ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

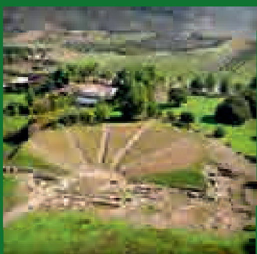
134

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β' ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2024 ευρώ 3,5



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

χτές, σήμερα, αύριο

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΔΑΣΙΟΣ

Αρχαία Ολυμπία 2 Νοεμβρίου 2024

Θέματα "Θαλής" 2024

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Κ +7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Αρχαία Ολυμπία

2800 Χρόνια

από την πρώτη Ολυμπιάδα

[776 π.Χ. - 2024]

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 134 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2024 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
πολλές ευχές για
χαρούμενη χρονιά
το 2025
με υγεία,
με αισιοδοξία
και με καλή διάθεση
παντού ...

Καλή χρονιά

Και όπως λέει και
ο πανεπιστημιακός δάσκαλος

"Η τέχνη ενός μαθηματικού
δεν είναι να κάνει υπολογισμούς,
αλλά να βρίσκει τρόπους
να αποφεύγει τους υπολογισμούς"

Αθανάσιος Φωκάς
Κεφαλονιά: [1952 -]
Πανεπιστημιακός καθηγητής
στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τακτικό μέλος Ακαδημίας Αθηνών από το 2005

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ... Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση**

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄ Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄ Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄ Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

$$[2000+25] = [5\cdot 20^2+5^2]=2025$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	8 Νοεμβρίου	2024
Ευκλείδης:	18 Ιανουαρίου	2025
Αρχιμήδης:	22 φεβρουαρίου	2025

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Φελλούρης Ανάργυρος
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- **Οι συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στενλονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένεδειξη «Γιοα τον Ευκλείδη Β΄» Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. ¨ολα τα άρθρα υπόκειται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Εκτύπωση: rintfair **Τηλ.: 2102469799 -2102401695** **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Α. Κρέτσης

Μαθηματικά: Χθες-Σήμερα-Αύριο*

Γεώργιος Δάσιος
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστήμιου Πατρών
Αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Αθηνών

Κάθε φορά που καλούμαι να μιλήσω, όχι με Μαθηματικά αλλά για τα Μαθηματικά, αρχίζω με την υπενθύμιση του τι ακριβώς είναι τα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά λοιπόν είναι μια γλώσσα, όπως κάθε άλλη γλώσσα με έννοιες και κανόνες, η οποία όμως διαφέρει από κάθε άλλη γλώσσα γιατί οι έννοιές της είναι αυστηρά μονοσήμαντα διατυπωμένες και το κυριότερο, οι κανόνες της δεν έχουν εξαιρέσεις.

Με αυτή την αυστηρά δομημένη γλώσσα μπορούμε να αναλύουμε σύνθετες και πολύπλοκες έννοιες καθώς και να αναπτύσσουμε ευφυείς ιδέες, τις οποίες καταλαβαίνουν πλήρως και ακριβώς μόνον όσοι γνωρίζουν αυτή την γλώσσα. Έτσι μπορούμε να φτάσουμε με ακρίβεια σε οποιοδήποτε βάθος ανάλυσης μας επιτρέπει ο εγκέφαλός μας. Και για να προστατεύουμε τον εγκέφαλό μας από το να συγκρατεί τον τεράστιο όγκο από όλες αυτές τις λεπτομερείς πληροφορίες, βρήκαμε έναν τρόπο να πακετάρουμε αυτήν την γνώση σε μικρά ή μεγάλα κουτιά που τα ονομάσαμε, ανάλογα με την σημασία και τον όγκο του περιεχομένου τους, Θεωρήματα, Προτάσεις, Πορίσματα, Λήμματα, κ.τ.λ.

Με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας αυτά τα πακέτα αλάνθαστης γνώσης, μπορούμε άμεσα να φτάσουμε στα όρια της ανθρώπινης σκέψης και να την επεκτείνουμε δημιουργώντας νέα πακέτα αποδεδειγμένης γνώσης. Και είναι αληθές ότι η ανάπτυξη των Επιστημών και της Τεχνολογίας πατάει επάνω σε αυτή τη γνώση για οποιαδήποτε ανακάλυψη και για οποιαδήποτε εφεύρεση.

Ακριβώς αυτό είναι με απλά συμβολικά λόγια τα Μαθηματικά.

Κάτω λοιπόν από αυτό το πρίσμα δεν περιέχει κανένα μυστήριο το γεγονός ότι όλο και περισσότερο ακούμε για την **ανάγκη** και για την **χρήση των Μαθηματικών**. Γιατί όσο περισσότερο αναπτύσσεται η κοινωνία μας τόσο περισσότερο χρειαζόμαστε αυτή την οργανωμένη και απόλυτη ανθρώπινη σκέψη. Μάλιστα, στη σημερινή εποχή, όχι μόνον έχουν βρει εφαρμογές όσα Μαθηματικά γνωρίζουμε, αλλά πολλές από τις ανάγκες μας δεν έχουν βρει ακόμα τα Μαθηματικά που χρειάζονται.

Με άλλα λόγια, ενώ για αιώνες δημιουργούσαμε Μαθηματική γνώση ως προϊόν της βιολογικής μας νοημοσύνης, ανεξάρτητα του αν αυτή ήταν άμεσα χρήσιμη ή όχι, έχουμε φτάσει σήμερα σε ένα σημείο που όχι απλά δεν μας περισσεύουν, αλλά **μας λείπουν τα Μαθηματικά που χρειαζόμαστε.**

Για παράδειγμα, φαίνεται ότι ούτε τα Ντετερμινιστικά ούτε τα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι κατάλληλα για να αναλύσουν πολυπαραμετρικά προβλήματα όπως αυτά που εμφανίζονται στην Βιολογία, την Οικονομία, ή την Κοινωνιολογία. Πολλοί Μαθηματικοί πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά που απαιτούνται για την ανάλυση αυτών των διαδικασιών δεν έχουν ακόμα ανακαλυφθεί και γι’ αυτό η προσέγγισή τους με τα υπάρχοντα Μαθηματικά είναι πολύπλοκη και αβέβαιη.

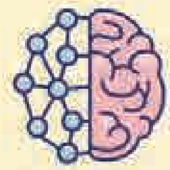
Κατά κάποιον τρόπο, και χωρίς να το κατανοούμε, όλοι μας χρησιμοποιούμε τη γλώσσα των Μαθηματικών σε καθημερινή βάση, γιατί πολλές από τις συσκευές που χρησιμοποιούμε, όπως τα συστήματα αναπαραγωγής μουσικής, το κινητό τηλέφωνο, οι οικιακές συσκευές, οι υπολογιστές, η βιντεοσκόπηση, οι οικιακές ηλεκτρικές συσκευές κ.τ.λ., απαιτούν, για να λειτουργήσουν, το πάτημα ακριβώς ενός συγκεκριμένου κουμπιού που εκτελεί, μια και μόνο συγκεκριμένη ενέργεια, δηλαδή απαιτείται μια μαθηματικά καθορισμένη κίνηση. Με άλλα λόγια, το υπόβαθρο για τη χρήση τους είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

Στα Μαθηματικά παρατηρούμε ακόμα το φαινόμενο της νεκρανάστασης ξεχασμένων θεωριών. Θα αναφέρω τρία μόνον παραδείγματα

1. Κατά το πρώτο μισό του 19ου αιώνα, αρχίζοντας με τον Gauss και ολοκληρώνοντας με τον Riemann (μαθητή του Gauss) κατασκευάστηκε η Γεωμετρία του μη Ευκλείδειου χώρου, δηλαδή η Γεωμετρία των καμπυλωμένων χώρων, ένα απόλυτα θεωρητικό κατασκεύασμα. 70 χρόνια αργότερα ο Einstein πάτησε επάνω σε αυτή την θεωρία για να διατυπώσει τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.
2. Στα μέσα του 19ου αιώνα ο George Boole διατύπωσε με μαθηματικό τρόπο τους νόμους της συμβολικής λογικής, χωρίς κανέναν άλλο στόχο παρά μόνον τη δημιουργία μιας Άλγεβρας με βάση τη Λογική. Αν αυτή η Άλγεβρα δεν υπήρχε, σήμερα δεν θα είχαμε computers.
3. Το 1843 ο William Hamilton διατύπωσε την Θεωρία των Quaternions (Τετραδονίων κατά τον κ. Μπα-

---
* Κεντρική ομιλία από το 39ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας τηε ΕΜΕ στην Αρχαία Ολυμπία στις 1-3 Νοε. 2024

μπινιώτη), η οποία είναι μια αλγεβρική δομή στον χώρο των 4D με μια πραγματική και τρεις ορθογώνιες φανταστικές μεταβλητές. Η θεωρία των Τετραδονίων ξεχάστηκε μετά την εισαγωγή του πολύ απλούστερου, αλλά και μαθηματικά φτωχότερου, Διανυσματικού Λογισμού του Willard Gibbs κατά την δεκαετία του 1890. Η νεκρανάσταση των Τετραδονίων σήμερα, πέρα από την κομψή μαθηματική δομή τους, προσφέρει το μαθηματικό υπόβαθρο



- στην κινητική των Robot
- στον προσανατολισμό των διαστημοπλοίων
- στον κινηματογράφο των κινουμένων σχεδίων (animation)
- στη φωτομετρία
- στην κβαντική πληροφορία
- αλλά και σε πολλούς κλάδους των Θεωρητικών Μαθηματικών.

Είναι γεγονός ότι με τα εκατομμύρια των μαθηματικών που εργάζονται σε όλο τον κόσμο, ο όγκος των Μαθηματικών αυξάνεται με ιλιγγιώδη ταχύτητα, και συγκεκριμένα μια σχετική έρευνα στις αρχές της δεκαετίας του 70 έδειξε ότι η συνολική γνώση από την αρχαιότητα μέχρι το 1970 διπλασιάζονταν ανά 7 χρόνια. Ίσως σήμερα αυτός ο διπλασιασμός να συμβαίνει κάθε 5 χρόνια, ή και ακόμα λιγότερα.

Και το ερώτημα είναι:

«πώς είναι δυνατόν να μπορεί κάποιος να μάθει έστω και μια περιοχή των Μαθηματικών με τέτοια μεγάλη ανάπτυξη;».

Η απάντηση είναι απλή. Οι μαθηματικές δομές γενικεύονται και πολλές από τις προ- υπάρχουσες δομές αποτελούν ειδικές περιπτώσεις κάποιας γενικότερης θεωρίας. Για παράδειγμα, η γνώση της Ανάλυσης στο $\mathbb{R}^n$, συνεπάγεται την γνώση της Ανάλυσης κάθε χώρου πεπερασμένης διάστασης, ενώ η γνώση της Τοπολογίας συνεπάγεται την κατανόηση πολλών θεωρημάτων της Ανάλυσης, κυρίως αυτά που αναφέρονται σε θέματα συνέχειας. Οι μετρικοί χώροι, οι χώροι Banach και οι χώροι Hilbert, γενικεύουν τις έννοιες της απόστασης, του μήκους και της γωνίας. Και προφανώς ανάλογα παραδείγματα μπορούν να διατυπωθούν τόσο για την Άλγεβρα, όσο και για την Γεωμετρία.

Ένα μεγάλο επίτευγμα των Μαθηματικών κατά τα τελευταία 50-60 χρόνια είναι η ανάπτυξη των αντιστρόφων προβλημάτων. Αλλά τι ακριβώς είναι ένα **αντίστροφο πρόβλημα;**

Σε αυστηρά μαθηματικό επίπεδο, αντίστροφο πρόβλημα είναι αυτό όπου μας δίνονται μερικά πρότυπα και οι αντίστοιχες εικόνες τους μέσω μιας άγνωστης απεικόνισης και μας ζητείται να βρούμε τον γενικό τύπο αυτής της απεικόνισης.

Σε φυσικό επίπεδο, μας δίνεται η διέγερση η οποία αλληλοεπιδρά με ένα φυσικό σύστημα, καθώς και τα αποτελέσματα αυτής της αλληλεπίδρασης, και μας ζητείται να βρούμε τα χαρακτηριστικά του φυσικού συστήματος που συμμετείχε στην αλληλεπίδραση.

Τέλος από τεχνολογικής πλευράς, μας δίνεται ένα μαύρο κουτί που εκτελεί μια άγνωστη λειτουργία, ένα σύνολο από εισόδους στο κουτί και το αντίστοιχο σύνολο των εξόδων από το κουτί, και μας ζητείται να βρούμε ποια είναι η λειτουργία του μαύρου κουτιού.

Τα αντίστροφα προβλήματα είναι δύσκολα να επιλυθούν και σχεδόν πάντα πάσχουν από την ασθένεια της μη καλής τοποθέτησης, κυρίως από έλλειψη μοναδικότητας. Δηλαδή, υπάρχουν περισσότερες από μια συναρτήσεις που παράγουν τις ίδιες εικόνες από τα αντίστοιχα πρότυπα, υπάρχουν περισσότερα από ένα φυσικά συστήματα που δίνουν τα ίδια αποτελέσματα κάτω από την ίδια διέγερση, και υπάρχουν περισσότερα από ένα μαύρα κουτιά που δίνουν τις ίδιες εξόδους όταν τροφοδοτούνται με τις ίδιες εισόδους.

Τα σχετικά ευκολότερα, καλά τοποθετημένα προβλήματα, είναι τα αντίστοιχα ευθέα προβλήματα, όπου γνωρίζουμε τα πρότυπα και τη συνάρτηση, ή την διέγερση και το φυσικό σύστημα, ή τις εισόδους και την λειτουργία του μαύρου κουτιού, και αναζητούμε, αντίστοιχα, τις εικόνες της απεικόνισης, ή τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης, ή τις εξόδους από το μαύρο κουτί.

Ο θρυλικός εφαρμοσμένος μαθηματικός του 20ου αιώνα Joseph Keller, είχε δηλώσει ότι

«κάθε πρόβλημα έχει δυο μορφές, μια εύκολη και μια δύσκολη, η εύκολη λέγεται ευθύ πρόβλημα και η δύσκολη αντίστροφο πρόβλημα ».

Και συνέχισε λέγοντας ότι «*αυτή η κατηγοριοποίηση έχει μια μόνο εξαίρεση όπου το αντίστροφο πρόβλημα είναι τετριμμένο και το ευθύ είναι όχι απλά δύσκολο αλλά αδύνατο, και αυτή η εξαίρεση αφορά τις ρίζες των πολυωνύμων βαθμού μεγαλύτερου του τέσσερα, όπου το ευθύ πρόβλημα της εύρεσης κλειστών τύπων που δίνουν τις ρίζες είναι αδύνατο, ενώ το αντίστροφο πρόβλημα της κατασκευής του πολυωνύμου όταν μας δίνονται οι ρίζες του είναι τετριμμένο*».

Οι επιστημονικές και κυρίως οι τεχνολογικές εφαρμογές των αντιστρόφων προβλημάτων είναι εξαιρετικά πολλές και συνεχίζουν να αναπτύσσονται σε καθημερινή βάση. Ας αναφέρουμε μερικές :

- 100 περίπου τεχνικές ιατρικών απεικονίσεων που μας επιτρέπουν να βλέπουμε στο εσωτερικό του ανθρώπινου σώματος, δηλαδή εκεί που δεν μπορούν να δουν τα μάτια μας.
- Radar και Sonars
- Βιομηχανικές εφαρμογές ελέγχου ποιότητας προϊόντων
- Γεωφυσική έρευνα υδατανθράκων
- Αναγνώριση προτύπων στην τεχνητή νοημοσύνη
- Ωκεανογραφία

Και ακόμα δυο που έχω διαβάσει τελευταία :

- Σκανάροντας την θερμική κατανομή διαφόρων σημείων του προσώπου, μπορούμε να διακρίνουμε αν το άτομο είναι μεθυσμένο ή όχι
- Αναλύοντας κατά Fourier το κλάμα ενός μωρού, μπορούμε να αποφασίσουμε γιατί κλαίει το μωρό με βάσει την κατανομή συχνοτήτων που περιέχει το βρεφικό κλάμα.

Το συμπέρασμα είναι ότι κανένα αντίστροφο πρόβλημα δεν λύνεται χωρίς Μαθηματικά, και υπάρχουν πολλά ακόμα άλυτα προβλήματα για τα οποία τα υπάρχοντα Μαθηματικά δεν επαρκούν για την λύση τους.

Σε ό,τι αφορά τη χρήση των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ο ουσιαστικός στόχος είναι να κατανοήσουμε το πραγματικό πρόβλημα σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μπορούμε να καταλάβουμε ποιες παραμέτρους μπορούμε να αγνοήσουμε, και για ότι χρειάζεται να προσεγγίσουμε να μπορούμε να εκτιμήσουμε την απαιτούμενη ακρίβεια της προσέγγισης.

Αυτό το επίπεδο κατανόησης δεν ισχύει και για τα Θεωρητικά Μαθηματικά γιατί σύμφωνα με τον Von-Neumann

«*Τις πολύπλοκες μαθηματικές έννοιες δεν τις κατανοούμε ποτέ.*
Απλά τις συνηθίζουμε μετά από πολλαπλές χρήσεις τους».

Τη φιλοσοφική και μεταφορική διάσταση των αντιστρόφων προβλημάτων είχε διατυπώσει ο Ludwig Wittgenstein στο βιβλίο του «*Πολιτισμός και Αξίες*» ως εξής: «*Ακόμη και το πιο γιγάντιο τηλεσκόπιο δεν μπορεί να έχει **προσοφθάλμιο φακό** μεγαλύτερο από το **ανθρώπινο μάτι***», αναφερόμενος στις απεριόριστες δυνατότητες του ανθρώπινου εγκεφάλου ακόμα και παρουσία χωρικών περιορισμών.

Όπως αναφέραμε, λόγω μη μοναδικότητας, τα αντίστροφα προβλήματα εμπεριέχουν ενδογενή αβεβαιότητα. Και σε ό,τι αφορά την αβεβαιότητα αυτός που έχει δώσει απαράμιλλους χαρακτηρισμούς, όπως οι ακόλουθοι, είναι ο Richard Feynman.

- *Είναι περισσότερο ενδιαφέρον **να ζει** κανείς **χωρίς να γνωρίζει**, παρά να διαθέτει απαντήσεις οι οποίες ενδέχεται να είναι λανθασμένες.*
- *Επιστήμη είναι η πίστη στην άγνοια των ειδικών.*
- *Ωριμότητα είναι η ικανότητα του ανθρώπου να διαχειρίζεται την αβεβαιότητα.*

Πριν ολοκληρώσουμε το θέμα των αντιστρόφων προβλημάτων θα ήθελα να κάνω μια αναφορά στο γεγονός ότι ήδη από την αρχαιότητα είχε διατυπωθεί η θέση ότι «*παρόλο που η υποκείμενη τάξη του κόσμου δεν είναι άμεσα ορατή ή απτή, μπορεί να συναχθεί μέσω της λογικής και του λόγου*». Δηλαδή, εδώ υπάρχει σαφής αναφορά σε αντίστροφα προβλήματα που επιλύονται με την χρήση των Μαθηματικών.

Αυτή η θέση διατυπώθηκε στον Πλατωνικό διάλογο μεταξύ Πλωτίνου και Πρόκλου.

Οι εφαρμοσμένοι μαθηματικοί ζουν στα σύνορα των επιστημών, και αυτό το είχε εκφράσει με επιτυχία ο Βέλγος φιλόσοφος των επιστημών, βαθύς γνώστης της Σχετικότητας, αστρονόμος και κληρικός Georges Lemaître (1894-1966), λέγοντας ότι: «*Τυχαίνει να είμαι περισσότερο μαθηματικός από τους περισσότερους αστρονόμους και περισσότερο αστρονόμος από τους περισσότερους μαθηματικούς*» .

Αυτό ισχύει κατά κανόνα για τους περισσότερους μαθηματικούς που εργάζονται σε κάποιο εφαρμοσμένο πρόβλημα εκτός μαθηματικών.

Είναι κοινή η εμπειρία όλων μας ότι ο καλύτερος τρόπος να κατανοήσουμε τα Μαθηματικά είναι μέσα από την προσπάθεια να λύσουμε ασκήσεις. Και τονίζω την «*προσπάθεια*» και όχι τη «*λύση*» γιατί μαθαίνουμε όταν σκεφτόμαστε τις δυνατότητες που έχουμε και όχι όταν καταφέρουμε να λύσουμε μια άσκηση. Η επίλυση της άσκησης, μας προσφέρει χαρά και αυτοπεποίθηση αλλά όχι νέα μαθηματική εμβάθυνση. Στην περίπτωση μιας δύσκολης άσκησης ξεκινάμε χωρίς καμία ιδέα, και συχνά αισθανόμαστε όπως αισθανόταν ο Δαρβίνος με τα Μαθηματικά που έλεγε ότι «*αισθάνομαι τυφλός μέσα σε ένα σκοτεινό δωμάτιο ψάχνοντας να βρω ένα μαύρο καπέλο που δεν βρίσκεται μέσα στο δωμάτιο*». Σκεφτείτε την ταραχή που του δημιουργούσαν τα Μαθηματικά. Όταν ήταν πια σε μεγάλη ηλικία ο Δαρβίνος είχε παραδεχθεί ότι

«*Μη γνωρίζοντας Μαθηματικά αισθανόμουν πάντα*
ότι ζω σε ένα χώρο με λιγότερες διαστάσεις».

Γνωρίζουμε πολύ καλά ότι η δυσκολία, ή η ευκολία, που παρουσιάζει η λύση ενός προβλήματος είναι άμεση συνάρτηση της διατύπωσης. Η αλλαγή της διατύπωσης μπορεί να αυξήσει ή να μειώσει την δυσκολία του. Ενώ η μη καλή διατύπωση δεν μεταφέρει με ακρίβεια το ερώτημα. Για παράδειγμα στην ερώτηση ενός δασκάλου: «*πόσες φορές μπορούμε να αφαιρέσουμε το 7 από το 83;*» ένας μαθητής απάντησε: «*όσες φορές θέλουμε και θα παίρνουμε πάντα 76*». Τυπικό παράδειγμα κακής ερώτησης που οδήγησε σε σωστή αλλά μη αναμενόμενη απάντηση.

Στα Μαθηματικά και γενικά στην ανθρώπινη λογική και αποτελεσματικότητα οι στόχοι που βάζουμε πολύ συχνά αντιστρέφονται. Για παράδειγμα, η Google εφευρέθηκε για να βοηθήσει τους ανθρώπους να μάθουν πράγματα για τον κόσμο και όχι για να βοηθήσει τους ερευνητές να μάθουν πράγματα για τους ανθρώπους. Όμως τελικά συνέβησαν και τα δύο, και οι άνθρωποι έμαθαν πράγματα για τον κόσμο αλλά και οι ερευνητές κατανόησαν την ανθρώπινη συμπεριφορά. Και συγκεκριμένα όπως καταγράφει ο Seth Stephens-Davidowitz στο εμβληματικό βιβλίο του «*Everybody Lies*» (όλοι λένε ψέματα) που δημοσιεύτηκε το 2017, το τι πραγματικά σκέπτονται οι άνθρωποι για την πολιτική, για τους φίλους τους, για την προσωπική τους ζωή, για τις ενδότερες σκέψεις τους, για τους συγγενείς τους, για τα αφεντικά τους και άλλα, δεν είναι αυτά που δηλώνουν στα Gallops αλλά αυτά που αναζητούν κατ' ιδίαν στο διαδίκτυο όταν πιστεύουν ότι είναι μόνοι τους και μιλάνε με τον εαυτό τους. Τα αποτελέσματα μεταξύ των Gallops και των προσωπικών εξομολογήσεων στο διαδίκτυο είναι αντιδιαμετρικά αντίθετα. Συνεπώς, τις αληθινές πληροφορίες για την ανθρώπινη συμπεριφορά τις αντλούμε από την απρόσωπη ανάλυση των μεγάλων δεδομένων (Big Data) και όχι από τα προσωποποιημένα, αλλά ανώνυμα στοιχεία των Gallops. Και αυτό γιατί στην προσπάθεια των ανθρώπων να αναζητήσουν την πληροφορία, η ίδια η αναζήτηση δημιουργεί ουσιαστική πληροφορία.

Προφανώς, υπάρχει μεγάλη πληροφορία στα μεγάλα δεδομένα, αλλά αν αναζητάς κάτι συγκεκριμένο, τότε όσο μεγαλύτερη είναι η σωρός με το άχυρο τόσο δυσκολότερα μπορείς να βρεις τη βελόνα που ψάχνεις. Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι ο κόσμος έχει μπει στην κούρσα του μεγαλύτερου και μεγαλύτερου πλήθους δεδομένων, και του προβλήματος αποθήκευσης αυτών των δεδομένων, ενώ πολύ λίγη προσπάθεια καταβάλλεται για τις απαιτούμενες μεθόδους διαχείρισης όλων αυτών των δεδομένων, μια διαδικασία που προφανώς απαιτεί μαθηματική αντιμετώπιση.

Και για να πάρουμε μια ιδέα του τι ακριβώς σημαίνει «*μεγάλο*» στον ψηφιακό κόσμο ας δούμε το εξής:

Σε ότι αφορά τα δεδομένα αναφέρω ότι, η ψηφιακή δραστηριότητα της Google σε μια και μόνον ημέρα ανέρχεται σε 2.5 επί 10^18 bytes δεδομένων. Αφού λοιπόν ένα byte αντιστοιχεί σε ένα γράμμα, μπορούμε να τυπώσουμε αυτό το γράμμα σε word, σε μέγεθος 12, που τυπωμένο εκτείνεται σε 2 περίπου χιλιοστά. Και τότε, η εκτυπωμένη κορδέλα όλων των bytes της 24-ωρης δραστηριότητας της Google θα έδινε ένα συνολικό μήκος ίσο με 5 επί 10^18 mm = 5 επί 10^12 Km . Για να κατανοήσουμε αυτό το μήκος αναφέρουμε ότι αυτή η κορδέλα θα έχει μήκος 125 εκατομμύρια φορές το μήκος του Ισημερινού της Γης, ή 31.000 φορές τη μέση απόσταση της Γης από τον Ήλιο, ή το διάστημα που θα διένυε το φως σε 6,4 μήνες (απόσταση μισού έτους φωτός) .

Αυτό είναι «*μεγάλο δεδομένο, για 24 ώρες δραστηριότητας μιας και μόνον εταιρείας*» !!!

Με αυτή την αφορμή, ας έλθουμε τώρα και λίγο στην Τεχνητή Νοημοσύνη (Τ.Ν.) που έχει απογειωθεί τα τελευταία χρόνια στο ενδιαφέρον τόσο των επιστημόνων όσο και της κοινωνίας γενικότερα. Αλλά από πού πηγάζει αυτό το γενικευμένο ενδιαφέρον για την τεχνητή νοημοσύνη;

Κατά την προσωπική μου γνώμη το ενδιαφέρον για τις δυνατότητες του τεχνητού εγκεφάλου εδράζεται σε τρεις πυλώνες. Πρώτον, στην ανησυχία για το πραγματικό μέλλον της ανθρώπινης εργασίας, δεύτερον στην περιέργεια για το που μπορεί να φτάσει η Τ.Ν. και τρίτον στην αχαλίνωτη φαντασία ορισμένων βιολογικών εγκεφάλων.

Ας αρχίσουμε με το να εστιάσουμε σε ορισμένα εντυπωσιακά επιτεύγματα της τεχνητής νοημοσύνης , αλλά και σε ορισμένες σκέψεις που βασίζονται στις δυνατότητες της ανθρώπινης νοημοσύνης.

Όπως όλοι γνωρίζουμε, στις 20 Ιουλίου του 1969, η ενδέκατη διαστημική πτήση του προγράμματος ΑΠΟΛΛΩΝ μετέφερε, για πρώτη και τελευταία φορά, μέχρι σήμερα τουλάχιστον, άνθρωπο στην επιφάνεια της Σελήνης. Ο τότε πρόεδρος των Ηνωμένων Πολιτειών Richard Nixon είχε ετοιμάσει δυο κείμενα με τα οποία θα απευθυνόταν στον αμερικανικό λαό. Ένα για την περίπτωση επιτυχίας και ένα για την περίπτωση αποτυχίας του προγράμματος, και προφανώς το κείμενο της αποτυχίας δεν χρησιμοποιήθηκε ποτέ. Ο αμερικανικός λαός άκουσε μόνο το κείμενο της τεράστιας επιτυχίας του ανθρώπου να περπατήσει στο φεγγάρι. Αρκετά χρόνια αργότερα, έγινε γνωστό και το κείμενο της αποτυχίας. Ένα λοιπόν εντυπωσιακό επίτευγμα της τεχνητής νοημοσύνης είναι ότι πρόσφατα δημιούργησαν βίντεο με τον ίδιο τον Nixon, ακριβώς 30 χρόνια μετά τον θάνατό του, να ανακοινώνει περίλυπος το κείμενο της αποτυχίας του προγράμματος προσσελήνωσης του 1969, διατηρώντας μια απόλυτη συμβατότητα των λόγων του με τις εκφράσεις του προσώπου του. Αν δεν είναι αυτό ένα θαύμα της τεχνητής νοημοσύνης, τότε τι είναι;

Και σήμερα, είναι απόλυτα εφικτό να δημιουργήσουμε ολόκληρα κινηματογραφικά έργα με πρωταγωνιστές πεθαμένους ηθοποιούς. Και γιατί δεν το κάνουμε; Γιατί το κόστος είναι υπερβολικά μεγάλο. Όμως η δυνατότητα υπάρχει.

Στο μέλλον, πολλές τυποποιημένες εργασίες, που βασίζονται σε ένα πεπερασμένο πλήθος κανόνων, ή/και διαδοχικών βημάτων, θα εκτελούνται μηχανικά από κάποιο robot χωρίς την παρεμβολή ανθρώπου. Ήδη έχουμε πολλά τέτοια παραδείγματα στην καθημερινότητά μας. Αυτό όμως δεν θα αντικαταστήσει την ανθρώπινη δραστηριότητα. Για παράδειγμα, έχουμε τα αυτόματα μηχανήματα για απλές τραπεζικές συναλλαγές, αλλά αυτές οι μηχανές δεν επεξεργάζονται και οικονομοτεχνικά στοιχεία για τη χορήγηση δανείων. Ομοίως, πολλές ιατρικές εξετάσεις εκτελούνται αυτόματα με την βοήθεια της τεχνητής νοημοσύνης, αλλά η συνολική εκτίμηση της κατάστασης του ασθενούς είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού όλων αυτών των αποτελεσμάτων από το βιολογικό εγκέφαλο, εν προκειμένω το γιατρό.

Ο Αμερικανός συγγραφέας και ειδικός σε θέματα τεχνητής νοημοσύνης Erik Larson, εξέδωσε το 2023, στον εκδοτικό οίκο του Πανεπιστημίου Harvard, ένα βιβλίο με τίτλο: «The Myth of Artificial Intelligence» (Ο Μύθος της Τεχνητής Νοημοσύνης). Το βιβλίο αυτό θεωρείται σήμερα η βασική αναφορά που περιγράφει το τεράστιο χάσμα ανάμεσα **στα όρια της πραγματικής επιστήμης** και των δραματικών ισχυρισμών που έχουν διατυπωθεί για την τεχνητή νοημοσύνη. Για παράδειγμα, οι ισχυρισμοί ότι τα robot θα ξεπεράσουν κάποτε την ανθρώπινη νοημοσύνη και θα στραφούν επιθετικά εναντίον της ανθρωπότητας, αποτελούν σενάρια επιστημονικής φαντασίας που ξεπερνάνε κατά πολύ ακόμα και αυτά του Χόλυγουντ.

Ο ηλεκτρονικός εγκέφαλος υπερτερεί κατά πολύ του βιολογικού εγκεφάλου σε δυο ακριβώς στοιχεία. Πρώτον στην μνήμη και την διαχείριση των μεγάλων δεδομένων που όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η εκτυπωμένη πληροφορία της ψηφιακής ημερήσιας δραστηριότητας της Google και μόνον, ανέρχεται σε μια κορδέλα με την οποία μπορούμε να τυλίξουμε τη Γη 125 εκατομμύρια φορές. Και δεύτερον στην ταχύτητα, γιατί η μέγιστη ταχύτητα με την οποία τρέχουν οι ηλεκτρικοί παλμοί μέσα σε έναν μεταλλικό αγωγό είναι περίπου ίση με την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή 300.000.000 μέτρα το δευτερόλεπτο, ενώ η μέγιστη ταχύτητα με την οποία τρέχουν τα ηλεκτροχημικά σήματα στο ανθρώπινο νευρικό σύστημα είναι μόλις 30 μέτρα το δευτερόλεπτο. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πληροφορία στον ηλεκτρονικό εγκέφαλο ταξιδεύει κατά 10 εκατομμύρια φορές γρηγορότερα από τον βιολογικό εγκέφαλο. Έτσι, στο χρόνο που χρειάζεται ένας άνθρωπος να εκτελέσει μια πνευματική εργασία, ο υπολογιστής μπορεί να ολοκληρώσει 10 εκατομμύρια παρόμοιες εργασίες της ίδιας δυσκολίας, και χωρίς κανένα απολύτως λάθος. Ας δούμε και ένα χρονικό παράδειγμα. Αν υποθέσουμε ότι χρειαζόμαστε ένα λεπτό, για να κάνουμε μια μέτριας δυσκολίας διαίρεση, τότε για να κάνουμε 10 εκατομμύρια διαιρέσεις της ίδιας δυσκολίας θα χρειαστούμε 77 χρόνια οκτάωρης καθημερινής εργασίας πέντε ημέρες την εβδομάδα. Δηλαδή ο χρόνος συνταξιοδότησης για περισσότερο από δύο άτομα. Ενώ ένας υπολογιστής χρειάζεται ένα λεπτό για να εκτελέσει όλες αυτές τις διαιρέσεις. Και το κυριότερο, υπολογίστε πόσα λάθη θα γίνουν από την ανθρώπινη εργασία σε σχέση με τις πάντα σωστές διαιρέσεις του υπολογιστή.

Άλλο όμως ταχύτητα **διαχείρισης πληροφορίας** και άλλο **νοημοσύνη**.

Ας σημειώσουμε εδώ ότι η τεχνητή νοημοσύνη δεν είναι κάτι καινούργιο. Για περισσότερο από ένα αιώνα ο άνθρωπος χρησιμοποιεί την τεχνητή νοημοσύνη με τη μορφή της καταγραφής και αναπαραγωγής ήχου και εικόνας (cd, dvd, τηλεόραση, κινηματογράφος, κλπ), με τη μορφή της χρήσης αισθητήρων προειδοποίησης (συστήματα ασφαλείας, εντολές σε οικιακές συσκευές μέσω κινητού τηλεφώνου, κλπ), με τη μορφή της αυτόματης αλληλεπίδρασης κυματικών πεδίων και αντικειμένων με σκοπό τον εντοπισμό και την αναγνώρισή τους (randar, sonar, τομογραφία, υπέρηχοι, ηλεκτροεγκεφαλογραφία, μαγνητοεγκεφαλογραφία, μαγνητικές απεικονίσεις, άλλες ιατρικές τεχνικές), και πολλά άλλα.

Τα όρια της τεχνητής νοημοσύνης τίθενται από τα προγράμματα με τα οποία τροφοδοτούμε το λογισμικό σύστημα του υπολογιστή. Ο ηλεκτρονικός εγκέφαλος θα κάνει πάντα ότι του έχουμε πει εμείς να κάνει, μέσω των προγραμμάτων με τα οποία τον τροφοδοτούμε. Ακόμα και όταν εμφανίζεται ότι διαλέγει μεταξύ διαφόρων επιλογών, κάτι που προσομοιάζει με κριτική σκέψη, στην πραγματικότητα είναι προγραμματισμένος να υπολογίζει τις πιθανότητες κάθε επιλογής και να διαλέγει το πιο πιθανό. Η επιλογή του δηλαδή εμπεριέχει αβεβαιότητα, μέσω στατιστικού σφάλματος.

Δηλαδή, ακόμα και όταν «*μαθαίνει*», εμείς του έχουμε πει πως να μαθαίνει, ενσωματώνοντας κάθε νέα πληροφορία που μπαίνει στο σύστημα από το περιβάλλον. Και προφανώς όλη η πληροφορία είναι στοχαστική, εμπεριέχει σφάλματα που δεν μπορεί να διακρίνει η μηχανή, και συνεπώς τα αποτελέσματα που παράγει έχουν πιθανοκρατική δομή.

Μιλώντας για σφάλματα και αβεβαιότητα θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ακόμα και με τη βοήθεια του βιολογικού εγκεφάλου ένα σημαντικό μέρος της τεχνολογίας μας λειτουργεί υπό την αβεβαιότητα της ύπαρξης πιθανού σφάλματος. Πολλά πράγματα μπορούν να πάνε στραβά, λόγω άγνοιας κάποιας ειδικής συμπεριφοράς, σε κάποιο πολύπλοκο μηχανισμό που χρησιμοποιούμε. Και δυστυχώς, αυτή η ειδική συμπεριφορά διορθώνεται συνήθως μετά από μια καταστροφική της εμφάνιση (βλέπε αεροπορικά δυστυχήματα και μαύρο κουτί).

Η τεχνητή νοημοσύνη είναι πολύ αποτελεσματική σε θέματα ρουτίνας, αλλά δεν μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα που οι λύσεις τους δεν έχουν προβλεφθεί και ενσωματωθεί στο πρόγραμμά τους. Και ακόμα δεν μπορεί, χωρίς καθοδήγηση, να αναγνωρίσει και να ερμηνεύσει πληροφορίες που υπάρχουν στο φυσικό μας περιβάλλον. Για παράδειγμα, έχει παρατηρηθεί ότι τα έτη με υψηλό μέσο όρο θερμοκρασίας απεικονίζονται σε φαρδύτερους δακτυλίους, στην διατομή των κορμών των δένδρων. Κατά συνέπεια, αυτή η παρατήρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντίστροφα για να μας δώσει πληροφορία σχετικά με την ετήσια θερμοκρασιακή κατανομή του πλανήτη στο παρελθόν. Μπορεί ένα robot να αναπτύξει απρογραμμάτιστα αυτή την αντίστροφο λογική;

Ένα δεύτερο συμπέρασμα που δεν είναι δυνατόν να εξάγει από μόνο του ένα robot είναι τα αποτελέσματα της τήξης των πάγων στους δύο πόλους της Γης. Συνέπεια αυτής της τήξης των πάγων είναι η απομάκρυνση υδάτινης μάζας από τη γειτονιά του άξονα περιστροφής της Γης, προς ολόκληρη την θαλάσσια επιφάνειά της. Αυτό αυξάνει την ροπή αδράνειας της Γης, πράγμα που συνεπάγεται την αύξηση της περιόδου περιστροφής της. Με άλλα λόγια, άλλο ένα αποτέλεσμα της περιβαλλοντικής μεταβολής που ζούμε, είναι ότι αυξάνεται, έστω και κατά ελάχιστο, η χρονική διάρκεια της ημέρας. Ποιος προγραμματισμός μπορεί να διεγείρει έναν τέτοιο συλλογισμό σε έναν τεχνητό εγκέφαλο;

Ως μαθηματικοί, γνωρίζουμε πολύ καλά ότι, στη Λογική Συμπερασματολογία έχουμε τρεις θεμελιώδεις μεθόδους: Την ***Απαγωγή***, που εξάγει συμπεράσματα από το γενικό προς το ειδικό, και η οποία παράγει βέβαιη γνώση αλλά όχι νέα γνώση. Την ***Επαγωγή,*** που εξάγει συμπεράσματα από το ειδικό προς το γενικό, και η οποία παράγει νέα γνώση, αλλά όχι βέβαιη γνώση. Και την ***Αναγωγή***, που εξάγει συμπεράσματα με βάση την ισοδυναμία. Οι τρεις αυτές μέθοδοι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και κατά συνέπεια δεν είναι δυνατόν να συσχετιστούν μέσω τεχνητής νοημοσύνης. Συσχέτιση συμπερασμάτων σε αυτό το επίπεδο μπορεί να διενεργήσει μόνον ο βιολογικός εγκέφαλος, με την βοήθεια ενός πλήθους συμπληρωματικών πληροφοριών, οι οποίες όμως είναι μη πεπερασμένες και συνεπώς μη δυνάμενες να προγραμματιστούν.

Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι, η αβεβαιότητα της γνώσης που παράγει η Επαγωγή, δηλαδή από το ειδικό προς το γενικό, οφείλεται στην αβέβαιη υπόθεση ότι διαδικασίες για τις οποίες έχουμε εμπειρία (όπως είναι οι ειδικές διαδικασίες) συμπεριφέρονται το ίδιο με διαδικασίες για τις οποίες δεν έχουμε εμπειρία (όπως είναι οι γενικές διαδικασίες).

Βασιζόμενοι σε αυτή την παρατήρηση υπάρχουν σήμερα μαθηματικοί, στην περιοχή της Λογικής, που αμφισβητούν την ορθότητα της Μεθόδου της Μαθηματικής Επαγωγής, παρόλο που οι όροι μιας ακολουθίας, για παράδειγμα, ως μαθηματικές οντότητες έχουν μοναδικό και αμετάβλητο χαρακτήρα.

Η βιολογική νοημοσύνη διαχειρίζεται συνολικά την υπάρχουσα στον εγκέφαλο γνώση και δεν περιορίζεται από κανένα πρόγραμμα. Για παράδειγμα, οι φράσεις «*το μολύβι είναι μέσα στο κουτί*» και «*το κουτί είναι μέσα στο μολύβι*» ερμηνεύονται από το λογιστικό σύστημα του υπολογιστή ως ισοδύναμες εκφράσεις. Προφανώς, η λανθασμένη δεύτερη φράση απαιτεί την πρόσθετη συγκριτική γνώση ότι το κουτί δεν χωράει να μπει μέσα στο μολύβι, μια πληροφορία που δεν καλύπτεται από τους νόμους της λογικής ισοδυναμίας, και συνεπώς λείπει από το διαχειριστικό περιβάλλον του υπολογιστή.

Ο υπολογιστής είναι πολύ αποτελεσματικός σε παιχνίδια, όπως το σκάκι, που έχουν ένα πεπερασμένο αριθμό κανόνων και απαιτούν έναν τεράστιο όγκο μνήμης. Επειδή όμως η ζωή και η ανθρώπινη δραστηριότητα δεν είναι παιχνίδι, ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει εξελιχθεί έτσι ώστε να μπορεί να επιλύει άπειρα διαφορετικά προβλήματα που δημιουργούνται καθημερινά. Συνεπώς, δεν μπορούμε να αντιμετωπίζουμε την ευφυΐα σαν ένα σύνολο τεχνικών επίλυσης προβλημάτων που υπακούουν σε ένα πεπερασμένο αριθμό κανόνων. Σκεφτείτε ότι, και τα παιχνίδια τα οποία μπορούμε να παίξουμε στον υπολογιστή, κάθε ένα έχει το δικό του εξειδικευμένο πρόγραμμα, έχει το δικό του τεχνητό εγκέφαλο. Και πραγματικά δεν μπορείς να παίξεις Atari με πρόγραμμα σκακιού, ούτε τάβλι με πρόγραμμα κουν-καν. Σε αντίθεση, ο βιολογικός εγκέφαλος προσαρμόζεται αμέσως στους κανόνες κάθε παρουσιαζόμενου παιχνιδιού, τους οποίους και αναγνωρίζει αυτόματα, χωρίς κανέναν προγραμματισμό.

Θα αναφερθώ στη συνέχεια σε μερικές δηλώσεις του πρωτοπόρου της Τ.Ν. Stuart Russel.

«*Σοβαροί ερευνητές της Τ.Ν. ενστερνίστηκαν την άποψη ότι η Τ.Ν. ανθρώπινου ή υπερανθρώπινου επιπέδου είναι αδύνατη*».

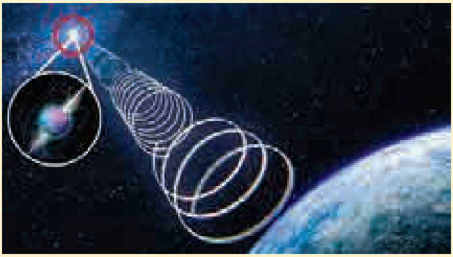
« *Η ταχύτητα και μόνο δεν θα μας οδηγήσει στην Τ.Ν. Η εκτέλεση ενός κακώς σχεδιασμένου αλγορίθμου σε έναν ταχύτερο υπολογιστή δεν καθιστά ταχύτερο τον αλγόριθμο. Απλώς θα παίρνουμε τη λάθος απάντηση πιο γρήγορα. Και με περισσότερα δεδομένα οι ευκαιρίες για λανθασμένες απαντήσεις θα είναι περισσότερες*».

«*Δεν γνωρίζουμε πώς να φτιάξουμε μια πραγματικά νοήμονα μηχανή, ακόμα και αν αυτή διέθετε το μέγεθος του Σύμπαντος*».

Υπάρχει βέβαια και η προτεινόμενη περίπτωση να μας εμφυτεύουν στον εγκέφαλο ένα τσιπάκι, που θα συνεργάζεται με τον δικό μας βιολογικό εγκέφαλο για να κάνει θαύματα. Και σε αυτή την εκδοχή η θέση του Russel είναι η ακόλουθη.

«*Εάν οι άνθρωποι χρειάζονται εγχείρηση στον εγκέφαλο, απλώς και μόνο για να αντιμετωπίσουν τους κινδύνους που δημιουργεί η δική τους τεχνολογία, μάλλον κάποιο λάθος έχουμε κάνει*».

Ο άνθρωπος είναι νοήμων. Παρά ταύτα, κατά τη διάρκεια της ιστορίας της ανθρώπινης ζωής επάνω στη Γη, ποτέ δεν κατάφερε να φτιάξει βελτιωμένες ή εξυπνότερες μορφές ευφυίας από τη δική του. Στην πραγματικότητα, λόγω της έλλειψης πλήρους αυτογνωσίας, ούτε καν ομοιώματα του εαυτού του δεν μπόρεσε να κατασκευάσει, πολύ δε περισσότερο να τον ξεπεράσει. Βέβαια, γεννάμε παιδιά στατιστικώς πιο έξυπνα από εμάς, αφού έχουν κατά μέσον όρο 300.000 εγκεφαλικούς νευρώνες περισσότερους από τους γονείς τους, αν και αυτό αντιπροσωπεύει περίπου μόνον τα 3 εκατομμυριοστά του συνόλου των εγκεφαλικών νευρώνων. Αυτή όμως η βελτίωση αποτελεί Δαρβινική βιολογική εξέλιξη, εν πολλοίς, μη πλήρως κατανοητή από τον άνθρωπο, και σίγουρα δεν είναι υπολογιστική διαδικασία στα πλαίσια λειτουργίας ενός τεχνητού εγκεφάλου.



Υπάρχει στη Φύση μια απαράβατη αρχή, η οποία λέει ότι, δεν υπάρχει απόλυτη αυτογνωσία. Ο βρετανός νευροφυσιολόγος Colin Blakemore το έχει δηλώσει με το εξής επιχείρημα : «*Όποια γνώση έχουμε αποκτήσει για την λειτουργεία του εγκεφάλου μας οφείλεται στην πολυπλοκότητα του εγκεφάλου μας, τον οποίον δεν θα κατανοήσουμε ποτέ πλήρως, γιατί αν ο εγκέφαλός μας ήταν τόσο απλός ώστε να μπορούσαμε να τον καταλάβουμε, τότε θα είμαστε εμείς τόσο ηλίθιοι που και πάλι δεν θα μπορούσαμε να τον καταλάβουμε*».

Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την οριακή αρχή, η Ιατρική θα είναι πάντα μια πιθανοκρατική επιστήμη, οι γάτες δεν θα μπορέσουν ποτέ να γίνουν κτηνίατροι, και οι υπολογιστές δεν θα μπορέσουν ποτέ, από μόνοι τους, να αναπαράγουν τον εαυτό τους, πολύ δε περισσότερο να τον ξεπεράσουν.

Ας μην παρακάμπτουμε και μια ακόμη σημαντικότατη διαφορά μεταξύ τεχνητού και βιολογικού εγκεφάλου. Ο μηχανικός εγκέφαλος έχει μια σταθερή δομή, αυτή που του έδωσε ο κατασκευαστής του, η οποία έχει την δυνατότητα να διαχειρίζεται ταχύτατα ένα πεπερασμένο αριθμό προγραμμάτων πάντα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Αντίθετα, ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει μια δυναμική δομή η οποία αλλάζει συνεχώς υπό την επίδραση των εσωτερικών και εξωτερικών ερεθισμάτων. Κάθε πληροφορία που μεταφέρουν οι αισθήσεις μας αναδομεί τον εγκέφαλό μας, ενσωματώνοντας τα νέα δεδομένα. Αυτό είναι μάθηση, και σε αυτό οφείλεται η πρωτοτυπία, η ευελιξία και η πλαστικότητα της ανθρώπινης σκέψης.

Όπως αναφέρει ο Eric Larson, «*Οι υποστηρικτές της απεριόριστης δυνατότητας της τεχνητής νοημοσύνης προτάσσουν την κατασκευή ενός συστήματος που, μέσω ανατροφοδότησης, θα διορθώνει τα λάθη του και έτσι θα οδηγηθούμε σε μια έκρηξη ευφυίας που τελικά θα ξεπεράσει την ανθρώπινη ευφυία. Όμως αυτό το σύστημα δεν είναι άνθρωπος, δεν κουράζεται, δεν νυστάζει, δεν διασπά την προσοχή του, και συνεπώς δεν κάνει λάθη. Αλλά ακόμα και αν κάνει ένα λάθος, πως θα το αναγνωρίσει σαν λάθος; Γιατί αν μπορούσε να το αναγνωρίσει δεν θα το έκανε, αλλά ακόμα και αν το αναγνωρίσει πως θα το διορθώσει; Για να πραγματοποιήσουμε μια διόρθωση θα πρέπει να κατανοήσουμε πλήρως πως λειτουργεί ο βιολογικός εγκέφαλος, και αυτό, λόγω του περιορισμού της αυτογνωσίας, δεν θα συμβεί ποτέ. Αφού λοιπόν δεν θα φτάσουμε ποτέ εμείς σε αυτό το σημείο, πως θα προγραμματίσουμε ένα μηχάνημα να το ξεπεράσει;*»

Είναι λοιπόν προφανές, ότι η εξίσωση του βιολογικού εγκεφάλου με τον υπολογιστή δεν είναι μια επιστημονική αλλά μια φιλοσοφική τοποθέτηση του προβλήματος.

Σε διάφορα έγγραφα, που συμπληρώνουμε καθημερινά στο διαδίκτυο, υπάρχει ένα τετραγωνάκι με κάτι παραμορφωμένα γράμματα και μας ζητούν να τα αναγνωρίσουμε για να αποδείξουμε την ανθρώπινη φύση μας. Από αυτό και μόνο βλέπουμε πόσο εύκολα μπορεί να αναγνωρισθεί η βιολογική από την τεχνητή νοημοσύνη.

Σε ότι αφορά τις μελλοντικές προβλέψεις για τις δυνατότητες της τεχνητής νοημοσύνης, πρέπει να κατανοήσουμε ότι, η πρόβλεψη μιας σημαντικής εννοιολογικής ανακάλυψης είναι από τη φύση της εννοιολογικά ασύμβατη. Δηλαδή, δεν μπορούμε να πούμε ότι σε δέκα χρόνια θα ανακαλύψουμε τον τροχό, γιατί από την στιγμή που τον αναφέρουμε τον έχουμε ήδη εννοιολογικά ανακαλύψει. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, είναι ουτοπικό να κάνουμε προβλέψεις για επιστημονικές ανακαλύψεις.

Ο νομπελίστας κύπριος οικονομολόγος Χριστόφορος Πισσαρίδης προέβλεψε ότι δύο είναι τα επαγγέλματα που σίγουρα δεν θα θιγούν από τη τεχνητή νοημοσύνη στο μέλλον. Το ένα είναι η Νοσηλεία, γιατί παρόλο που η Ιατρική θα κάνει ευρεία χρήση της τεχνητής νοημοσύνης, δεν θα πάει ποτέ ένας άρρωστος σε ένα robot να το ρωτήσει τι ακριβώς έχει για να τον θεραπεύσει. Το δεύτερο επάγγελμα είναι τα Μαθηματικά, γιατί αυτά θα δημιουργούν την τεχνητή νοημοσύνη. Συγχρόνως, διαφαίνεται ότι η εκπαίδευση, η δικηγορία, η εξειδικευμένη εξυπηρέτηση πολιτών και φυσικά οι τέχνες θα έχουν επίσης μικρή πιθανότητα να υποκατασταθούν από τυποποιημένη νοημοσύνη. Με δυο λόγια, τα επαγγέλματα που θα επιβιώσουν θα είναι αυτά που απαιτούν διαρκή βιολογική νοημοσύνη, η οποία προφανώς ούτε τυποποιείται εκ των προτέρων, ούτε είναι πεπερασμένη. Μπορείτε να φανταστείτε ένα robot να αντιπαρατίθεται με έναν ευφυή δικηγόρο μέσα σε μια δικαστική αίθουσα; Ποιος πιστεύετε ότι θα υπερισχύσει;

Αλλά ας δούμε τα συν και τα πλην της τεχνητής νοημοσύνης.

Βασικά πλεονεκτήματα της Τεχνητής Νοημοσύνης είναι:

- Η διαχείριση μεγάλου όγκου δεδομένων σε ελάχιστο χρόνο.
- Η εξάλειψη του ανθρώπινου λάθους.
- Η τερατώδης μνήμη.
- Η μείωση του κόστους διεξαγωγής τυποποιημένων διαδικασιών.
- Η διάσωση εργαζομένων από επικίνδυνες εργασίες (εξουδετέρωση βομβών).
- Η αμερόληπτη λήψη αποφάσεων.

Μερικά από τα μειονεκτήματα της Τεχνητής Νοημοσύνης είναι:

- Το κόστος της ανάπτυξής της.
- Η ανικανότητα δημιουργικής σκέψης.
- Η στατικότητα της δομής της.
- Η έλλειψη συναισθήματος και συνεπώς ηθικής.
- Το ότι δεν βελτιώνεται με τον χρόνο, από μόνο του.
- Η έλλειψη αυτοτελούς ευέλικτης λογικής.

Υπάρχουν κίνδυνοι από την τεχνητή νοημοσύνη; Και βέβαια υπάρχουν !!!

Όχι όμως αυτοί που καταγράφονται και συζητιούνται διεθνώς στα ΜΜΕ. Ο μόνος ουσιαστικός κίνδυνος από την τεχνητή νοημοσύνη είναι ότι, με την εκτεταμένη χρήση της είναι πιθανό να ξεχάσουμε κάποια στιγμή ότι τα **αποτελέσματα** της έχουν **στατιστικό χαρακτήρα** και να αποδεχόμαστε αυτά τα αποτελέσματα ως βέβαιες **αντικειμενικές αλήθειες.**

Μια εκτεταμένη έρευνα στις Ηνωμένες Πολιτείες κατά τα δύο τελευταία έτη έδειξε ότι, η μέση νοημοσύνη του πληθυσμού έχει μειωθεί κατά 12%, λόγω της χρήσης της τεχνητής νοημοσύνης. Δηλαδή, όσο αναπτύσσεται η τεχνητή νοημοσύνη τόσο υποχωρεί η μέση ανθρώπινη νοημοσύνη, και αυτό συνάδει με την παραπάνω παρατήρηση ότι, λόγω μείωσης της δικής μας νοημοσύνης όλο και πιο εύκολα θα πιστεύουμε τα αβέβαια στατιστικά αποτελέσματα της τεχνητής νοημοσύνης.

Συνεπώς, ναι η Τεχνητή Νοημοσύνη θα αλλάξει τη ζωή μας, θα εκμηδενίσει τον χρόνο στον οποίο γίνονται σχεδόν όλες οι εργασίες ρουτίνας, θα μας αναγκάσει να μαθαίνουμε νέες διαδικασίες στην καθημερινή μας ζωή , αλλά δεν θα κινδυνεύσουμε από αυτή. Αρκεί να ξέρουμε τα όριά της και το κυριότερο να μην θέτουμε σε αδράνεια την δική μας νοημοσύνη.

Τελειώνω με την ακόλουθη συμπερασματική φράση του Eric Larson:

«*Η ανθρωπότητα κάνει μεγάλο λάθος να αντικαθιστά σταδιακά την ευφυΐα με την υπολογιστική δύναμη της μηχανής*».

Ολοκληρώνοντας την ομιλία μου θα ήθελα να απολογηθώ για την δοκιμασία στην οποία υπέβαλα τον δικό σας εγκέφαλο, και σας ευχαριστώ πολύ για την υπομονή σας.

85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

8 Νοεμβρίου 2024

Οι λύσεις των προβλημάτων

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

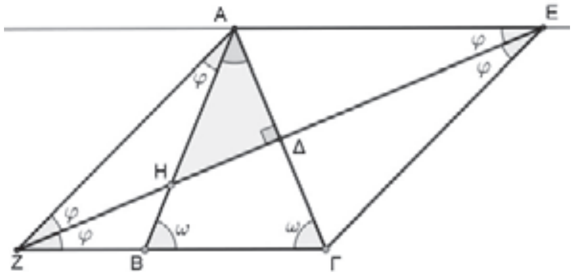
Πρόβλημα 1

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο Α προς την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε, την πλευρά ΑΒ στο σημείο Η και την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι: $A\hat{Z}H = Z\hat{A}H$.

(α) **Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.**

(β) **Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΕ είναι ρόμβος.**

Λύση



(α) Έστω $A\hat{Z}H = Z\hat{A}H = \varphi$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega$, οπότε $\hat{A} = 180^o - 2\omega$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ έχουμε: $\Delta\hat{A}Z + \Delta\hat{Z}A = 90^o \Leftrightarrow 180^0 - 2\omega + \varphi + \varphi = 90^o \Leftrightarrow \omega - \varphi = 45^o$ (1)

Λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ, έχουμε $A\hat{Z}H = H\hat{Z}B = \varphi$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΖ και την εξωτερική του γωνία $A\hat{B}\Gamma$ έχουμε $\omega = A\hat{B}\Gamma = 3\varphi$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε $2\varphi = 45^o \Leftrightarrow \varphi = 22{,}5^o$ και $\omega = 67{,}5^o$.

Άρα έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega = 67{,}5^o$ και $\hat{A} = 180^o - 2\omega = 45^o$.

(β) Επειδή $AE \parallel Z\Gamma$ έχουμε $\Gamma\hat{Z}E = A\hat{E}Z$ (εντός εναλλάξ).

Επίσης λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ΖΕ της ΑΓ έχουμε $\Gamma\hat{Z}E = A\hat{Z}E = \varphi$.

Άρα είναι $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z = \varphi$, οπότε το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές με $AZ = AE$. Λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ΖΕ της ΑΓ έχουμε τελικά $AZ = AE = \Gamma E = \Gamma Z$.

Επίσης, λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ, έχουμε $\Gamma\hat{E}Z = A\hat{E}Z = \varphi = A\hat{Z}E$,

οπότε οι ευθείες ΑΖ και ΓΕ τεμνόμενες από την ευθεία ΖΕ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, οπότε $\Gamma E \parallel AZ$.

Επομένως το τετράπλευρο ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο που έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x^2+1)(y^2+1) + 4(x-1)(y-1) + 4(x+y-1) = 0.$$

Λύση

Μετά τις πράξεις η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(xy+1)^2+(x+y)^2=0 \Leftrightarrow xy+1=0 \text{ και } x+y=0 \Leftrightarrow xy=-1 \text{ και } y=-x$$
$$\Leftrightarrow x^2=1 \text{ και } y=-x \Leftrightarrow (x,y)=(1,-1) \text{ ή } (x,y)=(-1,1).$$

Πρόβλημα 3

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ τέτοιοι ώστε: $\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}=\alpha$.

(α) **Να εκφράσετε την παράσταση $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}$ συναρτήσει του α.**

(β) **Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του α ώστε $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\alpha$.**

Λύση

(α) Από την δεδομένη ισότητα έχουμε $\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}=\alpha \Rightarrow \frac{1}{\beta+\frac{1}{\beta}+1}=\alpha \Rightarrow \beta+\frac{1}{\beta}=\frac{1-\alpha}{\alpha}$.

Άρα έχουμε $\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta^2+\frac{1}{\beta^2}+2=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta^2+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1-2\alpha-\alpha^2}{\alpha^2}$,

μέσω της οποίας προκύπτει $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\frac{1}{\beta^2+\frac{1}{\beta^2}+1}=\frac{1}{\frac{1-2\alpha-\alpha^2}{\alpha^2}+1}=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}$.

(β) Έχουμε $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha} \Leftrightarrow 1-2\alpha=\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{3}$.

2ος τρόπος

(α) Είναι $\beta^2+\beta+1=\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε $\beta^2+1=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\beta$, και άρα $\beta^4+2\beta^2+1=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2\beta^2=\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}+1\right)\beta^2$.

Έτσι έχουμε $\beta^4+\beta^2+1=\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}\right)\beta^2=\frac{1-2\alpha}{\alpha^2}\beta^2$,

οπότε $1-2\alpha\neq 0$ και $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}$.

(β) Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\beta^4+\beta^2+1=(\beta^4+2\beta^2+1)-\beta^2=(\beta^2+1)^2-\beta^2=(\beta^2+\beta+1)(\beta^2-\beta+1),$$

οπότε $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\beta^2-\beta+1}=\alpha\cdot\frac{\beta}{\beta^2-\beta+1}$

Αφού $\alpha\neq 0$, από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\alpha \Leftrightarrow \beta=\beta^2-\beta+1 \Leftrightarrow 3\beta=\beta^2+\beta+1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{3}.$$

Σχόλια. Η παραγοντοποίηση στη λύση του (β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια ακόμη λύση στο (α) ως εξής:

Έχουμε $\frac{\beta^2-\beta+1}{\beta}=\frac{\beta^2+\beta+1}{\beta}-2=\frac{1}{\alpha}-2=\frac{1-2\alpha}{\alpha}$.

Έτσι $1-2\alpha\neq 0$ και $\frac{\beta}{\beta^2-\beta+1}=\frac{\alpha}{1-2\alpha}$,

Οπότε $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\beta^2-\beta+1}=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις δυνατές τιμές του x, αν ισχύουν οι ισότητες:

$$x=\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\gamma+\delta+\alpha}=\frac{\gamma}{\delta+\alpha+\beta},$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του 0.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε $x(\alpha+\beta+\gamma)=\delta,\ x(\beta+\gamma+\delta)=\alpha,\ x(\gamma+\delta+\alpha)=\beta,\ x(\delta+\alpha+\beta)=\gamma$, από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$3x(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(1) Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$, τότε από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $3x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

(2) Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$, τότε από την υπόθεση έχουμε $x=\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\delta}{-\delta}=-1$,

η οποία επαληθεύει και τις υπόλοιπες σχέσεις της υπόθεσης.
Άρα οι δυνατές τιμές του x είναι $\frac{1}{3}$ και -1.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\widehat{A}=36^0$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=AB$. Από το Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ και πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Delta E=A\Delta$ και τα σημεία Α και Ε να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΒΓ. Αν η ευθεία ΒΕ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ , να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ.

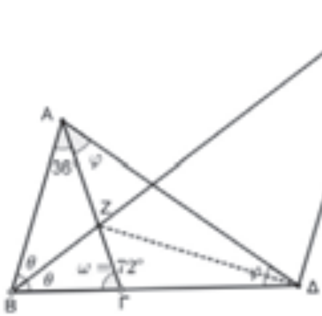
Λύση

Επειδή $\widehat{A}=36^0$ και $AB=A\Gamma$, έπεται ότι $\omega=\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=\frac{180^o-36^o}{2}=72^o$.

Επειδή $\Gamma\Delta=AB$, έπεται ότι $\qquad B\widehat{\Delta}A=\Gamma\widehat{\Delta}A=\Gamma\widehat{A}\Delta=\varphi$.

Επειδή η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ έπεται ότι $\omega=2\varphi\Rightarrow 2\varphi=72^o\Rightarrow\varphi=36^o=\widehat{A}$.

Άρα η ευθεία ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}\Delta$.



Επειδή $B\widehat{A}\Delta=\widehat{A}+\Gamma\widehat{A}\Delta=36^o+36^o=72^o=\widehat{B}$, έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $\Delta A=\Delta B$.
Επειδή $\Delta E\parallel AB$, έπεται ότι $A\widehat{\Delta}E=B\widehat{A}\Delta=72^o$, οπότε $B\widehat{\Delta}E=B\widehat{\Delta}A+A\widehat{\Delta}E=36^o+72^o=108^o$.

Επομένως από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΕ έπεται ότι: $\Delta\widehat{B}E=\Delta\widehat{E}B=\frac{180^o-108^o}{2}=36^o$.

Άρα είναι $A\widehat{B}E=\widehat{B}-\Delta\widehat{B}E=36^o=\Delta\widehat{B}E$, οπότε η ευθεία ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{B}\Delta$. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΔ το σημείο Ζ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του. Άρα η ευθεία ΔΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{\Delta}A$ και επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $\Delta A=\Delta B$ έπεται ότι η ευθεία ΔΖ είναι και ύψος, δηλαδή $\Delta Z\perp AB$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε την αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, έτσι ώστε να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x,y\neq 0$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$ και $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=b$.

Λύση (1ος τρόπος)

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος με ύψωση των δύο μελών στον κύβο και λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{3}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=a^3\Leftrightarrow\frac{3a}{xy}=a^3-b\Leftrightarrow xy=\frac{3a}{a^3-b}$.

Σημειώνουμε ότι από τις υποθέσεις είναι $\qquad a^3-b=\frac{3a}{xy}\neq 0$.

Τότε η πρώτη εξίσωση μας δίνει $x+y=axy \Leftrightarrow x+y=\frac{3a^2}{a^3-b}$.

Επομένως οι άγνωστοι x, y είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $t^2-\frac{3a^2}{a^3-b}\cdot t+\frac{3a}{a^3-b}=0$, η οποία έχει ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή

$$\Delta=\left(\frac{3a^2}{a^3-b}\right)^2-\frac{12a}{a^3-b}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{9a^4-12a(a^3-b)}{(a^3-b)^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3a^4+12ab}{(a^3-b)^2}\geq 0 \Leftrightarrow -3a^4+12ab\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3a(4b-a^3)\geq 0 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a^3\leq 4b.$$

Επομένως, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x, y\neq 0$ που ικανοποιούν τις δεδομένες σχέσεις, αν, και μόνον αν, $a^3\leq 4b$ και $a^3\neq b$.

(2ος τρόπος)

Μπορούμε να εργαστούμε ανάλογα με τον πρώτο τρόπο, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$\frac{1}{x}=\varphi, \qquad \frac{1}{y}=\omega$$

οπότε θα προκύψουν σχέσεις $\varphi+\omega=a$ και $\varphi^3+\omega^3=b$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma|=|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1|$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\mathrm{A}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2$ και $\mathrm{B}=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+1$.

Λύση (1ος τρόπος)

Επειδή οι παραστάσεις Α και Β εμφανίζουν τα τετράγωνα των όρων των δύο παραστάσεων της δεδομένης ισότητας θεωρούμε τα τετράγωνα των δύο μελών της δεδομένης ισότητας. Έχουμε:

$$|\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma|=|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1| \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma)^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1)^2 \Rightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2=$$
$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+1+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2 \Rightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+1 \Rightarrow \mathrm{A}=\mathrm{B}.$$

(2ος τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2-(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+1)=(\alpha^2-1)(\beta^2-1)(\gamma^2-1).$$

Ισχύουν οι ισότητες $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1$,

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1),$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$(\alpha^2-1)(\beta^2-1)(\gamma^2-1)=(\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1)^2=0 \Rightarrow \mathrm{A}=\mathrm{B}$$

Πρόβλημα 2

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(xy)=xf(y)+f(x)-2024x$. για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Αν $f(f(1))=1$, να βρείτε την τιμή του $f(2025)$.

Λύση

Για $y=0$, η δοθείσα σχέση δίνει: $f(0)=xf(0)+f(x)-2024x \Leftrightarrow$ (1)

$f(x)=f(0)-(f(0)-2024)x,$ (2)

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=1$, η δοθείσα σχέση δίνει: $f(y)=f(y)+f(1)-2024 \Rightarrow f(1)=2024$, οπότε από τη σχέση $f(f(1))=1$, προκύπτει ότι: $f(2024)=f(f(1))=1$.

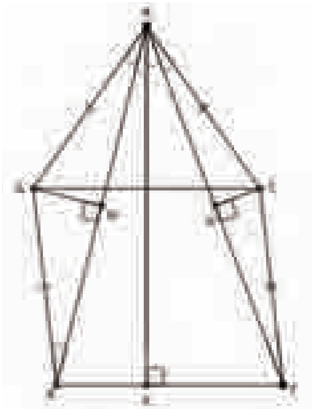
Για $x=2024$, η σχέση (1) δίνει: $f(0)=2024f(0)+1-2024^2 \Rightarrow f(0)=\frac{1-2024^2}{1-2024}=1+2024=2025$, οπότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $f(x)=2025-(2025-2024)x=2025-x \Rightarrow f(2025)=0$.

Πρόβλημα 3

Στο εξωτερικό ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ, με ΑΔ = ΔΒ και ΑΕ = ΕΓ, τέτοια ώστε $A\hat{\Delta}B = 2 \cdot A\hat{\Gamma}B$ και $A\hat{E}\Gamma = 2 \cdot A\hat{B}\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω Κ, Μ, και Ν σημεία στις πλευρές ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ τέτοια ώστε να ισχύουν: $AK \perp B\Gamma$, $\Delta M \perp AB$, και $EN \perp A\Gamma$.



Αφού το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, η ΔΜείναι διάμεσος, και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Delta B}$. Τότε $\widehat{B\Delta M} = \widehat{B\Gamma A}$, οπότε $\widehat{\Delta BA} = 90^\circ - \widehat{A\Gamma B}$. Ομοίως, $\widehat{E\Gamma A} = 90^\circ - \widehat{AB\Gamma}$. Έτσι, έχουμε:

$$\widehat{\Delta B\Gamma} + \widehat{E\Gamma B} = \left(\widehat{\Delta BA} + \widehat{AB\Gamma}\right) + \left(\widehat{E\Gamma A} + \widehat{A\Gamma B}\right) = \left(90^\circ - \widehat{A\Gamma B}\right) + \widehat{AB\Gamma} + \left(90^\circ - \widehat{AB\Gamma}\right) + \widehat{A\Gamma B} \quad = 180^\circ.$$

Συνεπώς, έχουμε: $\Delta B \parallel E\Gamma$.

Για να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΔΒ = ΕΓ. Πράγματι, από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΔΒΜ και ΓΑΚ ($\widehat{\Delta BM} = 90^\circ - \widehat{B\Gamma A} = \widehat{\Gamma AK}$), και αφού ΓΑ = 2ΓΝ, παίρνουμε: $\frac{\Delta B}{BM} = \frac{\Gamma A}{AK} = \frac{2 \cdot \Gamma N}{AK}$ (1)

Από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΕΓΝ και ΒΑΚ, και αφού $BA = 2 \cdot BM$, παίρνουμε

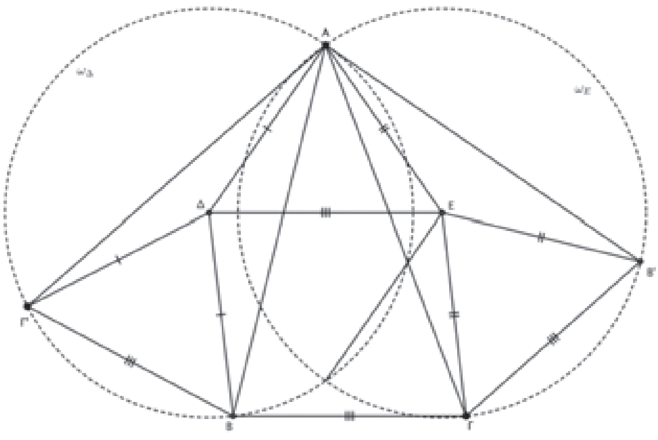
$$\frac{E\Gamma}{\Gamma N} = \frac{BA}{AK} = \frac{2 \cdot BM}{AK} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι ΔΒ = ΕΓ, όπως θέλαμε.

Σχόλιο. Οι σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν και από τον τύπο του ημιτόνου σε ορθογώνιο τρίγωνο.

(2ος τρόπος)

Έστω Γ′ σημείο στον κύκλο ω_Δ με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΑ = ΔΒ τέτοιο ώστε $\widehat{\Gamma' AB} = \widehat{BA\Gamma}$, και έστω Β′ σημείο στον κύκλο ω_E με κέντρο το Ε και ακτίνα ΕΑ = ΕΓ τέτοιο ώστε $\widehat{B' A\Gamma} = \widehat{\Gamma AB}$.



Αφού κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο, έχουμε

$$\widehat{\mathrm{A\Gamma'B}} = \frac{\widehat{\mathrm{A\Delta B}}}{2} = \widehat{\mathrm{A\Gamma B}} \quad \text{και} \quad \widehat{\mathrm{\Gamma'\Delta B}} = 2\cdot\widehat{\mathrm{\Gamma'AB}} = 2\cdot\widehat{\mathrm{BA\Gamma}}.$$

Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου, έπεται ότι $\widehat{\mathrm{\Gamma'BA}} = \widehat{\mathrm{AB\Gamma}}$, και άρα τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma'}$ και $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ίσα, από Γ-Π-Γ, με κοινή πλευρά την ΑΒ. Συνεπώς, είναι $\mathrm{\Delta A} = \mathrm{\Delta B} = R$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Ομοίως, $\mathrm{AE} = \mathrm{E\Gamma} = R$.
Παρατηρούμε ότι:

$$\widehat{\mathrm{\Delta AE}} = \widehat{\mathrm{\Delta AB}} + \widehat{\mathrm{BA\Gamma}} + \widehat{\mathrm{\Gamma AE}} = \left(90^\circ - \widehat{\mathrm{A\Gamma B}}\right) + \widehat{\mathrm{BA\Gamma}} + \left(90^\circ - \widehat{\mathrm{AB\Gamma}}\right)$$
$$= \left(180^\circ - \widehat{\mathrm{A\Gamma B}} - \widehat{\mathrm{AB\Gamma}}\right) + \widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 2\cdot\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = \widehat{\mathrm{\Gamma'\Delta B}}.$$

Αφού $\mathrm{\Gamma'\Delta} = \mathrm{\Delta B} = \mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE} = R$, τα ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{\Gamma'\Delta B}$ και $\mathrm{\Delta AE}$ είναι ίσα από Π-Γ-Π, οπότε $\mathrm{\Delta E} = \mathrm{B\Gamma'} = \mathrm{B\Gamma}$. Επομένως, το τετράπλευρο ΒΔΕΓ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, και άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 133

N57. Να προσδιορίσετε όλες τις γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: ο αριθμός $f(x)f(y)$ διαιρεί τον αριθμό

$$\boldsymbol{(1+2x)f(y)+(1+2y)f(x),\ \text{για κάθε}\ x,y\in\mathbb{R}.}$$

Λύση. Για $x=y=0$ έχουμε: $f(0)^2|2f(0) \Rightarrow f(0)^2 \le 2f(0) \Rightarrow f(0)\in\{0,1,2\}$.
Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις

(α) Αν $f(0)=0$, τότε για $y=0$ από τη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$0|f(x), \text{για κάθε } x\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)=0, \ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{N}.$$

(β) Αν $f(0)=1$, τότε για $y=0$ από τη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(x)|\big(1+2x+f(x)\big), \text{για κάθε } x\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)|(1+2x), \text{για κάθε } x\in\mathbb{N}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι ισχύει $f(k)=2k+1$, για κάποιο θετικό ακέραιο k, τότε

$f(k+1)|2k+3$ και αφού από την υπόθεση είναι $f(k+1)>f(k)=2k+1$, προκύπτει ότι $f(k+1)=2k+3$, οπότε με επαγωγή έχουμε $f(x)=2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{N}$.

(γ) Αν $f(0)=2$, τότε για $y=0$ από τη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$2f(x)|2(1+2x)+f(x), \text{για κάθε } x\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{2(1+2x)+f(x)}{2f(x)} = \frac{1+2x}{f(x)}+\frac{1}{2}\in\mathbb{N}, \text{για κάθε } x\in\mathbb{N}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $f(k)=4k+2$, για κάποιο $k\in\mathbb{N}$, τότε, αφού $f(k+1)>f(k)=4k+2$, έχουμε

$$\frac{2k+3}{f(k+1)}+\frac{1}{2}\in\mathbb{N} \Rightarrow 0<\frac{2k+3}{f(k+1)}+\frac{1}{2}<\frac{2k+3}{4k+2}+\frac{1}{2}\le 2 \Rightarrow \frac{2k+3}{f(k+1)}+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow f(k+1)=4k+6,$$

οπότε επαγωγικά προκύπτει ότι $f(x)=4x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{N}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος.

A83. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $\boldsymbol{2^{x-1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=3}$ $2^{x-1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=3$.

Λύση. Η δεδομένη εξίσωση ορίζεται για $x>0$. Έχουμε $2^{x-1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=3 \Leftrightarrow 2^x+2\cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=6$.

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2^x \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}, \text{για κάθε } x > 0. \qquad (1)$$

Επίσης, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \geq \sqrt[3]{x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $2^x + 2 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 6$, οπότε στις προηγούμενες δύο ανισότητες πρέπει να έχουμε ισότητα, δηλαδή ισοδύναμα $x = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$, που είναι η μοναδική λύση της δεδομένης εξίσωσης.

Α84. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιούν την ισότητα

$$f(xf(x) + f(y)) = f\left(f(x^2)\right) + y, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Λύση. Για $x = 0$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$f(f(y)) = f(f(0)) + y, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Για $y = 0$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$f(xf(x) + f(0)) = f(f(x^2)), \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

από την οποία, επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1, έπεται ότι:

$$xf(x) + f(0) = f(x^2), \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Για $x = 1$ στη σχέση (3)παίρνουμε $f(0) = 0$, οπότε η σχέση (2) γίνεται:

$$xf(x) = f(x^2), \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

ενώ η σχέση (2) με x αντί του y γίνεται: $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5)

Θέτοντας $f(x)$ αντί του x στη σχέση (4) έχουμε:

$$f\left(\left(f(x)\right)^2\right) = f(x)f(f(x)) = xf(x) = f(x^2), \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

από την οποία , επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1, έπεται ότι:

$$\left(f(x)\right)^2 = x^2, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, για καθένα $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f(x_0) = x_0 \text{ ή } f(x_0) = -x_0.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει ζευγάρι $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = x_0 \quad \text{και} \quad f(y_0) = -y_0.$$

Τότε η σχέση (1) με $x \longrightarrow x_0$ $y \longrightarrow y_0$, δίνει:

$$f(x_0^2 - y_0) = x_0^2 + y_0 \Rightarrow x_0^2 + y_0 = x_0^2 - y_0 \text{ ή } -x_0^2 - y_0 = x_0^2 - y_0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ή } y_0 = 0, \text{ άτοπο.}$$

Α85. Να προσδιορίσετε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοιες ώστε

$$f(1) = e \text{ και } f(x+y) = e^{3xy} f(x) f(y), \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Λύση

Έστω $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις δεδομένες συνθήκες. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a) = 0$, τότε

$$f(x) = f\big(a + (x-a)\big) = e^{3a)x-a)} f(a) f(x-a) = 0, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{άτοπο.}$$

Επομένως, έχουμε $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή επιπλέον, έχουμε την ισότητα

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = e^{\frac{3x^2}{4}}\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

έπεται ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τους λογαρίθμους των δύο μελών της δεδομένης συναρτησιακής εξίσωσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\ln f(x+y) = 3xy + \ln f(x) + \ln f(y), \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

η οποία γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$\ln f(x+y) - \frac{3(x+y)^2}{2} + 3xy = 3xy + \ln f(x) - \frac{3x^2}{2} + \ln f(y) - \frac{3y^2}{2}, \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x+y) - \frac{3(x+y)^2}{2} = \ln f(x) - \frac{3x^2}{2} + \ln f(y) - \frac{3y^2}{2}, \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \ln f(x) - \frac{3x^2}{2}$, η οποία, λόγω της σχέσης (2) ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy:

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, έπεται ότι και η συνάρτηση g είναι συνεχής, οπότε

$$g(x) = g(1)x = \left(\ln f(1) - \frac{3}{2}\right)x = -\frac{x}{2}, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln f(x) - \frac{3x^2}{2} = -\frac{x}{2}, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\ln f(x) = \frac{3x^2 - x}{2}, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{3x^2 - x}{2}}, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η συνάρτηση που βρήκαμε ικανοποιεί τις δεδομένες συνθήκες του προβλήματος.

Ασκήσεις για λύση

Α86. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιούν και τις δύο συνθήκες:

(α) $f(x + y^{2n}) = f\big(f(x)\big) + y^{2n-1} f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

Γ69. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 120^0$. Κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ ισοσκελή τρίγωνα ΡΑΒ και ΝΑΓ με $\mathrm{A\hat{P}B} = \mathrm{A\hat{N}\Gamma} = \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$. Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$\mathrm{\Theta P} = \mathrm{\Theta N} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}}{3}.$$

Ν58. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (p, q) πρώτων για τα οποία ο αριθμός $p^2 + 5pq + 4q^2$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι1. *Γεωμετρία αγάπη μου*

ΚΑΜΠΥΛΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΣΤΕΡΕΑ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

θεώρημα 1. Δίνεται μια ευθεία (ε) κι ένα ευθύγραμμο τμήμα A_1B_1, που δεν τέμνει αυτήν. Ας είναι A_2, B_2 οι προβολές, αντίστοιχα, των A_1, B_1 πάνω στην (ε), Γ το μέσο του A_1B_1, και Δ η τομή της (ε) και της μεσοκάθετης του A_1B_1. Όταν το A_1B_1 στρέφεται γύρω από την (ε), παράγεται μια κυρτή επιφάνεια. Το εμβαδό αυτής της επιφάνειας είναι:

$$S_{A1B1} = 2\cdot\pi\cdot A_2B_2\cdot\Gamma\Delta$$

θεώρημα 2. Δίνεται μια κανονική τεθλασμένη γραμμή $A_1A_2...A_\nu$ και μια ευθεία (ε) του επιπέδου της, που περνά από το κέντρο Ο της γραμμής αυτής και δεν έχει κανένα κοινό σημείο μ’ αυτήν. Ας είναι M_1, M_2, ..., M_ν οι προβολές των A_1, A_2, ..., A_ν, πάνω στην (ε) αντίστοιχα και λ το απόστημα αυτής της γραμμής. Το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται όταν η δοσμένη κανονική γραμμή στραφεί γύρω από την (ε), κατά πλήρη στροφή, δίνεται από τον τύπο

$$S_{A1A2...A\nu} = 2\cdot\pi\cdot\lambda\cdot(M_1M_2...M_\nu)$$

θεώρημα 3. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ στρέφεται γύρω από την πλευρά ΒΓ, κατά πλήρη περιστροφή. Ο όγκος του στερεού που παράγει το δοσμένο τρίγωνο, κατά την περιστροφή του, δίνεται από ον τύπο

$$V_{AB\Gamma} = (1/3).S_{A\Gamma}\,.\upsilon_\beta$$

θεώρημα 4. Δίνονται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία (ε) του επιπέδου του, που περνά από την κορυφή Β και δεν τέμνει το τρίγωνο. Ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το ΑΒΓ στραφεί γύρω από την (ε), δίνεται από τον τύπο:

$$V_{AB\Gamma} = 1/3\ \cdot S_{A\Gamma}\cdot\upsilon_\beta$$

θεώρημα 5. Δίνονται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία (ε) του επιπέδου του, που περνά από την κορυφή Β και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ. Ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το ΑΒΓ στραφεί γύρω από την (ε), δίνεται από τον τύπο

$$V_{AB\Gamma}=1/3.S_{A\Gamma}.\ \upsilon_\beta$$

Θεώρημα 6. Δίνονται, ένα τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία (ε) που ανήκει στο επίπεδο του δοσμένου τριγώνου και δεν έχει κανένα κοινό σημείο μ’ αυτό. Ας είναι Θ το βαρύκεντρο του ΑΒΓ και Θ_1 η προβολή του πάνω στην (ε). Ο όγκος του σχήματος που παράγεται από το ΑΒΓ, σε μια πλήρη περιστροφή του, γύρω από την (ε), δίνεται από τον τύπο

$$V_{AB\Gamma} = (AB\Gamma)\cdot 2\pi\cdot\Theta\Theta_1$$

Ι2. *Σύγχρονες εξελίξεις στη μαθηματική επιστήμη*

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ (Β΄ μέρος)

Τεχνητή Νοημοσύνη «αρίστευσε» στην 65η Μαθηματική Ολυμπιάδα

που πραγματοποιήθηκε στο Ηνωμένο Βασίλειο, από τις 11 έως τις 22 Ιουλίου 2024

Για μένα θα είναι μεγάλο θέμα για το ανθρώπινο είδος όταν η Τεχνητή Νοημοσύνη διατυπώσει ένα καινούργιο θεώρημα, ή όταν λύσει κάποιο από τα άλυτα, ή και το ακόμα πιο προχωρημένο όταν δημιουργήσει ένα καινούργιο μαθηματικό πεδίο. Μετά από τέτοιες στιγμές όλα θα ξαναπαιχτούν εξ αρχής.

Ρεπορτάζ: Επί του παρόντος είναι ένα θέμα και το ότι δύο μοντέλα Τεχνητής Νοημοσύνης του **Google DeepMind**, του ερευνητικού εργαστηρίου του τεχνολογικού γίγαντα, κατάφεραν να λύσουν προβλήματα μαθηματικών στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα 2024, ενώ μέχρι στιγμής μοντέλα **AI** είχαν αποτύχει σε λογικούς συλλογισμούς.
Τα μοντέλα **AlphaProof** και **AlphaGeometry 2** έλυσαν τέσσερα από τα έξι προβλήματα που τους τέθηκαν, στο πλαίσιο του φετινού διεθνούς διαγωνισμού για μαθητές Λυκείου, φτάνοντας στο επίπεδο ασημένιου Ολυμπιονίκη, κάτι που συνιστά «πρωτιά», σύμφωνα με την Google.
Ειδικότερα, το AlphaProof έλυσε δύο προβλήματα άλγεβρας και ένα πρόβλημα αριθμητικής, ενώ το AlphaGeometry 2 ένα πρόβλημα γεωμετρίας.
Ο διαγωνισμός, που διεξάγεται από το 1959, συγκεντρώνει μαθητές Λυκείου (και μερικές φορές ορισμένους εξαιρετικούς μαθητές) που επιλέγονται από περίπου 100 χώρες.

Η πρώτη έκδοση του AlphaGeometry είχε ήδη καταφέρει να λύσει 25 προβλήματα γεωμετρίας της Ολυμπιάδας από ένα σύνολο 30 επιλεγμένων ασκήσεων, έγραψε το επιστημονικό περιοδικό Nature τον Ιανουάριο.
«Αυτά τα αποτελέσματα ανοίγουν νέες προοπτικές στον τομέα των μαθηματικών συλλογισμών και δείχνει ένα μέλλον όπου μαθηματικοί και Τεχνητή Νοημοσύνη θα συνεργάζονται για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων», ανέφερε η Google σε σχετικό δελτίο Τύπου.
Τα μεγάλα γλωσσικά μοντέλα, κορυφαία προϊόντα της AI, αντιμετωπίζουν **μεγάλη δυσκολία σε τεστ λογικής**, σύμφωνα με μελέτη που δημοσιεύθηκε τον Ιούνιο στο περιοδικό Open Science της Βρετανικής Βασιλικής Εταιρείας.
Όπως διαπίστωσε, το ChatGPT 3.5 και 4 της OpenAI, το Bard της Google, το Claude 2 της Anthropic και τρεις εκδόσεις του Llama της Meta, **απάντησαν αντιφατικά** και βασίστηκαν συχνά σε παράλογους συλλογισμούς.

I$_3$. *Θέμα από τη θεωρία των αριθμών Αίνιγμα των πρώτων αριθμών ταλαιπωρεί τους μαθηματικούς επί έναν αιώνα (β΄ συνέχεια)*

Κόσκινο του Ερατοσθένη Την απόδειξη της απειρίας των πρώτων αριθμών την έδωσε ο Ευκλείδης πριν 2.000 και πλέον χρόνια, με ένα πείραμα σκέψης: Ας υποθέσουμε ότι υπήρχε πεπερασμένος αριθμός πρώτων αριθμών, με τον μεγαλύτερο να **είναι ο ρ.** Τότε όλοι οι πρώτοι αριθμοί έως τον ρ θα μπορούσαν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους και στο γινόμενο να προσθέσουμε το 1. Το άθροισμα δεν θα μπορούσε να διαιρεθεί με κανέναν από τους πρώτους αριθμούς. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα ή θα ήταν πρώτος αριθμός, ή θα είχε πρώτους παράγοντες που δεν εμφανίζονται στο σύνολο των πρώτων αριθμών έως τον ρ. Αρα, πάντα μπορούν να κατασκευαστούν επιπλέον πρώτοι αριθμοί. Κατά συνέπεια, **υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.**

Μυστήριο παραμένει η κατανομή των πρώτων αριθμών στη γραμμή των αριθμών. Κατά μέσο όρο η απόσταση μεταξύ διαδοχικών πρώτων αριθμών ισούται με τον φυσικό λογάριθμο του μικρότερου απ' αυτούς. Για το 19 η απόσταση είναι περίπου 3. Για τον πρώτο αριθμό 2.147.483.647 είναι 22, ενώ για έναν πρώτο με 183 ψηφία η απόσταση είναι 420. Ακριβώς επειδή η μέση απόσταση μεταξύ των διαδοχικών πρώτων αριθμών μεγαλώνει όσο μεγαλώνουν οι αριθμοί, **οι δίδυμοι πρώτοι,** που απέχουν μόνο έναν **ενδιάμεσο αριθμό,** είναι τόσο ενδιαφέροντες για τους μαθηματικούς. Μήπως υπάρχει ένα όριο πέρα από το οποίο δεν συναντώνται πια ***δίδυμοι πρώτοι;*** Οι περισσότεροι **ειδικοί διαφωνούν** με το ενδεχόμενο ύπαρξης ενός τέτοιου αυθαίρετου ορίου.

Πλησίασμα.

Με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, το μέχρι τώρα μεγαλύτερο ζεύγος δίδυμων πρώτων αριθμών που έχει εντοπιστεί αποτελείται από 388.342 ψηφία. Όμως η έρευνα με υπολογιστές δεν πρόκειται ποτέ να αποδείξει την απειρία των δίδυμων πρώτων. Ένας άγνωστος έως το 2013 μαθηματικός, ο **Yitang Zhang**, κατάφερε με μελέτη που δημοσίευσε να αποδείξει όχι την εικασία της απειρίας των διδύμων, αλλά ότι υπάρχουν άπειρα ζευγάρια πρώτων αριθμών οι οποίοι απέχουν λιγότερο από 70 εκατομμύρια. Η απόδειξη αυτή ήταν τεράστιο βήμα προς τα μπρος, καθώς οι μαθηματικοί ενδιαφέρονται και για άλλα ζευγάρια πρώτων, όπως εκείνα που απέχουν 4 αριθμούς και ονομάζονται ***ξαδέρφια πρώτοι αριθμοί***. Ο Zhang χρησιμοποίησε μια μεθοδολογία ανάλογη με το γνωστό από την αρχαιότητα κόσκινο του Ερατοσθένη, όπου σε έναν πίνακα με τους φυσικούς αριθμούς αρχίζει κανείς να διαγράφει τα πολλαπλάσια του πρώτου πρώτου αριθμού, δηλαδή του 2, μετά τα πολλαπλάσια του επόμενου, δηλαδή του 3, κ.ο.κ., μέχρι που στον πίνακα απομένουν μόνο οι πρώτοι αριθμοί που περιείχε. Όμως το κόσκινο του Ερατοσθένη δεν μπορεί να εφαρμοστεί για γενικές δηλώσεις σχετικά με τους πρώτους αριθμούς. Γι' αυτό ο Zhang χρησιμοποίησε μια παραλλαγή του, για να «κοσκινίσει» μόνο τους αριθμούς που διαιρούνται με μεγάλους πρώτους αριθμούς. Λίγο καιρό μετά την επιστημονική δημοσίευση του Zhang, άλλοι μαθηματικοί κατάφεραν να περιορίσουν την απόσταση από 70.000.000 σε 246, ρεκόρ που δεν έχει σπάσει μέχρι σήμερα. Αυτό σημαίνει ότι αν δεις όλα τα ζευγάρια πρώτων αριθμών που απέχουν μεταξύ τους μέχρι 246 αριθμούς, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο ζευγάρι που εμφανίζεται άπειρες φορές. Ωστόσο ***η απειρία των δίδυμων πρώτων δεν έχει αποδειχθεί ακόμα***.

Στο τέλος αυτού του άρθρου δημοσιεύουμε ενδεικτικό τμήμα της διαδικασίας εφαρμογής του «κόσκινου του Ερατοσθένη»

I$_4$. *Γκριγκόρι Πέρελμαν*

Ένας καλός συνάδελφος, μας έστειλε για δημοσίευση στο H.m. ένα αξιόλογο σημείωμα που εντόπισε δημοσιευμένο στο ηλεκτρονικό περιοδικό του Πειραιώτη Λάκη Ιγνατιάδη.

Έλυσε το πιο δύσκολο από τα 7 «επικηρυγμένα» προβλήματα. Η διάνοια που πέτυχε το ακατόρθωτο, πέταξε το 1 εκατ. ευρώ του επάθλου

Συντάκτης: ***Λάκης Ιγνατιάδης***

*Την ιστορία του Ρώσου μαθηματικού **Γκριγκόρι Πέρελμαν** την είχα διαβάσει πριν κάποια χρόνια επειδή είμαι μαθηματικός. Και καλά έκανα που τη διάβασα μιας και με εντυπωσίασε ο βίος του και οι επιλογές του σε κρίσιμες φάσεις της ζωής του. Το διευκρινίζω αυτό γιατί από άποψη μαθηματικών δεν είμαι σε θέση να καταλάβω το θεώρημα που απόδειξε ούτε φυσικά και την απόδειξή του. Θεώρησα πάντως καλό να μάθουν αυτήν την ιστορία και κάποιοι άλλοι που ενδιαφέρονται για τέτοιες ξεχωριστές ιστορίες αλλά και για τα Μαθηματικά. Έχοντας υπόψη μου ότι οι διάνοιες και μάλιστα στα Μαθηματικά τους πιο πολλούς τους αφήνουν αδιάφορους.*

Ένας ακόμα λόγος είναι κάτι για το οποίο είμαι βέβαιος, ότι δηλαδή, στους περισσότερους Έλληνες και κατά πάσα πιθανότητα και στους περισσότερους ανθρώπους, τους έχει δημιουργηθεί η εντύπωση πως τα Μαθηματικά είναι μια τελειωμένη ιστορία, που σημαίνει ότι γι' αυτούς δεν υπάρχουν κι άλλα θεωρήματα για να αποδειχθούν. Η αλήθεια είναι ότι υπάρχουν αρκετά, αλλά είναι και σχεδόν σίγουρο ότι στα επόμενα άπειρα χρόνια και εφ' όσον θα υπάρχει ο ανθρώπινος πολιτισμός, θα διατυπώνουν οι μαθηματικοί κι άλλα θεωρήματα προς απόδειξη που αν όχι όλα τα περισσότερα θα τα αποδεικνύουν νέοι στην ηλικία, άντε βαριά βαριά να πούμε μέχρι 50 ετών.

Γράφοντας τα προηγούμενα ξεφύτρωσε στο μυαλό μου αυτή η απορία. Αν θα φτάσει κάποτε εκείνη η στιγμή που ο μαθηματικός κόσμος θα σφυρίξει και μετά θα ξανασφυρίξει και πάλι θα ξανασφυρίξει λήξη στην αναζήτηση νέων θεωρημάτων, θεωρώντας πως είναι αδύνατο να βρεθούν (ή μήπως να επινοηθούν;) κι άλλα νέα θεωρήματα. Αν θα συμβεί κάτι τέτοιο θα ήθελα πολύ να ζούσα για λίγο εκείνη τη συγκλονιστική στιγμή που μετά από τόσα σφυρίγματα θα βρεθεί κάποιος που θα διατυπώσει ένα νέο θεώρημα, όπως και εκείνη τη στιγμή που θα αποδειχθεί. Μιλάμε για σεισμό μεγαλύτερο από 10 Ρίχτερ, ε;

Τέλος υπάρχει ένας ακόμα λόγος από τη μεριά μου για την ανάρτηση αυτής της ιστορίας, κάτι ας πούμε σαν ηθικό δίδαγμα, που ωραία δεν θα'ταν αν αφορούσε όλους μας; Το σίγουρο είναι πως από μόνη της η ιστορία αυτή καθ' εαυτή του Πέρελμαν είναι μια εξαίρεση στην νιοστή, τουλάχιστον ανάμεσα στους συνανθρώπους μας που έχουν ξεχωρίσει σε κάποιον τομέα, γιατί στους κοινούς θνητούς πιστεύω ότι θα ζουν έστω και λίγοι που όχι μόνο θα έχουν αρχές και αξίες αλλά και το πιο σημαντικό θα παλεύουν να ζουν τη ζωή τους βάσει αυτών. Υπάρχει όμως κάτι που με άγγιξε και που νομίζω ότι αφορά όλους μας. Κάτι που και το **τόνισε ο ίδιος** σε μία συνέντευξή του που είπε: «Δεν θα έλεγα πάντως ότι προσβλήθηκα (από τη στάση κάποιων μαθηματικών μετά που έγινε αποδεχτή η απόδειξή του), άλλοι έχουν κάνει χειρότερα. Εντάξει, υπάρχουν πολλοί μαθηματικοί που είναι λίγο – πολύ έντιμοι, αλλά σχεδόν όλοι τους είναι κομφορμιστές. Μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο έντιμοι, αλλά είναι βέβαιο ότι ανέχονται αυτούς που δεν είναι καθόλου. Τελικά δεν περνάνε για παράξενοι αυτοί που δεν έχουν ηθικούς φραγμούς. Παράξενοι θεωρούνται εκείνοι που, σαν εμένα, είναι απομονωμένοι απ' τους πολλούς…».

I_5, Ακολουθεί το άρθρο του Λ. Ιγνατιάδη

Ένα εκατομμύριο δολάρια. Αυτό είναι το έπαθλο που αποφάσισε να ορίσει το 2000 το ***Ινστιτούτο Μαθηματικών Clay*** για την επίλυση κάποιου από **τα επτά «επικηρυγμένα»** προβλήματα. Ανάμεσα σε όλα όσα ακόμα μένουν στην σκιά του ανεξερεύνητου κόσμου των μαθηματικών, υπάρχουν εφτά θρυλικά αναπόδεικτα θεωρήματα που συμβολίζουν το Έβερεστ της γνώσης και ενσαρκώνουν την απόλυτη πρόκληση. Για δεκάδες χρόνια, ακόμα και αιώνες, αυτοί οι 6 πλέον, άλυτοι γρίφοι ταλανίζουν ορισμένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά μυαλά, παραμένοντας στο βυθό της μαθηματικής άγνοιας.

Τα εν λόγω προβλήματα ήταν εφτά, από το 2002 όμως λιγόστεψαν κατά ένα. Ο πρώτος και μοναδικός έως σήμερα που κατάφερε να λύσει ένα από αυτά είναι ο Ρώσος μαθηματικός Γκριγκόρι Πέρελμαν. Έπειτα από οκτώ χρόνια προσπαθειών, ο γεννημένος το 1966 στην Αγία Πετρούπολη (πρώην Λένινγκραντ) επιστήμονας αποκωδικοποίησε το περίφημο μαθηματικό πρόβλημα, γνωστό ως **εικασία του Πουανκαρέ**. Έναν αιώνα παρά δύο χρόνια μετά τη διατύπωση της θεωρίας από τον Πουανκαρέ (1904), ο Πέρελμαν δημοσίευσε σπαστά, εντός μια διετίας και σε τρία διαφορετικά άρθρα **μια απόδειξη 473 σελίδων,** προκαλώντας φρενίτιδα στην παγκόσμια μαθηματική κοινότητα. Μέσω της απόδειξης αυτής γνωρίζουμε πότε ένα **συμπαγές αντικείμενο είναι τοπολογικά ισοδύναμο** με μία σφαίρα. Για να αντιληφθεί κανείς πόσο περίπλοκη ήταν η εικασία του Πουανκαρέ, αρκεί να αναφερθεί ότι ιδιοφυείς μαθηματικοί χρειάστηκε να **εργαστούν επί τέσσερα χρόνια** για να ελέγξουν την εγκυρότητα της απόδειξης του Πέρελμαν. Εκτιμάται ότι η επιβεβαίωση της λύσης του γρίφου έχει συμβάλει καθοριστικά στην κατανόηση που έχουμε για τον χώρο, ακόμη και στη γνώση μας για το «**σχήμα**» του σύμπαντος.

Ο Πέρελμαν είχε λάμψει στα Μαθηματικά από μικρό παιδί και σε ηλικία 16 ετών κέρδισε το χρυσό μετάλλιο στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, της Βουδαπέστης το 1982. Αφότου ολοκλήρωσε το διδακτορικό του στο Πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης, εργάστηκε για λίγο στη Ρωσία και μετακόμισε στις ΗΠΑ. Στις αρχές της δεκαετίας του '90 κλήθηκε για διαλέξεις στις ΗΠΑ, και το 1993 πήρε διετή υποτροφία για έρευνα στο πανεπιστήμιο του Berkeley.

Απέρριψε στη συνέχεια προτάσεις μόνιμης θέσης σε γνωστά Πανεπιστήμια, όπως το Princeton και γύρισε πίσω σ' ένα ερευνητικό κέντρο της Αγίας Πετρούπολης, σε μια θέση καθαρά ερευνητική. Νωρίτερα είχε φροντίσει να αποδείξει ένα άλλο θεώρημα – μπελά, την «**υπόθεση Soul**». Απορρίπτοντας μια ένδοξη Ακαδημαϊκή καριέρα σε Πανεπιστήμια πρώτης γραμμής και επιστρέφοντας σε μια ρημαγμένη χώρα με μισθό κοντά στα 100 δολάρια το μήνα, για να ζήσει με τη μητέρα του σε ένα φτωχικό δυάρι εργατικής πολυκατοικίας, έστειλε το πρώτο μήνυμα ότι η περίπτωση του ήταν εντελώς ξεχωριστή. Απλώς «ιδιόρρυθμος» ή η επιτομή του τρελού επιστήμονα; Η επιστημονική κοινότητα θα κλείνει ξεκάθαρα προς το δεύτερο χαρακτηρισμό με βάση τις μετέπειτα επιλογές του. Το 2003 παραιτείται από την ερευνητική θέση που κατείχε στο Ίδρυμα Steklov, εγκαταλείποντας τη μόνη δουλειά που είχε τότε. Και το 2006 γίνεται ο πρώτος επιστήμονας που **αρνείται να παραλάβει το Fields Medal**, την υψηλότερη διάκριση στα Μαθηματικά, αντίστοιχο του βραβείου Νόμπελ, μιας και Νόμπελ Μαθηματικών δεν υπάρχει.

☙ ❧

Επί δέκα ώρες ο πρόεδρος της Διεθνούς Ένωσης Μαθηματικών Sir John Ball προσπαθούσε να τον πείσει να παρευρεθεί τον Αύγουστο του 2006 στο Παγκόσμιο Συνέδριο Μαθηματικών στη Μαδρίτη, στην τελετή απονομής του μεταλλίου Fields. Μάταια. Ούτε η έσχατη λύση να μην πάει στη βράβευση αλλά να του σταλεί το μετάλλιο έπιασε τόπο. «Από την αρχή του διευκρίνισα ότι το βραβείο μου είναι εντελώς αδιάφορο. Δεν με ενδιαφέρουν τα λεφτά ή η φήμη και ούτε θέλω να παριστάνω το παράξενο ζώο σ' έναν ζωολογικό κήπο. Δεν είμαι ήρωας των Μαθηματικών. Ο καθένας μπορεί να καταλάβει ότι αν η απόδειξή μου είναι σωστή, τότε δεν χρειάζεται άλλη αναγνώριση. Δεν είμαι καν τόσο καλός και δεν θέλω να ασχολείται ο κόσμος μαζί μου», είχε πει τότε, προσθέτοντας ότι η συνεισφορά του στη λύση του γρίφου δεν ήταν μεγαλύτερη από αυτή του Άγγλου Ρίτσαρντ Χάμιλτον, που το 1982 εισήγαγε τη θεωρία της **ροής Ricci** σχετικά με τη **γεωμετρικότητα.**

☙ ❧

Αποκομμένος για χρόνια από τη μαθηματική κοινότητα και σε διάσταση με το επιστημονικό κατεστημένο, απαρνήθηκε ακόμα και τον πειρασμό της αποθέωσής του από τους κορυφαίους μαθηματικούς του κόσμου στην προγραμματισμένη απονομή του Fields medal στη Μαδρίτη. Αυτονόητα η μεγαλειώδης επιτυχία του και η μετέπειτα στάση του τον κατέστησαν ως τον πιο περιζήτητο επιστήμονα για συνέντευξη από τα μεγαλύτερα ειδησεογραφικά δίκτυα του κόσμου. Το καλοκαίρι του 2006 έκανε μια εξαίρεση και σε μια από τις εξαιρετικά σπάνιες συνεντεύξεις του, στο New Yorker, περιέγραψε το ιδεολογικό υπόβαθρο των επιλογών του. Δήλωσε απογοητευμένος «απ' την **ηθική στάθμη** των επιστημόνων», λέγοντας ότι όταν κατέθεσε την απόδειξή του "κάποιοι έγκυροι" μέσα στους επιστημονικούς κύκλους προσπάθησαν να την μειώσουν, αποδίδοντας τις βασικές της θέσεις σαν δουλειά άλλων.

☙ ❧

«Δεν θα έλεγα πάντως ότι προσβλήθηκα, άλλοι έχουν κάνει χειρότερα. Εντάξει, υπάρχουν πολλοί μαθηματικοί που είναι λίγο – πολύ έντιμοι, αλλά σχεδόν όλοι τους είναι κομφορμιστές. Μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο έντιμοι, αλλά είναι βέβαιο ότι ανέχονται αυτούς που δεν είναι καθόλου. Τελικά δεν περνάνε για παράξενοι αυτοί που δεν έχουν ηθικούς φραγμούς. Παράξενοι θεωρούνται εκείνοι που, σαν εμένα, είναι απομονωμένοι απ' τους πολλούς…»

Τέσσερα χρόνια αργότερα, το 2010, ο Πέρελμαν θα αφήσει για άλλη μία φορά τους πάντες με το στόμα ανοιχτό, περιφρονώντας μετά τη δόξα και το χρήμα. Με την ατάκα «Ξέρω πώς να κυβερνήσω το Σύμπαν. Γιατί να τρέχω πίσω από ένα εκατομμύριο;», αρνήθηκε το βραβείο του ενός εκατομμυρίου ευρώ από το Ινστιτούτο Μαθηματικών Clay, που έχει θεσπίσει αυτό το οικονομικό κίνητρο για την επίλυση των επτά «επικηρυγμένων» προβλημάτων.

Ο μαθηματικός με τη μακριά γενειάδα και το **αφηρημένο ύφος**, που έχει χαρακτηριστεί ο «ευφυέστερος άνθρωπος στον κόσμο», είναι μάλλον η καλύτερη απόδειξη ότι η **συνταγή της ευτυχίας** δεν περιλαμβάνει απαραίτητα έναν κατάλογο **υλικών** απολαύσεων…

Πηγές: *Wikipedia, geniuses.club, hea.edu.gr, menshouse.gr/prosopa*

Ι6. Ένα σημαντικό βήμα προς τη λύση της εικασίας των Διδύμων πρώτων αριθμών

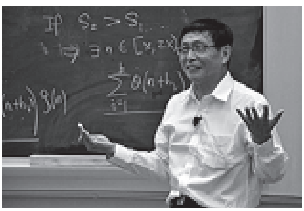
*Συντάκτης: **Γιώργος Καρουζάκης***

Ο μαθηματικός **Yitang Zhang** από το πανεπιστήμιο New Hampsire μοιάζει να έχει κάνει ένα μεγάλο βήμα στην επίλυση ενός από τα διασημότερα προβλήματα στην ιστορία των Μαθηματικών, την περίφημη εικασία των Διδύμων Πρώτων

Δίδυμοι πρώτοι ονομάζονται οι πρώτοι αριθμοί που η διαφορά τους είναι 2. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 11 και 13, 17 και 19 και 2549, 2551 είναι δίδυμοι πρώτοι αριθμοί. Για να βρεθεί λύση στην εικασία των Διδύμων Πρώτων θα πρέπει να αποδειχτεί πως υπάρχουν άπειροι πρώτοι **p** τέτοιοι ώστε και ο αριθμός **p + 2** να είναι πρώτος. Σημειώνεται ότι 2 είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο πρώτων, καθώς αν ο p είναι πρώτος τότε θα είναι περιττός (με μοναδική εξαίρεση τον αριθμό 2) και άρα ο p+1 θα είναι άρτιος και άρα σύνθετος αριθμός. Το πρόβλημα των Διδύμων Πρώτων εικάζει ότι υπάρχουν απεριόριστα ζεύγη, αλλά κανείς μέχρι σήμερα δεν ήταν σε θέση να το αποδείξει. Το 2005 μια ομάδα από τρεις μαθηματικούς έδειξε ότι ο αριθμός των πρώτων ζευγών με διαφορά 16 μονάδες είναι άπειρος. Το πρόβλημα, όμως, ήταν ότι η **απόδειξή** τους βασίστηκε σε μια **άλλη αναπόδεικτη εικασία**.

Ο φίλος της στήλης Γρηγόρης Θοδωρόπουλος μας έστειλε ένα σύντομο σημείωμα σχετικά με τον μαθηματικό Yitang Zhang

Ο Yitang Zhang φαίνεται ότι έχει καταλήξει τώρα σε μια απόδειξη που δείχνει ότι ο αριθμός των ζευγών των πρώτων αριθμών με διαφορά 70 εκατομμύρια μονάδες είναι άπειρος. Η ορθότητα της απόδειξής του ερευνάται, προκειμένου να δημοσιευτεί στην επιθεώρηση Annals of Mathematics. Αν η απόδειξή του είναι σωστή θα αποτελέσει σημαντικό βήμα στη διαδικασία επίλυσης του γνωστού προβλήματος.



Αν και 70 εκατομμύρια μονάδες μοιάζει τεράστιος αριθμός, η ύπαρξη ενός μετρήσιμου ορίου, ανεξαρτήτως του μεγέθους του, σηματοδοτεί ότι οι διαφορές μεταξύ των διαδοχικών αριθμών δεν συνεχίζουν να αυξάνονται αενάως. «Το άλμα από τις 2 έως τις 70 εκ. μονάδες δεν είναι τίποτα, αν συγκρίνουμε την απόσταση ανάμεσα στις 70 εκ. μονάδες και το άπειρο», λένε οι συνάδελφοι του Yitang Zhang. Μέχρι στιγμής, πάντως, όσοι έχουν μελετήσει την απόδειξη του μαθηματικού δεν έχουν εντοπίσει κάποιο πρόβλημα. Θα παρακολουθούμε τις εξελίξεις και θα σας ενημερώνουμε. *Θα μας βοηθήσετε;*

Ένα πρόβλημα για σας

«Ένας ψαράς χρειάστηκε να υπολογίσει πόσα ψάρια, κατάλληλα γι ψάρεμα, βρίσκονται στη λίμνη. Έριξε ένα δίχτυ με διαλεγμένες από πριν τις διαστάσεις των οπών, και ύστερα το τράβηξε και μέτρησε τα ψάρια που είχε πιάσει. Βρήκε 38 ψάρια. Ο ψαράς τα σημάδεψε όλα και τα ξανάριξε στο νερό.

Την άλλη μέρα έριξε το ίδιο δίχτυ κι έπιασε 53 ψάρια, από τα οποία τα 2 ήταν σημαδεμένα. Με τα στοιχεία αυτά, ο ψαράς βρήκε πόσα, κατά προσέγγιση, ψάρια κατάλληλα με το δίχτυ αυτό έχει η λίμνη. Πόσα, λοιπόν, ψάρια έχει η λίμνη;»

(*η λύση στο επόμενο*)

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις στην απόλυτη τιμή, στις εξισώσεις και τις ανισώσεις

Τσαβές Χρήστος Παράρτημα Ε.**Μ.Ε. Λάρισας**

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για να δώσουμε την έννοια της απόστασης ενός αριθμού από το μηδέν αλλά και την απόσταση δύο αριθμών στην αριθμογραμμή (άξονα πραγματικών αριθμών).

- *Η απόσταση του αριθμού α από το μηδέν είναι* $|\alpha|$ *και*
- *Η απόσταση δύο αριθμών α και β είναι* $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

Ο λογισμός με τις απόλυτες τιμές γίνεται με γνώμονα το πρόσημο της παράστασης που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή αφού $|A(x)|=\begin{cases} A(x) & ,\alpha\nu\ A(x)\geq 0 \\ -A(x) & ,\alpha\nu\ A(x)\leq 0 \end{cases}$

Στο άρθρο αυτό δίνουμε μερικές ασκήσεις για την εμπέδωση της έννοιας της απόλυτης τιμής καθώς και μερικές εξισώσεις και ανισώσεις που περιέχουν ή όχι απόλυτες τιμές.

Άσκηση 1η:

Να αποδείξετε ότι:

α) $1<\sqrt{\pi}<2$

β) ο αριθμός $\sqrt{\pi}$ **είναι πιο κοντά στο 2 από ό,τι στο 1**

Λύση:

α) Αρκεί να δείξουμε ότι: $1^2<\left(\sqrt{\pi}\right)^2<2^2$ δηλαδή $1<\pi<4$ που ισχύει!

β)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$d_1=d\left(\sqrt{\pi},2\right)<d_2=d\left(\sqrt{\pi},1\right)$$

αρκεί $\left|\sqrt{\pi}-2\right|<\left|\sqrt{\pi}-1\right|$ αρκεί $2-\sqrt{\pi}<\sqrt{\pi}-1$ αρκεί $2\sqrt{\pi}>3$ αρκεί $4\pi>9$ που ισχύει!

που ισχύει.

Άσκηση 2η:

Αν $|x|<1$ **και** $|y|<\frac{1}{5}$**, να δείξετε ότι** $|2x+5y|<3$**.**

Λύση:

1ος τρόπος:

$$|2x+5y|\leq|2x|+|5y|=2|x|+5|y|<2\cdot1+5\cdot\frac{1}{5}=3$$

2ος τρόπος:

$$\left.\begin{array}{l}|x|<1\\ |y|<\frac{1}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-1<x<1\\ -\frac{1}{5}<y<\frac{1}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-1<x<1\\ -1<5y<1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}-2<2x<2\\ -1<5y<1\end{array}\right\}\Rightarrow-3<2x+5y<3\Rightarrow|2x+5y|<3.$$

Άσκηση 3η:

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $|x+2|=|x|-2$ **(1) έχει άπειρες λύσεις στο** $\mathbb{R}$**.**

Λύση:

Επειδή $|x+2|\geq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για να έχει λύση η εξίσωση πρέπει και αρκεί να ισχύει ότι $|x|-2\geq0$.

Όμως, $|x|-2\geq0\Leftrightarrow|x|\geq2\Leftrightarrow x\leq-2$ ή $x\geq2$.

- Αν $x\geq2$ τότε $(1)\Leftrightarrow x+2=x-2\Leftrightarrow0\cdot x=-4$, που είναι αδύνατη.
- Αν $x\leq-2$ τότε $(1)\Leftrightarrow-x-2=-x-2\Leftrightarrow0\cdot x=0$ που είναι αόριστη και ταυτοτική και επαληθεύεται για κάθε $x\leq-2$

Άρα η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις, κάθε πραγματικό αριθμό x με $x\leq-2$.

Άσκηση 4η:

Έστω οι $\alpha,\beta>0$ **με** $\alpha\beta=1$**.**

Να αποδείξετε ότι $|\alpha-1|+|\beta-1|=|\alpha-\beta|$ **(1).**

Λύση:

- Αν $\alpha=1$ τότε $\beta=1$ οπότε η σχέση (1) ισχύει
- Αν $\alpha<1$ τότε $\alpha\cdot\beta<\beta$ δηλαδή $\beta>1$ οπότε $\alpha<\beta$ και η σχέση (1) γίνεται: $-\alpha+1+\beta-1=-\alpha+\beta$ που ισχύει.
- Αν $\alpha>1$ τότε $\alpha\cdot\beta>\beta$ δηλαδή $\beta<1$ οπότε $\alpha>\beta$ και η σχέση (1) γίνεται:

$\alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta$ που ισχύει.

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$|\alpha-1|+|\beta-1|=|\alpha-\beta|.$$

Άσκηση 5η :

Να λυθεί η εξίσωση $|x^2-3x+1|+x-1=0$, $x\in R$.

Λύση:

Έχουμε $|x^2-3x+1|+x-1=0 \Leftrightarrow |x^2-3x+1|=1-x$

Για να έχει λύση η εξίσωση πρέπει και αρκεί $1-x\geq 0$ δηλαδή $x\leq 1$. Τότε έχουμε:

$x^2-3x+1=1-x$ ή $x^2-3x+1=x-1 \Leftrightarrow$

$x^2-2x=0$ ή $x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow$ $x=0$ ή $x=2$ ή

$x=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$ ή $x=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

Οι ρίζες $x=2$ και $x=2+\sqrt{2}$ απορρίπτεται, αφού $2+\sqrt{2}>1$. Άρα ρίζες είναι οι: $x=0$, $x=2-\sqrt{2}$.

Άσκηση 6η:

Δίνεται η παράσταση $A=|x-3|+|x-8|$, με $x\in R$

α) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης A.

β) Να δειχθεί ότι υπάρχουν άπειρες τιμές του x για τις οποίες η παράσταση A παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση:

α) Επειδή ισχύει ότι $|\alpha|+|\beta|\geq|\alpha+\beta|$ και $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$, έχουμε ότι:

$$A=|x-3|+|x-8|=|x-3|+|8-x|\geq|x-3+8-x|=5.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι ίση με 5, αφού υπάρχει τιμή του x (π.χ. $x=3$) για την οποία $A=5$

β) Παίρνοντας περιπτώσεις για το πρόσημο των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα έχουμε ότι:

x	$-\infty$		3		8		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	

- Αν $x\leq 3$ τότε
  $A=|x-3|+|x-8|=-x+3-x+8=-2x+11$
- Αν $3<x\leq 8$ τότε
  $A=|x-3|+|x-8|=x-3-x+8=5$
- Αν $x>8$ τότε
  $A=|x-3|+|x-8|=x-3+x-8=2x-11$

Άρα:

$$A=\begin{cases}-2x+11, & \text{αν } x<3\\ 5\quad, & \text{αν } 3\leq x\leq 8\\ 2x-11, & \text{αν } x>8\end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η παράσταση A παίρνει την ελάχιστη τιμή της (το 5) για κάθε $x\in[3,8]$.

Άσκηση 7η:

Να βρεθεί η γραμμή που διαγράφουν τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου με $x,y\in\mathbb{R}$, που ικανοποιούν την σχέση $|x^{2024}-y|+y=0$ (1).

Λύση:

$(1)\Leftrightarrow y=-|x^{2024}-y| \overset{y\leq 0}{\Leftrightarrow} y=-(x^{2024}-y)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{2024}=0\Leftrightarrow x=0$

Άρα τα σημεία $M(x,y)$ είναι της μορφής $M(0,y)$ με $y\leq 0$, δηλαδή τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα Oy' μαζί με την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Σημείωση:

Στη παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να ζητηθεί να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου που ικανοποιούν την συνθήκη $|x^{2024}-y|+y=0$. Στη περίπτωση αυτή η λύση θα ήταν η ίδια ακριβώς.

Άσκηση 8η :

Για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in R$, ισχύει η σχέση:

$$2|\alpha|+|\alpha\beta|=2\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta+1 \qquad (1).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\neq 0$ και ότι οι αριθμοί α,β είναι ομόσημοι.

β) Να βρείτε τους α,β που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση.

Λύση:

α) Αν $\alpha\beta=0$ η σχέση (1) γίνεται:

$$2\alpha^2-2|\alpha|+1+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha^2-2|\alpha|+1+\beta^2=0\Leftrightarrow$$

$$(|\alpha|-1)^2+\alpha^2+\beta^2=0,$$

που δεν μπορεί να ισχύει για καμία τιμή των α,β

Άρα $\alpha\beta\neq 0$.

Η σχέση (1) γράφεται

$$\alpha\beta+|\alpha\beta|=2\alpha^2+\beta^2-2|\alpha|+1\Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta+|\alpha\beta|=\alpha^2+\beta^2-2|\alpha|+1+\alpha^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta+|\alpha\beta|=(|\alpha|-1)^2+\alpha^2+\beta^2.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha\beta<0$, τότε $|\alpha\beta|=-\alpha\beta$, οπότε προκύπτει ότι

$$(|\alpha|-1)^2+\alpha^2+\beta^2=0,$$

άτοπο, αφού

$$(|\alpha|-1)^2+\alpha^2+\beta^2>0 \text{ για κάθε } \alpha,\beta.$$

Άρα $\alpha\beta>0$, δηλαδή οι α,β είναι ομόσημοι.

β) Επειδή $\alpha\beta>0 \Leftrightarrow |\alpha\beta|=\alpha\beta$, έχουμε ότι

$$2\alpha\beta=\alpha^2+\alpha^2+\beta^2-2|\alpha|+1 \Leftrightarrow$$
$$(|\alpha|-1)^2+(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$|\alpha|-1=0 \text{ και } \alpha-\beta=0,$$

Οπότε προκύπτει ότι $\alpha=\pm 1$ και $\alpha=\beta$, άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $\alpha=1$ και $\beta=1$ ή $\alpha=-1$ και $\beta=-1$

Άσκηση 9η:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{|x|-2\sqrt{|x|-1}}.$$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να γραφεί ο τύπος της συνάρτησης χωρίς απόλυτα.

Λύση:

α) Πρέπει και αρκεί:

$$|x|-1\ge 0 \text{ και } |x|-2\sqrt{|x|-1}\ge 0.$$

Όμως:

- $|x|-1\ge 0 \Leftrightarrow |x|\ge 1 \Leftrightarrow x\le -1 \text{ ή } x\ge 1$ και
- $|x|-2\sqrt{|x|-1}\ge 0 \Leftrightarrow |x|\ge 2\sqrt{|x|-1} \Leftrightarrow$

$$x^2\ge 4(|x|-1) \Leftrightarrow x^2\ge 4|x|-4 \Leftrightarrow$$
$$x^2-4|x|+4\ge 0 \Leftrightarrow (|x|-2)^2\ge 0$$

που ισχύει για κάθε $x\in R$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

β) Ισχύει ότι

$$f(x)=\sqrt{|x|-2\sqrt{|x|-1}}=\sqrt{|x|-1-2\sqrt{|x|-1}+1}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{|x|-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{|x|-1}-1\right|.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο της παράστασης μέσα στο απόλυτο:

- $\sqrt{|x|-1}-1\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|-1}\ge 1 \Leftrightarrow |x|-1\ge 1 \Leftrightarrow$
  $|x|\ge 2 \Leftrightarrow x\le -2$ ή $x\ge 2$.
- $\sqrt{|x|-1}-1<0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|-1}<1 \Leftrightarrow |x|-1<1 \Leftrightarrow$
  $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Παίρνοντας υπόψη και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης που είναι $A_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ προκύπτει τελικά ότι:

$$f(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{|x|-1}, & \text{αν } x\in(-2,-1]\cup[1,2) \\ \sqrt{|x|-1}-1, & \text{αν } x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} \sqrt{-x-1}-1, & \text{αν } x\in(-\infty,-2] \\ 1-\sqrt{-x-1}, & \text{αν } x\in(-2,-1] \\ 1-\sqrt{x-1}, & \text{αν } x\in[1,2) \\ \sqrt{x-1}-1, & \text{αν } x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

Άσκηση 10η:

Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x που ικανοποιούν την ισότητα

$$|x^5+x^3+1|+|x^5+2x^4+2x^3|=2x^4+x^3-1 \quad (1)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι: $|x|\ge x$ και $|x|\ge -x$ για κάθε $x\in R$, δηλαδή $|x|-x\ge 0$ και $|x|+x\ge 0$ για κάθε $x\in R$. Επίσης έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow |x^5+x^3+1|+|x^5+2x^4+2x^3|-2x^4-x^3+1=0$$
$$\Leftrightarrow |x^5+x^3+1|+(x^5+x^3+1)+|x^5+2x^4+2x^3|-$$
$$-(x^5+2x^4+2x^3)=0 \quad (2).$$

Όμως, $|x^5+x^3+1|+(x^5+x^3+1)\ge 0$ και

$|x^5+2x^4+2x^3|-(x^5+2x^4+2x^3)\ge 0$.

Οπότε για να αληθεύει η σχέση (2) ως ισότητα πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$|x^5+x^3+1|+(x^5+x^3+1)=0 \quad (3) \quad \text{και}$$
$$|x^5+2x^4+2x^3|-(x^5+2x^4+2x^3)=0 \quad (4)$$

Όμως,

$$(3)\Leftrightarrow |x^5+x^3+1|+(x^5+x^3+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$|x^5+x^3+1|=-(x^5+x^3+1)\Leftrightarrow \boxed{x^5+x^3+1\le 0} \quad (5)$$

και $(4)\Leftrightarrow |x^5+2x^4+2x^3|-(x^5+2x^4+2x^3)=0 \Leftrightarrow$

$$|x^5+2x^4+2x^3|=(x^5+2x^4+2x^3)\Leftrightarrow$$
$$x^5+2x^4+2x^3\ge 0 \Leftrightarrow x^3(x^2+2x+2)\ge 0 \Leftrightarrow x^3\ge 0$$

$\Leftrightarrow \boxed{x\ge 0}$ (6), αφού ισχύει ότι

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$, για κάθε $x\in R$

Όμως αν $x\geq 0$, από την σχέση (2) προκύπτει ότι $x^5+x^3+1>0$, άτοπο!

Οπότε δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (3) και (4), άρα δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x τέτοιοι ώστε

$$\left|x^5+x^3+1\right|+\left|x^5+2x^4+2x^3\right|=2x^4+x^3-1.$$

Άσκηση 11η:

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

Λύση:

i) $f(x)=x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=$

$(x+1)^2+2\geq 2$, γιατί για κάθε $x\in R$ ισχύει

$(x+1)^2\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2+2\geq 2$.

Άρα $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in R$

ii) $\sqrt{f(x)-2}\leq 2 \overset{f(x)\geq 2}{\Leftrightarrow} f(x)-2\leq 6\Leftrightarrow f(x)\leq 6\Leftrightarrow$

$x^2+2x+3\leq 6\Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0\Leftrightarrow$

$x\leq -3$ ή $x\geq 1$.

Άσκηση 12η:

Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $K=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1$, για τις διάφορες τιμές των $x,y\in R-\{0\}$.

Λύση:

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν x,y είναι ομόσημοι, δηλαδή $x>0$ και $y>0$ ή $x<0$ και $y<0$, τότε $\frac{x}{y}>0$ οπότε έχουμε $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ και τότε η παράσταση $K\geq 3>0$.
- Αν x,y είναι ετερόσημοι, δηλαδή $x>0$ και $y<0$ ή $x<0$ και $y>0$, τότε $\frac{x}{y}<0$ οπότε έχουμε $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq -2$ και τότε η παράσταση $K\leq -1<0$.

Άσκηση 13η:

Αν $x=\frac{\alpha}{|\alpha|+|\beta|}$, $y=\frac{\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ με $\alpha\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\geq 4$.

Λύση:

$$|x|=\left|\frac{\alpha}{|\alpha|+|\beta|}\right|=\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\Rightarrow\frac{1}{|x|}=\frac{|\alpha|+|\beta|}{|\alpha|}\Rightarrow\frac{1}{|x|}=1+\frac{|\beta|}{|\alpha|}$$

Όμοια προκύπτει $\frac{1}{|y|}=1+\frac{|\alpha|}{|\beta|}$, οπότε

$$\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}=1+\frac{|\beta|}{|\alpha|}+1+\frac{|\alpha|}{|\beta|}=2+\frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}\geq 4$$

Άσκηση 14η:

Ένας οδηγός κινούμενος στην Εθνική οδό Αθηνών – Λαμίας με το αυτοκίνητό του με σταθερή ταχύτητα υ, διένυσε μια απόσταση 240 km. Αν η ταχύτητά του ήταν κατά 20 km/h μεγαλύτερη, θα διένυε την ίδια απόσταση σε χρόνο λιγότερο κατά 1 ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα υ.

Λύση:

Έστω t ο χρόνος που χρειάστηκε το αυτοκίνητο για να διανύσει την απόσταση των 240 Km.

Γνωρίζουμε από την Φυσική ότι: $\upsilon=\frac{s}{t}$, άρα $\upsilon\cdot t=240$ (1). Αν η ταχύτητά του ήταν $(\upsilon+20)$ $\frac{Km}{h}$, ο χρόνος που θα χρειαζόταν είναι $(t-1)$ ώρες. Άρα $(\upsilon+20)\cdot(t-1)=240$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε:

$\cancel{\upsilon\cdot t}-\upsilon+20t-20=\cancel{240}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$-\upsilon+20\cdot\frac{240}{\upsilon}-20=0\Leftrightarrow -\upsilon^2-20\upsilon+4800=0\Leftrightarrow$

$\upsilon^2+20\upsilon-4800=0$.

$\Delta=20^2+4\cdot 1\cdot 4800=19600$

$\upsilon_{1,2}=\frac{-20\pm\sqrt{19600}}{2}=\frac{-20\pm 140}{2}=60$ ή -80

$\upsilon_1=60\frac{Km}{h}$, δεκτή, $\upsilon_2=-80\frac{Km}{h}$, απορρίπτεται.

Τυπογραφική διόρθωση: Στο τεύχος **133** στην σελίδα **34** να γραφεί στην **Α4i** ψευδής και στην **Α5** στο **Β(1η)** το $y<0$.

Παράλληλες Ευθείες - Παραλληλόγραμμα

Ντόρβας Νίκος

Άσκηση 1η. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ (αντίστοιχα) τέτοια ώστε $ΑΕ = ΒΖ$. Να αποδείξετε ότι:

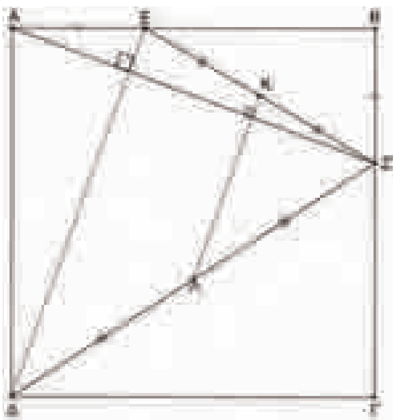
α) $ΑΖ = ΔΕ$.

β) $ΑΖ \perp ΔΕ$.

γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΕΖ και Λ το μέσο της ΔΖ να δειχθεί ότι: $ΚΛ \perp ΑΖ$.

Λύση:

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΕ ($Δ\hat{Α}Ε = 90°$) και ΑΒΖ ($Α\hat{Β}Ζ = 90°$) είναι ίσα αφού έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (διότι από υπόθεση έχουν $ΑΕ = ΒΖ$ και $ΑΔ = ΑΒ$ και ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ). Επομένως τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων ΔΑΕ και ΑΒΖ είναι ίσα, άρα: $ΑΖ = ΔΕ$ (1).



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΔΑΕ και ΑΒΖ έχουμε ότι $Β\hat{Α}Ζ = Α\hat{Δ}Ε$ (2). Για να δείξουμε ότι $ΑΖ \perp ΔΕ$, αρκεί να δείξουμε ότι $Β\hat{Α}Ζ + Α\hat{Ε}Δ = 90°$. Παρατηρούμε ότι::

$$Β\hat{Α}Ζ + Α\hat{Ε}Δ \overset{(2)}{=} Α\hat{Δ}Ε + Α\hat{Ε}Δ = 90°,\ \text{άρα}\ ΑΖ \perp ΔΕ.$$

γ) Στο τρίγωνο ΔΖΕ, τα σημεία Λ και Κ είναι μέσα των πλευρών ΔΖ και ΕΖ αντίστοιχα, οπότε $ΚΛ \parallel ΔΕ$. Επομένως $ΚΛ \perp ΑΖ$ (διότι $ΚΛ \parallel ΔΕ$ και $ΑΖ \perp ΔΕ$).

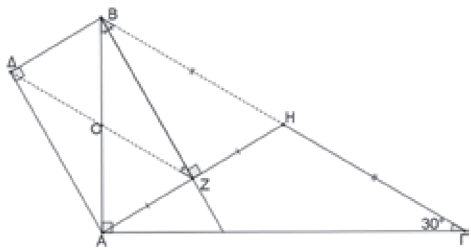
Άσκηση 2η. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ είναι η διπλάσια από την ΑΒ. Προβάλουμε το Α στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $Α\hat{Β}Γ$. Αν Ζ, Δ οι προβολές αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΖ \parallel ΒΓ$.

β) Το σημείο Ζ είναι μέσο της ΑΗ και Η μέσο της ΒΓ, όπου Η το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΓ.

γ) Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων ΑΒΗ και ΑΗΓ.

Λύση: α) Το ΔΒΖΑ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ως τετράπλευρο με τρεις ορθές γωνίες: $Α\hat{Ζ}Β = Ζ\hat{Β}Δ = Β\hat{Δ}Α = 1L$ (αφού Δ, Ζ προβολές και $Ζ\hat{Β}Δ = 90°$ ως γωνία που σχηματίζεται από τις διχοτόμου δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).



Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΔΖ και ΑΒ του ΔΒΖΑ, έπεται ότι $Ο\hat{Β}Ζ = Ο\hat{Ζ}Β$ (1), ως προσκείμενες του ισοσκελούς τριγώνου ΟΒΖ με $ΟΒ = ΟΖ$ (αφού οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔΒΖΑ είναι ίσες και διχοτομούνται στο σημείο Ο).

Όμως $A\hat{B}Z = H\hat{B}Z$ (2) αφού ΒΖ η (εσωτερική) διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$. Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $H\hat{B}Z = O\hat{Z}B$. Έπεται ότι $B\Gamma \parallel \Delta Z$ αφού τεμνόμενες από τη ΒΖ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΗ, η ΒΖ είναι διχοτόμος (από υπόθεση) και ύψος (αφού $BZ \perp AH$). Άρα είναι ισοσκελές και Ζ μέσο της ΑΗ. Αφού το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές θα ισχύει ότι:

$$AB = BH \overset{2AB=B\Gamma}{\Leftrightarrow} \frac{B\Gamma}{2} = BH, \text{ άρα Η μέσο της ΒΓ.}$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($B\hat{A}\Gamma = 90°$) ισχύει ότι $B\Gamma = 2AB$, άρα $A\hat{\Gamma}B = 30°$. Άρα στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\hat{B}\Gamma = 90° - A\hat{\Gamma}B = 60°$. Οπότε αφού το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές θα ισχύει: $B\hat{A}H = B\hat{H}A = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$ (ως προσκείμενες στη βάση ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΗ). $\Gamma\hat{A}H = 90° - B\hat{A}H = 30°$ (ως συμπληρωματικές) και $A\hat{H}\Gamma = 180° - A\hat{H}B = 120°$ (ως παραπληρωματικές).

Άσκηση 3η. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (με $AB = A\Gamma$) και έστω Ε τυχαίο σημείο της διαμέσου ΑΜ. Φέρνουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ (προς το ημιεπίπεδο που ανήκει το σημείο Α) η οποία τέμνει την προέκταση της ΒΕ στο σημείο Δ. Αν επιπλέον θεωρήσουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΔΖ, να αποδείξετε ότι:

α) **$\Gamma\Delta = 2EM$.**

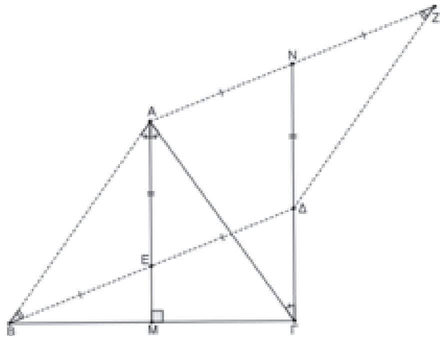
β) **Το τετράπλευρο ΑΝΔΕ είναι παρ/μο.**

γ) **Η Γx τέμνει την ΑΖ στο μέσο της Ν.**

Λύση: α) Η ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, άρα είναι και ύψος και ισχύει ότι $AM \perp B\Gamma$. Τότε $AM \parallel \Gamma x$ (αφού $AM \perp B\Gamma$ και $\Gamma x \perp B\Gamma$) ως κάθετες στην πλευρά ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι $ME \parallel \Gamma\Delta$ με Μ μέσο της ΒΓ. Άρα το Ε είναι μέσο της ΒΔ.

Στο τρίγωνο ΒΓΔ, το ΕΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΒΔ, άρα $\Gamma\Delta = 2EM$.



β) Το τετράπλευρο ΑΕΔΝ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες (διότι $AE \parallel \Delta N$ και $AN \parallel \Delta E$).

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $AZ = 2AN$. Αφού το ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι:

$$AZ = B\Delta \overset{BE=E\Delta}{\Leftrightarrow} AZ = 2E\Delta \overset{E\Delta=AN}{\Leftrightarrow} AZ = 2AN.$$

Άσκηση 4η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο στο εσωτερικό του, τέτοιο ώστε $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}A$. Φέρουμε $O\Delta \perp AB$ και $OE \perp A\Gamma$. Αν Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΟΒ και ΟΓ (αντίστοιχα), να αποδειχθεί:

α) **Το τετράπλευρο ΟΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο.**

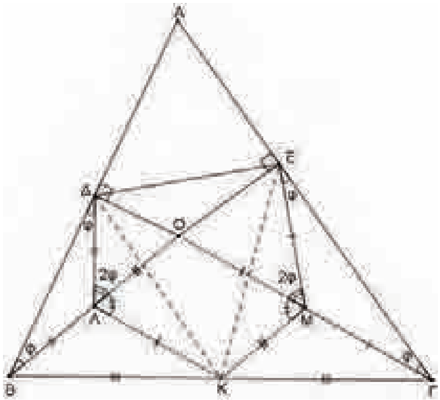
β) **$\Delta\hat{\Lambda}K = E\hat{M}K$.**

γ) **$K\hat{\Delta}E = K\hat{E}\Delta$.**

Λύση: α) Στο τρίγωνο ΒΟΓ, το ΚΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΟΓ και ΒΓ, άρα:

$$KM \overset{\parallel}{=} \frac{OB}{2} \Leftrightarrow KM \overset{\parallel}{=} O\Lambda \ (1), \text{ αφού } B\Lambda = \Lambda O = \frac{OB}{2}.$$

Έπεται ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΟ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι πλευρές ΚΜ και ΟΛ είναι ίσες και παράλληλες.



β) Φέρνουμε τις ΔΛ και ΕΜ. Επιπλέον $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}A = \varphi$ (από υπόθεση). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ ($O\hat{\Delta}B = 90°$), η ΔΛ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ισχύει: $\Delta\Lambda = \dfrac{OB}{2}$, οπότε $\Delta\Lambda = O\Lambda = B\Lambda$ (2). Από την (2), έπεται ότι $\Delta\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Delta}B = \varphi$ (3) (ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΟΒΔ, με $\Delta\Lambda = B\Lambda$). Οπότε $\Delta\hat{\Lambda}O = \Delta\hat{B}\Lambda + \Lambda\hat{\Delta}B \overset{(3)}{=} 2\varphi$ (4) ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΛ.

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΟ ($\Gamma\hat{E}O = 90°$) προκύπτει ότι $EM = OM = \Gamma M$ (5) (αφού $EM = \dfrac{O\Gamma}{2}$), άρα $M\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}M = \varphi$ (6).

Συνεπώς $E\hat{M}O = M\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}M = 2\varphi$ (7), ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΓΜΕ. Από το ερώτημα (α) ισχύει ότι $O\hat{\Lambda}K = O\hat{M}K$ (8), ως απέναντι γωνίες του παρ/μου ΟΚΛΜ.

Από τις σχέσεις (4), (7) και (8) προκύπτει ότι:

$$O\hat{\Lambda}K = O\hat{M}K \overset{(4),(7)}{\Leftrightarrow} O\hat{\Lambda}K + \Delta\hat{\Lambda}O = O\hat{M}K + E\hat{M}K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\hat{\Lambda}K = E\hat{M}K \ (9)$$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές με $K\Delta = KE$. Από το παραλληλόγραμμο ΟΛΚΜ έχουμε ότι: $K\Lambda = OM \overset{(5)}{\Leftrightarrow} K\Lambda = EM$ (10).

Επιπλέον από τις (1), (2) έπεται ότι $\Delta\Lambda = KM$ (11). Έπεται ότι τα τρίγωνα ΔΚΛ και ΕΚΜ είναι ίσα από το κριτήριο Π-Γ-Π (αφού $K\Lambda = EM$, $\Delta\hat{\Lambda}K = E\hat{M}K$ και $\Delta\Lambda = KM$). Συνεπώς $K\Delta = KE$.

Άσκηση 5η. **Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ότι η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta = 30°$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε ΔΕ κάθετη στην ΑΓ.**

α) **Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο.**

β) **Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.**

γ) **Να αποδείξετε ότι: $\Delta E = \dfrac{AB}{2}$.**

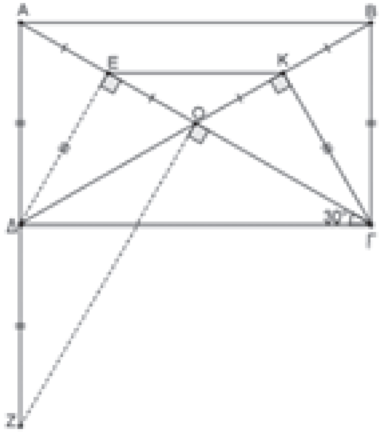
δ) **Φέρουμε επιπλέον ΓΚ κάθετη στο ΔΒ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΔΕΚΓ ως συνάρτηση της πλευράς ΑΒ.**

Λύση: α) Ισχύει ότι $O\Delta = OA$ ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ και ΔΒ του ορθογωνίου παρ/μου ΑΒΓΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές. Επιπλέον στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90° - \Delta\hat{\Gamma}A = 60°$. Άρα το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο. Επομένως $O\Delta = OA = A\Delta$.

β) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($A\hat{B}\Gamma = 90°$) και ΑΖΟ ($A\hat{O}Z = 90°$):

- $OA = B\Gamma$ (διότι $OA = A\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου παρ/μου)
- $\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ)

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΟ είναι ίσα και ισχύει ότι $ΑΒ=ΟΖ$.



γ) Έχουμε ότι τα ΔΕ και ΖΟ είναι κάθετα στο ΑΓ επομένως $ΔΕ \parallel ΖΟ$. Επίσης το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο οπότε η ΔΕ εκτός από ύψος είναι και διάμεσος. Άρα το Ε είναι μέσο του ΟΑ. Τότε το Δ είναι μέσο του ΑΖ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΟΖ ισχύει ότι: $ΔΕ=\frac{ΟΖ}{2}=\frac{ΑΒ}{2}$, αφού Ε, Δ μέσα των τμημάτων ΟΑ και ΑΖ αντιστοίχως.

δ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΚΒΓ είναι ίσα, αφού $\hat{Ε}=\hat{Κ}=90°$, $Δ\hat{Α}Ε=Κ\hat{Β}Γ=60°$ και $ΑΔ=ΒΓ$. Οπότε,

$$ΚΓ=ΔΕ\overset{(Γ3)}{\Rightarrow}ΚΓ=ΔΕ=\frac{ΑΒ}{2}.$$

Στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΟ και ΒΓΟ τα ύψη ΔΕ και ΓΚ είναι και διάμεσοι, άρα Ε μέσο ΑΟ και Κ μέσο ΒΟ. Συνεπώς στο τρίγωνο ΑΒΟ θα ισχύει $ΕΚ=\frac{ΑΒ}{2}$. Επιπλέον $ΑΒ=ΓΔ$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Για την περίμετρο του ΔΕΚΓ έχουμε ότι:

$$Π=ΔΕ+ΕΚ+ΚΓ+ΓΔ=\frac{5}{2}ΑΒ.$$

Άσκηση 6η. **Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ=ΑΓ$ και έστω Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του. Θεωρούμε Μ το συμμετρικό σημείο του Ο ως προς την ΑΓ και φέρνουμε $ΜΕ \parallel ΑΒ$ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:**

α) **$ΕΗ=ΓΗ$.**

β) **Το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.**

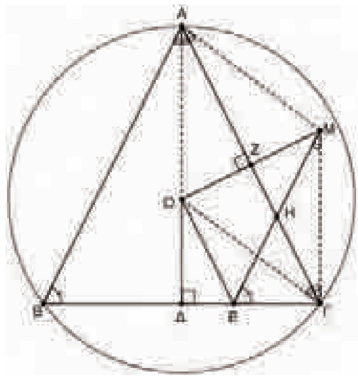
γ) **Το τετράπλευρο ΑΟΓΜ είναι ρόμβος.**

δ) **Το τρίγωνο ΗΜΓ είναι ισοσκελές.**

ε) **Το σημείο Η είναι μέσο του ΜΕ.**

στ) **$Ε\hat{Ο}Μ=90°$.**

Λύση: α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $Α\hat{Β}Γ=Α\hat{Γ}Β$ ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ΑΒΓ. Επιπλέον $Μ\hat{Ε}Γ=Α\hat{Β}Γ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των $ΜΕ \parallel ΑΒ$ με τέμνουσα την ΒΓ. Άρα στο τρίγωνο ΗΓΕ ισχύει $Μ\hat{Ε}Γ=Α\hat{Γ}Β$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $ΓΗ=ΕΗ$.



β) Έχουμε ότι το Μ είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ΑΓ, οπότε $ΟΜ \perp ΑΓ$ και ΟΜ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Ζ (αφού το ΟΖ είναι το απόστημα της ΑΓ, την οποία διχοτομεί). Στο τρίγωνο ΑΜΓ η ΖΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο ΑΟΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιες αυτού διχοτομούνται (διότι $ΟΖ=ΖΜ$ και $ΑΖ=ΖΓ$). Επίσης οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΟΓΜ τέμνονται κάθετα ($ΑΓ \perp ΟΜ$ αφού ΟΜ μεσοκάθετος της ΑΓ), άρα το ΑΟΓΜ είναι ρόμβος.

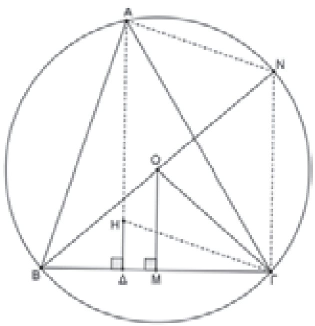
δ) Αφού ΑΟΓΜ ρόμβος ισχύει ότι $ΟΑ \parallel= ΓΜ$ και αφού $ΟΑ \perp ΒΓ$ (διότι το Ο είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ) θα έχουμε ότι $ΜΓ \perp ΒΓ$, δηλαδή $Μ\hat{Γ}Β = 90°$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΕ ισχύει $Η\hat{Μ}Γ + Γ\hat{Ε}Μ = 90°$ και $Ε\hat{Γ}Η + Η\hat{Γ}Μ = 90°$, άρα $Η\hat{Μ}Γ = Η\hat{Γ}Μ$, δηλαδή το τρίγωνο ΗΜΓ είναι ισοσκελές με $ΗΜ = ΗΓ$.

ε) Προκύπτει ότι $ΗΜ = ΗΕ$ (αφού $ΓΗ = ΕΗ$ και $ΗΜ = ΓΗ$), άρα το σημείο Η είναι το μέσο του ΜΕ.

στ) Τα σημεία Ζ, Η είναι τα μέσα των πλευρών ΟΜ και ΜΕ (αντίστοιχα) του τριγώνου ΜΟΕ, άρα $ΖΗ \parallel ΟΕ$ ή $ΟΕ \parallel ΑΓ$. Αφού $ΟΜ \perp ΑΓ$ (από υπόθεση) και $ΟΕ \parallel ΑΓ$, έπεται ότι $ΟΜ \perp ΟΕ$. Δηλαδή $Ε\hat{Ο}Μ = 90°$.

Άσκηση 7η. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ν το αντιδιαμετρικό του σημείου Β, τότε να αποδείξετε ότι:**

α) **$ΑΗ \parallel ΓΝ$. (**Υπόδειξη: **Φέρουμε την ακτίνα ΟΓ)**



β) **Το τετράπλευρο ΑΝΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.**

γ) **$ΑΗ = 2 \cdot ΟΜ$.**

Λύση: α) Αφού Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, έπεται ότι $ΑΗ \perp ΒΓ$ (1). Φέρνουμε την ακτίνα ΟΓ, προκύπτει ότι τριγώνο ΒΓΝ είναι ορθογώνιο με $Β\hat{Γ}Ν = 90°$ (2), αφού ΓΟ διάμεσος (το σημείο Ο είναι κέντρο του κύκλου και ΒΝ διάμετρος αυτού) της πλευράς ΒΝ και ισχύει ότι $ΓΟ = ΟΒ = ΟΝ = ρ$. Οπότε $ΑΗ // ΝΓ$ (διότι $ΑΗ \perp ΒΓ$ και $ΝΓ \perp ΒΓ$) (3).

β) Όμοια με το ερώτημα (α) προκύπτει ότι $ΓΗ \parallel ΑΝ$ (4) (διότι $ΓΗ \perp ΑΒ$ και $ΝΑ \perp ΑΒ$). Από τις (3), (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΝΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο τρίγωνο ΒΓΝ το ΟΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΝ και ΒΓ, άρα $ΟΜ = \frac{ΓΝ}{2}$, δηλαδή $ΓΝ = 2 \cdot ΟΜ$ (5). Επομένως $ΑΗ = ΓΝ = 2 \cdot ΟΜ$ (αφού $ΑΗ = ΓΝ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΝΓΗ).

Άσκηση 8η. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο αυτού. Τα σημεία Μ, Ρ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΘ και ΘΗ αντίστοιχα (όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΟΗ). Να αποδείξετε ότι:**

α) **$ΡΝ = ΟΜ$** (Υπόδειξη: **$ΑΗ = 2 \cdot ΟΜ$** Άσκηση 7/(γ))

β) **Το τετράπλευρο ΟΜΝΡ είναι παραλληλόγραμμο.**

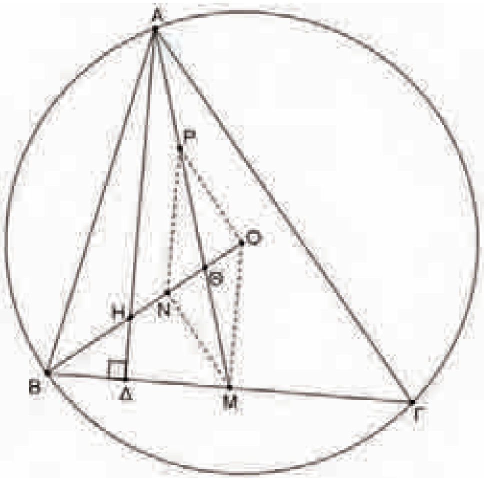
γ) **Το σημείο Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση: α) Στο τρίγωνο ΘΗΑ το ΡΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΘ και ΘΗ, άρα $ΡΝ = \frac{ΑΗ}{2} = \frac{2 \cdot ΟΜ}{2} = ΟΜ$ (1) (αφού $ΑΗ = 2 \cdot ΟΜ$ όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα (γ) της Άσκησης 7).

β) Αφού Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, έπεται ότι $ΑΗ \perp ΒΓ$ (2). Επιπλέον $ΡΝ \parallel ΑΗ$ (από

(1)), οπότε $PN \perp ΒΓ$ (3). Αφού $PN \perp ΒΓ$ και $ΟΜ \perp ΒΓ$ (διότι Ο περίκεντρο του ΑΒΓ και Μ μέσο του ΒΓ), προκύπτει ότι $PN \parallel ΟΜ$ (4). Τελικά το τετράπλευρο OMNP είναι παραλληλόγραμμο, αφού $PN \parallel= ΟΜ$ (από τις (1) και (4)).

γ) Το OMNP είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιες ΟΝ και PM διχοτομούνται, άρα $PΘ = ΘΜ$ (5). Επιπλέον $PΘ = ΑΡ$ (6) (Ρ μέσο του ΑΘ) και έπεται ότι $ΘΜ = PΘ = ΑΡ$ (7). Άρα $ΑΘ = 2 \cdot ΘΜ$, δηλαδή το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχόλιο: Η Άσκηση 8 αποτελεί μια απόπειρα «κατευθυνόμενης» απόδειξης της Ευθείας του Euler μέσω βοηθητικών ερωτημάτων. Σύμφωνα με το Θεώρημα της **Ευθείας του Euler**:

Σε κάθε τρίγωνο (εκτός του ισόπλευρου) το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο και το περίκεντρο είναι σημεία συνευθειακά[1].

Αξιοσημείωτο είναι και το συμπέρασμα ότι αν Ο το περίκεντρο, Η το ορθόκεντρο και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι: $ΘΗ = 2 \cdot ΘΟ$. Δηλαδή το βαρύκεντρο διαιρεί το τμήμα ΟΗ σε δύο τμήματα με λόγο 2.

Έφυγε από κοντά μας

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία αποχαιρετά τον Παναγιώτη Σύψα

† Παναγιώτης Σύψας

Με μεγάλη θλίψη πληροφορηθήκαμε την απώλεια του εκλεκτού συναδέλφου **Παναγιώτη Σύψα,** Ομότιμου Καθηγητή Πανεπιστημίου Πατρών.

Έφυγε πρόσφατα, στις 15 Νοεμβρίου 2024.

Ο Παναγιώτης Σύψας διετέλεσε μέλος του Διοικητικού Συμβουλίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, τις διετίες 2007-2009, οπότε είχε και τη θέση του Έφορου Βιβλιοθήκης, και 2009-2011, καθώς και επί σειρά ετών υπήρξε μέλος στο Δ.Σ. του Παραρτήματος Αχαΐας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Την περίοδο 2007-2014 ήταν Πρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής της περιοδικής επιστημονικής Έκδοσης της ΕΜΕ "Μαθηματική Επιθεώρηση".

Ήταν πτυχιούχος των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών (1972), με Master of Science (M.Sc.) του Μαθηματικού Τμήματος (**Στατιστική**) του Πανεπιστημίου του Manchester, U.K. (1977), Doctor of Philosophy (Ph. D.) του Τμήματος **Επιχειρησιακής Έρευνας** του Πανεπιστημίου του Lancaster, U.K. (1983).

Στα χρόνια της επαγγελματικής του δραστηριότητας, υπήρξε **πρόεδρος** και μέλος πολλών οργανισμών και επιστημονικών εταιρειών – οργανώσεων. Συμμετείχε **ενεργά** στις εκδηλώσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας καθώς και σε όλες τις εκδηλώσεις του Παραρτήματος Αχαΐας. Πάντα **δίπλα στη νεολαία**, που πάντα πίστευε, **αγαπούσε και βοηθούσε**.

Δάσκαλος με ιδιαίτερο χιούμορ και μεράκι σε ότι έκανε με **μεγάλη προσφορά στην εκπαίδευση** και στην κοινωνία.

Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του

[1] Ο ίδιος ο **Euler** πρωτοδημοσίευσε, το αποτέλεσμα αυτό, το **1767** στο άρθρο του *Solutio, Facilis problematum quorvmdam geometricorvm difficillimorvm*, στο *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.*

Τάξη: Β

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Μπαλτάς Γεώργιος – Μποζατζίδης Βασίλης – Σανδαλίδης Λάζαρος

ΑΣΚΗΣΗ 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot ημωx$, $\rho>0$ και $\omega\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

και τη συνάρτηση $g(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+3$.

α) **Να δείξετε ότι $f(x)=3\cdot ημ2x$.**

β) **Να δείξετε ότι $g(x)\geq 3$ (πότε ισχύει η ισότητα;) και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.**

γ) **Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(-\frac{7\pi}{20}\right)$, $f\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ και $g(2024\pi)$.**

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε ότι έχει περίοδο $T=\pi$, οπότε έχουμε:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow \pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow \omega=2$$

Επιπλέον βλέπουμε ότι έχει μέγιστο 3 και ελάχιστο -3, επομένως είναι $\rho=3$.

Άρα η συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=3\cdot ημ2x$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+3\geq 3\Leftrightarrow g(x)\geq 3$$

με την ισότητα να ισχύει όταν:

$$g(x)=3\Leftrightarrow \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+3=3\Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

Επιπλέον, είναι

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\cdot ημ\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\cdot ημ\frac{\pi}{2}=3\cdot 1=3.$$

Οπότε, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, δηλαδή $x=\frac{\pi}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Για $x\neq\frac{\pi}{4}$ είναι $f(x)\leq 3$ και $g(x)>3$, οπότε για $x\neq\frac{\pi}{4}$ είναι $f(x)\neq g(x)$, άρα δεν υπάρχει άλλη λύση της εξίσωσης.

γ) Ισχύει ότι $\frac{2\pi}{5}=\frac{8\pi}{20}$. Οπότε έχουμε:

$$\frac{7\pi}{20}<\frac{8\pi}{20}\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{20}>-\frac{8\pi}{20}$$

Όμως $-\frac{7\pi}{20},-\frac{8\pi}{20}\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$, αφού

$-\frac{\pi}{2}=-\frac{10\pi}{20}$ και $-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{20}$.

Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$.

Επομένως έχουμε:

$$-\frac{7\pi}{20}>-\frac{8\pi}{20}\Leftrightarrow f\left(-\frac{7\pi}{20}\right)<f\left(-\frac{8\pi}{20}\right)$$

Επιπλέον για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(2024\pi)>3>f(x)$, άρα τελικά έχουμε:

$$f\left(-\frac{7\pi}{20}\right)<f\left(-\frac{8\pi}{20}\right)<g(2024\pi)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) **Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x)=συνx$, $x\in[-2\pi,2\pi]$, $y=-1$ και $y=1$.**

β) **Να βρείτε τις τιμές των $x\in\mathbb{R}$, ώστε $P(x)=0$.**

γ) **Να λύσετε την εξίσωση:**

$$\sigma\upsilon\nu^3 x+\eta\mu^2 x-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}=0 \quad (1)$$

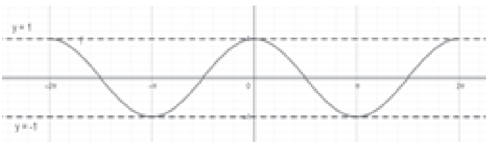
δ) Με την χρήση των γραφημάτων του ερωτήματος (α) να επαληθεύσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) στο διάστημα $\left[-2\pi,2\pi\right]$.

ΛΥΣΗ

α) Φτιάχνουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης f για $x\in[-2\pi,2\pi]$.

Οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f και των ευθειών $y=1$ και $y=-1$ είναι:

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
$f(x)$	1	-1	1	-1	1



β) Για $x\in R$, έχουμε:

$$P(x)=0\Leftrightarrow x^3-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x-1=0 \text{ ή } x^2-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

γ) Η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu^3 x+\eta\mu^2 x-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^3 x+1-\sigma\upsilon\nu^2 x-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^3 x-\sigma\upsilon\nu^2 x-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}=0 \quad (1)$$

Θέτουμε όπου συνx το y και έχουμε:

$$y^3-y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0\overset{\beta)}{\Leftrightarrow} y=1 \text{ ή } y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

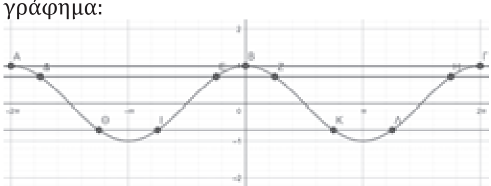
Άρα από (1) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x=1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$x=2\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z} \text{ ή } x=2\kappa\pi\pm\frac{3\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \text{ ή }$$

$$x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$$

δ) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) στο διάστημα $\left[-2\pi,2\pi\right]$ εμφανίζεται στο παρακάτω γράφημα:



Παρατηρούμε ότι το πλήθος των ριζώς της εξίσωσης στο διάστημα αυτό είναι 9.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in R$, $g(x)=6\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)$, $x\in R$ και το σύστημα

$$(\Sigma):\begin{cases}6x+4y=24\\ 5x-2y=4\end{cases}.$$

α) Να γράψετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων f και g, καθώς και τις περιόδους τους.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις τους, σε πλάτος δύο περιόδων για την συνάρτηση f και μίας περιόδου για την συνάρτηση g σε δύο ξεχωριστά συστήματα συντεταγμένων.

γ) Να λύσετε το σύστημα (Σ).

δ) Αν α και β είναι οι λύσεις του συστήματος του ερωτήματος (γ) με $\alpha<\beta$, τότε:

i. Να λύσετε την εξίσωση: $4\sigma\upsilon\nu 2x=\alpha$, $x\in\left[0,2\pi\right]$

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $6\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)=-\beta$, $x\in\left[0,4\pi\right]$

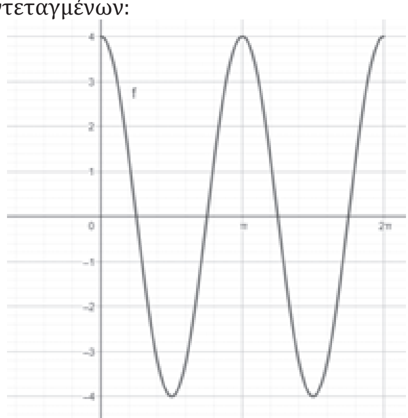
ε) Να επαληθεύσετε το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων του ερωτήματος (δ) με κατάλληλη χρήση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g του ερωτήματος (β).

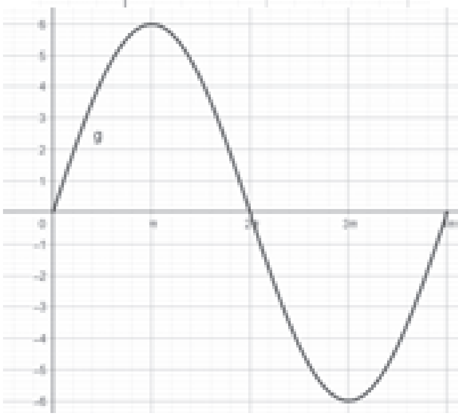
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$, όπου ρ, ω>0. Η μέγιστη τιμή της είναι 4 και η ελάχιστη τιμή της -4, ενώ η περίοδος της συνάρτησης f είναι $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Η συνάρτηση g είναι της μορφής $g(x)=\rho\eta\mu\omega x$, όπου $\rho,\omega>0$. Η μέγιστη τιμή της είναι 6 και η ελάχιστη τιμή της -6, ενώ η περίοδος της συνάρτησης g είναι $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g εμφανίζονται στα παρακάτω συστήματα συντεταγμένων:





γ) Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{matrix}6x+4y=24\\5x-2y=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}3x+2y=12\\5x-2y=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}3x+2y=12\\8x=16\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}3x+2y=12\\x=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=(2,3)$$

δ) Για $\alpha=2$ και $\beta=3$ έχουμε τις εξισώσεις:

i. Για $0\le x\le 2\pi$:

$$4\sigma\upsilon\nu2x=2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow2x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}\overset{0\le x\le2\pi}{\Leftrightarrow}x=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$$

ii. Για $0\le x\le 4\pi$:

$$6\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)=-3\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

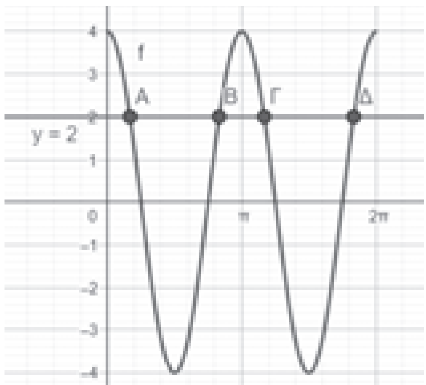
$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

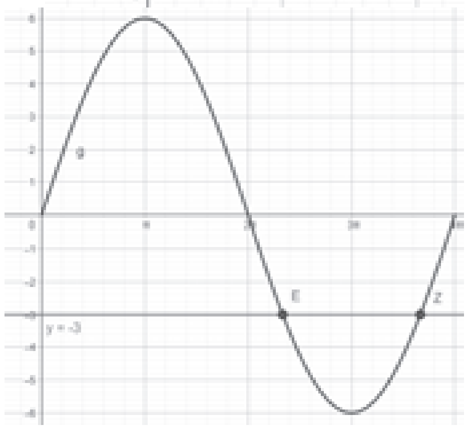
$$\frac{1}{2}x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\text{ ή }\frac{1}{2}x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$x=4\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\text{ ή }x=4\kappa\pi+\frac{7\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\overset{0\le x\le4\pi}{\Leftrightarrow}$$

$$x=\frac{7\pi}{3}\text{ ή }x=\frac{11\pi}{3}$$

ε) Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις εμφανίζεται η επαλήθευση του πλήθους των λύσεων των εξισώσεων του ερωτήματος (δ):





ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\left(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}-\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{4}\right)\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = -2συν2x$.

β) Να βρείτε την περίοδο και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για μήκος μιας περιόδου.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(x) + f(x) - 2 = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Ισχύουν οι ισότητες:

$$συν\frac{3π}{4} = συν\left(π - \frac{π}{4}\right) = -συν\frac{π}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$εφ\frac{5π}{4} = εφ\left(π + \frac{π}{4}\right) = εφ\frac{π}{4} = 1$$

$$ημ\left(2x + \frac{π}{2}\right) = συν2x$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

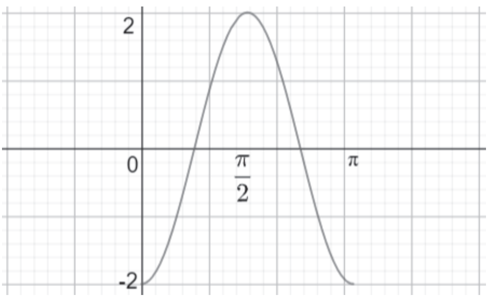
$$f(x) = \left(\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right)συν2x = -2συν2x$$

β) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2π}{2} = π$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης για μήκος μιας περιόδου:

x	0	$\frac{π}{4}$	$\frac{π}{2}$	$\frac{3π}{4}$	π
$f(x)$	-2	0	2	0	-2

Η γραφική παράσταση της f είναι:



γ) Για $u = f(x)$ η εξίσωση γίνεται $u^3 + u - 2 = 0$ και ισοδύναμα έχουμε:

$$u^3 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow u^3 - 1 + u - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(u-1)(u^2 + u + 1) + (u-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(u-1)(u^2 + u + 2) = 0 \Leftrightarrow u = 1$$

Οπότε, ισοδύναμα έχουμε:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow -2συν2x = 1 \Leftrightarrow συν2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$συν2x = συν\frac{2π}{3} \Leftrightarrow 2x = 2κπ \pm \frac{2π}{3}, κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = κπ \pm \frac{π}{3}, κ \in \mathbb{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 3συν^2(π + x) + 4συν\left(\frac{π}{2} + x\right) + k, \text{ με } k \in \mathbb{R}$$

α) **Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = 3ημ^2x - 4ημx + k, k \in \mathbb{R}$.**

β) **Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη $\frac{π}{2}$, να δείξετε ότι $k = 1$.**

γ) **Για k = 1, να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x'x και y'y. (Δίνεται ότι: $ημ\frac{19π}{180} = \frac{1}{3}$)**

δ) **Για k=1, να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $g(x) = 4συν^2x + 10ημx - 3$**

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι $συν(π + x) = -συνx$ και

$$συν\left(\frac{π}{2} + x\right) = συν\left(\frac{π}{2} - (-x)\right) = ημ(-x) = -ημx$$

Επομένως:

$$f(x) = 3συν^2(π + x) + 4συν\left(\frac{π}{2} + x\right) + k =$$

$$3(-ημx)^2 + 4(-ημx) + k = 3ημ^2x - 4ημx + k, \ k \in \mathbb{R}$$

β) Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη $\frac{π}{2}$, θα ισχύει:

$$f\left(\frac{π}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3ημ^2\left(\frac{π}{2}\right) - 4ημ\left(\frac{π}{2}\right) + k = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + k = 0 \Leftrightarrow -1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

γ) Για $k = 1$ ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = 3ημ^2x - 4ημx + 1$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3ημ^2x - 4ημx + 1 = 0$$

Θέτουμε $ημx = ω$ $-1 \le ω \le 1$, οπότε η εξίσωση μετασχηματίζεται ως $3\omega^2-4\omega+1=0$ η οποία έχει λύσεις $\omega=1$ ή $\omega=\frac{1}{3}$ (δεκτές).

■ Για $\omega=1$ έχουμε:

$$\eta\mu\omega=1\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\omega=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$$

■ Για $\omega=\frac{1}{3}$ έχουμε:

$$\eta\mu\omega=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{19\pi}{180}\Leftrightarrow\omega=2\kappa\pi+\frac{19\pi}{180}$$

$$\text{ή } \omega=2\kappa\pi+\frac{161\pi}{180},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία $\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(2\kappa\pi+\frac{19\pi}{180},0\right)$, $\left(2\kappa\pi+\frac{161\pi}{180},0\right)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ τα οποία είναι άπειρα στο πλήθος.

Για το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y'y βρίσκουμε:

$$f(0)=3\eta\mu^2 0-4\eta\mu 0+1=3\cdot 0-4\cdot 0+1=1$$

Άρα σημείο τομής της C_f με τον άξονα y'y είναι το $(0,1)$

δ) Τα σημεία τομής των C_f και C_g βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 3\eta\mu^2x-4\eta\mu x+1=$$
$$=4\sigma\upsilon\nu^2x+10\eta\mu x-3\Leftrightarrow$$
$$3\eta\mu^2x-4\eta\mu x+1=4\left(1-\eta\mu^2x\right)+10\eta\mu x-3\Leftrightarrow$$
$$3\eta\mu^2x-4\eta\mu x+1=4-4\eta\mu^2x+10\eta\mu x-3\Leftrightarrow$$
$$7\eta\mu^2x-14\eta\mu x=0\Leftrightarrow 7\eta\mu x(\eta\mu x-2)=0$$

Όμως αφού $\eta\mu x\neq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ προκύπτει:

$$\eta\mu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu 0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$$

Άρα τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι το $(\kappa\pi,\eta\mu\kappa\pi)$ δηλαδή τα σημεία $(\kappa\pi,0),\kappa\in\mathbb{Z}$ τα οποία είναι άπειρα στο πλήθος.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=\left(\lambda^2-9\right)x^3+\left(\lambda^2-3\lambda\right)x^2+\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)x+$$
$$+3-\lambda$$

α) Να βρεθεί ο βαθμός του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda=-3$ να κάνετε την διαίρεση $P(x):(6x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του $P(x)$ δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

ΛΥΣΗ

α) Για τον συντελεστή του x^3 διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $\lambda^2-9=0\Leftrightarrow(\lambda-3)\cdot(\lambda+3)=0\Leftrightarrow\lambda=3$ ή $\lambda=-3$, τότε:

■ για $\lambda=3$:

$$P(x)=\left(3^2-9\right)x^3+\left(3^2-3\cdot 3\right)x^2+\left(3^2-4\cdot 3+3\right)x+$$
$$+3-3=0,$$

επομένως σε αυτή την περίπτωση δεν ορίζεται βαθμός για το $P(x)$

■ για $\lambda=-3$:

$$P(x)=\left((-3)^2-9\right)x^3+\left((-3)^2-3(-3)\right)x^2+$$
$$\left((-3)^2-4\cdot(-3)+3\right)x+3-(-3)=18x^2+24x+6$$

επομένως το $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

■ Αν $\lambda\neq 3$ και $\lambda\neq -3$ το $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού.

β) Για $\lambda=-3$ είναι $P(x)=18x^2+24x+6$, οπότε εκτελώντας κάθετη διαίρεση πολυωνύμων παίρνουμε:

$$\begin{array}{r|l} 18x^2+24x+6 & 6x+2 \\ \hline -18x^2-6x & 3x+3 \\ 18x+6 & \\ -18x-6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Άρα $P(x)=(6x+2)\cdot(3x+3)$

γ) Τα διαστήματα στα οποία η C_P δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$P(x)\leq 0\Leftrightarrow(6x+2)\cdot(3x+3)\leq 0\Leftrightarrow$$
$$2(3x+1)\cdot 3\cdot(x+1)\leq 0\Leftrightarrow$$
$$6(3x+1)(x+1)\leq 0\Leftrightarrow(3x+1)(x+1)\leq 0$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$(3x+1)(x+1)$		+	0	-	0	+	

Άρα η C_p δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x όταν $x \in \left[-1,-\frac{1}{3}\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+x^3+(k-1)x^2-x-k$, $k\in\mathbb{R}$.

α) **Αν γνωρίζετε ότι έχει δύο ρίζες αντίθετες να τις βρείτε.**

β) **Να δείξετε ότι το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης $P(x):(x^2-1)$ είναι το $\pi(x)=x^2+x+k$.**

γ) **Να βρείτε τις τιμές του $k\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\pi(\sigma\upsilon\nu x)=0$ να έχει τέσσερις ρίζες στο $[0,2\pi]$.**

δ) **Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\pi(\sigma\upsilon\nu x)=0$ να έχει τρεις ρίζες στο $[0,2\pi]$.**

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\pm\rho$, με $\rho\neq 0$ οι δύο αντίθετες ρίζες. Τότε έχουμε:

$$P(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^4+\rho^3+(k-1)\rho^2-\rho-k=0 \quad (1)$$

$$P(-\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^4-\rho^3+(k-1)\rho^2+\rho-k=0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$2\rho^3-2\rho=0 \Leftrightarrow \rho(\rho-1)=0$$

και αφού $\rho\neq 0$, είναι $\rho=1$. Επομένως οι δύο αντίθετες ρίζες είναι οι 1 και -1.

β) Εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε:

$$\begin{array}{l|l}
x^4+x^3+(k-1)x-x-k & x^2-1 \\ \cline{2-2}
-x^4+0x^3+x^2 & x^2+x+k \\ \cline{1-1}
\quad x^3+kx^2-x-k & \\
\quad -x^3+0x^2+x & \\ \cline{1-1}
\qquad kx^2-k & \\
\qquad -kx^2+k & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Οπότε είναι $\pi(x)=x^2+x+k$.

γ) Έχουμε $\pi(\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x+k=0$.

Για να έχει τέσσερις ρίζες πρέπει $\Delta>0$ και αν $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ οι δύο ρίζες, να ισχύει $x_{1,2}\in(-1,1]$.

Προσοχή! Αν κάποια από τις δύο ρίζες ισούται με -1 τότε $\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow x=\pi$, επομένως προκύπτει μία ρίζα.

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 1-4k>0 \Leftrightarrow k<\frac{1}{4}$$

■ $-1<\dfrac{-1-\sqrt{\Delta}}{2}\leq 1 \Leftrightarrow -2<-1-\sqrt{\Delta}\leq 2 \Leftrightarrow$

$-3\leq\sqrt{\Delta}<1 \overset{\Delta>0}{\Leftrightarrow} \Delta<1 \Leftrightarrow k>0$

■ $-1<\dfrac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}\leq 1 \Leftrightarrow -2<-1+\sqrt{\Delta}\leq 2 \Leftrightarrow$

$-1<\sqrt{\Delta}\leq 3 \overset{\Delta>0}{\Leftrightarrow} \Delta\leq 9 \Leftrightarrow k\geq -2$

Οπότε, για $k\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ η εξίσωση έχει τέσσερις ρίζες.

δ) Για να έχει τρεις ρίζες θα πρέπει $\Delta>0$ και αν $x_{1,2}$ οι ρίζες, η μία από τις δύο να ισούται με -1 και η άλλη να ανήκει στο $(-1,1]$.

Όμως αν $\sigma\upsilon\nu x=-1$ τότε έχουμε $(-1)^2+(-1)+k=0 \Leftrightarrow k=0$.

Τότε η εξίσωση γίνεται $\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow x=\pi$ ή $\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}, x=\dfrac{3\pi}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

α) **Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.**

β) **Να λύσετε την εξίσωση:**

$$(2\sigma\upsilon\nu x-1)^3-6(2\sigma\upsilon\nu x-1)^2+11(2\sigma\upsilon\nu x-1)-6=0$$

γ) **Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.**

δ) **Αν η συνάρτηση $P(x)$ περιγράφει την θερμοκρασία σε °C στην πόλη της Πτολεμαΐδας κατά την διάρκεια μιας ημέρας τους χειμερινούς μήνες, όπου το x σε ώρες, να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία η θερμοκρασία είναι κάτω από 0°C.**

ΛΥΣΗ

α) Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για το $P(x)$ με ρ=1 έχουμε:

1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	
1	-5	6	0	

Επομένως παίρνουμε:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή}$$

$$x^2-5x+6=0$$

Άρα είναι $x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$.

β) Θέτουμε $2συνx-1=y$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση μετασχηματίζεται:

$$y^3-6y+11y-6=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ ή } y=2 \text{ ή } y=3$$

Για $y=1$ έχουμε:

$$2συνx-1=1 \Leftrightarrow 2συνx=2 \Leftrightarrow συνx=1 \Leftrightarrow$$
$$συνx=συν0 \Leftrightarrow x=2κπ, κ\in\mathbb{Z}$$

Για $y=2$ έχουμε:

$$2συνx-1=2 \Leftrightarrow 2συνx=3 \Leftrightarrow συνx=\frac{3}{2},$$

Αδύνατο γιατί: $-1\le συνx\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $y=3$ έχουμε:

$2συνx-1=3 \Leftrightarrow 2συνx=4 \Leftrightarrow συνx=2$, αδύνατο.

γ) Τα διαστήματα στα οποία η C_P δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x είναι λύσεις της ανίσωσης: $P(x)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow$

$x\in[1,2]\cup[3,+\infty)$, γιατί:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-	0	+		+	
$x-3$		-		-		-	0	+	
P		-	0	+	0	-	0	+	

δ) Τα διαστήματα κατά τα οποία η θερμοκρασία είναι κάτω από 0°C είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$P(x)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)<0 \Leftrightarrow$$

$$x\in(-\infty,1)\cup(2,3)$$

και επειδή το x παριστάνει ώρες κατά την διάρκεια μιας ημέρας θα ισχύει: $x\in[0,24]$,

επομένως: $x\in[0,1)\cup(2,3)$

Άρα η θερμοκρασία είναι αρνητική από τις 0:00 έως τη 1π.μ και από τις 2π.μ έως τις 3 π.μ.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται το πολυώνυμο :

$$P(x)=x^3(x^3+x^2+3)-x^6-x^2(x^2+3)$$

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο και στη συνέχεια να βρείτε τις ρίζες του.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

δ) Να βρείτε αν υπάρχουν τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $P(x)\ge 0$ και $2x^3-x^2<0$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$P(x)=x^6+x^5+3x^3-x^6-x^4-3x^2 \Leftrightarrow$$

$$P(x)=x^5-x^4+3x^3-3x^2$$

Το πολυώνυμο είναι 5ου βαθμού.

β) Με κοινό παράγοντα ανά ομάδες έχουμε:

$$P(x)=x^4(x-1)+3x^2(x-1) \Leftrightarrow$$

$$P(x)=x^2(x-1)(x^2+3)$$

Οπότε, $P(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

γ) Το πρόσημο του πολυωνύμου παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
x^2		+	0	+		+	
x^2+3		+		+		+	
P		-	0	-	0	+	

οπότε

$$P(x)>0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x^2+3)>0 \Leftrightarrow x\in[1,+\infty)$$

δ) Είναι:

$$2x^3-x^2<0 \Leftrightarrow x^2(2x-1)<0 \Leftrightarrow$$

$$x^2\ne 0 \text{ και } 2x-1<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

Οι ανισώσεις δεν έχουν κοινές λύσεις.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Η περίοδος της συνάρτησης

$f(x)=2συν\left(\frac{π}{4}x\right)+3$ **είναι:**

α. $\frac{π}{4}$ β. 4 γ. 8 δ. $\frac{4}{π}$

2. Η τιμή της παράστασης:

$συν^2\left(\frac{π}{2}+ω\right)+ημ^2\left(\frac{π}{2}-ω\right)$ **είναι:**

α. 0 β. 2 γ. 2025 δ. 1

3. Για να είναι ένας αριθμός ρ ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ αρκεί :

α. Το ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου $α_0$

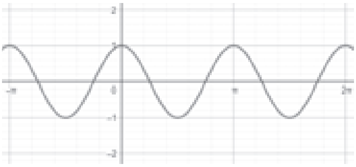
β. Το ρ είναι το 0 γ. $P(ρ)=0$ δ. $P(0)=ρ$

4. Το πολυώνυμο: $P(x)=x^3+x^2-2$ έχει ρίζες:

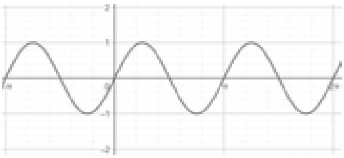
α. το 1 και το -1 β. το 2 και το -2
γ. το -1 και το -2 δ. το 1

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\text{συν}2x$ είναι η:

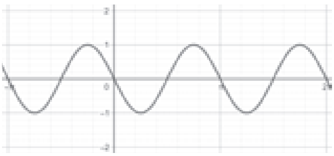
α.



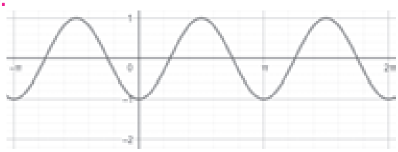
β.



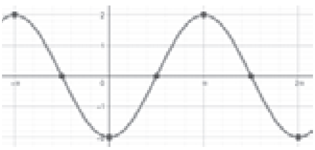
γ.



δ.



6. Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση:



Η συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί είναι η:

α. $f(x) = 2\text{συν}x$ β. $f(x) = -\text{συν}x$

γ. $f(x) = 2\text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ δ. $f(x) = 2\text{συν}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

7. Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Σημειώνουμε σε αυτό τη γωνία $\theta = \frac{11\pi}{4}$ της οποίας η αρχική πλευρά είναι ο θετικός ημιάξονας Ox. Η τελική πλευρά την γωνίας διέρχεται από το σημείο:

α. $A(2024, -2024)$ β. $B(3, -2023)$

γ. $\Gamma(1821, 1453)$ δ. $\Delta(-1925, 1925)$

8. Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Σημειώνουμε σε αυτό τη γωνία $\theta = \pi - 4$ rad της οποίας η αρχική πλευρά είναι ο θετικός ημιάξονας Ox. Η τελική πλευρά την γωνίας βρίσκεται:

α. Στο 1ο τεταρτημόριο β. Στο 3ο τεταρτημόριο
γ. Στο 4ο τεταρτημόριο δ. Δεν γνωρίζουμε

9. Αν το πολυώνυμο
$P(x) = x^{2024} + 3x^{1821} - 2x^{1453} + kx - 2,\ k \in \mathbb{Z}$ έχει ρίζες κάποιους από τους αριθμούς $\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, είμαστε βέβαιοι ότι θα είναι:

α. το 2 και το 4 β. το -2 και το 2
γ. το 3 και το 4 δ. το -2 και το -5

10. Αν το πολυώνυμο

$P(x) = \text{συν}\theta \cdot x^3 + 2x^2 + 2\text{ημ}\theta \cdot x - 1,\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

έχει ακέραιους συντελεστές και ρ ακέραια ρίζα τότε:

α. $\theta = \pi$ και $\rho = -1$ β. $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $\rho = 1$

γ. $\theta = \pi$ και $\rho = 1$ δ. $\theta = \frac{3\pi}{2}$ και $\rho = -1$

---

*Η **εργασία** συνοδεύεται και από αντίστοιχο αρχείο για χρήση σε διαδραστικούς πίνακες και εξ αποστάσεως διδασκαλία.*
Το αρχείο θα το βρείτε ΕΔΩ

Για το άνοιγμα του αρχείου θα χρειαστείτε την εφαρμογή Smart Notebook. Μπορείτε να τη βρείτε ΕΔΩ

Επίσης αν σκανάρετε το QR code ΕΔΩ θα δείτε μαθηματικά σταυρόλεξα στην ύλη των τάξεων

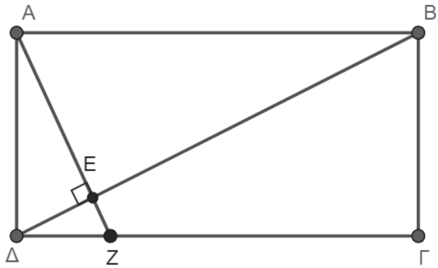
Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος – Στάμου Ιωάννης

Άσκηση 1

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ κι η διαγώνιός του ΒΔ. Από την κορυφή Α φέρνουμε κάθετη στη ΒΔ, η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε και τη ΓΔ στο σημείο Ζ.



Να δείξετε ότι:

α. $AE^2+\Delta Z^2=EZ^2+B\Gamma^2$

β. $\Delta E\cdot \Delta B=AE\cdot AZ$

γ. $\Delta E^3=EB\cdot EZ^2$.

ΛΥΣΗ

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta E Z}$ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα οπότε:

$$\Delta Z^2=\Delta E^2+EZ^2 \Leftrightarrow \Delta E^2=\Delta Z^2-EZ^2 \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AE\Delta}$ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα οπότε:

$$A\Delta^2=AE^2+\Delta E^2 \Leftrightarrow \Delta E^2=A\Delta^2-AE^2$$

Όμως $A\Delta=B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε $\Delta E^2=B\Gamma^2-AE^2 \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\Delta Z^2-EZ^2=B\Gamma^2-AE^2 \Leftrightarrow$$
$$AE^2+\Delta Z^2=EZ^2+B\Gamma^2$$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, από τις μετρικές σχέσεις, έχουμε: $A\Delta^2=\Delta B\cdot \Delta E \quad (3)$

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$, από τις μετρικές σχέσεις, έχουμε:

$$A\Delta^2=AZ\cdot AE \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$\Delta B\cdot \Delta E=AZ\cdot AE$$

γ. Το τμήμα ΔΕ είναι ύψος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$, οπότε:

$$\Delta E^2=AE\cdot EZ \Leftrightarrow \Delta E^3=AE\cdot EZ\cdot \Delta E \quad (5)$$

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AEB}$ και $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ είναι όμοια διότι είναι ορθογώνια κι έχουν $E\hat{\Delta}Z=A\hat{B}E$ ως εντός εναλλάξ. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες, συνεπώς:

$$\frac{\Delta E}{EB}=\frac{EZ}{AE}=\frac{\Delta Z}{AB} \Leftrightarrow \Delta E\cdot AE=EB\cdot EZ \quad (6)$$

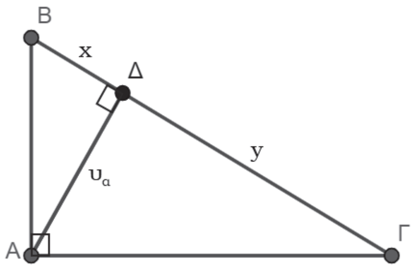
Από τις σχέσεις (5) κι (6) προκύπτει ότι:

$$\Delta E^3=EB\cdot EZ^2.$$

Άσκηση 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$. Αν $A\Delta=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{4}$ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma=\alpha$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ (δύο περιπτώσεις).

ΛΥΣΗ



Έστω $B\Delta=x$ και $\Gamma\Delta=y$. Τότε:

$$B\Delta+\Gamma\Delta=B\Gamma \Leftrightarrow x+y=\alpha \quad (1) \text{ και}$$
$$B\Delta\cdot\Gamma\Delta=A\Delta^2 \Leftrightarrow x\cdot y=\upsilon_\alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$x\cdot y=\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x\cdot y=\frac{3\alpha^2}{16} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα x και y είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\omega^2-\alpha\cdot\omega+\frac{3\alpha^2}{16}=0.$$

$$\Delta=(-\alpha)^2-4\cdot1\cdot\frac{3\alpha^2}{16}=\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{4}$$

$$\omega_{1,2}=\frac{-(-\alpha)\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}}}{2\cdot1}=\frac{\alpha\pm\frac{\alpha}{2}}{2}=\left\langle\begin{matrix}\frac{3\alpha}{4}\\[4pt] \frac{\alpha}{4}\end{matrix}\right.$$

Άρα $x=\frac{3\alpha}{4}$ και $y=\frac{\alpha}{4}$ ή $x=\frac{\alpha}{4}$ και $y=\frac{3\alpha}{4}$.

Αν $x=\frac{3\alpha}{4}$ και $y=\frac{\alpha}{4}$, τότε από Π.Θ στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ έχουμε:

$$AB^2=A\Delta^2+B\Delta^2 \Leftrightarrow AB^2=\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{3\alpha}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$AB^2=\frac{3\alpha^2}{16}+\frac{9\alpha^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$AB^2=\frac{12\alpha^2}{16} \Leftrightarrow AB^2=\frac{3\alpha^2}{4} \overset{AB>0}{\Leftrightarrow}$$

$$AB=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=2\cdot A\Delta \Leftrightarrow \hat{B}=30^\circ \text{ και } \hat{\Gamma}=60^\circ$$

Όμοια, αν $x=\frac{\alpha}{4}$, τότε

$$AB=\frac{\alpha}{2}=2\cdot B\Delta \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta=30^\circ,$$

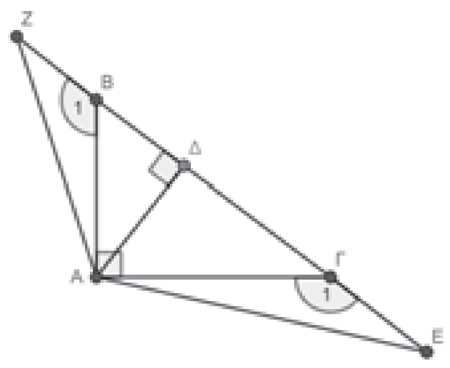
άρα $\hat{B}=60^\circ$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

Άσκηση 3

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$, με πλευρές α, β, γ. Προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΒΓ προς το Β κατά τμήμα $BZ=\frac{\gamma}{2}$ και προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma E=\frac{\beta}{2}$.

Να δείξετε ότι: $AE^2+AZ^2=\frac{5\alpha^3+4\beta^3+4\gamma^3}{4\alpha}$.

Απάντηση:



Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι αμβλεία ως παραπληρωματική της οξείας γωνίας $\hat{\Gamma}$ του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$. Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για αμβλεία γωνία στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma E}}$ κι έχουμε:

$$AE^2=A\Gamma^2+\Gamma E^2+2\cdot\Gamma E\cdot\Gamma\Delta=$$

$$\beta^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\cancel{2}\cdot\frac{\beta}{\cancel{2}}\cdot\Gamma\Delta=\frac{5\beta^2}{4}+\beta\cdot\Gamma\Delta \quad (1).$$

Η γωνία $\hat{B}_1$ είναι αμβλεία ως παραπληρωματική της οξείας γωνίας $\hat{B}$ του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$. Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για αμβλεία γωνία στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{ABZ}}$ κι έχουμε:

$$AZ^2=AB^2+BZ^2+2\cdot BZ\cdot B\Delta=$$

$$\gamma^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+\cancel{2}\cdot\frac{\gamma}{\cancel{2}}\cdot B\Delta=\frac{5\gamma^2}{4}+\gamma\cdot B\Delta \quad (2).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, από τις μετρικές σχέσεις, έχουμε:

$$A\Gamma^2=B\Gamma\cdot\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta=\frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow \Gamma\Delta=\frac{\beta^2}{\alpha}$$

Συνεπώς η σχέση (1) γράφεται:

$$AE^2=\frac{5\beta^2}{4}+\beta\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{5\beta^2}{4}+\frac{\beta^3}{\alpha} \quad (3).$$

$$AB^2=B\Gamma\cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta=\frac{AB^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow B\Delta=\frac{\gamma^2}{\alpha}$$

Συνεπώς η σχέση (2) γράφεται:

$$AZ^2=\frac{5\gamma^2}{4}+\gamma\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha}=\frac{5\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^3}{\alpha} \quad (4).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$AE^2+AZ^2=\frac{5\beta^2}{4}+\frac{\beta^3}{\alpha}+\frac{5\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^3}{\alpha}=$$

$$\frac{5\alpha\beta^2+4\beta^3+5\alpha\gamma^2+4\gamma^3}{4\alpha}=$$

$$\frac{5\alpha\left(\underbrace{\beta^2+\gamma^2}_{\alpha^2}\right)+4\beta^3+4\gamma^3}{4\alpha}=\frac{5\alpha^3+4\beta^3+4\gamma^3}{4\alpha}$$

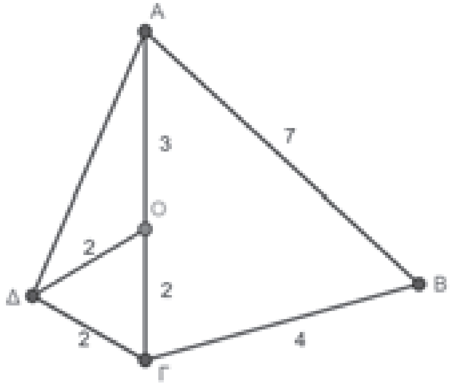
Άσκηση 4

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μήκη όλων των τμημάτων που αναγράφονται είναι σε m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Απάντηση

Η ημιπερίμετρος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι $\tau=\frac{7+4+5}{2}=8\ m$, οπότε το εμβαδόν του, από τον τύπο του Ήρωνα, είναι:

$$(ΑΒΓ)=\sqrt{8\cdot(8-4)\cdot(8-5)\cdot(8-7)}=$$
$$\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}\ \text{m}^2.$$



Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΟΓΔ}$ είναι ισόπλευρο, με πλευρά $α=2$ cm, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$(ΟΓΔ)=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\ \text{m}^2.$$

Η γωνία $Α\hat{Ο}Δ$ είναι ίση με 120° ως παραπληρωματική γωνίας ισοπλεύρου τριγώνου, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\Delta}{ΑΟΔ}$ είναι:

$$(ΑΟΔ)=\frac{1}{2}\cdot ΟΑ\cdot ΟΔ\cdot ημ120^\circ=$$
$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \ \text{m}^2$$

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι:

$$(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΟΔ)+(ΓΟΔ)=$$
$$4\sqrt{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}=$$
$$=\frac{8\sqrt{6}+5\sqrt{3}}{2}\ \text{m}^2$$

Άσκηση 5

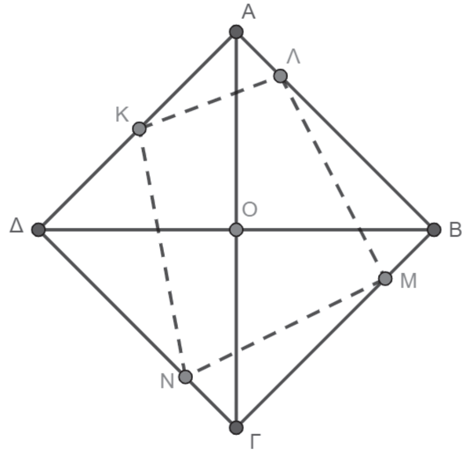
Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α και τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Αν ισχύει $ΑΚ=\frac{1}{2}ΑΔ$, $ΑΛ=\frac{1}{4}ΑΒ$, $ΒΜ=\frac{1}{4}ΒΓ$, $ΓΝ=\frac{1}{4}ΓΔ$, να δείξετε ότι:

α. $(ΑΒΓ)=(ΑΔΓ)=(ΑΔΒ)=(ΓΔΒ)$

β. $(ΒΛΜ)=(ΓΜΝ)$

γ. $(ΚΛΜΝ)=\frac{9}{16}(ΑΒΓΔ)$

Απάντηση



α. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$, $\overset{\Delta}{ΑΔΓ}$ είναι ίσα (έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες), άρα είναι και ισεμβαδικά. Οπότε:

$$(ΑΒΓ)=(ΑΔΓ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓΔ).$$

Όμοια, τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΒΔ}$ και $\overset{\Delta}{ΓΒΔ}$ είναι ίσα, άρα είναι και ισεμβαδικά. Οπότε:

$$(ΑΒΔ)=(ΓΒΔ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓΔ).$$

Άρα

$$(ΑΒΓ)=(ΑΔΓ)=(ΑΒΔ)=(ΓΒΔ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓΔ).$$

β. Επειδή $\hat{Β}+\hat{Γ}=180^\circ$ ως εντός κι επί τα αυτά, έχουμε:

$$\frac{(ΒΛΜ)}{(ΓΜΝ)}=\frac{ΒΛ\cdot ΒΜ}{ΓΜ\cdot ΓΝ}=\frac{\frac{3}{4}α\cdot\frac{1}{4}α}{\frac{3}{4}α\cdot\frac{1}{4}α}=1\Leftrightarrow$$
$$(ΒΛΜ)=(ΓΜΝ)$$

γ. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΚΛ}$ και $\overset{\Delta}{ΑΔΒ}$ έχουν τη γωνία $\hat{Α}$ κοινή, οπότε:

$$\frac{(ΑΚΛ)}{(ΑΔΒ)}=\frac{ΑΚ\cdot ΑΛ}{ΑΔ\cdot ΑΒ}=\frac{\frac{1}{2}α\cdot\frac{1}{4}α}{α\cdot α}=\frac{1}{8}\Rightarrow$$
$$(ΑΚΛ)=\frac{1}{8}(ΑΔΒ)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{16}(ΑΒΓΔ)$$

Όμοια, τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΒΛΜ}$ και $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ έχουν τη γωνία $\hat{Β}$ κοινή, οπότε:

$$\frac{(\mathrm{B\Lambda M})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{B\Lambda}\cdot\mathrm{BM}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{\Gamma A}}=\frac{\frac{3}{4}\alpha\cdot\frac{1}{4}\alpha}{\alpha\cdot\alpha}=\frac{3}{16}\Rightarrow$$

$$(\mathrm{B\Lambda M})=\frac{3}{16}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=$$

$$=\frac{3}{32}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$$

Απ' το ερώτημα (β) είναι

$$(\mathrm{\Gamma MN})=(\mathrm{B\Lambda M})=\frac{3}{32}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$$

κι επιπλέον τα τρίγωνα $\mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{N}$ και $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ έχουν τη γωνία $\overset{\Delta}{\Delta}$ κοινή οπότε:

$$\frac{(\mathrm{K\Delta N})}{(\mathrm{A\Delta\Gamma})}=\frac{\mathrm{\Delta K}\cdot\mathrm{\Delta N}}{\mathrm{\Delta A}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}}=\frac{\frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{3}{4}\alpha}{\alpha\cdot\alpha}=\frac{3}{8}\Rightarrow$$

$$(\mathrm{K\Delta N})=\frac{3}{8}(\mathrm{A\Delta\Gamma})=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\frac{3}{16}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$$

Συνεπώς έχουμε:

$$(\mathrm{K\Lambda MN})=(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-(\mathrm{AK\Lambda})-(\mathrm{B\Lambda M})-$$

$$-(\mathrm{\Gamma MN})-(\mathrm{K\Delta N})=(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-\frac{1}{16}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-$$

$$-\frac{3}{32}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-\frac{3}{32}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-\frac{3}{16}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=$$

$$\left(1-\frac{1}{16}-\frac{3}{32}-\frac{3}{32}-\frac{3}{16}\right)(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=$$

$$\frac{32-2-3-3-6}{32}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=$$

$$\frac{18}{32}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\frac{9}{16}(\mathrm{AB\Gamma\Delta}).$$

Άσκηση 6

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$ και τυχαίο σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ. Η παράλληλη από το Ρ στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ, ενώ η παράλληλη από το Ρ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ.
Αν $(\mathrm{A\Delta Z})=\mathrm{E}_1$, $(\mathrm{B\Delta P})=\mathrm{E}_2$, $(\mathrm{\Gamma PZ})=\mathrm{E}_3$ και $(\mathrm{AB\Gamma})=\mathrm{E}$, να δείξετε ότι:

α. $\sqrt{\mathrm{E}}=\sqrt{\mathrm{E}_2}+\sqrt{\mathrm{E}_3}$

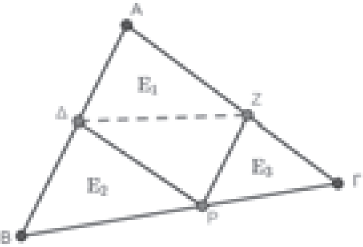
β. $\mathrm{E}_1=\sqrt{\mathrm{E}_2\cdot\mathrm{E}_3}$

Απάντηση

α. Είναι $\Delta\mathrm{P}//\mathrm{A\Gamma}//\mathrm{AZ}$, οπότε τα τρίγωνα $\mathrm{B}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{P}$ και $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι όμοια, με:

$$\frac{(\mathrm{B\Delta P})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\left(\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2\Rightarrow\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}}=\left(\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{B\Gamma}}\Rightarrow\frac{\sqrt{\mathrm{E}_2}}{\sqrt{\mathrm{E}}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{B\Gamma}}\qquad(1).$$



Επίσης $\mathrm{PZ}//\mathrm{AB}//\mathrm{A\Delta}$, οπότε τα τρίγωνα $\Gamma\overset{\Delta}{\mathrm{P}}\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι όμοια, με:

$$\frac{(\mathrm{\Gamma PZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\left(\frac{\mathrm{\Gamma P}}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2\Rightarrow\frac{\mathrm{E}_3}{\mathrm{E}}=\left(\frac{\mathrm{\Gamma P}}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mathrm{E}_3}{\mathrm{E}}}=\frac{\mathrm{\Gamma P}}{\mathrm{B\Gamma}}\Rightarrow\frac{\sqrt{\mathrm{E}_3}}{\sqrt{\mathrm{E}}}=\frac{\mathrm{\Gamma P}}{\mathrm{B\Gamma}}\qquad(2).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{E}_2}}{\sqrt{\mathrm{E}}}+\frac{\sqrt{\mathrm{E}_3}}{\sqrt{\mathrm{E}}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{B\Gamma}}+\frac{\mathrm{\Gamma P}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{E}_2}+\sqrt{\mathrm{E}_3}}{\sqrt{\mathrm{E}}}=1\Leftrightarrow\sqrt{\mathrm{E}_2}+\sqrt{\mathrm{E}_3}=\sqrt{\mathrm{E}}.$$

β. Το τετράπλευρο ΑΔΡΖ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $(\mathrm{P\Delta Z})=(\mathrm{A\Delta Z})=\mathrm{E}_1$.

Είναι $(\mathrm{AB\Gamma})=(\mathrm{A\Delta PZ})+(\mathrm{B\Delta P})+(\mathrm{\Gamma PZ})\Leftrightarrow$

$$\mathrm{E}=2\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3\Leftrightarrow\sqrt{\mathrm{E}}^2=2\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3\Leftrightarrow$$

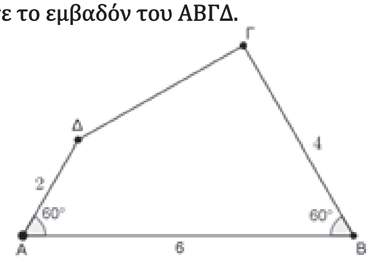
$$\left(\sqrt{\mathrm{E}_2}+\sqrt{\mathrm{E}_3}\right)^2=2\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E}_2+2\sqrt{\mathrm{E}_2\cdot\mathrm{E}_3}+\mathrm{E}_3=2\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3\Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{E}_1=2\sqrt{\mathrm{E}_2\cdot\mathrm{E}_3}\Leftrightarrow\mathrm{E}_1=\sqrt{\mathrm{E}_2\cdot\mathrm{E}_3}.$$

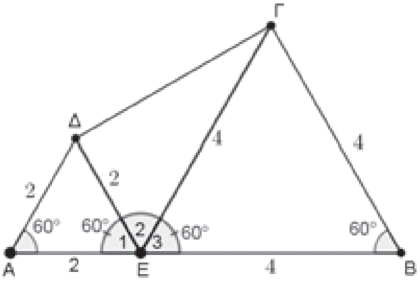
Άσκηση 7

Στο παρακάτω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=60^\circ$ $\mathrm{A\Delta}=2$, $\mathrm{B\Gamma}=4$ και $\mathrm{AB}=6$. Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



Απάντηση:

Επιλέγουμε σημείο Ε στην ΑΒ τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΔ = 2$ άρα $ΒΕ = ΒΓ = 4$.



Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (ΑΔ=ΑΕ) άρα $\hat{Δ} = \hat{Ε}$ και αφού $\hat{Α} + \hat{Ε} + \hat{Δ} = 180^\circ$ είναι $\hat{Δ} = \hat{Ε} = 60^\circ$ οπότε το ΑΔΕ είναι ισόπλευρο. Όμοια το τρίγωνο ΕΓΒ είναι ισόπλευρο.

Έτσι $ΔΕ = 2$, $ΓΕ = 4$ και $\hat{Ε}_1 = \hat{Ε}_3 = 60^\circ$ άρα $\hat{Ε}_2 = 180^\circ - \hat{Ε}_1 - \hat{Ε}_3 = 60^\circ$.

Το τρίγωνο ΓΔΕ έχει εμβαδό

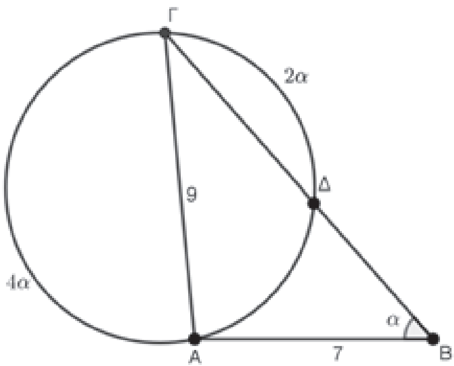
$$(ΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΓΕ \cdot ΔΕ \cdot ημ60^\circ = 2\sqrt{3}\text{, οπότε}$$

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΔΕ) + (ΓΔΕ) + (ΓΕΒ) =$$

$$= \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + 2\sqrt{3} + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3} \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 8

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} > 90^\circ$, $\hat{Β} = α$, $ΑΓ = 9$ και $ΑΒ = 7$.

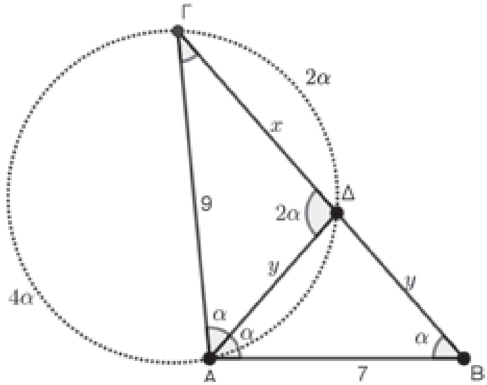


Αν $\overset{\frown}{ΑΓ} = 4α$ και $\overset{\frown}{ΓΔ} = 2α$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Απάντηση:

Η εγγεγραμμένη γωνία $Γ\hat{Α}Δ = α$ και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι όμοια ($\hat{Γ}$ κοινή και $Γ\hat{Β}Α = Γ\hat{Α}Δ = α$) άρα προκύπτουν οι λόγοι:

$$\frac{ΓΔ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \quad (1)$$



Η εγγεγραμμένη γωνία $Γ\hat{Δ}Α = 2α$ οπότε και $Γ\hat{Α}Β = 2α$ (διότι τα τρίγωνα ΓΔΑ και ΑΒΓ έχουν δυο γωνίες ίσες), άρα

$$Γ\hat{Α}Δ + Δ\hat{Α}Β = 2α \Rightarrow α + Δ\hat{Α}Β = 2α \Rightarrow Δ\hat{Α}Β = α$$

οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές ($Δ\hat{Α}Β = Δ\hat{Β}Α = α$) και η (1) γίνεται:

$$\frac{x}{9} = \frac{9}{x+y} = \frac{y}{7}$$

από την οποία προκύπτει:

$$\begin{cases} y = \frac{7}{9}x \\ 81 = x(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{9}x \\ 81 = x\left(x + \frac{7}{9}x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{9}x \\ 81 = \frac{16}{9}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{7}{9}x \\ x = \frac{27}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{9} \cdot \frac{27}{4} \\ x = \frac{27}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{21}{4} \\ x = \frac{27}{4} \end{cases}$$

Άρα $ΒΓ = x + y = \frac{48}{4} = 12$.

Είναι $τ = \frac{12+9+7}{2} = 14$

και από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε:

$$(ΑΒΓ) = \sqrt{14 \cdot (14-12)(14-9)(14-7)} = 14\sqrt{5} \text{ τ.μ}$$

Άσκηση 9

Να αποδείξετε ότι αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι κάθετες τότε ισχύει $ΑΒ^2 + ΔΓ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2$. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

Απάντηση:

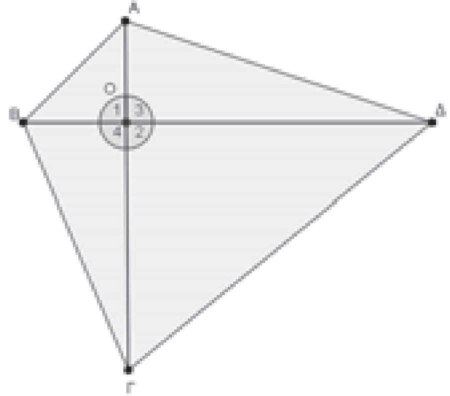
Έστω Ο το σημείο τομής των κάθετων διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Τότε σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ έχουμε, αντιστοίχως:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \text{ και } \Delta\Gamma^2 = O\Delta^2 + O\Gamma^2 \text{, άρα}$$

$$AB^2 + \Delta\Gamma^2 = OA^2 + OB^2 + O\Gamma^2 + O\Delta^2 \ (1) \text{ και}$$

σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΔ έχουμε, αντιστοίχως:

$B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2$ και $A\Delta^2 = OA^2 + O\Delta^2$, επομένως η (1) γίνεται: $AB^2 + \Delta\Gamma^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$



Αντίστροφα:
Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ για το οποίο ισχύει $AB^2 + \Delta\Gamma^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$ (2) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ (σχήμα).

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \text{συν}\hat{O}_1$$

$$\Delta\Gamma^2 = O\Delta^2 + O\Gamma^2 - 2O\Delta \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}\hat{O}_2$$

$$A\Delta^2 = OA^2 + O\Delta^2 - 2OA \cdot O\Delta \cdot \text{συν}\hat{O}_3$$

$$B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2 - 2OB \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}\hat{O}_4$$

και η (2) γίνεται:

$$OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \text{συν}\hat{O}_1 +$$
$$O\Delta^2 + O\Gamma^2 - 2O\Delta \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}\hat{O}_2 =$$
$$OA^2 + O\Delta^2 - 2OA \cdot O\Delta \cdot \text{συν}\hat{O}_3 +$$
$$OB^2 + O\Gamma^2 - 2OB \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}\hat{O}_4 \Rightarrow$$

$$OA \cdot OB \cdot \text{συν}\hat{O}_1 + O\Delta \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}\hat{O}_2 =$$
$$OA \cdot O\Delta \cdot \text{συν}\hat{O}_3 + OB \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}\hat{O}_4 \quad (3)$$

Όμως $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ ως κατακορυφήν άρα η (3) γίνεται:

$$(OA \cdot OB + O\Delta \cdot O\Gamma) \cdot \text{συν}\hat{O}_1 =$$
$$(OA \cdot O\Delta + OB \cdot O\Gamma) \cdot \text{συν}\hat{O}_3 \quad (4)$$

και $\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 2L$ άρα $\text{συν}\hat{O}_3 = -\text{συν}\hat{O}_1$ συνεπώς η (4) γίνεται:

$$(OA \cdot OB + O\Delta \cdot O\Gamma + OA \cdot O\Delta + OB \cdot O\Gamma) \cdot \text{συν}\hat{O}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(OA \cdot (OB + O\Delta) + O\Gamma \cdot (O\Delta + OB)\right) \cdot \text{συν}\hat{O}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$(OA + O\Gamma)(OB + O\Delta) \cdot \text{συν}\hat{O}_1 = 0 \Rightarrow$$

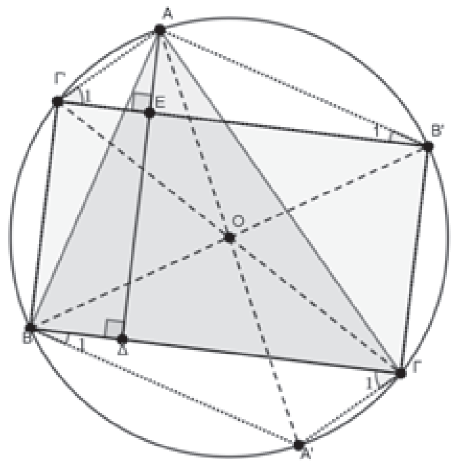
$$A\Gamma \cdot B\Delta \cdot \text{συν}\hat{O}_1 = 0 \underset{B\Delta \neq 0}{\overset{A\Gamma \neq 0}{\Rightarrow}} \text{συν}\hat{O}_1 = 0 \Rightarrow \hat{O}_1 = 1L$$

Δηλαδή $A\Gamma \perp B\Delta$.

Άσκηση 10

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εμβαδού α εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ και τις διαμέτρους ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ'. Δείξτε ότι $(AB'\Gamma A'B\Gamma') = 2\alpha$.

Απάντηση:



Το τετράπλευρο Γ'Β'ΓΒ είναι ορθογώνιο (οι διαγώνιες διχοτομούνται και είναι ίσες) άρα $B'\Gamma' = B\Gamma$. Είναι $A\hat{O}B' = B\hat{O}A'$ άρα $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{A'B}$ οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_1'$ και $A\hat{O}\Gamma' = \Gamma\hat{O}A'$, άρα $\overset{\frown}{A\Gamma'} = \overset{\frown}{A'\Gamma}$, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{B}_1'$. Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΑΓ'Β' και ΒΓΑ' είναι ίσα.

Έστω Ε το σημείο τομή της ΑΔ με τη Β'Γ'. Αφού $B'\Gamma' // B\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$ είναι $AE \perp B'\Gamma'$.

Έχουμε:

$$(AB'\Gamma A'B\Gamma') = (A\Gamma'B') + (A'B\Gamma) + (B\Gamma B'\Gamma') =$$

$$2(A\Gamma'B') + (B\Gamma B'\Gamma') = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AE \cdot B'\Gamma' + B'\Gamma' \cdot \Delta E =$$

$$B'\Gamma'(AE + \Delta E) = B'\Gamma' \cdot A\Delta = B\Gamma \cdot A\Delta = 2(AB\Gamma) = 2\alpha.$$

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις στην ευθεία

Γιαννακόπουλος Σπύρος – Τσακιρτζής Στέλιος

Θέμα 1.

Αν αριθμήσουμε τις εβδομάδες του χρόνου και με n παραστήσουμε τις περιττές εβδομάδες, θεωρούμε την εξίσωση

$$(n^2-4)x+(n-2)y+6-2n^2+n=0 \ (1).$$

Μια βάρκα ψαρεύει κάθε περιττή εβδομάδα και ακολουθεί διαδρομή με εξίσωση την (1).

i. Δείξτε ότι όλες οι διαδρομές της βάρκας διέρχονται από το ίδιο σημείο P το οποίο να βρείτε.

ii. Ένας φάρος βρίσκεται στο σημείο $Q(3,4)$. Την τρίτη εβδομάδα πόσο κοντά από το φάρο περνάει η διαδρομή της βάρκας;

Απάντηση

i. Αφού ο n είναι περιττός αριθμός είναι $n-2\neq 0$. Άρα η (1) είναι εξίσωση ευθείας.

Οι ευθείες με εξίσωση την (1) διέρχονται όλες από το σημείο $P(x_0,y_0)$ αν και μόνο αν για κάθε $n\in\{1,3,5,\cdots,51\}$ είναι: $(n^2-4)x_0+(n-2)y_0+6-2n^2+n=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x_0-2)n^2+(y_0+1)\eta-4x_0-2y_0+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2=0 \\ y_0+1=0 \\ -4x_0-2y_0+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_0=2 \\ y_0=-1 \end{cases}$. Άρα όλες οι διαδρομές της βάρκας διέρχονται από το σημείο $P(2,-1)$.

ii. Για $n=3$ η διαδρομή της βάρκας είναι η ευθεία $(\varepsilon):5x+y-9=0$. Η ζητούμενη απόσταση είναι

$$d(Q,(\varepsilon))=\frac{|15+4-9|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{13}.$$

Θέμα 2

Τα σημεία $A(-2,3),B(3,8),\Gamma(3,1)$ και Δ είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Να βρείτε:

i. Την κορυφή Δ.

ii. Τη γωνία $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου και το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του.

iii. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

iv. Τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-8$.

Απάντηση

i. Έστω $\Delta(x,y)$. Είναι $\overrightarrow{AB}=(5,5)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(3-x,1-y)$. Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Όμως,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow(5,5)=(3-x,1-y)\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3-x=5 \\ 1-y=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$. Άρα $\Delta(-2,-4)$.

ii. Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=(0,-7)$,

$$\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Delta}|}=\frac{-35}{5\sqrt{2}\cdot 7}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu A=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \hat{A}=135^0.$$

Έστω $\vec{\delta_1}=\overrightarrow{A\Gamma}=(5,-2)$ και $\vec{\delta_2}=\overrightarrow{B\Delta}=(-5,-12)$

Έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\frac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=-\frac{1}{13\sqrt{29}}$.

Άρα αν ω η οξεία γωνία των διαγωνίων τότε θα είναι $\sigma\upsilon\nu\omega=\left|-\frac{1}{13\sqrt{29}}\right|=\frac{1}{13\sqrt{29}}$

iii. $(AB\Gamma\Delta)=2(AB\Gamma)=2\cdot\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=$

$\left\|\begin{matrix} 5 & 5 \\ 5 & -2 \end{matrix}\right\|=|-35|=35$ τ.μ.

iv. 1ος τρόπος:

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του ζητούμενου γ.τ. Θα ισχύει:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-8\Leftrightarrow$

$(-2-x,3-y)\cdot(3-y,8-y)=-8\Leftrightarrow$

$(-2-x)(3-x)+(3-y)(8-y)=-8\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$x^2+y^2-x-11y+2=0 \ \ (1)$

Επειδή $(-1)^2+(-11)^2-4\cdot 2=114>0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$K\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{114}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

2ος τρόπος:

Έστω Σ το μέσο του AB.

$(1)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{\Sigma A}-\overrightarrow{\Sigma M}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Sigma B}-\overrightarrow{\Sigma M}\right)=-8\Leftrightarrow$

$(1)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{\Sigma A}-\overrightarrow{\Sigma M}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{\Sigma A}-\overrightarrow{\Sigma M}\right)=-8\Leftrightarrow$

$-\left(\overrightarrow{\Sigma A}^2-\overrightarrow{\Sigma M}^2\right)=-8\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{\Sigma M}\right|^2=\left|\overrightarrow{\Sigma A}\right|^2-8\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{\Sigma M}\right|^2=\frac{25}{2}-8\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{\Sigma M}\right|=\frac{9}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{\Sigma M}\right|=\frac{9\sqrt{2}}{2}$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $\Sigma\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$ και ακτίνα $r=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Θέμα 3

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1):\lambda x+(\lambda+2)y-8=0$ και $(\varepsilon_2):(2\lambda-1)x+2(\lambda+1)y+2=0$ με $\lambda\in R$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία είναι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.

β. Αν $\lambda=2$ να βρείτε:

i. Την απόσταση των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

ii. Την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$. Αν η ευθεία (ε_1) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία (ε_2) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, για ποιο σημείο M της μεσοπαράλληλης ευθείας είναι $\Gamma\hat{B}M=90^0$.

iii. Θεωρούμε την εξίσωση $\varepsilon_1+t\varepsilon_2=0$ (1), $t\in R$. Πότε η (1) είναι εξίσωση ευθείας και τι εκφράζει.

Απάντηση

α. Έστω $\vec{\delta}_1//(\varepsilon_1)$ και $\vec{\delta}_2//(\varepsilon_2)$, τότε έχουμε $\vec{\delta}_1=(\lambda+2,-\lambda)$ και $\vec{\delta}_2=(2(\lambda+1),-(2\lambda-1))$.

$(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)\Leftrightarrow\vec{\delta}_1//\vec{\delta}_2\Leftrightarrow\det\left(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2\right)=0\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix}\lambda+2 & -\lambda\\ 2(\lambda+1) & -(2\lambda-1)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow\lambda=2$.

β. Για $\lambda=2$ έχουμε $(\varepsilon_1):x+2y-4=0$ και $(\varepsilon_2):3x+6y+2=0$.

i. Για $y=0$ από την εξίσωση της (ε_1) παίρνουμε $x=4$. Άρα $A(4,0)\in(\varepsilon_1)$. Η απόσταση των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι $d((\varepsilon_1),(\varepsilon_2))=d(A,(\varepsilon_2))=$

$\frac{|3\cdot4+6\cdot0+2|}{\sqrt{3^2+6^2}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{15}$.

ii. 1ος τρόπος:

Έστω (ε) η μεσοπαράλληλη ευθεία των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, τότε $\lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{1}{2}$ και τα σημεία B και Λ που οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνουν τον $y'y$. Προφανώς είναι $B(0,2)$ και $\Lambda\left(0,-\frac{1}{3}\right)$. Αν N το μέσο της $B\Lambda$ θα είναι $N\left(0,\frac{5}{6}\right)$. Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης θα είναι: $y-\frac{5}{6}=-\frac{1}{2}(x-0)$ δηλαδή $3x+6y-5=0$

2ος τρόπος:

$(\varepsilon):y=-\frac{1}{2}x+\kappa\Leftrightarrow x+2y-2\kappa=0$. Για $x=0$ από τις εξισώσεις των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και (ε) παίρνουμε $y_{\varepsilon_1}=2, y_{\varepsilon_2}=-\frac{1}{3}$ και $y_\varepsilon=\kappa$. Πρέπει $-\frac{1}{3}<\kappa<2$ (2) και για το σημείο $A(4,0)\in(\varepsilon_1)$ είναι

$d(A,(\varepsilon))=\frac{d((\varepsilon_1),(\varepsilon_2))}{2}\Leftrightarrow$

$\frac{|4+2\cdot0-2\kappa|}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{15}\Leftrightarrow|2\kappa-4|=\frac{7}{3}\Leftrightarrow$

$2\kappa-4=\frac{7}{3}$ ή $2\kappa-4=-\frac{7}{3}\Leftrightarrow\kappa=\frac{19}{6}$ ή $\kappa=\frac{5}{6}$.

Λόγω της (2) δεκτή τιμή η $\kappa=\frac{5}{6}$, οπότε η (ε) έχει εξίσωση:

$(\varepsilon): x+2y-\frac{5}{3}=0\Leftrightarrow 3x+6y-5=0$.

Έχουμε $B(0,2)$ και $\Gamma\left(-\frac{2}{3},0\right)$. Έστω $M(x,y)$ το ζητούμενο σημείο, τότε $3x+6y-5=0\Leftrightarrow$ $x=\frac{5}{3}-2y$. Άρα $M\left(\frac{5}{3}-2y,y\right)$.

$\overrightarrow{BM}=\left(\frac{5}{3}-2y,y-2\right)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\left(-\frac{2}{3},-2\right)$.

$\Gamma\hat{B}M=90^0\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}-2y\right)-2(y-2)=0\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow y=\frac{13}{3}$ και $x=-7$. Άρα

$M\left(-7,\frac{13}{3}\right)$.

iii. $(1)\Leftrightarrow\cdots(3t+1)x+(6t+2)y+2t-4=0$ (3).

- Αν $t=-\frac{1}{3}$, η (3) είναι αδύνατη.
- Αν $t\neq-\frac{1}{3}$, η (3) είναι εξίσωση ευθείας (ζ_t) με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Άρα για $t\neq-\frac{1}{3}$ η (2) εκφράζει εξισώσεις ευθειών (ζ_t) παράλληλες στις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ (δέσμη παραλλήλων ευθειών).

Σχόλιο: Αν $(\varepsilon_1): Ax+By+\Gamma_1=0$, $(\varepsilon_2): Ax+By+\Gamma_2=0$ δύο παράλληλες ευθείες η απόστασή τους είναι $d((\varepsilon_1),(\varepsilon_2))=\frac{|\Gamma_1-\Gamma_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Επίσης η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι $Ax+By+\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}=0$.

Θέμα 4

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1): 2x+3y-6=0$ και $(\varepsilon_2): 2x+3y+9=0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση των ευθειών που περνούν από την αρχή των αξόνων, τέμνουν τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και μεταξύ των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τα σημεία τομής ορίζουν τμήμα μήκους 5 μονάδων.

β. Θεωρούμε την ευθεία (ζ) του ερωτήματος α για την οποία ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης. Να βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των κύκλων που έχουν ακτίνα $r=1$ αν εφάπτονται στην ευθεία (ζ).

Απάντηση

Από την αρχή των αξόνων διέρχονται οι ευθείες $(\eta_1): x=0$ και $(\eta_2): y=\lambda x$.

- Εξετάζουμε αν η (η_1) είναι λύση του προβλήματος. Η (η_1) είναι ο άξονας $y'y$. Για $x=0$ από την εξίσωση της ε_1 παίρνουμε $y=2$. Άρα η (η_1) τέμνει την (ε_1) στο σημείο Α(0,2). Για $x=0$ από την εξίσωση της (ε_2) παίρνουμε $y=-3$. Άρα η (η_1) τέμνει την (ε_2) $B(0,-3)$. Έχουμε $(AB)=\sqrt{25}=5$. Άρα η (η_1) είναι λύση του προβλήματος.

Αναζητούμε λύση του προβλήματος μεταξύ των ευθειών (η_2).

Ο συντελεστής διεύθυνσης των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι $\lambda=-\frac{2}{3}$. Η (η_2) θέλουμε να τέμνει τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, οπότε πρέπει $\lambda\neq-\frac{2}{3}$. Ας είναι Γ,Δ τα σημεία τομής της (η_2) με τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες του Γ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=\lambda x \\ 2x+3y-6=0 \end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left(x=\frac{6}{3\lambda+2}, y=\frac{6\lambda}{3\lambda+2}\right)$$

Άρα $\Gamma\left(\frac{6}{3\lambda+2},\frac{6\lambda}{3\lambda+2}\right)$.

Όμοια οι συντεταγμένες του Δ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=\lambda \chi \\ 2x+3y+9=0 \end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left(x=\frac{-9}{3\lambda+2}, y=\frac{-9\lambda}{3\lambda+2}\right)$$

Άρα $\Delta\left(\frac{-9}{3\lambda+2},\frac{-9\lambda}{3\lambda+2}\right)$.

Απαιτούμε $(\Gamma\Delta)=5\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\lambda=\frac{5}{12}$.

Άρα $(\eta_2): y=\frac{5}{12}x$.

Τελικά οι ζητούμενες ευθείες είναι $(\eta_1): x=0$ και $(\eta_2): y=\frac{5}{12}x$.

β. Είναι $(\zeta): y=\frac{5}{12}x\Leftrightarrow 5x-12y=0$.

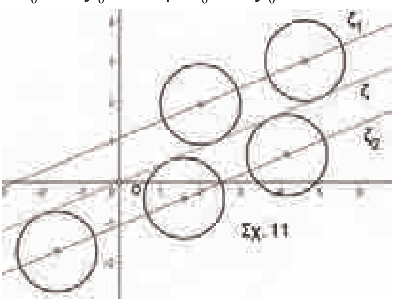
Έστω $K(x_0,y_0)$ τα κέντρα των κύκλων που εφάπτεται στην (ζ) και έχουν ακτίνα $r=1$.

Πρέπει: $d(K,(\zeta))=1$. Όμως,

$d(K,(\zeta))=1\Rightarrow|5x_0-12y_0|=13\Rightarrow$

$5x_0-12y_0=13$ ή $5x_0-12y_0=-13\Rightarrow$

$5x_0-12y_0=13$ ή $5x_0-12y_0=-13$.



Σχ. 11

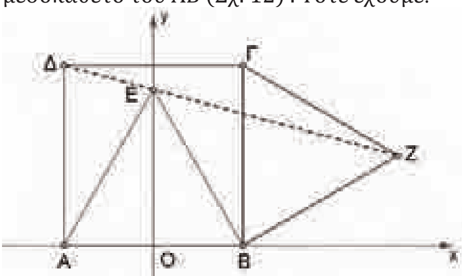
Άρα τα σημεία Μ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες με εξισώσεις $(\zeta_1): 5x-12y+13=0$, $(\zeta_2): 5x-12y-13=0$ (Σχ. 11).

Θέμα 5

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Εσωτερικά του τετραγώνου κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ και εξωτερικά του τετραγώνου κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΖΓ. Δείξτε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

Απάντηση

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με άξονα τετμημένων την ευθεία ΑΒ και άξονα τεταγμένων την μεσοκάθετο του ΑΒ (Σχ. 12). Τότε έχουμε:



Σχ. 12

1ος τρόπος:

$$\Delta\left(-\frac{\alpha}{2},\alpha\right), E\left(0,\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right), Z\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$$

Οπότε

$$\overrightarrow{\Delta E}=\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha\left(\sqrt{3}-2\right)}{2}\right), \overrightarrow{\Delta Z}=\left(\frac{\alpha\left(\sqrt{3}+2\right)}{2},-\frac{\alpha}{2}\right)$$

και $\det\left(\overrightarrow{\Delta E},\overrightarrow{\Delta Z}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha\left(\sqrt{3}-2\right)}{2}\\ \frac{\alpha\left(\sqrt{3}+2\right)}{2} & -\frac{\alpha}{2}\end{vmatrix}=$

$=\alpha\left|-1+1\right|=0$. Άρα $\overrightarrow{\Delta E}\parallel\overrightarrow{\Delta Z}$ δηλαδή τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

2ος τρόπος:

$A\left(-\frac{\alpha}{2},0\right)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$, $\Delta\left(-\frac{\alpha}{2},\alpha\right)$.

Η γωνία που σχηματίζει η (ΒΕ) με τον άξονα $x'x$ είναι 120^0, οπότε $\lambda_{BE}=\varepsilon\varphi 120^0=-\sqrt{3}$.

Άρα $(BE): y=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)$ (1). Για $x=0$ από την (1) παίρνουμε $y=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα $E\left(0,\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)$.

$(EB)\perp(BZ)\Leftrightarrow\lambda_{BE}\cdot\lambda_{BZ}=-1\Leftrightarrow\lambda_{BZ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα $(BZ): y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)$ (2). Η τεταγμένη του Ζ είναι $\frac{\alpha}{2}$, οπότε για $y=\frac{\alpha}{2}$ από την (2) παίρνουμε $x=\frac{\alpha\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$. Άρα $Z\left(\frac{\alpha(\sqrt{3}+1)}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$.

$$\lambda_{\Delta E}=\frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}-\alpha}{0+\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{3}-2 \quad \text{και}$$

$$\lambda_{EZ}=\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}-0}=\frac{1-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=\sqrt{3}-2.$$

Αφού $\lambda_{\Delta E}=\lambda_{EZ}\Leftrightarrow \Delta E//EZ$ που σημαίνει ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

Θέμα 6

Έστω ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, όχι ορθογώνιο, με $\hat{A}=\hat{\Gamma}=90^0$. Αν Μ,Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $MN\perp A\Gamma$.

Απάντηση

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή την κορυφή $A(0,0)$ και άξονες $x'x$ και $y'y$ τους φορείς των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα (Σχ. 13). Ας είναι $B(0,\beta)$, $\Gamma(\gamma_1,\gamma_2)$, $\Delta(\delta,0)$. Τότε το σημείο Μ είναι $M\left(\frac{\delta}{2},\frac{\beta}{2}\right)$ και το σημείο Ν είναι $N\left(\frac{\gamma_1}{2},\frac{\gamma_2}{2}\right)$. Επειδή το τετράπλευρο δεν είναι ορθογώνιο έχουμε $M\neq N$ και $\beta\neq\gamma_2, \delta\neq\gamma_1$.

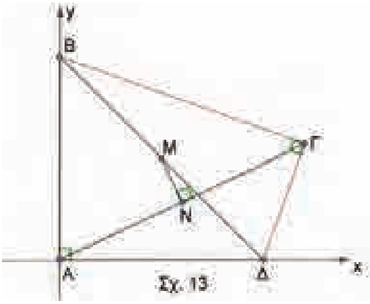
$\lambda_{MN}=\frac{\gamma_2-\beta}{\gamma_1-\delta}$ και $\lambda_{A\Gamma}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$.

$$\lambda_{MN}\cdot\lambda_{A\Gamma}=\frac{\gamma_2\left(\gamma_2-\beta\right)}{\gamma_1\left(\gamma_1-\delta\right)} \quad (1).$$

$\lambda_{\Delta\Gamma}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1-\delta}$, $\lambda_{B\Gamma}=\frac{\gamma_2-\beta}{\gamma_1}$. Επειδή

$$\Delta\Gamma \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{\Delta\Gamma}\cdot\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \frac{\gamma_2(\gamma_2-\beta)}{\gamma_1(\gamma_1-\delta)} = -1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$\lambda_{MN}.\lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow MN \perp A\Gamma$.



Σχόλιο: Μερικά θέματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορούν να αντιμετωπισθούν με τη βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας ως εξής:

Βήμα 1ο:
Επιλέγουμε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι γραμμές θα εκφράζονται με απλές εξισώσεις. Το σύστημα αυτό δεν είναι μοναδικό.

Βήμα 2ο:
Θεωρούμε συντεταγμένες στα απαραίτητα σημεία, δηλαδή στα σημεία που αρκούν για τον προσδιορισμό των εξισώσεων των γραμμών που είναι απαραίτητες. Ύστερα ακολουθούμε "αναλυτικές διαδικασίες".

Θέμα 7

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda-1)y = 2\lambda \text{ και}$$
$$\varepsilon_2: (\lambda+1)x + \lambda y = 2\lambda+1$$

i) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

iii) Για $\lambda=-1$ να βρείτε τα σημεία τομής της ε_1 με τον κύκλο $x^2+y^2=1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι το ένα από αυτά ανήκει στην ευθεία ε_2.

Λύση

i) Οι ευθείες τέμνονται όταν η ορίζουσα D του συστήματος είναι διαφορετική του μηδενός. Πράγματι για κάθε πραγματικό αριθμό λ

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 - (\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^2 - \lambda^2 + 1 = 1 \neq 0$$

ii) Υπολογίζουμε τις D_x και D_y του συστήματος των ευθειών.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ 2\lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - (\lambda-1)(2\lambda+1)$$
$$= 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda + 1 = \lambda+1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \lambda+1 & 2\lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(2\lambda+1) - 2\lambda(\lambda+1) =$$
$$= 2\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda$$

Το σημείο τομής των είναι:

$$(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\lambda+1}{1}, \frac{-\lambda}{1}\right) = (\lambda+1, -\lambda)$$

iii) Για $\lambda=-1$ η ευθεία γίνεται $-x-2y=-2$ δηλαδή $x+2y=2$ από την οποία έχουμε $x=2-2y$. Άρα αν M σημείο της ε_1 τότε θα είναι $M(2-2y, y)$, $y \in R$. Το σημείο M θα ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=1$, αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή του, δηλαδή $(2-2y)^2+y^2=1$ (1). Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$(2-2y)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 4 - 8y + 4y^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$5y^2 - 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = \frac{3}{5}.$$

Για $y=1$, $x=0$ ενώ για $y=\frac{3}{5}$, $x=\frac{4}{5}$.

Άρα η ευθεία (ε_1) τέμνει τον κύκλο στα σημεία $(x,y)=(0,1)$ και $(x,y)=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Για $\lambda=-1$ η ευθεία (ε_2) γίνεται $y=1$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0,1)$ ανήκει στην ευθεία $y=1$.

Θέμα 8.

Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει κορυφή $A(1,3)$, εμβαδόν $E=24$ και πλευρές με ευθείες $(\varepsilon_1): x+y-4=0$ και $(\varepsilon_2): x+y+2=0$. Να βρεθούν οι υπόλοιπες κορυφές του ορθογωνίου.

Λύση

Επειδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες $\left(\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = -1\right)$ θα είναι οι ευθείες παράλληλων πλευρών του ζητούμενου παραλληλογράμμου. Επειδή οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση της ε_1 το σημείο A θα ανήκει στην ε_1. Έστω ότι η ευθεία ε_1 είναι η εξίσωση της AB, τότε θα έχουμε: $AB: (\varepsilon_1): x+y-4=0$ οπότε

$\Delta\Gamma:(\varepsilon_2): x+y+2=0$. Αν ε_3 η ευθεία της πλευράς ΑΔ η ε_3 θα είναι κάθετη στην ε_1 οπότε για τους συντελεστές διεύθυνσης θα ισχύει: $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_3}=-1$ δηλαδή $\lambda_{\varepsilon_3}=1$ οπότε η εξίσωσή της θα είναι $y-3=1\cdot(x-1)$ δηλαδή $A\Delta:(\varepsilon_3): x-y+2=0$. Οι συντεταγμένες της κορυφής Δ θα είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε_2 και ε_3:

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-4 \\ y=-2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases},$$

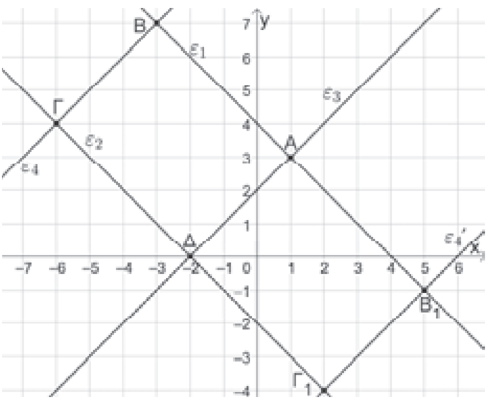
άρα $\Delta(-2,0)$. Επίσης,

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(A,\varepsilon_2)=\frac{|1\cdot 1+1\cdot 3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\cdot\sqrt{2}.$$

Αν $3\sqrt{2}$ η μία διάσταση του ορθογωνίου η άλλη θα είναι $\frac{24}{3\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$. Η κορυφή Δ θα βρίσκεται σε ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon_4): x-y+c=0$. Χρησιμοποιώντας την άλλη διάσταση του ορθογωνίου που βρήκαμε παραπάνω, έχουμε:
$d(\varepsilon_3,\varepsilon_4)=4\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$d(\Delta,\varepsilon_4)=4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|1\cdot(-2)-1\cdot 0+c|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$|c-2|=8 \Leftrightarrow c=10$ ή $c=-6$. Συνεπώς υπάρχουν δυο περιπτώσεις για την ζητούμενη ευθεία: $(\varepsilon_4): x-y+10=0$ και $(\varepsilon_4'): x-y-6=0$. Οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ θα είναι οι λύσεις των συστημάτων των ευθειών $\varepsilon_4,\varepsilon_1$ και $\varepsilon_4,\varepsilon_2$ αντίστοιχα ή $\varepsilon_4',\varepsilon_1$ και $\varepsilon_4',\varepsilon_2$ αντίστοιχα:



$$\begin{cases} x-y=-10 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow B(-3,7),$$

$$\begin{cases} x-y=-10 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \Gamma(-6,4)$$

ή

$$\begin{cases} x-y=6 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow B_1(5,-1),$$

$$\begin{cases} x-y=6 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \Gamma_1(2,-4)$$

Θέμα 9.

Δίνεται η εξίσωση :
$$x^2+y^2+2\cdot x\cdot y+7\cdot x+7\cdot y+10=0.$$

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που παριστάνουν η παραπάνω εξίσωση

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν με τους άξονες οι ευθείες που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση.

Λύση

Ξεκινώντας από την εξίσωση που μας δίνεται:

$x^2+y^2+2\cdot x\cdot y+7\cdot x+7\cdot y+10=0 \Leftrightarrow$

$x^2+2\cdot x\cdot y+y^2+7\cdot(x+y)+10=0 \Leftrightarrow$

$(x+y)^2+7\cdot(x+y)+10=0 \Leftrightarrow$

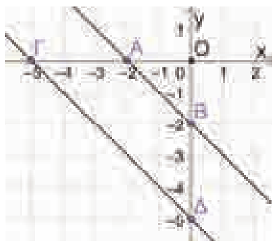
$(x+y+5)(x+y+2)=0 \Leftrightarrow$

$x+y+5=0$ ή $x+y+2=0$

αφού $\omega^2+7\cdot\omega+10=(\omega+5)(\omega+2)$

Άρα οι εξισώσεις των ζητούμενων ευθειών είναι: $(\varepsilon_1): x+y=-2$ ή $(\varepsilon_2): x+y=-5$

Η ευθεία ε_1 τέμνει τον x΄x στο σημείο $A(-2,0)$ και τον y΄y στο σημείο $B(0,-2)$, αντίστοιχα η ευθεία ε_2 τον x΄x στο $\Gamma(-5,0)$ και τον y΄y στο $\Delta(0,-5)$.



Το ζητούμενο τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν:

$$(AB\Gamma\Delta)=(O\Gamma\Delta)-(OAB)=$$

$$\frac{|\overrightarrow{O\Gamma}|\cdot|\overrightarrow{O\Delta}|}{2}-\frac{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}{2}=\frac{25}{2}-\frac{4}{2}=\frac{21}{2}\text{τμ.}$$

όπου $O(0,0)$.

Τάξη: Γ΄

Παράγωγος – Ολοκλήρωμα

Γιάννης Λουριδάς

Γενικό Θέμα

Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια, ώστε $x^2f''(x)=x^2f'(x)-e^x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f'(1)=e$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$f'(x)=\frac{e^x}{x},x\in(0,+\infty).$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τη θέση του σημείου καμπής της.

γ) Να αποδείξετε ότι:

γ₁. $f'(x)\ge e$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ₂. $|f(x)-f(1)|\ge e|x-1|$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Σημείωση: Να αποδείξετε ότι

$\left|\int_1^x f'(t)dt\right|\ge e|x-1|$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση

$f'(x)+\left(f(x)-f(1)\right)^2=e\left(e(x-1)^2+1\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

ε) Να αποδείξετε ότι

$$2\int_1^2 f(3-x)dx>e+2f(1).$$

Συμπληρωματικά ερωτήματα:

στ) Να αποδείξετε ότι

$f\left(e^{x^2+1}\right)+f\left(e^{|x|}\right)>f\left(e^{|\eta\mu x|}\right)+f\left(x^2+2\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ζ) Να αποδείξετε ότι:

ζ₁. $f'(x)\ge\frac{e^2}{4}x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ζ₂. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και h, όπου

$$h(x)=-x^2+\frac{16+e^2}{4}x-4,x\in\mathbb{R},$$

έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο και κοινή εφαπτομένη σε αυτό.

ζ₃. $E<\frac{e}{8}(4-e)$, όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f'}$ και τις ευθείες $x=1$, $x=2$ και $y=\frac{e^2}{4}x$.

ζ₄. $\frac{3e^2}{8}<f(2)-f(1)<\frac{e(e+2)}{4}$.

η) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$2e^x=e^2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

θ) Θεωρούμε τα σημεία $M(x,f'(x)),x\in(x_1,2)$, $K(x_1,f'(x_1))$ και $A(2,f'(2))$, όπου x_1 η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (η).

θ₁. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΑ ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x)=\frac{1}{4}(2-x_1)\left(e^2-2f'(x)\right),x\in(x_1,2).$$

θ₂. Να βρείτε συναρτήσει του x_1 τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου ΜΚΑ.

ι) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$2\left(f''(\xi)+f'(\xi)\right)=e^2.$$

Σημείωση: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$s(x)=e^x\left(f'(x)-\frac{e^2}{2}\right)$, $x\in[x_1,2]$, όπου x_1 η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (η).

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της s έχει ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη στο διάστημα $(x_1,2)$.

ια) Σημείο $N(\alpha,f'(\alpha)),\alpha\in(1,+\infty)$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f' με $\alpha'(t)>0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο Ν τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Η. Τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο Ν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Η είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του Ν.

ιβ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$q(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)-e}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

ιβ₁. Να αποδείξετε ότι η q αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

ιβ₂. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f'(x)-e=2(x-1), x\in(0,+\infty).$$

ιβ₃. Αν Q είναι μια αρχική της q στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε να αποδείξετε ότι

$$Q(x)-Q(1)\le f'(x)-e \text{, για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

ιγ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x)=\frac{e^{2x}(x-1)}{x^3}, x\in(0,+\infty).$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της t, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=2$.

ιδ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$p(x)=(f'(x)-e)^2(x-2)^2, x\in(0,+\infty)$$

ιδ₁. παρουσιάζει ένα, τουλάχιστον τοπικό μέγιστο.

ιδ₂. έχει ακριβώς δύο θέσεις τοπικού ελαχίστου και ακριβώς μία θέση τοπικού μεγίστου στο $(0,+\infty)$.

ιε) Θεωρούμε την ευθεία $(\varepsilon_1): y=\frac{e^2}{4}x-\frac{e^2}{2}$.

ιε₁. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f΄, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε_1).

ιε₂. Αν Μ σημείο της γραφικής παράστασης της f΄ και Σ σημείο της ευθείας (ε_1) τέτοια, ώστε να έχουν την ίδια τεταγμένη, τότε να βρείτε την ελάχιστη απόσταση (ΜΣ).

ιε₃. Αν Μ σημείο της γραφικής παράστασης της f΄ και Ξ σημείο της ευθείας (ε_1) τέτοια, ώστε να έχουν την ίδια τετμημένη, τότε να βρείτε την ελάχιστη απόσταση (ΜΞ).

Απαντήσεις

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$x^2f''(x)=x^2f'(x)-e^x \overset{:x^2}{\Rightarrow} f''(x)-f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^x$$

$$\overset{\cdot e^{-x}}{\Rightarrow} e^{-x}\left(f''(x)-f'(x)\right)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\left(e^{-x}f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\Rightarrow e^{-x}f'(x)=\frac{1}{x}+c, c\in\mathbb{R}.$$

Για $x=1$ έχουμε: $e^{-1}f'(1)=1+c\Rightarrow c=0$, διότι $f'(1)=e$.

Οπότε,

$$e^{-x}f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x}{x}, x\in(0,+\infty).$$

Άρα, $f'(x)=\frac{e^x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Σημείωση: Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}, \text{ και}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

β) Η f΄ είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\ldots=\frac{e^x(x-1)}{x^2}, x\in(0,+\infty).$$

Η ρίζα και το πρόσημο της f΄΄ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		+∞
$f''(x)$		–	0	+	
$f(x)$			Σ.Κ. $(1,f(1))$		

Είναι:

$f''(x)<0$, για κάθε $x\in(0,1)$ και η f συνεχής στο $(0,1]$ ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $(0,1]$.

$f''(x)>0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και η f συνεχής στο $[1,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε η f είναι **κυρτή** στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Η f΄΄ για $x=1$ μηδενίζεται και εκατέρωθεν του 1 αλλάζει πρόσημο. Οπότε, το $x_0=1$ είναι θέση σημείου καμπής της f.

γ) γ₁. Η ρίζα και το πρόσημο της f΄΄ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	Ο.Ε. $f'(1)=e$	$\nearrow$	

Η f' για $x=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f'(1)=e$.

Άρα, $f'(x)\ge e$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ₂. $|f(x)-f(1)|\ge e|x-1| \quad (1)$,

για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

- Για $x=1$, η (1) ισχύει ως ισότητα.
- Για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε κάθε διάστημα με άκρα 1 και x, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και συνεχής σε αυτό. Άρα, υπάρχει $\xi\in(1,x)$ ή $\xi\in(x,1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>e$, λόγω του ερωτήματος (γ₁) και επιπλέον ότι $0<\xi\ne 1$.

Οπότε,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>e\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|>e$$

$\Rightarrow\dfrac{|f(x)-f(1)|}{|x-1|}>e\Rightarrow|f(x)-f(1)|>e|x-1|$, για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Άρα,

$|f(x)-f(1)|\ge e|x-1|$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Σημείωση: Να αποδείξετε ότι $\left|\int_1^x f'(t)dt\right|\ge e|x-1|$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

δ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ λόγω του ερωτήματος (γ) έχουμε:

$f'(x)\ge e=f(1)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επίσης,

$$|f(x)-f(1)|\ge e|x-1|$$

$$\Leftrightarrow\left(|f(x)-f(1)|\right)^2\ge e^2\left(|x-1|\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(f(x)-f(1)\right)^2\ge e^2(x-1)^2,$$

με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$.

Οπότε,

$f'(x)+\left(f(x)-f(1)\right)^2\ge e+e^2(x-1)^2$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα, η εξίσωση:

$$f'(x)+\left(f(x)-f(1)\right)^2=e+e^2(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\left(f(x)-f(1)\right)^2=e\left(e(x-1)^2+1\right),$$

$x\in(0,+\infty)$, έχει ακριβώς μία ρίζα το 1.

ε) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$2\int_1^2 f(3-x)dx>e+2f(1).$$

Στο ολοκλήρωμα $I=\int_1^2 f(3-x)dx$ θέτουμε

$3-x=u$, τότε $du=(3-x)'dx=-dx$.

Για $x=1$, έχουμε $u_1=3-1=2$ και για $x=2$, έχουμε $u_2=3-2=1$.

Άρα,

$$I=\int_1^2 f(3-x)dx=-\int_2^1 f(u)du=\int_1^2 f(u)du=\int_1^2 f(x)dx$$

Είναι, $I=\int_1^2 f(3-x)dx=\int_1^2 f(x)dx$.

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$2\int_1^2 f(x)dx>e+2f(1).$$

Για κάθε $x\in[1,2]$, λόγω του ερωτήματος (γ₂) έχουμε:

$$f(x)-f(1)\ge e(x-1)\Leftrightarrow f(x)\ge e(x-1)+f(1),$$

αφού $x-1\ge 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $f(x)-f(1)\ge 0$.

Το ίσο ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα,

$$\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2\left(e(x-1)+f(1)\right)dx$$

$$=e\int_1^2(x-1)dx+f(1)\int_1^2 dx$$

$$=e\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2+f(1)=\frac{e}{2}+f(1).$$

Δηλαδή,

$$\int_1^2 f(x)dx>\frac{e}{2}+f(1)\Rightarrow 2\int_1^2 f(x)dx>e+2f(1).$$

Συμπληρωματικά ερωτήματα:

στ) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$f\left(e^{x^2+1}\right)+f\left(e^{|x|}\right)>f\left(e^{|\eta\mu x|}\right)+f\left(x^2+2\right),$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0,+\infty)$, αφού $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$|\eta\mu x|\le|x|\overset{e^x\uparrow}{\Rightarrow}e^{|x|}\ge e^{|\eta\mu x|}>0$$

$$\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f\left(e^{|x|}\right)\ge f\left(e^{|\eta\mu x|}\right)\qquad(1),$$

με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=0$.
Επίσης,
$e^x>x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και θέτοντας όπου x το $x^2+1\ge1$ έχουμε: $e^{x^2+1}>x^2+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα, $f\left(e^{x^2+1}\right)>f\left(x^2+2\right)\qquad(2),$
αφού η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0,+\infty)$.
Από τις (1), (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:
$f\left(e^{x^2+1}\right)+f\left(e^{|x|}\right)>f\left(e^{|\eta\mu x|}\right)+f\left(x^2+2\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ζ) $ζ_1$. **1ος τρόπος:** Η f' είναι κυρτή, διότι f' συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f^{(3)}(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, αφού

$$f''(x)=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\ldots=\frac{e^x(x-1)}{x^2},x\in(0,+\infty)\text{ και}$$

$$f^{(3)}(x)=\left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)'=\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3},x\in(0,+\infty)$$

με $e^x>0$, $x^2-2x+2>0$ και $x^3>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο σημείο $A(2,f'(2))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon):y=\frac{e^2}{4}x$.
Άρα, $f'(x)\ge\frac{e^2}{4}x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=2$.

2ος τρόπος: Υπόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)-\frac{e^2}{4}x$, $x\in(0,+\infty)$ και αποδεικνύουμε ότι για $x=2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(2)=0$.

$ζ_2$. Είναι: $f'(2)=h(2)=\frac{e^2}{2}$, και

$$f''(2)=h'(2)=\frac{e^2}{4}.$$

Οπότε, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και h έχουν κοινό σημείο το $A\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$ και κοινή εφαπτομένη σε αυτό την ευθεία $(\varepsilon):y=\frac{e^2}{4}x$.
Το σημείο A είναι το μοναδικό κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f' και h, διότι:
$f'(x)\ge\frac{e^2}{4}x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=2$, λόγω του ερωτήματος ($ζ_1$).
Επίσης,
$h(x)\le\frac{e^2}{4}x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=2$, αφού η h είναι κοίλη, επειδή h συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $h''(x)=-2<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και η ευθεία $(\varepsilon):y=\frac{e^2}{4}x$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $A\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$.
Άρα, $f'(x)\ge h(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=2$.
Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$, και κοινή εφαπτομένη σε αυτό.

$ζ_3$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f'(x)-\frac{e^2}{4}x,\ x\in(0,+\infty).$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]\subset(0,+\infty)$ και $g(x)=f'(x)-\frac{e^2}{4}x\ge0$, για κάθε $[1,2]\subset(0,+\infty)$, λόγω του ερωτήματος ($ζ_1$).
Άρα, για το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισχύει

$$E=\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2\left(f'(x)-\frac{e^2}{4}x\right)dx<(AB\Gamma),\quad\text{διότι}$$

η f' είναι κυρτή, οπότε στο $(1,2)$ το ευθύγραμμο τμήμα AB, χωρίς τα άκρα του, βρίσκεται πάνω από την $C_{f'}$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα ή που μπορούμε να αποδείξουμε με βάση την υπόδειξη της παρακάτω 2ης σημείωσης. Όπου $A\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$,

$B(1,e)$ το σημείο τομής της ευθείας $x=1$ με την $C_{f'}$ και $\Gamma\left(1,\frac{e^2}{4}\right)$ το σημείο τομής της ευθείας $x=1$ με την εφαπτομένη $(\varepsilon): y=\frac{e^2}{4}x$ της $C_{f'}$ στο σημείο Α.

Είναι:

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(B\Gamma)\cdot 1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{e^2}{4}\right)=\frac{e}{8}(4-e)$, διότι η απόσταση του Α από την ευθεία ΒΓ είναι ίση με 1.

Επομένως, $E<\frac{e}{8}(4-e)$.

Σημείωση 1η : Επίσης,

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B\Gamma}\right)\right|=...=\frac{1}{2}\left(e-\frac{e^2}{4}\right)=\frac{e}{8}(4-e)$

Σημείωση 2η: Υπόδειξη

Η εξίσωση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ στο $[1,2]$ είναι $y=e\left(\frac{e}{2}-1\right)x-\frac{e^2}{2}+2e$.

Αποδεικνύουμε ότι $f'(x)\le e\left(\frac{e}{2}-1\right)x-\frac{e^2}{2}+2e$,

για κάθε $x\in[1,2]$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$ και $x=2$.

ζ4. Είναι:

$f(2)-f(1)=\int_1^2 f'(x)dx$.

Λόγω του ερωτήματος **(ζ1)** ισχύει $f'(x)\ge\frac{e^2}{4}x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=2$.

Άρα,

$$\int_1^2 f'(x)dx>\frac{e^2}{4}\int_1^2 xdx=\frac{e^2}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{3e^2}{8}.$$

Δηλαδή, $\int_1^2 f'(x)dx>\frac{3e^2}{8}$.

Επομένως, $f(2)-f(1)>\frac{3e^2}{8}$.

Θα αποδείξουμε ότι $f(2)-f(1)<\frac{e(e+2)}{4}$.

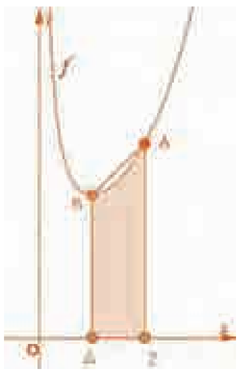
Η f' είναι συνεχής στο $[1,2]\subset(0,+\infty)$ και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in[1,2]$.

Οπότε, το $f(2)-f(1)=\int_1^2 f'(x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f', τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

1ος τρόπος:

Επειδή η f'είναι κυρτή, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (ζ1) και φαίνεται στο επόμενο σχήμα, ισχύει:

$f(2)-f(1)=\int_1^2 f'(x)dx<(AB\Delta Z)$, όπου ΑΒΔΖ τραπέζιο με $A\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$, $B(1,e)$, $\Delta(1,0)$ και $Z(2,0)$.



Είναι:

$$f(2)-f(1)=\int_1^2 f'(x)dx<(AB\Delta Z)=$$

$$=\frac{(\mathrm{AZ})+(\mathrm{B\Delta})}{2}\cdot(\Delta\mathrm{Z})=\frac{1}{2}\cdot\left(e+\frac{e^2}{2}\right)\cdot 1=\frac{e(e+2)}{4}.$$

Άρα, $f(2)-f(1)<\dfrac{e(e+2)}{4}$.

2^ος^ τρόπος: Υπόδειξη

Αποδεικνύουμε ότι $f'(x)\le e+f''(x)(x-1)$, για κάθε $x\in[1,2]$.

Για $x=1$ ισχύει ως ισότητα και για $x\in(1,2]$ με θεώρημα μέσης τιμής για την f' στο $[1,x]$. Στη συνέχεια, ολοκληρώνουμε από 1 έως 2.

Άρα, $\dfrac{3e^2}{8}<f(2)-f(1)<\dfrac{e(e+2)}{4}$.

η) $2e^x=e^2x,\ x\in\mathbb{R}$. (1)

1^ος^ τρόπος: (με τη βοήθεια της f')

Αν $x\le 0$, τότε η εξίσωση (1) είναι αδύνατη, αφού $2e^x>0$ και $e^2x\le 0$, για κάθε $x\le 0$.

Αν $x>0$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$2e^x=e^2x\Leftrightarrow\frac{e^x}{x}=\frac{e^2}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(2). \qquad (2)$$

Για $x>1$ έχουμε: $f'(x)=f'(2)\Leftrightarrow x=2$, διότι η f' είναι 1-1 στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως γνησίως αύξουσα σε αυτό, από το ερώτημα (γ1).

Για $x\in\Delta_1=(0,1]$ έχουμε:

$f'(\Delta_1)=[e,+\infty)$, διότι η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$, οπότε

$$f'(\Delta_1)=\left[f'(1),\lim_{x\to 0^+}f'(x)\right)=[e,+\infty),$$

αφού $f'(1)=e$ και

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\frac{1}{x}\right)=1\cdot(+\infty)=+\infty.$$

Το $f'(2)=\dfrac{e^2}{2}\in f'(\Delta_1)=[e,+\infty)$ και η f' είναι 1-1 στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$, ως γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

Οπότε, η εξίσωση (2) έχει ακριβώς μία ρίζα x_1 στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$.

Άρα, η εξίσωση (2), οπότε και η αρχική εξίσωση (1) έχουν ακριβώς δύο ρίζες.

2^ος^ τρόπος: Υπόδειξη

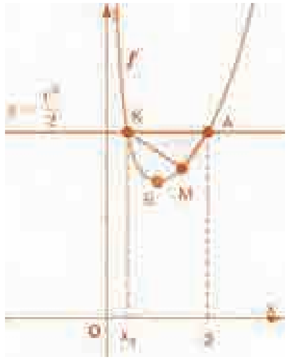
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\kappa(x)=2e^x-e^2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι έχει ακριβώς μία ρίζα x_1 στο διάστημα $\Delta_1=\left(-\infty,\ln\dfrac{e^2}{2}\right]$ και ακριβώς μία ρίζα, το 2, στο διάστημα $\Delta_2=\left(\ln\dfrac{e^2}{2},+\infty\right)$.

θ) Είναι:

$M(x,f'(x)),x\in(x_1,2)$, $K(x_1,f'(x_1))$ και $A(2,f'(2))$, όπου x_1 η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (η).

θ1. Λόγω του ερωτήματος (η) ισχύουν: $0<x_1<1<2$ και $f'(x_1)=f'(2)$, οπότε $KA\parallel x'x$.



Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΑ ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x)=\frac{1}{2}(KA)\cdot d(M,KA)=\frac{1}{2}(2-x_1)\left(\frac{e^2}{2}-f'(x)\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2-x_1)\left(e^2-2f'(x)\right),x\in(x_1,2).$$

Άρα, $E(x)=\dfrac{1}{4}(2-x_1)\left(e^2-2f'(x)\right),x\in(x_1,2)$.

θ2. Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_1,2)\subset(0,+\infty)$ με

$$E'(x)=\left(\frac{1}{4}(2-x_1)\left(e^2-2f'(x)\right)\right)'$$

$$=\ldots=-\frac{1}{2}(2-x_1)f''(x),\ x\in(x_1,2),$$

όπου $f''(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2},x\in(x_1,2)\subset(0,+\infty)$.

Η ρίζα και το πρόσημο της $E'(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	x_1	1	2
$E'(x)$	$+$	0	$-$
$E(x)$	$\nearrow$	Ο.Μ. $E(1)$	$\searrow$

Για $x=1$ το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΑ παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
Η μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου ΜΚΑ συναρτήσει του x_1 είναι

$$E(1)=\frac{1}{4}(2-x_1)\left(e^2-2f'(1)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(2-x_1)\left(e^2-2e\right)=\frac{e}{4}(2-x_1)(e-2).$$

ι) $2\left(f''(\xi)+f'(\xi)\right)=e^2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$z(x)=2\left(f''(x)+f'(x)\right)-e^2, x\in[1,2]\subset(0,+\infty)$.

Η z είναι συνεχής στο $[1,2]\subset(0,+\infty)$, ως πράξεις συνεχών στο $(0,+\infty)$.

Είναι:

$$z(1)=2\left(f''(1)+f'(1)\right)-e^2=2e-e^2=e(2-e)<0$$

και

$$z(2)=2\left(f''(2)+f'(2)\right)-e^2=\frac{e^2}{2}>0.$$

Οπότε, $z(1)\cdot z(2)<0$.

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $z(\xi)=0$, δηλαδή: $2\left(f''(\xi)+f'(\xi)\right)=e^2$.

Το ξ είναι μοναδικό, διότι η z είναι 1-1, ως γνησίως αύξουσα στο $(1,2)$, αφού

$z'(x)=2\left(f^{(3)}(x)+f''(x)\right)>0$, για κάθε $x\in(1,2)$

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $2\left(f''(\xi)+f'(\xi)\right)=e^2$.

Σημείωση: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$s(x)=e^x\left(f'(x)-\frac{e^2}{2}\right), x\in[x_1,2]$, όπου x_1 η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (η).

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της s έχει ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη στο διάστημα $(x_1,2)$.

ια) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $N\left(\alpha,f'(\alpha)\right)$, $\alpha\in(1,+\infty)$ έχει εξίσωση

$$(\delta): y-f'(\alpha)=f''(\alpha)(x-\alpha), \alpha\in(1,+\infty).$$

Η εφαπτομένη (δ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν και μόνο αν,

$0-f'(\alpha)=f''(\alpha)(0-\alpha), \alpha\in(1,+\infty)$, δηλαδή:

$$f'(\alpha)=\alpha f''(\alpha)\Leftrightarrow\frac{e^\alpha}{\alpha}=\alpha\frac{e^\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2}\Leftrightarrow\alpha=2.$$

Οπότε, $\alpha(t_0)=2$.

Για $y=0$ από την εξίσωση της εφαπτομένης (δ) έχουμε:

$$-f'(\alpha)=f''(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow-\frac{e^\alpha}{\alpha}=\frac{e^\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2}(x-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow-\alpha=(\alpha-1)(x-\alpha)\Leftrightarrow(\alpha-1)x=\alpha^2-2\alpha$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\alpha^2-2\alpha}{\alpha-1}\Leftrightarrow x_H=\alpha-1-\frac{1}{\alpha-1}.$$

Η τετμημένη του Η ως συνάρτηση του χρόνου είναι $x_H(t)=\alpha(t)-1-\frac{1}{\alpha(t)-1}$ και ο ρυθμός μεταβολής της

$$x_H'(t)=\alpha'(t)+\frac{1}{\left(\alpha(t)-1\right)^2}\alpha'(t)=\left(1+\frac{1}{\left(\alpha(t)-1\right)^2}\right)\alpha'(t)$$

.

Για $t=t_0$ έχουμε:

$$x_H'(t_0)=\left(1+\frac{1}{\left(\alpha(t_0)-1\right)^2}\right)\alpha'(t_0)=$$

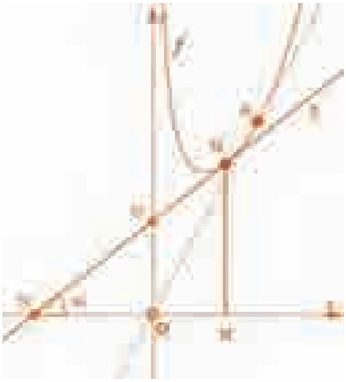
$$\overset{\alpha(t_0)=2}{=}\left(1+\frac{1}{(2-1)^2}\right)\alpha'(t_0)=2\alpha'(t_0).$$

Δηλαδή, $x_H'(t_0)=2\alpha'(t_0)$.

Άρα, τη χρονική στιγμή t_0 που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο Ν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ο ρυθμός μεταβολής $x_H'(t_0)$ της τετμημένης του Η είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής $\alpha'(t_0)$ της τετμημένης του Ν.

Σημείωση: Δίνοντας το ρυθμό μεταβολής $\alpha'(t_0)$ της τετμημένης του Ν, μπορούμε να ζητήσουμε τους ρυθμούς:

- $x_H'(t_0)$
- $y_\Theta'(t_0)$, όπου Θ το σημείο που η εφαπτομένη (δ) της γραφικής παράστασης της f' στο Ν τέμνει τον άξονα $y'y$.
- $\omega'(t_0)$, όπου ω η γωνία που η εφαπτομένη (δ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.
- $E'(t_0)$, όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΝΝ΄ και Ν΄ η προβολή του Ν στον άξονα $x'x$.
- $d'(t_0)$, όπου d η απόσταση (ΟΝ).
- κ.ο.κ.



ιβ) $q(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)-e}{x-1}, 0<x\neq 1\\ 0, x=1\end{cases}$

ιβ1. Η συνάρτηση q είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$, διότι

$$\lim_{x\to 1} q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=$$
$$=f''(1)=0=q(1).$$

Η συνάρτηση q είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,1)$, $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$q'(x)=\left(\frac{f'(x)-e}{x-1}\right)'=\frac{(x-1)f''(x)-f'(x)+e}{(x-1)^2},$$

$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\lambda(x)=(x-1)f''(x)-f'(x)+e, x\in(0,+\infty),$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$\lambda'(x)=\ldots=(x-1)f^{(3)}(x), x\in(0,+\infty)$, όπου

$f^{(3)}(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η ρίζα και το πρόσημο της $\lambda'(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
$\lambda(x)$		$\searrow$	Ο.Ε. $\lambda(1)=0$	$\nearrow$	

Δηλαδή, για $x=1$ η $\lambda(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\lambda(1)=0$, οπότε $\lambda(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Άρα, $q'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, και q συνεχής στο σημείο $x_0=1$, οπότε η q είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η q είναι συνάρτηση 1-1, ως γνησίως αύξουσα, οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της q είναι το σύνολο τιμών της q.

Η q είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_q=(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$$q(A_q)=\left(\lim_{x\to 0^+}q(x),\lim_{x\to+\infty}q(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R},$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}q(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-e}{x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x}{x}-e}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x-1}\left(e^x\frac{1}{x}-e\right)\right)=\ldots=-\infty, \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}q(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)-e}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}-e}{x-1}=$$
$$\overset{:x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}-\frac{e}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\ldots=+\infty, \text{ επειδή}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\underset{DL'H}{\overset{\text{ΜΟΡΦΗ}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{DL'H}{\overset{\text{ΜΟΡΦΗ}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Σημείωση:

$$\lim_{x\to+\infty}q(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)-e}{x-1}\underset{DL'H}{\overset{\text{ΜΟΡΦΗ}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(f'(x)-e)'}{(x-1)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\cdot\frac{x-1}{x}\right)=(+\infty)\cdot 1=+\infty,$$

επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\underset{DL'H}{\overset{\text{ΜΟΡΦΗ}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1.$$

Επομένως, η q αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της είναι $A_{q^{-1}}=\mathbb{R}$.

ιβ2. $f'(x)-e=2(x-1), x\in(0,+\infty)$, $\quad (1)$.

- Για $x=1$ η εξίσωση (1) **αληθεύει**.
- Για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η εξίσωση (1)

ισοδύναμα γίνεται:

$$f'(x)-e=2(x-1)\Leftrightarrow \frac{f'(x)-e}{x-1}=2$$
$$\Leftrightarrow q(x)=2,\qquad (2).$$

Η συνάρτηση q είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,1)\subset(0,+\infty)$, οπότε $q(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}q(x),\lim\limits_{x\to1^-}q(x)\right)=(-\infty,0)$, αφού …

Το $2\notin q(\Delta_1)=(-\infty,0)$. Οπότε, η εξίσωση (2) είναι **αδύνατη** στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$

Η συνάρτηση q είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(1,+\infty)\subset(0,+\infty)$, οπότε $q(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}q(x),\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)\right)=(0,+\infty)$, αφού …

Το $2\in q(\Delta_2)=(0,+\infty)$, όπου $\Delta_2=(1,+\infty)$ και q 1-1 στο $\Delta_2=(1,+\infty)$ ως γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2\subset(0,+\infty)$.

Οπότε, η εξίσωση (2) έχει **ακριβώς μία ρίζα** στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$, η οποία είναι και ρίζα της εξίσωσης (1).

Άρα, η εξίσωση (1) έχει **ακριβώς δύο ρίζες.**

ιβ$_3$. Η Q είναι μια αρχική της q στο διάστημα $(0,+\infty)$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$Q(x)-Q(1)\le f'(x)-e,\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)\quad (1).$$

- Για $x=1$, η (1) **αληθεύει ως ισότητα**.
- Για κάθε $x\in(1,+\infty)$, η Q στα διαστήματα $[1,x]\subset(0,+\infty)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ. ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και συνεχής σε αυτό. Άρα, υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{Q(x)-Q(1)}{x-1}=Q'(\xi)=q(\xi)\overset{q\uparrow}{<}q(x)=\frac{f'(x)-e}{x-1}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{Q(x)-Q(1)}{x-1}<\frac{f'(x)-e}{x-1}\overset{x-1>0}{\Rightarrow}Q(x)-Q(1)<f'(x)-e.$$

- Για κάθε $x\in(0,1)$, η Q στα διαστήματα $[x,1]\subset(0,+\infty)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ. ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και συνεχής σε αυτό.

Άρα, υπάρχει $\xi\in(x,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{Q(x)-Q(1)}{x-1}=Q'(\xi)=q(\xi)\overset{q\uparrow}{>}q(x)=\frac{f'(x)-e}{x-1}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{Q(x)-Q(1)}{x-1}>\frac{f'(x)-e}{x-1}\overset{x-1<0}{\Rightarrow}Q(x)-Q(1)<f'(x)-e.$$

Άρα,

$Q(x)-Q(1)\le f'(x)-e$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ιγ) $t(x)=\dfrac{e^{2x}(x-1)}{x^3},x\in(0,+\infty)$.

Για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$t(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^{2x}(x-1)}{x^3}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Η συνάρτηση $t(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών και $t(x)\ge0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Άρα, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της t, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=2$ είναι:

$$E=\int_1^2 t(x)dx=\int_1^2\frac{e^{2x}(x-1)}{x^3}dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{e^x}{x}\cdot\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(f'(x)\cdot f''(x)\right)dx$$
$$=\frac12\int_1^2\left(\left(f'(x)\right)^2\right)'dx=\frac12\left[\left(f'(x)\right)^2\right]_1^2$$
$$=\frac12\left[\left(f'(2)\right)^2-\left(f'(1)\right)^2\right]=\frac12\left(\frac{e^4}{4}-e^2\right)=\frac18e^2\left(e^2-4\right).$$

ιδ) $p(x)=\left(f'(x)-e\right)^2(x-2)^2,x\in(0,+\infty)$.

ιδ$_1$. Η συνάρτηση $p(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]\subset(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών. Οπότε, η $p(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο στο $[1,2]\subset(0,+\infty)$. Το ελάχιστο όμως η $p(x)$ το παρουσιάζει στα άκρα του διαστήματος, διότι $p(x)\ge0=p(1)=p(2)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα, υπάρχει ένα, τουλάχιστον εσωτερικό σημείο x_1 του διαστήματος $[1,2]\subset(0,+\infty)$, στο οποίο η $p(x)$ παρουσιάζει μέγιστο. Επομένως, η $p(x)$

παρουσιάζει ένα, τουλάχιστον τοπικό μέγιστο στο $(0,+\infty)$.

ιδ$_2$. Η συνάρτηση $p(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων.

Οπότε, τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της $p(x)$ θα τις αναζητήσουμε στις ρίζες της $p'(x)$.

Είναι,

$$p'(x)=\left(\left(f'(x)-e\right)^2(x-2)^2\right)'=\ldots$$

$$=2(x-2)\left(f'(x)-e\right)\left(\underbrace{(x-2)f''(x)+f'(x)-e}_{\varphi(x)}\right),$$

$x\in(0,+\infty)$.

Δύο προφανείς ρίζες της $p'(x)$ είναι το 1 και το 2.

Το 1 μηδενίζει τους παράγοντές της $f'(x)-e$ και $(x-2)f''(x)+f'(x)-e$, ενώ το 2 μηδενίζει τον παράγοντα $x-2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=(x-2)f''(x)+f'(x)-e, x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$\varphi'(x)=\ldots=2f''(x)+(x-2)f^{(3)}(x), x\in(0,+\infty)$,

όπου $f''(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}, x\in(0,+\infty)$ και

$f^{(3)}(x)=\dfrac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}, x\in(0,+\infty)$.

Οπότε,

$$\varphi'(x)=\ldots=\frac{e^x}{x^3}\left(\underbrace{x^3-2x^2+4x-4}_{k(x)}\right), x\in(0,+\infty).$$

Η $k(x)$, οπότε και η $\varphi'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1,2)$.

Πράγματι,

η $k(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]\subset(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική και $k(1)k(2)=-4<0$, οπότε από το θεώρημα του Bolzano έχει μία, τουλάχιστον ρίζα x_0 στο διάστημα $(1,2)$, η οποία είναι και μοναδική στο $(0,+\infty)$, αφού η $k(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, επειδή

$k'(x)=3x^2-4x+4>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\varphi'(x)>0\overset{\frac{e^x}{x^3}>0}{\Leftrightarrow}k(x)>0=k(x_0)\overset{k\uparrow}{\Leftrightarrow}x>x_0,$$

$$\varphi'(x)<0\overset{\frac{e^x}{x^3}>0}{\Leftrightarrow}k(x)<0=k(x_0)\overset{k\uparrow}{\Leftrightarrow}0<x<x_0$$

Η ρίζα και το πρόσημο της $\varphi'(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0	1	x_0	x_1	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0		$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	Ο.Ε. $\varphi(x_0)<0$	$\nearrow$		

Είναι,

$\varphi'(x)<0$, για κάθε $x\in(0,x_0)$ και φ συνεχής στο $(0,x_0]$, οπότε φ γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$.

Το 1 είναι η μοναδική ρίζα της φ στο διάστημα $(0,x_0]$, όπου $1<x_0$, διότι $\varphi(1)=0$ και φ 1-1 ως γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

Η φ είναι συνεχής στο $[x_0,2]\subset[x_0,+\infty)$ και $\varphi(x_0)\varphi(2)<0$, διότι

$1<x_0\overset{\varphi\downarrow(0,x_0]}{\Rightarrow}\varphi(1)>\varphi(x_0)\Rightarrow\varphi(x_0)<0$ και

$\varphi(2)=\dfrac{e^2}{2}-e=\dfrac{e}{2}(e-2)>0$.

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano η φ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα x_1 στο $(x_0,2)\subset(x_0,+\infty)$, η οποία είναι και μοναδική στο $(x_0,+\infty)$, αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0,+\infty)$, επειδή $\varphi'(x)>0$, για κάθε $x\in(x_0,+\infty)$.

Επομένως,

$\varphi(x)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=x_1$ ή $x=2$,

$\varphi(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(x_1,+\infty)$ και

$\varphi(x)<0\Leftrightarrow x\in(1,x_1)$.

Επίσης, $f'(x)-e\geq0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, από ερώτημα (γ_1), με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$.

Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $p'(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		x_1		2		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

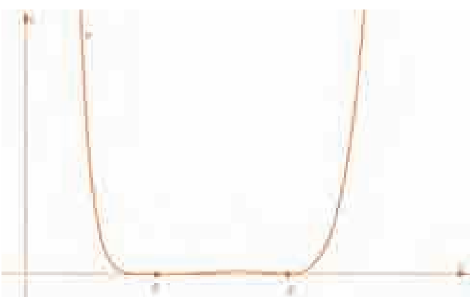
Για $x=1$ και $x=2$ η $p(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $p(1)=p(2)=0$, ενώ για $x=x_1$, όπου $1<x_0<x_1<2$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Άρα, η $p(x)$ έχει ακριβώς δύο θέσεις τοπικού ελαχίστου και ακριβώς μία θέση τοπικού μεγίστου στο $(0,+\infty)$.

Σημείωση 1η: Για $x=1$ και $x=2$ η $p(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το $p(1)=p(2)=0$, αφού $p(x)\geq 0=p(1)=p(2)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε και τοπικό ελάχιστο σε αυτά.

Σημείωση 2η: Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $p(x)=p(x_2)$, όπου $1<x_2<x_1$ και x_1 η θέση τοπικού μεγίστου της συνάρτησης $p(x)$.

Σημείωση 3η: Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $p(x)$.



Σημείωση 4η: Να αποδείξετε τα ερωτήματα του ερωτήματος (ιδ) για τη συνάρτηση

$$p_1(x)=(f'(x)-e)(x-2)^2, x\in(0,+\infty).$$

ιε) $(\varepsilon_1): y=\dfrac{e^2}{4}x-\dfrac{e^2}{2}$.

ιε₁. Θέλουμε να βρούμε το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f', το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε_1).

1ος τρόπος: Για την εξίσωση της ευθείας (ε_1) έχουμε:

$$y=\frac{e^2}{4}x-\frac{e^2}{2}\overset{\cdot 4>0}{\Leftrightarrow}e^2x-4y-2e^2=0$$

Έστω $M(x,f'(x)), x\in(0,+\infty)$ σημείο της γραφικής παράστασης της f', τότε η απόστασή του από την ευθεία (ε_1) είναι:

$$d(x)=d(M,\varepsilon_1)=\frac{|e^2x-4f'(x)-2e^2|}{\sqrt{e^4+16}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e^4+16}}\left(4f'(x)-e^2x+2e^2\right),\ x\in(0,+\infty),$$

διότι από ερώτημα (ζ_1) έχουμε ότι $f'(x)\geq\dfrac{e^2}{4}x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Οπότε,

$$f'(x)\geq\frac{e^2}{4}x>\frac{e^2}{4}x-\frac{e^2}{2}\Rightarrow e^2x-4f'(x)-2e^2<0,$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $d(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$d'(x)=\frac{1}{\sqrt{e^4+16}}\left(4f'(x)-e^2x+2e^2\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e^4+16}}\left(4f''(x)-e^2\right),\ x\in(0,+\infty),\text{ και}$$

$$d''(x)=\frac{1}{\sqrt{e^4+16}}\left(4f''(x)-e^2\right)'$$

$$=\frac{4}{\sqrt{e^4+16}}f^{(3)}(x),\ x\in(0,+\infty).$$

Είναι, $d''(x)=\dfrac{4}{\sqrt{e^4+16}}f^{(3)}(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, διότι $f^{(3)}(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η d' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης, $d'(2)=0$ και d' 1-1 ως γνησίως αύξουσα, οπότε το 2 είναι η μοναδική ρίζα της d'.

Άρα,

$$d'(x) > 0 = d'(2) \overset{d'\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 2$$

$$d'(x) < 0 = d'(2) \overset{d'\uparrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < 2$$

Η ρίζα και το πρόσημο της d' δίνονται στον επόμενο πίνακα.

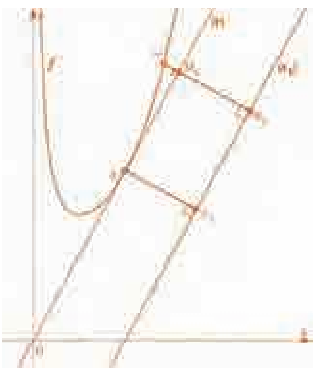
x	0		2		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	Ο.Ε. $d(2)$	$\nearrow$	

Οπότε, για $x=2$ η απόσταση του Μ από την ευθεία (ε_1) γίνεται ελάχιστη.

Άρα, το σημείο $M\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$ της γραφικής παράστασης της f' είναι εκείνο που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε_1).

2ος τρόπος: Υπόδειξη

Η μόνη εφαπτομένη της $C_{f'}$ που είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε_1) είναι η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο σημείο $A(2,f'(2))$ και έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=\frac{e^2}{4}x$.



Για κάθε $M \in C_{f'}$ ισχύει:

$(MM_2) \geq (M_1M_2) = (AA_1)$, με το ίσο να ισχύει μόνο όταν το Μ συμπίπτει με το σημείο $A\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$.

Άρα, (…)

Σημείωση: Αποδεικνύεται επίσης ότι η ελάχιστη απόσταση δύο οποιονδήποτε σημείων της γραφικής παράστασης της f' και της ευθείας (ε_1) αντίστοιχα, είναι ίση με $\frac{2e^2}{\sqrt{e^4+16}} \cong 1,76$.

ιε2. Υπόδειξη

Για $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$M(x,f'(x))$ σημείο της $C_{f'}$ και

$\Sigma\left(\frac{1}{e^2}\left(4f'(x)+2e^2\right), f'(x)\right)$ σημείο της (ε_1)

τέτοια, ώστε να έχουν την **ίδια τεταγμένη.**

Είναι,

$$d_1(x) = (M\Sigma) = \ldots = \frac{1}{e^2}\left|4f'(x) - e^2x + 2e^2\right|$$

$$\overset{(\iota\varepsilon_1)}{=} \frac{1}{e^2}\left(4f'(x) - e^2x + 2e^2\right), x \in (0,+\infty).$$

Λόγω του ερωτήματος $(\iota\varepsilon_1)$ η ελάχιστη απόσταση $(M\Sigma)$ είναι η $d_1(2) = \ldots = 2$.

Σημείωση: Μπορούμε να το αποδείξουμε και με τη βοήθεια της παράλληλης εφαπτομένης προς την ευθεία (ε_1), ανάλογα με την υπόδειξη του 2ου τρόπου απόδειξης του ερωτήματος $(\iota\varepsilon_1)$.

ιε3. Υπόδειξη

Για $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$M(x,f'(x))$ σημείο της $C_{f'}$ και $\Xi\left(x, \frac{e^2}{4}x - \frac{e^2}{2}\right)$

σημείο της (ε_1) τέτοια, ώστε να έχουν την **ίδια τετμημένη.**

Είναι,

$$d_2(x) = (M\Xi) = \ldots = \frac{1}{4}\left|4f'(x) - e^2x + 2e^2\right|$$

$$\overset{(\iota\varepsilon_1)}{=} \frac{1}{4}\left(4f'(x) - e^2x + 2e^2\right), x \in (0,+\infty).$$

Λόγω του ερωτήματος $(\iota\varepsilon_1)$ η ελάχιστη απόσταση $(M\Xi)$ είναι η $d_2(2) = \ldots = \frac{e^2}{2}$.

Σημείωση: Μπορούμε να το αποδείξουμε και με τη βοήθεια της παράλληλης εφαπτομένης προς την ευθεία (ε_1), ανάλογα με την υπόδειξη του 2ου τρόπου απόδειξης του ερωτήματος $(\iota\varepsilon_1)$.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Συνεχόμενα κλάσματα

Τσιλιακός Λευτέρης

Συνοπτική παρουσίαση της ανάπτυξης σε συνεχόμενα κλάσματα (συν. κλ.) ενός πραγματικού αριθμού x και μερικές εφαρμογές της.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(I) Ανάπτυξη σε (συν. κλ.) **ρητού** αριθμού.

(II) Ανάπτυξη σε (συν. κλ.) **άρρητου** αριθμού.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (I)

Η ανάπτυξη ενός ρητού $\frac{M}{N}(=x)$ σε (συν. κλ.) είναι μια διαδικασία εύρεσης μιας **πεπερασμένης** διαδοχής κλασμάτων $\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \ \ldots, \ \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, που προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο τον $\frac{M}{N}$. Τα άρτιας τάξης κλάσματα $\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_4}{\beta_4}, \ldots$ προσεγγίζουν τον $\frac{M}{N}$ καθ' υπεροχήν και τα περιττής τάξης κλάσματα $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \frac{\alpha_5}{\beta_5}, \ \ldots$ κατ' έλλειψιν. Το τελευταίο κλάσμα $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ ταυτίζεται με τον $\frac{M}{N}$.

Όλα αυτά και κάποιες ιδιότητές τους θα φανούν στα επόμενα παραδείγματα.

1ο Παράδειγμα. Να αναπτυχθεί σε (συν. κλ.) ο ρητός $x=\frac{M}{N}=\frac{327}{105}$.

Λύση

Βήμα 1ο: Ο όρος συνεχόμενα κλάσματα δικαιολογείται γιατί κάθε ρητός $\frac{M}{N}$ μπορεί να πάρει τη μορφή **συνεχόμενου κλάσματος** όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα:

$$\frac{M}{N}=\frac{327}{105}=3+\frac{12}{105}=3+\frac{1}{\frac{105}{12}}=3+\frac{1}{8+\frac{9}{12}}=3+\frac{1}{8+\frac{1}{\frac{12}{9}}}=$$

$$=3+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{3}{9}}}=3+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\text{συνεχόμενο κλάσμα)}$$

(Η διαδικασία λήγει όταν το τελευταίο κλάσμα έχει αριθμητή τον 1). Για συντομία γράφουμε $\frac{327}{105}=[3;8,1,3]$.)

Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ(327, 105) δίνει επίσης τη διαδοχή των πηλίκων 3, 8, 1, 3, που μας χρειάζονται για τη συνέχεια:

$$327=105\cdot\boxed{3}+12$$

$$105=12\cdot\boxed{8}+9$$

$$12=9\cdot\boxed{1}+3 \qquad \text{Εμφανίστηκαν τα πηλίκα: 3, 8, 1, 3.}$$

$$9=3\cdot\boxed{3}+0$$

Βήμα 2ο: Σχηματίζουμε τη διάταξη (πίνακα):

$$x=\frac{M}{N}=\frac{327}{105}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 25\\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{25} & \boxed{28}\\ 3 & 8 & 1 & 3\\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{8} & \boxed{9}\\ 1 & 0 & 1 & 8\end{bmatrix}=\frac{\boxed{109}}{\boxed{35}} \qquad (\Pi_1)$$

Η πρώτη στήλη έχει σταθερά τα στοιχεία 0, 1, 0 και 1. Η τρίτη γραμμή περιέχει κατά σειρά τα πηλίκα $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4$, δηλαδή τους 3, 8, 1, 3.

Χρήσιμη και εύκολη επεξήγηση της **δομής** του (Π_1).

$$x=\frac{M}{N}=\frac{327}{105}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 25\\ 1 & \underset{3\cdot1+0}{3} & \underset{8\cdot3+1}{25} & \underset{1\cdot25+3}{28}\\ 3 & 8 & 1 & 3\\ 0 & \overset{3\cdot0+1}{1} & \overset{8\cdot1+0}{8} & \overset{1\cdot8+1}{9}\\ 1 & 0 & 1 & 8\end{bmatrix}=\frac{109}{35} \qquad \begin{pmatrix} 3\cdot28+25=109\\ 3\cdot9+8=35\end{pmatrix}$$

Από τον (Π_1) ορίζονται άμεσα τα ζητούμενα (συν. κλ.) που προσεγγίζουν τον x. Αυτά είναι τα εξής: $\frac{1}{0}$ (κατ' εκδοχήν), $\frac{3}{1}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{28}{9}$ και $\frac{109}{35}$ που ταυτίζεται με τον $\frac{327}{105}\left(=\frac{M}{N}\right)=3,1\overline{142857}$.

Ισχύουν: $\frac{1}{0}>\frac{M}{N}$ (κατ' εκδοχήν), $\frac{3}{1}<\frac{M}{N}$, $\frac{25}{8}=3,125>\frac{M}{N}$, $\frac{28}{9}=3,\overline{1}<\frac{M}{N}$ και $\frac{109}{35}=\frac{M}{N}$. Η διαδοχή των εν λόγω κλασμάτων πλησιάζει διαδοχικά από δεξιά και από αριστερά ολοένα και περισσότερο τον $\frac{M}{N}$.

1η Ιδιότητα. Τα ευρεθέντα κλάσματα (πλην προφανώς του $\frac{1}{0}$) είναι **ανάγωγα** και μάλιστα το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{109}{35}$ που ταυτίζεται με το $\frac{327}{105}$ (το οποίο είναι ίσο με το $\frac{M}{N}$) δίνει άμεσα τον ΜΚΔ(327, 105), αφού: $\text{ΜΚΔ}(327,105)=327:109=105:35=3$.

1ο Θεώρημα (Βασικό)

Για δύο τυχαία **διαδοχικά** (συν. κλ.) $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ ισχύει $\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{vmatrix}=\pm1$, με τον (+1) να ισχύει αν το $\frac{\alpha}{\beta}$ ανήκει σε στήλη περιττής τάξης και τον –1, αν το $\frac{\alpha}{\beta}$ ανήκει σε στήλη άρτιας τάξης.

Έτσι από τον (Π_1) έχουμε $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$, ενώ $\begin{vmatrix}3 & 25\\ 1 & 8\end{vmatrix}=-1$.

1η Εφαρμογή: Να εκφραστεί ο ΜΚΔ(327, 105), (δηλαδή ο 3) σαν γραμμικός συνδυασμός των 327 και 105.

Λύση

Για τα κλάσματα $\frac{28}{9}$, $\frac{109}{35}$ του (Π_1) έχουμε:

$$\begin{vmatrix}28 & 109\\ 9 & 35\end{vmatrix}=-1\Leftrightarrow 35\cdot28-109\cdot9=-1\Leftrightarrow -3\cdot35\cdot28+3\cdot109\cdot9=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3=327\cdot9+105\cdot(-28).$$

2η Εφαρμογή: Να επιλυθεί στο $\mathbb{Z}^2$ η εξίσωση $329x-109y=5$ (1).

Λύση

$$\begin{array}{rcl} & & \pi \\ 329=109\cdot & & 3\ +2\\ 109=\ \ 2\ \ \cdot & & 54+1\\ 2\ =\ \ 1\ \ \cdot & & 2\ +0\end{array}$$

Άρα η διαδοχή των πηλίκων για την εύρεση του $\text{ΜΚΔ}(329,109)=1$ είναι η: 3, 54, 2.

Αναπτύσσουμε τώρα τον ρητό $\frac{329}{109}$ σε (συν. κλ.). Είναι:

$$\frac{329}{109}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 3 & \boxed{163}\\ 3 & 54 & 2\\ 0 & 1 & \boxed{54}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{329}{109}\xrightarrow{1\text{ο θεώρ.}}\begin{vmatrix}163 & 329\\ 54 & 109\end{vmatrix}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 109\cdot163-329\cdot54=1\Leftrightarrow 329\cdot(-54)-109(-163)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 329\cdot5\cdot(-54)-109\cdot5\cdot(-163)=5\Leftrightarrow 329\cdot(-270)-109\cdot(-815)=5,$$

που σημαίνει ότι μια λύση της (1) είναι η $(x_0,\ y_0)=(-270,\ -815)$. Άρα η γενική λύση της είναι η $(x,\ y)=(-270+109t,\ -815+329t)$, $t\in\mathbb{Z}$.

Π.χ. για $t=3\Rightarrow(x,\ y)=(57,172)$, που ικανοποιεί την (1).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ΙΙ)

Η ανάπτυξη ενός άρρητου αριθμού x σε (συν. κλ.) είναι μια διαδικασία εύρεσης μιας **απέραντης** διαδοχής κλασμάτων, που προσεγγίζουν τον x, ακριβώς όπως συμβαίνει και στην περίπτωση που ο x είναι ρητός. Θα ασχοληθούμε μόνο για άρρητους της μορφής $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ $(=x)$, με $A\in\mathbb{N}^*$, $A\neq K^2$, $K\in\mathbb{N}^*$, $I\in\mathbb{Z}$ και $D\in\mathbb{Z}^*$, που είναι πραγματική ρίζα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$. Η απέραντη διαδοχή των εν λόγω κλασμάτων (συνεχόμενων κλασμάτων) προκύπτει **μετά την εύρεση** των ακεραίων πηλίκων $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,$ … Καθένας από αυτούς τους π_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ ...)$ είναι ο ακέραιος που προηγείται του δεκαδικού μέρους του αριθμού $\dfrac{\sqrt{A}+I_i}{D_i}$. Η διαδικασία εύρεσης των π_i είναι η εξής:

$$\begin{array}{lllll}
x=\dfrac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}=\pi_1 \to D_1\cdot\pi_1-I_1=I_2 \to \dfrac{A-I_2^2}{D_1}=D_2 & \Big\downarrow & & & \\
\quad\dfrac{\sqrt{A}+I_2}{D_2}=\pi_2 \to D_2\cdot\pi_2-I_2=I_3 \to \dfrac{A-I_3^2}{D_2}=D_3 & \Big\downarrow & & & \\
\quad\dfrac{\sqrt{A}+I_3}{D_3}=\pi_3 \to D_3\cdot\pi_3-I_3=I_4 \to \dfrac{A-I_4^2}{D_3}=D_4 & \Big\downarrow & (\Delta_1) & & \\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots & \Big\downarrow & & & \\
\quad\dfrac{\sqrt{A}+I_\nu}{D_\nu}=\pi_\nu \qquad\quad \cdots \qquad\qquad\qquad \cdots & \Big\downarrow & & & \\
\qquad\vdots & \Big\downarrow & & &
\end{array}$$

με τους $D_i\in\mathbb{Z}^*$. Είναι μια διαδικασία απέραντη. Όμως είναι περιοδική όπως φαίνεται στο επόμενο:

1ο Παράδειγμα:

Να αναπτυχθεί σε (συν. κλ.) ο αριθμός $x=\dfrac{\sqrt{7}+4}{3}$.

Λύση

Βρίσκουμε τη διαδοχή των πηλίκων $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\dots$ Είναι:

$$\begin{aligned}
x=\frac{\sqrt{7}+4}{3}&=\underset{\pi_1}{2}\to 3\cdot 2-4=2\to\frac{7-2^2}{3}=1\\
\frac{\sqrt{7}+2}{1}&=\underset{\pi_2}{4}\to 1\cdot 4-2=2\to\frac{7-2^2}{1}=3\\
\frac{\sqrt{7}+2}{3}&=\underset{\pi_3}{1}\to 3\cdot 1-2=1\to\frac{7-1^2}{3}=2\\
\frac{\sqrt{7}+1}{2}&=\underset{\pi_4}{1}\to 2\cdot 1-1=1\to\frac{7-1^2}{2}=3\\
\frac{\sqrt{7}+1}{3}&=\underset{\pi_5}{1}\to 3\cdot 1-1=2\to\frac{7-2^2}{3}=1\\
\frac{\sqrt{7}+2}{1}&=\underset{\pi_6}{4}\to 1\cdot 4-2=2\to\frac{7-2^2}{1}=3
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι μετά το τελευταίο π_6 (= 4) θα ακολουθήσουν τα πηλίκα 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, … Άρα η περίοδος αυτής της ανάπτυξης σε (συν. κλ.) του x είναι η διαδοχή 4, 1, 1, 1. Έτσι έχουμε:

$$x=\frac{\sqrt{7}+4}{3}=\left[2;\ 4,1,1,1,\ 4,1,1,1,\ 4,\ ...\right] \qquad (2).$$

Η εύρεση τώρα των συνεχόμενων κλασμάτων που προσεγγίζουν τον x γίνεται με τον ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε και για τον ρητό $\dfrac{327}{105}$ του (Π_1). Συγκεκριμένα και λόγω της (2) έχουμε:

$$x=\frac{\sqrt{7}+4}{3}=\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 9 & 11 & 20 & 31 & 144 & 175 & \dots & \dots \\
1 & 2 & 9 & 11 & 20 & 31 & 144 & 175 & 319 & 494 & \dots \\
\hline
2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 & \dots \\
\hline
0 & 1 & 4 & 5 & 9 & 14 & 65 & 79 & 144 & 223 & \dots \\
1 & 0 & 1 & 4 & 5 & 9 & 14 & 65 & 79 & \dots & \dots
\end{array}\right]$$

Βρήκαμε τα κλάσματα $\dfrac{2}{1},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{11}{5},\ \dfrac{20}{9},\ \dfrac{31}{14},\ \dfrac{144}{65},\ \dfrac{175}{79},\ \dfrac{319}{144},\ \dfrac{494}{223},\dots$

- Η διαδικασία (Δ_1) εκτός της διαδοχής των π_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ που είναι **απαραίτητη** για την ανάπτυξη του x σε (συν. κλ.), δίνει και τη διαδοχή (στην $1^{η}$ στήλη) των D_i που απαιτούνται για κάποιες πολύ σημαντικές εφαρμογές.
- Με την έκφραση: "Ανάπτυξη του x" θα εννοούμε: ανάπτυξη του x σε (συν. κλ.) και σύγχρονη χρήση της $1^{ης}$ στήλης του (Δ_1).
- Αν $A\in\mathbb{N}^*$ με $A\neq K^2$, $K\in\mathbb{N}^*$, τότε η ανάπτυξη της $\sqrt{A}$ έχει τις εξής ιδιαιτερότητες:
  (i) Αν $\pi_1=\alpha$, τότε ο π_2 είναι ο $1^{ος}$ όρος της $1^{ης}$ περιόδου και **πάντοτε** ο τελευταίος όρος της είναι ο 2α.
  (ii) Η διαδοχή των πηλίκων κάθε περιόδου πλην του 2α είναι παλινδρομική, όπως θα φανεί στο επόμενο παράδειγμα.

2^{o} Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί η $\sqrt{29}$. (Σύντομη παρουσίαση. Μόνο την πρώτη στήλη της Δ_1).

$$\left.\begin{array}{l}
(\sqrt{29}+0)/1=5\\
(\sqrt{29}+5)/4=2\\
(\sqrt{29}+3)/5=1\\
(\sqrt{29}+2)/5=1\\
(\sqrt{29}+3)/4=2\\
(\sqrt{29}+5)/1=10\\
\quad\ \vdots \qquad\quad\ \vdots
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{29}=\left[\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & 5 & 11 & 16 & 27 & & & & & & \\
1 & 5 & 11 & 16 & 27 & \boxed{70} & & & & & \boxed{9801} & \\
\hline
5 & 2 & 1 & 1 & 2 & 10 & 2 & 1 & 1 & 2 & 10 & \dots \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 5 & \boxed{13} & & & & & \boxed{1820} & \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & & & & & &
\end{array}\right]$$

Η περίοδος σε αυτή την ανάπτυξη είναι η: 2, 1, 1, 2, 10 (περιττή περίοδος γιατί έχει περιττό πλήθος όρων), με παλινδρομικό μέρος της το: 2, 1, 1, 2 (αυτό που βρίσκεται μεταξύ του $\pi_1 = 5$ και του $\pi_6 = 10$).

1º Σχόλιο (Βασικό)

Το παλινδρομικό μέρος της περιόδου κάθε $\sqrt{A}$ με Α θετικό πρώτο της μορφής $4K+1$ $(K \in \mathbb{N}^*)$ έχει άρτιο πλήθος όρων με τους **δύο μεσαίους** όρους να είναι ίσοι, όπως στο 2º παράδειγμα με την $\sqrt{29}$ (αυτοί είναι οι 1, 1).

Για κάθε άλλον $A \in \mathbb{N}^*$, που δεν είναι πρώτος του τύπου $4K+1$ το παλινδρομικό μέρος της περιόδου του έχει περιττό πλήθος όρων με **ένα μεσαίο** όρο.

2º θεώρημα (θεμελιώδες): (i) Αν $A \in \mathbb{N}^*$ με $A \neq K^2$ και η ανάπτυξη της $\sqrt{A}$ έχει **άρτια περίοδο**, τότε οι όροι p, q κάθε κλάσματος που αντιστοιχεί στον 2α κάθε περιόδου ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 - Ay^2 = 1$.

(ii) Αν η ανάπτυξη της $\sqrt{A}$ έχει **περιττή περίοδο**, τότε οι όροι p, q κάθε κλάσματος που αντιστοιχεί στον 2α της 1ης ή 3ης ή 5ης ή κτλ. περιόδου ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 - Ay^2 = -1$, ενώ οι όροι p, q κάθε κλάσματος που αντιστοιχεί στον 2α της 2ης ή 4ης ή 6ης ή κτλ. περιόδου ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 - Ay^2 = 1$.

(iii) Αν η $\sqrt{A}$ έχει άρτια περίοδο, τότε η εξίσωση $x^2 - Ay^2 = -1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{Z}^2$.

3º Θεώρημα: Για κάθε πρώτο $p > 2$ του τύπου $4K+1$, $K \in \mathbb{N}^*$, υπάρχουν **δύο μοναδικοί** φυσικοί αριθμοί λ, μ τέτοιοι, ώστε $p = \lambda^2 + \mu^2$.

Εφαρμογή του θεωρήματος: Για τον πρώτο $p = 29 = 4 \cdot 7 + 1$ του 2ου παραδείγματος το **μεσαίο τμήμα** του παλινδρομικού μέρους της περιόδου του είναι οι: 1, 1. **Στο δεύτερο** 1 από αυτούς αντιστοιχεί το κλάσμα:

$$\frac{\sqrt{29}+I}{D} = \frac{\sqrt{29}+2}{5}$$

και το ζητούμενο ζεύγος (λ, μ) είναι το ζεύγος $(I, D) = (2, 5)$. Πράγματι, $29 = 2^2 + 5^2$.

Σημαντική άσκηση: Να επιλυθεί στο $\mathbb{Z}^2$ η εξίσωση: $7x^2 - 15y^2 = 3$ (3).

Επίλυση

Λίγη θεωρία: Η (3) έχει τη μορφή $\alpha x^2 - \beta y^2 = \gamma$ (4) με $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$. Η (4) έχει λύσεις αν $\gamma \in \mathbb{Z}$ και αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ με $n \leq |\gamma|$ τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $K = \dfrac{\alpha n^2 - \beta}{|\gamma|}$ να ανήκουν στο $\mathbb{Z}$. Αν τέτοιος ή τέτοιοι n δεν υπάρχουν, τότε η (4) είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{Z}^2$.

Έχουμε $K = \dfrac{7n^2 - 15}{3} = \left\langle \begin{array}{l} 16, \text{ αν } n = 3 \\ -5, \text{ αν } n = 0 \end{array} \right.$.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό: $(M) \to x = ny - \gamma z$. Έτσι, αν $n = 3$ και $x = 3y - 3z$, η (3) γίνεται: $$16y^2 - 42yz + 21z^2 = 1 \quad (5).$$

Η θεωρία απαιτεί τώρα να αναπτύξουμε σε (συν. κλ.) μια (οποιαδήποτε) ρίζα ρ της εξίσωσης

$16\omega^2-42\omega+21=0$.

Είναι $\rho=\dfrac{\sqrt{105}+21}{16}$. Για συντομία εμφανίζουμε μόνο την 1^{η} στήλη της (Δ_1).

$$\begin{aligned}\rho=(\sqrt{105}+21)/16&=1\\(\sqrt{105}-5)/5&=1\\\left.\begin{aligned}(\sqrt{105}+10)/1&=20\\(\sqrt{105}+10)/5&=4\end{aligned}\right\}&\ \text{άρτια περίοδος}\\(\sqrt{105}+10)/1&=20\end{aligned}$$

Είναι:
$D_1=16,\ D_2=D_4=D_6=...=5$,
$D_3=D_5=D_7=...=1$.
Δηλαδή όλα τα περιττής τάξης D_i με $i\geq 3$ είναι $D_i=1$.

Βρίσκουμε τώρα τα (συν. κλ.) $\dfrac{y}{z}$ της εν λόγω ανάπτυξης:

$$\rho=\begin{bmatrix}0&1&1&2&41&&&\\1&1&\boxed{2}&41&\boxed{166}&&&\\\hline 1&1&20&4&20&4&20&...\\\hline 0&1&\boxed{1}&21&\boxed{85}&&&\\1&0&1&1&21&&&\end{bmatrix}$$

$$D_3=1\qquad D_5=1\qquad D_7=1\qquad ...$$

Τα κλάσματα $\dfrac{y}{z}$ που αντιστοιχούν στα $D_i=1^*$ είναι τα $\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{166}{85}$, … και τα ζεύγη $(y,z)=(2,1)$, $(y,z)=(166,85)$, … ικανοποιούν την (5) (γιατί από αυτή προήλθαν). Έτσι για $(y,z)=(2,1)\underset{(M)}{\Longrightarrow} x=3y-3z=3\cdot 2-3\cdot 1=3$ και το ζεύγος $(x,y)=(3,2)$ είναι μια λύση της (3).

Ομοίως για: $(y,z)=(166,85)\underset{(M)}{\Longrightarrow} x=3\cdot 166-3\cdot 85=243$

και το ζεύγος $(x,y)=(243,166)$ είναι μια δεύτερη λύση της (3). Άρα, αφού για κάθε D_i με i περιττό βρίσκουμε μία νέα λύση, έπεται ότι η (3) έχει άπειρο πλήθος λύσεων στο $\mathbb{Z}^2$.

Εργαζόμενοι τελείως ανάλογα, αν $n=0$, βρίσκουμε ομοίως άπειρο πλήθος λύσεων για την (3).

Αν η διοφαντική εξίσωση $\alpha x^2-\beta y^2=\gamma$ (4) έχει λύσεις (όπως αναφέρθηκε στη θεωρία) και επιπλέον ισχύει $|\gamma|<\sqrt{\alpha\cdot\beta}$, τότε αυτή επιλύεται απλούστερα ως εξής: Αναπτύσσουμε μια ρίζα ρ της εξίσωσης $\alpha\omega^2-\beta=0$. Λύσεις της (4) είναι τα ζεύγη (y, z) που ορίζονται από τα κλάσματα $\dfrac{y}{z}$ που αντιστοιχούν στα άπειρα $D_i=\pm\gamma$ της εν λόγω ανάπτυξης. Αυτό θα φανεί στην εκ νέου επίλυση της $7x^2-15y^2=3$ (3), αφού είναι $3<\sqrt{7\cdot 15}=\sqrt{105}$. Επιλύουμε την $7\omega^2-15=0\Rightarrow\rho=\dfrac{\sqrt{105}}{7}$ και αναπτύσσουμε την ρ. Εμφανίζουμε μόνο την 1^{η} στήλη.

$$\begin{aligned}\rho=(\sqrt{105}+0)/7&=1\\(\sqrt{105}+7)/8&=2\end{aligned}$$

Βρίσκουμε από το παρακάτω σχήμα:
$D_3=D_7=D_{11}=3=D_{15}=D_{19}=$ κλπ.

---

* (γιατί το 2^{o} μέλος της (5) είναι ο 1)

$$\left.\begin{array}{l}(\sqrt{105}+9)/3=6\\(\sqrt{105}+9)/8=2\\(\sqrt{105}+7)/7=2\\(\sqrt{105}+7)/8=2\end{array}\right\}\ \text{άρτια περίοδος}$$
$$(\sqrt{105}+9)/3=6$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Τα τρία πρώτα ζεύγη (y, z) που αντιστοιχούν στα D_3, D_7, D_{11} είναι τα (3, 2), (243, 166), (19923, 13610) και ικανοποιούν την (3). Το αυτό συμβαίνει και για τα άπειρα άλλα ζεύγη που αντιστοιχούν στους D_{15}, D_{19}, D_{23} κ.τ.λ. επ' άπειρον.

Άρα:

$$\rho=\left[\begin{array}{cccccccccccc}0&1&1&3&19&41&101&&&&&\\1&1&\boxed{3}&19&41&101&\boxed{243}&&&&\boxed{19923}&\\ \hline 1&2&6&2&2&2&6&2&2&2&6&\ldots\\ \hline 0&1&\boxed{2}&13&28&69&\boxed{166}&&&&\boxed{13610}&\\1&0&1&2&13&28&69&&&&&\end{array}\right]$$
$$D_3=3\qquad\qquad D_7=3\qquad\qquad D_{11}=3$$

Σημαντική πρόταση

- Αν στη διοφαντική εξίσωση $\alpha x^2-\beta y^2=\gamma$ (4) ισχύει για τον $|\gamma|<\sqrt{\alpha\beta}$, τότε κάθε D_i που προκύπτει από την ανάπτυξη της $\rho=\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha}$ είναι **πιθανή** τιμή τέτοια, ώστε η (4) να έχει λύσεις.

  Πράγματι· στην εξίσωση $7x^2-15y^2=\gamma$, η ανάπτυξη της $\rho=\dfrac{\sqrt{105}}{7}$ δίνει στους D της 1ης περιόδου τις τιμές ±7, ±8, ±3. Όπως είδαμε στην εξίσωση (3) αν γ = 3, τότε (x, y) = (3, 2) ή (x, y) = (243, 166) κ.τ.λ. ενώ αν γ = –3, η εξίσωση $7x^2-15y^2=-3$ είναι **αδύνατη**.
- Το αντίστροφο ισχύει και θα γίνει κατανοητό από το επόμενο παράδειγμα: Η διοφαντική εξίσωση $3x^2-79y^2=-13$ με $|-13|<\sqrt{3\cdot 79}$ έχει τις λύσεις (x, y) = (41, 8) ή (12049, 2348) ή …

Η πρόταση απαιτεί ότι κάποιος ή κάποιο από τους D_i της 1ης περιόδου της ανάπτυξης της $\rho=\dfrac{\sqrt{3\cdot 79}}{3}=\dfrac{\sqrt{237}}{3}$ έχουν απόλυτη τιμή 13, πράγμα που συμβαίνει αφού $D_4=D_8=13$. Τις λύσεις αυτές βρίσκουμε όπως και στην εξίσωση (3) που προηγήθηκε.

2ο Σχόλιο (θεωρητικό)

Άρτια περίοδο έχουν τα αναπτύγματα σε (συν. κλ.) των αριθμών $\sqrt{A}$, όταν ο Α είναι:

- πρώτος της μορφής $4\kappa+3$, $(\kappa\in\mathbb{N}^*)$,
- φυσικός αριθμός με κάποια από τις μορφές: $\alpha^2\pm 2$, $\alpha^2+\alpha$, $\alpha^2+2\alpha$, $4\alpha^2\pm 4$, $\kappa^2\alpha^2+\alpha$, $\kappa^2\alpha^2+2\alpha$, με $\alpha\in\mathbb{Z}$ και $|\alpha|>1$,
- $p_1\cdot p_2$ με p_1, p_2 περιττούς πρώτους και με $|p_1-p_2|=4$ (Έτσι η περίοδος της $\sqrt{p_1\cdot p_2}$ έχει 6 στοιχεία).

Περιττή περίοδο έχουν τα αναπτύγματα σε (συν. κλ.) των αριθμών $\sqrt{A}$, όταν ο Α είναι:

- πρώτος της μορφής $4\kappa+1$,
- φυσικός αριθμός με κάποια από τις μορφές: α^2+1 (περίοδο με ένα στοιχείο), $(2\alpha+1)^2+4$ (περίοδος με πέντε στοιχεία).

Βιβλιογραφία: ADRIEN MARIE LEGENDRE και *Θεωρία Αριθμών*, Ρασσιά Ιωάννη

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». P. R. HALMOS

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 431 (ΤΕΥΧΟΣ 132)

Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{Z}^*$ την εξίσωση

$$\frac{1}{x^2y}+\frac{4}{yz}-\frac{6}{zx^2}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{y}+\frac{12}{z}-\frac{64}{x^2yz}=6$$

Τσιλιακός Λευτέρης – Γαλάτσι

ΛΥΣΗ (Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι)

Η εξίσωση μετά την απαλοιφή παρονομαστών και τις κατάλληλες παραγοντοποιήσεις, γράφεται:

$$(3y+1)(1-2x^2)(z-3)=62 \text{ με } xyz\neq 0,\ (1)$$

Επειδή $3y+1\equiv 1(\bmod 3)$ ο πρώτος παράγοντας του γινομένου της (1), που είναι κάποιος από τους διαιρέτες του 62 μπορεί είναι ένας από τους αριθμούς $1, 31, -2, -62$.

Επιπλέον $y\neq 0$, οπότε $(3y+1)\in\{31,-2,-62\}$, άρα $y\in\{10,-1,-21\}$.

- Αν $y=10$ τότε η (1) γράφεται
$$(1-2x^2)(z-2)=2$$
και έχει ακέραια λύση μόνο όταν $1-2x^2=-1$ και $z-2=-2$ που απορρίπτεται
- Αν $y=-1$ τότε $(1-2x^2)(z-3)=-31$ δηλαδή
$$(1-2x^2=-1 \text{ και } z=33) \text{ ή}$$
$$(1-2x^2=-31 \text{ και } z=3), \text{ οπότε}$$
$$(x,y,z)\in\{(1,-1,33),(-1,-1,33),(4,-1,3),(-4,-1,3)\}$$
- Αν $y=-21$, τότε $(1-2x^2)(z-2)=-1$ δηλαδή
$$x^2=1 \text{ και } z=3$$
οπότε $(x,y,z)\in\{(1,-21,3),(-1,-21,3)\}$

Άρα οι λύσεις της δοσμένης εξίσωσης στο $\mathbb{Z}^*$ είναι: $(1,-1,33),(-1,-1,33),(4,-1,3),(-4,-1,3)$ και $(-1,-21,3)$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Μηνάς Στασινός – Αθήνα, Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια και Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

ΑΣΚΗΣΗ 432 (ΤΕΥΧΟΣ 132)

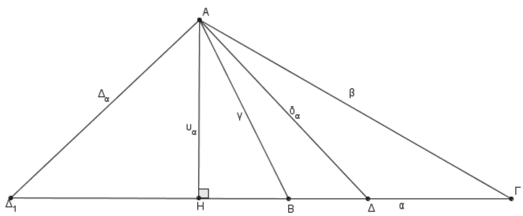
Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $|\hat{\Gamma}-\hat{B}|=90^o$, να αποδείξετε ότι

$$\delta_\alpha=\Delta_\alpha=\upsilon_\alpha\sqrt{2}=\frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\beta^2+\gamma^2}$$

όπου Δ_α η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

Φρούντζος Βασίλης – Αγρίνιο.

ΛΥΣΗ (Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα)



Αν $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^o$, τότε $\beta>\gamma$ (Ομοίως αν $\hat{\Gamma}-\hat{B}=90^o$ τότε $\gamma>\beta$). Είναι:

$$H\hat{A}\Delta=90^o-H\hat{\Delta}A=90^o-\left(\hat{\Gamma}+\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

$$=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}-\hat{\Gamma}-\frac{\hat{A}}{2}=\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}=45^o$$

Επομένως,

$$A\hat{\Delta}H=45^o \text{ και } A\hat{\Delta}_1H=45^o$$

αφού $\Delta_1\hat{A}\Delta=90^o$ (γωνία εσωτερικής – εξωτερικής διχοτόμου). Άρα το τρίγωνο $\Delta_1A\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε

$$\Delta_\alpha=A\Delta_1=\delta_\alpha=A\Delta.$$

Επίσης το τρίγωνο ΑΗΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($\hat{\Delta}=45^o$, $\hat{H}=90^o$), άρα $AH=\upsilon_\alpha=H\Delta$ και

$$AH^2+H\Delta^2=\delta_\alpha^2\Rightarrow 2\upsilon_\alpha^2=\delta_\alpha^2\Rightarrow\delta_\alpha=\upsilon_\alpha\sqrt{2}$$

οπότε $\Delta_\alpha=\delta_\alpha=\upsilon_\alpha\sqrt{2}$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\beta+\gamma}=\frac{2\beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}}{\beta-\gamma}\Rightarrow$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\eta\mu^2\frac{A}{2}}{(\beta-\gamma)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{A}{2}}{(\beta+\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-\eta\mu^2\frac{A}{2}}{(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2(\beta^2+\gamma^2)}=\frac{\sigma\upsilon\nu A}{4\beta\gamma}\Rightarrow\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$\Rightarrow 4\beta^2\gamma^2=(\beta^2+\gamma^2)^2-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$$

$$\Rightarrow\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)=(\beta^2-\gamma^2)^2\Rightarrow\alpha=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}},\ (1)$$

Από την (1) και το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\frac{(\beta^2-\gamma^2)^2}{\beta^2+\gamma^2}=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$\Rightarrow(\beta^2-\gamma^2)^2=(\beta^2+\gamma^2)^2-2\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)\sigma\upsilon\nu A$$

$$\Rightarrow 2\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)\sigma\upsilon\nu A=4\beta^2\gamma^2\Rightarrow\sigma\upsilon\nu A=\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}$$

$$\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-1=\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{(\beta+\gamma)^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

$$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}},\ (2)$$

Τελικά είναι:

$$\delta_\alpha=\frac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\beta+\gamma}\overset{(2)}{\Rightarrow}\delta_\alpha=\frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

οπότε

$$\Delta_\alpha=\delta_\alpha=\upsilon_\alpha\sqrt{2}=\frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

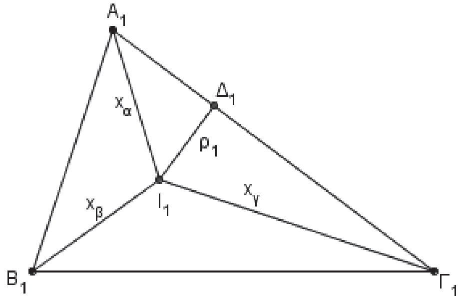
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Μηνάς Στασινός – Αθήνα, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο και Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

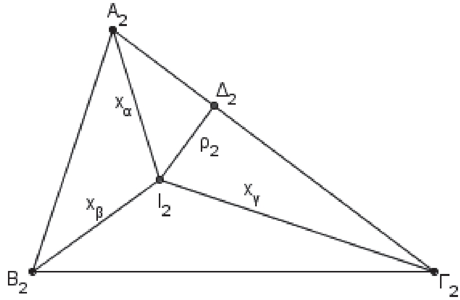
ΑΣΚΗΣΗ 433 (ΤΕΥΧΟΣ 133)

Αν σε δυο τρίγωνα οι αποστάσεις των κέντρων των εγγεγραμμένων κύκλων από τις κορυφές τους είναι ίσες μια προς μια, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Καζακόπουλος Απόστολος – Θεσσαλονίκη

ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο)





Με τους συμβολισμούς των παραπάνω σχημάτων, αν υποθέσουμε ότι $\rho_1<\rho_2$ έχουμε:

$$\frac{\rho_1}{I_1A_1}<\frac{\rho_2}{I_2A_2}\Rightarrow\eta\mu\frac{A_1}{2}<\eta\mu\frac{A_2}{2}\Rightarrow\hat{A}_1<\hat{A}_2$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\hat{B}_1<\hat{B}_2\ \ \text{και}\ \ \hat{\Gamma}_1<\hat{\Gamma}_2$$

οπότε

$$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1<\hat{A}_2+\hat{B}_2+\hat{\Gamma}_2$$

που αποκλείεται, αφού καθένα από τα αθροίσματα είναι σταθερό και ίσο με δυο ορθές.

Με παρόμοιους συλλογισμούς αποκλείεται και η περίπτωση $\rho_1>\rho_2$.

Έτσι, αναγκαστικά ισχύει $\rho_1=\rho_2$ απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta_1A_1I_1$ και $\Delta_2A_2I_2$ είναι ίσα.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι καθένα από τα υπόλοιπα 5 ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται μεταξύ κορυφών, έγκεντρου και σημείων επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές του ενός τριγώνου είναι ένα προς ένα ίσα με τα αντίστοιχα τμήματα του άλλου τριγώνου.

Έτσι, οι αντίστοιχες πλευρές των δυο τριγώνων είναι ίσες ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση έστειλαν επίσης ο συνάδελφοι Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι και Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο Κρήτης.

ΑΣΚΗΣΗ 434 (ΤΕΥΧΟΣ 133)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύουν $\alpha x+\beta y=1,\ (1)$, $\alpha x^2+\beta y^2=3,\ (2)$, $\alpha x^3+\beta y^3=17,\ (3)$ και $\alpha x^4+\beta y^4=99,\ (4)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\alpha x^5+\beta y^5$. Κατόπιν να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{y}{2}$, $\beta=\frac{x}{2}$ και να βρείτε τους αριθμούς α, β, x, y.

Στην μνήμη του δάσκαλου Αντώνη Κυριακόπουλου. Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία.

ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο)

Ισχύουν:

$$(2)\Rightarrow(x+y)(\alpha x^2+\beta y^2)=3(x+y)$$
$$\Rightarrow \alpha x^3+\beta y^3+xy(\alpha x+\beta y)=3(x+y)$$
$$\overset{(1),(3)}{\Rightarrow} 17+xy=3(x+y),\ \ (5)$$
$$(3)\Rightarrow(x+y)(\alpha x^3+\beta y^3)=17(x+y)$$
$$\Rightarrow \alpha x^4+\beta y^4+xy(\alpha x^2+\beta y^2)=17(x+y)$$
$$\overset{(2),(4)}{\Rightarrow} 99+3xy=17(x+y),\ \ (6)$$

Με απαλοιφή του xy από τις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$48=8(x+y)\Rightarrow x+y=6,\ \ (7)$$

και με αντικατάσταση στην (5) βρίσκουμε ότι

$$xy=1,\ \ (8)$$

Από τις (7) και (8) προκύπτει ότι οι αριθμοί x, y είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$u^2-6u+1=0$$

οπότε έχουμε:

$$x=3+2\sqrt{2}\ \text{ και }\ y=3-2\sqrt{2}\ \text{ ή }$$
$$x=3-2\sqrt{2}\ \text{ και }\ y=3+2\sqrt{2}$$

Επιπλέον, λόγω της (1) έχουμε:

$$(x+y)(\alpha x+\beta y)=x+y\Rightarrow \alpha x^2+\beta y^2+xy(\alpha+\beta)=x+y$$
$$\Rightarrow 3+xy(\alpha+\beta)=x+y\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{x+y-3}{xy}\overset{(7),(8)}{=}\alpha+\beta=3,\ (10)$$

οπότε

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha+\beta=3\\ (3+2\sqrt{2})\alpha+(3-2\sqrt{2})\beta=1\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}\alpha+\beta=3\\ (3-2\sqrt{2})\alpha+(3+2\sqrt{2})\beta=1\end{pmatrix}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}x=3+2\sqrt{2}\\ y=3-2\sqrt{2}\\ \alpha=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{y}{2}\\ \beta=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{x}{2}\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}x=3-2\sqrt{2}\\ y=3+2\sqrt{2}\\ \alpha=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{y}{2}\\ \beta=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{x}{2}\end{pmatrix}\right.$$

Υπολογισμός του $K=\alpha x^5+\beta y^5$.

Από την (4) έχουμε:

$$(x+y)(\alpha x^4+\beta y^4)=99(x+y)$$
$$\Rightarrow \alpha x^5+\beta y^5+xy(\alpha x^3+\beta y^3)=99(x+y)$$
$$\Rightarrow \alpha x^5+\beta y^5+1\cdot 17=99\cdot 6\Rightarrow \alpha x^5+\beta y^5=577$$

Λύση έστειλαν επίσης ο συνάδελφοι Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Ιωάννης Ανδρής - Αθήνα και Κτενιαδάκης Μιχαήλ – Ηράκλειο Κρήτης.

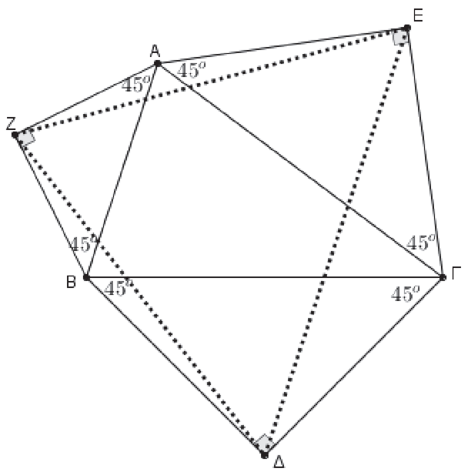
ΑΣΚΗΣΗ 435 (ΤΕΥΧΟΣ 133)

Με υποτείνουσες τις πλευρές οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΖΑΒ, ΔΒΓ και ΕΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

$$(\Delta EZ)=\frac{1}{2}(2+\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)(AB\Gamma)$$

Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη.

ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γεώργιος - Κάτω Πατήσια)



Από το νόμο των συνημιτόνων, έχουμε:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=\beta^2+\gamma^2-4\cdot\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A}$$

$$=\beta^2+\gamma^2-4E\sigma\varphi\alpha \text{ , οπότε}$$

$$4E\sigma\varphi A=\beta^2+\gamma^2-\alpha^2$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$4E\sigma\varphi B=\alpha^2+\gamma^2-\beta^2 \text{ και } 4E\sigma\varphi \Gamma=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$$

Με πρόσθεση των τριών ισοτήτων, παίρνουμε:

$$4E(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

Έτσι, η αποδεικτέα γράφεται:

$$(\Delta EZ)=(AB\Gamma)+\frac{1}{2}(AB\Gamma)(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(\Delta EZ)=(AB\Gamma)+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}$$

Ισχύουν:

$$Z\hat{A}E=90^o+\hat{A},\ Z\hat{B}\Delta=90^o+\hat{B},\ \Delta\hat{\Gamma}E=90^o+\hat{\Gamma}$$

και

$$(AE\Gamma\Delta BZ)=(\Delta EZ)+(ZAE)+(ZB\Delta)+(\Delta E\Gamma)$$

$$=(AB\Gamma)+(ZAB)+(B\Delta\Gamma)+(A\Gamma E),\ (1)$$

Επιπλέον,

$$\eta\mu Z\hat{A}E=\sigma\upsilon\nu A,\ \eta\mu Z\hat{B}\Delta=\sigma\upsilon\nu B,\ \eta\mu\Delta\hat{\Gamma}E=\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

και

$$AZ=ZB=\gamma\frac{\sqrt{2}}{2},\ AE=E\Gamma=\beta\frac{\sqrt{2}}{2},\ B\Delta=\Delta\Gamma=\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}$$

οπότε η (1) γράφεται

$$(\Delta EZ)+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$=(AB\Gamma)+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow(\Delta EZ)+\frac{1}{4}\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+\frac{1}{4}\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B+\frac{1}{4}\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$=(AB\Gamma)+\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\ (2)$$

Αλλά,

$$2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$=\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

οπότε

$$(2)\Leftrightarrow(\Delta EZ)+\frac{1}{8}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(AB\Gamma)+\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$\Leftrightarrow(\Delta EZ)=(AB\Gamma)+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}$$

που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση

Επειδή

$$(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)^2\geq 3(\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi A)=3$$

έχουμε: $\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma\geq\sqrt{3}$, οπότε:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}\geq\frac{2+\sqrt{3}}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο και Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

Προτεινόμενα Θέματα

438. Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους ισχύουν:

- $\alpha+\beta+\gamma=51$,
- $\alpha\beta\gamma=4000$,
- $0<\alpha\leq 10$ και $\gamma\geq 25$

Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον

439. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma=\beta$ και έστω $AM=\upsilon$ το μήκος του ύψους – διαμέσου – διχοτόμου και $\Gamma\Delta=\delta$ το μήκος της διχοτόμου της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Αν ισχύει $\frac{\upsilon}{\delta}=\frac{1}{2}$ ζητούνται τα μέτρα των γωνιών $\hat{B},\ \hat{\Gamma},\ \hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

440. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n για τους οποίους υπάρχουν πρώτοι p, q ώστε να ισχύει $p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$

Δεληστάθης Γεώργιος - Κάτω Πατήσια

441. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ο εγγεγραμμένος του κύκλος έχει ακτίνα ρ και ο περιγεγραμμένος έχει ακτίνα R. Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\varphi^2A+\sigma\varphi^2B+\sigma\varphi^2\Gamma+7\leq 8\left(\frac{R}{2\rho}\right)^2$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

442. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$21\alpha\beta+2\beta\gamma+8\gamma\alpha\leq 12$$

να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{3}{\gamma}$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

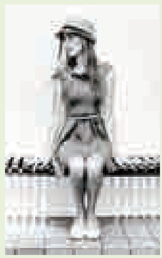
Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Τα Μαθηματικά, γνωστά και ως η γλώσσα του σύμπαντος, έχουν τη δύναμη να μας μεταφέρουν σε έναν κόσμο όπου η λογική και η φαντασία συναντιούνται. Πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες, ο Διόφαντος, ο Ζήνων, ο Αρχιμήδης, και άλλοι μαθηματικοί ανά τους αιώνες όπως ο **Riemann**, ο **Eüler**, ο **Lucas**, ο **Laisant**, ο **Αλ Χουαρίζμι (Al Khwarizmi)**, ο **Λεονάρδος της Πίζας ή Fibonacci, κ.ά.** , μας έδωσαν την ομορφιά που κρύβουν τα μαθηματικά, με προβλήματα-γρίφους, με τα «**Διασκεδαστικά Μαθηματικά**». Έτσι, Μαθηματικά προβλήματα παράξενα διατυπωμένα σε απλή γλώσσα γίνονται προσιτά σε όλους, αποκαλύπτοντας πως η μαθηματική σκέψη δεν είναι μόνο, για τους ειδικούς, αλλά μπορεί να είναι μια πηγή χαράς και έμπνευσης για τον καθένα.

Στις σελίδες του βιβλίου «**τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**» που κυκλοφόρησε πρόσφατα από την ΕΜΕ, μπορεί ο αναγνώστης «να ταξιδέψει» από τα αινίγματα της αρχαιότητας μέχρι πιο σύγχρονες μαθηματικές ιδέες, ανακαλύπτοντας την αιώνια γοητεία των αριθμών και των σχημάτων.

ΓΡΙΦΟΙ

Οι μαθητές: Στην τάξη επικρατεί απόλυτη ησυχία. Όλοι οι μαθητές ψάχνουν, ο μαθηματικός αδιάφορα κοιτάζει έξω από το παράθυρο. Τι να ψάχνουν οι μαθητές;



Μάντεψε την ηλικία μιας κοπέλας: Οι κοπέλες συνήθως δεν θέλουν να λένε την ηλικία τους. Εσείς όμως μπορείτε να την βρείτε. Αφαιρέστε την δική σας ηλικία από το 99 και δώστε τον αριθμό της **διαφοράς** στη φίλη σας για να τον προσθέσει στη δική της ηλικία. Ύστερα να σας πει όχι το άθροισμα αλλά τον αριθμό που θα βρει αν προσθέσει το ψηφίο των εκατοντάδων στο ψηφίο των μονάδων. Ξέρετε τώρα πως θα βρείτε την ηλικία της;

Το προβλήματα των κρουνών : Έχουμε τέσσερις κρουνούς, ο πρώτος γέμισε όλη τη δεξαμενή σε μία μέρα. Ο δεύτερος σε δύο, ο τρίτος σε τρείς και ο τέταρτος σε τέσσερις μέρες. Σε πόσο χρόνο θα τη γεμίσουν την δεξαμενή όλοι μαζί;

Με ένα ζύγισμα: Έχουμε 5 διαφορετικά είδη σε ποσότητες (π.χ. ξηρούς καρπούς), δεν γνωρίζουμε το βάρος τους που είναι από ένα μέχρι 9 γραμμάρια. Μπορούμε με ένα ζύγισμα να βρούμε τι βάρος έχει το κάθε είδος;

Οι φίλοι: Παύλος και η γυναίκα του Μαίρη έχουν 20 φίλες και φίλους. Κάποιοι ήταν συμμαθητές του Παύλου και κάποιοι ήταν συμμαθητές της Μαίρης. Ο καθένας τους γνωρίζει 15 από αυτούς. Πόσους φίλους γνώρισαν όταν έγιναν ζευγάρι;

Το λάδι: Ο κυρ Γιάννης είναι ελαιοπαραγωγός και έχει ένα δοχείο λάδι. Θέλει να πάρει ένα λίτρο αλλά δεν έχει τίποτα για να το μετρήσει, πως θα το κάνει; Α) Αν έχει στη διάθεσή του δύο άδεια δοχεία που χωράνε 5 λίτρα και 3 λίτρα. Β) Αν έχει μια ζυγαριά.

Η ανακύκλωση: Πολύ σημαντικό για το περιβάλλον είναι η ανακύκλωση. Η Σούζη πίνει ένα αναψυκτικό την ημέρα, επιστρέφει τις κενές φιάλες και ανά 4 παίρνει δώρο μια γεμάτη. Σε 21 ημέρες ήπιε 21 αναψυκτικά και έχει επιστρέψει συνολικά 20 κενές φιάλες. Πόσα αναψυκτικά αγόρασε;

Τα φρούτα: Σε τρία κλειστά κιβώτια βλέπουμε τις επιγραφές: Στο πρώτο γράφει «ΑΧΛΑΔΙΑ», στο δεύτερο γράφει «ΜΗΛΑ» και στο τρίτο γράφει «ΑΧΛΑΔΙΑ ΚΑΙ ΜΗΛΑ». Μας ενημέρωσαν ότι και οι τρεις επιγραφές είναι λάθος. Μπορούμε να βρούμε το περιεχόμενο κάθε κιβωτίου, αν πάρουμε μόνο ένα φρούτο από το ένα χωρίς να δούμε το υπόλοιπο περιεχόμενο;

Τα κοσμήματα: Έχουμε 9 χρυσά δακτυλίδια ίδια αλλά κάποιο έχει **λιγότερο βάρος**, χωρίς να ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα. Μπορείτε με δύο ζυγίσματα να το βρείτε; (με ζυγαριά ισορροπίας δύο δίσκων)

Ο αριθμός: Ποιος θετικός αριθμός επαληθεύει την ισότητα: $\Psi^2+\Psi=\Psi^2.\Psi$

Η δασκάλα: Την πρώτη μέρα των μαθημάτων μετά τις διακοπές των Χριστουγέννων και της Πρωτοχρονιάς είπε η δασκάλα στους μαθητές της, από το 2000 και μετά όλα τα χρόνια κρύβουν την ηλικία μου. Μάλιστα φέτος είναι η ηλικία μου στο τετράγωνο.

Α) Πότε γεννήθηκε η δασκάλα;

Β) Ο Πέτρος μαθητής της $5^{ης}$ είπε στη δασκάλα, κυρία αν επαναλάβω τα ψηφία της ηλικίας μου και τον αριθμό το προσθέσω με το έτος θα πάρω το τετράγωνο της ηλικίας του πατέρα μου. Ποια είναι η ηλικία του πατέρα του;

Γ) Η Δήμητρα μαθήτρια της Δ΄ παρατήρησε. Κυρία αν αυξήσετε κατά ένα τα ψηφία της ηλικίας σας θα έχετε την ηλικία του μπαμπά του Πέτρου.

Σε ποιο έτος αναφέρονται;

αφορμές ... και στιγμιότυπα

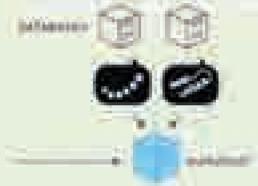
Τα Nobel του 2024

Τα βραβεία **Nobel** δίνονται σε εξαιρετικούς ανθρώπους, από διαφορετικούς τομείς, που συνέβαλαν ουσιαστικά στην πρόοδο της επιστήμης, της λογοτεχνίας και της παγκόσμιας ειρήνης. Είναι ένα **σύνολο** από ετήσια **διεθνή** βραβεία που απονέμονται, σε μια σειρά από κατηγορίες, σε αναγνώριση των πολιτισμικών και επιστημονικών επιτευγμάτων τους. Η διαθήκη του Σουηδού εφευρέτη **Alfred Nobel**, θεσμοθέτησε τα βραβεία το **1895 όπου** και τότε δόθηκαν βραβεία στη Φυσική, στη Χημεία, στη Φυσιολογία ή Ιατρική, ενώ στη Λογοτεχνία και στην Ειρήνη, για πρώτη φορά απονεμήθηκαν, το **1901.** Το σχετικό βραβείο στις Οικονομικές Επιστήμες δημιουργήθηκε το **1968**. Μεταξύ **1901** και **2024**, τα βραβεία Nobel και το Βραβείο Οικονομικών Επιστημών απονεμήθηκαν 623 φορές σε 1004 άτομα και σε οργανισμούς. Κάποιο από αυτούς έχουν λάβει το βραβείο Nobel περισσότερες από **μία φορά,** αυτό κάνει ένα σύνολο **835** ατόμων και **21** οργανισμών. Τα βραβεία και για φέτος, θα δοθούν στην Στοκχόλμη της Σουηδίας, ενώ της Ειρήνης θα δοθεί στο Όσλο της Νορβηγίας τον Δεκέμβρη 2024 σε πανηγυρική τελετή.

Πολλές φορές, ισχυρίζονται κυρίως οι μαθηματικοί, ότι τα Nobel έχουν, μέσα τους και Μαθηματικά, περισσότερο της Φυσικής, της Χημείας, της Οικονομίας και μερικές φορές και της Ιατρικής. Τα αντίστοιχα όμως για την επιστήμη των Μαθηματικών, πιο γνωστά βραβεία, είναι τα: **Abel, Fields, Shaw**.

Φυσικής: Οι John Hopfield και Geoffrey Hinton μοιράστηκαν το Nobel Φυσικής για τις πρωτοποριακές τους ανακαλύψεις στη **μηχανική** μάθηση και τα **νευρωνικά δίκτυα**. Ο Hopfield, καθηγητής στο Princeton, εισήγαγε το ομώνυμο δίκτυο, το οποίο επιτρέπει τη σύνδεση μεταξύ δεδομένων, όπως **εικόνες**, ώστε να αναγνωρίζονται, σαν **μοτίβα**. Ο Hinton, καθηγητής στο University of Toronto, ανέπτυξε το **Boltzmann Machine,** το οποίο χρησιμοποιεί τεχνικές, από τη στατιστική φυσική, για την αναγνώριση και ανάλυση μοτίβων. Η δουλειά τους έχει οδηγήσει σε τεχνολογικές καινοτομίες που βρίσκονται στη βάση της τεχνητής νοημοσύνης που χρησιμοποιούμε σήμερα. Θυμίζουμε ότι ο Hopfield έχει βραβευτεί και με το βραβείο **Turing** της Πληροφορικής, και έχει εμπνεύσει πολλούς επιστήμονες να ασχολιθούν και να διερευνήσουν, πως η **βιολογία** μπορεί να συνδυαστεί με την **πληροφορία**, δημιουργώντας έναν “ψηφιακό εγκέφαλο”.

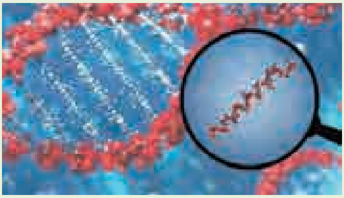
Χημείας: Ο David Baker και οι Demis Hassabis και John Jumper μοιράστηκαν το βραβείο Χημείας για τη δουλειά τους στην **πρόβλεψη και τον σχεδιασμό** πρωτεϊνών. εργασία τους αυτή, ανοίγει νέες προοπτικές για την κατανόηση ασθενειών και την ανάπτυξη φαρμάκων.



Ο Baker, από το Πανεπιστήμιο της Ουάσιγκτον, κατάφερε να σχεδιάσει **πρωτεΐνες** από το μηδέν, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε φαρμακευτικές αγωγές και βιοϋλικά. Οι **Hassabis** και **Jumper,** μέσω της **DeepMind,** ανέπτυξαν το **AlphaFold,** ένα μοντέλο τεχνητής νοημοσύνης που έλυσε **το πρόβλημα της πρόβλεψης** της δομής των πρωτεϊνών, μια πρόκληση που βασάνιζε τους επιστήμονες για δεκαετίες. Η

Οι έρευνες τους, είχαν ξεκινήσει το 2020, όπου οι **Demis Hassabis** και **John Jumper** παρουσίασαν ένα μοντέλο Τεχνητής Νοημοσύνης που ονομάζεται **AlphaFold2**, με τη βοήθειά του, μπόρεσαν να **προβλέψουν τη δομή** σχεδόν και των **200** εκατομμυρίων πρωτεϊνών που έχουν εντοπίσει οι ερευνητές. Από την ανακάλυψή τους αυτή, το **AlphaFold2** έχει χρησιμοποιηθεί από περισσότερα από δύο εκατομμύρια άτομα σε **190 χώρες**. Ανάμεσα από αυτές τις πολυάριθμες επιστημονικές εφαρμογές, **οι ερευνητές** μπορούν τώρα να κατανοήσουν καλύτερα την **αντοχή** στα αντιβιοτικά και να δημιουργήσουν εικόνες ενζύμων που μπορούν να **αποσυνθέσουν το πλαστικό**. Η ζωή δεν θα μπορούσε να υπάρξει **χωρίς τις πρωτεΐνες**. Το ότι μπορούμε τώρα να προβλέψουμε τις πρωτεϊνικές δομές και να σχεδιάσουμε τις δικές μας πρωτεΐνες αποτελεί τεράστιο όφελος για την **ανθρωπότητα**.

Ιατρικής: Το βραβείο απονεμήθηκε στους Αμερικανούς επιστήμονες Victor Ambros και Gary Ruvkun για την ανακάλυψη των **microRNAs**, μικρών μορίων RNA που παίζουν κρίσιμο ρόλο στη ρύθμιση της γονιδιακής έκφρασης. Η έρευνά τους αποκάλυψε, πώς αυτά τα μικρά μόρια, καθορίζουν **ποια γονίδια είναι ενεργά** σε κάθε τύπο κυττάρου, γεγονός που είναι θεμελιώδες για την ανάπτυξη και λειτουργία πολυκύτταρων οργανισμών.



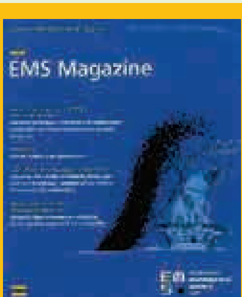
Οικονομίας: Οι οικονομολόγοι Daron Acemoglu και Simon Johnson βραβεύτηκαν για τις μελέτες τους, που εστιάζουν στη σχέση μεταξύ **πολιτικών** θεσμών και **οικονομικής ανάπτυξης.** Η δουλειά τους, ιδίως μέσω του βιβλίου τους, "Γιατί Αποτυγχάνουν τα Έθνη;", εξετάζει πώς η **κατανομή** της πολιτικής εξουσίας, επηρεάζει την **ευημερία των εθνών**. Οι δύο καθηγητές του **MIT** έχουν συνεισφέρει σημαντικά στη δημόσια συζήτηση σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι **θεσμοί και η τεχνολογία** μπορούν να οδηγήσουν σε οικονομική **πρόοδο ή παρακμή**.

Λογοτεχνίας: Η Han Kang [Βραβείο **Booker** 2016] από τη **Νότια Κορέα** κέρδισε το Nobel Λογοτεχνίας για τη "δυναμική ποιητική πρόζα της, που αντιμετωπίζει ιστορικά τραύματα και αποκαλύπτει την ευθραυστότητα της ανθρώπινης ζωής". Η Han είναι γνωστή για τα έργα της, που εξερευνούν σκοτεινά θέματα, όπως η **απώλεια και η βία**. Το διάσημο μυθιστόρημά της "Η Χορτοφάγος", το οποίο εστιάζει στην **απομόνωση** και την επανάσταση του **ατόμου** απέναντι σε κοινωνικούς καταναγκασμούς, έχει μεταφραστεί σε πολλές γλώσσες όπως και στη χώρα μας και έχει προκαλέσει παγκόσμιο ενδιαφέρον. Επίσης κυκλοφορεί στη χώρα μας, το βιβλίο της "Μαθήματα Ελληνικών" όπου χαρακτηριστικό είναι, ότι η συγγραφέας τόνιζε σε πρόσφατη συνέντευξή της: "στη Κορεάτικη κοινωνία τα πάντα κινούνται **έντονα** και **γρήγορα**, ταυτόχρονα όμως υπάρχει **γαλήνη** και **βάθος**. Ίσως η ένταση και η συνύπαρξη πολλών διαφορετικών στοιχείων, παραδόξως συμβάλλουν στον πολιτιστικό πλούτο της ...".

Ειρήνης: Το Νόμπελ Ειρήνης δόθηκε στη Nihon Hidankyo [ιδρύθηκε το 1956], την Ιαπωνική Συνομοσπονδία των επιζώντων από τις **ατομικές βόμβες** της Χιροσίμα και του Ναγκασάκι. Αυτή η ομάδα, η οποία αποτελείται από επιζώντες των καταστροφικών βομβαρδισμών του **1945**, έχει αγωνιστεί αδιάκοπα για την **εξάλειψη** των πυρηνικών όπλων **παγκοσμίως**. Η βράβευση τιμά, την ακούραστη προσπάθειά τους, να ευαισθητοποιήσουν τον κόσμο σχετικά με τις **επιπτώσεις** των **πυρηνικών όπλων** και να προωθήσουν την **ειρήνη**.

Πηγές: ProtoThema, Philenews.com, "Το Βήμα", nobelists.org, Dnews.gr, mononews.gr, Lifo, phy-sicsgg.

Περιοδικά που λάβαμε



39° Συνέδριο της ΕΜΕ στην Αρχαία Ολυμπία

Έγινε με μεγάλη επιτυχία, το 39° συνέδριο της ΕΜΕ 1-3 Νοεμβρίου 2024 στον φιλόξενο χώρο της Διεθνούς Ολυμπιακής Ακαδημίας της Αρχαίας Ολυμπίας, με θέμα: **Η πορεία των Μαθηματικών από την Αρχαιότητα μέχρι σήμερα: Θεμέλια και σύγχρονες κατευθύνσεις**
Οι κεντρικοί ομιλητές του συνεδρίου ήταν.

Γεώργιος Δάσιος, Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών, Αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Αθηνών, ***«Μαθηματικά: Χθες-Σήμερα-Αύριο»***

Παναγιώτης Μερτικόπουλος, Καθηγητής ΕΚΠΑ, ***«Τεχνητή νοημοσύνη και Μαθηματικά»***

Ανδρέας Γ. Μπουντουβής, Καθηγητής, τ. Πρύτανης ΕΜΠ, Σχολή Χημικών Μηχανικών, ***«Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση 4.0 »***

Νεγρεπόντης Στέλιος, Ομότιμος Καθηγητής ΕΚΠΑ,
«***Η ανακάλυψη της μαθηματικής βάσης της Πλατωνικής Φιλοσοφίας οδηγεί στην κατανόηση της Πλατωνικής Φιλοσοφίας και των παραδόξων του Ζήνωνος, αλλά και της Ιστορίας των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών»***

Μετά το **38°** συνέδριο, που έγινε στις **Σέρρες**, πάλι με μεγάλη επιτυχία, στο **39°** συνέδριο της ΕΜΕ υπήρξαν πολλές εισηγήσεις και στρογγυλά τραπέζια σε επίκαιρα θέματα της μαθηματικής επιστήμης. Το επόμενο το **40°** συνέδριο, έχει προγραμματιστεί να γίνει το φθινόπωρο, στην πόλη των **Ιωαννίνων**, το **2025**. Από το συνέδριο αυτό, κρατάμε στην μνήμη μας, την μαγευτική τοποθεσία της αρχαίας Ολυμπίας, (χώρος ιερός και σημαντικός στο πέρασμα των αιώνων), όχι μόνο για τη θεσπέσια ομορφιά, την τοποθεσία, τη χωροταξική διαμόρφωση το πολύ πράσινο αλλά και την **τέλεια αρχιτεκτονική** των αθλητικών χώρων, στην τέλεση των αγώνων. Σπάνιας ομορφιάς μεταξύ των άλλων το Μουσείο των Ολυμπιακών Αγώνων, και το Αρχαιολογικό Μουσείο. **Κάθε πολίτης αυτού του κόσμου,** πρέπει έστω και μια φορά να επισκεφτεί αυτό το **κόσμημα** που υπάρχει στον τόπο μας Απόλυτη συγκυρία είναι, ότι έχουν περάσει **2800** χρόνια από τότε [**776** π.Χ. μέχρι το **2024**] από την τέλεση της πρώτης ολυμπιάδας.

Το βραβείο Blaise Pascal Medal στον Αθανάσιο Φωκά

Ο **Αθανάσιος Φωκάς** επανέρχεται με νέα διάκριση. Εξελέγη, τη χρονιά που πέρασε, μέλος της **Academia Europaea (Ευρωπαϊκή Ακαδημία Επιστημών)** για τον κλάδο των Μαθηματικών και τιμήθηκε με το βραβείο **Blaise Pascal Medal.**

Ο Αθανάσιος Φωκάς ενσαρκώνει απόλυτα τον όρο *homo universalis*. Διαπρεπής μαθηματικός, ιατρός και αεροναυπηγός. Κάτοχος της έδρας Μη γραμμικών Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του **Cambridge**. Μέλος της **Ακαδημίας Αθηνών** και πρόεδρος της Επιστημονικής Επιτροπής του Ιδρύματος Λασκαρίδη, μεταξύ πολλών άλλων ιδρυμάτων. Και ξεκίνησε από το Αργοστόλι της Κεφαλλονιάς για να σπουδάσει Αεροναυπηγική στο περίφημο **Imperial College** του Λονδίνου… Από τότε δεν σταμάτησε ποτέ…

Τα επιτεύγματα του Αθανασίου Φωκά δικαιολογούν απόλυτα τη δήλωση του **Israel Gelfand**, ενός εκ των κορυφαίων μαθηματικών του προηγούμενου αιώνα (αλλά και σημαντικού βιολόγου) ότι «*ο Φωκάς είναι ένα σπάνιο παράδειγμα επιστήμονα με την Αναγεννησιακή σημασία του όρου*». Χαρακτηριστικό παράδειγμα το πρόσφατο βιβλίο του: **Comprehending** "Μονοπάτια Κατά - νόησης".

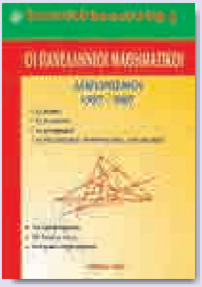
Και τώρα η βράβευση από την Ευρωπαϊκή Ακαδημία Επιστημών. Κάθε χρόνο η Ευρωπαϊκή Ακαδημία Επιστημών απονέμει το **Blaise Pascal** σε εξαιρετικούς επιστήμονες. Κατά μέσο όρο απονέμει πέντε βραβεία σε ορισμένους κλάδους -Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, Επιστήμη των Υπολογιστών, Βιοϊατρικές επιστήμες, Μηχανική, Περιβαλλοντικές επιστήμες, επιστήμες των Υλικών, Ανθρωπιστικές επιστήμες.

Ο Αθανάσιος Φωκάς μαζί με τον διακεκριμένο μαθηματικό **Δημήτρη Χριστοδούλου** ξεχωρίζουν ως οι μοναδικοί έλληνες μαθηματικοί στον γνωστικό τομέα των Μαθηματικών, της Ευρωπαϊκής Ακαδημίας. Επίσης, ο μόνος που συμμετέχει σε αυτόν τον τομέα από το τμήμα **εφαρμοσμένων μαθηματικών** και θεωρητικής φυσικής του Cambridge.

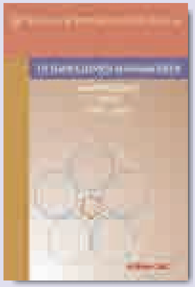
Πηγή: mononews, Lifo, Καθημερινή, pcci.gr, HubΕΚΠΑ, University of Cambridge.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

Προσφορές

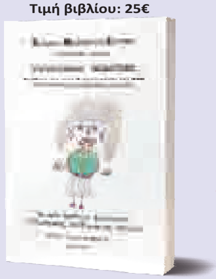
Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€



2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

Βιβλία της ΕΜΕ

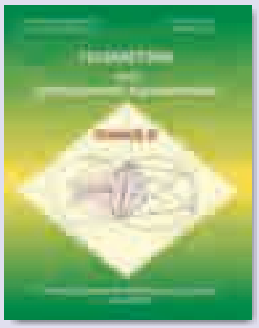
Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

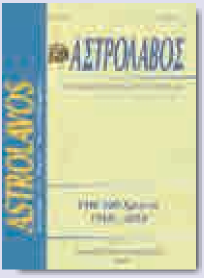
Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

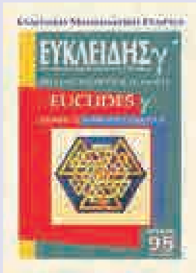


Τιμή βιβλίου: 20€

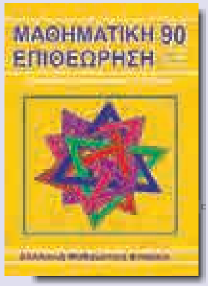
Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr