί παρασκευαζόταν με το χέρι μέχρι τον 18ο αιώνα. Οι μέθοδοι παρασκευής χαρτιού ήταν ίδιες για πολλά χρόνια. Το 18ο αιώνα οι πρώτες ύλες δεν επαρκούσαν έτσι χρησιμοποίησαν το ξύλο και νέες μεθόδους για παρασκευή χαρτοπολτού και τη μηχανική παρασκευή του.

Παραγωγή χαρτιού στην Κίνα

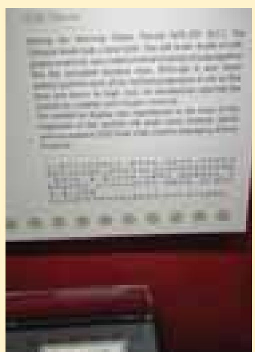
Παραγωγή χαρτιού το Μεσαίωνα

Το 1798 επινοήθηκε η μηχανή παρασκευής χαρτιού από το Γάλλο Nichola Louis Robert, για να ακολουθήσει η σημερινή κυλινδρική χαρτοποιητική μηχανή. Τα μυστικά για το χαρτί από τους Κινέζους τα πήραν οι Άραβες. Το αρχαιότερο χρονολογημένο Αραβικό χειρόγραφο σε χαρτί είναι από το 866 και το Βυζαντινό από το 1052. Το χαρτί έγινε περιζήτητο, ιδρύθηκαν χαρτοποιίες στη Μέση Ανατολή, στην Μικρά Ασία, την Αφρική, τη Σικελία, και το 14ο αιώνα στις Ευρωπαϊκές χώρες.

Η τυπογραφία

Η ανάγκη της επικοινωνίας και της πληροφόρησης των ανθρώπων δια του γραπτού λόγου έφερε την **τυπογραφία.** Τυπογραφία είναι η τέχνη να εκτυπώνουμε σε χαρτί (και όχι μόνο) γραπτά κείμενα και εικόνες. Η πρωτόγονη τυπογραφία είναι **οι σφραγίδες**. Οι Κινέζοι από τον 6ο αιώνα για την αναπαραγωγή κειμένων χρησιμοποιούσαν σφραγίδες από ξύλο ή πέτρα πάνω στις οποίες είχαν σκαλίσει το κείμενο.

Αργότερα η επινόηση των κινητών μεμονωμένων στοιχείων (γράμματα και σύμβολα) τα οποία τοποθετούσαν σε πλαίσιο (στοιχειοθεσία) βοήθησε στην εξέλιξή της τυπογραφίας στη σημερινή της μορφή. Αρχικά η τυπογραφία γινόταν χειρωνακτικά. Τα μεταλλικά μεμονωμένα στοιχεία (γράμματα και σύμβολα) τα τοποθετούσαν σε πλαίσιο (στοιχειοθεσία) με μέγεθος μιας σελίδας. Αφού μελάνωναν τα στοιχεία τα πίεζαν στο χαρτί για να πάρουν το αποτύπωμά τους. Η τυπογραφία είχε επομένως πρώτα την στοιχειοθεσία και ακολουθούσε η εκτύπωση. Ύστερα διέλυαν το πλαίσιο με τα στοιχεία για να δημιουργήσουν με τον ίδιο τρόπο την επόμενη σελίδα. Αυτό ήταν η πρώτη εφεύρεση που μαζί με το πιεστήριο οδήγησε τον Γουτεμβέργιο τον 15^{o} αιώνα να γίνει ο εφευρέτης της τυπογραφίας, αν και οι ερευνητές δεν συμφωνούν. Εφευρέτης πάντως πρέπει να θεωρηθεί εκείνος που είχε πρώτος την έμπνευση να χρησιμοποιήσει τα κινητά στοιχεία και την πιεστική μηχανή(πιεστήριο) με την οποία θα εκτύπωνε το κείμενο που έφτιαξε με τα κινητά στοιχεία. Το σωστό είναι ότι η τυπογραφία είναι αποτέλεσμα ερευνών πολλών ετών από πολλούς λαούς.



Από την έκθεση το 2018 με θέμα την παρασκευή χαρτιού στην Κίνα

Κινέζικη σφραγίδα

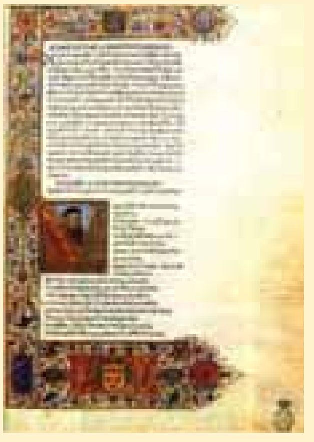
Οι Ευρωπαϊκές πόλεις γρήγορα απέκτησαν τυπογραφεία και η φθηνή ύλη γραφής βοήθησε να κυκλοφορήσουν πολλά έργα σε χιλιάδες αντίτυπα που έφεραν ριζικές αλλαγές στη κοινωνία.

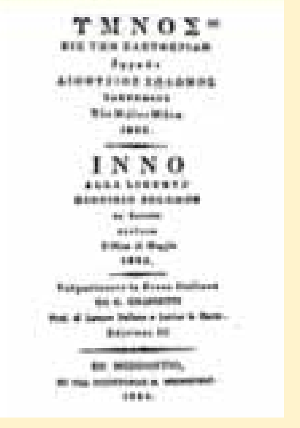
Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, με τις μεθόδους της λινοτυπίας, του όφσετ και τις φωτομηχανικές, έγιναν πολλά βιβλία, εφημερίδες και περιοδικά. Έγχρωμες ή ασπρόμαυρες εκτυπώσεις γίνονται σε χαρτί, σε υφάσματα, σε πλαστικά, σε μέταλλα, κλπ. Από το πρώτο χειροκίνητο πιεστήριο φτάσαμε στα σύγχρονα ταχυπιεστήρια και τυπογραφικά εργοστάσια. Πάντως ο **Γουτεμβέργιος** θεωρείται ο «πατέρας» της μηχανικής εκτύπωσης και ο Ολλανδός **Λαυρέντιο Κοστέρστο Χάρλεμ**, ο εφευρέτης-κατασκευαστής των κινητών τυπογραφικών στοιχείων(μεταλλικά). Μη μεταλλικά κινητά τυπογραφικά στοιχεία είχαν εφεύρει οι Κινέζοι από τον 10^{ο} αιώνα. *[Υπάρχουν αρκετά μουσεία και εκθετήρια για την τυπογραφία. Στην Ελλάδα ένα τέτοιο είναι το Τεχνικό Μουσείο Θεσσαλονίκης]*

Τα πρώτα βιβλία που τυπώθηκαν ήταν:

- Η **Βίβλος** που τύπωσε ο Γουτεμβέργιος σε 180 αντίτυπα το **1455**.
- Τα «**Άπαντα» του Ομήρου το 1488 στη** Φλωρεντία.
- Η "**Γραμματική**" του Κωνσταντίνου Λάσκαρη, το **1476** στο Μιλάνο.

Μετά την επανάσταση του 1821, μια σειρά από τυπογραφεία δημιουργούνται **στην Καλαμάτα**, **στο Μεσολόγγι**, **στην Αθήνα** και **στην Ύδρα**, με τη συνδρομή ευρωπαίων φιλελλήνων τυπογράφων.





ΥΜΝΟΣ

INNO

- Η επίσημη τυπογραφία στην Ελλάδα, ονομάσθηκε «Τυπογραφία της Διοικήσεως», οργανώθηκε από τις πρώτες κυβερνήσεις το **1821** για να τυπωθούν σχολικά βιβλία και αποφάσεις της Κυβέρνησης.
- Το **1825** στο τυπογραφείο του Μεσολογγίου τυπώθηκε ο **Εθνικός μας Ύμνος** του Διονυσίου Σολωμού, στα Ελληνικά και στα Ιταλικά.

Το Βιβλίο

Το όνομα του βιβλίου προήλθε από την φοινικική πόλη **Βύβλο** από την οποία προμηθεύονταν στα αρχαία χρόνια κατεργασμένο πάπυρο. Αλλά και σε άλλες γλώσσες η λέξη προήλθε από το ξύλο ή το φλοιό του δένδρου. Το βιβλίο είναι το κατεξοχήν μέσο διάδοσης της γνώσης. Συνδέθηκε περισσότερο με το σχολείο και τη διδασκαλία, τη λογοτεχνία, την επιστήμη, τη θρησκεία. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για τη γραφή ενός βιβλίου. Παλαιότερα στο σχολείο οι μαθητές **είχαν το μάθημα της καλλιγραφίας.** Στην καθημερινή ζωή τότε όλα γίνονταν χειρόγραφα.

Τα μαθηματικά βιβλία ήταν δύσκολο να γίνουν **μηχανικά** γι' αυτό πολλά γράφτηκαν από καλλιγράφους. Σήμερα τα πράγματα απλοποιήθηκαν με την δημιουργία του ηλεκτρονικού βιβλίου. Το **ηλεκτρονικό βιβλίο** είναι αυτό που παράγεται ή μετατρέπεται σε ηλεκτρονική μορφή μέσω Η/Υ. Είναι ένα σύνολο πληροφοριών που εμφανίζονται σε ψηφιακή μορφή με τρόπο που να μοιάζει στο έντυπο βιβλίο. Δημιουργείται με προγράμματα π.χ. στα Windows για τη συγγραφή και τη σελιδοποίηση όπως είναι το **MS Word**, το **Open Office Writer**, κ.ά. Τα ηλεκτρονικά βιβλία δεν χρειάζονται μεγάλες βιβλιοθήκες, δεν έχουν βάρος, μπορούμε να τα έχουμε μαζί μας παντού. Όμως όλα αυτά αν κοπεί το ρεύμα **δεν λειτουργούν**. Το έντυπο βιβλίο όμως ήταν χειροπιαστό, ενεργοποιούσε όλες τις αισθήσεις μας, την αφή, την όραση, την όσφρηση από την **μυρωδιά του χαρτιού**, τη γεύση αφού σαλιώναμε το δάκτυλο να γυρίσουμε το φύλλο και την ακοή με το θόρυβο που έκανε το φύλλο. Η εξέλιξη της τεχνολογίας έφερε βέβαια και πολλές άλλες ευκολίες. Προβλέπεται ότι τη **δεξιότητα της γραφής** σε λίγα χρόνια θα την έχουν μόνο **λίγοι** άνθρωποι, οι υπόλοιποι θα πιέζουν μόνο πλήκτρα ή θα ομιλούν και ο λόγος θα γίνεται αυτόματα ψηφιακό κείμενο.

Οι παλιές και οι σύγχρονες Βιβλιοθήκες

Από την παλιά βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

Μέχρι σήμερα όλοι έχουμε βιβλία και βιβλιοθήκη στο σπίτι μας. Όμως το ηλεκτρονικό βιβλίο τις εξαφανίζει σιγά-σιγά και δημιουργούνται οι ηλεκτρονικές βιβλιοθήκες. Βιβλιοθήκες είχαν τα σχολεία, τα πανεπιστήμια, τα μοναστήρια, οι Δήμοι, το κράτος. Οι λαοί της Μεσογείου που είχαν αναπτύξει πολιτισμό, επιστήμες, ιστορία, πλούτο, αποφάσισαν να δημιουργήσουν μια μεγάλη βιβλιοθήκη, μια παγκόσμια βιβλιοθήκη, μια βιβλιοθήκη που θα συγκέντρωνε κάθε χειρόγραφο, κάθε γραπτό κείμενο, κάθε πάπυρο ή περγαμηνή, με όλες τις γνώσεις των ανθρώπων. Έτσι το **3ο π.Χ. αιώνα**, με απόφαση του **Πτολεμαίου Α΄** δημιούργησαν την βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας στην Αίγυπτο, στην πόλη που ίδρυσε ο Μέγας Αλέξανδρος και έγινε εμπορικό κέντρο, κέντρο πολιτισμού, γραμμάτων, τεχνών και επιστημών. Η **ιδέα** ήταν του **Αριστοτέλη** αλλά ο **Δημήτριος Φαληρεύς** (345-280 π.Χ.) φιλόσοφος, ρήτορας και πολιτικός της αρχαίας Αθήνας έπεισε για την υλοποίησή της, τον Πτολεμαίο Α΄ (367-282π.Χ.) που ήταν Έλληνας στρατηγός του Μεγάλου Αλεξάνδρου, σατράπης και βασιλιάς της Αιγύπτου.

Τα Μαθηματικά και η σημαντική Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

Η βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, «**το πρώτο πανεπιστήμιο στην ιστορία**» γράφει ο “νομπελίστας” (βραβείο Shaw) **Δημήτρης Χριστοδούλου**, έγινε το μεγαλύτερο εκδοτικό **κέντρο του κόσμου**, και συγκέντρωσε ένα τεράστιο αριθμό χειρόγραφων από όλο τον κόσμο. Η βιβλιοθήκη είχε τρία κτίρια και σύμφωνα με τον Στράβωνα, περιβάλλονταν από αυλές. Στο κέντρο ήταν η μεγάλη αίθουσα, ένα κυκλικό δώμα με παρατηρητήριο στην οροφή του και το Μουσείο. Γύρω από το δώμα υπήρχαν αίθουσες διδασκαλίας. Οι χώροι στους οποίους στεγάζονταν οι πάπυροι ήταν στις εξωτερικές αίθουσες και στη μεγάλη αίθουσα. Οι πάπυροι ταξινομούνταν πάνω σε σχάρες τυλιγμένοι σε λινό ή δερμάτινο κάλυμμα. Στη Ρωμαϊκή εποχή τα χειρόγραφα δέθηκαν και έγιναν **κώδικες** (βιβλία) και έμπαιναν σε ερμάρια (κιβώτια). Η βιβλιοθήκη της Περγάμου ήταν ανταγωνιστική και για να την διαλύσουν σταμάτησαν τις εξαγωγές παπύρου. Έτσι η **Πέργαμος** που είχε κτηνοτροφία **ανακάλυψε την περγαμηνή**.

Ο Πτολεμαίος και οι διάδοχοί του έστελναν επιστολές σε όλο τον κόσμο και ζητούσαν να τους δανείσουν όλα τα έργα που είχαν. Όταν τα έπαιρναν τα αντέγραφαν και τους επέστρεφαν το αντίγραφο. Αυτό έγινε και με τους Αθηναίους που έστειλαν τα έργα του **Ευριπίδη**, του **Αισχύλου** και του **Σοφοκλή**. Επίσης ερευνούσαν τα πλοία που περνούσαν από το λιμάνι της Αλεξάνδρειας, έπαιρναν τους πάπυρους που είχαν, δημιουργούσαν αντίγραφα και τους επέστρεφαν. Η βιβλιοθήκη συγκέντρωσε περισσότερους από **800.000 πάπυρους**. Η συσσώρευση της γνώσης στην Βιβλιοθήκη είχε ως αποτέλεσμα την άνθηση των επιστημών και ιδιαίτερα **των Μαθηματικών**.

Η βιβλιοθήκη έδωσε τη δυνατότητα στους Αλεξανδρινούς μαθηματικούς να αναπτύξουν τη Γεωμετρία, τη θεωρία των αριθμών, την Αστρονομία και πολλά άλλα θέματα. Ο Ευκλείδης δημιούργησε την Γεωμετρία που «**είναι το πρώτο μεγάλο μνημείο στην ιστορία της μαθηματικής σκέψης και η επίδρασή του στην μετέπειτα επιστήμη είναι τεράστια**», αναφέρει ο κ. **Δημήτρης Χριστοδούλου.** θεωρεί δε πολύ σημαντική την απόδειξή του Ευκλείδη για το σύνολο των πρώτων αριθμών ότι είναι άπειρο.

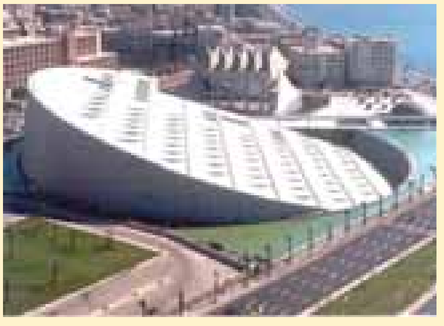
Ο **Ερατοσθένης διευθυντής της βιβλιοθήκης,** επινόησε μέθοδο για να βρίσκει πρώτους αριθμούς (κόσκινο του Ερατοσθένη), μέτρησε την ακτίνα της Γης, εφηύρε τον σφαιρικό αστρολάβο, συνεργάστηκε με τον Αρχιμήδη και τους μαθηματικούς στις Συρακούσες. Ο **Αρίσταρχος** εφάρμοσε την Αλεξανδρινή τριγωνομετρία, εκτίμησε την απόσταση και το μέγεθος Ηλίου, Σελήνης και διατύπωσε τη θεωρία του ηλιοκεντρικού συστήματος. **Οι Αλεξανδρινοί** έκαναν λεπτομερείς παρατηρήσεις και με μαθηματικές μεθόδους μετέτρεψαν την **αστρονομία σε εφαρμοσμένη επιστήμη**.

Για την Αίγυπτο μια τέτοια γνώση ήταν ουσιαστική, γιατί είχαν αφενός τις **πλημμύρες του Νείλου** και αφετέρου τη **ναυσιπλοΐα**, για την εξαγωγή παπύρου και σιτηρών σε όλες τις χώρες της Μεσογείου. Βέβαια οι Αλεξανδρινοί ανέπτυξαν και άλλες επιστήμες όπως της ανατομίας, της χημείας, κλπ. **Αλεξανδρινοί μαθηματικοί** ήταν και οι: ο Κτησίβιος, ο Κόνων, ο Ήρων, ο Πάππος, ο Διόφαντος, ο Θέων, η Υπατία, κ.ά.

Η σπουδαία αυτή βιβλιοθήκη όμως, μέσα από τις σφοδρές κοινωνικές, θρησκευτικές και πολιτικές αντιθέσεις κατεστράφηκε. Η καταστροφή άρχισε με την πυρκαγιά του **Ιουλίου Καίσαρα** το 48 π.Χ., από τους Ρωμαίους που **έκλεψαν** πολλά χειρόγραφα και τα έστειλαν στη Ρώμη, από τον Διοκλητιανό που με εντολή του τον 3ο αιώνα **έκαψαν** ότι είχε σχέση με τις φυσικές επιστήμες και τη Χημεία, ακολούθησαν οι σφαγές και οι **διωγμοί του Καρακάλλα**. Η καταστροφή συνεχίστηκε από τους χριστιανούς **Θεοδόσιο και Θεόφιλο** στα τέλη του 4ου αιώνα, μάλιστα θανάτωσαν με λιθοβολισμό και την **Υπατία** κόρη του Θέωνα. Ότι είχε απομείνει τα πήραν οι Άραβες και κάποιοι **λόγιοι** χριστιανοί το **642** που ευτυχώς δημιούργησαν αντίγραφα και διέσωσαν πολλά έργα.

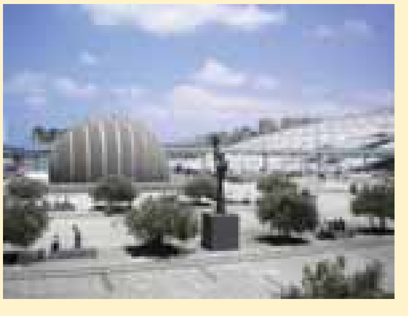
Η σημερινή βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

Το 2002 η Αιγυπτιακή κυβέρνηση, σε συνεργασία με την UNESCO και την Ελλάδα δημιούργησαν τη **νέα βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας** στην ίδια περιοχή. Με σύγχρονη αρχιτεκτονική και με τις περιγραφές για την μορφή της αρχαίας βιβλιοθήκης έγινε προσπάθεια να ξαναζωντανέψουν ένα μύθο, ένα θαύμα της αρχαιότητας.




Η Νέα Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας έχει σύγχρονη αρχιτεκτονική, μοναδικές συλλογές πάνω σε θέματα αρχαίων και μεσαιωνικών πολιτισμών. Σχεδιάστηκε να έχει κλίση προς τη θάλασσα και ένα μέρος της είναι βυθισμένο σε δεξαμενή νερού, ώστε να συμβολίζει τον αρχαίο αιγυπτιακό ήλιο που προβάλλει από τη θάλασσα. Έχει θέα προς τη Μεσόγειο και αεροδιάδρομο σε σχήμα βέλους που την ενώνει με το Πανεπιστήμιο. Όλο το κτίριο έχει **επένδυση** από **γρανίτη του Ασουάν**, πάνω στον οποίο είναι σχεδιασμένα καλλιγραφικά γράμματα και επιγραφές **από όλους τους πολιτισμούς του κόσμου.**

Οι ξεναγήσεις στη βιβλιοθήκη γίνονται και στα Ελληνικά. Στη νέα βιβλιοθήκη μπορούμε να βρούμε πληροφορίες για παλιά αλλά και σύγχρονα επιστημονικά θέματα. Ακόμα η βιβλιοθήκη έχει μουσείο επιστημών, πλανητάριο, σχολή πληροφορικής, ινστιτούτο καλλιγραφίας.

Η βιβλιοθήκη έχει **70 περίπου χιλιάδες τετραγωνικά μέτρα**, με 3.500 θέσεις μελέτης, με **8-9 εκατομμύρια βιβλία**, χιλιάδες χάρτες και χειρόγραφα. Στη νέα βιβλιοθήκη θέση έχει και το ηλεκτρονικό βιβλίο. Δεκάδες βάσεις δεδομένων με σπάνιες εκδόσεις, μουσικά θέματα, βίντεο και άλλα. Οικονομική και σε είδος βοήθεια έχει από όλες τις κυβερνήσεις. Σε πολλές χώρες υπάρχουν πολύ μεγάλες βιβλιοθήκες ενώ τα τελευταία χρόνια γίνονται οι ψηφιακές όπως η Παγκόσμια Ψηφιακή Βιβλιοθήκη (WDL) -(World Digital Library), η Διεθνής ψηφιακή εγκυκλοπαίδεια Βικιπαίδεια (Wikipedia) ελεύθερου περιεχομένου, που με το γρήγορο ευρετήριο της Google έχουμε όποια πληροφορία θέλουμε σε λίγα λεπτά. Μάλιστα το 2013, ένας αστεροειδής της κύριας ζώνης αστεροειδών πήρε το όνομά του από τη Wikipedia και ονομάζεται **274301 Wikipedia**.

Όταν οι γυναίκες γράφουν ιστορία

Φλωρεντία Φουντουκλή: Η πρώτη φοιτήτρια στο τμήμα Μαθηματικών

Οι μαθηματικές σπουδές τον 19ο αιώνα ήταν άβατο για τις γυναίκες. Άλλωστε υπήρχαν κάποιοι που

πρέσβευαν ότι τα Μαθηματικά ως επιστήμη δεν ταιριάζουν στη γυναικεία φύση. Ο αγώνας για το άβατο των πανεπιστημιακών σχολών άρχισε να αποδίδει στα τέλη του 19ου αιώνα. Η Φλωρεντία Φουντουκλή, από το Αρσάκειο, ήταν η πρώτη που πέτυχε να εγγραφεί στο τμήμα Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου Αθηνών. Γεννήθηκε στην Αθήνα στις **9 Μαρτίου 1869**. Ο πατέρας της, Αλέξανδρος Φουντουκλής, κατάγονταν από την Κύπρο και ήταν συγγενής με την επιφανή και ευκατάστατη οικογένεια Οικονομίδη. Ήταν στρατιωτικός, απόφοιτος τής Στρατιωτικής Σχολής Ευελπίδων με τετραετή εκπαίδευση στο εξωτερικό. Διατέλεσε μάλιστα και καθηγητής στην Σχολή. Η μητέρα της, Ευφροσύνη ήταν κόρη τού Ηλία Κουσκούρη από τον Μυστρά τής Σπάρτης. Αδελφή τής μητέρας της, ήταν η Πολυτίμη Κουσκούρη (1820-1854), **η πρώτη Ελληνίδα δασκάλα**. Φαίνεται ότι η Φλωρεντία επηρεάστηκε αρκετά από την προσωπικότητα της θείας της. Η διδασκαλία των Μαθηματικών που έγινε, σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, από τη θεία της, υποδηλώνει τον θαυμασμό της και δεν αποκλείεται έτσι να δημιουργήθηκε το δικό της ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά. Η Φλωρεντία μαθήτευσε, αρχικά, στο «Ελληνικόν Παρθεναγωγείον» τής Αικατερίνης Λασκαρίδου (1842-1916), η οποία είχε παρακολουθήσει τα παιδαγωγικά μαθήματα της φροβελιανής μεθόδου (fröbelian method), το 1880, στη Δρέσδη τής Γερμανίας. Στη συνέχεια φοίτησε στο Αράκειο Παρθεναγωγείο, από όπου και αποφοίτησε. Το 1885 πηγαίνει στο Παρίσι, όπου και γίνεται δεκτή στη Σορβόνη, όπου και ξεκίνησε σπουδές στα Μαθηματικά. Το 1886 σπουδάζει στην **Augusta Schule** τού Βερολίνου και επιστρέφει στην Ελλάδα τον Φεβρουάριο τού 1888. Αυτές οι σπουδές της, έπαιξαν πιθανότατα, καταλυτικό ρόλο στην αποδοχή της από το Πανεπιστήμιο της Αθήνας. Αξίζει να αναφερθεί ότι κατά την παραμονή της στο Βερολίνο ανέπτυξε το **ποιητικό της ταλέντο**. Από τον ίδιο οικογενειακό κύκλο της Φλωρεντίας δεν αποκλείεται να προερχόταν και ο μαθηματικός Μιχαήλ Ορ. Φουντουκλής, ο οποίος δίδαξε Μαθηματικά στο Πολυτεχνείο τής Αθήνας, ως βοηθός, αρχικά, τη δεκαετία τού 1880 και ως υφηγητής από το 1893. Από τις ιστορικές αυτές συσχετίσεις διαφαίνεται ότι ο οικογενειακός περίγυρος τής Φλωρεντίας Φουντουκλή, ευνοούσε την επιμονή της να σπουδάσει Μαθηματικά. Τελείωσε τις σπουδές της το 1897-1898. Από το **1893** μέχρι το 1906 διηύθυνε το ιδιωτικό «Νέον Ελληνικόν Παρθεναγωγείον» στην Αθήνα, το οποίο λειτούργησε με βάση τα γερμανικά πρότυπα. Πέθανε στις 5 Φεβρουαρίου 1915 στην Ιταλία.

Πηγές: Αρχείο Αρσακείου, Βικιπαίδεια, protothema.gr, historyarsakeio.gr, 24grammata

Ιωάννα Στεφανόπολι: Η πρώτη γυναίκα φοιτήτρια Ελληνικού Πανεπιστημίου

Η Ιωάννα Στεφανόπολι [20 Οκτωβρίου 1875 - 27 Μαρτίου 1961, Αθήνα]. Ήταν κόρη του δημοσιογράφου

Αντώνιου Στεφανόπολι, εκδότη της γαλλόφωνης εφημερίδας ***Messager d' Athènes*** (Ο αγγελιοφόρος της Αθήνας) γεννημένου στην Κορσική από οικογένεια με καταγωγή από τη **Μάνη** που είχε εγκατασταθεί στην Αθήνα. Ο πατέρας της, αν και **δεν** απαρνήθηκε ποτέ τη γαλλική του υπηκοότητα, ήταν θερμός εθνικιστής και χρησιμοποιούσε την εφημερίδα του ως όχημα για να περάσει η επίσημη ελληνική άποψη σε ένα διεθνές κοινό. Οπαδός της **Μεγάλης Ιδέας**, μεγάλωσε με ανάλογα ιδανικά την κόρη του. Τα πρώτα γράμματα τα διδάχθηκε κατ'οίκον από τη θεία της, κα Σμόλτσε, μετέπειτα διευθύντρια του **Παρθεναγωγείου της Παλλάδος** στην Κωνσταντινούπολη. Σε ηλικία 10 ετών γράφτηκε στο **Ελληνικό Παρθεναγωγείο** της Αικατερίνης Λασκαρίδη, όπου και διακρίθηκε. Μετά την ολοκλήρωση των σπουδών της, επιθυμούσε να φοιτήσει σε γυμνάσιο, όμως εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν Θηλέων. Ύστερα από διαβήματα της δώθηκε η άδεια να παρακολουθήσει στο σπίτι της, μαθήματα του Γυμνασίου με αναγνωρισμένους καθηγητές οι οποίοι αργότερα κατέθεσαν σε ειρηνοδικείο, πως είχαν διδάξει τα καθορισμένα από τον νόμο μαθήματα **και** της αναγνωρίστηκε απολυτήριο Γυμνασίου. Τον Ιούνιο του 1889 συμμετείχε επίσης σε απολυτήριες εξετάσεις του Γυμνασίου, όπου διακρίθηκε και πήρε τον **υψηλότερο** βαθμό ανάμεσα σε 60 μαθητές. Τον Σεπτέμβριο του 1890, σε ηλικία 15 ετών, ήταν μια από τρεις γυναίκες, μαζί με τις **Φλωρεντία Φουντουκλή και Ελένη Ρούσσου**, που έκαναν αίτηση για εισαγωγή στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Τα μέχρι τότε ανάλογα αιτήματα γυναικών, που είχαν ξεκινήσει από το **1879**, είχαν απορριφθεί με το αιτιολογικό, πως τα δευτεροβάθμια σχολεία Θηλέων, στα οποία είχαν φοιτήσει, δεν ήταν κανονικά Γυμνάσια και αντιστοιχούσαν στον κατώτερο κύκλο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και όχι τον ανώτερο. Τελικά έγινε δεκτό το αίτημα της από το Υπουργείο Παιδείας, το οποίο και αποφάσισε να επιτρέψει στην Στεφανόπολι να εγγραφεί στη Φιλοσοφική Σχολή. Η Στεφανόπολι φοίτησε ως επισκέπτρια για μερικούς μήνες και συνέχισε τις σπουδές της στο Παρίσι. Μετά την αποφοίτηση από το Παρίσι, συνέχισε τις σπουδές της και έκανε δημοσιογραφική καριέρα με μεγάλη επιτυχία. **Πηγές:** Βικιπαίδεια, protothema.gr, maleviziotis.gr

Σεβαστή Καλλισπέρη (1858-1953): Η πρώτη Ελληνίδα φοιτήτρια στη Σορβόνη

Γεννήθηκε το 1858 στην Αθήνα. Γονείς της ήταν οι Νικόλαος και Μαριγώ Καλησπέρη. Ο πατέρας της, Καλύμνιος, που έλαβε μέρος στην Επανάσταση του 1821, μετά την επανάσταση είχε υπηρετήσει επιθεωρητής Δημοτικών σχολείων στη Σάμου (1830), δικαστής στην Αθήνα (1844) και νομάρχης Μεσσηνίας (1855).

Τελείωσε τη Σχολή Χιλλ και στη συνέχεια, παρά τις προσπάθειές της δεν έγινε δεκτή στο Πανεπιστήμιο των Αθηνών, δεδομένου ότι αυτό απέρριπτε τις αιτήσεις μαθητριών [η πρώτη φοιτήτρια, η Ιωάννα Στεφανόπολι, έγινε δεκτή πέντε χρόνια αργότερα το 1890]. Το 1885 άρχισε τις σπουδές της στη Φιλοσοφική Σχολή του πανεπιστημίου της Σορβόνης ως τακτική φοιτήτρια. Έλαβε το πτυχίο της το 1891. Επέστρεψε στην Ελλάδα και διορίστηκε δασκάλα των γαλλικών στο Αρσάκειο.

Πηγές: Βικιπαίδεια, maleviziotis.gr, 24γράμματα, protothema.gr

Ελίνα Χατζηδημητρίου: Αποφοίτηση από το μαθηματικό τμήμα με πτυχίο 10

Η Ελίνα Χατζηδημητρίου, απόφοιτος του Τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ, έλαβε βαθμό πτυχίου 10, το πρώτο 10 της Σχολής Θετικών Επιστημών του Αριστοτελείου σε όλα τα χρόνια λειτουργία της, μίλησε για τα **άτομα** που την **ενέπνευσαν** και εκείνα που θέλει να **εμπνεύσει** η **ίδια** και εξήγησε γιατί δίνει ψήφο εμπιστοσύνης στο **ελληνικό** δημόσιο πανεπιστήμιο. Το φύλο μου στην προκειμένη περίπτωση, πιστεύω ότι τονίστηκε, επειδή το πλήθος των γυναικών που έχουν φοιτήσει στο Τμήμα Μαθηματικών από την ίδρυση της Σχολής είναι μικρότερο συγκριτικά με αυτό των αντρών και εννοείται πως θα αισθανόμουν μεγάλη χαρά και τιμή, αν μπορούσα να **εμπνεύσω** νέα κορίτσια να **πιστέψουν** στον **εαυτό** τους και να κυνηγήσουν το πάθος, τους στις θετικές επιστήμες. Η **αγάπη** της για τα **Μαθηματικά γεννήθηκε** στο **Λύκειο** και ιδιαίτερα μετά την Β' τάξη του Λυκείου, οπότε και άρχισε να τα μελετά πιο συστηματικά και με μεγαλύτερο ζήλο σε σχέση με τα υπόλοιπα μαθήματα. "*…Θα έλεγα ότι ανακάλυψα το πάθος μου αυτό στο σχολείο, τόσο μέσα από **προσωπική** προσπάθεια και ενασχόληση με το αντικείμενο, όσο και με τη βοήθεια των καθηγητών μου, τους οποίους σέβομαι και εκτιμώ πολύ. Στο οικογενειακό μου περιβάλλον **δεν είχα κάποιον** που να ασχολείται καθαρά με τα Μαθηματικά. Οι γονείς μου, τα χρησιμοποιούν σαν εργαλείο για τη δουλειά τους, αλλά τίποτα περισσότερο…*". Στις **πανελλαδικές εξετάσεις** στο μάθημα των Μαθηματικών έγραψε **19,3**. Στη θετική κατεύθυνση είχε καταλήξει από την αρχή του Λυκείου, αν και όπως, εξομολογείται «*νωρίτερα ίσως να είχα σκεφτεί και τη θεωρητική, καθώς ήμουν πολύ καλή στα μαθήματα της **γλώσσας**, αλλά ήταν μία ιδέα που έφυγε γρήγορα απ' το μυαλό μου*».

«*Η **φυσική** και η **χημεία**, όπως τις διδάχθηκα στο Λύκειο, ήταν περισσότερο μαθήματα **μεθοδολογίας**. Γι' αυτό τον λόγο, καθώς είμαι άτομο που του **αρέσουν** οι **προκλήσεις**, στράφηκα στα Μαθηματικά, όπου αναζητούσα συνεχώς νέα προβλήματα και νέους τρόπους επίλυσης που δεν μου είχε διδάξει κανείς. Την **τελική απόφαση** να σπουδάσω στο τμήμα Μαθηματικών την πήρα στην Γ' Λυκείου. Μέχρι τότε ήμουν ανάμεσα στο Μαθηματικό και στην Πληροφορική. Μεταξύ των δύο επέλεξα τελικά το Μαθηματικό, επειδή θεώρησα πως θα αποκτούσα **ευρύτερο φάσμα γνώσεων** και πολύ δυνατές θεωρητικές βάσεις, έτσι ώστε αν στο μέλλον ήθελα να ασχοληθώ και με την Πληροφορική, να μπορούσα άνετα να το κάνω*», εξηγεί. Διευκρινίζει πως το **«απόλυτο 10»** δεν ήταν από την αρχή **στόχος**. «Ήταν ένα όνειρο όταν πρωτομπήκα στη σχολή, το οποίο μετεξελίχθηκε σε στόχο πολύ αργότερα, ίσως μετά το τρίτο έτος των σπουδών μου, όταν δηλαδή είχα περάσει όλα τα υποχρεωτικά μαθήματα και πίστεψα ότι θα μπορούσα να τα καταφέρω». Σε ό,τι αφορά τα κίνητρα πίσω από τον σχεδιασμό της για ακαδημαϊκή καριέρα λέει «*Δεν θα τη χαρακτήριζα ως **αυτοσκοπό**. Είναι απλά μία σκέψη που περνά έντονα από το μυαλό μου ιδίως το τελευταίο διάστημα, χωρίς όμως να αποκλείω άλλες επιλογές και επαγγελματικές προοπτικές. Προς το παρόν θα έλεγα ότι με ιντριγκάρει περισσότερο το κομμάτι της έρευνας, καθώς ίσως λόγω ηλικίας έχω πολλή όρεξη να ασχοληθώ και να ανακαλύψω νέα πράγματα. Στο μέλλον, όμως, έχοντας αποκτήσει περισσότερες γνώσεις και εμπειρία, πιστεύω πως θα με ενθουσιάσει εξ ίσου και το κομμάτι της διδασκαλίας*». Σε ό,τι αφορά το κυνήγι υψηλών στόχων ως φιλοσοφία ζωής σημειώνει: «*Γενικά θα έλεγα ότι εκφράζει τον τρόπο που λειτουργώ και στις υπόλοιπες πτυχές της ζωής μου, καθώς είμαι πολύ οργανωτική και προσπαθώ **συνεχώς** να **βελτιώνομαι** και να επιτυγχάνω το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα σε ό,τι κι αν ασχοληθώ. Ένα άλλο χαρακτηριστικό που εκφράζεται μέσω αυτού είναι και η τελειομανία που έχω σαν άνθρωπος, την οποία όμως δε θεωρώ προτέρημα και προσπαθώ να την ελαττώσω, καθώς το να κυνηγά κανείς το τέλειο είναι ιδιαίτερα **ψυχοφθόρο** και πολλές φορές ανούσιο*». Για τον τρόπο που τα Μαθηματικά επηρεάζουν τον τρόπο που λειτουργεί στην καθημερινότητά της παραδέχεται, πως την διακρίνει η πρακτική σκέψη, «*ωστόσο, δεν μπορώ να πω με σιγουριά πως ευθύνονται τα Μαθηματικά γι' αυτό και ότι δεν είναι απλά έτσι η ιδιοσυγκρασία μου σαν άνθρωπος*». Και καταλήγει «*Γενικά δεν έχω πολύ μακρόπνοα και μεγαλεπήβολα σχέδια και **προτιμώ** να αφοσιώνομαι στους στόχους μου στο προσεχές μέλλον. Ελπίζω όμως στην πορεία να καταφέρω να ασχοληθώ με την έρευνα και να έχω πολλές νέες ιδέες*». **Πηγές:** protohema.gr, Μακεδονία, hellasjournal.com, athensvoice

OSLO2022

Η 63^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Η 63^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 2022 διοργανώθηκε στο Όσλο από τη Νορβηγία από 6 μέχρι και 16 Ιουλίου 2022. Η διοργάνωση ήταν εξαιρετική και έγινε με φυσική παρουσία σε αντίθεση με τις διοργανώσεις των δύο τελευταίων ετών, οι οποίες λόγω της πανδημίας έγιναν εξ αποστάσεως με έδρα την Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας. Τη διοργάνωση είχε αναλάβει το Πανεπιστήμιο του Όσλο σε συνεργασία με τη Δήμαρχο της πόλης.

Η χώρα μας με 163 βαθμούς κατετάγη στην 26^{η} θέση μεταξύ 104 ομάδων που έλαβαν μέρος και ήταν έκτη μεταξύ των χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Συγκριτικά ήταν η δεύτερη καλύτερη κατάταξη μας μετά την Ολυμπιάδα του 2017 στο Ρίο της Βραζιλίας, όπου με 127 βαθμούς η Ελληνική ομάδα ήταν στην 12^{η} θέση. Οι 163 βαθμοί είναι οι περισσότεροι που έχει συγκεντρώσει η χώρα μας στις μέχρι τώρα συμμετοχές της.

Οι μαθητές που συμμετείχαν και τα μετάλλια που κατάκτησαν είναι οι εξής:

Φωτιάδης Πρόδρομος	**Γυμνάσιο –Λ.Τ. Νικηφόρου Δράμας**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Λιάμπας Παναγιώτης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Λιγνός Ορέστης	**Εκπαιδευτήρια Ελληνική Παιδεία**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Πετράκης Εμμανουήλ	**2^{o} ΓΕΛ Αγρινίου**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Τζαχρήστας Γεώργιος	**Δωδωναία Εκπαιδευτήρια Ιωαννίνων**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Κωνσταντινίδης Κων/νος	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Εύφημη μνεία**

Η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα είναι διαγωνισμός μεγάλης δυσκολίας και η επίτευξη ακόμη και ενός χάλκινου μεταλλίου είναι πολύ δύσκολη υπόθεση που σημαίνει ότι ο μαθητής που θα το επιτύχει, πέραν από ταλέντο, έχει και πολύ καλή προετοιμασία. Ο διαγωνισμός διαρκεί 2 ημέρες με τρία προβλήματα ανά ημέρα διαβαθμισμένης δυσκολίας με το μέτρο δυσκολίας των Ολυμπιάδων (εύκολο – μεσαίο και δύσκολο), τα οποία πρέπει να απαντηθούν μέσα σε 4 ώρες και 30 λεπτά κάθε μέρα.

Οδηγός της ομάδας ήταν ο Έλληνας **Παναγιώτης Παύλος**, ερευνητής στο Πανεπιστήμιο του Όσλο και η βοήθεια του ήταν πολύ σημαντική για την καλύτερη διαμονή των μαθητών.

Συνοδοί της ομάδας μας ήταν ο Ομότιμος καθηγητής ΕΜΠ κ. **Ανάργυρος Φελλούρης** (αρχηγός) και ο κ. **Σιλουανός Μπραζιτίκος**, (υπαρχηγός) Επίκουρος καθηγητής Πανεπιστημίου Κρήτης, στους οποίους οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους.

Πρόβλημα 1. Η τράπεζα του Όσλο εκδίδει δύο τύπους κερμάτων: από αλουμίνιο (συμβολίζεται με Α) και από χαλκό (συμβολίζεται με Β). Η Μαριάννα έχει *n* κέρματα από αλουμίνιο και n κέρματα από χαλκό, τοποθετημένα σε μία γραμμή με κάποια τυχαία αρχική διάταξη. Μία αλυσίδα είναι οποιαδήποτε υποακολουθία διαδοχικών κερμάτων του ιδίου τύπου. Όταν δοθεί ένας σταθερός θετικός ακέραιος $k \leq 2n$, η Μαριάννα εκτελεί επαναληπτικά την ακόλουθη πράξη: εντοπίζει τη μακρύτερη αλυσίδα που περιέχει το κέρμα που βρίσκεται στην *k*-θέση της γραμμής από αριστερά και μετακινεί όλα τα κέρματα αυτής της αλυσίδας στο αριστερό άκρο της γραμμής. Για παράδειγμα, αν $n = 4$ και $k = 4$, η διαδικασία που αρχίζει από τη διάταξη *AABBBABA* θα είναι

$$AABBBABA \to BBBAAABA \to AAABBBBA \to BBBBAAAA \to BBBBAAAA \to \cdots.$$

Βρείτε όλα τα ζεύγη (n, k) με $1 \le k \le 2n$, που είναι τέτοια ώστε για κάθε αρχική διάταξη, σε κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, τα πιο αριστερά n κέρματα της γραμμής να είναι όλα του ιδίου τύπου.

Λύση. Συμβολίζουμε με $\overline{M}$ μία μέγιστη αλυσίδα διαδοχικών κερμάτων από το ίδιο μέταλλο M. Έστω, επίσης M^b μία αλυσίδα b κερμάτων από το μέταλλο M. Σημειώνουμε ότι η ιδιότητα: υπάρχει το πολύ ένα κέρμα αλουμινίου που είναι γειτονικό με κάποιο κέρμα χαλκού, είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη δύο μέγιστων αλυσίδων $\overline{A}$ και $\overline{B}$, δηλαδή δύο αλυσίδων με n κέρματα η καθεμία.

Παρατηρούμε ότι , αν $k<n$, τότε η τοποθέτηση κερμάτων $A^{n-1}B^{n-1}AB$ παραμένει αναλλοίωτη με την εφαρμογή της δεδομένης πράξης, οπότε θα έχει πάντα τέσσερις αλυσίδες.

Επίσης, αν $k>\dfrac{3n+1}{2}$, τότε η τοποθέτηση $A^aB^bA^bB^a$, εφόσον $k>2a+b$ και $k>2b+a,$ θα έχει πάντα τέσσερις αλυσίδες, αφού με την εφαρμογή των πράξεων θα έχουμε:

$$A^aB^bA^bB^a \to B^aA^aB^bA^b \to A^bB^aA^aB^b \to B^bA^bB^aA^a \to A^aB^bA^bB^a \to \ldots$$

Παρατηρούμε ότι για το k που ικανοποιεί τις ανισότητες $k>2a+b$ και $k>2b+a,$ ισχύει: $2k>3\left(a+b\right)=3n \Leftrightarrow k>\dfrac{3n}{2}$. Δεδομένου του $k>\dfrac{3n}{2}$, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $a=k-n-1$ και $b=n-a=2n-k+1$ Ισοδύναμα, αρκεί να πάρουμε $k \ge \left\lceil \dfrac{3n}{2} \right\rceil$.

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε αποκλείσει όλα τα ζεύγη (n, k) με $k<n$, αλλά και με $k>\dfrac{3n}{2}$.

Επομένως, οι τιμές του k για τις οποίες ισχύει το ζητούμενο μπορεί να είναι αυτές που ικανοποιούν τις ανισώσεις: $n \le k \le \left\lceil \dfrac{3n}{2} \right\rceil$. Για αυτές τις τιμές θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε αρχική τοποθέτηση των κερμάτων, τελικά μετά την εφαρμογή των πράξεων θα καταλήξουμε σε μία τοποθέτηση με δύο αλυσίδες. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των αλυσίδων σε μία τοποθέτηση δεν μπορεί να αυξηθεί μετά την εφαρμογή της δεδομένης πράξης, ενώ μπορεί να μειωθεί στην περίπτωση που προκύψει συνένωση δύο διαφορετικών αλυσίδων.

Θα αποδείξουμε ότι, εκτός από την περίπτωση της ύπαρξης δύο μόνο αλυσίδων, ο αριθμός των αλυσίδων θα μειωθεί μετά από την εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους πράξεων.

Θεωρούμε μία αρχική τοποθέτηση με $c \ge 3$ αλυσίδες. Επειδή είναι $k \ge n$ η πρώτη από αριστερά αλυσίδα δεν μπορεί να μετακινηθεί, αφού σε τέτοια περίπτωση το πλήθος των στοιχείων της θα ήταν $k=n$, οπότε θα είχαμε συνολικά μόνο δύο αλυσίδες.

Στη περίπτωση που πρέπει να μετακινηθεί μία ενδιάμεση αλυσίδα (όχι η πρώτη από αριστερά ή η πρώτη από δεξιά), τότε μετά την μετακίνηση οι δύο γειτονικές της αλυσίδες να ενωθούν με αποτέλεσμα τη μείωση του αριθμού των αλυσίδων.

Επομένως, για $k \ge n$, η μοναδική περίπτωση που μπορεί να μην υπάρχει μείωση μετά την εφαρμογή της πράξης είναι η περίπτωση μετακίνησης της πρώτης από δεξιά αλυσίδας.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $c \ge 3$ περιττός. Τότε η πρώτη από αριστερά και η πρώτη από δεξιά αλυσίδες θα περιέχουν κέρματα από το ίδιο μέταλλο, οπότε θα έχουμε συνένωση δύο αλυσίδων.

(β) $c>3$ άρτιος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τοποθέτηση c αλυσίδων, όπου η $i-$αλυσίδα έχει a_i κέρματα, τέτοια ώστε μετά την εφαρμογή της πράξης να μετακινείται πάντοτε η πρώτη από δεξιά αλυσίδα:

$$A^{a_1}\ldots B^{a_{c-2}}A^{a_{c-1}}B^{a_c} \to B^{a_c}A^{a_1}\ldots B^{a_{c-2}}A^{a_{c-1}} \to A^{a_{c-1}}B^{a_c}A^{a_1}\ldots B^{a_{c-2}} \to \ldots$$

Επειδή μετακινείται πάντοτε η πρώτη από δεξιά αλυσίδα, θα ισχύει ότι:

$$k \ge 2n-\left(a_i-1\right), \text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,c.$$

Όμως, $\sum_{i=1}^{c} a_i = 2n$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων, λαμβάνουμε

$$ck \geq 2nc + c - \sum_{i=1}^{c} a_i = 2nc + c - 2n \Rightarrow k \geq 2n + 1 - \frac{2n}{c} \geq 2n + 1 - \frac{2n}{4} = \frac{3n}{2} + 1.$$

Αυτό όμως είναι αντίθετο προς την υπόθεση $n \leq k \leq \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$. Επομένως, σε κάποιο σημείο της διαδικασίας ο αριθμός των αλυσίδων θα μειωθεί.

Πρόβλημα 2. Έστω $\mathbb{R}^+$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ που είναι τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$, υπάρχει ακριβώς ένα $y \in \mathbb{R}^+$, που ικανοποιεί τη σχέση $xf(y) + yf(x) \leq 2$.

Λύση. Πρώτα, θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Πράγματι, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \text{ για κάθε } x, y > 0, \text{ ενώ η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, } x = y.$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $x > 0$, υπάρχει $y = x > 0$ τέτοιο ώστε:

$$xf(y) + yf(x) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2.$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ που ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Θα λέμε ότι ένα ζεύγος θετικών πραγματικών αριθμών (x, y) είναι καλό, αν $xf(y) + yf(x) \leq 2$. Λόγω συμμετρίας ισχύει ότι: (x, y) είναι καλό $\Leftrightarrow (y, x)$ είναι *καλό*. Επιπλέον, ισχύει:

Λήμμα 1. Αν (x, y) είναι καλό, τότε $x = y$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός $y \neq x$, έτσι ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι καλό. Λόγω μοναδικότητας, το ζεύγος (x, x) δεν είναι καλό, οπότε: $xf(x) + xf(x) > 2 \Rightarrow xf(x) > 1$. $t > 0$. Ομοίως, το ζεύγος (y, y) δεν είναι καλό, οπότε: $yf(y) > 1$. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έπεται ότι:

$$xf(y) + yf(x) \geq 2\sqrt{xf(y)yf(x)} = 2\sqrt{xf(x)yf(y)} > 2 ,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, το ζεύγος (x, y) είναι καλό.

Σύμφωνα με την υπόθεση, για κάθε $x > 0$, υπάρχει καλό ζεύγος (x, y), ενώ από το λήμμα 1 το ζεύγος αυτό είναι (x, x), οπότε: $xf(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$. (1)

Με βάση τη σχέση (1) μπορούμε να συνεχίσουμε με διάφορους τρόπους για την εύρεση της ζητούμενης συνάρτησης.

(A) Λόγω της (1) και για το $x = \frac{1}{f(t)}$, $t > 0$, θα είναι

$$\frac{1}{f(t)} f\left(\frac{1}{f(t)}\right) \leq 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{f(t)}\right) \leq f(t) \Rightarrow t \cdot f\left(\frac{1}{f(t)}\right) \leq t \cdot f(t) \leq 1.$$

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $\left(t, \frac{1}{f(t)}\right)$ είναι καλό, για κάθε $t > 0$. Πράγματι, έχουμε:

$$t \cdot f\left(\frac{1}{f(t)}\right) + \frac{1}{f(t)} \cdot f(t) = t \cdot f\left(\frac{1}{f(t)}\right) + 1 \leq 2.$$

Επομένως, από το λήμμα 1, έπεται ότι: $\dfrac{1}{f(t)} = t \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{1}{t},\ t > 0.$

(Β) Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $x > 0$ ισχύει $f(x) < \dfrac{1}{x}$, τότε για κάθε $a > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{x}$ (υπάρχουν τουλάχιστον δύο τέτοια), έχουμε: $af(x) + xf(a) < 1 + \dfrac{x}{a} < 2$. Επομένως, (x, a) είναι ένα καλό ζεύγος, για κάθε τέτοιο a, άτοπο. Άρα είναι $f(x) = \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

(Γ) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι φθίνουσα.

Έστω $y > x > 0$. Από το λήμμα 1 έπεται ότι το ζεύγος (x, y) δεν είναι καλό, ενώ το ζεύγος (y, y) είναι καλό, οπότε έχουμε: $xf(y) + yf(x) > 2 \geq 2yf(y) > yf(y) + xf(y) \Rightarrow f(x) > f(y)$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι φθίνουσα.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $f(x) = \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$. Σταθεροποιούμε μία τιμή του x. Επειδή η f είναι φθίνουσα, για κάθε $y > x > 0$, έχουμε

$$xf(x) + yf(x) > xf(y) + yf(y) > 2 \Rightarrow (x + y) f(x) > 2 \Rightarrow f(x) > \frac{2}{x + y}.$$

Επειδή $\sup\limits_{y > x > 0} \dfrac{2}{x + y} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$, έπεται ότι $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως, σε συνδυασμό με τη σχέση (1) έπεται ότι: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Λύση 2η (Ορέστης Λιγνός)

Η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί είναι η $f(x) = \frac{1}{x}$. Αυτή είναι δεκτή διότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(y) + yf(x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y$$

οπότε για κάθε x, υπάρχει μοναδικό $y\ (= x)$, που ικανοποιεί τη συνθήκη.

Τώρα θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλη συνάρτηση που να ικανοποιεί.

Ισχυρισμός 1: Η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν $a > b$ τέτοιοι, ώστε $f(a) \geq f(b)$. Έστω k ο μοναδικός θετικός πραγματικός τέτοιος, ώστε $af(k) + kf(a) \leq 2$,

Από την συνθήκη προκύπτει ότι ο y που ικανοποιεί την $kf(y) + yf(k) \leq 2$ είναι το $y = a$. Αφού b ≠ α, πρέπει να είναι $bf(k) + kf(b) > 2$.

Συνεπώς, $2 < bf(k) + kf(b) < af(k) + kf(a) \leq 2$, άτοπο, οπότε ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε ■

Ισχυρισμός 2: Για κάθε x, είναι $xf(x) \geq 1$.

Απόδειξη: Έστω πως υπάρχει x_0 τέτοιο, ώστε $x_0 f(x_0) < 1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \left\{u > 0 : u < \frac{2 - 2x_0 f(x_0)}{f(x_0)}\right\},$$

το οποίο είναι προφανώς άπειρο. Έστω $\epsilon \in S$. Είναι τότε, λόγω του Ισχυρισμού 1,

$$x_0 f(x_0 + \epsilon) + (x_0 + \epsilon) f(x_0) < x_0 f(x_0) + (x_0 + \epsilon) f(x_0) < 2x_0 f(x_0) + 2 - 2x_0 f(x_0) = 2,$$

οπότε αφού το S είναι άπειρο, έχουμε άπειρα ζεύγη $(x_0, x_0 + \epsilon)$ που ικανοποιούν την δοσμένη, άτοπο ■

Πίσω στο πρόβλημα, είναι $xf(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{x}$, οπότε αν $x \neq y$, τότε

$$xf(y) + yf(x) \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + \frac{(x - y)^2}{xy} > 2$$

συνεπώς είναι $xf(y) + yf(x) \leq 2 \Rightarrow x = y$, που σημαίνει ότι

$xf(x)+xf(x)\le 2 \Rightarrow xf(x)\le 1$, άρα σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 2, είναι $xf(x)=1$, δηλαδή

$$f(x)=\frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x.$$

Αυτή η συνάρτηση όπως είδαμε αρχικά ικανοποιεί, άρα είναι και η μόνη λύση του προβλήματος.

Λύση 3η (Γιώργος Τζαχρήστας)

Βλέπουμε ότι η $f(x)=\frac{1}{x}$ ικανοποιεί το ζητούμενο, αφού

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le 2 \xRightarrow{AM-\Gamma M} 2\le 2\sqrt{\frac{x}{y}\frac{y}{x}}\le \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le 2 \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{y}{x}\Rightarrow x^2=y^2 \xRightarrow{x,y>0} x=y.$$

Άρα $y=x$ μοναδικό.

Έστω $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ και $g(x)$ ο μοναδικός θετικός πραγματικός για τον οποίο ισχύει η (1) (άρα και η (2)) :

$$\frac{f(g(x))}{g(x)}+\frac{f(x)}{x}\le\frac{2}{xg(x)}$$

Τότε, όμως, θα ισχύει ότι και ο x θα είναι ο θετικός πραγματικός που ικανοποιεί την (1) για τον $g(x)$.

Άρα, λόγω μοναδικότητας, $g(g(x))=x \Rightarrow g$:1-1 και επί του $\mathbb{R}^+$,(αν $g(x_1)=g(x_2)$, τότε $g(g(x_1))=g(g(x_2))$ $\Rightarrow x_1=x_2$). Θα λέμε, λοιπόν, ότι $x\to g(x)$ αν το $(x, g(x))$ ικανοποιεί την (1).

Ουσιαστικά δείξαμε ότι αν το $(x, g(x))$ ικανοποιεί τη συνθήκη, τότε και το $(g(x), x)$ ικανοποιεί λόγω συμμετρίας. Άρα $x\to g(x)\Leftrightarrow g(x)\to x$ και επομένως $x\leftrightarrow g(x)$.

Για κάθε $y\ne g(x)$: δεν ισχύει η (2) $\Leftrightarrow \frac{f(y)}{y}+\frac{f(x)}{x}>\frac{2}{xy}$.

Άρα για $\frac{2}{xy}>\frac{2}{xg(x)}\Leftrightarrow y<g(x)$ θα ισχύει ότι:

$$\frac{f(y)}{y}+\frac{f(x)}{x}>\frac{2}{xy}>\frac{2}{xg(x)}\ge\frac{f(g(x))}{g(x)}+\frac{f(x)}{x}.$$

Άρα έχουμε: για κάθε $y<g(x)$: $\frac{f(y)}{y}>\frac{f(g(x))}{g(x)}$.

Άρα και για $x\to g(x)$, ($g(x)$ επί του $\mathbb{R}^+$) με $g(g(x))=x$.

Επομένως, δεδομένου ότι η $g(x)$ είναι επί του $\mathbb{R}^+$ ($g(g(x)=x)$, έχουμε:

$$\text{για κάθε } y<x,\ \frac{f(y)}{y}>\frac{f(x)}{x}, \qquad \forall x\in \mathrm{Im}(g) \text{ άρα } \forall x\in\mathbb{R}^+$$

Άρα η συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν $f(x)\ge\frac{1}{x}\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$, τότε:

$$2\ge xf(g(x))+g(x)f(x)\ge\frac{x}{g(x)}+\frac{g(x)}{x}\ge 2\ \forall x\in\mathbb{R}^+ \text{ (από AM - ΓΜ)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x},\ \forall x>0, \text{ που ικανοποιεί τη δεδομένη συνθήκη.}$$

Αν, λοιπόν, αποδείξουμε ότι $f(x)\ge\frac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$, τότε τελειώσαμε.

Για $0<x_1<x_2$, με $x_2\ne g(x_1)$ (και δηλαδή $x_1\ne g(x_2)$), αφού $g(g(x_2))=x_2$ και $g(g(x_1))=x_1$)

έχουμε ότι η (1) δεν ισχύει (αφού $x_2\ne g(x_1)$) $\Rightarrow x_1f(x_2)+x_2f(x_1)>2$.

Όμως, $\frac{f(x_1)}{x_1}>\frac{f(x_2)}{x_2}$, αφού h: γνησίως φθίνουσα, οπότε:

$$2x_2f(x_1)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)>2, \text{ για κάθε } x_2>x_1,\ x_2\ne g(x_1)\Rightarrow$$

$$x_2f(x_1>1, \text{ για κάθε } x_2>x_1,\ x_2\ne g(x_1)\Rightarrow f(x_1)>\frac{1}{x_2}, \text{ για κάθε } x_2>x_1,\ x_2\ne g(x_1).$$

Άρα με $x_2\xrightarrow{\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota}x_1$ από πάνω, ισχύει: $\frac{1}{x_2}\to\frac{1}{x_1}$ από κάτω και πάει όσο κοντά θέλουμε, οπότε $f(x_1)\ge\frac{1}{x_1}$ και αυτό για τυχαίο x_1, δηλαδή $f(x)\ge\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^+$, και άρα τελειώσαμε.

Λύση 4η . (Πρόδρομος Φωτιάδης)

Έστω $g:R_+\to R_+$ με $g(x)$ ο μοναδικός θετικός πραγματικός y τέτοιος ώστε: $xf(y)+yf(x)\le 2$

Ισχυρισμός: $g(g(x))=x, x>0$

Απόδειξη: Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $t>0$ τέτοιο ώστε $g(g(t))=t$. Από τον ορισμό της g τότε θα ισχύει

$$g(t)f(t)+tf(g(t))>2 \text{ αλλά και } tf(g(t))+g(t)f(t)\le 2.$$

Αυτό είναι αδύνατον, οπότε ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί.

Έστω το σύνολο $S = \{x \in R_+ | g(x) = x\}$. Για κάθε $x \notin S$ θα ισχύει: $xf(x) + xf(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) > 1/x$.

Επίσης αν $x \notin S$ τότε αναγκαία και $g(x) \notin S$, αφού αν ήταν $g(x) \in S$, τότε το $g(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow x = g(x) \Leftrightarrow x \in S$ εφόσον η g είναι ενέλιξη. Αυτό είναι άτοπο, επομένως $x \notin S \Rightarrow g(x) \notin S$. Παίρνουμε κάποιο $x \notin S$.

Από τα προηγούμενα θα ισχύουν:

$$f(x) > 1/x \text{ και } f(g(x)) > 1/(g(x)).$$

Τότε όμως $2 \geq xf(g(x)) + g(x)f(x) > \dfrac{x}{g(x)} + \dfrac{g(x)}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{\dfrac{xg(x)}{g(x)x}} = 2$, άτοπο!

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $S = \emptyset$ και επομένως $g(x) = x$, για κάθε $x > 0$.

Έχουμε λοιπόν τώρα: $xf(y) + yf(x) > 2$, για κάθε $x \neq y$ και $f(x) \leq \frac{1}{x}, x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ με $h(x) := 1/x - f(x)$. Τότε για $x \neq y$ θα ισχύει:

$$x\left(1/y - h(y)\right) + y\left(1/x - h(x)\right) > 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2 + xh(y) + yh(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy} > \frac{h(y)}{y} + \frac{h(x)}{x} \Rightarrow \frac{h(x)}{x} < \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^2, \text{ για } x \neq y.$$

Το $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ τείνει στο 0 καθώς το y προσεγγίζει το x, οπότε θα πρέπει $h(x) = 0, x > 0$ και κατά συνέπεια $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη, αφού $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2 \Leftrightarrow x = y, για\ x, y > 0$.

Έτσι $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ είναι η μοναδική λύση.

Πρόβλημα 3. Έστω k ένας θετικός ακέραιος και έστω *S* ένα πεπερασμένο σύνολο με στοιχεία περιττούς πρώτους θετικούς ακέραιους. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένας τρόπος (εκτός από περιστροφές και συμμετρίες) να τοποθετήσουμε τα στοιχεία του συνόλου *S* πάνω σε ένα κύκλο έτσι ώστε το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο γειτονικών στοιχείων να είναι της μορφής $x^2 + x + k$, για κάποιο θετικό ακέραιο *x*.

Λύση. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος μας ενδιαφέρει η δυνατότητα γραφής του γινομένου δύο περιττών πρώτων στη μορφή $x^2 + x + k$, για κάποιο θετικό ακέραιο x. Για το λόγο αυτό, ονομάζουμε το σύνολο $\{p,q\}$ δύο πρώτων με $p \neq q$ ειδικό, αν ισχύει ότι: $pq = x^2 + x + k$, για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο x. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

(α) Για κάθε πρώτο r υπάρχουν το πολύ δύο πρώτοι μικρότεροι του r που σχηματίζουν ειδικό ζεύγος με τον r.

(β) Αν υπάρχουν δύο τέτοιοι πρώτοι p, q που ικανοποιούν τον ισχυρισμό (α), τότε και το σύνολο $\{p,q\}$ είναι ειδικό.

Απόδειξη. (α) Ενδιαφερόμαστε για την ύπαρξη ακέραιων $0 \leq x < r$ που είναι τέτοιοι ώστε:

$$x^2 + x + k \equiv 0 \pmod{r}. \qquad (1)$$

Η σχέση (1) είναι μία τετραγωνική ισοτιμία για την οποία υπάρχουν το πολύ δύο λύσεις modulo r, έπεται ότι υπάρχουν το πολύ δύο τιμές του x που ικανοποιούν την (1).

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν δύο πρώτοι p, q με $p < q < r$ και μη αρνητικοί ακέραιοι x, y που είναι οι δύο λύσεις της (1), τέτοιοι ώστε: $x^2 + x + k = pr$ (2)

$$y^2 + y + k = qr \qquad (3)$$

Επειδή $p < q < r$, συμπεραίνουμε ότι: $0 \leq x < y \leq r - 1$. Από τους τύπους του Vieta, έχουμε ότι: $x + y \equiv -1 \pmod{r}$, οπότε $x + y = r - 1$.

Με αφαίρεση κατά μέλη των (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$(x-y)(x+y+1)=(p-q)r, \qquad (4)$$

από την οποία προκύπτει ότι $x-y=p-q$, οπότε, λόγω και της $x+y=r-1$, έχουμε:

$$x=\frac{1}{2}(r+p-q-1),\;\; y=\frac{1}{2}(r+q-p-1).$$

Τότε προκύπτει ότι:

$$k=pr-x^2=\frac{1}{4}\left\{4pr-(r+p-q-1)^2-2(r+p-q-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{4pr-(r+p-q)^2+1\right\}=\frac{1}{4}\left\{2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2+1\right\},$$

η οποία είναι συμμετρική ως προς p,q,r. Επομένως, θα είναι

$$pq=z^2+z+k,\text{ όπου } z=\frac{1}{2}(p+q-r-1),$$

οπότε και το σύνολο $\{p,q\}$ είναι ειδικό.

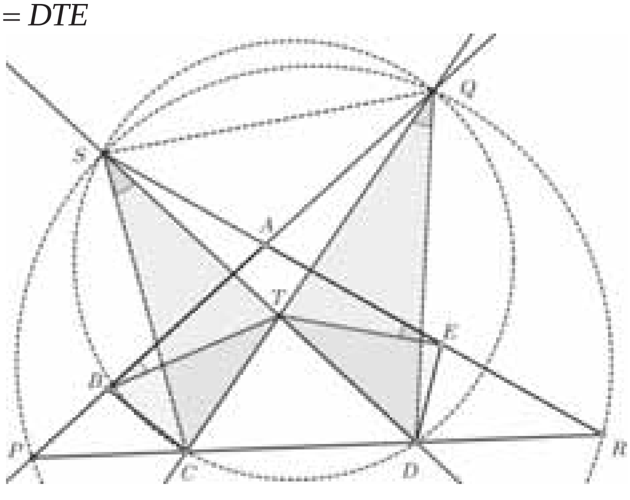
Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη του προβλήματος με επαγωγή ως προς το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S. Παρατηρούμε ότι για $|S|\le 3$, το ζητούμενο ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει και για $|S|=n$. Έστω ότι: $|S|=n+1$. Θεωρούμε το μεγαλύτερο πρώτο αριθμό του συνόλου S, έστω r. Τότε, σύμφωνα με τον ισχυρισμό, σε κάθε σωστό κύκλο πρώτων αριθμών, οι δύο γειτονικοί πρώτοι του r είναι μοναδικά ορισμένοι, ενώ και η μετακίνηση του r από τον κύκλο δημιουργεί ένα μικρότερο σωστό κύκλο. Επομένως, υπάρχει ένας τουλάχιστον σωστός κύκλος.

Πρόβλημα 4. Έστω *ABCDE* ένα κυρτό πεντάγωνο τέτοιο ώστε *BC = DE*. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο *T* στο εσωτερικό του *ABCDE* με *TB = T D, TC = TE* και *∠ABT = ∠TEA*. Η ευθεία *AB* τέμνει τις ευθείες *CD* και *CT* στα σημεία *P* και *Q*, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία *P, B, A, Q* βρίσκονται πάνω στην ευθεία τους με αυτή τη διάταξη . Έστω ότι η ευθεία *AE* τέμνει τις ευθείες *CD* και *DT* στα σημεία *R* και *S*, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία *R, E, A, S* βρίσκονται πάνω στην ευθεία τους με αυτή τη διάταξη. Να αποδείξετε ότι τα σημεία *P, S, Q, R* ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση (Κ. Κωνσταντινίδης, Π. Διάμπας, Γ. Τζαχρήστας)

Από τις υποθέσεις $BC=DE$, $CT=ET$ και $TB=TD$ τα τρίγωνα TBC και TDE είναι ίσα. Επομένως, θα είναι $B\hat{T}C=D\hat{T}E$



Επιπλέον, τα τρίγωνα TBQ και TES έχουν: $T\hat{B}Q=T\hat{E}S$ (από υπόθεση) και

$$Q\hat{T}B = 180^0 - B\hat{T}C = 180^0 - D\hat{T}E = E\hat{T}S,$$

οπότε αυτά είναι όμοια. Επομένως έχουμε: $T\hat{S}E = B\hat{Q}T$ και $\dfrac{TD}{TQ} = \dfrac{TB}{TQ} = \dfrac{TE}{TS} = \dfrac{TC}{TS}$.

Από τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι: $TD \cdot TS = TC \cdot TQ$, οπότε τα σημεία C, D, Q, S είναι ομοκυκλικά. Επομένως, θα έχουμε και την ισότητα γωνιών: $D\hat{C}Q = D\hat{S}Q$. Επιπλέον, από το τρίγωνο CQP έχουμε: $R\hat{P}Q = R\hat{C}Q - P\hat{Q}C = D\hat{S}Q - D\hat{S}R = R\hat{S}Q$,

οπότε και τα σημεία P, Q, R, S είναι ομοκυκλικά.

2ος τρόπος: (Ορέστης Λιγνός)

Βασικός Ισχυρισμός: Το τετράπλευρο $QSCD$ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη: Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα TBC, TDE είναι ίσα, οπότε είναι και $\angle BTC = \angle ETD$. Άρα, είναι $\angle AQT = \angle BTC - \angle ABT = \angle ETD - \angle AET = \angle AST$.

Συνεπώς, από τον Νόμο Ημιτόνων στα τρίγωνα AST, AQT είναι

$$\frac{ST}{\sin(\angle SAT)} = \frac{AT}{\sin(\angle AST)} = \frac{AT}{\sin(\angle AQT)} = \frac{QT}{\sin(\angle QAT)},$$

οπότε $\frac{ST}{\sin(\angle SAT)} = \frac{QT}{\sin(\angle QAT)}$, άρα $\frac{ST}{QT} = \frac{\sin(\angle SAT)}{\sin(\angle QAT)}$ **(1)**.

Επιπλέον, από τον Νόμο Ημιτόνων στα τρίγωνα ABT, AET είναι

$$\frac{BT}{\sin(\angle BAT)} = \frac{AT}{\sin(\angle ABT)} = \frac{AT}{\sin(\angle AET)} = \frac{ET}{\sin(\angle EAT)},$$

οπότε $\frac{BT}{\sin(\angle BAT)} = \frac{ET}{\sin(\angle EAT)}$, άρα $\frac{TD}{TC} = \frac{BT}{ET} = \frac{\sin(\angle BAT)}{\sin(\angle EAT)} = \frac{\sin(\angle AQT)}{\sin(\angle SAT)}$.

Συνεπώς, $\frac{TC}{TD} = \frac{\sin(\angle SAT)}{\sin(\angle AQT)}$ **(2)**.

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{ST}{QT} = \frac{TC}{TD}$, άρα $ST \cdot TD = TC \cdot TQ$, οπότε από δύναμη σημείου προκύπτει το ζητούμενο ■

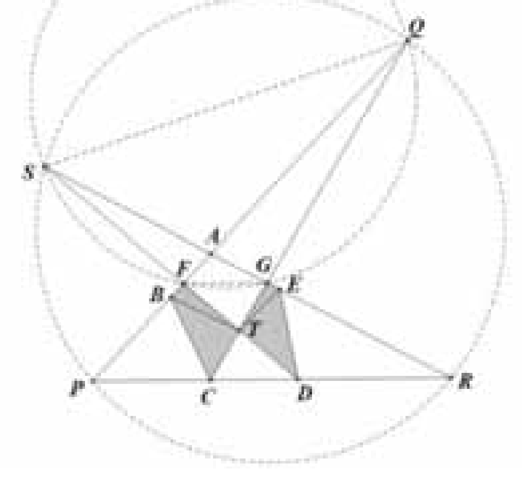
Στο πρόβλημα, από τον Ισχυρισμό είναι $\angle QSD = \angle QCD$. Άρα,

$$\angle QSR = \angle QSD - \angle AST = \angle QCD - \angle AQT = \angle QPR,$$

οπότε $\angle QSR = \angle QPR$, που δίνει ότι το τετράπλευρο QSPR είναι εγγράψιμο, όπως θέλαμε.

3ος τρόπος: (Εμμανουήλ Πετράκης)

Έστω $F = AB \cap SD, G = AE \cap CQ$. Τα τρίγωνα BCT και EDT είναι ίσα από την υπόθεση.



Άρα $\angle BTC = \angle DTE \Leftrightarrow \angle BTF = \angle ETG$.

Όμως $\angle FBT = \angle GET$ και επομένως τα τρίγωνα BFT και EGT είναι όμοια.

Επομένως:

- $\angle SFQ = \angle BFT = \angle EGT = \angle SGQ \Rightarrow F, G, Q, S$: ομοκυκλικά.
- $\frac{TF}{TB} = \frac{TG}{TE} \Leftrightarrow \frac{TF}{TD} = \frac{TG}{TC} \Leftrightarrow FG \parallel PR$.

Από τις 2 παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι: $\angle RSQ = \angle GSQ = \angle GFQ = \angle RPQ \Rightarrow P, S, Q, R$: ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 5. Βρείτε όλες τις τριάδες (a, b, p) θετικών ακεραίων με p πρώτο αριθμό και

$$a^p = b! + p.$$

Λύση. (Πρόδρομος Φωτιάδης)

Παρατηρούμε ότι $a > 1$ και θεωρούμε τρεις περιπτώσεις;

(A) $a < p$. Αν ήταν $a \le b$, τότε θα είχαμε $a \mid a^p - b! = p$, που είναι άτοπο. Επομένως, θα είναι $a > b$, το οποίο επίσης είναι αδύνατο, αφού τότε $b! < a! < a^p - p$, για $p > a > 1$.

(B) $a > p$. Στην περίπτωση αυτή $b! = a^p - p > p^p - p \ge p!$, οπότε $b > p$ με συνέπεια $p \mid b! + p = a^p$. Επομένως, $p \mid a$ και το $b! = a^p - p$ δεν διαιρείται με το p^2 με συνέπεια $b < 2p$. Αν είναι $a < p^2$, τότε $\frac{a}{p} < p$ διαιρεί και τα δύο a^p και $b!$, οπότε διαιρεί επίσης και τη διαφορά $a^p - b! = p$, που είναι αδύνατο. Αν ήταν $a \ge p^2$, τότε θα είχαμε: $a^p \ge \left(p^2\right)^p > (2p-1)! + p \ge b! + p = a^p$, αδύνατο.

(Γ) $a = p$. Τότε $b! = p^p - p$.

Για $p = 2$, προκύπτει η λύση $(a,b,p) = (2,2,2)$, ενώ για $p = 3$ προκύπτει η λύση $(a,b,p) = (3,4,3)$. Για $p = 5$ δεν προκύπτει λύση. ν

Υποθέτουμε ότι $p \ge 7$. Τότε $b! = p^p - p > p!$, οπότε θα είναι $b \ge p+1$, από την οποία έπεται ότι:

$$\upsilon_2\left((p+1)!\right) \le \upsilon_2(b!) = \upsilon_2\left(p^{p-1}-1\right) \overset{LTE}{=} 2\upsilon_2(p-1) + \upsilon_2(p+1) - 1 = \upsilon_2\left(\frac{p-1}{2}\cdot(p-1)\cdot(p+1)\right),$$

όπου στη μεσαία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το λήμμα LTE (lifting-the-exponent). Έτσι στο δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας, έχουμε τρεις παράγοντες του $(p+1)!$. Επειδή, όμως $p+1 \ge 8$, υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις άρτιοι παράγοντες μεταξύ των ακεραίων $1, 2, \ldots, p+1$, οπότε και η περίπτωση αυτή είναι αδύνατη.

2ος τρόπος (Ε. Πετράκης)

- Αν $p = 2$ τότε $a^2 - 2 = b!$.

Όμως $a^2 - 2 \equiv 2,3 \pmod 4 \Rightarrow 4 \nmid a^2 - 2 \Leftrightarrow 4 \nmid b! \Leftrightarrow b \le 3$.

Ελέγχοντας τις περιπτώσεις για $1 \le b \le 3$ βρίσκουμε τη λύση $(a,b,p) = (2,2,2)$.

- Αν $p = 3$ τότε $a^3 - 3 = b!$

Ελέγχοντας τις περιπτώσεις για $1 \le b \le 5$ βρίσκουμε τη λύση $(a,b,p) = (3,4,3)$.

Αν $b \ge 6$ τότε $9 \mid b! \Leftrightarrow 9 \mid a^3 - 3$.

Όμως $3 \mid \alpha^3 - 3 \Leftrightarrow 3 \mid \alpha^3 \Leftrightarrow 3 \mid \alpha \Leftrightarrow 9 \mid \alpha^3 \Rightarrow 9 \nmid \alpha^3 - 3$, άτοπο.

- Αν $p \ge 5$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) $b \ge p \Leftrightarrow p \mid b! + p \Leftrightarrow p \mid a^p \Leftrightarrow p \mid a \Leftrightarrow a = kp,\ k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (pk)^p - p = b!$.

Όμως $p^2 \nmid (pk)^p - p \Leftrightarrow p^2 \nmid b! \Leftrightarrow b \le 2p - 1$.

a) Αν $k \le p$ τότε $k \mid (pk)^p$ και $k \mid b!$ άρα $k \mid p \Rightarrow k \in \{1, p\}$.

➢ Αν $k = 1$ τότε $p^p - p = b! \Leftrightarrow p(p^{p-1} - 1) = b!$.

Από το LTE έχουμε ότι:

$$u_2\left(p(p^{p-1}-1)\right) = u_2(p) + u_2(p-1) + u_2\left(\frac{p^2-1}{2}\right) = u_2(p-1) + u_2\left(\frac{p-1}{2}\right) + u_2(p+1) \qquad (1)$$

❖ Αν $b \geq p+1$ και $p > 5$ τότε:

$u_2(b!) \geq u_2(p+1) + u_2(p-1) + u_2(p-3) + u_2\left(\frac{p-1}{2}\right) > u_2\left(p(p^{p-1}-1)\right)$, άτοπο λόγω της (1) (καθώς $2 \mid p-3$ και $p+1 > p-1 > p-3 > \frac{p-1}{2}$).

❖ Αν $p=5$ τότε $b! = 5^{10}-5$ αδύνατο καθώς $3 \nmid 5^{10}-5$.

❖ Αν $b=p$ τότε $p(p^{p-1}-1) = p! \Leftrightarrow p^{p-1}-1 = (p-1)!$.

Όμως $p^{p-1}-1 > p^{p-2} > 2\cdot 3\cdot 4 \cdots (p-1) = (p-1)!$, άτοπο.

➢ Αν $k=p$ τότε $p^{2p}-p = b! \leq (2p-1)!$

Αλλά $p^{2p}-p = p(p^{2p-1}-1) \geq 5(p^{2p-1}-1) > p^{2p-1} = p(p^{p-1})^2$
$\geq p\prod_{i=1}^{p-1} i(2p-1) = (2p-1)!$, που οδηγεί σε άτοπο.

b) Αν $k>p$ τότε $(pk)^p - p > p^{2p}-p > (2p-1)! \geq b!$, όπως αποδείχθηκε.

2) $b<p \Leftrightarrow p \nmid b!+p \Leftrightarrow p \nmid a^p \Leftrightarrow p \nmid a$.

a) Αν $a \leq b$ τότε $a \mid b! \Rightarrow a \mid p \overset{p\nmid a}{\Longrightarrow} a = 1 \Rightarrow b!+p = 1$, αδύνατο στο $\mathbb{N}^*$.

b) Αν $a>b$ τότε θα δείξουμε ότι $a^p > b!+p$.

➢ Αν $b=1$ τότε $a^p = (a-1+1)^p > p(a-1)+1 \geq p+1$, από την ανισότητα Bernoulli.

➢ Αν $b>1$ τότε $a^p > b^p$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $b^p \geq b!+p$ για κάθε $p \geq 5$.

Ισχύει ότι $b^p - b^{p-1} = b^{p-1}(b-1) \geq 2^{p-1} = (1+1)^{p-1} \geq (p-1)+1 = p$ (Bernoulli)

$$\Rightarrow b^p \geq b^{p-1}+p.$$

Τέλος $b^{p-1} > b^{b-1} \geq 2\cdot 3 \cdots b = b!$. Επομένως $b^p \geq b!+p$.

Έχοντας πάρει όλες τις περιπτώσεις καταλήγουμε στις λύσεις: $(a,b,p) = (2,2,2), (3,4,3)$.

Πρόβλημα 6. Έστω *n* ένας θετικός ακέραιος. Ένα Σκανδιναβικό τετράγωνο είναι ένας *n* × *n* πίνακας που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι το n^2 έτσι ώστε κάθε κελί να περιέχει ακριβώς ένα αριθμό. Δύο διαφορετικά κελιά θεωρούνται γειτονικά, αν έχουν μία κοινή πλευρά. Κάθε κελί το οποίο είναι γειτονικό μόνο με κελιά που περιέχουν μεγαλύτερους αριθμούς ονομάζεται κοιλάδα. Ένα ανηφορικό μονοπάτι είναι μία ακολουθία από ένα ή περισσότερα κελιά έτσι ώστε:

(i) το πρώτο κελί της ακολουθίας είναι μία κοιλάδα,

(ii) κάθε επόμενο κελί της ακολουθίας είναι γειτονικό με το προηγούμενο κελί, και

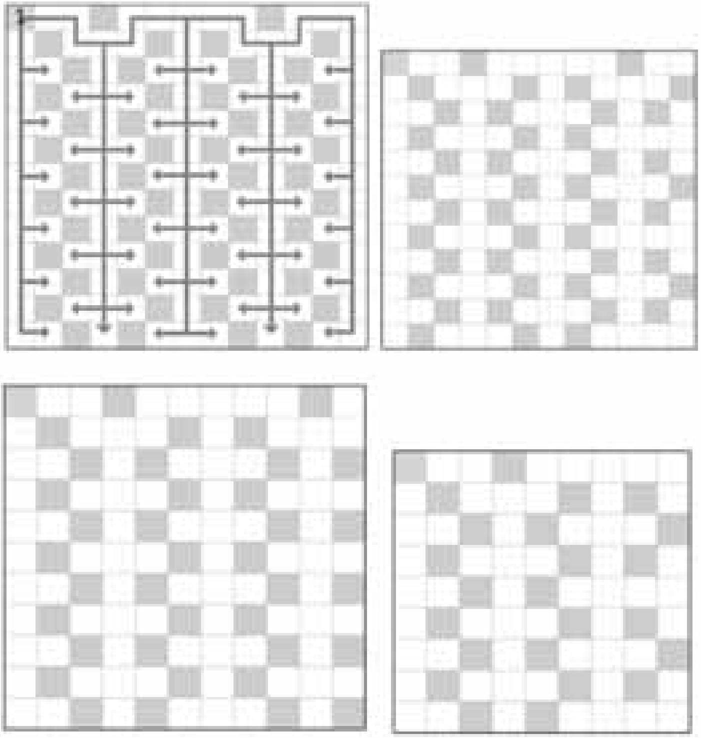
(iii) οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στα κελιά της ακολουθίας είναι σε αύξουσα σειρά.

Βρείτε, συναρτήσει του *n*, τον ελάχιστο δυνατό αριθμό ανηφορικών μονοπατιών σε ένα Σκανδιναβικό τετράγωνο.

Λύση. Για κάθε ζεύγος γειτονικών κελιών του πίνακα υπάρχει ένα τουλάχιστον μονοπάτι το οποίο ξεκινάει από το κελί με το μεγαλύτερο αριθμό, συνεχίζει στο κελί με το μικρότερο αριθμό και στη συνέχεια σε γειτονικά κελιά με μικρότερο αριθμό μέχρι που να καταλήξει σε μία κοιλάδα. Αντιστρέφοντας τη φορά διαγραφής σχηματίζουμε ένα ανηφορικό μονοπάτι το οποίο τελειώνει στα δύο γειτονικά κελιά από τα οποία είχαμε ξεκινήσει.

Σε κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα υπάρχουν $n-1$ τέτοια γειτονικά ζεύγη κελιών, οπότε συνολικά υπάρχουν $2n(n-1)$ τέτοια ζεύγη που αντιστοιχούν σε $2n(n-1)$ ανηφορικά μονοπάτια. Λαμβάνοντας υπόψιν και το κελί με τον αριθμό 1 το οποίο ορίζει πάντοτε μία κοιλάδα μόνο του, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ελάχιστος δυνατός αριθμός ανηφορικών μονοπατιών στον πίνακα είναι $2n(n-1)+1$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός αυτός είναι δυνατόν να επιτευχθεί. Πράγματι, στα παρακάτω σχήματα, τοποθετούμε τους αριθμούς στα λευκά τετράγωνα, σε αύξουσα σειρά, ξεκινώντας από την πάνω αριστερά γωνία, όπου βάζουμε το 1, και κατευθυνόμενοι στις διευθύνσεις που δείχνουν τα κόκκινα βέλη στο σχήμα. Οι υπόλοιποι j μεγαλύτεροι αριθμοί, τοποθετούνται στα πράσινα τετράγωνα. Έτσι, έχουμε έναν τρόπο για να γυρίσουμε πίσω από δύο γειτονικά τετράγωνα και όλα αυτά τα μονοπάτια καταλήγουν στην κοιλάδα 1. Επομένως το ελάχιστο επιτυγχάνεται.



Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 124

Α67. **Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους n που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\sqrt{n+3}+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ να είναι ακέραιος.** [ΜΟ Ρουμανίας 2016]

Λύση

Έστω $m=\sqrt{n+3}+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ θετικός ακέραιος. Τότε θα έχουμε:

$$n+\sqrt{n+3}=\left(m-\sqrt{n+3}\right)^2 \Rightarrow n+\sqrt{n+3}=m^2-2m\sqrt{n+3}+n+3 \Rightarrow (2m+1)\sqrt{n+3}=m^2+3 .$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ακέραιος $n+3$ πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω

$$n+3=p^2, p\in\mathbb{N}^*, \qquad (1)$$

αφού διαφορετικά ο $\sqrt{n+3}$ θα είναι άρρητος, το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Τότε από την υπόθεση ο $p+\sqrt{n+p}$ είναι θετικός ακέραιος, Τότε θα πρέπει: $\sqrt{n+p}=q,\ q\in\mathbb{N}^* \Rightarrow n+p=q^2$ (2)

Με απαλοιφή του n από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$p^2-3=q^2-p \Rightarrow 4p^2+4p-12=4q^2 \Rightarrow (2p+1)^2-(2q)^2=13 \Rightarrow (2p+1-2q)(2p+1+2q)=13,$$

από την οποία καταλήγουμε εύκολα στο σύστημα $\{2p+1-2q=1,\ 2p+1=2q=13\} \Leftrightarrow (p,\ q)=(3,\ 3)$, οπότε για το n προκύπτει η μοναδική τιμή $n=6$.

Α68. **Αν x, y θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\frac{2010}{2011}<\frac{x}{y}<\frac{2011}{2012}$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x+y$.** [ΜΟ Ρουμανίας 2016]

Λύση

Από την υπόθεση είναι $\frac{x}{y}<1$, οπότε $x<y \Rightarrow$ υπάρχει θετικός ακέραιος d τέτοιος ώστε: $x=y-d$.

Η δεδομένη σχέση γράφεται:

$$\frac{2011-1}{2011}<\frac{y-d}{y}<\frac{2012-1}{2012}\Rightarrow 1-\frac{1}{2011}<1-\frac{d}{y}<1-\frac{1}{2012}\Rightarrow \frac{1}{2011}>\frac{d}{y}>\frac{1}{2012}\Rightarrow 2011\cdot d<y<2012\cdot d \quad (1)$$

Για $d=1$, η σχέση (1) είναι αδύνατη.

Για $d=2$ έχουμε: $4022<y<4024\Rightarrow y=4023\Rightarrow x+y=2y-d=8044$.

Για $d\geq 3\Rightarrow\ y>2011\cdot 3=6033\Rightarrow x+y=2y-d>12066-d\geq 12033$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $x+y$ είναι η 8044.

Α69. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu$, $\nu\geq 2$, είναι τέτοιοι ώστε:

$$\alpha_1\leq\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2\leq\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leq\alpha_4,\dots,\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\nu-1}\leq\alpha_\nu.$$

Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}+\dots+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\leq\frac{\nu}{2}$. Πότε ισχύει η ισότητα; [ΜΟ Ρουμανίας 2016]

Λύση

Θέτουμε $x_1=\alpha_1, x_\kappa=\alpha_\kappa-(\alpha_{\kappa-1}+\dots+\alpha_1)$, $\kappa=2,3,\dots,\nu$. Παρατηρούμε ότι: $x_\kappa\geq 0$, $\kappa=1,2,\dots,\nu$ και $x_{\kappa+1}-x_\kappa=\alpha_{\kappa+1}-2\alpha_\kappa$, $\kappa=1,2,\dots,\nu-1$. Τότε έχουμε:

$$2\cdot\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}+\dots+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{x_{i+1}-x_i}{\alpha_{i+1}}\right)=\nu-1-\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{\alpha_{i+1}}=\nu-\frac{x_1}{\alpha_1}-\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{\alpha_{i+1}}$$

$$=\nu-\frac{x_1}{\alpha_1}-\frac{x_2-x_1}{\alpha_2}-\frac{x_3-x_2}{\alpha_3}-\dots-\frac{x_\nu-x_{\nu-1}}{\alpha_\nu}=\nu-\frac{x_\nu}{\alpha_\nu}-\sum_{i=1}^{\nu-1}x_i\left(\frac{1}{\alpha_i}-\frac{1}{\alpha_{i+1}}\right)\leq\nu,$$

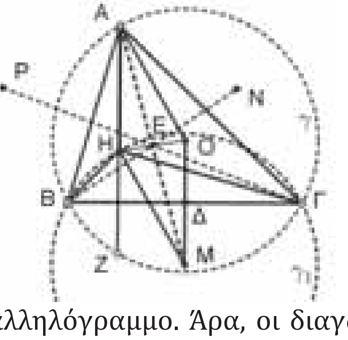
αφού $\alpha_i\leq\alpha_{i+1}, i=1,2,\dots,\nu$ και $x_i\geq 0, i=1,2,\dots,\nu-1$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνον όταν $x_2=x_3=\dots=x_\nu=0\Leftrightarrow\alpha_2=\alpha_1,\ \alpha_3=2\alpha_2,\dots,\alpha_n=2^\nu\alpha_1$.

Γ61. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ορθόκεντρο Η διαφορετικό των κορυφών του Α, Β, Γ και του περικέντρου του Ο. Αν Μ, Ν, Ρ είναι τα περίκεντρα των τριγώνων ΗΒΓ, ΗΓΑ , ΗΑΒ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ και ΟΗ συντρέχουν.

[ΜΟ Ρουμανίας 2016]

Λύση



Επειδή το ύψος από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο γ σε σημείο, έστω Ζ, συμμετρικό του ορθοκέντρου Η ως προς την ευθεία ΒΓ, τα τρίγωνα ΒΗΓ και ΒΖΓ είναι ίσα. Επομένως οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΓ και ΗΒΓ είναι ίσοι και συμμετρικοί ως προς την ευθεία ΒΓ. Επιπλέον, αν το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε ΟΔ = ΔΜ. Γνωρίζουμε όμως ότι $AH=2\cdot O\Delta$, οπότε θα έχουμε $AH=OM$. Όμως, $AH\perp B\Gamma$ και $OM\perp B\Gamma\Rightarrow AH\parallel OM$.

Επομένως $AH \parallel= OM$, οπότε το τετράπλευρο ΑΗΜΟ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα, οι διαγώνιοι του ΑΜ και ΟΗ τέμνονται στο μέσο τους. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι και οι ευθείες ΒΝ και ΓΡ περνούν από το μέσο του ΟΗ.

Ασκήσεις για λύση

Α70. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b,c είναι τέτοιοι ώστε: $ab+bc+ca\geq 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{abc}.$$

Γ62. Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο με $AB\parallel\Gamma\Delta$. Οι διαγώνιοι του τέμνονται στο Ο και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΔ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΜ τέμνει για δεύτερη φορά την πλευρά ΑΔ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι: $OK\parallel AB$.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

στα επόμενα τεύχη θα σας παρουσιάζουμε την απάντηση σπουδαίων επιστημόνων, μαθηματικών και μη, στο ερώτημα «τί είναι τα Μαθηματικά»

3η άποψη (Νο 125): *Ο Πλάτωνας* θεωρούσε **α) την ύπαρξη των αντικειμένων γνώσης ανεξάρτητα από το υποκείμενο-γνώστη καθώς και ανεξάρτητα από τον τρόπο γνώσης τους, β) ότι αυτά τα αντικείμενα γνώσης ήταν αντίγραφα των ιδεατών οντοτήτων, δηλαδή των ιδεών και γ) ότι οι μαθηματικές οντότητες ήταν ένα υποσύνολο των ιδεών**. Αυτή, λοιπόν, είναι η ρεαλιστικότητα του Πλάτωνα: οι μαθηματικές οντότητες είναι ανεξάρτητες από εμάς. *[Γιάννη Κορδάτου, «Ιστορία της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας», σελ.285]*

II. Γεωμετρία αγάπη μου

προλεγόμενα σειρά σημειωμάτων με τα οποία τεκμηριώνουμε τον ισχυρισμό, ότι η "Ευκλείδεια Γεωμετρία" (Ε.Γ.), αποτελεί το κατ' εξοχή παιδευτικό μάθημα. .

2ο σημείωμα **Η αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας,** συνίσταται στο ότι:

I. οδηγηθήκαμε από την εμπειρία στη θεωρία.

αν σκεφτούμε πως η ΕΓ, πρώτη αυτή, ενσωμάτωσε, στο σύστημά της, την ανθρώπινη ιδιότητα-ανάγκη για "απόδειξη" ισχυρισμών, μπορούμε να καταλάβουμε την άποψη ότι η συμβολή της ΕΓ στην προαγωγή της σκέψης ήταν επαναστατική. Οι αρχαίοι γεωμέτρες παρέλαβαν μια διαδικασία εμπειρική και την μετασχημάτισαν σε θεωρητική επιστήμη. Ακριβώς, αυτό το επίτευγμα, ήταν η ανεπανάληπτη προσφορά τους στην ανθρώπινη κοινωνία

II. διευκρινίστηκαν τα είδη των μαθηματικών προτάσεων.

α. οι περισσότερες μαθηματικές προτάσεις εκφράζονται με τη μορφή υποθετικών προτάσεων που περιέχουν ένα συμπέρασμα (δηλ., «αν Α τότε Β» ή «από Α έπεται Β». Το Α λέγεται "υπόθεση" και το Β λέγεται "συμπέρασμα" της πρότασης) *(υποθετικές μαθηματικές προτάσεις)*

β. δύο υποθετικές προτάσεις λέγονται:

i. αντίστροφες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από Β έπεται Α),

ii. αντίθετες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από όχι Α έπεται όχι Β),

iii. ανάστροφες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από όχι Β έπεται όχι Α). Δύο ανάστροφες προτάσεις ή αληθεύουν και οι δύο ή ψεύδονται και οι δύο (*σχετιζόμενες προτάσεις*)

γ. δύο προτάσεις που έπονται αμοιβαία ή που υπακούουν στο νόμο της αναστροφής, θα ονομάζονται ισοδύναμες (ισοδύναμες προτάσεις)

p	q	$p \to q$ $(\equiv \neg p \vee q)$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

δ. μια πολλαπλή πρόταση που εκφράζει ότι από μα πλήρη σειρά από διαζευκτικές υποθέσεις έπονται, αντίστοιχα, μια πλήρης σειρά από διαζευκτικά συμπεράσματα λέγεται ***διαζευκτική πρόταση***. Θα ήταν σοβαρή παράληψη αν δεν σημειώναμε ότι από κάθε διαζευκτική πρόταση έπεται η αντίστροφή της (με άλλα λόγια: από διαζευκτικές υποθέσεις, έπονται επίσης διαζευκτικά συμπεράσματα. Όλα τα αντίστροφα αληθεύουν επίσης) (διαζευκτικές προτάσεις)

III. διατυπώθηκαν οι βασικές "συνθήκες":

α. συνθήκη "αναγκαία": λέμε *"αναγκαία συνθήκη"* μιας ιδιότητας κάθε συμπέρασμα που έπεται από την ιδιότητα αυτή

β. συνθήκη "ικανή": λέμε *"ικανή συνθήκη"* μιας ιδιότητας κάθε υπόθεση απ' την οποία έπεται η ιδιότητα αυτή

γ. συνθήκη "αναγκαία και ικανή": μια ιδιότητα Β θα λέμε ότι είναι συνθήκη *"αναγκαία και ικανή"* της ιδιότητας Α, όταν οι δύο αυτές ιδιότητες *έπονται αμοιβαία*. Δηλ. αν: (από Α έπεται Β) και (από Β έπεται Α)

σημείωση. Εδώ σημειώνουμε πως οι εκφράσεις «αναγκαία και ικανή συνθήκη», «αν και μόνο αν», «πρέπει και αρκεί», «τότε και μόνο τότε, αν» είναι λογικά ισοδύναμες συνθήκες

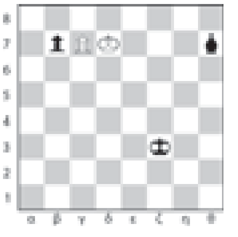
IV. η Ευκλείδεια Γεωμετρία και η πρακτική

Οι δυνατότητες της ΕΓ για σχεδιασμό σε επίγειες αποστάσεις, παραμένουν αναντικατάστατες. Για παράδειγμα ο σχεδιασμός μιας κατοικίας, ενός δρόμου, μιας δεξαμενής και "άπειρων" άλλων πραγμάτων δεν είναι τίποτε άλλο παρά εφαρμογή προτάσεων της ΕΓ. Ακόμη και σε πολλές περιπτώσεις συσκευών χάραξης ευθειών που να είναι πχ., κάθετες ή παράλληλες μεταξύ τους ή κύκλων ή… σ' αυτές τις περιπτώσεις οι συσκευές αυτές έχουν εφοδιασθεί με λογισμικό που έχει ενσωματωμένους κανόνες της ΕΓ. Άλλο παράδειγμα, είναι ο τρόπος που αλληλοσυνδέονται οι βραχίονες και οι τροχοί μιας αμαξοστοιχίας˙ εδώ έχει ενσωματωθεί η λογική των γεωμετρικών τόπων

III. Αυτό το ξέρατε;

Ποιο είναι το πρόβλημα των 8 βασιλισσών, στο σκάκι;

(*η απάντηση στο τέλος της στήλης*)



IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. " Σημειακές Πράξεις", του Νίκου Ιωσηφίδη

προλεγόμενα. *από τον σημαντικό φίλο της στήλης Νίκο Ιωσηφίδη (μαθηματικός – φροντιστής, Βέροια), λάβαμε ένα κείμενο (19 σελίδων), μέσα από τις οποίες προτείνει μια νέα πρωτοποριακή οπτική αντιμετώπισης των θεμάτων της " Ευκλείδειας Γεωμετρίας". Σας παρουσιάζουμε ένα ενημερωτικό κείμενο, χρησιμοποιώντας δικά του λόγια*

«Στην εργασία αυτή εισάγεται μια νέα έννοια "ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΑΞΗ" (συντομ. Σ.Π).

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να "αλγεβρικοποιήσει" ορισμένες αποδεικτικές διαδικασίες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Στο 1^{ο} κεφάλαιο δείχνουμε πως μπορούμε να δημιουργήσουμε και ταυτόχρονα να αποδείξουμε με πολύ σύντομο τρόπο απειρία γεωμετρικών προτάσεων. Για τον σκοπό αυτό το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να γράψουμε στην τύχη μισή γραμμή και να την ερμηνεύσουμε γεωμετρικά. Η γεωμετρική ερμηνεία είναι μια πολύ απλή διαδικασία. Με ελάχιστες γνώσεις από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ο καθένας μπορεί χωρίς σκέψη, χωρίς δυσκολία, χωρίς βοηθητικές γραμμές σ' ένα σχήμα, σε ελάχιστο χρόνο να δημιουργήσει και ταυτόχρονα να αποδείξει μια γεωμετρική πρόταση.

Οι προτάσεις που δημιουργούνται με αυτήν την διαδικασία μπορεί να είναι γνωστές μπορεί όμως να είναι νέες. Κάποιες μπορεί να είναι προφανείς, κάποιες να αποδεικνύονται εύκολα, κάποιες όμως μπορεί να αποδεικνύονται δύσκολα με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε εύκολες εφαρμογές για την κατανόηση της εργασίας.

Στο 2^{ο} κεφάλαιο δείχνουμε πως αποδεικνύονται συγκεκριμένες προτάσεις. Οι προτάσεις που επιλέξαμε εδώ αποδεικνύονται δύσκολα ή πολύ δύσκολα με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Με χρήση μόνο των δύο ιδιοτήτων των Σ.Π οι αποδείξεις αυτών των δύσκολων προτάσεων δεν υπερβαίνουν τις 2 γραμμές.

Εκτός των παραπάνω, οι ΣΠ έχουν και τα εξής πρόσθετα πλεονεκτήματα:

Χωρίς καμιά δυσκολία και σε ελάχιστο χρόνο μπορούν να γενικεύσουν αποδειχθείσες γεωμετρικές προτάσεις. Αυτό γίνεται ενδεικτικά στις ασκήσεις 1, 15, 16 και 21.

Επίσης, από την απόδειξη μιας πρότασης μπορούν να δημιουργήσουν σε ελάχιστο χρόνο χωρίς καμιά δυσκολία νέες προτάσεις σχετικές με την αποδειχθείσα πρόταση. Αυτό γίνεται ενδεικτικά στις ασκήσεις 14 και 21.

Ένα άλλο βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου που περιγράφουμε είναι το ότι όλες οι αποδείξεις που ακολουθούν είναι ανεξάρτητες της θέσης των διαφόρων σημείων πάνω στο επίπεδο με αποτέλεσμα να ισχύουν γενικότερα και όχι μόνο στην περίπτωση του εκάστοτε σχήματος»

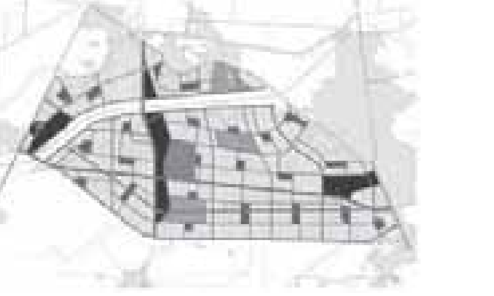
2ο θέμα. Απλός μαθηματικός τύπος προβλέπει (στατιστικά), τις κινήσεις των ανθρώπων στις πόλεις (του Σταύρου Ξενικουδάκη).

Προλεγόμενα: από τον έγκυρο επιστημονικό σχολιαστή Σταύρο Ξενικουδάκη, λάβαμε ένα σημείωμα, στο οποίο αναλύει την δυνατότητα να προβλεφθούν οι κινήσεις των ανθρώπων στις πόλεις.

« Οι άνθρωποι που βρίσκονται οποιαδήποτε στιγμή στο κέντρο μιας πόλης φαίνονται με μια πρώτη ματιά σαν μια τυχαία συλλογή ατόμων. Αλλά μια νέα έρευνα, χρησιμοποιώντας έναν απλό μαθηματικό νόμο, δείχνει ότι τα μοτίβα κίνησης των ανθρώπων στις πόλεις όλου του κόσμου είναι στην πραγματικότητα εξαιρετικά προβλέψιμα, ανεξαρτήτως τόπου. Αυτή η διαπίστωση θα μπορούσε να βοηθήσει στην ανάπτυξη **καλύτερων μοντέλων** για τη διάδοση ασθενειών αλλά και για την καλύτερη **πολεοδόμηση.**

Μελετώντας, κατά δήλωσή τους, ανωνυμοποιημένα δεδομένα, από αυτά που συλλέγουν οι κεραίες κινητής τηλεφωνίας, που καλύπτουν με το σήμα τους κάθε περιοχή μιας πόλης, οι ερευνητές ανακάλυψαν εκείνο που είναι γνωστό, ως η σχέση του αντίστροφου τετραγώνου, ανάμεσα στον αριθμό των ανθρώπων που κινούνται σε μια περιοχή της πόλης και της απόστασης που διήνυσαν για να φτάσουν εκεί, αλλά και της συχνότητας με την οποία κάνουν το ταξίδι.

Μπορεί να φαίνεται προφανές ότι οι άνθρωποι επισκέπτονται τις κοντινότερες περιοχές συχνότερα και τις πιο μακρινές σπανιότερα, αλλά η σχέση που ανακαλύφθηκε πρόσφατα βάζει αυτό το ζήτημα με ποσοτικούς όρους.



Προβλέπει με ακρίβεια ότι ο αριθμός των ανθρώπων που έρχονται από απόσταση 2 χιλιομέτρων, 5 φορές τη βδομάδα, θα είναι ο ίδιος με τον αριθμό των ατόμων που έρχονται από απόσταση 5 χιλιομέτρων, 2 φορές τη βδομάδα!

Βαθύτεροι νόμοι

Όπως επισημαίνει η **Λόρα Αλεσαντρέτι**, που συμμετείχε στην έρευνα, «έχουμε την τάση να σκεφτόμαστε ότι υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν τον τρόπο μετακίνησης, όπως το σύστημα συγκοινωνιών, η μορφολογία μιας συγκεκριμένης τοποθεσίας και οι κοινωνικοοικονομικοί παράγοντες. Αυτό είναι αλήθεια ως ένα βαθμό, αλλά αυτό που μας δείχνει (σ.σ. η μελέτη) είναι ότι υπάρχουν βαθύτεροι νόμοι, που έχουν εφαρμογή παντού».

Οι ερευνητές μελέτησαν δεδομένα μεταξύ 2006 και 2013, που αφορούν 8 εκατομμύρια κατοίκους 6 αστικών περιοχών: Της Βοστόνης, της Σιγκαπούρης, της Λισσαβόνας, του Πόρτο της Πορτογαλίας, του Ντακάρ της Σενεγάλης και του Αμπιτζάν της Ακτής Ελεφαντοστού. Προηγούμενες αναλύσεις είχαν επεξεργαστεί παρόμοια δεδομένα για να προσδιορίσουν τα μοτίβα μετακίνησης μεμονωμένων ανθρώπων, αλλά η νέα μελέτη επικέντρωσε σε τοποθεσίες, εξετάζοντας τον αριθμό των επισκέψεων, από πόσο μακριά και πόσο συχνά γίνονται. Διαπιστώθηκε ότι όλες οι ξεχωριστές επιλογές που κάνουν οι άνθρωποι - από το να πάνε τα παιδιά στο σχολείο, να πάνε για ψώνια, μέχρι το να πάνε βόλτα - ακολουθούν στο σύνολό τους τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου.

Μια εξήγηση γι' αυτήν την ισχυρή στατιστική σχέση είναι ότι το ταξίδι απαιτεί χρόνο και ενέργεια και οι άνθρωποι διαθέτουν περιορισμένες ποσότητες και απ' τα δύο. Υπάρχει κάτι πολύ θεμελιώδες στη συμπεριφορά τους. Είτε κατοικούν στη Βοστόνη είτε κατοικούν στη Σενεγάλη, προσπαθούν να **βελτιστοποιήσουν** τη μέρα τους. Η **κατανόηση** αυτών των **μοτίβων** είναι σημαντική όχι μόνο για τον σχεδιασμό του συστήματος των Μέσων Μαζικής Μεταφοράς και την τοποθεσία εμπορικών κέντρων, αγορών κ.ο.κ., αλλά και για τη μοντελοποίηση της διασποράς μολυσματικών ασθενειών»

Μοντέλα βαρύτητας

Πολλοί ερευνητές εξετάζουν τις μετακινήσεις χρησιμοποιώντας «μοντέλα βαρύτητας», που υποθέτουν ότι η μετακίνηση μεταξύ πόλεων είναι ανάλογη με το μέγεθος του πληθυσμού τους. Αλλά αυτά τα μοντέλα δεν παίρνουν υπόψη τα μοτίβα ταξιδιού μέσα στις ίδιες τις πόλεις, πληροφορία που είναι πολύ κρίσιμη όσον αφορά τα μέτρα δημόσιας υγείας για τον περιορισμό διάδοσης μεταδοτικών ασθενειών. Για παράδειγμα, οι κάτοικοι συνοικιών μεγαλουπόλεων είναι πιθανότερο να κάνουν συχνές μικρές διαδρομές μέσα στη συνοικία τους, παρά σε κάποια άλλη περιοχή της πόλης.Ο επιδημιολόγος Σαμ Σκαρπίνο, του Πανεπιστημίου Νορθγουέστερν, τονίζει ότι «αυτά τα μοτίβα έχουν εξαιρετικές επιπτώσεις στον τρόπο διάδοσης της COVID». Σε μια αγροτική περιοχή, όπου πολλοί άνθρωποι θα πάνε π.χ. στο ίδιο μαγαζί, η αντίστοιχη μικρή πόλη θα βιώσει απότομες εξάρσεις του αριθμού λοιμώξεων, καθώς ο ιός σαρώνει την κοινότητα. Σε μια μεγαλύτερη πόλη, η διάδοση απαιτεί περισσότερο χρόνο, εξηγεί, επειδή μίνι εξάρσεις της επιδημίας μπορούν να εμφανιστούν σε κάθε γειτονιά ως ένα βαθμό ξεχωριστά η μια από την άλλη. (***πηγή***: *«Scientific American»)*

3ο θέμα. "Αρχή της περιστεροφωλιάς" (του Θεμιστοκλή Κόγια) *παραθέτουμε το 2ο (και τελευταίο μέρος) του σημειώματος αυτού.*

«Αν n+1 περιστέρια καθίσουν σε n φωλιές, τότε σε μία τουλάχιστον φωλιά θα καθίσουν 2 περιστέρια. Έστω ότι καμία από τις "περιστεροφωλιές" δεν περιέχει 2 περιστέρια ή περισσότερα. Τότε οι k περιστεροφωλιές θα περιέχουν συνολικά το πολύ k περιστέρια, το οποίο είναι άτοπο, διότι υπάρχουν τουλάχιστον k+1 περιστέρια. Σε οποιοδήποτε κείμενο της Ελληνικής γλώσσας, σε μία σειρά από 26 λέξεις τουλάχιστον 2 αρχίζουν από το ίδιο γράμμα.

[Ισοδύναμη διατύπωση]

Έστω φυσικός αριθμός k και k+1 ή περισσότερα αντικείμενα τοποθετούνται σε k κουτιά. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί, το οποίο περιέχει δύο ή περισσότερα αντικείμενα. Σε ολόκληρη την Αττική υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος από τρίχες στο κεφάλι τους. Στο σχολείο μας (Γυμνάσιο και Λύκειο) υπάρχουν τουλάχιστον δύο μαθητές που έχουν την ίδια ημέρα γενέθλια.

Αν επιλέξουμε πέντε αριθμούς από τους ακέραιους 1-8, τότε δύο από αυτούς έχουν άθροισμα 9.

Μία αντιστοίχιση των k+1 ή περισσοτέρων στοιχείων ενός συνόλου Α στα k στοιχεία ενός συνόλου Β δεν μπορεί να γίνει ένα προς ένα στοιχείο.

Για παράδειγμα όταν συγκρίνουμε δύο τρίγωνα αναζητούμε να αντιστοιχίσουμε στοιχεία ένα προς ένα και αντίστοιχα μεταξύ τους. Ας υποθέσουμε τρεις πλευρές. Αν θέλαμε να συγκρίνουμε τρίγωνο με τετράπλευρο η αντιστοίχιση των πλευρών δεν θα μπορούσε να γίνει μία προς μία.

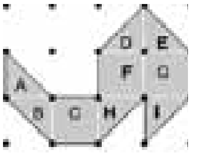
Ας εξετάσουμε τώρα κάποιους γενικούς κανόνες που μπορούμε να συνάγουμε για τη χρήση της αρχής.

• Σε πρώτη φάση προσδιορίζουμε τους ρόλους. Δηλαδή ποια αντικείμενα έχουν το ρόλο των «περιστεριών» και ποια αντικείμενα το ρόλο της «περιστεροφωλιάς».

• Τα αντικείμενα «περιστέρια» και «φωλιές» είναι εντελώς αφηρημένα και μπορεί να αντικαθίστανται σχεδόν από οτιδήποτε βολικό.

• Φυσιολογικά φροντίζουμε ώστε οι "περιστεροφωλιές" να είναι λιγότερες από τα περιστέρια.

• Φτιάχνουμε έναν κανόνα τοποθέτησης των περιστεριών στις φωλιές τους. Το συμπέρασμα της αρχής της "περιστεροφωλιάς" ισχύει για οποιαδήποτε τοποθέτηση περιστεριών σε φωλιές, οπότε επιλέγουμε τον κανόνα αντιστοίχισης, ώστε «αρκετά» από τα περιστέρια να βρίσκονται στην ίδια περιστεροφωλιά που δίνει τη ζητούμενη ιδιότητα.



• Εφαρμόζουμε την αρχή της "περιστεροφωλιάς" με βάση τα παραπάνω».

4ο θέμα. «η Γεωμετρία κάνει τους ανθρώπους να ξεχωρίζουν (το πείραμα με τους μπαμπουΐνους)»

προλεγόμενα. από τον φίλο της στήλης Χρήστο Καμιραβτζά λάβαμε ένα σημείωμα από την εφημερίδα "The New York Times" (το σημείωμα το αλίευσε από ανάρτηση στο Διαδίκτυο). Επειδή είναι ενδιαφέρον, σας το παρουσιάζουμε.

«Ο Στάνισλας Ντεάν, γνωσιακός νευροεπιστήμονας του Κολεγίου της Γαλλίας, παρουσίασε το φθινόπωρο σε συνέδριο στο Βατικανό την έρευνα που πραγματοποιεί αναζητώντας το στοιχείο που καθιστά τον άνθρωπο, ιδιαίτερο και μοναδικό. Επί δεκαετίες, άλλωστε, προσπαθεί να εντοπίσει τις εξελικτικές ρίζες του μαθηματικού μας ενστίκτου. Στο βιβλίο του «*Η αίσθηση των αριθμών: Πώς ο εγκέφαλος δημιουργεί Μαθηματικά*», πραγματεύεται αυτήν ακριβώς τη διαδικασία. Σήμερα, η στόχευσή του έχει αλλάξει και ο δρ Ντεάν θέλει να διαπιστώσει τι είδους σκέψεις ή υπολογισμοί δημιουργούνται αποκλειστικά στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Ο ίδιος εκτιμά πως μέρος της απάντησης βρίσκεται στο ένστικτό μας για τη Γεωμετρία.

Η μελέτη

Για τον δρα Ντεάν, η ικανότητά μας να φανταζόμαστε (ένα τρίγωνο, τους νόμους της Φυσικής, μία τετραγωνική ρίζα) είναι ακριβώς αυτό που μας καθιστά μοναδικούς στο ζωικό βασίλειο.

Μάλιστα, όπως υπογραμμίζει, η ίδια ικανότητα είναι αυτή που μας επιτρέπει να επινοήσουμε τη θρησκεία, παρότι μεταξύ των δύο υπάρχει τεράστια απόσταση. Την περασμένη άνοιξη, ο δρ Ντεάν και οι συνεργάτες του δημοσίευσαν στην επιθεώρηση Proceeding of the National Academy of Sciences μία μελέτη στην οποία συνέκριναν την ικανότητα αντίληψης γεωμετρικών σχημάτων ανθρώπου και μπαμπουΐνου. Στόχος των επιστημόνων δεν ήταν μόνον η μέτρηση της οπτικής αντίληψης αλλά και της **βαθύτερης γνωσιακής** διαδικασίας. Ο Πλάτωνας πίστευε ότι μόνον **ο άνθρωπος** έχει **αντίληψη της γεωμετρίας**. Ο Νόαμ Τσόμσκι, αντιθέτως, πιστεύει ότι η ανθρώπινη ταυτότητά μας **βασίζεται στον λόγο.**

Στην έρευνά του ο δρ Ντεάν χρησιμοποίησε την τελευταία λέξη της τεχνολογίας: λειτουργική μαγνητική τομογραφία (fMRI), τεχνητή νοημοσύνη, μαθηματικά πρότυπα κ.ο.κ. Στους συμμετέχοντες, ανθρώπους και μπαμπουίνους, έδειξε έξι τετράπλευρα και τους ζήτησε να υποδείξουν το διαφορετικό. Όλοι οι άνθρωποι, Γάλλοι ενήλικοι και νήπια, αλλά και ενήλικοι από την ύπαιθρο της Ναμίμπια χωρίς καμία επίσημη εκπαίδευση, τα κατάφεραν καλύτερα όταν τα σχήματα ήταν κανονικά, με παράλληλες πλευρές και ορθές γωνίες. Οι ερευνητές εκτιμούν ότι αυτό το «φαινόμενο της γεωμετρικής κανονικότητας» συνιστά την «υπογραφή» της ανθρώπινης μοναδικότητας. Η γεωμετρική κανονικότητα δεν έκανε καμία διαφορά στους μπαμπουίνους, οι οποίοι μπορούσαν μεν να διακρίνουν το μήλο ανάμεσα σε έξι φέτες καρπούζι, αλλά δεν μπορούσαν να διακρίνουν το διαφορετικό πολύγωνο. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι υπόλοιπες εξετάσεις και δοκιμασίες που πραγματοποίησαν οι ερευνητές. Στη λειτουργική μαγνητική τομογραφία, οι περιοχές του εγκεφάλου που λειτουργούν όταν επεξεργαζόμαστε γεωμετρικά σχήματα, «μιλάμε τη γλώσσα της γεωμετρίας», είναι εντελώς διαφορετικά από αυτά που ενεργοποιούνται από τον γραπτό ή προφορικό λόγο. Η γλώσσα συχνά θεωρείται ότι είναι το χαρακτηριστικό της ανθρώπινης μοναδικότητας. Ο δρ Ντεάν, ωστόσο, υποστηρίζει ότι η ιδιαιτερότητά μας χαρακτηρίζεται από μία ακόμη πιο θεμελιώδη ικανότητα. «Πιθανώς ο λόγος ίσως να μην ξεκίνησε ως μια μέθοδος επικοινωνίας, αλλά μια μέθοδος αναπαράστασης. Ίσως να είναι ικανότητα δηλαδή να αναπαριστάς στοιχεία του κόσμου που μας περιβάλλει», επισημαίνει».

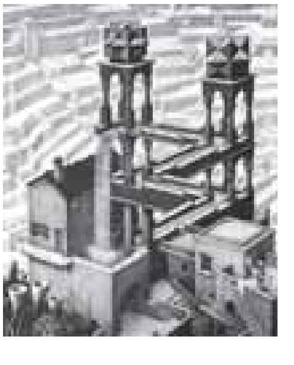
5ο θέμα. Για την τέχνη του χαράκτη M. K. Escher, Edit name

προλεγόμενα. ο φίλος της στήλης Χριστόδουλος Κονταξής, μας παρέπεμψε σε δημοσίευμα της ιστοσελίδας «ΘΑΛΗΣ+ΦΙΛΟΙ» (23/03/2022, με τίτλο: «Για την τέχνη του χαράκτη Μ.Κ. Έσερ»). Σ' αυτό το σημείωμα, ο συγγραφέας και μαθηματικός Ανδρέας Λύκος συζητά με τον δημοσιογράφο Γιώργο Καρουζάκη για την τέχνη του σπουδαίου Ολλανδού χαράκτη *M. K. Escher* Διαβάζουμε:

«Η συζήτηση έχει αφορμή μία ξεχωριστή επέτειο. Την Κυριακή 27 Μαρτίου 2022 συμπληρώθηκαν 50 χρόνια από τον θάνατο του σπουδαίου Ολλανδού χαράκτη και εικαστικού. Ο Έσερ γεννήθηκε στις 17 Ιουνίου του 1898 στο Leeuwarden (Λίβαρντεν) της

Ολλανδίας και πέθανε στην πόλη Λάρεν στις 27 Μαρτίου του 1972.

Η τέχνη του, κυρίως χαρακτική, με ιδιόμορφες απεικονίσεις αντικειμένων, χώρων και περίεργων πλασμάτων, καθώς και η παράδοξη αρχιτεκτονική των κτιρίων που απεικόνισε στα έργα του, αντλούν έμπνευση από τα Μαθηματικά, συχνά από τις αρχές της προβολικής Γεωμετρίας και τις προτάσεις της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.



Για την τέχνη του Έσερ, και την ιδιόμορφη σχέση της με τα Μαθηματικά, ο Ανδρέας Λύκος, συγγραφέας του βιβλίου "Αναμνήσεις Συμμετρίας" το οποίο εμπνεύστηκε από την τέχνη του Έσερ, σκιαγραφεί το πορτραίτο του ξεχωριστού εικαστικού, και εξηγεί πώς ο χαράκτης κατάφερε να ενώσει με μοναδικό τρόπο την ελευθερία της τέχνης με τον κόσμο των Μαθηματικών».

6ο θέμα προβλήματα που δεν λύνονται με "κανόνα και διαβήτη"

Με υπόδειξη συνάδελφου, παραθέτουμε μερικά προβλήματα που οδηγούν σε «μη γεωμετρικές κατασκευές», δηλ. σε κατασκευές που δεν μπορούμε να λύσουμε χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη. Το δανειστήκαμε από: *COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRE, (Exerciceses de Géométrie)(εκδ. Α. Καραβία, Αθήνα 1952)(το γνωστό βιβλίο των Ιησουϊτών).* Η σήμανση των §§ έγινε με βάση την σήμανση του κειμένου που επικαλεστήκαμε.

01^{o}. Δίνεται γωνία xoy, σημείο Μ στο εσωτερικό της. Να κατασκευαστεί ευθεία (ε) που περνά από το Μ, να τέμνει τις ox, oy στα Κ,Λ αντίστοιχα, σε τρόπο ώστε το τμήμα ΚΛ να έχει ελάχιστο μήκος [§168, §1615]

02^{o}. Να διαιρεθεί γωνία σε τρία ίσα μέρη [§501 σημείωση]

03^{o}. ***[πρόβλημα του Lez-01]***, [Τέταρτου βαθμού] Από δοσμένο σημείο να κατασκευαστεί κοινή τέμνουσα δύο δοσμένων περιφερειών, ώστε η διαφορά των χορδών που ορίζονται να έχουν δοσμένο μήκος [§880α]

04^{o}. Να γραφεί περιφέρεια η οποία να αποτέμνει πάνω σε τρεις δοσμένες περιφέρειες χορδές δοσμένων μηκών λ,μ,ν. [§881α]

05^{o}. [εξίσωση τέταρτου βαθμού]Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν γνωρίζουμε τα ίχνη των διχοτόμων του [§1242 ι(2), 1523γ(6)]

06^{o}. [εξίσωση δωδέκατου βαθμού] Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν γνωρίζουμε τα ίχνη των συμμετροδιάμεσων του [§1523γ(7)]

07^{o}. Να βρεθεί σημείο Δ, κοινό τριών céviennes ΑΑ΄,ΒΒ΄,ΓΓ΄ δοσμένου τριγώνου ΑΒΓ και τέτοιο ώστε τα μήκη ΔΑ΄, ΔΒ΄,ΔΓ΄, να είναι ίσα μεταξύ τους [§ 1242μ]

08^{o}. Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν γνωρίζουμε: το έγκεντρο Ι, το ορθόκεντρο Η, το κέντρο G της περιφέρειας Euler αυτού [§1520γ]

09^{o}. [έβδομου βαθμού]Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν γνωρίζουμε: τα συμμετρικά σημεία των κορυφών του ως προς τις απέναντι πλευρές [§1523γ]

10^{o}. [εξίσωση δέκατου τέταρτου βαθμού] Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν δίνονται τρεις διχοτόμοι του δια του ίδιου σημείου [§1523ε]

11^{o}. [εξίσωση τρίτου βαθμού] Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν γνωρίζουμε τις αποστάσεις του περικέντρου του από τις τρεις πλευρές του [§1523ε]

12^{o}. [εξίσωση τρίτου βαθμού] Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν γνωρίζουμε τις αποστάσεις του ορθοκέντρου του από τις τρεις κορυφές του [§1523ε]

13^{o}. [εξίσωση έκτου βαθμού] Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν γνωρίζουμε μια διάμεσο του, ένα ύψος του και μια διχοτόμο του, από διαφορετικές κορυφές αυτού. [§1523ζ]

14^{o}. [εξίσωση τέταρτου βαθμού][***πρόβλημα του Πάππου***] Δίνεται γωνία και σημείο εντός αυτής. Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα που να περνά από το δοσμένο σημείο, να έχει τα άκρα του στις πλευρές της δοσμένης γωνίας και να έχει δοσμένο μήκος [§1538]

15^{o}. ***[πρόβλημα του Alhazen]*** [Άραβας, 11^{ος} αιώνας], δεν λύνεται με χάρακα και διαβήτη για την περίπτωση του ελλειπτικού σφαιριστηρίου (μπιλιάρδου)[E. Duporq 1873-1903] [§1546]

Το πρόβλημα του Alhazen διατυπώνεται έτσι: «*Σε μπιλιάρδο τοποθετείται μια σφαίρα σε σημείο Α. Προς ποια διεύθυνση πρέπει να κινηθεί η σφαίρα, ώστε, μετά δύο διαδοχικές ανακλάσεις στο πλαίσιο του μπιλιάρδου, να περάσει πάλι από το σημείο Α;*»

16^{o}. [***πρόβλημα Bobillier***] Να διαιρεθεί τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα δισορθογώνια τετράπλευρα [Γεωμετρικά λύνεται μόνο για ισοσκελές τρίγωνο] [§1624α]

17^{o}. ***[πρόβλημα του Lez-02]***, [εξίσωση τέταρτου βαθμού]Να διαιρεθεί τρίγωνο σε τρία δισορθογώνια τετράπλευρα, ανάλογα δοθέντων αριθμών λ,μ,ν [§1624α, §1674]

18^{o}. ***[πρόβλημα Leibniz]*** [εξίσωση όγδοου βαθμού]Να διαιρεθεί τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα μέρη με δύο ευθείες που να είναι κάθετες μεταξύ τους [§1624α, §1674δ]

19^{o}. ***[πρόβλημα Newton]*** Να βρεθεί η διάμετρος περιφέρειας όταν γνωρίζουμε τα μήκη των χορδών τριών διαδοχικών τόξων που το άθροισμά τους είναι μισή περιφέρεια (§1712β) **ή** Να κατασκευαστεί το μέγιστο τετράπλευρο, όταν γνωρίζουμε τρεις πλευρές του [§1712β]

20^{o}. Να γραφεί το μέγιστο τραπέζιο σε δοσμένο κυκλικό τομέα[§1719 (3)]

21^{o}. [τέταρτου βαθμού, κατά Lagrange]Να τμηθεί δοσμένη τρίεδρη γωνία, από ένα επίπεδο, κατά δοσμένο τρίγωνο[§1901γ]

22^{o}. ***[πρόβλημα του Gergonne]*** Δίνονται επίπεδο (π) και εκτός αυτού τρία σημεία Α,Β,Γ. Να βρεθεί πάνω στο (π) σημείο Μ σε τρόπο ώστε το άθροισμα ΜΑ+ΜΒ+ΜΓ να είναι το ελάχιστο [§1901γ]

VI. ειδήσεις και...ειδήσεις

1. Η εικασία του Catalan *«Εικασία του Catalan» (1844):* «Το μόνο ζεύγος διαδοχικών φυσικών αριθμών που γράφονται ως τέλειες δυνάμεις είναι το 8,9». *Η εικασία αυτή αποδείχτηκε από τον Ρουμάνο αριθμοθεωρητικό Preda Mihăilescu, τον Απρίλη του 2002, ο οποίος διατύπωσε το γνωστό ως "θεώρημα του Mihăilescu":* «Η μόνη λύση που χρησιμοποιεί φυσικούς αριθμούς στην εξίσωση $x^p-y^q=1$ με p,q>1, x,y,p,q∈**N***, είναι $2^3,3^2$» (Posted by Dimitri Sykias)\

2. Ο Γιόχαν Μπερνουλί, ένας από τους οκτώ διάσημους μαθηματικούς που έδωσε η ίδια ελβετική οικογένεια μέσα σε τρεις γενεές, ήταν πιστός οπαδός του Λάϊμπνιτς και δεν αποδεχόταν τον Νεύτωνα. Συντέλεσε σημαντικά στη διάδοση του Διαφορικού Λογισμού στην Ευρώπη (LIFE-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΉ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ, p.113)

V. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε";

Η διατύπωση του προβλήματος : «πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε 8 βασίλισσες σε μια κανονική (8×8) σκακιέρα χωρίς καμία από τις βασίλισσες να επιτίθεται στην άλλη;». Το πρόβλημα γενικεύεται για "nxn" βασίλισσες, σε μια "nxn" σκακιέρα. Από κάποια περιστασιακή αρρυθμία στον χρόνο έκδοσης του περιοδικού, σας αναγγέλλουμε ότι στο τεύχος 126, θα δημοσιεύσουμε, μια αναφορά στο θέμα, («Discrete Mathematics 62 (1986) 219-221, North-Holland») του Αντώνη Παναγιωτόπουλου (ομότιμου καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιά).

Διάταξη – Απόλυτη Τιμή - Ρίζες

Ντόρβας Νίκος – Σίσκου Μαρία

Άσκηση1η. **Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις αν:**

(Ι): $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

(ΙΙ): $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2\alpha\beta}+\dfrac{\beta^3+\gamma^3}{2\beta\gamma}+\dfrac{\gamma^3+\alpha^3}{2\gamma\alpha}=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$

Λύση:

(Ι) Η δοθείσα ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως: $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$. Συνεπώς πρέπει $(\alpha=\beta \text{ και } \beta=\gamma \text{ και } \gamma=\alpha)$. Άρα $\alpha=\beta=\gamma$. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

(ΙΙ) $(\text{ΙΙ})\overset{\cdot 2\alpha\beta\gamma}{\Leftrightarrow}\alpha^3\gamma+\beta^3\gamma+\alpha^3\beta+\gamma^3\beta+\beta^3\alpha+\gamma^3\alpha=$
$=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$
$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta)^2+\beta\gamma(\beta-\gamma)^2+\gamma\alpha(\gamma-\alpha)^2=0$
$\overset{\alpha,\beta,\gamma>0}{\Leftrightarrow}(\alpha-\beta=0 \text{ και } \beta-\gamma=0 \text{ και } \gamma-\alpha=0)$
$\Leftrightarrow(\alpha=\beta \text{ και } \beta=\gamma \text{ και } \gamma=\alpha)$. Αφού $\alpha=\beta=\gamma$, έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 2η. **Αν $x=\dfrac{1}{\sqrt{384}}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:**

$$A=(16x+1)(4\sqrt{x}+1)(2x^{\frac{1}{4}}+1)(\sqrt{2}x^{\frac{1}{8}}+1)(\sqrt{2}x^{\frac{1}{8}}-1)$$

Λύση:

$A=(16x+1)(4\sqrt{x}+1)(2x^{\frac{1}{4}}+1)((\sqrt{2}x^{\frac{1}{8}})^2-1^2)$
$=(16x+1)(4\sqrt{x}+1)(2x^{\frac{1}{4}}+1)(2x^{\frac{1}{4}}-1)$
$=(16x+1)(4\sqrt{x}+1)((2x^{\frac{1}{4}})^2-1^2)$
$=(16x+1)(4\sqrt{x}+1)(4\sqrt{x}-1)$
$=(16x+1)((4\sqrt{x})^2-1^2)=256x^2-1$

Για $x=\dfrac{1}{\sqrt{384}}$ προκύπτει ότι $A=-\dfrac{1}{3}$.

Άσκηση 3η. **Αν ισχύει ότι $x>1$, να αποδείξετε ότι $A<B<\Gamma$, όπου: $A=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$, $B=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$, $\Gamma=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$.**

Λύση:

Πολλαπλασιάζοντας τους όρους των δοθέντων κλασμάτων με τις αντίστοιχες συζυγείς παραστάσεις αριθμητή και παρονομαστή προκύπτουν τα εξής:

$$A=\frac{\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

$$B=\frac{\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

$$\Gamma=\frac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\left[\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right]\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$$

Ισχύει ότι:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}<\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$$

Συνεπώς $\Gamma>1$ και $A<B<1$ (Γιατί;), όπου και έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 4η. **Κατά μήκος ενός ευθύγραμμου δρόμου απαντώνται στο 20οkm, 35οkm και 60ο km τρία υποκαταστήματα Α, Β, Γ (αντιστοίχως) μιας αλυσίδας SuperMarket. Να βρεθεί σε ποιο σημείο του δρόμου πρέπει να κατασκευαστεί μια κεντρική αποθήκη ανεφοδιασμούτων προϊόντων, προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι μετακινήσεις των φορτηγών μεταφοράς προς τα τρία υποκαταστήματα.**

Λύση:
Έστω $M(x,0)$ το σημείο κατά μήκος του δρόμου όπου πρέπει να κατασκευαστεί η αποθήκη ανεφοδιασμού. Ζητείται η ελαχιστοποίηση της τιμής της παράστασης $A=(MA)+(MB)+(M\Gamma)$ (1). Ισοδύναμα η (1) γράφεται ως:

$$(1) \Leftrightarrow A=d(x,20)+d(x,35)+d(x,60)$$

$$\Leftrightarrow A=|x-20|+|x-35|+|x-60|$$

I) Αν $x\le 20$: $A=115-3x$ και προκύπτει ότι: $x\le 20 \Leftrightarrow -3x\ge -60 \Leftrightarrow -3x+115\ge -60+115$
$\Leftrightarrow A\ge 55$

II) Αν $20<x\le 35$: $A=75-x$ και έπεται ότι: $40\le A<55$

III) Αν $35<x\le 60: A=x+5$ και έπεται ότι: $40<A\le 65$

IV) Αν $x>60$: $A=3x-115$, άρα $A>65$. Τελικά $A_{min}=40$, με την ελάχιστη τιμή να επιτυγχάνεται για $x=35$. Άρα η αποθήκη ανεφοδιασμού κρίνεται σκόπιμο να κατασκευαστεί στο 35ο kmτου δρόμου (στο σημείο όπου βρίσκεται και το υποκατάστημα Β).

Άσκηση 5η. α) Να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση: $\mathbf{A=3|x|-|3|x|-3x|-\left|5|x|+\frac{2}{|x|}\right|^2}$

β) Να λυθεί η ανίσωση

$$\mathbf{3|x|-|3|x|-3x|-\left|5|x|+\frac{2}{|x|}\right|<13x-\frac{4}{x^2}+19}$$

Λύση: α) Για $x\neq 0$ έχουμε

$$A=3|x|-|3|x|-3x|-\left|5|x|+\frac{2}{|x|}\right|^2$$

Γνωρίζουμε ότι $|x|\ge x \Leftrightarrow$
$3|x|\ge 3x \Leftrightarrow 3|x|-3x\ge 0$

Άρα $A=3|x|-3|x|+3x-(5|x|+\frac{2}{|x|})^2=$

$$3x-25|x|^2-20\frac{|x|}{|x|}-\frac{4}{|x|^2}=3x-25x^2-\frac{4}{x^2}-20$$

β) Έχουμε

$$3|x|-|3|x|-3x|-\left|5|x|+\frac{2}{|x|}\right|<13x-\frac{4}{x^2}+19$$

$$3x-25x^2-\frac{4}{x^2}-20<13x-\frac{4}{x^2}+19 \Leftrightarrow$$

$$-25x^2-10x-1<0 \Leftrightarrow -(5x+1)^2<0 \Leftrightarrow$$

$$5x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\frac{1}{5}$$

Άσκηση 6η. Δίνεται $|x|\le 3$

α) Να δείξετε ότι: $|x^4+3x^3+x-2|\le 167$

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

I. $\sqrt{|x^2-7x+12|+|x^2-5x+6|}=0$

II. $|x-4|-|x^2-7x+12|=0$

Λύση:

α) $|x^4+3x^3+x-2|\le |x|^4+3|x|^3+|x|+|-2| \Leftrightarrow$

$|x^4+3x^3+x-2|\le 81+81+3+2 \Leftrightarrow$

$|x^4+3x^3+x-2|\le 167$

β) I. $\sqrt{|x^2-7x+12|+|x^2-5x+6|}=0 \Leftrightarrow$

$x^2-7x+12=0$ και $x^2-5x+6=0$

$\Delta_1=49-48=1$ και $\Delta_2=25-24=1$

$x_1=4$ ή $x_2=3$ και $x_1=3$ ή $x_2=2$. Άρα $x=3$.

II. $|x-4|-|x^2-7x+12|=0 \Leftrightarrow$

$|x-4|-|(x-3)(x-4)|=0 \Leftrightarrow$

$|x-4|\cdot(1-|x-3|)=0 \Leftrightarrow$

$|x-4|=0$ ή $1-|x-3|=0 \Leftrightarrow$

$x-4=0$ ή $|x-3|=1 \Leftrightarrow$

$x=4$ ή $x-3=1$ ή $x-3=-1 \Leftrightarrow$

$x=4$ ή $x=4$ ή $x=2 \Leftrightarrow x=2$.

Άσκηση 7η. α) Δεδομένου ότι $x,y\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $x^2+13y^2-6xy-4y+1\ge 0$.

β) Να βρείτε τις τιμές των $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισότητα.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\mathbf{x^2+13y^2-6|xy|-4|y|+1=0}$$

Λύση:

α) $x^2+13y^2-6xy-4y+1\ge 0 \Leftrightarrow$

$x^2-6xy+9y^2+4y^2-4y+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-3y)^2+(2y-1)^2\geq 0$, που ισχύει

β) $(x-3y)^2+(2y-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$x-3y=0$ και $2y-1=0 \Leftrightarrow$

$x=3y$ και $y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $y=\frac{1}{2}$

γ) $x^2+13y^2-6|xy|-4|y|+1=0 \Leftrightarrow$

$|x|^2+13|y|^2-6|xy|-4|y|+1=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$

$(|x|-3|y|)^2+(2|y|-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$|x|-3|y|=0$ και $2|y|-1=0 \Leftrightarrow$

$|x|=3|y|$ και $|y|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x|=\frac{3}{2}$ και $|y|=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{3}{2}$ και $y=\pm\frac{1}{2}$.

Δηλαδή το σύνολο λύσεων είναι

$(x,y)=\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$

Άσκηση 8η. α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά τις σχέσεις: $|x-3|\leq 4$ (I) και $|y-6|\geq 2$ (II)

β) Να λύσετε αλγεβρικά τις ανισώσεις (I) και (II).

Λύση:

α) $|x-3|\leq 4 \Leftrightarrow d(x,3)\leq 4$, σημαίνει ότι η απόσταση του x από το 4 (στην ευθεία των πραγματικών αριθμών) είναι μικρότερη ή ίση των 4 μονάδων. Με κέντρο το 3 και ακτίνα 4 φέρνουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία στα σημεία με τετμημένη -1 και 7. Ζητάμε τα σημεία της ευθείας εσωτερικά του κύκλου και τα σημεία της περιφέρειας, άρα $-1\leq x\leq 7 \Leftrightarrow x\in[-1,7]$.

Όμοια $|y-6|\geq 2 \Leftrightarrow d(y,6)\geq 2$, σημαίνει ότι η απόσταση του y από το 6 (στην ευθεία των πραγματικών αριθμών) είναι μεγαλύτερη ή ίση των 2 μονάδων. Με κέντρο το 6 και ακτίνα 2 φέρνουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία στα σημεία με τετμημένη 4 και 8. Ζητάμε τα σημεία της ευθείας που βρίσκονται εξωτερικά της περιφέρειας και αυτά που είναι πάνω σε αυτήν, άρα $y\leq 4$ ή $y\geq 8$.

β) $|x-3|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq x-3\leq 4 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 7$

$|y-6|\geq 2 \Leftrightarrow y-6\leq -2$ ή $y-6\geq 2 \Leftrightarrow$

$y\leq 4$ ή $y\geq 8$.

Άσκηση 9η. Δίνεται η παράσταση

$$A=\frac{\sqrt{x^2+4|x|+4}}{|x|+2}+\frac{\sqrt{x^2+6|x|+9}}{x^2+3|x|}+\frac{2(|x|-1)^2}{|x|-x}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A

γ) να λύσετε την εξίσωση $A=2$

Λύση:

α) Πρέπει και αρκεί

$$\left.\begin{array}{r} x^2+4|x|+4\geq 0\\ |x|+2\neq 0\\ x^2+6|x|+9\geq 0\\ x^2+3|x|\neq 0\\ |x|-x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \text{ισχύει}\\ \text{ισχύει}\\ \text{ισχύει}\\ x^2+3|x|\neq 0\\ |x|-x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}|x|(|x|+3)\neq 0\\ |x|\neq x\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}|x|\neq 0 \text{ και } |x|+3\neq 0\\ |x|\neq x\end{array}\right\}\Leftrightarrow x<0$$

β) Εχουμε ότι:

$$A=\frac{\sqrt{x^2+4|x|+4}}{|x|+2}+\frac{\sqrt{x^2+6|x|+9}}{x^2+3|x|}+\frac{2(|x|-1)^2}{|x|-x}=$$

$$\frac{\sqrt{|x|^2+4|x|+4}}{|x|+2}+\frac{\sqrt{|x|^2+6|x|+9}}{|x|^2+3|x|}+\frac{2(|x|-1)^2}{|x|-x}=$$

$$\frac{\sqrt{(|x|+2)^2}}{|x|+2}+\frac{\sqrt{(|x|+3)^2}}{(|x|+3)\cdot|x|}+\frac{2(|x|-1)^2}{|x|-x}=$$

$$\frac{|x|+2}{|x|+2}+\frac{|x|+3}{(|x|+3)\cdot|x|}+\frac{2(|x|-1)^2}{|x|-x}=$$

$$1+\frac{1}{|x|}+\frac{2(|x|-1)^2}{|x|-x}\overset{x<0}{=}1+\frac{1}{-x}+\frac{2(-x-1)^2}{-2x}=$$

$$1-\frac{1}{x}-\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{x-1-x^2-2x-1}{x}=-\frac{x^2+x+2}{x}$$

γ) $A=2 \Leftrightarrow -\frac{x^2+x+2}{x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \overset{\Delta=1>0}{\Leftrightarrow}$

$x=-1$ ή $x=-2$.

Τα Nobel του 2022

Πάντα έχουν, ενδιαφέρον, οι βραβεύσεις με τα **Nobel**. Η επικαιρότητα, η έρευνα, η ανακάλυψη, ο τρόπος πως διαμορφώνονται οι επιστήμες σε ένα απώτερο μέλλον, παίζουν το ρόλο τους. Όλα αυτά μαζί, με αθέατο ρυθμιστή, **τα Μαθηματικά**, επηρεάζουν τις εξελίξεις, σε μια οικουμενική πραγματικότητα, της καλύτερης δυνατής εκδοχής, στο σύγχρονο κόσμο. Έτσι για φέτος είχαμε:

- **Ιατρική:** Στον Σουηδό **Svante Pääbo,** απονέμεται από την Ακαδημία Επιστημών της Σουηδίας το Nobel Ιατρικής 2022, για την **αλληλουχία** του **γονιδιώματος** του ανθρώπου του Neanderthal και του ανθρώπου της Ντινίσοβα Σιβηρίας. Ανακαλύπτοντας τις **γενετικές διαφορές** που διακρίνουν όλους τους ανθρώπους εν ζωή, από αυτούς από αυτούς που έχουν φύγει από τη ζωή. Οι ανακαλύψεις αυτές έδωσαν τη βάση για να εξερευνηθεί το τι γίνεται με εμάς, τους ανθρώπους, όντα επίσης μοναδικά. Οι γενετικές διαφορές ανάμεσα στον **Homo Sapiens** και τους πιο κοντινούς **συγγενείς μας που δεν υπάρχουν σήμερα** παρέμεναν άγνωστες μέχρι να ταυτοποιηθούν χάρη στις εργασίες του **Pääbo, π**ου ανακάλυψε πως μια **μεταφορά γονιδίων** έλαβε χώρα ανάμεσα σε αυτούς τους ανθρώπους, που έχουν σήμερα **εξαφανιστεί** και τον **Homo Sapiens**. Αυτή η **αρχαία ροή γονιδίων** προς τον σημερινό άνθρωπο είχε έναν **αντίκτυπο** στη **φυσιολογία**, για παράδειγμα τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται το ανοσοποιητικό σύστημά μας αντιδρά στις **μολύνσεις»**.
- **Χημεία:** Στους Carolyn R. (ΗΠΑ), Bertozzi, Morten Meldal (Δανία) και K. Barry Sharpless (ΗΠΑ), που είχε βραβευτεί και με το Nobel χημείας το 2001, απονέμεται το Nobel χημείας 2022 «για την ανάπτυξη της **χημείας κλικ** και της **βιοορθογωνικής** χημείας, για τη δημιουργία μεγάλων οργανικών μορίων δηλαδή όταν τα μοριακά δομικά στοιχεία «κουμπώνουν» γρήγορα και αποτελεσματικά. (GuAAC – click)
- **Φυσική:** Στους επιστήμονες κβαντικής μηχανικής Alain Aspect (Γαλλία), John Clauser (ΗΠΑ) και Anton Zeilinger (Αυστρία) απονεμήθηκε το Nobel Φυσικής 2022. Βραβεύτηκαν «για τα πειράματα με συν-πλεκόμενα (entangled) φωτόνια, που επιβεβαιώνουν την παραβίαση των ανισοτήτων Bell και την πρωτοποριακή επιστήμη της κβαντικής πληροφορικής». Δηλαδή για την κβαντική διεμπλοκή, ένα μηχανισμό, όπου δύο κβαντικά σωματίδια είναι τέλεια συσχετισμένα, όποια κι αν είναι η απόσταση που τα χωρίζει. Η απόδειξη αυτής της εντυπωσιακής ιδιότητας άνοιξε το δρόμο σε νέες τεχνολογίες στην **κβαντική πληροφορική** και σε υπερασφαλείς επικοινωνίες, ή ακόμη για τη δημιουργία υπερευαίσθητων κβαντικών αισθητήρων που μπορούν να επιτρέψουν εξαιρετικά ακριβείς μετρήσεις, όπως αυτή της **βαρύτητας στο διάστημα**.Ο μηχανισμός αυτός είχε προβλεφθεί από την κβαντική θεωρία. Εντούτοις ακόμη και ο Αϊνστάιν δεν πίστευε σ' αυτόν: «δύο σωματίδια ενωμένα αρχικά μπορούν να διατηρήσουν το σημάδι του κοινού παρελθόντος τους και να έχουν παρόμοια συμπεριφορά ενώ βρίσκονται σε απόσταση». Θυμίζουμε ότι το πρώτο Nobel Φυσικής απονεμήθηκε το 1901 στον Γερμανό Ρέντγκεν «για την ανακάλυψη των ακτίνων Χ», ενώ το 1921, ο Αϊνστάιν τιμήθηκε με το Nobel Φυσικής «για τη συμβολή του στη θεωρητική φυσική, και για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου».
- **Λογοτεχνία**: Στη γαλλίδα μυθιστοριογραφο Annie Ernaux απονεμήθηκε το Nobel Λογοτεχνίας 2022:
«Για το θάρρος της και την κλινική ακρίβεια της με την οποία αποκαλύπτει τις ρίζες, την αποξένωση και τους συλλογικούς περιορισμούς της προσωπικής μνήμης».
«*Η γραφή της είναι ασυμβίβαστη, γράφει σε απλή γλώσσα, καθαρή, και, όταν αποκαλύπτει με πολύ θάρρος και εμπειρία των ταξικών ανισοτήτων, καθώς περιγράφει την ντροπή, την ταπείνωση, τη ζήλεια ή την ανικανότητα να δεις ποιος είσαι, πετυχαίνει κάτι αξιοθαύμαστο και διαρκές*». Έργα της διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη Γαλλία. Είναι η **δέκατη έβδομη γυναίκα** που τιμάται με το βραβείο στην ιστορία του θεσμού. Επίσης είναι η δέκατη έκτη φορά που το Nobel Λογοτεχνίας καταλήγει στη Γαλλία, μετά τη βράβευση του **Πατρίκ Μοντιανό** το 2014.
- **Ειρήνη:** Στον Ales Bialiatski (Λευκορωσία) και σε δύο ανθρωπιστικές οργανώσεις Memorial (Ρώσικη οργάνωση ανθρωπίνων δικαιωμάτων) και Center for Civil Liberties (Ουκρανική οργάνωση ανθρωπίνων δικαιωμάτων) απονεμήθηκε το Nobel Ειρήνης 2022. «Οι τιμηθέντες εκπροσωπούν την κοινωνία των πολιτών στις πατρίδες τους. Προωθούν επί πολλά χρόνια το δικαίωμα να ασκείται κριτική στην εξουσία και να προστατεύονται τα θεμελιώδη δικαιώματα των πολιτών»
- **Οικονομία:** Στους Αμερικανούς **Ben S. Bernanke** (Πρόεδρος Federal Reserve, Fed**), Douglas W. Diamond and Philip H. Dybvig** απονεμήθηκε το Nobel Οικονομίας 2022 για τις εργασίες τους σχετικά με τις οικονομικές κρίσεις και τις τράπεζες. Οι τρεις βραβευθέντες βελτίωσαν σημαντικά την κατανόησή μας για το ρόλο των τραπεζών στην οικονομία μας, ιδιαίτερα στη διάρκεια των οικονομικών κρίσεων, καθώς και τον **τρόπο** κανονιστικής **ρύθμισης των οικονομικών αγορών.**
Μια σημαντική ανακάλυψη των ερευνών τους ήταν, οι εργασίες για τις οποίες αρχίζουν από τα **χρόνια του 1980**, «ήταν ότι έδειξαν γιατί είναι ζωτικής σημασίας να αποφεύγεται η κατάρρευση των τραπεζών», πρόσθεσε η επιτροπή. Ο Bernanke ήταν επικεφαλής της Federal Reserve (Fed) από το 2006 ως το 2014, μια θητεία που σηματοδοτήθηκε από την οικονομική κρίση του 2008 και την κατάρρευση της αμερικανικής τράπεζας Lehman Brothers. Ο ίδιος ανέλυσε κυρίως το **Μεγάλο Κραχ** των χρόνων του **1930,** τη χειρότερη οικονομική κρίση της σύγχρονης ιστορίας. Έδειξε κυρίως πώς οι **απότομες** και ξαφνικές **αναλήψεις** μετρητών από τις τράπεζες λόγω πανικού ή φοβίας αποτελούν αποφασιστικό παράγοντα για την παράταση και την επιδείνωση των κρίσεων. Οι D Diamond and P Dybvig, από την πλευρά τους, ανέπτυξαν θεωρητικά μοντέλα που δείχνουν γιατί υπάρχουν οι τράπεζες και γιατί ο ρόλος τους στην κοινωνία, τις καθιστά ευάλωτες στις φήμες για επικείμενη κατάρρευσή τους.

Τάξη: Α΄

Ευκλείδεια Γεωμετρία

Κανάβης Χρήστος

*Πολλοί μαθητές/μαθήτριες, δυσκολεύονται στην επίλυση **Μαθηματικών Ρεαλιστικών Προβλημάτων,** σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. Στο άρθρο αυτό, γίνεται μια προσπάθεια παρουσίασης εφαρμογών και προτάσεων – ιδεών που αναφέρονται σε **Γεωμετρικά προβλήματα καθημερινής ζωής** και αφορούν το μάθημα της **Γεωμετρίας Α΄ λυκείου**, με σκοπό την ανάπτυξη **δεξιοτήτων διερεύνησης, δημιουργικότητας, κριτικής σκέψης** καθώς και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων των μαθητών/μαθητριών.*

Εφαρμογή 1: Στο στιγμιότυπο του χάρτη, που ακολουθεί απεικονίζονται τρεις αρχαίοι Ναοί της Αττικής. Συγκεκριμένα ο Ναός του Ποσειδώνα στο Σούνιο στο σημείο Α, ο Ναός του Ηφαίστου στο Θησείο στο σημείο Β και ο Ναός της Αφαίας στην Αίγινα στο σημείο Γ. Θεωρούμε πως η απόσταση του Ναού του Ποσειδώνα από τον Ναό του Ηφαίστου είναι ίση με την απόσταση του Ναού του Ποσειδώνα από τον Ναό της Αφαίας. Ένα καράβι, πλέει στην περιοχή του Αργοσαρωνικού, κατά μήκος της ευθείας της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ και απεικονίζεται στο σχήμα με το σημείο Κ.

Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο σχήμα με κανόνα και διαβήτη και να δείξετε ότι:

Α) το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές. Όπου Κ είναι το σημείο που αντιστοιχεί στη θέση του καραβιού.

Β) i) Τα σημεία Α, Κ, Μ, όπου Μ το μέσο του τμήματος ΒΓ, είναι συνευθειακά.

ii) Τα σημεία Α, Β, Γ που απεικονίζονται οι τρεις συγκεκριμένοι Ναοί σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

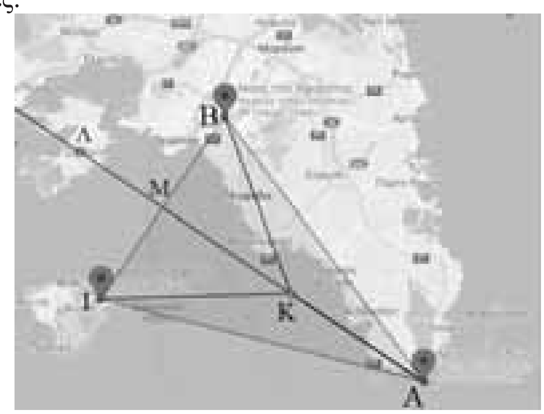
Γ) Να βρεθεί το σημείο που αντιστοιχεί στο γράμμα της λέξης «Σαλαμίνα», το οποίο ισαπέχει από τα σημεία που απεικονίζονται ο ναός της Αφαίας και ο Ναός του Ηφαίστου. Να δικαιολογήστε την απάντηση σας.

Προτεινόμενη λύση:

Α) Το Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ, επομένως ισαπέχει από τα άκρα του. Αυτό σημαίνει πως ΚΒ=ΚΓ άρα το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Β) i) Η απόσταση του Ναού του Ποσειδώνα από τον Ναό του Ηφαίστου είναι ίση με την απόσταση του Ναού του Ποσειδώνα από τον Ναό της Αφαίας. Δηλαδή ΑΒ=ΑΓ άρα το σημείο Α ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος ΑΒ. Αυτό σημαίνει πως το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Επίσης το μέσο Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ άρα τα σημεία Μ,Κ και Α ανήκουν στην ίδια ευθεία.

ii) Εφόσον ΑΒ=ΑΓ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



Γ) Η θέση του σημείου στο χάρτη, που ισαπέχει από το ναό της Αφαίας και το Ναό του Ηφαίστου, δηλαδή το σημείο που ισαπέχει από τα σημεία Α και Γ, θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Σχεδιάζουμε με κανόνα και διαβήτη τη μεσοκάθετο και παρατηρούμε πως αυτή διέρχεται από το σημείο Λ που αντιστοιχεί στο γράμμα «λ».

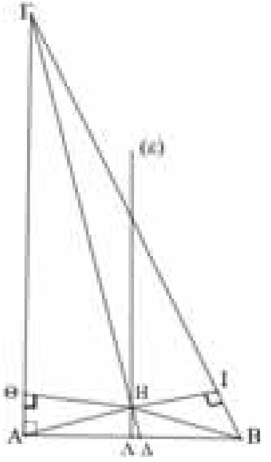
Σημείωση: *Η ύπαρξη γεωμετρικών σχηματισμών μεταξύ των αρχαιοελληνικών ναών και τόπων λατρείας αποτελεί ένα αξιοπερίεργο και ανεξιχνίαστο μέχρι και σήμερα γεγονός. Συγκεκριμένα πολλοί ναοί, θέατρα και μνημεία της Αρχαίας Ελλάδας, παρουσιάζονται να συνδέονται μεταξύ τους με νοητούς γεωμετρικούς τριγωνισμούς, ισοσκελών και ισόπλευρων τριγώνων. Ένα από αυτά αποτελεί το «ιερό» ισοσκελές τρίγωνο που δημιουργούν ο Ναός του Ποσειδώνα στο Σούνιο, ο Ναός της Αφαίας*

Αθηνάς στην Αίγινα και ο Ναός του Ηφαίστου στο Θησείο της Αθήνας.

Πρόταση: *Ερευνητική εργασία μέσω διαδικτύου, για τους μαθητές/μαθήτριες, με θέμα «Γεωμετρικοί σχηματισμοί της Αρχαίας Ελλάδας». **Λέξεις Κλειδιά:** Ιερά τρίγωνα, Γεωδαισία, Αρχαία Ελλάδα, Γεωμετρικός τριγωνισμός.*

Εφαρμογή2 (Μαθηματικό αδιέξοδο– παράδοξο)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο (ε) της πλευράς ΑΒ που την τέμνει στο σημείο Λ και από την κορυφή Γ τη διχοτόμο ΓΔ της γωνίας Γ. Η ΓΔ και η (ε) τέμνονται στο σημείο Η. Από το Η φέρουμε κάθετες ΗΘ και ΗΙ στις ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



Α) **Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{H\Theta A}$ και $\overset{\Delta}{HIB}$.**

Β) **Να συγκρίνετε τις γωνίες $H\hat{A}B=H\hat{B}A$.**

Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$; Να εκφράσετε και να δικαιολογήσετε τις απόψεις σας.

Σκέψεις – συζήτηση: Ακολουθώντας τα Α) και Β) καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως $H\hat{A}\Theta=H\hat{B}I$ και $H\hat{A}B=H\hat{B}A$ επομένως $\hat{A}=\hat{B}=90^0$. Συνεπώς, χωρίς κάποιο λάθος, στη διαδικασία επίλυσης, αποδεικνύεται πως το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχει δύο ορθές γωνίες. Που πιστεύετε πως οφείλεται αυτό το παράδοξο;

Προτεινόμενη λύση: Το παράδοξο οφείλεται στο αρχικό σχήμα, το οποίο είναι **σχεδιασμένο λάθος**. Το σημείο τομής της διχοτόμου, μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, με τη μεσοκάθετο που αντιστοιχεί στην απέναντι πλευρά της οξείας αυτής γωνίας, βρίσκεται πάντα εκτός του ορθογωνίου τριγώνου. Στο συγκεκριμένο σχήμα λοιπόν, το σημείο τομής Η της διχοτόμου ΓΔ της γωνίας Γ, με τη μεσοκάθετο (ε) της πλευράς ΑΒ, δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο, όπως αρχικά έχει σχεδιαστεί με σκοπό την παραπλάνηση του λύτη/λύτριας.

Σημείωση: Η δραστηριότητα αυτή, έχει σκοπό να επισημάνει τη σημασία του σχήματος στη Γεωμετρία. Είναι σημαντικό τα γεωμετρικά σχήματα, να σχεδιάζονται με κανόνα και διαβήτη. Η βασική ιδέα λοιπόν, είναι να «παραπλανηθεί» ο λύτης/λύτρια δίνοντας του λάθος σχήμα, με αποτέλεσμα να οδηγηθεί σε μαθηματικό αδιέξοδο. Ένα τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες.

Πρόταση – Δημιουργική εργασία: *Να γίνει χρήση του δυναμικού λογισμικού Geogebra, με σκοπό ο μαθητής να εξερευνήσει αν ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα για οποιοδήποτε τρίγωνο και όχι μόνο για ορθογώνιο.*

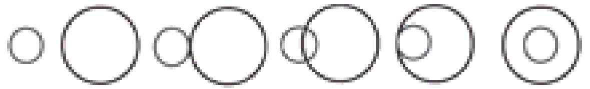
Επιπρόσθετα

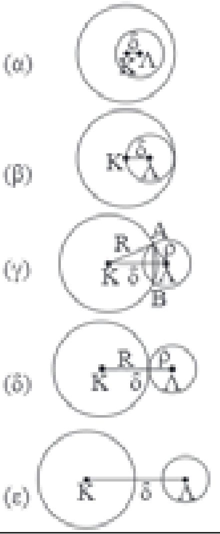
Όνομα σημείου	Ορισμός	Θέση
Έγκεντρο	Σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου.	Πάντα εσωτερικό σημείο σε οποιοδήποτε τρίγωνο.
Ορθόκεντρο	Σημείο τομής των υψών των ενός τριγώνου.	• Στο ορθογώνιο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας. • Στο οξυγώνιο είναι εντός του τριγώνου. • Στο αμβλυγώνιο είναι εκτός του τριγώνου.
Βαρύκεντρο	Σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου.	Πάντα εσωτερικό σημείο σε οποιοδήποτε τρίγωνο.
Περίκεντρο	Σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου.	• Στο ορθογώνιο είναι το μέσο της υποτείνουσας. • Στο οξυγώνιο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου. • Στο αμβλυγώνιο είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου.

Εφαρμογή 3: **Ένας κινούμενος μύλος βρίσκεται σε ένα πάρκο, όπου ο φύλακας του πάρκου ξέχασε να απενεργοποιήσει το αυτόματο πότισμα (Μπεκ) που ήταν προγραμματισμένο για το απόγευμα, όπου ο μύλος συνήθως είναι γεμάτος με παιδιά. Παρόλα αυτά ο φύλακας είναι σίγουρος πως δεν υπάρχει πρόβλημα διότι το Μπεκ είναι 14 μέτρα μακριά από το κέντρο του μύλου και εκτοξεύει κυκλικά νερό σε απόσταση 10 μέτρα από την τοποθεσία του. Αν η διάμετρος της κυκλικής βάσης του μύλου είναι 12 μέτρα, θεωρείτε πως έχει δίκιο ο φύλακας να μην ανησυχεί ή τελικά θα βραχούν τα παιδιά;**

Κατασκευάστε το αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα με κανόνα και διαβήτη και δικαιολογήστε την απάντηση σας.

Επιπρόσθετα: Η παραπάνω εφαρμογή αφορά τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων.





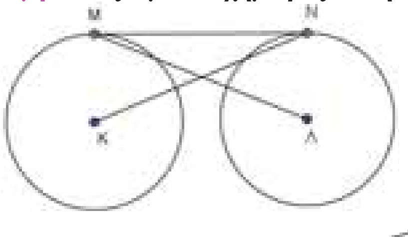
$\delta < R - \rho$	Κανένα κοινό σημείο. Ο κύκλος με ακτίνα ρ εσωτερικός του κύκλου με ακτίνα R (α).
$\delta = R - \rho$	Εφάπτονται εξωτερικά (β).
$R - \rho < \delta < R + \rho$	Τέμνονται σε 2 σημεία (γ).
$\delta = R + \rho$	Εφάπτονται εσωτερικά (δ).
$\delta > R + \rho$	Κανένα κοινό σημείο. Ο κάθε κύκλος εξωτερικός του άλλου (ε).

όπου δ διάκεντρος των δύο κύκλων, R,ρ ακτίνες των δύο κύκλων, $R > \rho$.

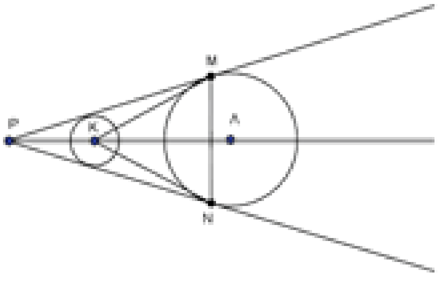
Προτεινόμενη Απάντηση:
Ο φύλακας έκανε λάθος, διότι στη συγκεκριμένη εφαρμογή ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, αφού δ=14m, R=10m και ρ=6m. Επομένως οι δυο κύκλοι τέμνονται και επομένως τα παιδιά θα βραχούν. Το σχήμα που αντιστοιχεί στην εφαρμογή, είναι το (γ).

Εφαρμογή 4: Βάζουμε το σχήμα βάζετε την Άσκηση;

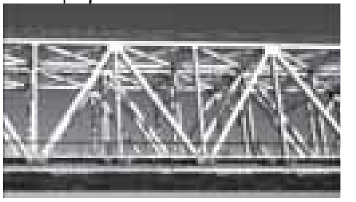
A)



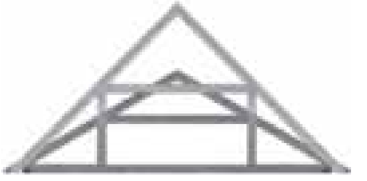
B)



Γ) Σιδερένια Γέφυρα



Δ) Ξύλινη Στέγη



Ε) Παράθυρο οροφής

Δοκιμάστε, βάζοντας την προσωπική σας πινελιά, να δώσετε τη δική σας εκφώνηση και να φτιάξετε τη δική σας άσκηση για τα σχήματα των περιπτώσεων Α, Β, Γ, Δ και Ε.

Εφαρμογή 5: Ένας ξυλουργός θέλει να φτιάξει μια ξύλινη τριγωνική κατασκευή. Συγκεκριμένα το τριγωνικό τμήμα ΑΒΓ του ξύλινου ζευκτού στέγης που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Χρησιμοποιεί λοιπόν ένα καδρόνι μήκους 4 μέτρων το οποίο κόβει σε τρία κομμάτια. Ένα είναι μισό μέτρο, και ένα άλλο 1,7m. Μπορεί με τα συγκεκριμένα κομμάτια να κατασκευάσει το τριγωνικό τμήμα ΑΒΓ ή τα έκοψε λάθος; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

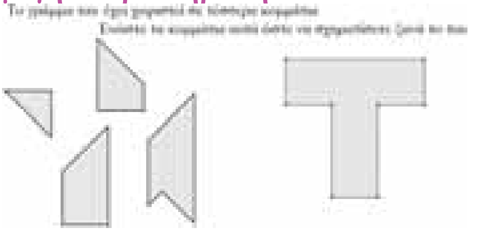
ξύλινο ζευκτό στέγης

Προτεινόμενη Απάντηση: Έστω ΑΒ=0,5m και ΑΓ=1,7m, τότε είναι $ΒΓ = ΒΓ = 4 - 1{,}7 - 0{,}5 = 1{,}8$m. Παρατηρούμε λοιπόν ότι για την μεγαλύτερη πλευρά ΒΓ ισχύει, $1{,}2 = ΑΓ - ΑΒ < ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ = 2{,}2$. Συνεπώς ισχύει η τριγωνική ανισότητα, άρα ο ξυλουργός έκοψε σωστά τα μήκη των τριών κομματιών και μπορεί να κατασκευάσει το τριγωνικό τμήμα ΑΒΓ.

Συζήτηση : Γιατί αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει τριγωνική ανισότητα μόνο για την μεγαλύτερη πλευρά ΒΓ; Θα αρκούσε μόνο η σχέση $ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ$; Να δικαιολογήσετε την απάντηση.

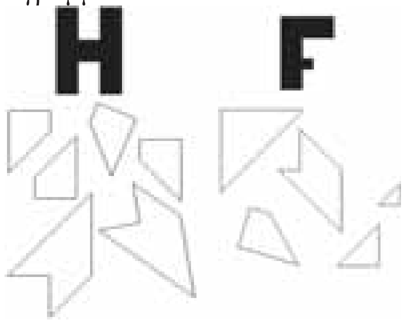
Εργασία: Πρόταση ερευνητικής εργασίας μέσω διαδικτύου, με θέμα «Τριγωνική ανισότητα». Λέξεις Κλειδιά: Απόδειξη, Ευκλείδης, Ήρωνας, Ανισοτικές σχέσεις.

Εφαρμογή 6: Δραστηριότητα 1

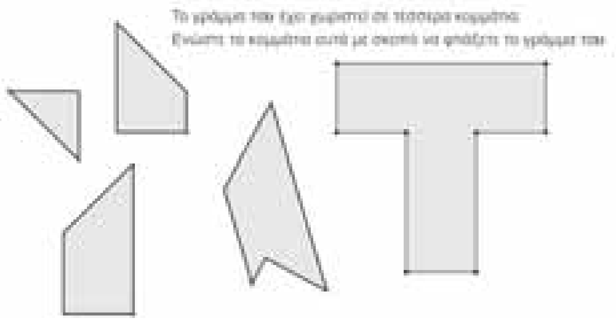


Υπόδειξη

Δραστηριότητα 2: Δοκιμάστε το ίδιο να κάνετε το ίδιο με τα γράμματα Η και F.

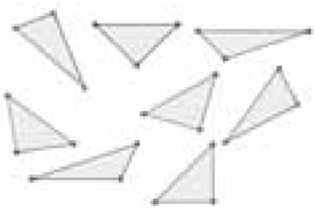


Επιπρόσθετα: Η κατασκευή των παραπάνω γραμμάτων μπορεί να γίνει είτε με τη μορφή χειροτεχνίας, να δοθούν δηλαδή στους μαθητές, τα κομμάτια που αποτελούν τα γράμματα σε χαρτόνι, όπου θα πρέπει να τα κόψουν και να προσπαθήσουν να τα ενώσουν, είτε μέσω του δυναμικού λογισμικού Geogebra.

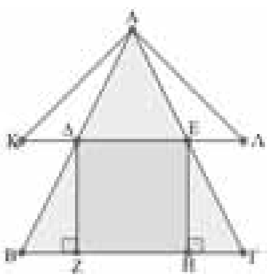


Εφαρμογή 7 (Χειροτεχνία ή Geogebra)

Κόψτε και ενώστε τα παρακάτω τρίγωνα που απεικονίζονται στο σχήμα 1 με σκοπό να φτιάξετε το σχήμα 2:



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Εφαρμογή 8: Στο σχήμα 2, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Από τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, φέρουμε κάθετες ΔΖ και ΕΗ στη βάση του ΒΓ. Α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ είναι ίσα. Β) Προεκτείνουμε την ΔΕ και προς τα δύο της μέρη κατά ίσα τμήματα ΔΚ =ΕΛ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές.

Προτεινόμενη λύση

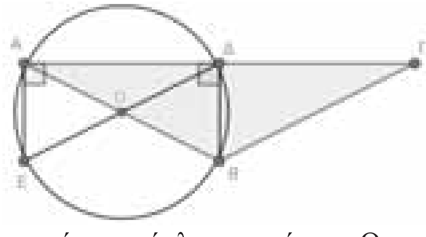
Α) Είναι ΔΖΒ=ΕΖΓ διότι είναι ορθογώνια, έχουν $\Delta B=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{A\Gamma}{2}=E\Gamma$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΑΕΛ. Είναι ίσα διότι $A\Delta=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{A\Gamma}{2}=AE$ (άρα και $\hat{\Delta}=\hat{E}$), $K\Delta=E\Lambda$ και $A\hat{\Delta}K=180^0-\hat{\Delta}=180^0-\hat{E}=A\hat{E}\Lambda$. Επομένως είναι ΑΚ=ΑΛ άρα το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές.

Εφαρμογή 9 : Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒΓ ισοσκελές, ΔΒ διχοτόμος της γωνίας Β και ΕΑ κάθετη στην ΑΓ με ΕΑ=ΒΔ. Να δείξετε ότι υπάρχει κύκλος C που διέρχεται από τα σημεία Α, Δ, Β, Ε. Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του και να τον σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη.

Προτεινόμενη λύση: Είναι, ΒΔ διχοτόμος του ισοσκελούς ΑΒΓ άρα είναι και διάμεσος και ύψος της ΑΓ. Άρα Δ μέσο της ΑΓ. Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΔΒΓ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια, ΑΕ=ΒΔ και ΑΔ=ΔΓ. Επομένως είναι $A\hat{\Delta}E=\Delta\hat{\Gamma}B=\Delta\hat{A}B$.

Οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές με ΑΟ=ΟΔ. Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΔΟΒ είναι ίσα διότι ΑΟ=ΟΔ, $A\hat{O}E=\Delta\hat{O}B$ ως κατακορυφήν (ΑΕ=ΔΒ) και $E\hat{A}O=B\hat{\Delta}O$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\Delta\hat{A}O$ και $A\hat{\Delta}O$. Επομένως ΑΟ=ΟΒ και ΟΔ=ΟΕ και αφού ΑΟ=ΟΔ είναι ΒΟ=ΑΟ=ΟΔ=ΟΕ.



Συνεπώς υπάρχει κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΒ που διέρχεται από τα Α,Δ,Β,Ε, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Τάξη: Β΄

Οι βασικές συναρτήσεις στη Β΄ Λυκείου

Κώστας Βακαλόπουλος   Άννα Βακαλοπούλου

Εισαγωγή

Μετά τις αλλαγές στο αναλυτικό πρόγραμμα στην Άλγεβρα της **Α΄** και της **Β΄** λυκείου δηλαδή την αφαίρεση του κεφαλαίου 7 της Α΄ λυκείου και τη μετακίνηση στο κεφάλαιο 2 της Β΄ λυκείου των παραγράφων §6.4 και §6.5 της Α΄ λυκείου, έχουν προκύψει μερικά **«κενά»** στις γνώσεις που πρέπει να έχουν οι μαθητές για τη συνέχεια της ύλης. Στο άρθρο αυτό θα προσπαθήσουμε να **καλύψουμε** ακριβώς τα κενά αυτά. Για την παρουσίασή του, χρησιμοποιήσαμε και τα σχολικά βιβλία του γυμνασίου και του λυκείου.

Οι **βασικές συναρτήσεις**, ένα χρήσιμο εργαλείο για την συνέχεια της ύλης αλλά και το «διαβατήριο» για να πάμε στην Γ΄ Λυκείου είναι **δέκα.** Οι **πέντε** από αυτές περιέχονται στη ύλη μέχρι και τη **Α΄ Λυκείου** και οι άλλες **πέντε** στην ύλη της **Β΄ Λυκείου.** Όμως σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα της Α΄ Λυκείου οι τέσσερις από αυτές περιέχονται στο 7^{o} κεφάλαιο που είναι «εκτός ύλης». Μερικές από αυτές υπάρχουν στα βιβλία του γυμνασίου αλλά από αυτές, μόνο η: $\mathbf{f(x)=\frac{\alpha}{x}}$ διδάχτηκε στη Β΄ γυμνασίου με αφορμή τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε τι πρέπει να διδαχτεί **στην αρχή** της **Β΄ λυκείου** για να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν την ύλη τους στη συνέχεια και επίσης προτείνουμε να συμπληρωθεί το κεφάλαιο 2 με μία ακόμη παράγραφο όπως θα το αναφέρουμε στη συνέχεια.

Οι δέκα βασικές συναρτήσεις

$f(x)=\alpha x+\beta$, $f(x)=\alpha x^2$, $f(x)=\alpha x^3$,

$f(x)=\frac{\alpha}{x}$, $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $f(x)=\eta\mu x$,

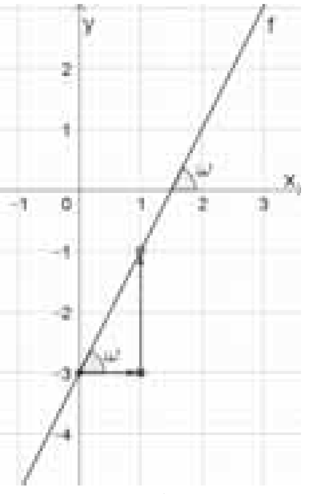
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $f(x)=\alpha^x$, $f(x)=\log_\alpha x$

1) Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\alpha x+\beta}$, που την διδαχτήκαμε στη §6.3 της Α΄ λυκείου.

Ας θυμηθούμε ότι έχει γραφική παράσταση ευθεία (θα το αποδείξουμε στην ύλη προσανατολισμού της Β΄ λυκείου) με τα εξής χαρακτηριστικά:

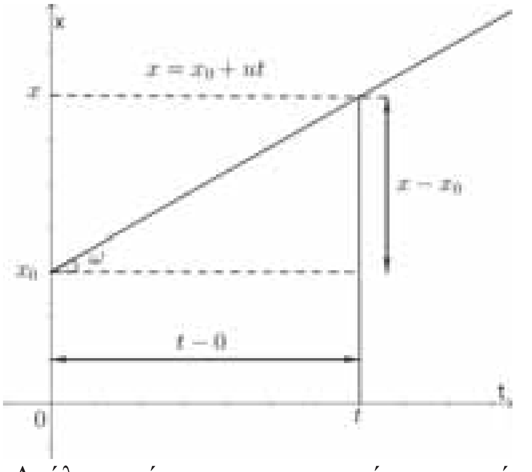
- Ο συντελεστής α ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με το άξονα x΄x και
- Τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $B(0,\beta)$

Με αυτές τις πληροφορίες μπορούμε να χαράξουμε την ευθεία που θα διέρχεται από το σημείο $B(0,\beta)$ και θα σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία με εφαπτομένη **α**, π.χ. η συνάρτηση $f(x)=2x-3$ έχει τη παρακάτω γραφική παράσταση:



- Στη Φυσική μάθαμε ότι η εξίσωση (συνάρτηση) που δίνει τη θέση x που βρίσκεται σε χρόνο t στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι: $x=x_0+\upsilon\cdot\Delta t$ (αν $x_0>0$), όπου $\Delta t=t-t_0$ και αν $t_0=0$ τότε γίνεται: $x=x_0+\upsilon\cdot t$ ή καλύτερα $x(t)=x_0+\upsilon\cdot t$ και αν για $t=0$ η αρχική θέση είναι $x_0=0$ τότε $x(t)=\upsilon\cdot t$. Ποια συνάρτηση σας θυμίζει; Φυσικά την $f(x)=\alpha\cdot x+\beta$ με $\beta\neq 0$ ή με $\beta=0$ που έχει γραφική παράσταση ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(0,x_0)$ ή από την αρχή των αξόνων.

Γραφική παράσταση Θέσης - Χρόνου με: $x=f(t)$ με $u>0$ και $t_0>0$



Ανάλογα γίνονται οι γραφικές παραστάσεις στις άλλες περιπτώσεις.

Το σημαντικότερο όμως είναι ότι η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας: $u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = εφω$.

2) Η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = α \cdot x^2}$, $\mathbf{α \neq 0}$ έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη που τη λέμε **παραβολή**.

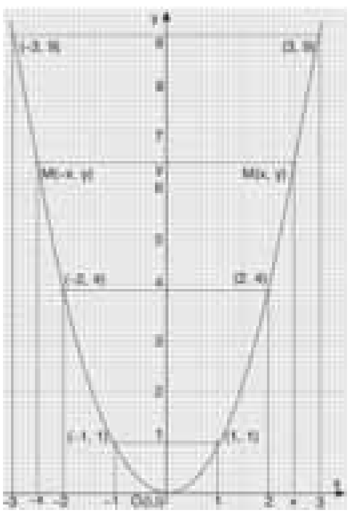
π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $α = 1 > 0$.

Αν φτιάξουμε έναν πίνακα τιμών για τη συνάρτηση αυτή έχουμε:

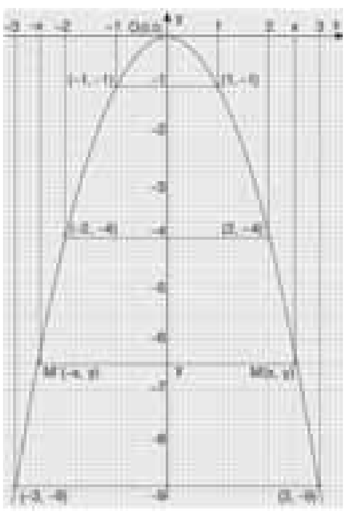
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Σε ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγουμένου πίνακα και σχεδιάζουμε τη καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x^2$.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:



- Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα x΄x που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$
- Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ παρουσιάζει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$
- Για $x = -3$ και για $x = 3$ έχουμε ίδια τιμή $y = 9$ και τα σημεία $(-3,9)$ και $(3,9)$ της παραβολής είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Γενικά σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $f(x) = x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y. Αυτή η ιδιότητα της συνάρτησης θα της δώσει τον χαρακτηρισμό: **άρτια συνάρτηση**.



Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = -x^2$, η οποία είναι επίσης παραβολή.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

- Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα x΄x που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \leq 0$
- Η συνάρτηση $f(x) = -x^2$ παρουσιάζει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$
- Για $x = -3$ και για $x = 3$ έχουμε πάλι ίδια τιμή $y = -9$ και τα σημεία $(-3,-9)$ και $(3,-9)$ της παραβολής είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Γενικά σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $f(x) = -x^2$ έχει και αυτή **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y. Οπότε και η συνάρτηση $f(x) = -x^2$ είναι **άρτια συνάρτηση**.

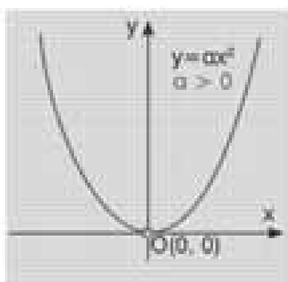
Ονομάζουμε **εξίσωση της παραβολής** την εξίσωση: $y = α \cdot x^2$.

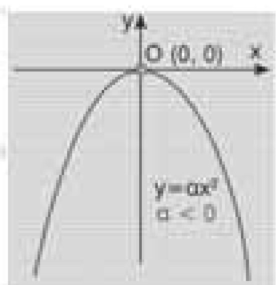
Γενικά: Η συνάρτηση $f(x) = α \cdot x^2$ με $α \neq 0$

✓ Έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

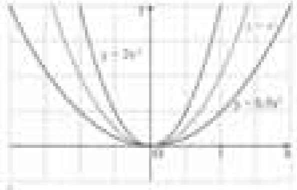
✓ Αν $α > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω και η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $y = 0$, όταν $x = 0$.

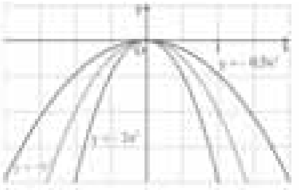
✓ Αν $α > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω και η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $y = 0$, όταν $x = 0$.





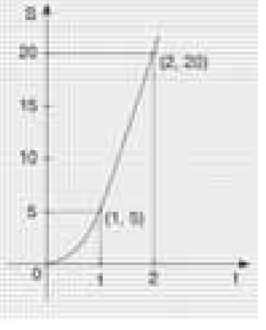
Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $f(x) = α \cdot x^2$ ως προς τον άξονα x΄x αλλά καθορίζει και το «άνοιγμα» της. Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει».





- Στη Φυσική είναι γνωστό ότι αν ένα σώμα κάνει ελεύθερη πτώση, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα s, που δίνεται από τον τύπο $s=\frac{1}{2}g\cdot t^2$ $\left(g=10\,{}^{m}\!/\!_{sec^2}\right)$. Ας σχεδιάσουμε το διάγραμμα διαστήματος – χρόνου:

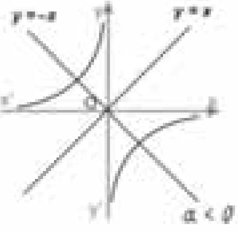
Το διάστημα s για $g=10\,{}^{m}\!/\!_{sec^2}$ δίνεται από τον τύπο: $s=\frac{1}{2}10\cdot t^2=5t^2$

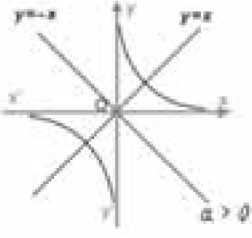


Η γραφική παράσταση είναι το παραπλεύρως.

3) Στη Β΄ Γυμνασίου μάθαμε ότι όταν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό. Αν $\alpha\neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των x και y τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y=\frac{\alpha}{x}$. Έτσι ορίζουμε τη συνάρτηση: $\boldsymbol{f(x)=\frac{\alpha}{x},\quad x\neq 0}$, που γραφική παράσταση σχήμα που λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται:

- Στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha>0$
- Στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha<0$



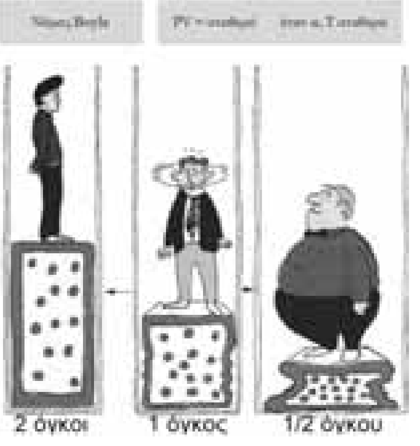


Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

✓ **Κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων

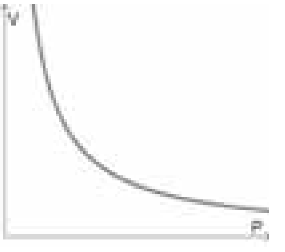
✓ **Άξονες συμμετρίας** τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$.

- Ας θυμηθούμε τώρα ποια μεγέθη στη χημεία είναι αντιστρόφως ανάλογα: η πίεση και ο όγκος. Θυμηθείτε ότι: $P\cdot V=nRT$ (1), όπου R γνωστή σταθερά και για σταθερά n και T.



Αν λοιπόν ονομάσουμε $\alpha=nRT$, τότε η σχέση (1) γίνεται: $P\cdot V=\alpha$ δηλαδή $V=\frac{\alpha}{P}$ ή καλύτερα: $V(P)=\frac{\alpha}{P}$.

Έτσι το διάγραμμα Όγκου – Πίεσης $(V-P)$ θα είναι το παραπλεύρως.

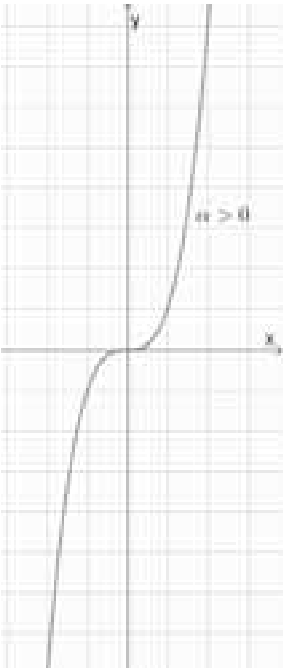


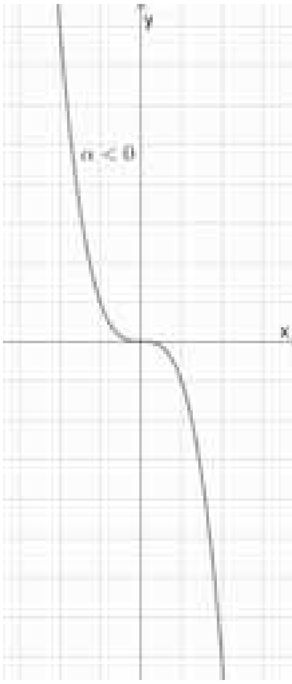
Προφανώς η γραφική παράσταση περιέχει μόνο τον έναν κλάδο αφού για αρνητικές τιμές της πίεσης δεν έχουμε πληροφορία.

4) Η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\alpha\cdot x^3,\quad \alpha\neq 0}$ δεν είναι από τις πολύ γνωστές αλλά έχει αρκετά σημαντικό ρόλο στις ασκήσεις που υπάρχουν και στη Β΄ αλλά και στη Γ΄ Λυκείου. Με το 2ο κεφάλαιο της Β΄ Λυκείου θα ήταν ευκολότερο να εξηγήσουμε τη γραφική της παράσταση, όμως θα αρκεστούμε στη γρήγορη αντιμετώπιση από τα παρακάτω σχήματα. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης $f(x)=\alpha\cdot x^3$, με $\alpha\neq 0$:

- Αν $\alpha>0$
  - ✓ Είναι «ανηφορική» αφού η f είναι γνησίως αύξουσα
  - ✓ Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα κάτω αν το x τείνει στο $-\infty$
- Αν $\alpha<0$
  - ✓ Είναι «κατηφορική» αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα

✓ Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο $-\infty$ και απεριόριστα προς τα κάτω αν το x τείνει στο $+\infty$

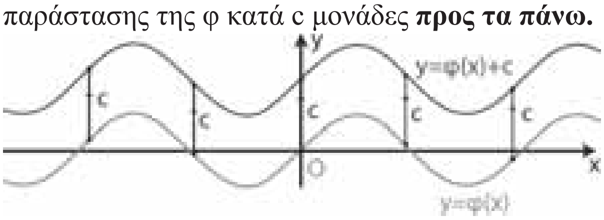




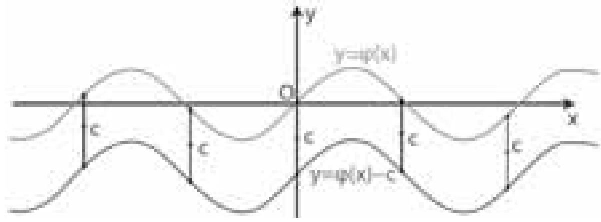
5) Για να κατανοήσουμε τη γραφική παράσταση της τελευταίας βασικής συνάρτησης της Α΄ Λυκείου, $\mathbf{f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0}$ είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη §6.4 της Α΄ λυκείου που έχει «μετακομίσει» στη §2.2 της Β΄ Λυκείου. Είναι οι λεγόμενες **μετατοπίσεις.** Είναι λοιπόν απαραίτητο στο κεφάλαιο 2 της Β΄ λυκείου να προστεθεί ως §2.3 η «μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$».

Στη §2.2 αναφέρεται ότι:

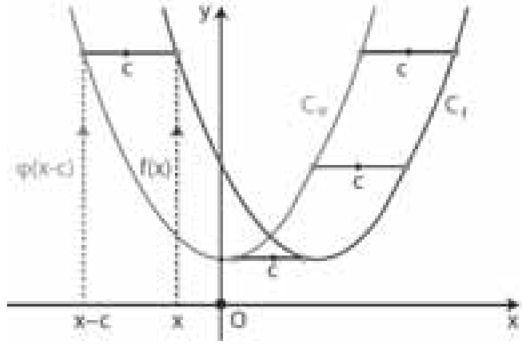
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με: $f(x)=\varphi(x)+c$ με $c>0$, προκύπτει από μια **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω.**



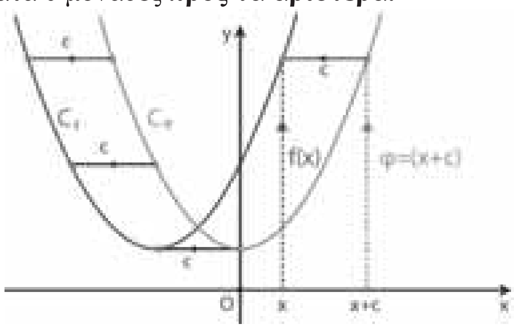
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με: $f(x)=\varphi(x)-c$ με $c>0$, προκύπτει από μια **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω.**



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με: $f(x)=\varphi(x-c)$ με $c>0$, προκύπτει από μια **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά**,



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με: $f(x)=\varphi(x+c)$ με $c>0$, προκύπτει από μια **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά.**



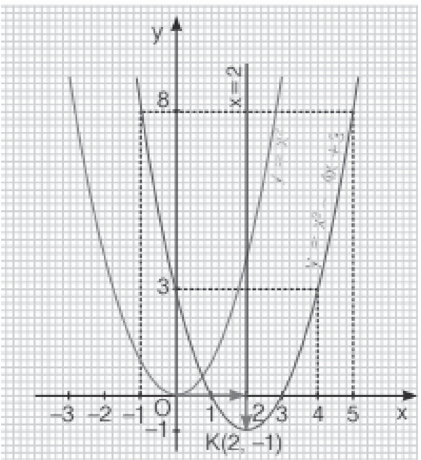
Όπως είδαμε στο 3^o και 4^o κεφάλαιο της Α΄ Λυκείου είναι σχετικά εύκολο να μετατρέψουμε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στη μορφή: $f(x)=\alpha(x-p)^2+q$.

Παράδειγμα 1

$f(x)=x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1$

Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^2$, θα παρατηρήσουμε ότι: $f(x)=\varphi(x-2)-1$

Επομένως η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά 2 μονάδες **προς τα δεξιά** και στη συνέχεια με μια **κατακόρυφη** μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα **κάτω.**

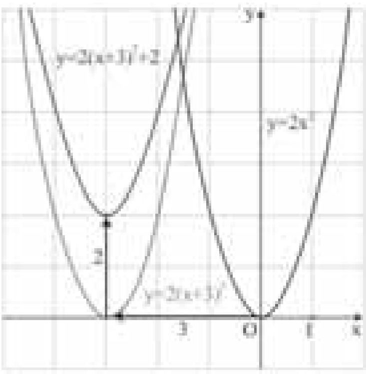


Παράδειγμα 2

$f(x)=2x^2+12x+20=2\left(x^2+6x+10\right)$

$=2\left[x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+10\right]=2\left[\left(x+3\right)^2+1\right]$

$=2\left(x+3\right)^2+2$. Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=2x^2$, θα παρατηρήσουμε ότι: $f(x)=\varphi(x+3)+2$. Επομένως η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά 3 μονάδες προς τα **αριστερά** και στη συνέχεια με μια **κατακόρυφη μετατόπιση** κατά 2 μονάδες προς τα **πάνω**.



Γενικά ισχύει:

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=...=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$$

$$\Rightarrow f(x)=\left[x-\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right]^2+\left(-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

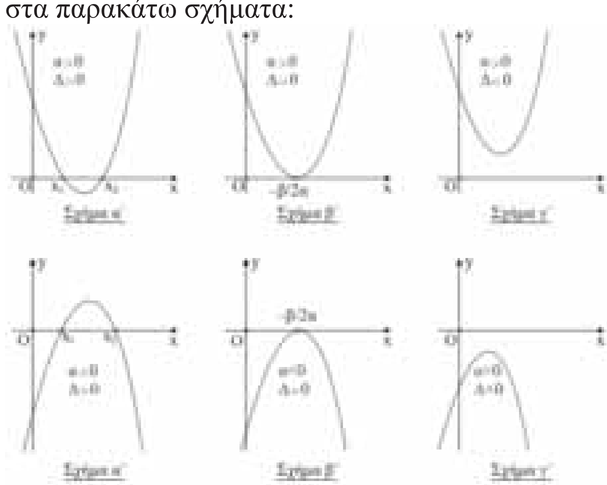
Αν $p=-\frac{\beta}{2\alpha}$ και $q=-\frac{\Delta}{4\alpha}\left(=f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ τότε:

$\boxed{f(x)=\alpha(x-p)^2+q}$, που είναι και η μορφή που αναφέραμε στη προηγούμενη σελίδα.

Αν $\varphi(x)=\alpha x^2$ τότε $f(x)=\varphi(x-p)+q$, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=\alpha x^2$ με **οριζόντια μετατόπιση** προς τα δεξιά αν $p>0$ ή προς τα αριστερά αν $p<0$ και στη συνέχεια με **κατακόρυφη μετατόπιση** προς τα πάνω αν $q>0$ ή προς τα κάτω αν $q<0$. Άρα η γραφική παράσταση της f είναι ΠΑΡΑΒΟΛΗ με:

- **Κορυφή** το σημείο: $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από τη κορυφή Κ και έχει εξίσωση: $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$

Οι περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του συντελεστή α και της διακρίνουσας Δ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σύμφωνα με τα παραπάνω για τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης αυτής έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Αν $\alpha>0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ και παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ το $y=f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$

x	$-\infty$ $\quad\frac{-\beta}{2\alpha}\quad$ $+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha>0$	$+\infty$ ↘ $\frac{-\Delta}{4\alpha}$ min ↗ $+\infty$

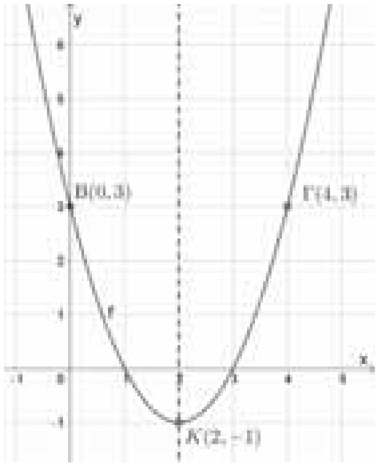
- Αν $\alpha<0$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ και παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ το $y=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$

x	$-\infty$	$\dfrac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha<0$	$-\infty$ $\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ max	$\searrow$ $-\infty$

Παρατηρείστε επίσης ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο: $(0,\gamma)$. Η τελευταία αυτή παρατήρηση μας δίνει μια «καλή ιδέα» για να χαράσσουμε πιο γρήγορα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ χρησιμοποιώντας τρία σημεία:

- Τη κορυφή: $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$
- Το σημείο $B(0,\gamma)$ και
- Το συμμετρικό σημείο Γ του Β ως προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

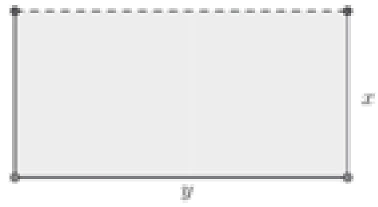
π.χ. Για την $f(x)=x^2-4x+3$ $\left(\alpha=1,\ \beta=-4,\ \gamma=3,\ \ -\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-4}{2\cdot 1}=2\right)$ τα τρία σημεία είναι: $K(2,-1)$, $B(0,3)$ και $\Gamma(4,3)$ οπότε η γραφική παράσταση είναι:



Επικουρικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε , αν υπάρχουν, και τα σημεία τομής της , με τον άξονα x΄x (έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης: $f(x)=0$, που στο παράδειγμα αυτό είναι 1 και 3).

Άσκηση 1

Θέλουμε να περιφράξουμε ένα κήπο σε σχήμα ορθογωνίου με τη μία πλευρά του στον μαντρότοιχο ενός οικοπέδου χρησιμοποιώντας ξύλινη περίφραξη 20 μέτρα. Τι διαστάσεις πρέπει να δώσουμε στο κήπο μας ώστε να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό; Πόσο είναι το μέγιστο αυτό εμβαδό;



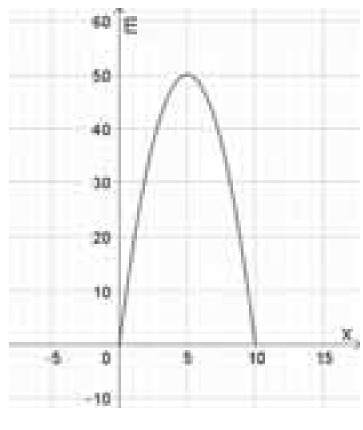
Λύση

Έστω x και y οι διαστάσεις του ζητούμενου κήπου. Από την υπόθεση έχουμε: $y+2x=20\Rightarrow y=20-2x$. Προφανώς πρέπει $y>0$, οπότε $20-2x>0$ δηλαδή $0<x<10$.

Το εμβαδόν του κήπου είναι:
$E=x\cdot y=(20-2x)\cdot x=-2x^2+20x$, $0<x<10$.

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $E(x)=-2x^2+20x$, $0<x<10$. Η συνάρτηση του εμβαδού παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\dfrac{20}{2\cdot(-2)}=5$ οπότε $y=20-2\cdot 5=10$.

Άρα το μέγιστο εμβαδόν είναι $E(5)=5\cdot 10=50$τ.μ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού φαίνεται στο σχήμα:



Άσκηση 2

Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^2-6x+10$, $x\in \mathbb{R}$

Λύση: *Γνωρίζουμε πολύ καλά ότι το σχολικό βιβλίο δεν απαιτεί από τους μαθητές της Β΄ λυκείου να μελετήσουν τη μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης αλλά θα παρουσιάσουμε και τον* ***κατασκευαστικό τρόπο*** *που θα μας χρειαστεί στη Γ΄ λυκείου αλλά και θα την ανακαλύψουμε από τη γραφική της παράσταση χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα*

Για κάθε $x\in \mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9+1=(x-3)^2+1$

Έστω $x_1,x_2\in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

✓ Αν $x_1,x_2\in(-\infty,3]$ τότε ισχύει:

$x_1<x_2\le 3\Rightarrow x_1-3<x_2-3\le 0$

$\Rightarrow -(x_1-3)>-(x_2-3)\ge 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[-(x_1-3)\right]^2>\left[-(x_2-3)\right]^2$

$\Rightarrow (x_1-3)^2>(x_2-3)^2$

$\Rightarrow (x_1-3)^2+1>(x_2-3)^2+1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$

✓ Αν $x_1,x_2\in[3,+\infty)$ τότε ισχύει:

$3\le x_1<x_2\Rightarrow 0\le x_1-3<x_2-3$

$\Rightarrow (x_1-3)^2<(x_2-3)^2$

$\Rightarrow (x_1-3)^2+1<(x_2-3)^2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$. Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=3$ το f(3)=1.

Θα μπορούσαμε όμως να δώσουμε απάντηση για τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα που αναφέραμε πριν τα οποία περιέχονται στο σχολικό βιβλίο απλά είναι «εκτός ύλης». Έτσι η παραπάνω συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=1>0$, $\beta=-6$ και $\gamma=10$, $-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-6}{2\cdot 1}=3$.

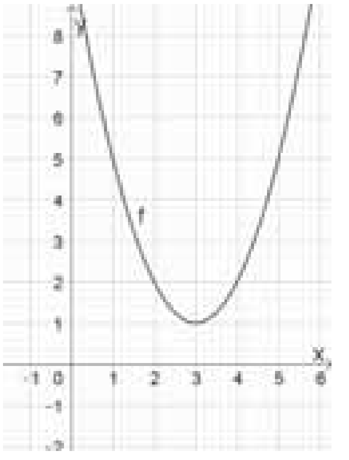
Άρα:

✓ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$

✓ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$

✓ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=3$ το $f(3)=1$

Η γραφική παράσταση της f είναι:



• Από τη **Φυσική** γνωρίζουμε ότι η εξίσωση κίνησης δηλαδή ο προσδιορισμός της θέσης ενός αντικειμένου, το οποίο επιταχύνεται ομαλά, σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από τη σχέση: $x=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ ή καλύτερα: $x(t)=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$. , όπου υ_0 η αρχική ταχύτητα και α η επιτάχυνση.

Ομοίως στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση από τη σχέση: $x=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}\alpha t^2$ ή καλύτερα: $x(t)=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}\alpha t^2$. Ποια συνάρτηση σας θυμίζει; Προφανώς τη συνάρτηση: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με t αντί για x, με $-\frac{1}{2}\alpha$ αντί για α, με υ_0 αντί για β και φυσικά με 0 αντί για γ.

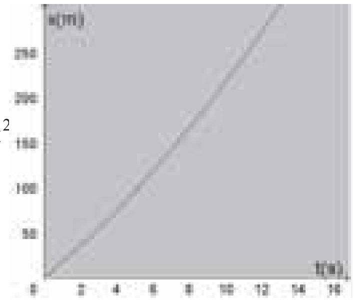
Παρατηρείστε για άλλη μια φορά ότι στη Φυσική οι πολυωνυμικές συναρτήσεις γράφονται κατά τις αύξουσες δυνάμεις της μεταβλητής t σε αντίθεση με τα μαθηματικά που τις γράφουμε πάντα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

Ποια λοιπόν είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(t)=\upsilon_0 t\pm\frac{1}{2}\alpha t^2$; Είναι παραβολή, ή καλύτερα, τμήμα παραβολής, με κορυφή το σημείο: $K\left(\mp\frac{\upsilon_0}{\alpha},-\frac{\upsilon_0^2}{2\alpha}\right)$

Παράδειγμα *(βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου σελ. 56)*

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης ενός κινητού που εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα: $\upsilon_0 = 60 \,{}^{km}\!/_{h} = 16,67 \,{}^{m}\!/_{s}$ και επιτάχυνση $\alpha = 0,975 \,{}^{m}\!/_{s^2}$.

Προφανώς η ζητούμενη συνάρτηση γίνεται: $x(t) = 16,67t + 0,49t^2$ με $t > 0$ και έχει τη παρακάτω γραφική παράσταση.



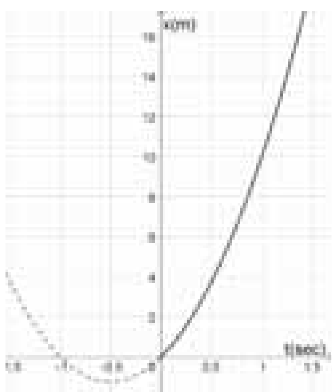
Παρατηρήσεις:

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(t) = 16,67t + 0,49t^2$ προφανώς είναι τμήμα παραβολής διέρχεται από την αρχή των αξόνων αφού $x(0) = 0$
2. Η κορυφή της παραβολής δεν είναι η αρχή των αξόνων αφού αν τη σχεδιάζαμε και για αρνητικές τιμές του χρόνου t θα ήταν το σημείο με τετμημένη: $\left(-\frac{\beta}{2\alpha} = \right) - 68,04$
3. Η γραφική παράσταση είναι πάντα για $t > 0$ αφού για αρνητικό χρόνο δεν έχουμε πληροφορίες.

Για τη καλύτερη κατανόηση σχετικά με τη κορυφή της παραβολής δίνουμε το παρακάτω διάγραμμα που αφορά τη συνάρτηση θέσης σε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 5 \,{}^{m}\!/_{s}$ και επιτάχυνση $\alpha = 10 \,{}^{m}\!/_{s^2}$ δηλαδή της συνάρτησης με τύπο:

$x(t) = 5t + \frac{1}{2}10t^2$

$= 5t + 5t^2, \quad t > 0.$



Παρατηρείστε λοιπόν ότι η κορυφή της παραβολής δεν είναι η αρχή των αξόνων!

Άσκηση 3 [Θέμα Πανελληνίων εξετάσεων 2018]

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

1) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad 0 < x < 8$$

2) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Λύση

1) Η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$ ενώ για την ακτίνα ρ του κύκλου έχουμε: $2\pi\rho = 8 - x \Rightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$. Έτσι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

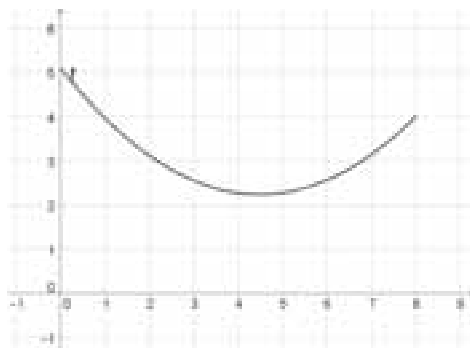
$$E(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \ldots$$

$$= \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{\pi+4}{16\pi} \cdot x^2 - \frac{4}{\pi}x + \frac{16}{\pi},$$

$0 < x < 8$.

Η συνάρτηση είναι της μορφής: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = \frac{\pi+4}{16\pi} > 0$, $\beta = -\frac{4}{\pi}$ και $\gamma = \frac{16}{\pi}$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = \ldots = \frac{32}{\pi+4}$$



2) Για $x = \frac{32}{\pi+4}$, η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ ενώ η διάμετρος του κύκλου θα είναι: $2\rho = 2 \cdot \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \ldots = \frac{8}{\pi+4}$. Άρα όταν το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο τότε η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Άσκηση 4

Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,x\le 1 \\ 5x-2 & ,x>1 \end{cases}$

Β) $g(x)=\dfrac{x^3}{x}$, $x\in R^*$

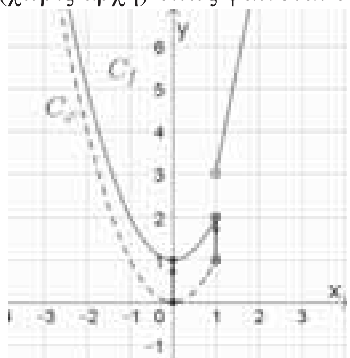
Γ) $h(x)=-\dfrac{x^3}{x}$, $x\in R^*$

Σημείωση: **Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h να τις χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων και να διαπιστώσετε ότι $g(x)>h(x)$ για κάθε $x\in R^*$**

Λύση

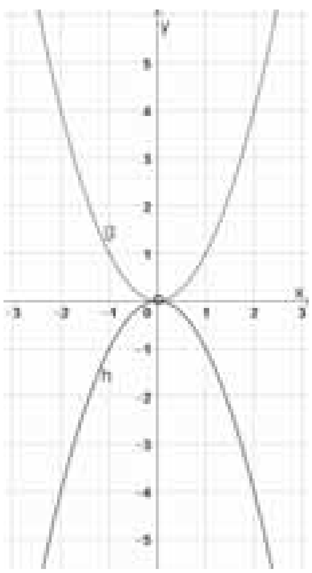
Α) • Για $x\le 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^2$. Παρατηρούμε ότι: $f(x)=\varphi(x)+1$. Άρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ **κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.**

• Για $x<1$ η γραφική παράσταση είναι ημιευθεία (χωρίς αρχή) όπως φαίνεται στο σχήμα:



Β),Γ) Για κάθε $x\in R^*$ ισχύει:

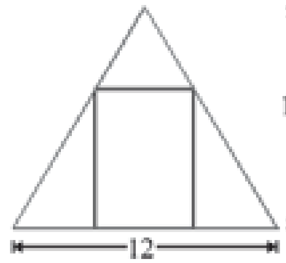
$g(x)=\dfrac{x^3}{x}=x^2$ και $h(x)=-\dfrac{x^3}{x}=-x^2$



Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι: $g(x)>h(x)$ για κάθε $x\in R^*$. Άλλωστε $x^2>-x^2$ για κάθε $x\in R^*$.

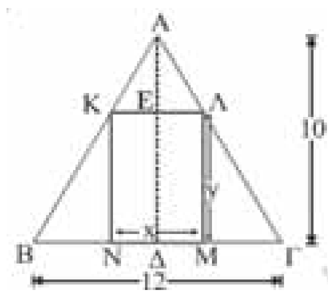
Άσκηση 5

Σε μια τριγωνική σκεπή σχήματος ισοσκελούς τριγώνου με βάση 12m και ύψος 10m, πρέπει να ανοίξουμε ένα παράθυρο σχήματος ορθογωνίου που να έχει τη βάση του στο δάπεδο και να εφάπτεται στις ίσες πλευρές. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ώστε να έχουμε το μέγιστο δυνατό φωτισμό της σκεπής;



Λύση

Για να πετύχουμε το μέγιστο φωτισμό της σκεπής πρέπει το παράθυρο να έχει το μέγιστο εμβαδόν. Έστω x και y οι διαστάσεις του παραθύρου με $ΚΛ=ΝΜ=x$ και $ΚΝ=ΛΜ=y$



Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ είναι σαν συνάρτηση των x και y: $E(x,y)=x\cdot y$. Όμως από τα όμοια τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΒΓ έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας ισούται με τον λόγο των υψών τους. Άρα: $\dfrac{ΚΛ}{ΒΓ}=\dfrac{ΑΕ}{ΑΔ}$. Οπότε:

$$\frac{x}{12}=\frac{10-y}{10}\Rightarrow 10x=12(10-y)\Rightarrow y=10-\frac{5}{6}x$$

Πρέπει: $y=10-\dfrac{5}{6}x>0$ δηλαδή $0<x<12$.

Άρα: $E(x)=x\cdot\left(10-\dfrac{5}{6}x\right)=-\dfrac{5}{6}x^2+10x$, $0<x<12$.

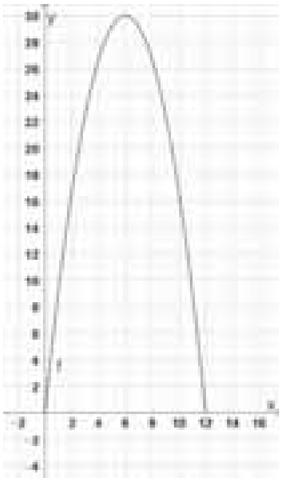
Η συνάρτηση αυτή είναι της μορφής:

$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=-\dfrac{5}{6}$, $\beta=10$ και $\gamma=0$

Άρα παρουσιάζει μέγιστο για

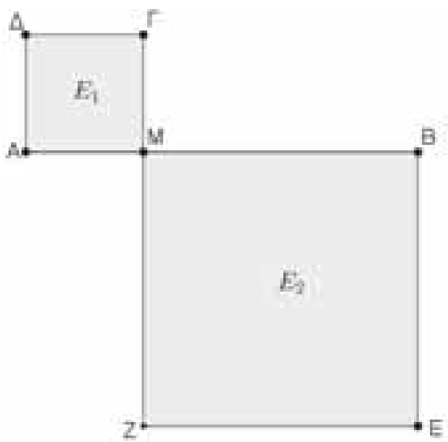
$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{10}{2\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)}=6$. Οπότε οι ζητούμενες διαστάσεις του παραθύρου θα είναι: $x=6cm$ και $y=5cm$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού Ε είναι:



Άσκηση 6

Στον αυλόγυρο ενός σχολείου υπάρχει ένα τοιχάκι ΑΒ μήκους 10 μ , εκατέρωθεν του οποίου θέλουμε να φτιάξουμε δυο τετράγωνα κηπάκια (όπως βλέπετε στο σχήμα, τα ΑΜΓΔ και ΜΒΕΖ) με το λιγότερο δυνατό συνολικά εμβαδόν. Αν η μία πλευρά είναι x μέτρα, να βρείτε τη τιμή του x ώστε να πετύχουμε το στόχο μας.



Λύση

Αν $AM=x$ τότε $MB=10-x$, οπότε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων είναι:

$E=E_1+E_2=E(x)=x^2+(10-x)^2$

$=2x^2-20x+100$. Επίσης: $y=10-x>0$. Άρα: $0<x<10$.

Η συνάρτηση Ε του εμβαδού είναι της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=2, \beta=-20$ και $\gamma=100$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-20}{2\cdot 2}=5$. Άρα το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο αν $AM=MB=5$

Άσκηση 7

Σε μια περιοχή άντλησης πετρελαίου υπάρχουν 20 πηγάδια που δίνουν ημερησίως 4000 βαρέλια πετρέλαιο ημερησίως. Για κάθε νέο πηγάδι που ανοίγεται η παραγωγή μειώνεται κατά 5 βαρέλια ανά πηγάδι. Οι μηχανικοί εκτιμούν ότι ανοίγοντας μερικά ακόμα πηγάδια θα μεγιστοποιήσουν την ημερήσια παραγωγή. Πόσα νέα πηγάδια πρέπει να ανοίξουν για να πετύχουν την μέγιστη ημερήσια παραγωγή; Ποια είναι η μέγιστη αυτή παραγωγή;

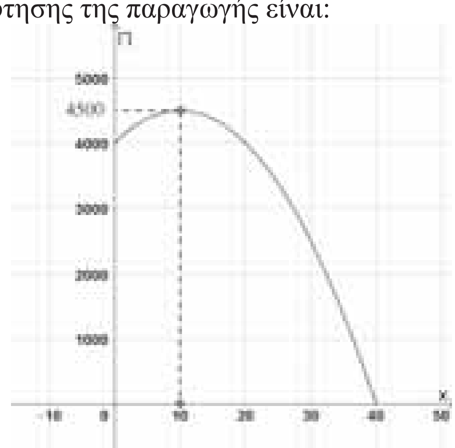
Λύση

Η ημερήσια παραγωγή κάθε πηγαδιού πριν το άνοιγμα νέων πηγαδιών είναι: $4000\div 20=200$ βαρέλια ημερησίως. Έστω ότι ανοιχτούν x νέα πηγάδια. Η ημερήσια παραγωγή κάθε πηγαδιού πλέον είναι: $200-5x$ βαρέλια ημερησίως. Τα πηγάδια πλέον θα είναι: $20+x$. Η ημερήσια παραγωγή (Π) τότε δίνεται συναρτήσει του αριθμού x των νέων πηγαδιών από τη συνάρτηση: $\Pi(x)=(20+x)(200-5x)=-5x^2+100x+4000$.

Επειδή όμως πρέπει: $200-5x\geq 0$ δηλαδή $0\leq x\leq 40$, έχουμε:

$\Pi(x)=-5x^2+100x+4000, \quad 0\leq x\leq 40$

Η συνάρτηση αυτή είναι της μορφής: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=-5, \beta=100$ και $\gamma=4000$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{100}{2\cdot(-5)}=10$ πηγάδια. Η μέγιστη παραγωγή είναι: $\Pi(10)=4500$ βαρέλια ημερησίως. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης της παραγωγής είναι:



Τάξη: Β΄

Αναλογίες - Ομοιότητα

Καρδαμίτσης Σπύρος

«Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.»

Από το **Πέμπτο (5^{ο}) βιβλίο** των στοιχείων του **Ευκλείδη**

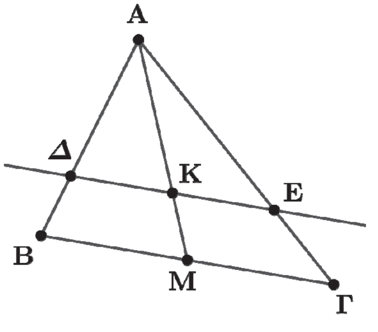
Άσκηση 1^{η} Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσός του. Έστω Κ σημείο της διαμέσου ΑΜ τέτοιο ώστε $\frac{AK}{AM}=\frac{2}{3}$. Από το σημείο Κ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου που τέμνει την ΑΒ και την ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $3Α\Delta = 2ΑΒ$

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2Ε\Gamma$

γ) Αν είναι $ΑΒ = 6$ και $Α\Gamma = 9$, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΕΓ.

Λύση



α) Επειδή κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μια από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα, τότε στο τρίγωνο ΑΒΜ εφού ΔΚ // ΒΜ έχουμε:

$$\frac{Α\Delta}{ΑΚ}=\frac{ΑΒ}{ΑΜ}\Rightarrow\frac{Α\Delta}{ΑΒ}=\frac{ΑΚ}{ΑΜ}$$

Όμως $\frac{ΑΚ}{ΑΜ}=\frac{2}{3}$, άρα $\frac{Α\Delta}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ ή $3Α\Delta=2ΑΒ$

β) Στο τρίγωνο ΑΜΓ είναι ΚΕ // ΜΓ επομένως ισχύουν $\frac{ΑΚ}{ΑΕ}=\frac{ΑΜ}{Α\Gamma}\Rightarrow\frac{ΑΚ}{ΑΜ}=\frac{ΑΕ}{Α\Gamma}=\frac{2}{3}$

Με τις ιδιότητες των αναλογιών προκύπτει

$$\frac{ΑΚ}{ΑΜ-ΑΚ}=\frac{ΑΕ}{Α\Gamma-ΑΕ}=\frac{2}{3-2}=2\Rightarrow$$

$$\frac{ΑΚ}{ΚΜ}=\frac{ΑΕ}{Ε\Gamma}=2\Rightarrow ΑΕ=2Ε\Gamma$$

γ) Ισχύει

$$\frac{ΑΚ}{ΑΜ}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{Α\Delta}{ΑΒ}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{Α\Delta}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow Α\Delta=4$$

και

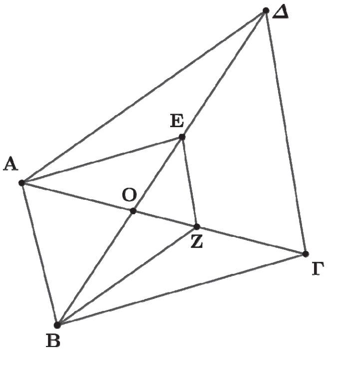
$$ΑΕ=2Ε\Gamma\Rightarrow\frac{ΑΕ}{Ε\Gamma}=\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{ΑΕ+Ε\Gamma}{Ε\Gamma}=\frac{2+1}{1}\Rightarrow$$

$$\frac{Α\Gamma}{Ε\Gamma}=3\Rightarrow\frac{9}{Ε\Gamma}=3\Rightarrow Ε\Gamma=3$$

Άσκηση 2^{η} Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ που οι διαγώνιοι του ΒΔ και ΑΓ τέμνονται στο Ο. Από τη κορυφή Α φέρνουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει την ΒΔ στο Ε και από το σημείο Ε φέρνουμε ευθεία παράλληλη της ΓΔ που τέμνει την άλλη διαγώνιο ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι: α) $ΟΑ\cdot ΟΒ=ΟΕ\cdot Ο\Gamma$

β) $\frac{Ο\Gamma}{ΟΖ}=\frac{Ο\Delta}{ΟΕ}$ γ) $ΒΖ//Α\Delta$

Λύση



α) Αφού $ΑΕ//Β\Gamma$ και τέμνονται από τις $Α\Gamma, ΒΕ$ τότε: $\frac{ΟΑ}{Ο\Gamma}=\frac{ΟΕ}{ΟΒ}$ ή $ΟΑ\cdot ΟΒ=ΟΕ\cdot Ο\Gamma$

β) Όμοια $ΖΕ//\Gamma\Delta$ και τέμνονται από τις $Ο\Gamma$ και $Ο\Delta$ τότε είναι: $\frac{Ο\Gamma}{ΟΖ}=\frac{Ο\Delta}{ΟΕ}$

γ) Από (α) και (β) ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{ΟΑ}{Ο\Gamma}=\frac{ΟΕ}{ΟΒ} \quad\text{και}\quad \frac{Ο\Gamma}{ΟΖ}=\frac{Ο\Delta}{ΟΕ}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{ΟΑ}{\cancel{Ο\Gamma}}\cdot\frac{\cancel{Ο\Gamma}}{ΟΖ}=\frac{\cancel{ΟΕ}}{ΟΒ}\cdot\frac{Ο\Delta}{\cancel{ΟΕ}}\Rightarrow\frac{ΟΑ}{ΟΖ}=\frac{Ο\Delta}{ΟΒ}$$

από όπου προκύπτει ότι $ΒΖ//Α\Delta$.

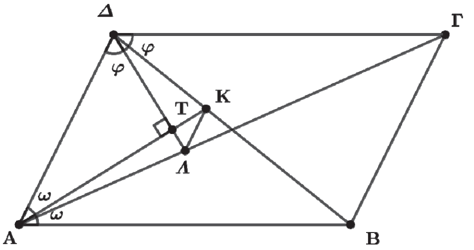
Άσκηση 3^{η} Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Δ τέμνουν τις διαγώνιές του ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ σχηματίζουν με την ΑΔ ορθογώνιο τρίγωνο.
β) ΚΛ // ΒΓ

Λύση

α) Αφού οι ΑΚ και ΔΛ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ αντίστοιχα τότε

$$\hat{\Delta A K} = \hat{K A B} = \hat{\omega} \text{ και } \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = \hat{\Lambda\Delta A} = \hat{\phi}$$



Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο είναι

$\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$ ή $2\omega + 2\varphi = 180^o$ ή $\omega + \varphi = 90^o$,
άρα ΑΚ ⊥ ΔΛ, συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

β) Εφ' όσον ΑΚ ,ΔΛ είναι διχοτόμοι των $A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ αντίστοιχα, τότε ισχύουν:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{K\Delta}{KB} \text{ και } \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\Lambda A}{\Lambda K}$$

αλλά ΑΒ = ΓΔ (ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο)

τότε έχουμε ότι $\frac{K\Delta}{KB} = \frac{\Lambda A}{\Lambda K} \overset{\theta.\Theta}{\Rightarrow} K\Lambda // A\Delta$.

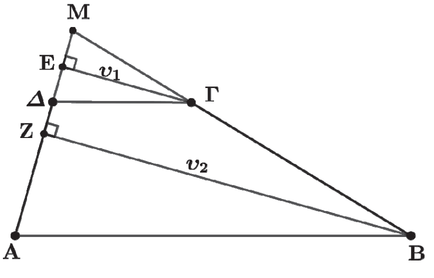
Άσκηση 4η Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ που οι μη παράλληλες πλευρές του τέμνονται στο σημείο Μ. Αν είναι $AB = 12, \Gamma\Delta = A\Delta = 4$ και $B\Gamma = 8$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΓΔ και ΜΑΒ είναι ισοσκελή.
β) Αν υ_1, υ_2 είναι τα ύψη των παραπάνω τριγώνων που άγονται από τις κορυφές τους Γ και Β αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{M\Gamma}{MB}.$$

γ) Αν το ύψος $\upsilon_1 = \sqrt{15}$, να υπολογίσετε το υ_2.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΜΓΔ και ΜΑΒ έχουν την γωνία $\hat{M}$ κοινή και $M\hat{\Delta}\Gamma = M\hat{A}B$ ως εντός εναλλάξ



των παραλλήλων πλευρών του τραπεζίου ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΜΑ άρα είναι όμοια.

Τότε: $\frac{M\Delta}{MA} = \frac{M\Gamma}{MB} = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$ ή

$$\frac{M\Delta}{M\Delta + AB} = \frac{M\Gamma}{M\Gamma + B\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$$

Επειδή $A\Delta = \Gamma\Delta = 4$ και $AB = 12$ έχουμε:

$$\frac{M\Delta}{M\Delta + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3M\Delta = M\Delta + 4 \Leftrightarrow M\Delta = 2$$

και $\frac{M\Gamma}{M\Gamma + 8} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3M\Gamma = M\Gamma + 8 \Leftrightarrow M\Gamma = 4$

για τα τρίγωνα ΜΓΔ και ΜΑΒ έχουμε ότι

$$M\Gamma = \Delta\Gamma = 4 \text{ και}$$

$$MB = M\Gamma + B\Gamma = 4 + 8 = 12 = AB,$$

άρα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

β) Τα τρίγωνα ΜΕΓ και ΜΒΖ είναι ορθογώνια και έχουν την γωνία $\hat{M}$ κοινή, είναι όμοια, τότε:

$$\frac{\Gamma E}{BZ} = \frac{M\Gamma}{MB} \text{ ή } \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{M\Gamma}{MB}$$

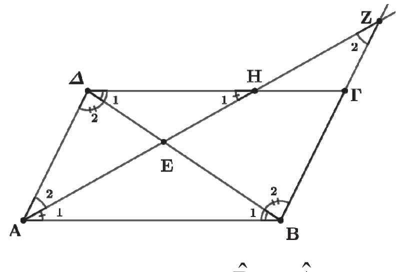
γ) Από την παραπάνω αναλογία έχουμε:

$$\frac{\sqrt{15}}{\upsilon_2} = \frac{M\Gamma}{MB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow \upsilon_2 = 3\sqrt{15}$$

Άσκηση 5η Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ από την κορυφή του Α φέρνουμε ημιευθεία Αx που τέμνει την διαγώνιο του ΒΓ στο Ε την πλευρά του ΓΔ στο Η και την προέκταση της πλευράς του ΒΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΔΗ είναι όμοια.
β) $EA \cdot EB = E\Delta \cdot EZ$
γ) Η ΕΑ είναι μέση ανάλογος των ΕΖ, ΕΗ.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΔΗ έχουν $\hat{A}_1 = \hat{H}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου που



τέμνονται από την ΑΗ και $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΕΒΖ έχουν $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ του παραλληλογράμμου που τέμνονται από την ΒΔ και $\hat{A}_2 = \hat{Z}_2$ ως εντός εναλλάξ από τις ίδιες παράλληλες που τέμνονται από την AZ, συνεπώς είναι όμοια, τότε:

$$\frac{EB}{E\Delta}=\frac{EZ}{EA} \text{ ή } EA\cdot EB=E\Delta\cdot EZ$$

γ) Αφού τα $\overset{\triangle}{AEB}\approx \overset{\triangle}{E\Delta H}$ και $\overset{\triangle}{AE\Delta}\approx \overset{\triangle}{EBZ}$ έχουμε

$$\frac{EB}{E\Delta}=\frac{EA}{EH}=\frac{EZ}{EA} \text{ ή } EA^2=EH\cdot EZ$$

Άσκηση 6η **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Θ το βαρύκεντρό του. Από το σημείο Θ φέρουμε ευθεία (ε) που αφήνει τις κορυφές Β και Γ στο ίδιο ημιεπίπεδο και τέμνει της πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Ε, Ζ και Κ αντίστοιχα. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία (η) παράλληλη στην ευθεία (ε) που τέμνει την διάμεσο ΑΜ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι: α)** $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AH}{A\Theta}$

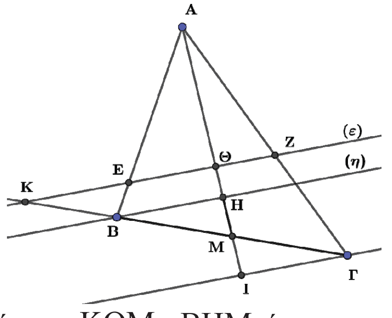
β) $K\Theta\cdot \Gamma M=BH\cdot KM$ **γ)** $\dfrac{AB}{AE}+\dfrac{A\Gamma}{AZ}=3$

[Εξετάσεις Προτύπου Λυκείου Αναβρύτων]

Λύση

α) Επειδή οι ευθείες $(\varepsilon)//(\zeta)$ από θ.Θαλή έχουμε

$$\frac{AB}{AH}=\frac{AE}{A\Theta} \text{ ή } \frac{AB}{AE}=\frac{AH}{A\Theta}$$



β) Τα τρίγωνα $K\Theta M$, BHM έχουν την γωνία $A\hat{M}B$ κοινή και $\Theta\hat{K}M=H\hat{B}M$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων (ε) και (ζ) που τέμνονται από την KM, άρα είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{K\Theta}{BH}=\frac{KM}{BM}\overset{BM=M\Gamma}{\Rightarrow}\frac{K\Theta}{BH}=\frac{KM}{M\Gamma}\Rightarrow$$
$$K\Theta\cdot M\Gamma=BH\cdot KM$$

γ) Από την κορυφή Γ του τριγώνου φέρνουμε παράλληλη ευθεία προς τις ευθείες (ε) και (ζ) που τέμνει την προέκταση της διαμέσου ΑΜ στο σημείο Ι. Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{AZ}=\frac{AI}{A\Theta} \quad (1)$$

και από το (α) ερώτημα έχουμε $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AH}{A\Theta}$ (2)

προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{AB}{AE}+\frac{A\Gamma}{AZ}=\frac{AH}{A\Theta}+\frac{AI}{A\Theta}=\frac{AH+AI}{A\Theta}=$$
$$\frac{AM-HM+AM+MI}{A\Theta}=\frac{2AM-HM+MI}{A\Theta}$$

Άρα $\dfrac{AB}{AE}+\dfrac{A\Gamma}{AZ}=\dfrac{2AM-HM+MI}{A\Theta}$ (3)

Τέλος τα τρίγωνα BMH, $MI\Gamma$ έχουν $BM=M\Gamma$ (AM διάμεσος), $H\hat{B}M=M\hat{I}\Gamma$ (οι $(\eta)//MI$) και $H\hat{M}B=\Gamma\hat{M}I$ (κατά κορυφήν γωνίες), συνεπώς είναι ίσα, τότε $HM=MI$ και η σχέση (3) γράφεται

$$\frac{AB}{AE}+\frac{A\Gamma}{AZ}=\frac{2AM-\cancel{HM}+\cancel{MI}}{A\Theta}=$$
$$=\frac{2AM}{A\Theta}=\frac{2AM}{\frac{2}{3}AM}=3$$

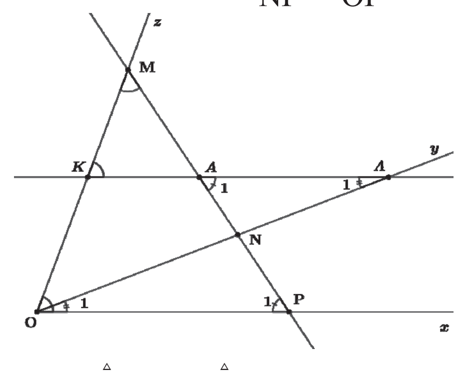
Άσκηση 7η. **Δίνονται δύο εφεξής γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$. Από σημείο Α της γωνίας $y\hat{O}z$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη της Οx που τέμνει τις Οz, Oy στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Μια δεύτερη ευθεία που διέρχεται από το Α τέμνει τις Οz, Oy και Οx στα σημεία Μ, Ν και Ρ. Να αποδείξετε ότι:**

α) $\dfrac{AN}{NP}=\dfrac{A\Lambda}{OP}$ **β)** $\dfrac{MP}{AM}=\dfrac{OP}{AK}$

γ) $AN\cdot MP\cdot AK=AM\cdot NP\cdot A\Lambda$

Λύση

α) Τα $\overset{\triangle}{A\Lambda N}\approx \overset{\triangle}{NOP}$ γιατί έχουν $\hat{O}_1=\hat{\Lambda}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΚΛ και ΟΡ που τέμνονται από την ΟΛ. Επιπλέον από τις ίδιες παράλληλες που τέμνονται από την ΑΡ είναι $\hat{A}_1=\hat{P}_1$, συνεπώς ισχύει: $\dfrac{AN}{NP}=\dfrac{A\Lambda}{OP}$ (1).



β) Όμοια $\overset{\triangle}{MAK}\approx \overset{\triangle}{MOP}$ γιατί έχουν την γωνία $\hat{M}$ κοινή και $M\hat{K}A=M\hat{O}P$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΚΛ και ΟΡ που τέμνονται από την ΜΟ, επομένως ισχύει:

$\frac{MP}{AM} = \frac{OP}{AK}$ (2).

γ) Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1),(2) έχουμε:

$\frac{AN}{NP}\cdot\frac{MP}{AM} = \frac{A\Lambda}{\cancel{OP}}\cdot\frac{\cancel{OP}}{AK}$ ή $\frac{AN}{NP}\cdot\frac{MP}{AM} = \frac{A\Lambda}{AK}$

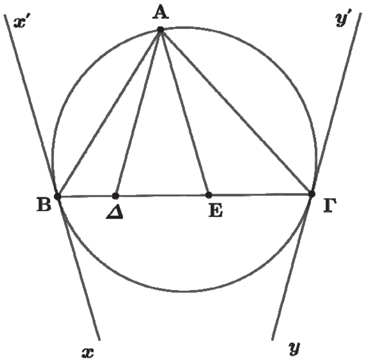
άρα $AN\cdot MP\cdot AK = AM\cdot NP\cdot A\Lambda$

Άσκηση 8η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και xx΄, yy΄ οι εφαπτόμενες του κύκλου στις κορυφές του τριγώνου Β και Γ αντίστοιχα. Από την κορυφή Α του τριγώνου φέρνουμε ευθεία παράλληλη της εφαπτομένης yy΄ που τέμνονται στο Δ κ αι ευθεία παράλληλη της εφαπτομένης xx΄ που τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι: α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΕ είναι όμοια. β) $AB^2 = B\Gamma\cdot BE$

γ) $AB^2\cdot\Delta\Gamma = A\Gamma^2\cdot BE$

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΕ έχουν $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$



(κοινή γωνία) και $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}x'$ (γωνίες ίσες από χορδή και εφαπτομένη) = $B\hat{A}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και xx΄ που τέμνονται από την ΑΒ), συνεπώς είναι όμοια.

β) Από την ομοιότητα των παραπάνω τριγώνων έχουμε:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{B\Gamma}{AB} \Rightarrow AB^2 = B\Gamma\cdot BE$$

γ) Όμοια τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ αφού $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}B$ (κοινή γωνία) και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}y'$ (γωνίες ίσες από χορδή και εφαπτομένη) $= \Delta\hat{A}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και yy΄ που τέμνονται από την ΑΓ), και ισχύουν:

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma\cdot\Delta\Gamma$$

Από την σχέση αυτή και την σχέση που αποδείχτηκε στο β ερώτημα προκύπτει:

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{\cancel{B\Gamma}\cdot BE}{\cancel{B\Gamma}\cdot\Delta\Gamma} \Rightarrow AB^2\cdot\Delta\Gamma = A\Gamma^2\cdot BE.$$

Άσκηση 9η. Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε την διάμετρο ΑΓ του κύκλου (Κ,R) και την διάμετρο ΑΔ του κύκλου (Λ,ρ).

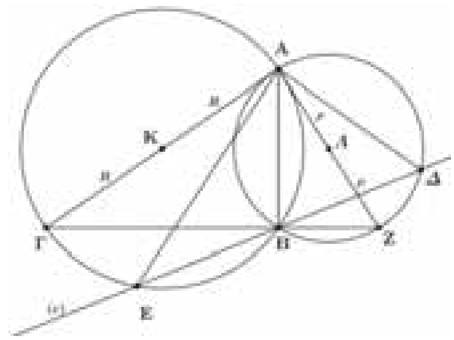
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Β και Ζ είναι συνευθειακά.

Αν μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο Β τέμνει τον κύκλο (Κ,R) στο Ε και τον κύκλο (Λ,ρ) στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

β) $R\cdot A\Delta = \rho\cdot AE$

γ) Για τις διάφορες θέσεις της ευθείας (ε) οι γωνίες των σχηματιζόμενων τριγώνων από την κορυφή Α και τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους κύκλους δεν μεταβάλλονται.

Λύση



α) Η γωνία $A\hat{B}\Gamma = 90^o$ γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Όμοια και η γωνία $A\hat{B}\Delta = 90^o$ γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως είναι $A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 90^o + 90^o = 180^o$, άρα τα σημεία Γ, Β και Δ είναι συνευθειακά.

β) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta} \approx \overset{\triangle}{AEZ}$ γιατί έχουν:

$A\hat{\Gamma}B = A\hat{E}B$ ως εγγεγραμμένες στο τόξο ΑΒ

$A\hat{\Delta}B = A\hat{Z}B$ ως εγγεγραμμένες στο τόξο ΑΒ οπότε

$$\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{A\Gamma}{AE} \Rightarrow \frac{2\rho}{AZ} = \frac{2R}{AE} \Rightarrow R\cdot AZ = \rho\cdot AE$$

γ) Για τις διάφορες θέσεις της ευθείας (ε) τα σχηματιζόμενα τρίγωνα από το σημείο Α και τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους δύο κύκλους, έχουν δύο ζεύγη γωνιών ίσα, αφού αποτελούνται από γωνίες εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο. Τα τρίγωνα αυτά θα έχουν και την γωνία που σχηματίζεται με την κορυφή Α και τις τομές της ευθείας (ε) με τους κύκλους ίση, αφού είναι άθροισμα γωνιών τριγώνου. Δηλαδή οι γωνίες των σχηματιζόμενων τριγώνων δεν μεταβάλλονται.

Τάξη: Β΄

Διανύσματα

Γεωργίου Μ. – Κωνσταντινίδης Δ. – Τσακιρτζής Σ. – Τσιφάκης Χ.

Στη μνήμη του Θωμά Ραϊκόφτσαλη

ΑΣΚΗΣΗ 1η. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Σ για τα οποία ισχύουν: $2\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B}-3\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\vec{0}$, $|\overrightarrow{\Sigma A}|=3$, $|\overrightarrow{\Sigma B}|=|\overrightarrow{\Sigma\Gamma}|=1$ και $(\widehat{\overrightarrow{\Sigma A},\overrightarrow{\Sigma\Gamma}})=\frac{\pi}{3}$.

Να δείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

β) Το σημείο Γ βρίσκεται ανάμεσα στα Α,Β

γ) Το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{\Sigma B}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{A\Gamma}$

δ) $A\hat{\Sigma}B=1^L$

ΛΥΣΗ.

α) Έχουμε ότι $2\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B}-3\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B}-2\overrightarrow{\Sigma\Gamma}-\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$2\left(\overrightarrow{\Sigma A}-\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)+\left(\overrightarrow{\Sigma B}-\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{\Gamma A}$. Άρα $\overrightarrow{B\Gamma}//\overrightarrow{\Gamma A}$ και αφού το Γ είναι κοινό σημείο, έχουμε ότι Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) Αφού $\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{\Gamma A}$ έχουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}\nearrow\nearrow\overrightarrow{\Gamma A}$, άρα το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των Α, Β.

γ) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\overrightarrow{\Sigma B}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\overrightarrow{\Sigma B}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Sigma\Gamma}-\overrightarrow{\Sigma A}\right)$

Αφού $2\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B}-3\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$2\left(\overrightarrow{\Sigma A}-\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)=\overrightarrow{\Sigma\Gamma}-\overrightarrow{\Sigma B}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Sigma A}-\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Sigma\Gamma}-\overrightarrow{\Sigma B}\right)$

Άρα έχουμε

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Sigma B}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Sigma\Gamma}-\overrightarrow{\Sigma B}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Sigma\Gamma}^2-\overrightarrow{\Sigma B}^2\right)=$

$\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{\Sigma\Gamma}|^2-|\overrightarrow{\Sigma B}|^2\right)=0$, οπότε $\vec{u}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$.δ)

$2\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B}-3\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\vec{0}\overset{\cdot\overrightarrow{\Sigma A}}{\Leftrightarrow}$

$2\overrightarrow{\Sigma A}^2+\overrightarrow{\Sigma B}\cdot\overrightarrow{\Sigma A}-3\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Sigma A}=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\Sigma B}\cdot\overrightarrow{\Sigma A}=3\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Sigma A}-2|\overrightarrow{\Sigma A}|^2\overset{\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Sigma A}=6}{=}18-18=0$.

Άρα $\overrightarrow{\Sigma A}\perp\overrightarrow{\Sigma B}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2η. Δίνεται η εξίσωση .

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq0$, και τα διανύσματα $\vec{v}=(\beta,2\alpha)$ και $\vec{u}=(2\gamma,\beta)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Να αποδείξετε ότι:αν $\det(\vec{v},\vec{u})=0$ τότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες.

ii) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\vec{v}\perp\vec{u}$.

iii) Για $\alpha+\gamma=\beta=0$ να λύσετε την εξίσωση (1) και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης $K=\left(\vec{v}+x_1\cdot\vec{u}\right)\cdot\left(\vec{u}+x_2\cdot\vec{v}\right)$ όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) με $x_1<x_2$.

ΛΥΣΗ.

i) $\det(\vec{v},\vec{u})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\beta & 2\alpha\\ 2\gamma & \beta\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

$\beta^2-4\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\Delta=0$, άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες.

ii) Αφού $\vec{v}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow2\beta\gamma+2\alpha\beta=0\Leftrightarrow$

$2\beta(\alpha+\gamma)=0\Leftrightarrow\beta=0$ ή $\alpha+\gamma=0$ με $\alpha\neq0$

iii) Αν $\alpha+\gamma=\beta=0$, η εξίσωση γίνεται

$\alpha x^2-\alpha=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$

Η παράσταση Κ γίνεται

$K=\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{v}^2-\vec{u}^2=|\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2=$

$\beta^2+4\alpha^2-4\gamma^2-\beta^2=0$

Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\perp\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΜ η διάμεσος και σημεία Δ,Ε τέτοια ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta M}$, $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.

ii) Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, M, E είναι συνευθειακά.

iii) Εάν Η είναι το μέσο της ΜΕ, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

ΛΥΣΗ.

i) $\overrightarrow{\Delta M}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=$

$-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{A\Gamma}\right)$

$\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{A\Delta}=$

$\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=$

$\frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{A\Gamma}\right)$

ii) Έχουμε ότι $\overrightarrow{\Delta M}=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ και

$\overrightarrow{\Delta E}=-\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{A\Gamma}\right)$, οπότε $\overrightarrow{\Delta E}=3\cdot\overrightarrow{\Delta M}$, άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}\nearrow\nearrow\overrightarrow{\Delta M}$ και τα σημεία Δ, Μ, Ε είναι συνευθειακά.

iii) Αφού το σημείο Η είναι το μέσο του ΜΕ έχουμε ότι $\overrightarrow{\Gamma H}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Gamma M}+\overrightarrow{\Gamma E}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}\right)=$

$\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta A}$. Άρα το ΑΗΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

ΑΣΚΗΣΗ 4η. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=6$, $|\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 8$. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8$

ii) $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$

ΛΥΣΗ.

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=6+2=8$

Άρα έχουμε: $\left.\begin{array}{l}|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq 8\\ |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 8\end{array}\right\}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8$.

ii) Αφού $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8$ έχουμε ότι

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=6+2\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$ και αφού $|\vec{\alpha}|=6=3|\vec{\beta}|$ προκύπτει ότι $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$

Β΄ τρόπος: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=64\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=64\Leftrightarrow 36+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4=64\Leftrightarrow$

$2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=24\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=12$.

$|\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|^2=\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-6\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=$

$=36-72+36=0$.

Άρα $|\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=0\Rightarrow\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$.

Γ΄τρόπος: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=64\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=64\Leftrightarrow 36+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4=64\Leftrightarrow$

$2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=24\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=12\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα και αφού $|\vec{\alpha}|=3|\vec{\beta}|$ έχουμε ότι $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5η. Δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\kappa+1)$, $B(1,\kappa)$ και $\Gamma(0,\kappa+2)$ με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Για $\kappa\neq\frac{1}{2}$ θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$ και το ύψος του $\overrightarrow{B\Delta}=\vec{\upsilon}$.

i) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{B\Delta}|=|\vec{\alpha}|\cdot\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$

ii) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από $E=(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right)^2-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2}$

γ) Για $\kappa=1$ να βρείτε:

i) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ

ii) το μήκος της διαμέσου ΑΜ

iii) Να προσδιορίσετε σημείο $\Delta(x_\Delta,y_\Delta)$ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

iv) Να βρείτε το $(ΑΒΔΓ)$.

ΛΥΣΗ.

α) Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(1-\kappa,-1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-\kappa,1)$, οπότε

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1-\kappa & -1\\ -\kappa & 1\end{vmatrix}=1-\kappa-\kappa=1-2\kappa$.

Για να σχηματίζουν τρίγωνο πρέπει και αρκεί

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\neq 0\Leftrightarrow 1-2\kappa\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq\frac{1}{2}$.

β) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$\eta\mu\hat{A}=\frac{B\Delta}{AB}=\frac{\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$$

ii) Η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$E=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\right)^2-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2}=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\left|\vec{\beta}\right|^2-\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\left|\vec{\beta}\right|^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)}=$$

$$\frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)}=$$

$$\frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sqrt{\eta\mu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)}=\frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|=$$

$$\overset{0<\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<\pi}{=}\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|=(AB\Gamma)$$

γ) Για $\kappa=1$ έχουμε $A(1,2)$, $B(1,1)$, $\Gamma(0,3)$.

i) Το μέσο Μ του ΒΓ έχει συντεταγμένες

$x_M=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=\frac{1}{2}$ και $y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=2$, άρα $M\left(\frac{1}{2},2\right)$.

ii) Η διάμεσος $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2},0\right)$ οπότε

$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

iii) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow$

$(0,-1)=(x_\Delta,y_\Delta-3)\Leftrightarrow(x_\Delta,y_\Delta)=(0,2)$

iv) $(AB\Delta\Gamma)=2(AB\Gamma)=\sqrt{\left(\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\right)^2-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2}=$

$=\sqrt{2-1}=1$ τ.μ.

διότι, $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$, $\left|\vec{\beta}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$

ΑΣΚΗΣΗ 6η.Δίνονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$,τέτοιος ώστε να ισχύει $\left|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right|=1$, να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le 1$

ΛΥΣΗ.

Έχουμε ότι:

$$\left|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right|=1\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right|^2=1\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)^2=1\Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2+2\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)+\lambda^2\vec{\beta}^2=1\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{\beta}\right|^2\lambda^2+2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\lambda+\left|\vec{\alpha}\right|^2-1=0.$$

Η εξίσωση είναι β΄ βαθμού ως προς λ και αφού διασφαλίζεται ότι υπάρχει $\lambda\in R$ που την επαληθεύει, θα ισχύει $\Delta\ge 0$. Επομένως:

$$\Delta\ge 0\Leftrightarrow 4\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2-4\left|\vec{\beta}\right|^2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$4\left(\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right)^2-4\left|\vec{\beta}\right|^2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$4\left|\vec{\beta}\right|^2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)-\left|\vec{\alpha}\right|^2+1\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)-\left|\vec{\alpha}\right|^2+1\ge 0\Leftrightarrow$$

$$1-\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$1-\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\eta\mu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\ge 0\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\eta\mu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le 1\Leftrightarrow$$

$$\left|\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|\le 1.$$

Αφού $0\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le\pi$ έχουμε ότι $\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\ge 0$,

άρα τελικά προκύπτει $\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 7η.Δίνεται η παράσταση

$K=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-12x+40}$ με $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

ΛΥΣΗ.

Η παράσταση Κ θυμίζει μέτρα διανυσμάτων, οπότε $K=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-12x+40}=$

$\sqrt{(x-0)^2+(1-0)^2}+\sqrt{x^2-12x+36+4}=$

$\sqrt{(x-0)^2+(1-0)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(1-3)^2}$

Αν θεωρήσουμε τα σημεία $A(0,0)$, $B(x,1)$ και $\Gamma(6,3)$ τότε έχουμε $\overrightarrow{AB}=(x,1)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=(6-x,2)$ οπότε η παράσταση γίνεται

$K=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

Το άθροισμα των αποστάσεων γίνεται ελάχιστο όταν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, δηλαδή

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x & 1\\ 6-x & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

$3x-6=0\Leftrightarrow x=2$.

Τότε $K_{min}=\sqrt{5}+\sqrt{20}=3\sqrt{5}$

ΑΣΚΗΣΗ 8η.Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β του επιπέδου με $|\overrightarrow{AB}|=4$. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής που διαγράφει μεταβλητό σημείο Μ του επιπέδου για το οποίο ισχύει

$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

ΛΥΣΗ.

$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow$
$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)^2=2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{BA}^2=2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow|\overrightarrow{BA}|^2=2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow$
$2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=16\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8$

Εάν Ο είναι το μέσο του ΑΒ, έχουμε:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=8\Leftrightarrow$
$\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)=8\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=8\Leftrightarrow$
$|\overrightarrow{MO}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=8\Leftrightarrow|\overrightarrow{MO}|^2-4=8\Leftrightarrow$
$|\overrightarrow{OM}|^2=12\Leftrightarrow|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{12}\Leftrightarrow|\overrightarrow{OM}|=2\sqrt{3}$

Δηλαδή το σημείο Μ απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ίση με $2\sqrt{3}$. Άρα το Μ κινείται σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $R=2\sqrt{3}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha=\sqrt{3}$. Κατασκευάζουμε γωνία $A\hat{\Delta}E=\frac{\pi}{6}$, όπου Ε είναι σημείο της πλευράς ΑΒ.

Α) Δείξτε ότι: i) $\overrightarrow{\Delta A}\cdot\overrightarrow{\Delta E}=3$ ii) $|\overrightarrow{\Delta E}|=2$ και $|\overrightarrow{AE}|=1$

Κατασκευάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓΔ τετράγωνο ΑΕΖΗ

Β) i) Να υπολογίσετε τα: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AH}$
ii) Να δείξετε ότι $\Delta E\perp AH$

Γ) Δείξτε ότι i) $\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{\Delta B}=3+\sqrt{3}$ ii)

$\sigma\upsilon\nu\left(E\hat{\Delta}B\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Δ) i) Εάν Ι είναι το κέντρο του ΑΒΓΔ δείξτε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η σχέση $MA^2+M\Gamma^2=2MI^2+3$.

ii) Να βρεθεί η γραμμή που διαγράφουν τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $MA^2+M\Gamma^2=7$.

Ε) Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με $A(0,0)$.

i) Να βρεθούν οι συντεταγμένες όλων των σημείων του σχήματος

ii) Αν Θ το μέσο του ΒΗ, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{A\Theta}$

iii) Να υπολογίσετε την γωνία $H\hat{A}\Theta$.

Τάξη: Γ΄

Γενικό μέρος συναρτήσεων και όριο συνάρτησης

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Ιστορική αναδρομή: Σύμφωνα με τους Dieudonné και Ponte, η έννοια της συνάρτησης εμφανίστηκε τον 17ο αιώνα, ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης της **αναλυτικής γεωμετρίας** και του ολοκληρωτικού λογισμού.

Η ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας γύρω στο 1640, επέτρεψε στους μαθηματικούς να μελετήσουν γεωμετρικά προβλήματα σχετικά με **καμπύλες και αλγεβρικές σχέσεις** μεταξύ «**μεταβλητών συντεταγμένων x και y**». Ο Λογισμός αναπτύχθηκε χρησιμοποιώντας την έννοια των μεταβλητών, συνδεδεμένη με τη γεωμετρική τους έννοια, η οποία συνεχίστηκε και το 18ο αιώνα. Ωστόσο, η ορολογία της «συνάρτησης» προήλθε από τις **αλληλεπιδράσεις** μεταξύ του **Leibniz και Bernoulli**, προς το τέλος του 17ου αιώνα.

Ο όρος «συνάρτηση» εισήχθη από τον **Gottfried Leibniz,** σε μία δημοσίευσή του το 1673, για να περιγράψει μια ποσότητα που σχετιζόταν με μια καμπύλη, όπως η κλίση μιας καμπύλης σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Ο **Johann Bernoulli** άρχισε να δημιουργεί εκφράσεις από συγκεκριμένες «συναρτήσεις». Το 1698, ο ίδιος συμφώνησε με τον Lebniz, ότι οποιαδήποτε ποσότητα που σχηματίζεται «με έναν αλγεβρικό $A(x,y)=0$ [1] και υπερβατικό τρόπο, μπορεί να ονομάζεται συνάρτηση του x». Από το 1718, θεωρήθηκε ως συνάρτηση οποιαδήποτε έκφραση, που αποτελείται από μια μεταβλητή και κάποιες «σταθερές». Ο **Alexis Claude Clairaut** (περίπου το 1734) και ο **Leonhard Euler εισήγαγαν** το γνωστό συμβολισμό $f(x)$ για τη συνάρτηση.

---

1 Οι πολυωνυμικές, ρητές, άρρητες συναρτήσεις ονομάζονται αλγεβρικές, γιατί ο τύπος τους παίρνει ρητή μορφή. $A(x,y)=0$. Για παράδειγμα η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $y=\sqrt{x-1}$ είναι άρρητη και ο τύπος της γράφεται $y^2-(x-1)=0$. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημ, συν, εφ, σφ καθώς και οι εκθετικές, λογαριθμικές, επειδή ο τύπος τους δεν μπορεί να τεθεί σε αλγεβρική μορφή $A(x,y)=0$, ονομάζονται υπερβατικές συναρτήσεις.

Θέμα 1ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

i. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας, το οποίο να βρείτε.

ii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

iii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}=f$.

Λύση

i. Έστω ένα σημείο $K(x_0, y_0)$ και το σημείο $M(x, f(x))\in C_f$. Ας είναι $\Lambda(\alpha,\beta)$ το συμμετρικό σημείο του Μ ως προς το Κ. Τότε το σημείο Κ είναι μέσο του ΜΛ, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{2}=x_0 \\ \text{και} \\ \dfrac{f(x)+\beta}{2}=y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2x_0-x \\ \text{και} \\ \beta=2y_0-f(x) \end{cases}$$

Το σημείο Κ είναι κέντρο συμμετρίας της C_f αν και μόνο αν $\Lambda\in C_f \Leftrightarrow f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha+1}{\alpha-2}=\beta \Leftrightarrow$

$$\frac{4x_0-2x+1}{2x_0-x-2}=2y_0-\frac{2x+1}{x-2}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$$

$$(y_0-2)x^2+(4x_0-2x_0y_0)x-3x_0+4x_0y_0-4y_0-2=0 \quad (1).$$

Η (1) για να ισχύει για κάθε $x\in D_f$ πρέπει και αρκεί ταυτόχρονα να ισχύουν:

$$\begin{cases} y_0-2=0 \\ 4x_0-2x_0y_0=0 \\ -3x_0+4x_0y_0-4x_0-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=2 \end{cases}.$$

Άρα το σημείο $K(2,2)$ είναι κέντρο συμμετρίας της C_f.

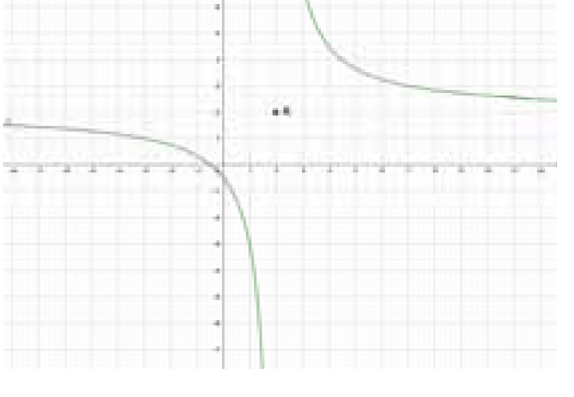
ii. Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται

$$f(x)=\frac{2x-4+5}{x-2}\Leftrightarrow f(x)=2+\frac{5}{x-2}.$$

Από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f_1(x)=\dfrac{5}{x}$, $x\neq0$ κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά παίρνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f_2(x)=\frac{5}{x-2},\ x\neq2.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_{f_2} κατά δύο μονάδες προς τα πάνω.



iii. Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x έχει με την C_f το πολύ ένα κοινό σημείο, οπότε η C_f είναι "1-1". Άρα η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. Για το σύνολο τιμών της f αναζητούμε $y \in R$ ώστε για κάποιο $x \in D_f$ να είναι $f(x)=y$.

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2}=y \Leftrightarrow 2x+1=xy-2y \Leftrightarrow$$
$$(y-2)x=2y+1 \quad (2)$$

Η (2) λύνεται στο $D_f=R-\{2\}$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} y-2\neq 0 \\ \text{και} \\ x=\dfrac{2y+1}{y-2}\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 2 \\ \text{και} \\ 1\neq -4 \text{ που ισχύει} \end{cases}.$$

Άρα $f(R-\{2\})=R-\{2\}$.

Συνεπώς έχουμε $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}, x\in R-\{2\}$, οπότε $f^{-1}=f$.

Θέμα 2ο

Α. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\Delta\to R$, όπου Δ διάστημα.

α. Δείξτε ότι:

i. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Αν το $f(\Delta)$ είναι διάστημα, τότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Αν η f είναι περιττή, τότε και η f^{-1} είναι περιττή.

β. Αν $\Delta\cap f(\Delta)=\Sigma\neq\varnothing$, δείξτε ότι οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ (1) και $f(x)=x$ (2) είναι ισοδύναμες στο Σ.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:R\to R$ που ικανοποιεί τη σχέση $g(x)+e^{g(x)}=x+2$ (3) για κάθε $x\in R$.

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1}.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_g, C_{g^{-1}}$.

Λύση

Α. α. i. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι "1-1", οπότε είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}: f(\Delta)\to R$

ii. Για κάθε $y_1,y_2\in f(\Delta)$ με $y_1<y_2 \Leftrightarrow$

$$f\left(f^{-1}(y_1)\right)<f\left(f^{-1}(y_2)\right) \xleftrightarrow{f \text{ γν. αύξ.}} f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Αφού η f είναι περιττή έχουμε:

$$\begin{cases} x\in\Delta \text{ και } -x\in\Delta \\ \text{και} \\ f(-x)=-f(x) \text{ για κάθε } x\in\Delta \end{cases}.$$

Αν $y\in f(\Delta)$ θα υπάρχει $x\in\Delta$ τέτοιο ώστε

$$f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y).$$

- $-y=-f(x) \xleftrightarrow{f \text{ περιττή}} -y=f(-x)\in f(\Delta)$.
- $f^{-1}(-y)=f^{-1}(-f(x))=f^{-1}(f(-x))=$
$$-x=-f^{-1}(y).$$

Άρα η f^{-1} είναι περιττή.

β. Θα δείξουμε ότι οι ρίζες της (1) είναι ρίζες και της (2) και αντίστροφα.

— Έστω ότι το $\rho\in\Sigma$ είναι ρίζα της (1), τότε $f(\rho)=f^{-1}(\rho)\Leftrightarrow f(f(\rho))=\rho$ (4).

Υποθέτουμε ότι $f(\rho)\neq\rho$ π.χ $f(\rho)<\rho$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$f(f(\rho))<f(\rho) \xleftrightarrow{(4)} \rho<f(\rho)$. Άτοπο.

Όμοια αν $f(\rho)>\rho$. Άρα $f(\rho)=\rho$, δηλαδή το ρ είναι ρίζα και της (2).

— Αντίστροφα: Έστω ότι το $\rho_1\in\Sigma$ είναι ρίζα της (2), τότε $f(\rho_1)=\rho_1\Leftrightarrow\rho_1=f^{-1}(\rho_1)$.

$f(\rho_1)=\rho_1\Rightarrow f(f(\rho_1))=f(\rho_1)=\rho_1\Leftrightarrow$

$f(\rho_1)=f^{-1}(\rho_1)$, δηλαδή το ρ_1 είναι ρίζα και της (1).

Β. i. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Υποθέτουμε ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ και

$$g(x_1)\geq g(x_2)\Rightarrow\begin{cases} e^{g(x_1)}\geq e^{g(x_2)} \\ \text{και} \\ g(x_1)\geq g(x_2) \end{cases} \xrightarrow{(+)}$$

$e^{g(x_1)}+g(x_1)\geq e^{g(x_2)}+g(x_2)\Leftrightarrow x_1+2\geq x_2+1\Leftrightarrow$ $x_1\geq x_2$. Άτοπο. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι "1-1" και άρα είναι αντιστρέψιμη.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της g.

Έστω τυχαίο $y_0\in R$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x+e^x, x\in R$. Εύκολα δείχνουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι "1-1". Επιλέγουμε $x_0=y_0+e^{y_0}-2$ και έχουμε:

$h(g(x_0))=g(x_0)+e^{g(x_0)}=x_0+2=y_0+e^{y_0}\Leftrightarrow$

$h(g(x_0))=h(y_0) \xleftrightarrow{h\ \text{"1-1"}} g(x_0)=y_0$. Άρα για κάθε $y\in R$ υπάρχει στο D_g $x=y+e^y-2$ ώστε $g(x)=y$. Αυτό σημαίνει ότι $g(R)=R$.

Αντικαθιστούμε στην (3) το x με $g^{-1}(x)$ και παίρνουμε $g(g^{-1}(x))+e^{g(g^{-1}(x))}=$

$$g^{-1}(x)+2\Leftrightarrow x+e^x=g^{-1}(x)+2\Leftrightarrow$$
$$g^{-1}(x)=x+e^x-2,\ x\in R.$$

ii. Για $x\in R\cap f(R)=R$, $g^{-1}(x)=g(x)\overset{A,\beta}{\Longleftrightarrow}$
$g(x)=x\Leftrightarrow g^{-1}(x)=x\Leftrightarrow e^{x}=2\Leftrightarrow x=\ln 2$.
Άρα οι $C_g, C_{g^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο το $A(\ln2,\ln2)$.

Σχόλιο: *Το Α, β του παραπάνω θέματος, από γεωμετρικής σκοπιάς σημαίνει ότι αν οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν κοινά σημεία, τότε αυτά θα βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων του συστήματος. Αυτό ισχύει μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.*

Θέμα 3ο

Για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις f, g ισχύει

$$f^2(x)+g^2(x)=\frac{3}{2}x^2 \quad (1) \text{ για κάθε } x\in R^*.$$

i. Δείξτε ότι οι C_f, C_g διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f^2(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$. Τι σημαίνει για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ το αποτέλεσμα του ορίου που βρήκατε.

iii. Να βρείτε το όριο

$$A=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt[3]{x+1}-(x^2-x)f^2(x)+\left(\sqrt{x+4}-3\right)x}{x^3-x^2}$$

Λύση

i. $(1)\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3}{2}x^2\right)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to0}f^2(x)+\lim\limits_{x\to0}g^2(x)=0\Leftrightarrow f^2(0)+g^2(0)=0\Leftrightarrow$

$f(0)=0$ και $g(0)=0$, που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ii. Για κάθε $x\in R^*$, $f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)\Rightarrow$

$$f^2(x)\le\frac{3}{2}x^2\Rightarrow 0\le f^2(x)\le\frac{3}{2}|x|^2\Leftrightarrow$$

$$0\le\frac{f^2(x)}{|x|}\le\frac{3}{2}|x|\,(2).$$

Αν $x<0$ $(2)\Rightarrow 0\le-\dfrac{f^2(x)}{x}\le-\dfrac{3}{2}x\Rightarrow$

$\begin{cases}\dfrac{3}{2}x\le\dfrac{f^2(x)}{x}\le0\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3}{2}x=0\end{cases}$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f^2(x)}{x}=0$.

Για $x>0$ όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f^2(x)}{x}=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(x)}{x}=0\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$. Συνεπώς $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\varphi(0)$. Αυτό σημαίνει ότι αν κινηθούμε πάνω στην C_φ θα περάσουμε "συνεχόμενα" από το σημείο $(0,\varphi(0))=(0,0)$, δηλαδή στο σημείο $(0,0)$ η C_φ δεν διακόπτεται. (Αυτό χαρακτηρίζει τη συνάρτηση φ ότι είναι συνεχής στο 0).

iii. $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-x(x-1)\dfrac{f^2(x)}{x}+\sqrt{x+4}-3}{x^2-x}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)-x(x-1)\dfrac{f^2(x)}{x}+\left(\sqrt{x+4}-2\right)}{x(x-1)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{f^2(x)}{x}+\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right]$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Έχουμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(x)}{x}=0$.

Άρα $A=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{7}{12}$.

Θέμα 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln x-\ln(x+1).$$

i. Δείξτε ότι η f είναι "1-1".

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\ln\left[\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2+1\right]=-2\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\quad(1).$$

iii. Να βρείτε το όριο

$$A=\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(e^x\right)-f\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\right].$$

Λύση

i. $D_f=(0,+\infty)$. Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow$

$$\ln\frac{x_1}{x_1+1}=\ln\frac{x_2}{x_2+1}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+1}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$$

$x_1=x_2$. Άρα η f είναι "1-1".

ii. Η εξίσωση ορίζεται στο R^*. Για $x\neq 0$,

$$(1)\Leftrightarrow\ln\frac{x^2+1}{x^2}=-2\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+\ln\left[\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2+1\right]\Leftrightarrow$$

$$-\ln\frac{x^2}{x^2+1}=-\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2+\ln\left[\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2+1\right]\Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{x^2}{x^2+1}=\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2-\ln\left[\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2+1\right]\Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{x^2}{x^2+1}=\ln\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2+1}\xLeftrightarrow{x^2>0}f(x^2)=$$

$$f\left[\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2\right]\xLeftrightarrow{f\text{ "1-1"}}x^2=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$|x|=x^2+\frac{1}{4}\Leftrightarrow|x|^2-|x|+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(|x|-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$|x|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$$

iii. Θέτουμε $e^x=u>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

Άρα $u\to0^+$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(e^x)=\lim\limits_{u\to0^+}f(u)=$

$$\lim_{u\to0^+}(\ln u-\ln(u+1))=-\infty.$$

Θέτουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\omega>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

Άρα $\omega\to+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=$

$$\lim_{\omega\to+\infty}f(\omega)=\lim_{\omega\to+\infty}\ln\frac{\omega}{\omega+1}\overset{\frac{\omega}{\omega+1}=r}{=}\lim_{r\to1}\ln r=0.$$

Άρα $A=-\infty$.

Θέμα 5ο

Θεωρούμε τη συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x+1}-\alpha x+\beta \text{ με } \lim_{x\to-\infty}f^2(x)=0$$

και $g(x)=(x-1)^2, x\in[0,1]$

α. Δείξτε ότι :

i. $\alpha=\beta=1$.

ii. Οι συναρτήσεις f, g είναι αντιστρέψιμες και να βρείτε τις αντίστροφές τους συναρτήσεις. Επιπλέον να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$ και C_g, $C_{g^{-1}}$.

β. Να βρείτε :

i. Τα όρια $A=\lim\limits_{x\to0}f^{-1}(\eta\mu x)$ **και**

$$B=\lim_{x\to1^-}\left[g^{-1}(x)\left(2\eta\mu\frac{1}{x-1}+3\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x-1}\right)\right].$$

ii. Την τιμή του $\mu\in R$ για την οποία το όριο

$$\Gamma=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f^{-1}(x)}{xf(x)}+\sqrt{x^2-x+1}-\mu x\right]\in R.$$

Λύση

$D_f=R-\{-1\}$.

Έστω M>0, τότε για $x<-M$ έχουμε

$|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)|=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-\alpha)x^2+(\beta-\alpha)x+\beta+2}{x+1}$.

• Αν $1-\alpha\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\alpha)x=\pm\infty$. Άτοπο.

• Αν $\alpha=1$,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\beta-1)x+\beta+2}{x+1}.$$

— Αν $\beta-1\neq0\Leftrightarrow\beta\neq1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\beta-1\neq0$. Άτοπο.

— Αν $\beta-1=0\Leftrightarrow\beta=1$, τότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x+1}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, όταν $\alpha=\beta=1$.

ii. Για τη συνάρτηση f

Ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{3}{x+1}$, $x\neq-1$.

Για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$. Άρα η συνάρτηση f είναι "1-1", οπότε αντιστρέφεται.

Αναζητούμε $y\in R$ ώστε $f(x)=y$ για κάποιο $x\in D_f$

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{3}{x+1}=y\Leftrightarrow yx=3-y\Leftrightarrow\begin{cases}y\neq0\\ \text{και}\\ x=\frac{3-y}{y}\end{cases}.$$

Απαιτούμε $\frac{3-y}{y}\neq-1\Leftrightarrow3\neq0$ που ισχύει.

Άρα $f(R-\{-1\})=R-\{0\}$.

Συνεπώς η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η

$$f^{-1}(x)=\frac{3-x}{x},\ x\neq0.$$

$$D_f\cap D_{f^{-1}}=R-\{-1,0\}.$$

Για $x\in R-\{-1,0\}$ $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν δύο κοινά σημεία τα

$K\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$, $\Lambda\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Για τη συνάρτηση g

$x\in[0,1]$, $g(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^2=y \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ \text{και} \\ |x-1|=\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y\geq 0 \\ \text{και} \\ 1-x=\sqrt{y} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{y} \end{cases}$. Απαιτούμε

$0\leq 1-\sqrt{y}\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq -\sqrt{y}\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq \sqrt{y}\leq 1 \Leftrightarrow$

$0\leq y\leq 1$. Άρα $g([0,1])=[0,1]$.

Για κάθε $y\in g([0,1])$ η εξίσωση $g(x)=y$ έχει στο πεδίο ορισμού της g ακριβώς μία ρίζα την $x=1-\sqrt{y}$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι "1-1", οπότε είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη συνάρτηση την $g^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Για $x\in[0,1]$, θεωρούμε το σύστημα

$\begin{cases} y=g(x) \\ y=g^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g(x) \\ x=g(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g(x) \\ x-y=g(y)-g(x) \end{cases}$

$x-y=g(y)-g(x) \Leftrightarrow x-y=(y-1)^2-(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$x-y=(y-x)(x+y-2) \Leftrightarrow$

$(x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow x=y$ ή $x+y=1$.

Έτσι έχουμε τα συστήματα

$\begin{cases} y=g(x) \\ y=x \end{cases} (\Sigma_1)$ ή $\begin{cases} y=g(x) \\ x+y=1 \end{cases} (\Sigma_2)$.

Από το (Σ_1) έχουμε

$g(x)=x \Leftrightarrow (x-1)^2=x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \text{ δεκτή} \\ \text{ή} \\ x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$

οπότε $y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Από το (Σ_2) έχουμε

$x+g(x)=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

Για $x=0$ είναι $y=1$ και για $x=1$ είναι $y=0$

Άρα οι $C_g, C_{g^{-1}}$ έχουν τρία κοινά σημεία τα

$M\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $N(0,1)$ και $\Sigma(1,0)$.

β. i. • Θέτουμε $\eta\mu x=u$, $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$. Άρα $u\to 0$.

$A=\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(\eta\mu x)=\lim\limits_{u\to 0} f^{-1}(u)=\lim\limits_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}(3-u)\right]$

$\lim\limits_{u\to 0^-}\left[\frac{1}{u}(3-u)\right]=(-\infty).3=-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{u}(3-u)\right]=(+\infty).3=+\infty$.

Επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά δεν υπάρχει το A.

• Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} g^{-1}(x)=0$. Για $x\in[0,1)$, θέτουμε

$h(x)=g^{-1}(x)\left(2\eta\mu\frac{1}{x-1}+3\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x-1}\right)$.

$\left|2\eta\mu\frac{1}{x-1}+3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x-1}\right|\leq 2\left|\eta\mu\frac{1}{x-1}\right|+3\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x-1}\right|\leq 5$

οπότε $|h(x)|\leq 5|g^{-1}(x)| \Leftrightarrow$

$-5|g^{-1}(x)|\leq h(x)\leq 5|g^{-1}(x)|$ για κάθε $x\in[0,1)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}|g^{-1}(x)|=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε

$B=\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f^{-1}(x)}{xf(x)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-x^2+2x+3}{3x^2}=$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}$. Άρα αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ το όριο

$$\Delta=\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\mu x\right)\in\mathbb{R}.$$

$$\Delta=\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-\mu x\right)=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\mu x\right)=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\mu x\right)=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left[-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\mu\right)\right].$$

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\mu\right)=1+\mu$.

— Αν $1+\mu\neq 0$, τότε $\Delta=\pm\infty$.

— Αν $1+\mu=0 \Leftrightarrow \mu=-1$, τότε

$$\Delta=\lim_{x\to -\infty}\left(-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-x\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

Άρα όταν $\mu=-1$ είναι $\Gamma\in\mathbb{R}$.

Θέμα 6ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\lim_{h\to+\infty}\frac{(\eta\mu\theta)x^{h+2}-xe^{h}+1}{x^{h}+1}.$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της f

β. Έστω το σημείο $M(\kappa,\lambda)\in C_f$ με $\kappa>e$ και η συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $g^2(\theta)-2\lambda g(\theta)\le 0$ (1) για κάθε $\theta>0$.

i. Να δείξετε ότι για κάθε για κάθε $\theta>0$ είναι

$$\left|\frac{g(\theta)}{\theta^2}-\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\cdot\kappa^2\right|<\kappa^2\cdot\frac{1}{\theta}.$$

ii. Να βρείτε το όριο $A=\lim_{\theta\to+\infty}\frac{g(\theta)}{\theta^2}$.

Λύση

α. Θέτουμε $g(h)=\frac{(\eta\mu\theta)x^{h+2}-xe^{h}+1}{x^{h}+1},h>0$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$D_f=\left\{x\in[0,+\infty)\,/\,\lim_{h\to+\infty}g(h)\in R\right\}.$$

— Αν $x=0$, $g(h)=1\Rightarrow\lim_{h\to+\infty}g(h)=1$.

— Αν $x>0$, $g(h)=\frac{(\eta\mu\theta)x^2x^{h}-xe^{h}+1}{x^{h}+1}=$

$$\frac{(\eta\mu\theta)x^2\left(\frac{x}{e}\right)^h-x+\left(\frac{1}{e}\right)^h}{\left(\frac{x}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h}=$$

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h}\left[(\eta\mu\theta)x^2\left(\frac{x}{e}\right)^h-x+\left(\frac{1}{e}\right)^h\right]$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η: Αν $0<\frac{x}{e}<1\Leftrightarrow 0<x<e$, τότε

$\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^h=0$. Επίσης $\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^h=0$

Έχουμε $\lim_{h\to+\infty}\left[\left(\frac{x}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h\right]=0$ και

$$\left(\frac{x}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h>0,$$

οπότε

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{e}\right)^h+\left(\frac{1}{e}\right)^h}=+\infty.$$

Άρα $\lim_{h\to+\infty}g(h)=(+\infty)(-x)=-\infty$.

2^η: Αν $\frac{x}{e}=1\Leftrightarrow x=e$, τότε $\lim_{h\to+\infty}g(h)=e^2\eta\mu\theta-e$.

3^η: Αν $\frac{x}{e}>1\Leftrightarrow x>e$, τότε

$$\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^h=+\infty\Rightarrow\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^h=0.$$

Άρα $\lim_{h\to+\infty}g(h)=$

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{(\eta\mu\theta)x^2-x\left(\frac{e}{x}\right)^h+\left(\frac{e}{x}\right)^h\left(\frac{1}{e}\right)^h}{1+\left(\frac{e}{x}\right)^h\left(\frac{1}{e}\right)^h}=(\eta\mu\theta)x^2.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f=\{0\}\cup[e,+\infty)$ και ο τύπος συνάρτησης είναι

$$f(x)=\begin{cases}1\,, & x=0\\ e^2\eta\mu\theta-e, & x=e\\ (\eta\mu\theta)x^2\,, & x>e\end{cases}$$

β. i. $(1)\Leftrightarrow g^2(\theta)-2\lambda g(\theta)+\lambda^2\le\lambda^2\Leftrightarrow$

$$(g(\theta)-\lambda)^2\le\lambda^2\Leftrightarrow|g(\theta)-\lambda|\le|\lambda|\,(2).$$

Έχουμε $\kappa>e$ και $M\in C_f\Leftrightarrow f(\kappa)=\lambda\Leftrightarrow$

$$(\eta\mu\theta)\kappa^2=\lambda\Rightarrow|\eta\mu\theta|\kappa^2=|\lambda|.$$

Είναι

$$|\eta\mu\theta|<|\theta|\Rightarrow|\eta\mu\theta|\kappa^2<\theta\cdot\kappa^2\Rightarrow|\lambda|<\theta\cdot\kappa^2.$$

Άρα $(2)\Rightarrow|g(\theta)-(\eta\mu\theta)\kappa^2|<\theta\cdot\kappa^2\Rightarrow$

$$\left|\frac{g(\theta)}{\theta^2}-\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2\right|<\kappa^2\cdot\frac{1}{\theta}\ (3).$$

ii. $(3)\Leftrightarrow-\kappa^2\cdot\frac{1}{\theta}<\frac{g(\theta)}{\theta^2}-\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2<\kappa^2\cdot\frac{1}{\theta}\Leftrightarrow$

$$-\kappa^2\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2<\frac{g(\theta)}{\theta^2}<\kappa^2\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left|\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\right|=\frac{|\eta\mu\theta|}{\theta}\le\frac{1}{\theta}\Leftrightarrow-\frac{1}{\theta}\le\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\le\frac{1}{\theta}\\ \lim_{\theta\to+\infty}\frac{1}{\theta}=0\end{array}\right.$$

οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής

$$\lim_{\theta\to+\infty}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}-\kappa^2\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2<\frac{g(\theta)}{\theta^2}<\kappa^2\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2\\ \lim_{\theta\to+\infty}\left(-\kappa^2\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2\right)=0\\ \lim_{\theta\to+\infty}\left(\kappa^2\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\kappa^2\right)=0\end{array}\right.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής

$$A=\lim_{\theta\to+\infty}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=0.$$

Το Βήμα του Ευκλείδη

Επίλυση εξίσωσης με ακέραιο μέρος της μεταβλητής x

Θ. Βαγγελάτος, Κ. Κουρκουλής, Ν. Ρούσκας, Α. Φιλλιπίδη, Ι. Φλέσσα,
Μαθητές: Α΄ Λυκείου, Πρότυπο Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής **Καθηγητής: Λυγάτσικας Ζήνων**

Το **ακέραιο μέρος** ενός πραγματικού x, είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x. Συμβολικά θα έχουμε: έστω x ένας πραγματικός αριθμός. Το ακέραιο μέρος του x, είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος $\lfloor x \rfloor$ έτσι ώστε: $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

Για παράδειγμα: $\lfloor 3{,}95 \rfloor = 3$, $\lfloor -1{,}34 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 0{,}003 \rfloor = 0$, $\lfloor e \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι η επίλυση ειδικών μορφών εξισώσεων των οποίων η μεταβλητή εμπλέκεται στην εξίσωση με το ακέραιο μέρος της.

Το πρόβλημα: Να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $\mathbf{x^2 - 14\lfloor x \rfloor + 27 = 0}$

Θα δώσουμε εδώ τρείς διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα επίλυσης ως προς x της εξίσωσης $f(x) = 0$. Έστω $f(x) = x^2 - 14\lfloor x \rfloor + 27$.

1η Προσέγγιση: Παρατηρούμε πρώτα ότι η μεταβλητή x δεν μπορεί να είναι μικρότερη ή ίση του 1. Πράγματι: Αν $x \le 1$ τότε: $-14\lfloor x \rfloor \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 14\lfloor x \rfloor + 27 \ge 27 > 0$. Άρα, για $x \le 1$ η εξίσωσή μας δεν έχει ρίζα. Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους, γνωρίζουμε ότι:

$$\lfloor x \rfloor \le x \Leftrightarrow -14\lfloor x \rfloor \ge -14x \Leftrightarrow x^2 - 14\lfloor x \rfloor + 27 \ge x^2 - 14x + 27$$

Άρα, αν $p(x) = x^2 - 14x + 27$, τότε $\quad p(x) \le f(x) \quad (1)$

Επίσης, από τον ορισμό, έχουμε ότι;

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow -14\lfloor x \rfloor < -14(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 14\lfloor x \rfloor + 27 < x^2 - 14x + 27 + 14$$

Άρα, $\quad f(x) < p(x) + 14 \quad (2)$

Επομένως, οι τιμές της μεταβλητής x που μηδενίζουν την f(x), από τις (1) και (2), πρέπει να γυρίζουν αρνητικό το p(x) και θετικό το p(x) + 14.

Ας δούμε λοιπόν για ποιές τιμές του x το πολυώνυμο p(x) γίνεται αρνητικό και το p(x) + 14 θετικό. Επειδή:

$$p(x) = \left(x - 7 - \sqrt{22}\right)\left(x - 7 + \sqrt{22}\right)$$

$$p(x) + 14 = \left(x - 7 - 2\sqrt{2}\right)\left(x - 7 + 2\sqrt{2}\right)$$

Και $\quad 7 - \sqrt{22} < 7 - 2\sqrt{2} < 7 + 2\sqrt{2} < 7 + \sqrt{22}$

Το x πρέπει να ανήκει στα διαστήματα: $\begin{cases} x \in \left(7 - \sqrt{22}, 7 - 2\sqrt{2}\right) \approx (2.3, 4.17) \\ x \in \left(7 + 2\sqrt{2}, 7 + \sqrt{22}\right) \approx (9.82, 11.69) \end{cases}$

Τότε όμως, $\lfloor x \rfloor = 2, 3, 4$ ή $9, 10, 11$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Για $\lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 2 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} = 1$. Αδύνατο.
- Για $\lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 3 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{15}$. Πράγματι $\lfloor \sqrt{15} \rfloor = 3$, δεκτή.
- Για $\lfloor x \rfloor = 4 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 4 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{29}$. Αλλά $\lfloor \sqrt{29} \rfloor = 5$. Άρα απορρίπτεται.
- Για $\lfloor x \rfloor = 9 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 9 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{99}$. Πράγματι $\lfloor \sqrt{99} \rfloor = 9$, δεκτή.
- Για $\lfloor x \rfloor = 10 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 10 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{113}$. Πράγματι $\lfloor \sqrt{113} \rfloor = 10$, δεκτή.
- Για $\lfloor x \rfloor = 11 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 11 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{127}$. Πράγματι $\lfloor \sqrt{127} \rfloor = 11$, δεκτή.

Συμπέρασμα, οι ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0 είναι: $x = \sqrt{15} \vee 3\sqrt{11} \vee \sqrt{113} \vee \sqrt{127}$

2η Προσέγγιση: Έχουμε δει προηγουμένως ότι η μεταβλητή x δεν μπορεί να είναι μικρότερη ή ίση του 1. Συνεπώς, είναι ένας θετικός πραγματικός > 1.

Επειδή ο $14\lfloor x \rfloor$ είναι άρτιος τότε ο $14\lfloor x \rfloor - 27$ είναι περιττός. Επειδή όμως $x^2 = 14\lfloor x \rfloor - 27$ ο x^2 θα είναι και αυτός περιττός και $x^2 = 2k + 1$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε: $\lfloor \sqrt{2k+1} \rfloor = \frac{x^2+27}{14} = \frac{k+14}{7}$.

Επομένως ο 7 πρέπει να είναι διαιρέτης του k+14. Επιπλέον,

$\frac{k+14}{7} \le \sqrt{2k+1} < \frac{k+14}{7} + 1$. Επιλύω τις δύο ανισώσεις χωριστά:

$$\frac{k+14}{7} \le \sqrt{2k+1} \text{ τότε } k \in \left(35 - 7\sqrt{22}, 35 + 7\sqrt{22}\right) \text{ ή } k \in (2.16, 67.83)$$

Και $\sqrt{2k+1} < \frac{k+14}{7} + 1$, τότε $k \in \left(-\frac{1}{2}, 28 - 14\sqrt{2}\right) \cup \left(28 + 14\sqrt{2}, +\infty\right)$ ή

$$k \in (-0.5, 8.2) \cup (47.79, +\infty)$$

Άρα, οι τιμές του k θα είναι: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 48, 49, ... , 67 και του k + 14

17, 18, 19, 20, 21, 22, 62, 63, … , 81

Από τις τιμές αυτές τα πολλαπλάσια του 7 είναι μόνο: 21, 63, 70 και 77

Και συνεπώς το k παίρνει τις τιμές: 7(=21-14), 49 (=63-14), 56(=70-14) και 63(=77-14).

Επομένως οι τιμές του x θα είναι από τη σχέση $x^2 = 2k+1$, $x = \sqrt{15} \vee 3\sqrt{11} \vee \sqrt{113} \vee \sqrt{127}$ (Το x πρέπει να είναι θετικό.)

3η Προσέγγιση: Εδώ θα δώσουμε γραφική λύση της εξίσωσης. Έστω $y = x - \lfloor x \rfloor$. Τότε η αρχική εξίσωση γίνεται: $f(x) = x^2 - 14\lfloor x \rfloor + 27 = x^2 - 14(x - y) + 27 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{14}(x^2 - 14x + 27)$.

Επομένως οι λύσεις της f(x)=0 είναι οι λύσεις του συστήματος: $(\Sigma) = \begin{cases} y = x - \lfloor x \rfloor \\ y = -\frac{1}{14}(x^2 - 14x + 27) \end{cases}$

Αλλά το γράφημα της πρώτης συνάρτησης στο σύστημα (Σ), είναι το εξής:

Πρόκειται για μία φραγμένη συνάρτηση με φράγμα το 1. Τα δύο γραφήματα των συναρτήσεων στο σύστημα (Σ) δίνουν: Τα κοινά τους σημεία βρίσκονται μεταξύ των διαστημάτων (3,4), (9,10), (10,11) και (11,12) με ακέραια μέρη $\lfloor x \rfloor$ αντίστοιχα 3, 9, 10 και 11.

Επομένως από το ότι x > 0 και $x^2 = 14 \cdot \lfloor x \rfloor - 27$ θα πάρουμε όπως στη πρώτη προσέγγιση:

$$x = \sqrt{15} \vee 3\sqrt{11} \vee \sqrt{113} \vee \sqrt{127}$$ □

Παραδείγματα:

1) Επίλυση της εξίσωσης $x^2 - 2\lfloor x \rfloor + 9 = 0$ με τη 2η προσέγγιση.

Επειδή ο $2\lfloor x \rfloor$ είναι άρτιος τότε ο $2\lfloor x \rfloor - 9$ είναι περιττός. Αλλά $x^2 = 2\lfloor x \rfloor - 9$,

Άρα και ο x^2 θα είναι περιττός της μορφής $x^2 = 2k+1$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε: $\left\lfloor \sqrt{2k+1} \right\rfloor = \frac{x^2+9}{2} = k + 5$. Επιπλέον, $k + 5 \leq \sqrt{2k+1} < (k+5) + 1$

Επιλύω τις δύο ανισώσεις χωριστά: $k + 5 \leq \sqrt{2k+1}$, η ανίσωση είναι αδύνατη.

Και $\sqrt{2k+1} < (k+5) + 1$, τότε $k \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Άρα, δεν υπαρχει $k \in \mathbb{N}$ που να επαληθεύει το σύστημα των ανισώσεων.Συνεπώς, δεν υπάρχει κάποιο $x = \sqrt{2k+1}$ που να επαληθεύει την εξίσωση $x^2 - 2\lfloor x \rfloor + 9 = 0$.

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη. □

2) Επίλυση της εξίσωσης $x^2 - 8\lfloor x \rfloor + 1 = 0$ με τη 3η προσέγγιση.

Θέτω $y = x - \lfloor x \rfloor$. Τότε η αρχική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$x^2 - 8(x - y) + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1/8\,(x^2 - 8x + 1) \qquad (1)$$

Άρα, όπως και στη 3η Προσέγγιση, οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης θα είναι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών: $(\Sigma) = \begin{cases} y = x - \lfloor x \rfloor \\ y = -\frac{1}{8}(x^2 - 8x + 1) \end{cases}$

Τα δύο γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ και $g(x) = -1/8\,(x^2 - 8x + 1)$ φαίνονται στο επόμενο σχήμα.

Τα σημεία τομής με τη παραβολή είναι τα σημεία Μ και Ν που βρίσκονται μέσα στα διαστήματα (6,7) και (7,8), αντίστοιχα. Τα δε ακέραια μέρη τους είναι 6 και 7. Άρα:

$$x > 0 \wedge x^2 = 8\lfloor x \rfloor - 1 \text{ τότε } \begin{cases} \text{αν } \lfloor x \rfloor = 6 \text{ τότε } x^2 = 8 \cdot 6 - 1 = 47 \text{ άρα } x = \sqrt{47} \\ \text{αν } \lfloor x \rfloor = 7 \text{ τότε } x^2 = 8 \cdot 7 - 1 = 55 \text{ άρα } x = \sqrt{55} \end{cases}$$ □

Η χρήση ταυτοτήτων στην λύση προβλημάτων

Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος Ηλείας

Έστω α, b, c μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

Είναι $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2\cdot(\alpha+b+c)}{\alpha\cdot b\cdot c}$. Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{a+b+c=0}$, τότε από την προηγούμενη ισότητα λαμβάνουμε: $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ ή $\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$ (1) .

Επειδή $\alpha+b+c=0\Leftrightarrow c=-(\alpha+b)$ η (1) μπορεί να γραφεί ως εξής: $\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(\alpha+b)^2}}=\left|\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}-\frac{1}{\alpha+b}\right|$ (2).

Αν στην (2) θέσουμε όπου α το $\frac{1}{\alpha}$, τότε λαμβάνουμε $\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{b^2}+\frac{\alpha^2}{(\alpha b+1)^2}}=\left|\alpha+\frac{1}{b}-\frac{\alpha}{\alpha b+1}\right|$ (3).

Ομοίως αν στην (2) θέσουμε όπου α το $\frac{1}{\alpha}$ και b το $\frac{1}{b}$, τότε λαμβάνουμε:

$$\sqrt{\alpha^2+b^2+\frac{\alpha^2b^2}{(\alpha+b)^2}}=\left|\alpha+b-\frac{\alpha b}{\alpha+b}\right| \quad (4).$$

Σχόλιο: *Σημειώνουμε ότι το αλγεβρικό άθροισμα των αντίστροφων των δεξιών μελών και των τεσσάρων ισοτήτων είναι μηδέν.*

Εφαρμογές – ασκήσεις

1. **Αν $\alpha,b,c\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq b\neq c\neq\alpha$, τότε** $\sqrt{\frac{1}{(\alpha-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-\alpha)^2}}=\left|\frac{1}{\alpha-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-\alpha}\right|$

Λύση: Είναι $(\alpha-b)+(b-c)+(c-\alpha)=0$, οπότε σύμφωνα με την (1) η ισότητα είναι προφανής.

2. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης** $\sqrt{1+2020^2+\frac{2020^2}{2021^2}}+\frac{2020}{2021}$

Λύση: Έχουμε $\sqrt{1+2020^2+\frac{2020^2}{2021^2}}+\frac{2020}{2021}=\sqrt{\frac{1}{1^2}+2020^2+\frac{2020^2}{(2020\cdot1+1)^2}}+\frac{2020}{2021}$.

Η τελευταία έκφραση σύμφωνα με την (3) είναι ίση με $\left|1+2020-\frac{2020}{2021}\right|+\frac{2020}{2021}=1+2020-\frac{2020}{2021}+\frac{2020}{2021}=2021$.

3. **Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης** $\sqrt{0{,}47^2+0{,}53^2+0{,}47^2\cdot0{,}53^2}$.

Λύση: Σύμφωνα με την ισότητα (4) η παράσταση γράφεται

$$\sqrt{0{,}47^2+0{,}53^2+\frac{0{,}47^2\cdot0{,}53^2}{(0{,}47+0{,}53)^2}}=\left|0{,}47+0{,}53-\frac{0{,}47\cdot0{,}53}{0{,}47+0{,}53}\right|=0{,}7509 .$$

4. **Να αποδειχτεί ότι η παράσταση $\alpha^2+(\alpha-1)^2+\alpha^2\cdot(\alpha-1)^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.**

Λύση: Είναι $\alpha^2+(\alpha-1)^2+\alpha^2\cdot(\alpha-1)^2=\alpha^2+(1-\alpha)^2+\alpha^2\cdot(1-\alpha)^2=\alpha^2+(1-\alpha)^2+\frac{\alpha^2\cdot(1-\alpha)^2}{(\alpha+(1-\alpha))^2}=$

$$=\left(\alpha+1-\alpha-\frac{\alpha\cdot(1-\alpha)}{\alpha+1-\alpha}\right)^2=(\alpha^2-\alpha+1)^2 .$$

5. **Να αποδειχτεί ότι η παράσταση $(\alpha^2b^2+1)\cdot(\alpha b+1)^2+\alpha^2b^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.**

Απάντηση: $(\alpha^2b^2+\alpha b+1)^2$

6. Να υπολογιστεί το άθροισμα $\mathbf{S=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n}},\ n\in\mathbb{N}^*}$

Λύση: Επειδή $1=\frac{1}{1^2}$, από την ισότητα (2) έχουμε

$$S=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\underbrace{1+1+\ldots1}_{n\ \text{όροι}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\frac{2n^2+n-2}{2n}$$

7. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3}$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^2+1+\frac{x^2}{(x+1)^2}=4$ ή $x^2+\frac{1}{1^2}+\frac{x^2}{(x\cdot1+1)^2}=4$ ή λόγω της (3) $\left(x+1-\frac{x}{x+1}\right)^2=4$, οπότε λαμβάνουμε: $x+1-\frac{x}{x+1}=2$ ή $x+1-\frac{x}{x+1}=-2$. Η εξίσωση $x+1-\frac{x}{x+1}=2$ γίνεται $x^2-x-1=0$ με ρίζες $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, ενώ η εξίσωση $x+1-\frac{x}{x+1}=-2$ είναι αδύνατη.

8. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11}$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται $x^2+25+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=36$, οπότε σύμφωνα με την (4) έχουμε $\left(x+5-\frac{5x}{x+5}\right)^2=36$, η οποία είναι ισοδύναμη με την ένωση των εξισώσεων: $x+5-\frac{5x}{x+5}=6$, $x+5-\frac{5x}{x+5}=-6$.

- $x+5-\frac{5x}{x+5}=6$. Η εξίσωση αυτή ανάγεται στην $x^2-x-5=0$ από όπου $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.
- $x+5-\frac{5x}{x+5}=-6$. Μετά τις πράξεις καταλήγουμε στην $x^2+7x+55=0$ η οποία είναι αδύνατη.

Άρα το σύνολο λύσεων της αρχικής εξίσωσης είναι το $\left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2}\ ,\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

- Ομοίως να λυθεί η εξίσωση $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40$

9. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{\frac{9}{x^2}+\frac{9}{(x+2)^2}=10}$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$ ή $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}+\frac{1}{4}=\frac{49}{36}$, οπότε σύμφωνα με την (2) , έχουμε $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$ και είναι ισοδύναμη με την ένωση των εξισώσεων: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}=\frac{7}{6}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}=-\frac{7}{6}$. Η εξίσωση $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}=\frac{7}{6}$ μετά τις πράξεις ανάγεται στην $x^2+2x-3=0$, με ρίζες τους αριθμούς 1 και -3. Ομοίως η εξίσωση $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}=-\frac{7}{6}$ ανάγεται στην $5x^2+10x+6=0$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα το σύνολο λύσεων της αρχικής είναι το $\{1\ ,\ -3\}$.

10. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{x^2+\frac{25x^2}{(5+2x)^2}=\frac{74}{49}}$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά: $x^2+\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2}{5}\cdot x+1\right)^2}=\dfrac{74}{49}$ ή $x^2+\dfrac{25}{4}+\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2}{5}\cdot x+1\right)^2}=\dfrac{74}{49}+\dfrac{25}{4}$ ή

$x^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2}{5}\cdot x+1\right)^2}=\left(\dfrac{39}{14}\right)^2$ (1). Σύμφωνα με την ισότητα (3) η (1) είναι ισοδύναμη με την ένωση των $x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{x}{\dfrac{2}{5}\cdot x+1}=\dfrac{39}{14}$, $x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{x}{\dfrac{2}{5}\cdot x+1}=-\dfrac{39}{14}$. Η εξίσωση $x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{x}{\dfrac{2}{5}\cdot x+1}=\dfrac{39}{14}$ μετά τις πράξεις γίνεται $7x^2-2x-5=0$ της οποίας λύσεις είναι οι αριθμοί 1 και $-\dfrac{5}{7}$ που είναι και οι λύσεις της αρχικής, γιατί η εξίσωση $x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{x}{\dfrac{2}{5}\cdot x+1}=-\dfrac{39}{14}$ είναι αδύνατη.

11. Να λυθεί η εξίσωση $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=90$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x-1}{x}-2=0$. Με βάση αυτή την παρατήρηση, μετασχηματίζουμε την εξίσωση ως εξής: $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\dfrac{1}{4}=90+\dfrac{1}{4}=\dfrac{361}{4}$, οπότε λόγω της ισότητας (1) έχουμε: $\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{19}{2}\right)^2$, η οποία είναι ισοδύναμη με την ένωση των εξισώσεων: $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{19}{2}$ (2), $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{19}{2}$ (3). Λύσεις της (2) είναι οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ενώ λύσεις της (3) είναι οι αριθμοί $-\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$, $\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$. Άρα το σύνολο λύσεων της αρχικής εξίσωσης είναι το $\left\{-\dfrac{3\sqrt{11}}{11},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{11}}{11},\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

12. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2+b^2}+\dfrac{1}{(\alpha+b)^2}+\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^4}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{(\alpha^2+b^2)^2}}}$, $\alpha b\neq 0$

Λύση: Είναι $\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^4}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{(\alpha^2+b^2)^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{(\alpha^2)^2}+\dfrac{1}{(b^2)^2}+\dfrac{1}{(\alpha^2+b^2)^2}}$ $(*)$. Θέτουμε $\alpha^2=u,\ b^2=v$, οπότε από την $(*)$ λαμβάνουμε $\sqrt{\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}+\dfrac{1}{(u+v)^2}}=\left|\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{u+v}\right|$ λόγω της ισότητας (1), δηλαδή $\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^4}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{(\alpha^2+b^2)^2}}=\left|\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{\alpha^2+b^2}\right|=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{\alpha^2+b^2}$, επειδή $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{b^2}>\dfrac{1}{\alpha^2+b^2}$. Άρα η αρχική παράσταση γίνεται: $\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2+b^2}+\dfrac{1}{(\alpha+b)^2}+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{\alpha^2+b^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{(\alpha+b)^2}}=\left|\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{\alpha+b}\right|$

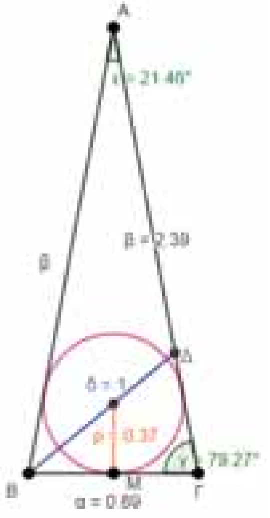
- Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+1+\dfrac{1}{(x^2+1)^2}}}=2$ ***Απάντηση:*** $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

Η σχέση της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου με την παρά την βάση διχοτόμο στο ισοσκελές τρίγωνο

Βασίλης Α. Λαγογιάννης Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Ε.Μ.Π. – μέλος Ε.Μ.Ε.

Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ δίνεται το μήκος $ΒΔ = δ$ της διχοτόμου της $\hat{Β}$. Αν $w = \dfrac{ρ}{δ}$ είναι ο λόγος της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου του $ΑΒΓ$ προς την παρά την βάση διχοτόμο $ΒΔ$, ζητούνται:

1) Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει ο λόγος $w = \dfrac{ρ}{δ}$ για τα ισοσκελή τρίγωνα. Κατόπιν, θεωρώντας $δ = 1$ να κατασκευαστεί το τρίγωνο $ΑΒΓ$ προσδιορίζοντας τις γωνίες του και τα μήκη των πλευρών του για την περίπτωση του παραπάνω μέγιστου λόγου.



2) Να διερευνηθεί η ύπαρξη και το πλήθος των λύσεων για την κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου με τυχαία δεδομένα ρ και δ.

Λύση:

1) Ισχύει ότι $2(ΑΒΓ) = 2Ε = ρ(α+β+γ) = β\cdot γ\cdot ημ\hat{Α} \overset{β=γ}{\underset{\hat{Α}=2π-2\hat{Β}}{\Leftrightarrow}}$

$$ρ(α+2β) = β^2\cdot ημ\left(2π-2\hat{Β}\right) \Leftrightarrow ρ(α+2β) = β^2\cdot ημ2\hat{Β} \Leftrightarrow$$

$$2ρβ\left(1+\frac{α}{2β}\right) = 2β^2\cdot ημ\hat{Β}\cdot συν\hat{Β} \overset{συν\hat{Β}=\frac{α}{2β}}{\Rightarrow} ρ = \frac{β\cdot ημ\hat{Β}\cdot συν\hat{Β}}{1+συν\hat{Β}} \quad (1).$$

Στο τρίγωνο $ΔΒΓ$ εφαρμόζοντας νόμο ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{ημ\left(Β\hat{Δ}Γ\right)}{ΒΓ} = \frac{ημ\left(\hat{Γ}\right)}{ΒΔ} \overset{Β\hat{Δ}Γ=2π-\hat{Γ}-\frac{\hat{Β}}{2}}{\Rightarrow} \frac{ημ\left(\frac{3\hat{Β}}{2}\right)}{α} = \frac{ημ\left(\hat{Β}\right)}{δ} \Rightarrow$$

$$δ = \frac{α\cdot ημ\hat{Β}}{ημ\frac{3\hat{Β}}{2}} \Rightarrow δ = \frac{2α\cdot ημ\frac{\hat{Β}}{2}\cdot συν\frac{\hat{Β}}{2}}{3ημ\frac{\hat{Β}}{2}-4ημ^3\frac{\hat{Β}}{2}} \Rightarrow δ = \frac{2α\cdot συν\frac{\hat{Β}}{2}}{3-4ημ^2\frac{\hat{Β}}{2}} \overset{α=2β\cdot συν\hat{Β}}{\Rightarrow} δ = \frac{4β\cdot συν\hat{Β}\cdot συν\frac{\hat{Β}}{2}}{1+2συν\hat{Β}} \quad (2).$$

Από (1),(2) έχουμε:
$$w = \frac{ρ}{δ} = \frac{\left(1+2συν\hat{Β}\right)\cdot ημ\hat{Β}}{4συν\frac{\hat{Β}}{2}\left(1+συν\hat{Β}\right)} = \frac{2\left(1+2συν\hat{Β}\right)\cdot ημ\frac{\hat{Β}}{2}\cdot συν\frac{\hat{Β}}{2}}{4συν\frac{\hat{Β}}{2}\left(1+συν\hat{Β}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1+2συν\hat{Β}\right)ημ\frac{\hat{Β}}{2}}{2\left(1+συν\hat{Β}\right)} = \frac{\left(1+2συν\hat{Β}\right)\sqrt{1-συν\hat{Β}}}{2\sqrt{2}\left(1+συν\hat{Β}\right)} \quad (3α)$$

Αν θέσουμε $x = συν\hat{Β}$, μετασχηματίζοντας τον τύπο (3α) έχουμε:

$$w = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}(1+x)},\ x\in(0,1) \quad (3β)$$

Για να προσδιορίσουμε για ποια τιμή του x ο λόγος $w=\frac{\rho}{\delta}$ παίρνει την μέγιστη τιμή του, παραγωγίζουμε την σχέση (3β) και έχουμε: $w'(x)=\dfrac{-2x^2-5x+1}{4\sqrt{2}(x+1)^2\sqrt{1-x}}$ (4).

Εξετάζοντας τη μονοτονία της $w(x)$ στο $(0,1)$, λόγω της (4) παρατηρούμε:

- Για $0<x<\frac{\sqrt{33}-5}{4}$ ισχύει $w'(x)>0$, οπότε η $w(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\sqrt{33}-5}{4}\right]$.
- Για $\frac{\sqrt{33}-5}{4}<x<1$ ισχύει $w'(x)<0$, οπότε η $w(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\sqrt{33}-5}{4},1\right)$.

Συνεπώς για το σημείο μηδενισμού της $w'(x)=0$ έχουμε $x_M=\frac{\sqrt{33}-5}{4}$, άρα $w_{max}=w\left(\frac{\sqrt{33}-5}{4}\right)$, δηλαδή **το ισοσκελές τρίγωνο για το οποίο ισχύει** $\sigma\upsilon\nu\hat{B}=\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}=\frac{\sqrt{33}-5}{4}$ **(5) δηλαδή για** $\hat{\Gamma}\cong 79,272357^{o}$ **, έχει τον μέγιστο λόγο** $\left(\frac{\rho}{\delta}\right)_{max}=w\left(\frac{\sqrt{33}-5}{4}\right)=\frac{\sqrt{207-33\sqrt{33}}}{8\sqrt{2}}\cong 0,3690087$ **(6).**

Σημειώνεται ότι η κατασκευή γωνίας που έχει συνημίτονο $\frac{\sqrt{33}-5}{4}$ με κανόνα και διαβήτη είναι απόλυτα εφικτή. Συνεπώς, εφόσον είναι γνωστό ένα από τα μεγέθη δ ή ρ, είναι επίσης κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη το ισοσκελές τρίγωνο που έχει την παραπάνω γωνία βάσεως. Στην περίπτωση που ισχύει $\delta=1$, θα έχουμε $\alpha=\dfrac{2\rho}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)}=\rho\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{1-\sigma\upsilon\nu\hat{B}}}\Rightarrow\alpha=2\dfrac{\sqrt{207-33\sqrt{33}}}{8\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{33}-1}{9-\sqrt{33}}}\cong 0,8909637$ (7) και

$\beta=\dfrac{\alpha}{2\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B}}\overset{(5),(7)}{\Rightarrow}\beta\cong 2,393254$.

Το τρίγωνο του παραπάνω σχήματος, που σχεδιάστηκε με πρόγραμμα GEOGEBRA, επαληθεύει την ορθότητα των υπολογισμών.

2) Διερεύνηση: Σύμφωνα με την μελέτη της συνάρτησης $w(x)$ που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε:

α) Εφόσον ο λόγος $\frac{\rho}{\delta}$ επιλεχθεί μεγαλύτερος του $w_{max}=\left(\frac{\rho}{\delta}\right)_{max}=\frac{\sqrt{207-33\sqrt{33}}}{8\sqrt{2}}\cong 0,3690087$, το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν θα είναι κατασκευάσιμο.

β) Αν ο λόγος είναι ίσος με w_{max}, τότε το πρόβλημα έχει ως μοναδική λύση το τρίγωνο με $\sigma\upsilon\nu\hat{B}=\frac{\sqrt{33}-5}{4}$.

γ) Αν $w(0)<\frac{\rho}{\delta}<w\left(\frac{\sqrt{33}-5}{4}\right)$ ή λόγω της (3β) $\frac{\sqrt{2}}{4}<\frac{\rho}{\delta}<w_{max}$, τότε η (3β) ικανοποιείται για μία τιμή του x που ανήκει στο διάστημα $\left(0,\frac{\sqrt{33}-5}{4}\right)$, όπου η $w(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, και επειδή $0=w(1)<w(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}$, η (3β) ικανοποιείται και για μια δεύτερη τιμή του x στο διάστημα $\left(\frac{\sqrt{33}-5}{4},1\right)$,

όπου η $w(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε στη συγκεκριμένη περίπτωση το πρόβλημα έχει δύο διακριτές αποδεκτές λύσεις.

δ) Αν $0<\frac{\rho}{\delta}\le w(0)$ ή λόγω της (3β) $0<\frac{\rho}{\delta}\le\frac{\sqrt{2}}{4}$, η (3β) ικανοποιείται μόνο από μία τιμή του x στο διάστημα $\left(\frac{\sqrt{33}-5}{4},1\right)$, όπου η $w(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε στη συγκεκριμένη περίπτωση το πρόβλημα έχει μία μοναδική αποδεκτή λύση.

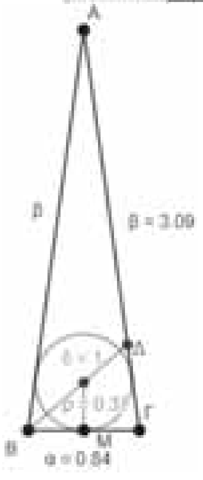
Παρατηρήσεις: Για τυχαία επιλογή του $w=\frac{\rho}{\delta}$, αν υψώσουμε τα μέλη της (3β) στο τετράγωνο, καταλήγουμε στην τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση: $x^3+2w^2x^2+\frac{16w^2-3}{4}x+\frac{8w^2-1}{4}=0$.
Επιλύοντας την εξίσωση αυτή με τη βοήθεια του EXCEL για διάφορες τιμές του w, διαπιστώνουμε τα εξής:

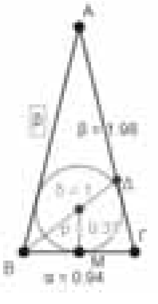
- Αν $w>w_{max}$ η εξίσωση έχει μία αρνητική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες (καμία αποδεκτή λύση).
- Αν $w=w_{max}$ η εξίσωση έχει ως διπλή θετική ρίζα το $\frac{\sqrt{33}-5}{4}$ (αποδεκτή λύση) και μια αρνητική ρίζα (μη αποδεκτή λύση).
- Αν $\frac{\sqrt{2}}{4}<w<w_{max}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο $(0,1)$ και μία αρνητική ρίζα (δύο αποδεκτές λύσεις).
- Αν $0<w<\frac{\sqrt{2}}{4}$ η εξίσωση έχει μία ρίζα στο $(0,1)$ και δύο αρνητικές ρίζες (μία αποδεκτή λύση).

Γενικά δεν είναι εφικτή η κατασκευή του $AB\Gamma$ με κανόνα και διαβήτη για τυχαία επιλογή των ρ και δ, με εξαίρεση ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

Αριθμητικό παράδειγμα: Για $\rho=0,368$ και $\delta=1$ ή $w=\frac{\rho}{\delta}=0,368$, με τη βοήθεια ειδικού προγράμματος EXCEL, το φύλλο του οποίου απεικονίζεται παρακάτω, υπολογίζουμε τις γωνίες και τις πλευρές του $AB\Gamma$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
ρ/δ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑΣ x^3+ax^2+bx+c			ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΤΗ ΜΟΡΦΗ x^3+dx+e=0		ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ συνΒ=ΣΥΝΓ						
w	a	b	c	d	e	1Η ΡΙΖΑ	2Η ΡΙΖΑ			3Η ΡΙΖΑ		
0,368	0,27085	-0,2083	0,02	-0,23276	0,04113	0,236940511	0,136555003			-0,644343514		
						ΔΕΚΤΗ	ΔΕΚΤΗ			ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ		
	α	β				ΓΩΝΙΑ Β1	ΓΩΝΙΑ Β2					
Τρίγωνο 1	0,93707	1,977442				76,29396306	82,15145222					
Τρίγωνο 2	0,84441	3,091848										





Παρατηρούμε ότι επειδή το $w=\frac{\rho}{\delta}=0,368$ ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},0,3690087\right)$, η τριτοβάθμια εξίσωση, η οποία επιλύθηκε με το παραπάνω πρόγραμμα EXCEL έδωσε δύο διαφορετικές αποδεκτές τιμές για το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}$, οπότε προέκυψαν: για $\delta=1$ ένα τρίγωνο με πλευρές $\alpha\cong 0,84$, $\beta\cong 3,09$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}\cong 82,151452^o$ και ένα δεύτερο τρίγωνο με πλευρές $\alpha\cong 0,94$, $\beta\cong 1,98$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}\cong 76,293963^o$, τα οποία σχεδιάστηκαν αριστερά με τη βοήθεια προγράμματος GEOGEBRA.
Σημειώνεται για το συγκεκριμένο παράδειγμα ότι είναι αδύνατη η κατασκευή των τριγώνων αυτών αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη.

Εφαρμογές Εσωτερικού Γινομένου και του Μέτρου Αθροίσματος Διανυσμάτων

Γιώργος Αποστολόπουλος Μεσολόγγι

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$. Η ισότητα ισχύει μόνο, αν $\vec{\alpha}\,||\,\vec{\beta}$. Δηλαδή έχουμε ότι: $|x_1x_2+y_1y_2|\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\Leftrightarrow-\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\le x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$. Η ισότητα ισχύει αν: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

Γενικότερα για τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu)$ και $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\nu)$ του χώρου ν-διαστάσεων ισχύουν πάλι τα ίδια, δηλαδή: $\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2}\le\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu\le\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2}$

Η ισότητα ισχύει αν: $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ Επίσης για τα διανύσματα $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}$ ισχύει $|\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2}|\le|\vec{\alpha_1}|+|\vec{\alpha_2}|$ και γενικότερα $|\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2}+\ldots+\vec{\alpha_\nu}|\le|\vec{\alpha_1}|+|\vec{\alpha_2}|+\ldots+|\vec{\alpha_\nu}|$.

Θα επιλύσουμε τώρα άρρητες εξισώσεις και θα αποδείξουμε ανισώσεις, με την βοήθεια των παραπάνω.

Παραδείγματα

1ο Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x-3}+2\sqrt{5-x}=\sqrt{10}$.

Λύση: Πρέπει $x\in(3,5)$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{x-3},\sqrt{5-x}\right)$ και $\vec{\beta}=(1,2)$. Τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\sqrt{x-3}+2\sqrt{5-x}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\sqrt{x-3}^2+\sqrt{5-x}^2}=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{5}$. Τότε $\sqrt{x-3}+2\sqrt{5-x}\le\sqrt{10}$ και η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\sqrt{x-3}}{1}=\frac{\sqrt{5-x}}{2}\Leftrightarrow x=3{,}4$

2ο Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

Λύση: Πρέπει $x\in(0,3)$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{1+x},\sqrt{3-x}\right)$ και $\vec{\beta}=(x,1)$. Τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$, $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{x^2+1}$. Τότε $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\le2\sqrt{x^2+1}$

και η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\frac{\sqrt{3-x}}{1}\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x-1)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=1\pm\sqrt{2}$.

3ο Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x^3+x^2+9x+9}=x\sqrt{x}+3$.

Λύση: Ισοδύναμα έχουμε:

$\sqrt{x^2(x+1)+9(x+1)}=x\sqrt{x}+3\Leftrightarrow$

$\sqrt{(x^2+9)(x+1)}=x\sqrt{x}+3$. Πρέπει $x\ge0$.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,3)$ και $\vec{\beta}=\left(\sqrt{x},1\right)$.

Τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x\sqrt{x}+3$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+9}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{x+1}$.

Τότε

$x\sqrt{x}+3\le\sqrt{x^2+9}\cdot\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+9)(x+1)}\ge x\sqrt{x}+3$. Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x}}{1}\Leftrightarrow x=3\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2=9x\Leftrightarrow x=0$ ή $x=9$.

4ο Παράδειγμα

Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι θετικοί, να δειχθεί ότι: $\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\ge\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}$.

Λύση: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{\alpha},\sqrt{\gamma}\right)$ και $\vec{\beta}=\left(\sqrt{\beta},\sqrt{\delta}\right)$. Τότε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\alpha+\beta}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{\beta+\delta}$.

Άρα: $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}\le\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta+\delta)}$.

Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\delta}}$ δηλαδή $\alpha\delta=\beta\gamma$.

5ο Παράδειγμα

Αν $x\in[-3,4]$, να αποδειχθεί ότι: $\sqrt{5x+15}+\sqrt{8-2x}\le7$.

Λύση: Θα αποδείξουμε ότι $\sqrt{5}\cdot\sqrt{x+3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-x}\le7$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{5},\sqrt{2}\right)$ και $\vec{\beta}=\left(\sqrt{x+3},\sqrt{4-x}\right)$. Τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{x+3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-x}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{7}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{7}$.

Άρα: $\sqrt{5x+15}+\sqrt{8-2x}\le\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7$. Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=2$.

6ο Παράδειγμα

Αν $x\in\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{11}\right]$, να αποδειχθεί ότι: $\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x}\le3$.

Λύση: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1,1)$ και $\vec{\beta}=\left(\sqrt{5x+1},\sqrt{6x+1},\sqrt{1-11x}\right)$. Τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$.

Άρα: $\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x}\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$.

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{6x+1}}{\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1-11x}}{1}\Leftrightarrow x=0.$$

7ο Παράδειγμα

Αν α, β, γ, δ είναι θετικοί αριθμοί να δειχθεί ότι: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}}$.

Λύση: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\frac{1}{\sqrt{\beta}},\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$.

Τότε:$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma\alpha}}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}}$.

Άρα: $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma\alpha}}\le\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}}$,

δηλαδή η ισότητα ισχύει όταν:

$\frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\Leftrightarrow\alpha^2=\beta\gamma$ και $\beta^2=\alpha\gamma$ και $\gamma^2=\alpha\beta$, δηλαδή όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

8ο Παράδειγμα

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha\ge-\frac{3}{7}$, $\beta\ge-\frac{3}{7}$, $\gamma\ge-\frac{3}{7}$, να αποδειχθεί ότι: $\sqrt{7\alpha+3}+\sqrt{7\beta+3}+2\sqrt{7\gamma+3}\le\sqrt{42(\alpha+\beta+\gamma)+54}$

Λύση: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{7\alpha+3},\sqrt{7\beta+3},\sqrt{7\gamma+3}\right)$, $\vec{\beta}=(1,1,2)$.

Τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \sqrt{7\alpha+3}+\sqrt{7\beta+3}+2\sqrt{7\gamma+3}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{7(\alpha+\beta+\gamma)+9}$, $|\vec{\beta}| = 6$. Άρα:
$\sqrt{7\alpha+3}+\sqrt{7\beta+3}+2\sqrt{7\gamma+3} \leq$
$\sqrt{7(\alpha+\beta+\gamma)+9}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{42(\alpha+\beta+\gamma)+54}$.
Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\sqrt{7\alpha+3}}{1} = \frac{\sqrt{7\beta+3}}{1} = \frac{\sqrt{7\gamma+3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = -\frac{3}{7}$.

9ο Παράδειγμα

Αν $x \geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+4x+4}+\sqrt{2x^2-14x+29}+\sqrt{2x^2-8x+10} \geq \sqrt{89}.$$

Λύση: Ισοδύναμα είναι:
$\sqrt{2x^2}+\sqrt{x^2+4x+4+x^2}+$
$\sqrt{x^2-10x+25+x^2-4x+4}+$
$\sqrt{x^2-2x+1+x^2-6x+9} = \sqrt{x^2+x^2}+$
$\sqrt{(x+2)^2+x^2}+\sqrt{(5-x)^2(2-x^2)}+$
$\sqrt{(1-x)^2+(3-x)^2}$. Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (x,x)$, $\vec{\beta} = (x+2,x)$, $\vec{\gamma} = (5-x,2-x)$ και $\vec{\delta} = (1-x,3-x)$.
Επειδή $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|+|\vec{\delta}|$
Έχουμε $\sqrt{x^2+x^2}+\sqrt{(x+2)^2+x^2}+$
$+\sqrt{(5-x)^2+(2-x)^2}+\sqrt{(1-x)^2+(3-x)^2} \geq$
$\sqrt{8^2+5^2} = \sqrt{89}$.

10ο Παράδειγμα

Αν $0 \leq x \leq \frac{1}{5}$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης: $A = 6\sqrt{1-5x}+8\sqrt{5x}$.

Λύση: Αν $\vec{\alpha} = (6,8)$, $\vec{\beta} = (\sqrt{1-5x},\sqrt{5x})$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 6\sqrt{1-5x}+8\sqrt{5x}$, $|\vec{\alpha}| = 10$, $|\vec{\beta}| = 1$, άρα $6\sqrt{1-5x}+8\sqrt{5x} \leq 10\cdot 1 = 10$. Δηλαδή η μέγιστη τιμή της παράστασης Α είναι 10 για $x = \frac{16}{125}$, αφού η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\sqrt{1-5x}}{6} = \frac{\sqrt{5x}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{16}{125}$.

11ο Παράδειγμα

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει: $x+y+z = 2$, να δειχθεί ότι:

$$\sqrt{3x-1}+\sqrt{3y-1}+\sqrt{3z-1} \leq 3$$

Λύση: Εννοείται ότι: $x,y,z \geq \frac{1}{3}$. Αν $\vec{\alpha} = (1,1,1)$, $\vec{\beta} = (\sqrt{3x-1},\sqrt{3y-1},\sqrt{3z-1})$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \sqrt{3x-1}+\sqrt{3y-1}+\sqrt{3z-1}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3(x+y+z)-3} = \sqrt{3\cdot 2-3} = \sqrt{3}$.
Άρα: $\sqrt{3x-1}+\sqrt{3y-1}+\sqrt{3z-1} \leq \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$.
Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\sqrt{3x-1}}{1} = \frac{\sqrt{3y-1}}{1} = \frac{\sqrt{3z-1}}{1} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}.$$

12ο Παράδειγμα

Αν $x \in [0,2]$, να δειχθεί ότι: $\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}} \leq 3\sqrt{2}$.

Λύση: Θεωρούμε τα διανύσματα
$\vec{\alpha} = \left(\sqrt{x},\sqrt{1-\frac{x}{2}},\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)$, $\vec{\beta} = (1,2,2)$. Τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \sqrt{x}+2\sqrt{1-\frac{x}{2}}+2\sqrt{1-\frac{x}{2}} = \sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$. Άρα $\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}} \leq 3\sqrt{2}$.
Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$.

13ο Παράδειγμα

Αν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $\sqrt{\alpha^2+(1-\beta)^2}+\sqrt{\beta^2+(1-\gamma)^2}+\sqrt{\gamma^2+(1-\alpha)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Λύση: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x} = (\alpha,1-\beta)$, $\vec{y} = (\beta,1-\gamma)$ και $\vec{z} = (\gamma,1-\alpha)$. Τότε:

$$\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} = \big(\alpha+\beta+\gamma,3-(\alpha+\beta+\gamma)\big).$$

Επίσης:$|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}| =$
$\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)^2+9-6(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)^2} =$
$\sqrt{2(\alpha+\beta+\gamma)^2-6(\alpha+\beta+\gamma)+9}$.
$\vec{x} = \sqrt{\alpha^2+(1-\beta)^2}$, $\vec{y} = \sqrt{\beta^2+(1-\gamma)^2}$ και $\vec{z} = \sqrt{\gamma^2+(1-\alpha)^2}$. Επειδή $|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}| \leq |\vec{x}|+|\vec{y}|+|\vec{z}|$, έχουμε:
$\sqrt{\alpha^2+(1-\beta)^2}+\sqrt{\beta^2+(1-\gamma)^2}+$
$\sqrt{\gamma^2+(1-\alpha)^2} \geq$
$\sqrt{2(\alpha+\beta+\gamma)^2-6(\alpha+\beta+\gamma)+9}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι:
$\sqrt{2(\alpha+\beta+\gamma)^2-6(\alpha+\beta+\gamma)+9} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$2(\alpha+\beta+\gamma)^2-6(\alpha+\beta+\gamma)+9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow$
$4(\alpha+\beta+\gamma)^2-12(\alpha+\beta+\gamma)+9 \geq 0 \Leftrightarrow$
$(2(\alpha+\beta+\gamma)-3)^2 \geq 0$ που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν:
$\alpha+\beta+\gamma = \frac{3}{2}$ και $\frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{\beta}{1-\gamma} = \frac{\gamma}{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha-\alpha\gamma = \beta-\beta^2$,$\beta-\alpha\beta = \gamma-\gamma^2$, $\alpha-\alpha^2 = \gamma-\beta\gamma$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:
$\alpha+\beta+\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = \alpha+\beta+\gamma-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$ και επειδή $\alpha+\beta+\gamma = \frac{3}{2}$, η ισότητας ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$.

14ο Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ισχύει $\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}$.

Λύση: Θεωρούμε τα διανύσματα
$\vec{u} = \left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\gamma},\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ και $\vec{v} = \left(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\gamma}{\alpha},\frac{\alpha}{\beta}\right)$, τότε:
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}$ και
$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}$, $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$.
Επειδή ισχύει $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ έχουμε: $\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\cdot\sqrt{\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}} \geq \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}$, δηλαδή $\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}$. Η ισότητα ισχύει όταν: $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\frac{\beta}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} = \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$, οπότε $\alpha\gamma^3 = \alpha\beta^3 \Leftrightarrow \beta = \gamma$ και $\alpha^3\beta = \beta\gamma^3 \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ άρα, όταν: $\alpha = \beta = \gamma$.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 382 (ΤΕΥΧΟΣ 122)

Αν για τους θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύει $xyz=1$, να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

β. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\ge 3\sqrt{2}$

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

α. Από την προφανή ανισότητα $\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\ge 0$ που ισχύει για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς, εύκολα βρίσκουμε ότι $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2\le 2(\alpha+\beta)$, οπότε

$$\left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}\right)$$

$$=4\frac{1+x^2+y^2+1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}=4\frac{(1-x^2y^2)+(x^2+y^2+x^2y^2+1)}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

$$=4\left(1+\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right)$$

Αλλά, $(1+x^2)(1+y^2)\ge(1+xy)^2$, οπότε

$$\left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\right)^2\le 4\left(1+\frac{1-x^2y^2}{(1+xy)^2}\right)$$

$$=4\left(1+\frac{1-\frac{1}{z^2}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^2}\right)=4\left(1+\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{8z}{z+1}$$

Επομένως,

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\le 2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}$$

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le 3,\quad (1)$$

Από την προφανή $(z-1)^2\ge 0$ εύκολα καταλήγουμε στην $\sqrt{\dfrac{2}{1+z^2}}\le\dfrac{2}{1+z}$, οπότε για την απόδειξη της (1) αρκεί να δείξουμε ότι

$$2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}+\frac{2}{1+z}\le 3$$

ή, αρκεί $2\sqrt{2z}\sqrt{z+1}+2\le 3(z+1)$, η οποία ισχύει αφού απορρέει από την $\left(\sqrt{z+1}-\sqrt{2z}\right)^2\ge 0$.

β. Από την γνωστή ανισότητα C.S. B. έχουμε:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\sum\sqrt{1+x^2}\ge 9$$

και επειδή αποδείξαμε ότι $\sum\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$\sum\sqrt{1+x^2}\ge 9:\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση

Στην περίπτωση που έχουμε, όπως εδώ, τριάδες αριθμών η ανισότητα **Cauchy-Schwarz-Buniakovski** είναι η:

$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)\ge(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γιώργος- Μεσολόγγι Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο, Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός και Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 383 (ΤΕΥΧΟΣ 122)

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω G το βαρύκεντρο του. Αν $GK\perp B\Gamma$, $G\Lambda\perp A\Gamma$, $GM\perp AB$, να αποδείξετε ότι:

α. $(K\Lambda M)=\dfrac{4(AB\Gamma)^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{9\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

β. $\dfrac{(K\Lambda M)}{(AB\Gamma)}\le\dfrac{1}{4}$

Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια

ΛΥΣΗ Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

α. Είναι: $(K\Lambda M)=(GK\Lambda)+(GM\Lambda)+(GMK)$

$=\frac{1}{2}GK\cdot G\Lambda\cdot \eta\mu K\hat{G}\Lambda+\frac{1}{2}GM\cdot G\Lambda\cdot \eta\mu \Lambda\hat{G}M+\frac{1}{2}GM\cdot GK\cdot \eta\mu K\hat{G}M$

και επειδή τα τετράπλευρα AMGΛ,BMGK,ΓKGΛ είναι εγγράψιμα, έχουμε:

$$(\text{ΚΛΜ})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\upsilon_\alpha\right)\left(\frac{1}{3}\upsilon_\beta\right)\eta\mu\Gamma+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\upsilon_\beta\right)\left(\frac{1}{3}\upsilon_\gamma\right)\eta\mu\text{Α}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\upsilon_\gamma\right)\left(\frac{1}{3}\upsilon_\alpha\right)\eta\mu\text{Β}$$

$$=\frac{1}{18}\left(\upsilon_\alpha\upsilon_\beta\eta\mu\Gamma+\upsilon_\beta\upsilon_\gamma\eta\mu\text{Α}+\upsilon_\gamma\upsilon_\alpha\eta\mu\text{Β}\right)$$

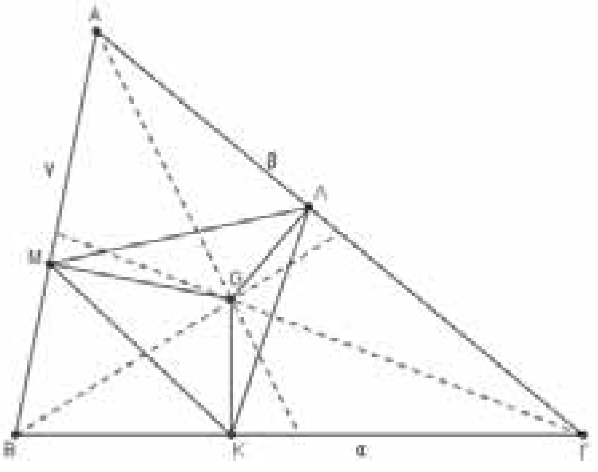
$$=\frac{1}{18}\left(\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\alpha}\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\beta}\eta\mu\Gamma+\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\beta}\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\gamma}\eta\mu\text{Α}+\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\gamma}\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\alpha}\eta\mu\text{Β}\right)$$

η οποία λόγω του νόμου των ημιτόνων γράφεται

$$(\text{ΚΛΜ})=\frac{2}{9}(\text{ΑΒΓ})^2\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2R}+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\cdot\frac{1}{2R}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\cdot\frac{1}{2R}\right)$$

$$=\frac{1}{9R}(\text{ΑΒΓ})^2\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)=\frac{(\text{ΑΒΓ})^2(\gamma^2+\beta^2+\alpha^2)}{9R\cdot\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{(\text{ΑΒΓ})^2(\gamma^2+\beta^2+\alpha^2)}{9\alpha\beta\gamma\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4(\text{ΑΒΓ})}}=\frac{4(\text{ΑΒΓ})^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{9\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$



β. Είναι γνωστό ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\le 9R^2$$

Έτσι, έχουμε:

$$\frac{(\text{ΚΛΜ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\dfrac{4(\text{ΑΒΓ})^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{9\alpha^2\beta^2\gamma^2}}{\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}}=\frac{16\left(\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}\right)^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{9(\alpha\beta\gamma)^3}$$

$$\le\frac{9R^2}{4\cdot 9R^2}=\frac{1}{4}\text{, οπότε }\frac{(\text{ΚΛΜ})}{(\text{ΑΒΓ})}\le\frac{1}{4}.$$

Σημείωση

Έναν τρόπο απόδειξης της ανισότητας

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\le 9R^2$$

έχουμε παραθέσει στο τεύχος 112.

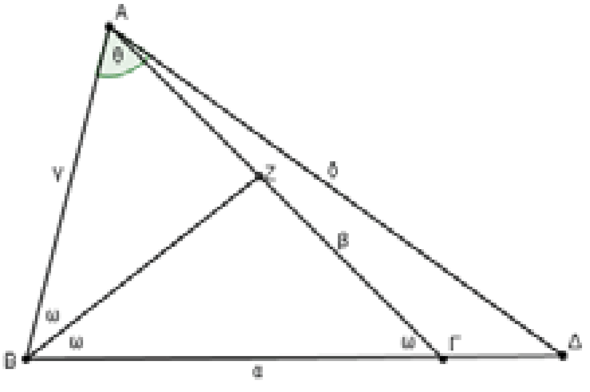
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο Παπαδόπουλος Δήμος - Έδεσα

ΑΣΚΗΣΗ 384 (ΤΕΥΧΟΣ 122)

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Β}}=2\hat{\Gamma}$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\frac{1}{3}\text{ΒΓ}$. Να αποδείξετε ότι αν $\theta=\text{Β}\hat{\text{Α}}\Delta$, τότε

$$(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{4}\text{ΒΓ}^2\cdot\sigma\varphi\frac{\theta}{2}$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι



ΛΥΣΗ Παπαδόπουλος Δήμος - Έδεσα

Έστω ΑΖ είναι η διχοτόμος της γωνίας Β και $\text{ΑΔ}=\delta$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΖ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΒ}}\Rightarrow\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\text{ΑΖ}}{\gamma}\Rightarrow\gamma^2=\beta\cdot\text{ΑΖ},\quad(1)$$

Επίσης από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε

$$\text{ΑΖ}=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma},\quad(2)$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται

$$\gamma^2=\beta\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}\Rightarrow(\alpha+\gamma)\gamma=\beta^2\Rightarrow\beta^2=\alpha\gamma+\gamma^2,\quad(3)$$

Από το θεώρημα Stewart στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε

$$\text{ΑΒ}^2\cdot\Gamma\Delta+\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΒΓ}=\text{ΑΓ}^2\cdot\text{ΒΔ}+\text{ΒΓ}\cdot\Gamma\Delta\cdot\text{ΒΔ}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\alpha\gamma^2+\alpha\delta^2=\frac{4\alpha}{3}\beta^2+\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{4\alpha}{3}\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\gamma^2+\delta^2=\frac{4}{3}\beta^2+\frac{4}{9}\alpha^2\Rightarrow 3\gamma^2+9\delta^2=12\beta^2+4\alpha^2$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}9\delta^2=12(\alpha\gamma+\gamma^2)+4\alpha^2-3\gamma^2\Rightarrow 9\delta^2=(2\alpha+3\gamma)^2$$

$$\Rightarrow\delta=\frac{2\alpha+3\gamma}{3},\quad(4)$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\text{ΒΔ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΔ}^2-2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΔ}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}2\gamma\cdot\frac{2\alpha+3\gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\theta=\gamma^2+\left(\frac{2\alpha+3\gamma}{3}\right)^2-\left(\frac{4\alpha}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 6\gamma(2\alpha+3\gamma)\sigma\upsilon\nu\theta=9\gamma^2+4\alpha^2+12\alpha\gamma+9\gamma^2-16\alpha^2$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3\gamma^2+2\alpha\gamma-2\alpha^2}{2\alpha\gamma+3\gamma^2},\quad (5)$$

Άρα, $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{3}{4}(\mathrm{AB\Delta})=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\gamma\delta\eta\mu\theta=\frac{3}{8}\gamma\delta\cdot 2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}$

$$\overset{(4)}{=}\frac{3}{4}\gamma\frac{2\alpha+3\gamma}{3}\eta\mu^2\frac{\theta}{2}\sigma\varphi\frac{\theta}{2}=\frac{2\alpha\gamma+3\gamma^2}{4}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\sigma\varphi\frac{\theta}{2}$$

$$\overset{(5)}{=}\frac{1}{8}(2\alpha\gamma+3\gamma^2)\left(1-\frac{3\gamma^2+2\alpha\gamma-2\alpha^2}{2\alpha\gamma+3\gamma^2}\right)\sigma\varphi\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{8}(2\alpha\gamma+3\gamma^2)\frac{2\alpha\gamma+3\gamma^2-3\gamma^2-2\alpha\gamma+2\alpha^2}{2\alpha\gamma+3\gamma^2}\sigma\varphi\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{8}2\alpha^2\cdot\sigma\varphi\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}\mathrm{B\Gamma}^2\cdot\sigma\varphi\frac{\theta}{2}$$

που είναι το ζητούμενο.

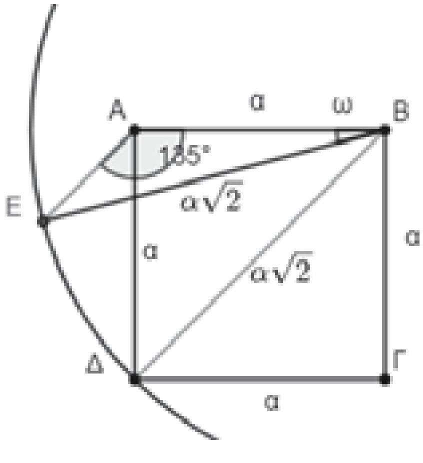
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσα και Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός.

ΑΣΚΗΣΗ 385 (ΤΕΥΧΟΣ 122)

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα ΒΔ. Από το Α φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΒΔ που τέμνει τον κύκλο στο Ε. Να υπολογίσετε την γωνία $\mathrm{A\hat{B}E}$.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.



Από την παραλληλία των ΑΕ και ΒΔ έχουμε

$$\mathrm{E\hat{A}B}+\mathrm{A\hat{B}\Delta}=180^\circ \overset{\mathrm{A\hat{B}\Delta}=45^\circ}{\Rightarrow} \mathrm{E\hat{A}B}=135^\circ$$

Αν ονομάσουμε α την πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ τότε από το θ. ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΕΒ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{EB}}{\eta\mu(\mathrm{E\hat{A}B})}=\frac{\mathrm{AB}}{\eta\mu(\mathrm{A\hat{E}B})}\Rightarrow\frac{\alpha\sqrt{2}}{\eta\mu(\mathrm{E\hat{A}B})}=\frac{\alpha}{\eta\mu(180^\circ-\mathrm{E\hat{A}B}-\mathrm{A\hat{B}E})}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{\eta\mu 135^\circ}=\frac{1}{\eta\mu(45^\circ-\mathrm{A\hat{B}E})}\Rightarrow\eta\mu(45^\circ-\mathrm{A\hat{B}E})=\frac{1}{2}$$

και επειδή $0^\circ<45^\circ-\mathrm{A\hat{B}E}<90^\circ$ έχουμε:

$$45^\circ-\mathrm{A\hat{B}E}=30^\circ\Rightarrow\mathrm{A\hat{B}E}=15^\circ$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσα και Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 386 (ΤΕΥΧΟΣ 122)

Να βρείτε το πλήθος των ζευγών (x,y) με $x,y\in\mathbb{R}$ που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$(\varepsilon\varphi(\pi x))(\varepsilon\varphi(\pi y))=1$$

ώστε τα σημεία $\mathrm{M}(x,y)$ να είναι πάνω στον κύκλο

$$x^2+y^2=2022$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Με $x\neq\lambda+\frac{1}{2}$ και $y\neq\mu+\frac{1}{2}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$ εξίσωση γράφεται $\varepsilon\varphi(\pi x)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\pi y\right)$, (1) και

$$(1)\Leftrightarrow \pi x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\pi y\Leftrightarrow x+y=\kappa+\frac{1}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύκλου έχουμε: $x^2+\left(\kappa+\frac{1}{2}-x\right)^2=2022$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)x+\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)^2=2022$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)^2=1011$$

Αν η εξίσωση έχει λύση, τότε:

$$\frac{1}{4}\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)^2\leq 1011\Rightarrow\left|\kappa+\frac{1}{2}\right|\leq 2\sqrt{1011}$$

$$\Rightarrow -2\cdot 31{,}8-\frac{1}{2}\leq\kappa\leq 2\cdot 31{,}8-\frac{1}{2}\Rightarrow -64{,}1\leq\kappa\leq 63{,}1$$

με τον αριθμό κ να είναι ακέραιος . Το πλήθος των ακεραίων που ικανοποιούν την παραπάνω ανίσωση είναι 128, οπότε υπάρχουν 128 ευθείες της οικογένειας $x+y=\kappa+\frac{1}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ που τέμνουν τον κύκλο. Επειδή κάθε μια από αυτές τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία, τελικά το πλήθος των κοινών σημείων είναι

$$2\cdot 128=256\,.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις που περιγράφονται παραπάνω ικανοποιούν τους αρχικούς περιορισμούς, αφού αν υποθέσουμε ότι για κάποιο ακέραιο λ ισχύει $x=\lambda+\frac{1}{2}$, οδηγούμαστε στο άτοπο

$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2+(\kappa-\lambda)^2=2022\,.$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια, Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Σκοτίδας Σωτήρης – Καρδίτσα, Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσα και Σαμουηλίδης Χρήστος - Θεσσαλονίκη.

387. Να αποδείξετε ότι σε οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\ge\frac{1}{R^2}$, όπου α, β, γ είναι οι πλευρές του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

Επειδή $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2\tau}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2\frac{E}{\rho}}{E\cdot 4R}=\frac{1}{2R\rho}$

αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{2R\rho}\ge\frac{1}{R^2}$$

που ισχύει αφού απορρέει από την γνωστή ανισότητα $R\ge 2\rho$ (Euler).

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια, Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Χωματάς Θεόδωρος – Νίκαια και Νερούτσος Κωνσταντίνος - Γλυφάδα.

Σημείωση

Τα σχετικά με την παραπάνω ανισότητα του Euler και τις αντίστοιχες του Gerretsen έχουν αναφερθεί στο τεύχος 115.

Προτεινόμενα Θέματα

397. Θεωρούμε την έλλειψη

$$(c):\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta>0$$

και τις εφαπτόμενες Ax, By στα σημεία τομής της A, B με τον άξονα $x'x$. Η εφαπτομένη της άνω ημιέλλειψης σε τυχαίο σημείο της Μ τέμνει τις Ax, By στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το γινόμενο $A\Gamma\cdot B\Delta$ είναι σταθερό.

β. Αν Ρ είναι η προβολή του Μ στην ΑΒ, τότε η ΡΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{P}\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $PM\cdot\Gamma\Delta$ αν και μόνο αν η (c) είναι κύκλος και να το υπολογίσετε.

Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια

398. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γήινης επιφάνειας που φαίνεται από ύψος h πάνω από την επιφάνειά της. Θεωρήστε ότι η ακτίνα της γης είναι $R=6370\,km$.

Λευτέρης και Νίκος Τσιλιακός - Γαλάτσι

399. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί ώστε $\alpha+\beta+\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν οι αριθμοί είναι μη αρνητικοί, τότε

$$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha\le\frac{4}{27}$$

β. Αν οι αριθμοί είναι θετικοί, τότε

$$\frac{\alpha^2+\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha}{\alpha+\beta}\ge 2$$

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

400. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη του. Ο εγγεγραμμένος κύκλος στο ορθικό τρίγωνο ΔΕΖ εφάπτεται στις πλευρές ΖΕ, ΔΕ και ΔΖ στα σημεία Α΄, Β΄ και Γ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ισχύει $(\Delta EZ)^2=(AB\Gamma)(A'B'\Gamma')$

Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη

401. Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\le 48$. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha^3+1}}+\sqrt{\frac{1}{\beta^3+1}}+\sqrt{\frac{1}{\gamma^3+1}}\ge 1$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

Από παραδρομή στο προηγούμενο τεύχος δεν αναφέρθηκαν ως λύτες οι Δεληστάθης Γ. (ασκ. 377,381), Παπαδόπουλος Δ. (ασκ. 377, 380) και Καρτσακλής Δ. (ασκ. 378,380).

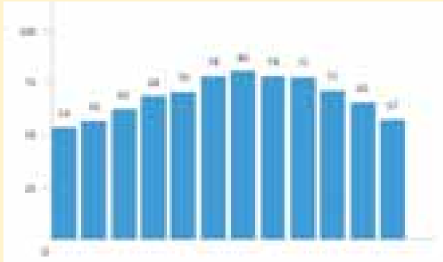
Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

> **Στον πίνακα των πρώτων δεν επικρατεί ούτε νόμος, ούτε τάξη** Eüler
> **Ένα κανονικό πολύγωνο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη, μόνο αν το πλήθος των πλευρών του είναι πρώτος αριθμός** Gauss

Ξέρετε ότι: Το Nobel **το** 2022 στην ιατρική, δόθηκε στον Σουηδό Svante Päbo (Σβάντε Πάαμπο), ερευνητή στο Ινστιτούτο Μαξ Πλανκ, διότι απάντησε σε κάτι που μέχρι σήμερα δεν γνωρίζαμε. Δηλαδή ποιες είναι οι γενετικές διαφορές ανάμεσα στον Homo Sapiens και τους πιο **κοντινούς συγγενείς μας**, που δεν υπάρχουν σήμερα. Ο Σβάντε Πάαμπο ανακάλυψε πως υπήρξε μια **μεταφορά γονιδίων ανάμεσα** σε αυτούς τους ανθρώπους που έχουν σήμερα εξαφανιστεί και τον Homo Sapiens. Αυτή η αρχαία ροή γονιδίων προς τον **σημερινό άνθρωπο** είχε έναν αντίκτυπο στη φυσιολογία, π.χ. επηρεάζοντας τον τρόπο με τον οποίο το **ανοσοποιητικό σύστημά** μας αντιδρά στις μολύνσεις.

Η Βροχή: Θα έχετε ακούσει ότι οι μετεωρολόγοι όταν βρέχει μετρούν το ύψος βροχής. Τι είναι το ύψος βροχής; Η μέτρηση της βροχόπτωσης γίνεται με ένα δοχείο που όταν βρέχει γεμίζει με νερό. Ας πούμε ότι έχουμε ένα δοχείο με βάση τετράγωνο 1μέτρο x1μέτρο και ύψος 2 μέτρα, ανοιχτό επάνω για να συλλέγει βροχή και μετράμε το ύψος του νερού που συλλέγει για ένα χρόνο. Σε διάστημα ενός χρόνου στην Ελλάδα έχουμε τη μικρότερη βροχόπτωση στο Σαρωνικό περίπου 150 χιλιοστά και τη μεγαλύτερη στη δυτική Ελλάδα και ιδιαίτερα στα ψηλά βουνά περίπου 1800 χιλιοστά. Αν μέσα στο δοχείο μας έχουμε 200 χιλιοστά, τότε έχουμε μέσα στο δοχείο 200 λίτρα νερό. Αν αυτό συγκεντρώθηκε σε ένα χρόνο δεν είναι πολύ, αν όμως έπεσε σε 2 λεπτά τότε έγινε καταιγίδα και πλημμύρες.



Σε ένα γήπεδο ή μια πλατεία με διαστάσεις 100 x 150 μέτρα σε μια ώρα έπεσε ύψος βροχής 100 χιλιοστά. Ποια είναι η συνολική ποσότητα του νερού που έπεσε στην πλατεία;

Ο κυνηγός: Ο σκύλος του κυνηγού βρήκε ένα λαγό και τον καταδιώκει. Ο λαγός είναι μπροστά του 45 μέτρα. Το άλμα του σκύλου είναι 3 μέτρα και του λαγού 2 μέτρα. Αλλά στα τρία άλματα του σκύλου, ο λαγός κάνει τέσσερα άλματα. Τελικά θα πιάσει το λαγό; Σε πόσα άλματα;

Ο Πέτρος: Ο Πέτρος πήρε μια αμοιβή από την δουλειά του. Έδωσε 100€ να πληρώσει ένα χρέος του, με τα μισά από τα υπόλοιπα πήρε ένα λαχείο και τα άλλα τα άφησε στον κουμπαρά του. Από το λαχείο κέρδισε τα 3πλάσια από αυτά που το αγόρασε. Με τα κέρδη τώρα πλήρωσε 100€ μια συνδρομή, έβαλε πάλι 100€ στον κουμπαρά και του περίσσεψαν άλλα 100€. Ποια ήταν η αμοιβή του; Πόσα χρήματα έχει στον κουμπαρά του;

Με ίδια ψηφία: Ο καθηγητής των Μαθηματικών σε ένα test ζήτησε από τους 10 μαθητές του, να γράψουν από επτά 3ψήφιους αριθμούς με ίδια ψηφία ο καθένας. Ύστερα να διαιρέσουν τον κάθε αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του και να προσθέσουν τα αποτελέσματα. Μήπως γνωρίζετε το τελικό άθροισμα που βρήκε ο κάθε μαθητής;

Εννεαψήφιοι: Ένας αριθμομνήμων, ζήτησε από το κοινό να γράψουν έξι κλάσματα με αριθμητή εννέα ίδια ψηφία και παρονομαστή το άθροισμα αυτών των ψηφίων. Το άθροισμα και των έξι κλασμάτων το έγραψε αμέσως σε ένα χαρτί. Πώς το γνώριζε; (Αν είχαν γράψει εννέα κλάσματα ποιο θα ήταν το άθροισμά τους;

1000 Πρώτοι: Μπορείτε να βρείτε 1000 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που να είναι όλοι τους σύνθετοι κι ουδείς πρώτος;

Τα 5 τετράγωνα: Μπορείτε να σχηματίσετε με 5 ίσα τετράγωνα ένα νέο;

Δεκατρείς αριθμοί: Δεκατρείς αριθμοί είναι γραμμένοι σε μία στήλη από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο. Ο μεσαίος αριθμός είναι ο μέσος όρος των 13 αυτών αριθμών. Ο μέσος όρος των εφτά μικρότερων είναι 100 και ο μέσος όρος των εφτά μεγαλύτερων αριθμών είναι 160. Μπορείτε να γράψετε ποιο είναι το άθροισμα όλων των αριθμών της στήλης.

Αθήνα-Ρόδος: Ένας τουριστικός πράκτορας ο Στέλιος, κάτοικος της Ρόδου πρέπει να ταξιδεύει δύο φορές την εβδομάδα στην Αθήνα. Από το καράβι έχει 12 δωρεάν εισιτήρια μόνο από Ρόδο σε Αθήνα. Από την Αθήνα έχει επιστρέψει με το καράβι 23 φορές στη Ρόδο. Όμως ταξίδεψε και με το αεροπλάνο 13 φορές. Αλλά κανένα ταξίδι πήγαινε-έλα δεν έγινε με το ίδιο μέσο. Πόσες φορές πήγε ο Στέλιος στην Αθήνα;

Οι μαθητές στο Μουσείο: Μια ομάδα μαθητών Β και Γ τάξης Λυκείου πήγαν στο Μουσείο. Εκεί ενημερώθηκαν για τα εκθέματα από τους δύο καθηγητές που τους συνόδευαν. Πριν αποχωρήσουν από το μουσείο κάθισαν στο κυλικείο για να ξεδιψάσουν με μια πορτοκαλάδα σε 13 τραπέζια του μουσείου $3^{ων}$ και $4^{ων}$ θέσεων. Οι μαθητές κάθε τάξης κάθισαν σε διαφορετικά τραπέζια και ένας μαθητής που δεν χωρούσε κάθισε με τους καθηγητές. Πόσοι ήταν οι μαθητές;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν του τεύχους 124

Το λάθος: Η επιταγή του Γιώργου έγραφε 52,25 και ο ταμίας του έδωσε 25,52 Ευρώ και αφού ξόδεψε 15,07 του έμειναν 10,45. που (10,45x5=52,25).

Το λαχείο: Αν τα χρήματα είναι ψ και τα παιδιά ν τα μερίδια είναι:

$$X=1000+(ψ-1000)/10,\ X=2000+(ψ-X-2000)/10,\ \ldots\ X=ν.1000+[ψ-(ν-1)X-ν.1000]/10.$$

Η διαφορά π.χ. στα δύο πρώτα μερίδια είναι:

X-X=2000-1000+(Ψ-X-2000)/10-(Ψ-1000)/10 ή 10.000=1000+X άρα τα μερίδια X=9000 και επομένως 9000=1000+(Ψ-1000)/10 ή Ψ=81.000€ Συνεπώς οι τυχεροί μαθητές είναι ν=9 και κέρδισαν 81.000€.

Οι κοπέλες ή τα αγόρια: Α=αγόρια, Κ=κοπέλες β=βανίλια, γ=γρανίτα τότε

$$(Αβ+Κγ)-(Αγ+Κβ)=1 \text{ ή } Α(β-γ)-Κ(β-γ)=1 \text{ ή } (β-γ)(Α-Κ)=1 \text{ άρα } β-γ=1 \text{ και } Α-Κ=1$$

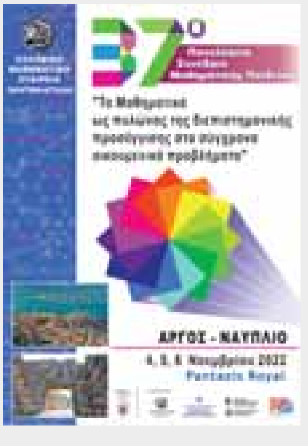
δηλαδή η βανίλια παγωτό έχει 1€ ακριβότερα από την γρανίτα και τα αγόρια ήταν ένα παραπάνω από τις κοπέλες.

Ο τυχερός: Είχε κερδίσει 160 Ευρώ.

Ο αριθμός: Από αριστερά προς τα δεξιά κάθε επόμενο 2ψήφιο τμήμα είναι το μισό.

Επικαιρότητα - εκδηλώσεις της Ε.Μ.Ε.

Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές πρόσφατες εκδηλώσεις από τις δραστηριότητες της Ε.Μ.Ε., με μέσο επικοινωνίας την ***αφίσα****.*
Έτσι έχουμε το $37^{ο}$ Πανελλήνιο Συνέδριο στο Άργος – Ναύπλιο, τη γιορτή Μαθηματικών στη Βέροια και τη βράβευση μαθητών στη Φλώρινα.

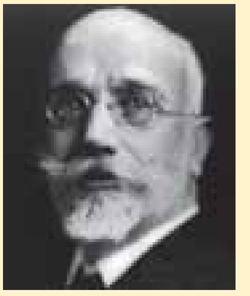


Ελευθέριος Βενιζέλος - Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

“ φως εξ ανατολών ”

Το όραμα και η ίδρυση του Πανεπιστημίου Σμύρνης

Τσόπελας Ιωάννης



Ελευθέριος Βενιζέλος

Μετά την επίσημη έλευση των Ελληνικών Αρχών στο Μικρασιατικό χώρο τον Μάιο του 1919 το Ελληνικό Κράτος αποφάσισε άμεσα να ιδρύσει ένα δεύτερο Πανεπιστήμιο στον χώρο αυτόν καταδεικνύοντας με τον τρόπο αυτό ότι η Ελλάδα δεν πήγε στη Μικρά Ασία για να καταδυναστεύσει ξένους λαούς, αλλά για φέρει σε αυτούς τον πολιτισμό της. Το Σεπτέμβριο του 1919 και ενώ ο πρωθυπουργός ***Ελευθέριος Βενιζέλος****(1864-1936)* βρισκόταν στο Παρίσι για την *Διάσκεψη της Ειρήνης* (μετά το πέρας του Α’ Παγκοσμίου Πολέμου) καλεί τον επιφανή Έλληνα μαθηματικό ***Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή*** *(1873-1950)* για να του εκθέσει τις απόψεις του αναφορικά με την ίδρυση ενός δεύτερου Ελληνικού Πανεπιστημιακού Ιδρύματος .

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

Χαρακτηριστική είναι η εξιστόρηση που δίνει ο καθηγητής Ιατρικής του Πανεπιστημίου Βερολίνου και Ακαδημαϊκός ***Γεώργιος Ιωακείμογλου****(1887-1979)*, ο οποίος είχε προσκληθεί από τον ίδιο τον Καραθεοδωρή για να τον βοηθήσει στην δημιουργία του Ιωνίου Πανεπιστημίου. Όπως ο ίδιος γράφει, μετέβη μαζί με τον Καραθεοδωρή στην οικία του Ελευθερίου Βενιζέλου, όπου ο μεγάλος αυτός πολιτικός άνδρας θα τους μιλούσε για τα σχέδιά του. *«...Ο Καραθεοδωρή είχε κανονίσει συνεργασίαν με τον Ελευθέριον Βενιζέλον, ο οποίος μας είχε καλέσει να μεταβώμεν εις τας επτά την πρωίαν εις την οικίαν του, γωνίαν Αμερικής και Πανεπιστημίου.*

Η οικία του Ελευθερίου Βενιζέλου ήτο επιπλωμένη πολύ πενιχρά και ομολογώ ότι εξεπλάγην πώς ένας τόσον μεγάλος πολιτικός ζη εις τοιούτον λιτόν περιβάλλον. Μετ' ολίγον ο ***Κλέαρχος Μαρκαντωνάκης*** *(γραμματέας του Βενιζέλου) μας εκάλεσε να περάσωμεν εις το γραφείον του Προέδρου. Ο Βενιζέλος μας ωμιλούσε με* ***μεγάλην ζωηρότητα****, εκινούσε τον δείκτην της δεξιάς χειρός και έλεγε: Θα πάτε εις την Σμύρνην, θα σας παράσχουν όλας τας ευκολίας, το έργον σας είναι σπουδαίον, η Ελλάς πρέπει να εκπολιτίσει όλην την Μικράν Ασίαν. Θα έλθει μαζί σας ο* ***Αλέξανδρος Ζαχαρίου****, διά να βοηθήσει και ετοιμασθούν το ταχύτερον τα κτίρια του Πανεπιστημίου...»*

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή: Ο σοφός Έλλην του Μονάχου

Από Αριστερά : Ν.Κριτικός – D.Hilbert-Κ.Καραθεοδωρή(1928)

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννήθηκε στο Βερολίνο το 1873 γιος του διπλωμάτη Στέφανου Καραθεοδωρή. Εισέρχεται το 1891 για σπουδές στη Στρατιωτική Σχολή του Βελγίου και στη συνέχεια εργάζεται το διάστημα 1898-1900 ως βοηθός μηχανικού στο φράγμα του Ασουάν στην Αίγυπτο. Εκεί ανακαλύπτει ότι τα Μαθηματικά **ασκούν** επάνω του μια πολύ μεγάλη **γοητεία** και ότι η δουλειά του πολιτικού μηχανικού δεν τον ικανοποιούσε.

Αποφασίζει να σπουδάσει Μαθηματικά και γράφεται το 1900 -σε ηλικία 27 ετών- στο περίφημο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου στο οποίο διδάχτηκε από τους μεγάλους μαθηματικούς *Herman* Schwartz, Ferdinand Frobenious, Ernst Zermelo ,Lazarus Fuchs .Το 1902 γράφτηκε στο Πανεπιστήμιο **Γκέντιγκεν** (θεωρείτο **η Μέκκα** *των Μαθηματικών*) και διδάχτηκε από τους γίγαντες των μαθηματικών Felix Klein , David Hilbert , Hermann Minkowski .Το 1908 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Ανόβερο και δυο χρόνια μετά καθηγητής στο Πολυτεχνείο του Μπρέσλαου του οποίου οργανώνει το μαθηματικό τμήμα και μετά όλες τις σχολές του. Αφοσιωμένος στη μαθηματική έρευνα ο Καραθεοδωρή , προτάθηκε το 1917 από τον Felix Klein (τον επονομαζόμενο Δία των Μαθηματικών) ως διάδοχός του στην Α΄ Έδρα των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Γκέντιγκεν).Το 1918 μετακαλείται στο Βερολίνο για να αναλάβει την έδρα των μαθηματικών που κατείχε ο Frobenious.Τον Ιούλιο του 1919 γίνεται μέλος της Πρωσσικής Ακαδημίας Επιστημών, όπου στην σχετική τελετή τον υποδέχεται ο μεγάλος φυσικός Max Planck.

Ο Καραθεοδωρή ανταποκρίνεται στο κάλεσμα του Βενιζέλου

Στις 20 **Οκτωβρίου του** 1919 ο Καραθεοδωρή υποβάλλει στον Πρωθυπουργό Ελευθέριο Βενιζέλο υπόμνημα (στα Γαλλικά) με τίτλο *«Σχέδιο περί ιδρύσεως νέου Πανεπιστημίου εν Ελλάδι υποβληθέν εις την Ελληνικήν Κυβέρνησην υπό Κ.Καραθεοδωρή»* . Στο υπόμνημά του ο Καραθεοδωρή φαίνεται να προτείνει ένα Πανεπιστήμιο προοδευτικό και ριζοσπαστικό που δεν θα μιμούνταν κατά γράμμα τα αντίστοιχα Γερμανικά και Αγγλικά Ανώτατα Ιδρύματα , ενώ πρέπει να τονιστεί ότι δεν κατονόμαζε στο υπόμνημα τον τόπο και την έδρα του ιδρύματος αλλά πρότεινε τη Σμύρνη ή τη Θεσσαλονίκη ή την Χίο .Την 1η Ιουλίου 1920 δημοσιεύεται στο φύλλο της εφημερίδας της Κυβερνήσεως ο νόμος 2251 *«Περί ιδρύσεως και λειτουργίας Ελληνικού Πανεπιστημίου εν Σμύρνη»*. Ο Ελευθέριος Βενιζέλος καλεί τον Κ. Καραθεοδωρή να κατέβει στην Ελλάδα και να αναλάβει την οργάνωση του νέου Ιδρύματος .Ο Κ. Καραθεοδωρή αποδέχτηκε άμεσα την πρόσκληση **εγκαταλείποντας την περιζήτητη θέση** του καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του **Βερολίνου**. *Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία με δημοσίευμα στην εφημερίδα Ακρόπολις στις 5 Σεπτεμβρίου 1920 μέσω του αντιπροέδρου της **Γεωργίου Ρεμούνδου** χαιρετίζει την άφιξη του Καραθεοδωρή λέγοντας χαρακτηριστικά: «…μια τεράστια δύναμις προστίθεται εις την φάλαγγα των εν Ελλάδι μαθηματικών…»* .Τον Αύγουστο του 1920 στο πρώτο και μοναδικό ταξίδι του Ελευθέριου Βενιζέλου στη Σμύρνη ,συναντήθηκαν πάνω σε πολεμικό πλοίο στη προκυμαία της Σμύρνης ο Έλληνας Πρωθυπουργός Ελευθέριος Βενιζέλος ,ο ʻΥπατος Αρμοστής **Αριστείδης Στεργιάδης** και ο Κ.Καραθεοδωρή. Εκεί αποφασίζουν οριστικά και αμετάκλητα ως έδρα του Πανεπιστημίου την Σμύρνη και οργανωτικό νου τον διεθνούς φήμης Έλληνα Μαθηματικό Κ.Καραθεοδωρή. Ο Κ.Καραθεοδωρή στο δύσκολο έργο του είχε συμπαραστάτες διαπρεπείς επιστήμονες όπως **ο Γεώργιος Ιωακείμογλου** (καθηγητής Πανεπιστημίου Βερολίνου και Ακαδημαϊκός), **ο Ιωάννης Καλλιτσουνάκης** (καθηγητής Ανατολικών Γλωσσών στο Πανεπιστήμιο Βερολίνου και Ακαδημαϊκός) κ.α .Από το Μουσείο Φίλων Κ.Καραθεοδωρή παρατίθεται η παρακάτω επιστολή του Γ.Ιωακείμογλου προς τον **Μητροπολίτη Σμύρνης Χρυσόστομο** σχετικά με το εγχείρημα της ίδρυσης του Ιωνικού Πανεπιστημίου στην Σμύρνη : *« 23 Απριλίου 1920 / Σεβασμιώτατε,*

*Μετά τας Υμετέρας τόσον ευμενείς ευχάς επί ταις εορταίς του Πάσχα σπεύδω να ευχαριστήσω Υμάς από καρδιάς. Ιδιαιτέραν σημασίαν έχει η εορτή του Πάσχα, δι' ημάς τους εν τη ξένη διαμένοντας προ πάντων τώρα, όπου το ημετέρον έθνος έπειτα από τόσας σκοτεινάς ημέρας, ετοιμάζεται να εορτάση την πραγματικήν αυτού ανάστασιν. Τώρα δύναται και ο Έλλην εν τη ξένη να είπη «**Είμαι Έλλην από την Ιωνία**». Πρόκειται το ελληνικόν έθνος να αναλάβη και πάλιν εν Ανατολή. Θα σας είναι γνωστόν, ότι η Ελληνική κυβέρνησις μελετά την ίδρυσιν Πανεπιστημίου εν Σμύρνη και δεν αμφιβάλλω ότι οι Σμυρναίοι μετά χαράς θα χαιρετίσουν το σχέδιον τούτο. Εν τιούτον, ανωτάτων γραμμάτων και της επιστήμης κέντρον, μεγάλως θα συμβάλη εις την πνευματικήν και υλικήν ανάπτυξιν του τόπου. Ο αρχηγός του έθνους ανέθεσε εις τον ενταύθα τέως καθηγητήν των Μαθηματικών κ. Κωνσταντίνον Καραθεοδωρή να αναλάβη την διοργάνωσιν του εν Σμύρνη Πανεπιστημίω. Ο κ. Καραθεοδωρή ως καλός πατριώτης εγκατέλειψε την λαμπράν του θέσιν εν τω Πανεπιστήμιω και την Πρωσικήν Ακαδημίαν των επιστημών και ετοιμάζεται να έλθη εις Αθήνας και Σμύρνην δια να αναλάβη το δυσχερές έργον. Είχε ήδη επανειλημμένας συνεντεύξεις με τον κ. Βενιζέλον εν Παρισίοις και Λωζάνη. Ο κ. Πρόεδρος φαίνεται ότι εν τη οξυδέρκεια αυτού συνέλαβεν την **μεγάλην σημασίαν** την οποίαν θα είχε το Ελληνικόν Πανεπιστήμιον εν Σμύρνη και θα υποστηρίξη το έργον. Δεν αμφιβάλλω ότι εν τοιαύτη περιπτώση θα επιτύχη. Τον κ. Καραθεοδωρή θα γνωρίσητε όταν έλθη εις Σμύρνη και θα εκτιμήσετε εν τω προσώπω του ένα λαμπρόν χαρακτήραν και μέγαν επιστήμονα. Είμαι βεβαίος ότι η Υμετέραν Σεβασμιότης θα του παράξη πάσαν δυνατήν υποστήριξιν.»*

Μετά σεβασμού, Γ.Ιωακείμογλου

Ο Καραθεοδωρή οργανώνει το Πανεπιστήμιο Σμύρνης

Στις 27 Οκτωβρίου 1920 ο ύπατος αρμοστής της Ελλάδας Αριστείδης Στεργιάδης με σχετικό διάταγμα (34123/119/12711/12720) ορίζει τον Κ.Καραθεοδωρή Διευθυντή του Πανεπιστημίου Σμύρνης. Ο Κ. Καραθεοδωρή εργάστηκε πυρετωδώς για την εξεύρεση των κτιριακών εγκαταστάσεων, τον εξοπλισμό του πανεπιστημίου, και για το διορισμό του επιστημονικού και διοικητικού προσωπικού.

Οι σχολές του Ιδρύματος - Πρόγραμμα και τίτλοι σπουδών

α) ***Γεωπονική και φυσικών επιστημών*** : αποσκοπούσε στην εκπαίδευση πολιτικών μηχανικών, μηχανολόγων, αρχιτεκτόνων, ηλεκτρολόγων, χημικών, γεωλόγων, ειδικών στην βοτανολογία και ζωολογία. Επίσης θα μπορούσε να εκπαιδεύει κτηματίες και πρακτικούς γεωργούς

β) ***Ανατολικών γλωσσών και ανατολικού πολιτισμού*** : αποσκοπούσε στην εκπαίδευση δασκάλων για να διδάξουν σε ανώτερα εκπαιδευτήρια. Εκεί θα διδάσκονταν την αραβική, περσική, αρχαία και νεώτερη Εβραϊκή.

γ) ***Δημοσίων υπαλλήλων***: εκεί διδάσκονταν διοικητικό δίκαιο, κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες

δ) ***Εμπορική*** ε) ***Χωροσταθμών και εργοδηγών*** : σε αυτήν εκπαιδεύονταν επιστάτες τεχνικών έργων.

στ) ***Ανώτερο μουσουλμανικό ιεροδιδασκαλείο*** : σε αυτό θα εκπαιδεύονταν οι μελλοντικοί μουφτήδες και ιεροδικαστές.

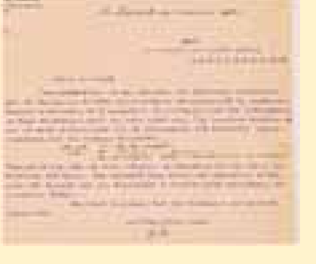
ζ) ***Ινστιτούτο υγιεινής***: αυτό θα εκπαίδευε τους γιατρούς που θα επιθυμούσαν να αναλάβουν δημόσια υγιεινολογική υπηρεσία. Θα πραγματοποιούσε σεμινάρια για τους ντόπιους γιατρούς.Το ίδιο ινστιτούτο θα πραγματοποιούσε δωρέαν βακτηριολογικές, βιοχημικές εξετάσεις, την παρασκευή εμβολίων, ορών, αντιγόνων, αντιτοξίνων και θα προσπαθούσε να συμβάλει στην καταπολέμηση των λοιμοδών ασθενειών που μάστιζαν την περιοχή (ελονοσία, αφροδίσια νοσήματα, φυματίωση)

Τα έτη σπουδών κάθε κύκλου θα ποίκιλλαν ανάλογα με τον απονεμόμενο τίτλο σπουδών, ενώ προβλέπονταν και σειρές μαθημάτων διάρκειας λίγων εβδομάδων γύρω από πρακτικά θέματα Μηχανολογίας και Γεωπονικής. Ειδικές **εισαγωγικές εξετάσεις** για κάθε κύκλο σπουδών θα εγγυούνταν το επίπεδο των φοιτητών, ενώ για την εξέταση της προόδου στην πορεία των σπουδών προτεινόταν η υιοθέτηση ενός συστήματος μεταξύ του βρετανικού, που πολλαπλασίαζε τις γραπτές και προφορικές εξετάσεις, και του γερμανικού, που τις καταργούσε σχεδόν εντελώς. Η διδακτέα ύλη προβλεπόταν υποχρεωτική σε συγκεκριμένα για κάθε κλάδο μαθήματα, με δυνατότητα επιλογής ενός ή δύο ακόμη θεμάτων.

Η γλώσσα των μαθημάτων θα ήταν η Ελληνική και η τουρκική, χωρίς να αποκλείονται και άλλες. Το διδακτικό προσωπικό θα το αποτελούσαν τακτικοί και έκτακτοι καθηγητές, επιμελητές και βοηθοί. Ο βαθμός και ο μισθός τους θα ήταν αντίστοιχος με εκείνον του Καποδιστριακού Πανεπιστημίου.. Επίσης θα μπορούσαν να κατέχουν κι άλλη δημόσια θέση. Η διοίκηση του ιδρύματος ήταν ο πρύτανης, η σύγκλητος, οι κοσμήτορες των σχολών και οι διευθυντές των παραρτημάτων. Οι τίτλοι που παρέχει το ίδρυμα ανάλογα με τη διάρκεια φοίτησης ήταν ενδεικτικά , πτυχία και διδακτορικά.

Μετά από εισήγηση του Κ. Καραθεοδωρή για την στελέχωση του Πανεπιστημίου Σμύρνης προσλαμβάνονται οι: J. Ausserer (οργανωτής της βιβλιοθήκης του ιδρύματος). Ο Ausserer ο οποίος ήταν υπάλληλος της Εθνικής Βιβλιοθήκης του Βερολίνου για 12 έτη, πέτυχε την **αγορά σπουδαίων συγγραμμάτων** τα οποία στάλθηκαν στη Σμύρνη σε 36 μεγάλα κιβώτια), **Γεώργιος Ιωακείμογλου** για την έδρα της Μικροβιολογίας (με την καθοδήγησή του αγοράστηκαν όργανα και εξειδικευμένο υλικό μικροβιολογικού εργαστηρίου που έφθασαν στη Σμύρνη σε 82 κιβώτια), **Φρίξος Θεοδωρίδης** (διπλωματούχος Πανεπιστημίου Ζυρίχης για την έδρα της Φυσικής), **Κυρόπουλος Παναγιώτης** (για την έδρα της Χημείας), **Κεσίσογλου Θεολόγος** (για την αγρονομική επιστήμη), **Ε. Πάσκεβιτς** (Μηχανουργός Πανεπιστημίου Σμύρνης), **Κ. Γιωτούλος** (Αρχιτεκτονικό γραφείο Πανεπιστημίου), **Φιλλιπίδης Ιωάννης** (Γενικός Γραμματέας του Πανεπιστημίου Σμύρνης, Διδάκτωρ Νομικής και πρώην γενικός γραμματέας της Ριζαρείου Εκκλησιαστικής Σχολής), **Κριτικός Νικόλαος** (Γενικός Γραμματέας του Πανεπιστημίου Σμύρνης, μετέπειτα καθηγητής Μαθηματικών στο Ε.Μ.Π)

Ο Κ. Καραθεοδωρή στην είσοδο του Πανεπιστημίου Σμύρνης



Επιστολή του Καραθεοδωρή (10 Απριλίου 1921) στο Γενικό Διοικητή Ανατολικής Θράκης Χαρίσιο Η. Βαμβακά ζητώντας του να αναζητήσει το σύγγραμμα του Dr. Rifaat Osmann Guide d' Andrinople (1361-1919) που είχε εκδοθεί το 1920 στο Βιλαέτι Ανδριανουπόλεως ώστε να το συμπεριλάβει στον κατάλογο συγγραμμάτων της Βιβλιοθήκης του Πανεπιστημίου Σμύρνης .

Το κτίριο του Πανεπιστημίου Σμύρνης

Ως κτίριο για το νεοϊδρυθέν Πανεπιστήμιο Σμύρνης επιλέχθηκε ένα μεγάλο και ευρύχωρο ημιτελές κτίριο στο λόφο ***Μαχρή Μπαμπά*** . Προοριζόταν να στεγάσει δημόσια βιβλιοθήκη και ανώτερη τουρκική σχολή. Μετά την αποπεράτωση του κτιρίου από την ύπατη αρμοστεία παραδόθηκε διαθέτοντας 70 ευρύχωρες αίθουσες και ένα αμφιθέατρο 320 θέσεων. Την εποπτεία των έργων είχε ο πολιτικός μηχανικός **Δραγώνας Ευστάθιος** και οι εργασίες ολοκληρώθηκαν τον Οκτώβριο του 1921.

Το έμβλημα του Πανεπιστημίου Σμύρνης

Η βαθύτερη σκέψη του Κ.Καραθεοδωρή ήταν η διασύνδεση του πολιτισμού με τη τοπική κοινωνία. Η ισότιμη συνύπαρξη Ανατολής και Δύσης και το «**φως εξ ανατολών**» ήταν η επαφή της Ανατολής με το Δυτικό πολιτισμό και το αντίθετο. Η σφραγίδα του Πανεπιστημίου Σμύρνης έχει αποτύπωμα σε ισπανικό βουλοκέρι και στο κέντρο της σφραγίδας απεικονίζεται η κεφαλή του Απόλλωνα, εμπνευσμένη από τετράδραχμο των αρχαίων Κλαζομενών.

Αύγουστος του 1922 – Η καταστροφή

Βρισκόμαστε στον Ιούλιο του 1922.Τίποτα δεν προμηνύει τον μεγάλο χαλασμό .Ο Καραθεοδωρή είναι βέβαιος ότι τον ερχόμενο Οκτώβριο το Πανεπιστήμιο θα λειτουργήσει . Ωστόσο στα μέσα του Αυγούστου 1922 σημειώθηκε η κατάρρευση του Μικρασιατικού μετώπου και επήλθε η καταστροφή. Τα τραγικά γεγονότα για τον Ελληνισμό και ιδιαίτερα για τον Μικρασιατικό Ελληνισμό διαδέχονταν το ένα μετά το άλλο. Στις 23 **Αυγούστου** 1922 ο Καραθεοδωρή συγκεντρώνει όλο το προσωπικό του Πανεπιστημίου Σμύρνης και με τρεμάμενη φωνή είπε: *«…Φίλοι μου , οι Τούρκοι ένοπλοι έφτασαν προ το πυλών. Δυστυχώς το όραμα της Μεγάλης Ελλάδος για μια ακόμη φορά δύει. Πρέπει όλοι να εγκαταλείψετε το συντομότερο τη Σμύρνη…».* Ο Καραθεοδωρή ήταν ο τελευταίος που κλείδωσε τη κεντρική πόρτα του Πανεπιστημίου της Σμύρνης μαζί με το ταμία του ιδρύματος .Οι λυγμοί του συνόδευαν το γύρισμα του μεγάλου κλειδιού στη πόρτα .Το κλειδί αυτό το παρέδωσε συμβολικά αργότερα στο *Νικόλαο Πλαστήρα* .Ο δημοσιογράφος **Θεοδόσιος Δανιηλίδης** στο προσωπικό του ημερολόγιο γράφει: «…Ήμουν έτοιμος να αποπλεύσω με μια κατάμεστη βάρκα όταν είδα στη προκυμαία το Καθηγητή . Σχεδόν **σηκωτό** τον πήγα στη βάρκα .Μέχρι να φτάσουμε στο πλοίο «Νάξος» είχε στραμμένη τη κεφαλή του προς τη Σμύρνη που καιγόταν , αμίλητος και δακρυσμένος…» . Ο **Χρήστος Αγγελομάτης** δημοσιογράφος και συγγραφέας σε μια σειρά άρθρων στην εφημερίδα «Εστία» με τίτλο «Μικρόν Χρονικόν Μεγάλης Τραγωδίας» (βραβείο Ακαδημίας Αθηνών) αφηγείται: «…Εκινδύνευσε και ο οργανωτής του Πανεπιστημίου Σμύρνης Καραθεοδωρή να πέση εις τα χέρια των Τούρκων. Έμεινε ο λαμπρός αυτός Έλλην μέχρι της τελευταίας στιγμής εις το Πανεπιστήμιον δια να **σώσει** το εργαστηριακόν υλικόν που είχε ολίγον προ της καταστροφής μεταφερθή από την Γερμανίαν…»

Η **Δέσποινα Ροδοπούλου – Καραθεοδωρή** κόρη του διάσημου μαθηματικού θυμάται: «…Έζησα μικρή στο Γκέτιγκεν . Κάποια μέρα η μητέρα είπε σ΄εμένα και τον αδελφό μου Στέφανο ότι θα πάμε ένα μακρινό ταξίδι σε μια ωραία πόλη που την έλεγαν Σμύρνη. Εγκατασταθήκαμε σε ένα ωραίο σπίτι στη συνοικία Μπουτζά. Για να τελειοποιήσω τα ελληνικά μου ο πατέρας με έγραψε σε ένα ελληνικό Δημοτικό σχολείο της Σμύρνης… Θυμάμαι τις βόλτες που κάναμε η μητέρα μου, ο αδελφός μου κι εγώ στην ωραία προκυμαία της Σμύρνης .Εντύπωση μου έκανε ο σεβασμός που έδειχνε ο κόσμος στην μητέρα και τον πατέρα μου .Μια μέρα είπε ο πατέρας μου θορυβημένος ότι θα πηγαίναμε στη Σάμο για … εκδρομή και ότι θα μέναμε σε ένα σπίτι που είχε νοικιάσει. Μετά τρεις μέρες έπεσε η Σμύρνη στα χέρια των Τούρκων. Ο πατέρας μου έφυγε από τους τελευταίους…».
Ο τότε πρόξενος της Αμερικής στη Σμύρνη **Τζορτζ Χόρτον** έγραψε «… όταν αναχώρησε ο Καραθεοδωρή από τη Σμύρνη ήταν σαν να **έφευγε** από τη Μικρά Ασία η **ενσάρκωση της Ελληνικής ευφυΐας**, της τέχνης και του πολιτισμού…» Το πολύτιμο υλικό που κατάφερε ο Καραθεοδωρή με χίλιες δυσκολίες να περισώσει από την Σμύρνη παρέδωσε αργότερα στον καθηγητή **Δημήτριο Χόνδρο** στην Αθήνα. Το συγκεκριμένο αρχείο, τα βιβλία και τα όργανα διαφυλάχθηκαν με την φροντίδα των καθηγητών **Μιχαήλ Αναστασιάδη**, **Θεόδωρου Κουγιουμζέλη**, **Σαλτερή Περιστεράκη και Καίσαρα Αλεξόπουλου**. Τώρα είναι αποθησαυρισμένα στο Μουσείο Φυσικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Πανεπιστημίου Αθηνών (Κτίριο Παλαιού Χημείου – Σόλωνος 104) .

Βιβλιογραφία - Πηγές

1. Βαγγέλης Σπανδάγος, Η ζωή και το έργο του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή, εκδ. Αίθρα, Αθήνα 2000.
2. Δέσποινα Καραθεοδωρή-Ροδοπούλου και Δέσποινα Βλαχοστεργίου-Βασβατέκη, Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, εκδ. Κάκτος, Αθήνα 2001
3. (Συλλογικό), «Κ. Καραθεοδωρή: Ο έλληνας Αϊνστάιν», Ε Ιστορικά (Ελευθεροτυπία), τ.211
4. Αθανάσιος Λιπορδέζης , Το άστρο των Καραθεοδωρή ,εκδ.Αρχύτας ,2018
5. Σύνδεσμος Φίλων Καραθεοδωρή
6. Φίλη Χριστίνα «Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή : Μια παγκόσμια διαδρομή» Περιοδικό Μαθηματική Επιθεώρηση (εκδόσεις Ε.Μ.Ε τ.55)
7. Κωνσταντίνος Α. Κωνσταντόπουλος *Το Πανεπιστήμιο Σμύρνης (1920-1922) και η συμβολή του Ελληνικού Στρατού κατοχής στη συγκρότησή του*

αφορμές … και στιγμιότυπα

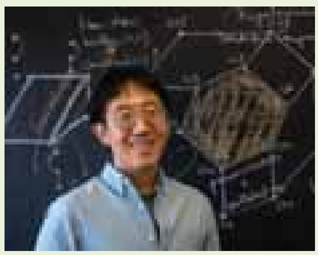
Μετάλλια Fields 2022

Η μπροστινή όψη του μεταλλίου Fields (χρυσός 14 καρατίων), με μια προσωπογραφία του Αρχιμήδη (θεωρείται το βραβείο Nobel των Μαθηματικών), του οποίου το όνομα επιγράφεται στα Ελληνικά στη δεξιά πλευρά, ενώ η επιγραφή στα Λατινικά, σε ελεύθερη απόδοση, μετάφρασης σημαίνει: «Ξεπέρασε τον εαυτό σου και γνώρισε τον κόσμο»

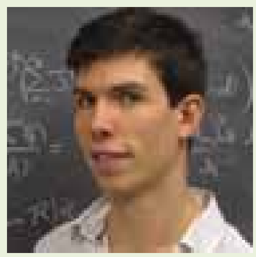
Τέσσερις κορυφαίοι επιστήμονες, μεταξύ των οποίων και η Ουκρανή μαθηματικός, από την Ομοσπονδιακή Πολυτεχνική Σχολή της Λωζάνης, **Maryna Viazovska** είναι οι νικητές του κορυφαίου μαθηματικού βραβείου *Fields Medal*. Η Viazovska είναι η δεύτερη γυναίκα στην 86χρονη ιστορία του θεσμού, μετά την Ιρανή **Maryam Mirzakhani** (βραβεύτηκε το 2014 και πέθανε το 2017), που τιμάται με την ύψιστη μαθηματική διάκριση. Με το βραβείο, η ανακοίνωση των νικητών, έγινε φέτος, σε τελετή της Διεθνούς Μαθηματικής Ένωσης στο Ελσίνκι της Φινλανδίας, στις 6 Ιουλίου 2022, αντί της Αγίας Πετρούπολης της Ρωσίας, τιμώνται επίσης ο Γάλλος μαθηματικός, από το Πανεπιστήμιο της Γενεύης, **Hugo Duminil–Copin**, ο Αμερικανοκορεάτης μαθηματικός, από το Πανεπιστήμιο του Princeton, **June Huh,** και ο Βρετανός μαθηματικός, από το Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης, **James Maynard**.
Το *Fields Medal* είναι ένα κορυφαίο βραβείο που απονέμει η Διεθνής Μαθηματική Ένωση, σε δύο έως τέσσερις μαθηματικούς που έχουν διαπρέψει στον τομέα τους και **δεν** έχουν υπερβεί το 40ό έτος της ηλικίας τους. Το βραβείο απονέμεται, από το 1950, κάθε τέσσερα χρόνια κατά τη διάρκεια του Παγκόσμιου Συνεδρίου Μαθηματικών.

Maryna Viazovska

Hugo Duminil–Copin



June Huh



James Maynard

Η Ουκρανή μαθηματικός **Maryna Viazovska** από το Κίεβο, που εργάζεται πάνω στη **Γωμετρία** των σφαιρών διακρίθηκε για την «απόδειξη που δείχνει ότι το **πλέγμα E8** (σε χώρους οκτώ διαστάσεων) εξασφαλίζει την **πυκνότερη διάταξη** πανομοιότυπων σφαιρών σε 8 διαστάσεις». Πρόκειται για ένα παλαιό μαθηματικό πρόβλημα που σχετίζεται με την αναζήτηση του αρτιότερου τρόπου στοίβαξης πανομοιότυπων σφαιρών σε μια δεδομένη διάσταση. Προηγουμένως το πρόβλημα είχε αποδειχτεί πως λύνεται μόνο για τρεις ή λιγότερες διαστάσεις (**εικασία Kepler**) που περιελάμβανε μακροσκελείς υπολογισμούς από ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στις συνεντεύξεις που παραχωρεί, με την ευκαιρία της βράβευσής της, η Ουκρανή μαθηματικός σχολιάζει ακόμη τη μεγάλη **δοκιμασία** που βιώνει η χώρα της. Ίσως είναι αλήθεια ότι ο Homo Sapiens κατέστρεψε όλους τους άλλους τύπους ανθρώπων, που υπήρχαν στο παρελθόν. Και ίσως ο πόλεμος να είναι πράγματι κάτι εγγενές στο ανθρώπινο είδος. Ίσως οι ανθρωπολόγοι να μπορούν δικαιολογήσουν αυτήν την άποψη με επιστημονικούς όρους. Αλλά από ανθρώπινη άποψη, το να σκοτώνεις και να καταστρέφεις ένα ολόκληρο έθνος δεν είναι κάτι φυσιολογικό.

Ο Γάλλος **Hugo Duminil-Copin** δραστηριοποιείται στον μαθηματικό κλάδο της στατιστικής φυσικής. Τιμήθηκε για την επίλυση πολλών "ανοικτών προβλημάτων στην **πιθανολογική θεωρία** των μεταβάσεων φάσης", η οποία άνοιξε αρκετές νέες ερευνητικές κατευθύνσεις.

«Η ενασχόληση με τα μαθηματικά έχει στιγμές, που η έρευνα **δεν προχωρά αλλά** και στιγμές που **τρέχει**», λέει ο Γάλλος μαθηματικός. Και συμπληρώνει: «Ο καθένας έχει τον **δικό του** τρόπο να κινείται μεταξύ ηρεμίας και καταιγίδας. Η δική μου προσέγγιση είναι, να είμαι πλήρως διαθέσιμος, για την έρευνα όταν ξεσπά καταιγίδα. Για να το πετύχω αυτό, χρησιμοποιώ τις ήρεμες περιόδους στις οποίες κάνω τις περισσότερες από τις εργασίες ρουτίνας που συνοδεύουν τη ζωή ενός μαθηματικού: εκδοτικές εργασίες, συμμετοχή σε επιτροπές, συγγραφή εργασιών, προετοιμασία μαθημάτων κ.λπ. Σε αυτόν τον ελεύθερο χρόνο, προσπαθώ επίσης να διευρύνω το πεδίο της έρευνάς μου, εξοικειώνοντας τον εαυτό μου με νέα προβλήματα και τεχνικές». Ο Αμερικανοκορεάτης μαθηματικός June Huh διακρίθηκε για τον τρόπο που αξιοποίησε «τις δυνατότητες της *θεωρίας Hodge*, της *τροπικής γεωμετρίας* και της ***θεωρίας των ιδιομορφιών*** για να μεταμορφώσει το πεδίο της *γεωμετρικής συνδυαστικής*». «Δεν αισθάνομαι ότι επιλέγω τα μαθηματικά προβλήματα που θα ασχοληθώ», λέει ο June Huh. Και εξηγεί: «Για μένα, η εύρεση προβλημάτων και η επίλυση προβλημάτων είναι **τυχαίες διαδικασίες**, και δεν υπάρχουν πολλά που μπορώ ή πρέπει να κάνω, αν και το να διαβάζω ωραία βιβλία ή να συναναστρέφομαι ενδιαφέροντες ανθρώπους, φαίνεται καλή ιδέα. Εκτός από αυτό, το μόνο πράγμα που προσπαθώ να κάνω είναι να βρίσκομαι σε ετοιμότητα, **να είμαι διαθέσιμος**, καθώς τα μαθηματικά προβλήματα χρειάζονται μεγάλους ανοιχτούς χώρους για να ξεδιπλωθούν». Ο Βρετανός μαθηματικός James Maynard έλαβε το *Fields Medal* «για τις εργασίες του στην ***αναλυτική θεωρία*** *αριθμών*, οι οποίες οδήγησαν σε σημαντική πρόοδο στην κατανόηση της δομής των *πρώτων αριθμών* και της *διοφαντικής προσέγγισης*».

Ο ίδιος λυπάται, όπως λέει στη συνέντευξη που παραχώρησε με την ευκαιρία της βράβευσής του, «επειδή τα **Μαθηματικά**, ένα τόσο όμορφο πεδίο με θαυμάσιες ιδέες, είναι πολύ δύσκολο να γίνει κατανοητό από κάποιον χωρίς ειδική εκπαίδευση. Θα ήθελα να υπήρχε ένας τρόπος να μοιραστούμε λίγη από αυτήν την ομορφιά με το ευρύ κοινό και να **δείξουμε** ότι τα **Μαθηματικά** αφορούν **ιδέες** και **όχι υπολογισμούς**. Αυτό είναι σίγουρα κάτι που θέλω να μεταδώσω στις διαλέξεις μου. Θαυμάζω τους ειδικευμένους εκλαϊκευτές των Μαθηματικών που προσπαθούν πολύ σκληρά να γεφυρώσουν αυτό το χάσμα που υπάρχει ανάμεσα στα Μαθηματικά και στο ευρύ κοινό».

Πηγές: thegaurdian.com, mathUnion.org, physicsgg.me, Hellasjournal, makthes.gr

Διακρίσεις στον 29ο Μαθηματικό Φοιτητικό Διαγωνισμό IMC 2022 (International Mathematics Competition)

Σημαντικές διακρίσεις φοιτητών του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ και του Πανεπιστημίου Πατρών στον διεθνή διαγωνισμό Μαθηματικών IMC 2022. Ο Φοιτητικός Διαγωνισμός IMC (International Mathematics Competition), πραγματοποιήθηκε διαδικτυακά και δια ζώσης στις 3 και 4 Αυγούστου 2022. Σε αυτόν συμμετείχαν 664 φοιτητές, σε 100 ομάδες, από 49 χώρες. Οι επιδόσεις των φοιτητών του ΕΚΠΑ ήταν οι εξής:

- Δημήτρης Χρυσοβαλάντης Μελάς: **μέγιστο πρώτο βραβείο**.
- Μηνάς Μαργαρίτης: **χρυσό μετάλλιο**.

Οι επιδόσεις των φοιτητών του Πανεπιστημίου Πατρών ήταν οι εξής:

- Μιχάλης Λώλης: **αργυρό μετάλλιο**
- Αλέξανδρος Ντάγκας: **χάλκινο μετάλλιο**
- Γιώργος Σουκαράς: **χάλκινο μετάλλιο**

Το μέγιστο πρώτο βραβείο, είναι το βραβείο, που δίνεται στους φοιτητές οι οποίοι είχαν μια σχεδόν τέλεια επίδοση στα θέματα του διαγωνισμού, για παράδειγμα, φέτος το βραβείο αυτό δόθηκε στους 5 διαγωνιζόμενους που είχαν βαθμολογία πάνω από 78 ως 80. Το χρυσό μετάλλιο δίνεται στους φοιτητές που ξεπερνούν ένα υψηλό βαθμολογικό κατώφλι.

Ο IMC είναι ο μεγαλύτερος **παγκόσμιος μαθηματικός** διαγωνισμός για φοιτητές, οργανώνεται από το 1994 από το University College London και συμμετέχουν σε αυτόν κορυφαία Πανεπιστήμια των ΗΠΑ, της Ευρώπης και της Ασίας. Η χώρα μας συνεχίζει τις διακρίσεις και στους διεθνείς φοιτητικούς διαγωνισμούς, από μαθητές που είχαν διακριθεί και στους μαθητικούς διαγωνισμούς της ΕΜΕ και στις Διεθνείς Ολυμπιάδες jBMO, BMO, IMO κατά το παρελθόν.

2ο Φεστιβάλ Γρίφων Καστελλόριζου 2022

Ξεπέρασε κάθε προσδοκία, η επιτυχία του $2^{ου}$ **Φεστιβάλ Γρίφων Καστελλόριζου**, που διοργανώθηκε για δεύτερη χρονιά, από τις 22 **μέχρι τις** 25 **Σεπτεμβρίου** 2022. Το μοναδικό Φεστιβάλ Γρίφων Καστελλόριζου με Παιγνίδια Επιστήμης, κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών του νησιού, όπως και των άλλων μαθητών από τη Ρόδο και των γύρω νησιών, αλλά και των εκπαιδευτικών και επισκεπτών του νησιού. Τις μέρες αυτές, το Φεστιβάλ του Καστελλόριζου, έζησε ένα πραγματικό πανηγύρι επιστήμης.

Με γρίφους, βιωματικά εργαστήρια, επιστημονικές δράσεις, μαθηματικά τρυκ, Stand up Science για παιδιά και όχι μόνο, εκθέσεις απτικών γρίφων, κινηματογραφικά και μουσικά εργαστήρια, αγώνες

γρίφων και εκπαιδευτικά προγράμματα που συνδύασαν την Τέχνη και την Επιστήμη. Έγιναν επίσης, ξεναγήσεις στο Μουσείο Γρίφων, πεζοπορία, αστροπαρατήρηση, ηλιοπαρατήρηση, "φαντάσματα που... βγήκαν στους δρόμους", παραμύθια, χορευτικά, και μια εξαιρετική συναυλία με την Σουζάνα και την Ελένη Βουγιουκλή. Μοναδικοί συνοδοιπόροι της οργανωτικής επιτροπής ήταν **οι** 70 και πλέον **ακαδημαϊκοί**, ερευνητές, **επιστήμονες**, εκπαιδευτικοί και καλλιτέχνες που δούλεψαν και παρουσίασαν δράσεις ειδικά προσαρμοσμένες στο πνεύμα των Γρίφων και της **κατανόησης** της γνώσης μέσα από παιγνίδια. Η οργάνωση πραγματοποιήθηκε από την ΕΝ.Ι.Γ.ΜΑ (Ένωση Ιδεών, Γρίφων, Μαθηματικών), όπου το πλέον σημαντικό στοιχείο δράσης της αποτελεί το **Μουσείο** Γρίφων Μεγίστης, σε συνεργασία με την Περιφέρεια Ν. Αιγαίου, τον Δήμο Μεγίστης και τα Υπουργεία Ανάπτυξης, Γενικής Γραμματείας Έρευνας και Καινοτομίας, Εθνικής Άμυνας, Πολιτισμού και Αθλητισμού, Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής που βοήθησαν με μεγάλη επιτυχία.

Επειδή από το Καστελλόριζο πνέει ούριος άνεμος, το Φεστιβάλ Γρίφων αποβιβάζεται στην **Πάτρα** (21-23/10) και στη συνέχεια στην **Αθήνα** (16-18/12) και παράλληλα αρχίζουν οι προετοιμασίες για το 3ο Φεστιβάλ Γρίφων. Θυμίζουμε ότι το μουσείο γρίφων ανακηρύχθηκε από φέτος Ευρωπαϊκό Κέντρο Επιστήμης, Τεχνολογίας και Τέχνης STARTS (Science +Tehnology + Arts).

Διεθνείς μαθητικές ολυμπιάδες 2022

Φυσική: Η $52^η$ Διεθνής Ολυμπιάδα Φυσικής, που έγινε διαδικτυακά (virtual) στην **Ελβετία** (10-18 Ιούλη 2022)όπου συμμετείχε και **η χώρα μας πέτυχε** 3 **διακρίσεις** με «Εύφημο Μνεία» με τους: **Πάζας Βασίλειος** (Πρότυπο Αναβρύτων Αθηνών), **Αθανασόπουλος Νικόλαος** (Πρότυπο Αναβρύτων Αθηνών), **Τσούλιας Αλέξανδρος** ($32^ο$ Λύκειο Θεσσαλονίκης).

Χημεία: Η $54^η$ Διεθνής Ολυμπιάδα Χημείας, που έγινε φέτος στην **Κίνα** διαδικτυακά (virtual) (18 Ιούλη 2022) και συμμετείχαν 83 χώρες η χώρα μας κέρδισε 4 **Χάλκινα Μετάλλια** με τους: **Κασιμάτης Δημήτρης** (Ευαγγελική Σχολή Αθήνας), **Κακαές Βάϊος** (Εκπαιδευτήρια Μπακογιάννη, Λάρισα), **Φειδάκης Αθανάσιος** ($2^ο$ Λύκειο Αιγίου), **Ανεμούλης Ορέστης** (Ανατόλια Θεσσαλονίκης).

Αστρονομία: Η $15^η$ Διεθνής Ολυμπιάδα Αστρονομίας που έγινε στο **Κουτάϊσι Γεωργίας** (14-22 Αυγούστου 2022) όπου συμμετείχαν 48 χώρες με 240 μαθητές η χώρα μας πήρε με τους: **Σκούπας Ανδρέας** Χάλκινο Μετάλλιο (Μουσικό Σχολείο Αλίμου), και με τον **Φωτιάδη Πρόδρομο** (Δράμα) Εύφημο Μνεία.

Πληροφορική: Η $34^η$ Διεθνής Ολυμπιάδα Πληροφορικής έγινε στην **Ινδονησία** 23 Αυγούστου 2022 η χώρα μας κατέκτησε ένα μετάλλιο, με τον **Ραδαίο Μάριο** (Pierce Αθήνα)

Οικονομία: που έγινε φέτος στην **Βουδαπέστη Ουγγαρίας** (Σεπτέμβριος 2022), η χώρα μας κατέκτησε **ένα αργυρό** μετάλλιο με τον **Τουτζιαρίδη Αλκιβιάδη** (Κολλέγιο Ψυχικού, Αθήνα).

Βιολογία: Η $33^η$ Διεθνής Ολυμπιάδα Βιολογίας που έγινε στο **Γερεβάν της Αρμενίας** (10-18 Ιούλη 2022) με συμμετοχή 70 χωρών η χώρα μας κατέκτησε 2 Εύφημες Μνείες με τους **Τράκα Παναγιώτη** ($1^ο$ Λύκειο Πάτρας), **Καρπουζή Κατερίνα** (Βαρβάκειο, Αθήνα).

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

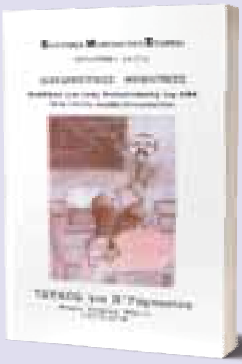
Προσφορές

Νέα τιμή βιβλίου: 15€

Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

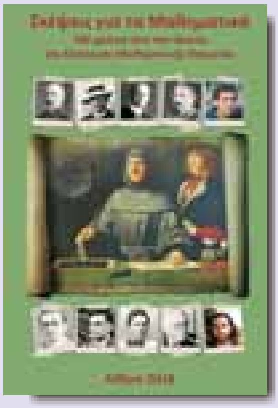


Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

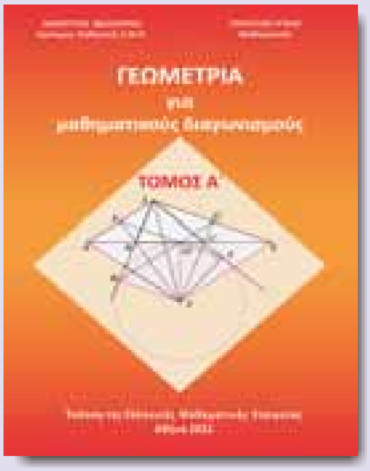
Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ

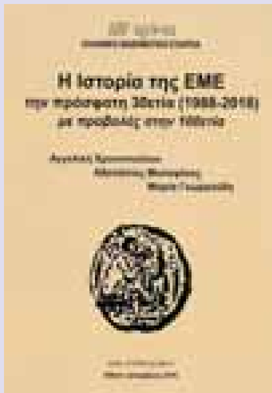


Τιμή βιβλίου: 15€

Νέο Βιβλίο



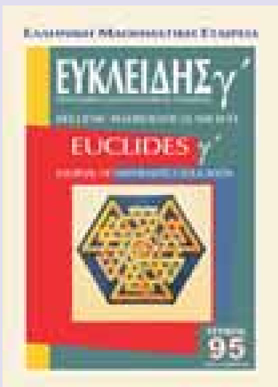
Τιμή βιβλίου: 25€



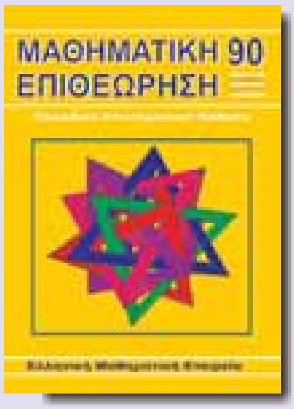
Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr