ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

117

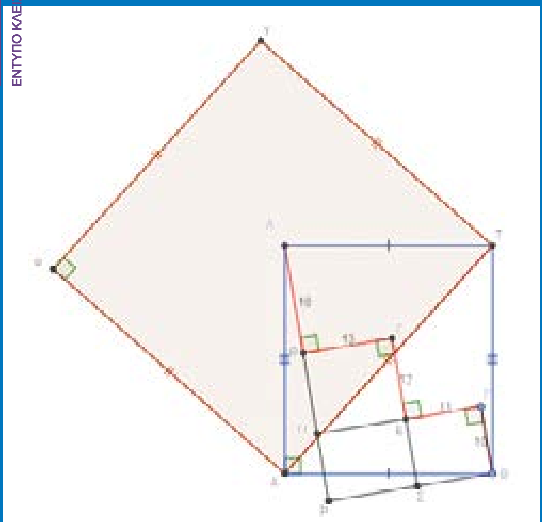
Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020 ευρώ 3,5

Ο πυθαγορισμός

και το αρχαίο Άργος



6 μετάλλια

24th Junior Mathematical Olympiad (JBMO) 9 - 13 September 2020

Mathematical Society of South Eastern Europe (MASSEE)

24^{th} JBMO

φιλοξενήθηκε
από την Ε.Μ.Ε.
9-13 Σεπτ. 2020

VIRTUAL

4 μετάλλια

61st International
Mathematical
Olympiad
Saint Petersburg
Russia

61^{th} IMO

φιλοξενήθηκε
από τη Ρωσία
18-28 Σεπτ. 2020

VIRTUAL

Τιμητική διάκριση

Έλληνες που ξεχωρίζουν
φωκίων κολαΐτης

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1066/98 ΚΕΜΠ.ΑΘ.
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 117 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2020 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη

Γενικά Θέματα

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στην πρόσφατη επικαιρότητα των Μαθηματικών

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	6 Νοεμβρίου	2020
Ευκλείδης:	23 Ιανουαρίου	2021
Αρχιμήδης:	27 Φεβρουαρίου	2021

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
μια καινούργια σχολική χρονιά ξεκινάει
με ενθουσιασμό, με σχέδια, με όνειρα,
σ' ένα περιβάλλον με πολλά απρόοπτα και εμπόδια.
Ας χαθούμε για λίγο στα σχήματα, στους αριθμούς,
στις έξυπνες λύσεις των ασκήσεων
και ας αφεθούμε για λίγο στο τυχαίο,
στη λογική ερμηνεία των πραγμάτων.
Με αποφασιστικότητα, να επιμείνουμε σε ό,τι μας κάνει καλύτερους,
να δούμε με προοπτική το μέλλον.
Ο κόσμος, η εργασία, το περιβάλλον, και το έξω γενικά
που ξέραμε, δεν θα είναι το ίδιο
θα έχει άλλαξει, θα έχει νέα δεδομένα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε.
Να ζούμε το τώρα και να προσέχουμε τους εαυτούς μας.
Μακάρι το απρόοπτο να έχει καλή εξέλιξη
και να είναι ευνοϊκό για όλο τον κόσμο.
Μέχρι τότε να ζούμε με όλους τους κανόνες ασφαλείας,
με την ελπίδα ενός κόσμου που θάναι πιο ανθρώπινος,
για μια ζωή αισιόδοξη, πιό γεμάτη, πιό χαρούμενη.

Υ.Γ. : Σας ευχαριστούμε για τις εύστοχες παρατηρήσεις σας και για τις πολλές **εργασίες** συναδέλφων και μαθητών, από όλη την Ελλάδα. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις περισσότερες. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες, ανάλογα με την επικαιρότητα, κάθε φορά, του περιοδικού.
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

" δεν σταματάμε να κάνουμε πράγματα επειδή γερνάμε, αλλά γερνάμε επειδή σταματάμε να κάνουμε πράγματα ".

Rosamunde Pilcher [1924-2019]
Αγγλίδα συγγραφέας

Η επιτροπή σύνταξης του περιοδικού

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.** Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Ο Πυθαγορισμός στο αρχαίο Άργος: φιλοσοφία, μαθηματικά και τέχνες

Σαραβάκου Ευανθία, Στείρη Κωνσταντίνα, Σωτηρόπουλος Γιώργος, Τσαμπάσης Μάνος, Τσατσούλης Δημήτρης, Φλέσσας Γιώργος - Μάριος, και Χαβιαρλή Μαρία, μαθητές από το 1ο Γυμνάσιο Άργους[1]

Το Άργος περηφανεύεται ότι είναι **η αρχαιότερη**, συνεχώς κατοικούμενη, πόλη της Ευρώπης. Αρχαιολόγοι, ιστορικοί και άλλοι μελετητές έχουν αναδείξει και συνεχίζουν να αναδεικνύουν πτυχές της πλουσιότατης παράδοσης της πόλης. Μια, εν πολλοίς άγνωστη, όψη της ιστορίας της περιοχής είναι η άνθηση του **πυθαγορισμού** –στη φιλοσοφία, τα μαθηματικά και τις καλές τέχνες- στο Άργος της κλασικής αρχαιότητας. Στο άρθρο αυτό γίνεται, αρχικά, μια προσπάθεια ανασυγκρότησης της φιλοσοφικής δραστηριότητας των Αργείων Πυθαγορείων και της σχέσης του ιδίου του Πυθαγόρα με το Άργος και την ευρύτερη περιοχή του. Επίσης, μελετάται ο τρόπος που τα πυθαγόρεια μαθηματικά επηρέασαν τον Αργείο γλύπτη **Πολύκλειτο**, ο οποίος με τη σειρά του εξέλιξε τον πυθαγορισμό, τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά. Στη μελέτη μας χρησιμοποιήσαμε τόσο αρχαίες πρωτότυπες πηγές, όσο και σύγχρονη βιβλιογραφία.

Η ιστορία του Άργους από τη νεολιθική εποχή μέχρι τον Χριστιανισμό. Κατοικείται επί 6.000 χρόνια συνεχώς και παρά τις καταστροφές, πάντοτε κτιζόταν στην ίδια προνομιακή θέση.

Ο Πυθαγόρας και το Άργος

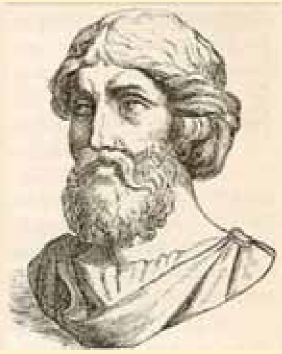
Ο Πυθαγόρας γεννήθηκε περίπου το 570 π.Χ. στην Σάμο και απεβίωσε το 490 π.Χ. στο Μεταπόντιο της Ιταλίας. Το έργο του επικεντρώθηκε στην φιλοσοφία, την μουσική και τα μαθηματικά. Σε ηλικία περίπου σαράντα ετών εγκατέλειψε την γενέτειρά του Σάμο, πιθανότατα για **πολιτικούς λόγους**, και κατέφυγε στην Κάτω Ιταλία. Εκεί, στον Κρότωνα, ίδρυσε μία φιλοσοφική σχολή. Οι ιδέες του διαδόθηκαν γρήγορα, φτάνοντας μέχρι τον Τάραντα, το Μεταπόντιο και αργότερα την ηπειρωτική Ελλάδα.[2] Ο Πυθαγόρας είναι γνωστός, επίσης, για την συνεισφορά του στα μαθηματικά. Αν και οι περισσότερες αρχαίες πηγές, του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη συμπεριλαμβανομένων, δεν μαρτυρούν καμιά ιδιαίτερη ενασχόληση του ιδίου του Πυθαγόρα με τα μαθηματικά, εντούτοις οι διάδοχοί του, με

---

[1] **Σχόλιο της σύνταξης:** Πρωτότυπη εργασία είχε γραφεί από τους μαθητές τη σχολική χρονιά 2019-2020 με αφορμή το 35^{ο} συνέδριο της ΕΜΕ Νοε 2020.

[2] H. Diels - W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Berlin: Weidmann1952, v.1, σσ. 96–105.

προεξάρχοντες τον Φιλόλαο (470-385 π.Χ.) και τον Αρχύτα (428-347 π.Χ.), είναι βέβαιο ότι ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά. Στην πραγματικότητα, οι μεταγενέστεροι του Πυθαγόρα Πυθαγόρειοι είναι οι θεμελιωτές των μαθηματικών, ίσως βασισμένοι σε προφορικές διδασκαλίες του ιδίου του Πυθαγόρα.[3] Και γνωρίζουμε από τις πηγές ότι ο Πυθαγόρειος **Φιλόλαος** είχε μετοικήσει στην ηπειρωτική Ελλάδα στα μέσα περίπου του 5ου αι. π.Χ., την εποχή περίπου που φαίνεται να φουντώνει το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και τον πυθαγορισμό στο Άργος.[4]



Φιλόλαος (470-385 π.Χ.)

Μάλιστα, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι δυνατή η σύνδεση του Φιλολάου με τον ευρύτερο κύκλο των Πυθαγορείων του Άργους και της γύρω περιοχής.

Σύμφωνα με την αρχαία παράδοση, ο Πυθαγόρας απέρριπτε τον γραπτό λόγο και για αυτό δεν έχει σωθεί κανένα πρωτότυπο έργο του. Ωστόσο, γνωρίζουμε αρκετά για τον βίο του και τις ιδέες του, κυρίως από τους Διογένη Λαέρτιο (π. 180-240 μ.Χ.), Πορφύριο(234-305 μ.Χ.) και Ιάμβλιχο (245-325 μ.Χ.). Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα για την έρευνά μας είναι η πληροφορία που διασώζουν οι Διογένης Λαέρτιος και Παυσανίας (π. 110-180 μ.Χ.), οι οποίοι αναφέρουν ότι ο Πυθαγόρας καταγόταν από την **Φλιούντα**.[5]

Η Φλιούς υπήρξε αρχαία πόλη-κράτος και βρισκόταν στο Φλιάσιο Πεδίο (βορειοδυτικά της Νεμέας, στις όχθες του ποταμού Ασωπού). Η περιοχή ίσως αρχικά λεγόταν Αραντία, από τον Άραντα, και ύστερα Αιρεθυραία. Αργότερα όμως μετονομάστηκε και έλαβε το όνομα του Φλία. Ο **Φλίας** ήταν είτε γιός του Διόνυσου και της Αριάδνης και **υπήρξε Αργοναύτης**, είτε γιός του Διονύσου και της Χθονοφύλης. Κατά το μύθο, ο Φλίας ήταν εγγονός του Τημένου, του γενάρχη των Αργείων. Πρόκειται για μια σαφή υπόμνηση των σχέσεων των δύο πόλεων.

Η Φλιούντα όπως είναι σήμερα

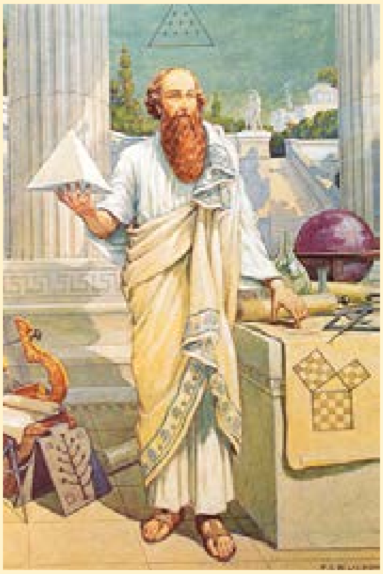
Η Φλιούς **ήταν Ιωνική πόλη και**, όταν οι Δωριείς από το Άργος και την Κόρινθο επιτέθηκαν εναντίον της, πολλοί κάτοικοί της κατέφυγαν στην Σάμο και την Μικρά Ασία, υπό τον Ίππασο, ο οποίος ήταν πρόγονος του Πυθαγόρα.

Συγκεκριμένα, όταν ο Αργείος Ρηγνίδας, επιτιθέμενος στους Φλιασίους τους νίκησε, τους πρότεινε να τον δεχτούν ως βασιλιά και μαζί με αυτόν να εγκατασταθούν στην Φλιούντα και Δωριείς. Ο **Ίππασος** αντέδρασε προτείνοντας να αρνηθούν, και, όπως είδαμε, κατέφυγε στην Σάμο. Κάποιοι άλλοι κατευθύνθηκαν στην Μικρά Ασία. Όσοι απέμειναν στην Φλιούντα υποτάχτηκαν και έγιναν στενοί σύμμαχοι των Αργείων. Σχηματίστηκε, μάλιστα, μια χαλαρή ομοσπονδία από έξι δωρικές πόλεις: Φλιούς, Άργος, Κόρινθος, Σικυών, Επίδαυρος και Τροιζήνα. Συνεπώς, η μοίρα του Άργους και της Φλιούντας ήταν κοινή από ένα σημείο και μετά. Οι πόλεις δεν γειτνίαζαν μόνο, αλλά συνεργάζονταν κιόλας. Οπότε, η παρουσία πολλών Πυθαγορείων στο Άργος και την Φλιούντα μόνο τυχαία δεν είναι και φαίνεται πως στην Αργολιδοκορινθία υπήρχε έντονο ενδιαφέρον και ενασχόληση με την φιλοσοφία του Πυθαγόρα και τα λεγόμενα πυθαγόρεια μαθηματικά.

Για να υποστηριχθεί και ερμηνευθεί η άνθηση του πυθαγορισμού στο Άργος και την ευρύτερη περιοχή του, δημιουργήθηκαν στην αρχαιότητα κάποιοι υποστηρικτικοί θρύλοι. Ένας από αυτούς βασίζεται στη διδασκαλία του Πυθαγόρα για την μετεμψύχωση.

[3] C. Huffman, "Pythagoras", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL =
<https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/pythagoras/>.
[4] G. S. Kirk, J. E. Raven, M. Schofield, *Οιπροσωκρατικοίφιλόσοφοι*, μτφ. Δ. Κούρτοβικ, Αθήνα: ΜΙΕΤ1988-2006, σσ. 332-360.
[5] Diogenes Laertius, *Vitae Philosophorum*, VIII 1–2; Pausanias, *PausaniaeGraeciaeDescriptio*, II.13, 1–2.

Συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι ο Πυθαγόρας πίστευε στην μετενσάρκωση. Είναι διαδεδομένη η ιστορία, σύμφωνα με την οποία ο Πυθαγόρας, ενώ περπατούσε, εντόπισε κάποιον να βασανίζει έναν σκύλο. Ο Πυθαγόρας, αφού συγκινήθηκε από τις κραυγές του σκύλου, είπε στον άνθρωπο να σταματήσει να τον βασανίζει, διότι, όταν ο πιστός του φίλος πέθανε, η ψυχή του εισχώρησε σε αυτό το ζώο.[6]Μαρτυρείται όμως και άλλο ένα περιστατικό, το οποίο εμπλέκει άμεσα το Άργος με τον Σάμιο φιλόσοφο. Ο Πυθαγόρας διατεινόταν ότι η ψυχή του ανήκε κάποτε στον Εύφορβο, τον Τρώα ήρωα, ο οποίος ήταν και ο πρώτος που τραυμάτισε τον Πάτροκλο. Μάλιστα, όταν ο Πυθαγόρας επισκέφθηκε την πόλη του Άργους αναγνώρισε αμέσως την ασπίδα του στην κορυφή του ναού της Ήρας, καθώς οι Αργείοι την είχαν φέρει μαζί τους, ως λάφυρο, μετά την άλωση της Τροίας. Όταν ο Πυθαγόρας την αντίκρισε άρχισε να κλαίει. Τότε οι Αργείοι παραξενεύτηκαν και ρώτησαν τον Πυθαγόρα για την αιτία της συγκίνησής του. Μόλις τους αφηγήθηκε την ιστορία τον πέρασαν για τρελό. Ο Πυθαγόρας, για να τους πείσει, τους είπε ότι στο εσωτερικό της ασπίδας γραφόταν το όνομα Εύφορβος. Οι δύσπιστοι Αργείοι την κατέβασαν, μετά από αιώνες, και πραγματικά αντίκρισαν το όνομα που τους είχε πει. Τότε τον πίστεψαν και τον υποδέχτηκαν με αγάπη.[7] Η ιστορία αυτή συνδέει άμεσα τον Πυθαγόρα με το Άργος και αποτελεί μια προσπάθεια ερμηνείας της ύπαρξης Πυθαγορείων στο Άργος. Οι Αργείοι φαίνεται να έχουν διδαχθεί από τον ίδιο τον Πυθαγόρα και να έχουν πειστεί ιδίοις όμμασι για την αλήθεια των διδασκαλιών του.



Όπως είδαμε παραπάνω, στην αρχαιότητα δημιουργήθηκαν θρύλοι σχετικά με την παρουσία του ίδιου του Πυθαγόρα και των προγόνων του στο Άργος και την ευρύτερη περιοχή του. Οι ιστορίες αυτές θεωρούμε ότι δημιουργήθηκαν για να εξηγήσουν την ιστορικά καταγεγραμμένη δραστηριότητα Πυθαγόρειων φιλοσόφων και μαθηματικών στο κλασικό Άργος.

Ειδικότερα, μετά την επίθεση εναντίον του Πυθαγόρα και των μαθητών του στον Κρότωνα, όσοι επέζησαν αναγκάστηκαν, αρχικά, να μετοικήσουν σε άλλες πόλεις της Ιταλίας. Αργότερα, ορισμένοι, όπως ο Φιλόλαος και ο Λύσις (μέσα 5ου αι.-390 π.Χ.), μετακόμισαν στην ηπειρωτική Ελλάδα και διέδωσαν ακόμα περισσότερο την διδασκαλία του Πυθαγόρα. Ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος Ιάμβλιχος συνέγραψε το *Περί τοῦ πυθαγορικοῦ βίου*, το οποίο αποτελεί την βασικότερη πηγή για την ιστορία του πυθαγορισμού στην αρχαιότητα. Σε αυτό μνημονεύει αρκετούς Αργείους Πυθαγορείους. Συγκεκριμένα, αναφέρονται οι Ἱππομέδων, Τιμοσθένης, Εὐέλθων, Θρασύδαμος, Κρίτων, Πολύκτωρ, καθώς και δύο γυναίκες, η Βοιώ και η Βαβελύκα.[8] Ο αριθμός των Αργείων Πυθαγορείων είναι σημαντικός, αν συνυπολογίσει κανείς ότι

[6]Diels - Kranz, 21B7.

[7]DiodorusSiculus, *Bibliotheca Historica*, X.6.2–3; Diogenes Laertius, *Vitae Philosophorum*, VIII 4–5; PubliusOvidiusNaso, *Metamorphoses*, 15. 61–72.

[8]Iamblichus, *DevitaPythagorica*, 36.247.47, 36.247.76.

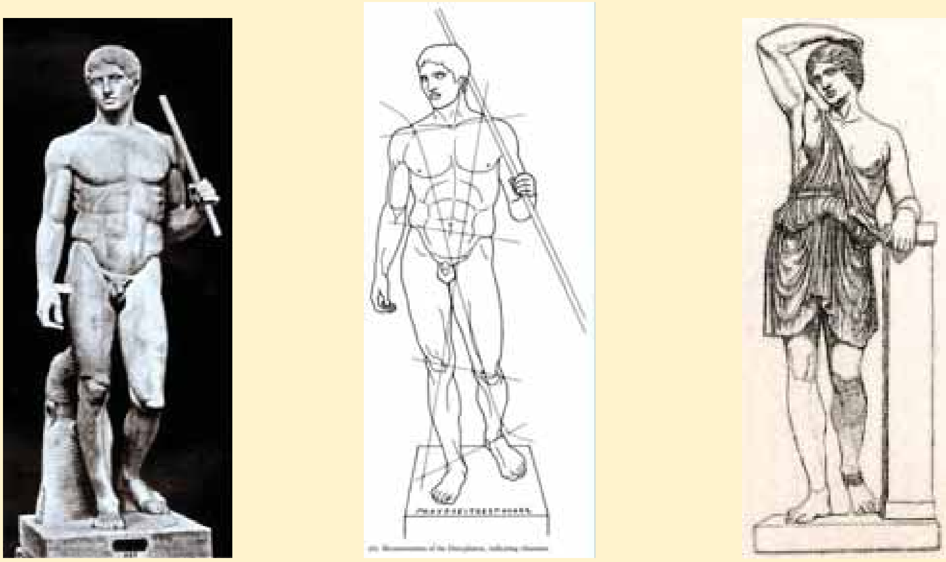
στον κατάλογο αναφέρονται λιγότεροι Πυθαγόρειοι στην Σπάρτη και την Αθήνα. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει ότι ο κύκλος των Πυθαγορείων του Άργους υπήρξε ένας από τους βασικούς πυρήνες του πυθαγορισμού στην ηπειρωτική Ελλάδα. Αν συνυπολογιστούν και οι Πυθαγόρειοι της γειτονικής Φλιασίας (Διοκλῆς, Ἐχεκράτης, Πολύμναστος, Φάντων, Ἐχεκράτεια), φαίνεται ότι στο Άργος και την ευρύτερη περιοχή του ο πυθαγορισμός άκμαζε.[9] Χρειάζεται να επισημανθεί ότι ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που δέχτηκε γυναίκες ως μαθήτριές του, αλλά και ως δασκάλες στην σχολή του. Ακόμα από τον Διογένη Λαέρτιο αναφέρεται ο Ασκληπιάδης ο Φλιάσιος (4ος-3ος αι. π.Χ.), ο οποίος φοίτησε στην Ακαδημία των Αθηνών και ήταν μαθητής του Στίλπωνα, φιλοσόφου της Μεγαρικής Σχολής. Επίσης, ο Τίμωνας από τη Φλιασία (320-230 π.Χ.) διακρίθηκε ως συγγραφέας κωμωδιών, τραγωδιών, σκωπτικών ποιημάτων και φιλοσοφικών κειμένων. Τέλος, η Αξιοθέα η Φλιασία, και αυτή μαθήτρια της Ακαδημίας του Πλάτωνα, ασχολήθηκε και δίδαξε μαθηματικά και φυσική φιλοσοφία.[10]

Ο Πολύκλειτος και τα πυθαγόρεια μαθηματικά

Πέρα από τα προαναφερθέντα ονόματα, υπάρχει και άμεση απόδειξη της ενασχόλησης με τις διδασκαλίες των Πυθαγορείων στο αρχαίο Άργος. Ο Αργείος **γλύπτης Πολύκλειτος** είχε συγγράψει την πραγματεία *Κανών*, στην οποία βάσισε τις απόψεις του για τις τέλειες αναλογίες του ανθρώπινου σώματος στις διδασκαλίες των Πυθαγορείων. Από τον *Κανόνα* διασώζονται ελάχιστα αποσπάσματα.

Ειδικότερα, ο Πολύκλειτος ήταν ξακουστός γλύπτης της αρχαιότητας. Οι απόψεις για την καταγωγή του διίστανται, αφού ο Πλάτων (427-347 π.Χ.) και ο Παυσανίας τον θεωρούσαν Αργείο, ενώ οι Ρωμαίοι Πλίνιος (23-79 μ.Χ.) και Κικέρων (106-43 π.Χ.) Σικιώνιο. Θα πρέπει να πιστέψουμε τον Πλάτωνα, ο οποίος ήταν και περίπου σύγχρονός του. Ο Πλίνιος πιθανότατα έπεσε θύμα παρανόησης, συγχέοντας τον Πολύκλειτο με έναν Σικυώνιο μαθητή του Φειδία (π. 500-430 π.Χ.).[11] Ο Πλάτων μάλιστα αναφέρεται κολακευτικά στον Αργείο Πολύκλειτο, θεωρώντας τον ισάξιο του Φειδία.[12]

Ο Πολύκλειτος έζησε τον 5ο αιώνα π.Χ., δίχως να γνωρίζουμε ακριβείς ημερομηνίες. Αν και δημιούργησε πολλά αγάλματα, κανένα πρωτότυπο έργο του δεν διασώζεται. Υπάρχουν μόνο αντίγραφά τους, από την ρωμαϊκή περίοδο. Οι σωζόμενες πληροφορίες για την οικογένειά του δεν είναι πολλές. Ο πατέρας μάλλον λεγόταν Πάτροκλος ή Πατροκλής. Κατά τον θρύλο, Πολύκλειτος και Φειδίας είχαν κοινό δάσκαλο, τον περίφημο Αργείο γλύπτη Αγελάδα.



Πολύκλειτος – Δορυφόρος**,** σύμφωνα με τον Κανόνα

[9] Γ. Στείρης, «Ο Αργείος φιλόσοφος Αρποκρατίων και η γενικότερη φιλοσοφική κίνηση στο κλασσικό και ρωμαϊκό Άργος», *Αργειακή Γη* 4 (2008), σσ. 35-36.

[10]Στοίδιο, σελ. 36.

[11]JefferyM. Hurwit, "TheDoryphoros: LookingBackward", στοW. G. Moon, B. HughesFowler (επιμ.), *Polykleitos, the Doryphoros, and Tradition,* Madison: The University of Wisconsin Press, 1995, σσ. 3-18.

[12]Πλάτων, *Πρωταγόρας*, 311c.

Στο Άργος, στα πρώιμα κλασικά χρόνια, υπήρχε μια σημαντικότατη σχολή γλυπτικής, η οποία συνέχισε την πανάρχαια τοπική παράδοση. Σύμφωνα με τους αρχαίους θρύλους, γλυπτά σπουδαίων αρχαίων ξυλογλυπτών, όπως αυτά του Επειού -μυθικού κατασκευαστή του Δούρειου Ίππου και γόνου Αργείων που είχαν αποικήσει την Φωκίδα- και του Πείρασου -γιου του Άργου- ήταν αφιερωμένα σε ναούς της ευρύτερης περιοχής. Ο Πείρασος θρυλείται ότι είχε κατασκευάσει και αφιερώσει στο Ηραίο της Τίρυνθας ένα ξόανο της Ήρας, φτιαγμένο από ξύλο αγριαχλαδιάς. Αργότερα, κατά τον Παυσανία, το ξόανο αυτό μεταφέρθηκε από τους Αργείους στην Τίρυνθα.[13] Ο Παυσανίας, επίσης, διασώζει μια πολύτιμη μαρτυρία. Αναφερόμενος στις απαρχές της γλυπτικής στην Ελλάδα, σημειώνει: «Ἀργεῖοι, τέχναν εἰδότες ἐκ προτέρων».[14] Στο *Αργείον Εργαστήριον* φαίνεται ότι γεννήθηκε αυτή η ευγενής τέχνη και εκεί πρωτοέπλασαν ξυλογλύπτες και χαλκογλύπτες. Ο Παυσανίας έρχεται να προσθέσει ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον στοιχείο, αναφερόμενος στους Δίποινο και Σκύλλη, γιούς ή μαθητές του περίφημου Δαιδάλου. Άγαλμα αυτών των εμβληματικών τεχνιτών διασωζόταν στις Κλεωνές, μια μικρή πόλη στην ευρύτερη Φλιασία, η οποία συνδέεται όχι μόνο με τον πυθαγορισμό, αλλά και με την πανάρχαια γλυπτική.[15]

Η άνθηση της γλυπτικής σχολής του Άργους εντοπίζεται στην περίοδο ύπαρξης και δημιουργίας του Αγελάδα (ή Γελάδα) (τέλη $6^{ου}$ – αρχές $5^{ου}$ π.Χ. αι.), του θεωρούμενου δασκάλου της τριάδας των σπουδαιότερων κλασικών γλυπτών: των Μύρωνα, Φειδία και Πολυκλείτου.[16] Ο Αγελάδας ήταν αριστοτέχνης του χαλκού, αλλά δεν σώζεται κανένα έργο του, παρότι είχε κατασκευάσει περίφημα αγάλματα. Πλέον του Αγελάδα, μαρτυρούνται και άλλοι σπουδαίοι Αργείοι γλύπτες: ο σύγχρονος του Αγελάδα Αριστομέδων και οι μεταγενέστεροι Αργειάδας (γιός του Αγελάδα), Γλαύκος και Διονύσιος. Όλοι αυτοί εργάζονταν στο χαλκό.[17]Άρα, ο Πολύκλειτος δεν εμφανίστηκε σαν κομήτης, αλλά εντάσσεται σε μια πανάρχαια και πλουσιότατη παράδοση, στην οποία προσέδωσε και θεωρητικό βάθος με την πραγματεία του, τον *Κανόνα*.

Ο Πλούταρχος (45-120 μ.Χ) αναφέρεται στον ***Κανόνα* του Πολυκλείτου** σε ένα κείμενό του που συζητά θέματα τέχνης. Ειδικότερα, υποστηρίζει ότι οι καλλιτέχνες αρχικά πλάθουν τις μορφές τραχιές και κακοσχηματισμένες και στην συνέχεια έρχεται η τελειοποίηση τους, όταν κάθε πράγμα λαμβάνει την δέουσα μορφή του. Για αυτό τον λόγο, κατά τον Πλούταρχο, ο αγαλματοποιός Πολύκλειτος υποστήριζε στο κείμενό του ότι «η δυσκολότερη στιγμή για τους αγαλματοποιούς είναι όταν ο πηλός φτάσει στο νύχι». Ο Πλούταρχος συνεχίζει γράφοντας ότι είναι εύλογο η ύλη να υπακούει νωθρότερα στην φύση, που την κινεί προοδευτικά και παράγει άμορφα και ακαθόριστα σχήματα, όπως ακριβώς συμβαίνει με το αβγό, στο οποίο όσο διαρκεί η μορφοποίηση και σχηματοποίησή του, τότε δημιουργείται

[13]Pausanias, *PausaniaeGraeciaeDescriptio*,II.16.1, II.17.5.
[14]Στοίδιο, VI.10.5.
[15]Στο ίδιο, II.15.1.
[16]*Scholia Graeca in Aristophanem*, F. Dubner (ed.), Paris: Didot 1877, Argumentum-scholionsch ran, v. 501. l.9.
[17]https://argolikivivliothiki.gr/2009/04/09/%ce%b1%ce%b3%ce%b5%ce%bb%ce%ac%ce%b4%ce%b1%cf%82/, πρόσβαση 12/3/2020.

εντός του το ζώο. Και καταλήγει ο Πλούταρχος παρατηρώντας ότι είναι πάρα πολύ δύσκολο το έργο εκείνων που στα χέρια τους ο πηλός θα υποστεί λεπτομερή επεξεργασία.[18] Φαίνεται ότι στον *Κανόνα* ο Πολύκλειτος είχε ασχοληθεί και με πρακτικά προβλήματα αγαλματοποιΐας και όχι μόνο με θεωρητικά ζητήματα.

Επίσης, κατά τον Φίλωνα τον Μηχανικό (280-220 π.Χ.), ο ανδριαντοποιός Πολύκλειτος είχε γράψει στον *Κανόνα* ότι «το άριστο επιτυγχάνεται σταδιακά (από το ελάχιστο) μέσω πολλών υπολογισμών (αριθμών)».[19] Συγκεκριμένα, ο Φίλων εξηγεί ότι πολλοί προσπάθησαν να κατασκευάσουν **ισομεγέθη όργανα**, μεταχειριζόμενοι την ίδια μέθοδο κατασκευής και τα ίδια υλικά. Παρότι χρησιμοποίησαν τις ίδιες αναλογίες, τα κατασκεύασαν τελικά πολύ διαφορετικά μεταξύ τους και με διαφορετικές δυνατότητες. Όταν μάλιστα ρωτήθηκαν για τις διαφορές αυτές, δεν μπόρεσαν να τις εξηγήσουν. Και στο πλαίσιο αυτό ο Φίλων μνημονεύει τον Πολύκλειτο. Στα έργα, που για την ολοκλήρωσή τους προϋποτίθενται πολλοί υπολογισμοί, το παραμικρό λάθος στις λεπτομέρειες καταλήγει σε τεράστιο σφάλμα. Οπότε «**το άριστο επιτυγχάνεται σταδιακά (από το ελάχιστο) μέσω πολλών υπολογισμών (αριθμών)**».[20]

Παρά τις διαφοροποιήσεις των μελετητών ως προς την απόδοση της φράσης του Πολυκλείτου, είναι προφανής **η μαθηματική αντίληψη της ομορφιάς**, ως αποτέλεσμα των σωστών αριθμητικών αναλογιών. Το βαθύτερο νόημα των λόγων του Πολυκλείτου είναι ότι το κάλλος του σώματος στηρίζεται στην συμμετρία και τις αναλογίες των μερών του. Η συμμετρία αναφέρεται στην σχέση του αριστερού με το δεξιό μέρος του αγάλματος, ενώ η αναλογία στην σχέση των επιμέρους μερών του σώματος. Αυτή είναι και η μέγιστη καινοτομία του Πολυκλείτου: ότι επέκτεινε και τελειοποίησε την μαθηματικοποίηση της γλυπτικής, η οποία είχε ξεκινήσει στην αιγυπτιακή αγαλματοποιΐα. Ο Πολύκλειτος πρέπει να είχε επηρεαστεί από τους Πυθαγόρειους, οι οποίοι υποστήριζαν ότι οι αριθμοί ήταν τα δομικά στοιχεία του κόσμου. Οι **πυθαγόρειοι αριθμοί δεν ήταν αφηρημένοι**, αλλά διέθεταν πραγματική ύπαρξη μέσα στο σύμπαν. Κάθε ον είχε ένα χαρακτηριστικό αριθμό, καθώς αποτελούσε άθροισμα πολλών επιμέρους αριθμών. Το τέλειο άγαλμα, κατά τον Αργείο γλύπτη, ήταν η ενσάρκωση του τέλειου αριθμού και μπορούσε να οδηγήσει τον θεατή να κατανοήσει τις κοσμικές αρμονίες. Συνεπώς, η ιδέα ότι υφίσταται ένας αριθμός που εκφράζει την τέλεια μορφή του ανθρώπου και αυτός μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός αγάλματος αποτελεί την μέγιστη συμβολή του Πολυκλείτου στο ρεύμα του πυθαγορισμού.

Ορισμένοι μελετητές θεωρούν πως, παρότι οι Πυθαγόρειοι πίστευαν σε τέλειους και ιερούς αριθμούς, ο Πολύκλειτος πρώτος **υποστήριξε ότι υπήρχε ένας τέλειος αριθμός** για κάθε επιμέρους πράγμα. Την ιδέα του Πολυκλείτου υιοθέτησαν οι μεταγενέστεροι Πυθαγόρειοι.[21]

Ο Πλίνιος διασώζει την πληροφορία ότι ο Πολύκλειτος, ο μαθητής του Αγελάδα, έπλασε τον ***Διαδούμενο*** και τον ***Δορυφόρο***. Κατασκεύασε και τον **Κανόνα**, το άγαλμα, στο οποίο ενσωμάτωσε τους κανόνες της τέχνης του. Ο Πλίνιος θεωρεί ότι ο Πολύκλειτος ήταν ο μόνος γλύπτης στην ιστορία, ο οποίος, κατασκευάζοντας ένα άγαλμα, πέτυχε να δημιουργήσει την τέχνη καθαυτή. Συγκεκριμένα, αναφέρει

[18] Plutarch, *QuaestionesConvivales*, 2.3.2.
[19] «τὸεὖπαρὰμικρὸνδιὰπολλῶνἀριθμῶνγίνεται». Diels–Kranz, v.1, σσ. 392-393.
[20] Στοίδιο, σσ. 392-393.
[21] J. J. Pollitt, «The *Canon* of Polykleitos and other Canons», στο W. G. Moon, B. Hughes Fowler (επιμ.), *Polykleitos, the Doryphoros, and Tradition*, Madison: The University of Wisconsin Press 1995, σσ. 19-24.

ότι όλοι οι καλλιτέχνες παίρνουν από τον *Κανόνα* τις κατευθυντήριες γραμμές της τέχνης τους.[22] Διασώζει, μάλιστα, την εκτίμηση του Μάρκου Τερέντιου Βάρωνα(116-27 π.Χ.) ότι τα έργα του Πολυκλείτου ήταν γεωμετρικά, με άριστες αναλογίες.[23] Ο αρχαιολόγος Πέτρος Θέμελης ανακάλυψε, στις ανασκαφές της Μεσσήνης, το πρώτο μαρμάρινο αντίγραφο του *Δορυφόρου* στην Ελλάδα (το πρωτότυπο χάλκινο δεν έχει σωθεί), που χρονολογείται τον 1^{ο}αι. π.Χ. και υποστηρίζει ότι σε αυτό δεν απεικονίζεται ο Αχιλλέας, ούτε ο Ορέστης, αλλά ο Θησέας. Μάλιστα, κατά τον Θέμελη, δεν πρόκειται καν για δορυφόρο, αφού η μορφή έφερε ξίφος και ασπίδα. Η έρευνα του Θέμελη δείχνει ότι δεν πρέπει να υιοθετούμε άκριτα τις αρχαίες πηγές, αλλά να τις ερμηνεύουμε με νέους τρόπους.

Ο Γαληνός (129-199 μ.Χ.) από τη μεριά του μαρτυρεί ότι οι γλύπτες επιλέγουν να αναπαραστήσουν τις τέλειες μορφές κάθε είδους. Πρότυπό τους υπήρξε ο *Κανών* του Πολυκλείτου. Ο Γαληνός αναφέρει επίσης ότι το συγκεκριμένο άγαλμα έφερε αυτό το όνομα γιατί όλα τα μέρη του ήταν απόλυτα συμμετρικά μεταξύ τους.[24]Ο ίδιος συγγραφέας συμπληρώνει ότι ο Πολύκλειτος ήταν αυτός που δίδαξε, με το σύγγραμμά του *Κανών*, σε όλους τους μεταγενέστερους τις συμμετρίες του σώματος. Το άγαλμα με το ίδιο όνομα ήταν η πραγμάτωση της πολυκλείτειας θεωρίας στην ύλη και ονομάστηκε και εκείνο Κανών για το λόγο αυτό: «Έτσι, για παράδειγμα οι αγγειοπλάστες, οι ζωγράφοι και οι αγαλματοποιοί ζωγραφίζουν και πλαστουργούν τα καλύτερα δείγματα κάθε είδους, για παράδειγμα από έναν ωραιότατο άνθρωπο ή άλογο ή βόδι ή λιοντάρι, **αποβλέποντας να επιτύχουν τις χρυσές τομές** σε κάθε είδος. Έτσι πολλοί επαινούν κάποιον ανδριάντα που ονομάζεται Κανών του Πολυκλείτου, και πήρε αυτό το όνομα, επειδή είχε ακριβή συμμετρία όλων των μελών μεταξύ τους».[25]

Ο Γαληνός, αντλώντας από τον Στωικό φιλόσοφο Χρύσιππο (280-206 π.Χ.), δηλώνει ότι η υγεία του σώματος έγκειται στη συμμετρία των στοιχείων του, ενώ θεωρεί ότι το κάλλος προκύπτει όχι από την συμμετρία των μερών του σώματος, αλλά από τις σωστές αναλογίες των μερών, όπως υποστήριζε ο Πολύκλειτος. Ειδικότερα, του δαχτύλου προς το δάχτυλο, και αυτών με τα χέρια και τον καρπό, και αυτών με τον πήχη, και αυτού με όλο το χέρι και όλα τα υπόλοιπα μέρη. Κατά τον Γαληνό, ο Πολύκλειτος στον *Κανόνα* είχε μελετήσει με ακρίβεια όλες τις συμμετρικές αναλογίες του σώματος και τις επιβεβαίωσε εμπράκτως, κατασκευάζοντας έναν αδριάντα που συνόψιζε τη θεωρία του. Και καταλήγει ο Γαληνός στο ότι η ομορφιά του σώματος κρίνεται από τη συμμετρία των μελών, όπως υποστηρίζουν οι ιατροί και οι φιλόσοφοι. Ο Χρύσιππος φαίνεται, λοιπόν, να είχε μελετήσει τον *Κανόνα* του Πολυκλείτου και να είχε αντλήσει από το κείμενο του Αργείου αγαλματοποιού τις πληροφορίες αυτές.[26]

Σε άλλο του έργο ο Γαληνός εκθειάζει τον Πολύκλειτο, επειδή απέδωσε στο άγαλμά του τις τέλειες αναλογίες των μερών. Ο Αργείος γλύπτης δεν περιορίστηκε, σύμφωνα με τον Γαληνό, σε εξωτερικές αναλογίες, όπως άλλοι γλύπτες, **αλλά ασχολήθηκε σε βάθος με τις μαθηματικές αναλογίες.**[27] Ο φιλόσοφος Σιμπλίκιος (6^{ος}μ.Χ αιώνας), ο οποίος είχε μελετήσει τον Γαληνό, αναφέρει ότι ο Πολύκλειτος δη-

[22]Diels -Kranz, v.1, σ. 391.

[23]M. Halbertsma, «The call of the canon: why art history cannot do without», στο E. Mansfield (επιμ.), *Making Art History: A Changing Discipline and its Institutions*, New York: Routledge 2007, σσ. 18-19.

[24]Diels - Kranz, v.1, σ. 391.

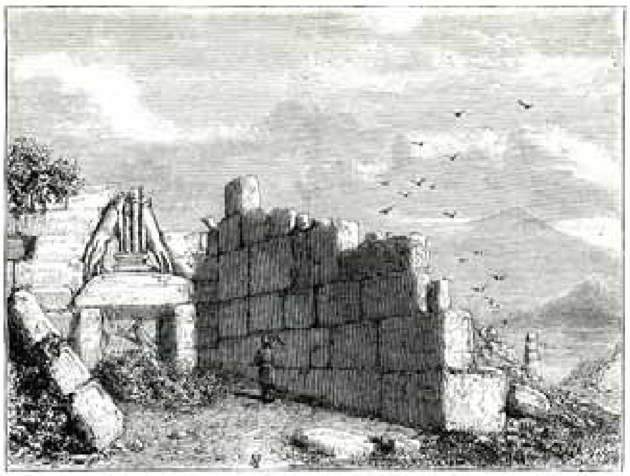
[25]H. Diels – W. Kranz, *Οι Προσωκρατικοί, Οι μαρτυρίες και τα αποσπάσματα*, μτφ.-επιμ. Β. Κύρκος, Αθήνα: Παπαδήμας 2011, τ. Α', σ. 731.

[26]Galenus, *De placitisHippocratisetPlatonis*, 5.3.16.

[27]Galenus, *De usupartium*, 4.352. 5-10.

μιούργησε ένα άγαλμα, του οποίου τα μέρη ήταν συμμετρικά καθαυτά και μεταξύ τους, οπότε ο ίδιος ο γλύπτης το ονόμασε Κανόνα.[28]

Η σχέση του Πολυκλείτου με τον πυθαγορισμό ενισχύεται και από άλλη μια μαρτυρία. Φαίνεται ότι ο Πολύκλειτος είχε επηρεαστεί από το έργο του γλύπτη Πυθαγόρα, ο οποίος επίσης καταγόταν από την Σάμο και δραστηριοποιήθηκε στην Πελοπόννησο και την Κάτω Ιταλία στον 5^{ο} π.Χ. αιώνα. Ο Διογένης Λαέρτιος αναφέρει ότι ο γλύπτης Πυθαγόρας προσπάθησε να συνδυάσει τον ρυθμό και την συμμετρία, εμπνεόμενος προφανώς από την φιλοσοφία των Πυθαγορείων. Επίσης, ο Πολύκλειτος φαίνεται να έχει κοινά ενδιαφέροντα με τον Πυθαγόρειο Εύρυτο (5ος-4ος αι. π.Χ.). Ο Πολύκλειτος εφάρμοσε το αριθμητικό μέσο για να καθορίσει τη συμμετρία των μερών του αγάλματος, ενώ **ο Εύρυτος κατασκεύαζε γεωμετρικά σχήματα και μορφές με βότσαλα**, ώστε να ανακαλύψει ποιος αριθμός αντιστοιχούσε σε κάθε σχήμα και να αναδείξει τις αριθμητικές αναλογίες των μερών του σώματος. Ο Πολύκλειτος και ο Εύρυτος, υπό την επιρροή του πυθαγορισμού, δέχονταν ότι οι αριθμοί και οι αναλογίες είναι τα μέσα για τη **γνώση των αιτίων των ουσιών και του είναι**.[29] Ενισχυτική της σχέσης του Πολυκλείτου με τον πυθαγορισμό είναι η μαρτυρία ότι οι Φλιάσιοι Πυθαγόρειοι (Φάντων, Εχεκράτης, Διοκλής, Πολύμναστος) θεωρούνταν μαθητές των Πυθαγορείων Φιλολάου και Ευρύτου.[30] Αναφερθήκαμε παραπάνω στη σχέση της Φλιούντας με το Άργος και στην απώτατη καταγωγή του Πυθαγόρα από την περιοχή. Θα μπορούσαμε, τολμηρά ίσως, να υποθέσουμε ότι ο θρύλος για την καταγωγή του Πυθαγόρα από την Φλιούντα θα ήταν ικανός να ωθήσει κάποιους Πυθαγόρειους φιλοσόφους να επισκεφτούν την πόλη και το Άργος μετά την φυγή τους από την Ιταλία. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί η πνευματική ακμή της Φλιούντας και η έντονη ενασχόληση με τον πυθαγορισμό και τα μαθηματικά στο Άργος της κλασικής περιόδου, με αποκορύφωμα το έργο, θεωρητικό και εφαρμοσμένο, του Πολυκλείτου.



ENTRANCE TO CITADEL OF [illegible], THE ACROPOLIS OF ARGOS IN THE DISTANCE

Συμπεράσματα

Από όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, φαίνεται ότι ο πυθαγορισμός άκμασε στο Άργος της κλασικής εποχής και την ευρύτερη περιοχή του Άργους, με επίκεντρο την Φλιούντα. Η παρουσία τόσων Πυθαγορείων πιθανότατα να σχετίζεται με τους αρχαίους θρύλους που συνδέουν την οικογένεια του Πυθαγόρα με την Φλιούντα και το Άργος. Αποκορύφωμα και ολοκλήρωση του πυθαγορισμού στο Άργος είναι η μορφή του γλύπτη Πολυκλείτου. Αυτός όχι μόνο μελέτησε και εμπνεύστηκε από τον πυθαγορισμό, αλλά τον εξέλιξε κιόλας, επηρεάζοντας μεταγενέστερους Πυθαγόρειους. Επίσης, εισήγαγε τον πυθαγορισμό στις καλές τέχνες. Μετά τον Πολύκλειτο τα μαθηματικά του κάλλους και το κάλλος των μαθηματικών είναι πια αξεχώριστα.[31] Στην ιστορία της φιλοσοφίας και της επιστήμης αξίζει να γραφτεί ένα κεφάλαιο για τους Πυθαγόρειους του Άργους και τον Πολύκλειτο.

---

[28] Simplicius, *In Aristotelisphysicorumlibroscommentaria*, 9.325. 22-25.

[29] D. Steiner, *Images in Mind: Statues in Archaic and Classical Greek Literature and Thought*, Princeton: Princeton University Press 2001, σσ. 40-42.

[30] Diogenes Laertius, *Vitae Philosophorum*, II. 124-125.

[31] O. Spengler, *The Decline of the West*, Oxford: Oxford University Press 1991, σελ. 151.

Προκριματικός διαγωνισμός 2020
18 Ιουλίου 2020
Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Έστω $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ που είναι τέτοιες, ώστε $f\left(xf\left(y\right)\right) + f\left(yf\left(z\right)\right) + f\left(zf\left(x\right)\right) = xy + yz + zx$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

Λύση

Για $x = y = z = 1$ έχουμε $f\left(f\left(1\right)\right) = 1$,οπότε για $x = y = z = f\left(1\right)$ προκύπτει ότι

$$3f\left(f\left(1\right)\right) = 3f\left(1\right)^2 \Rightarrow f\left(1\right)^2 = 1 \Rightarrow f\left(1\right) = 1.$$

Για $y = z = 1$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$: $f\left(f\left(x\right)\right) + f\left(x\right) = 2x$

$$f\left(f\left(x\right)\right) = 2x - f\left(x\right) \qquad (1)$$

Για $z = 1$ από τη δεδομένη σχέση έχουμε: $f\left(xf\left(y\right)\right) + f\left(y\right) + f\left(f\left(x\right)\right) = xy + y + x$

και λόγω της (1) προκύπτει η σχέση: $f\left(xf\left(y\right)\right) = xy + y - x + f\left(x\right) - f\left(y\right)$, (2)

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$. Θέτοντας στη (2) όπου x το $f\left(x\right)$ έχουμε, λόγω της (1), για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$f\left(f\left(x\right)f\left(y\right)\right) = f\left(x\right)y + y + 2x - 2f\left(x\right) - f\left(y\right) \qquad (3)$$

οπότε με εναλλαγή των x και y προκύπτει και η σχέση

$$f\left(f\left(y\right)f\left(x\right)\right) = f\left(y\right)x + x + 2y - 2f\left(y\right) - f\left(x\right) \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$: $\left(f\left(x\right)-1\right)\left(y-1\right) = \left(f\left(y\right)-1\right)\left(x-1\right)$, (5)

από την οποία για $y = 2$ βρίσκουμε τελικά $f\left(x\right) = cx - c + 1 = c\left(x-1\right)+1$ (6)

όπου $c = f\left(2\right) - 1$. Αντικαθιστώντας την (6) στην αρχική, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$c^2\left(xy + yz + zx - x - y - z\right) + c\left(x + y + z\right) - 3c + 3 = xy + yz + zx \;,$$

από την οποία για $x = y = z$ προκύπτει η ισότητα πολυωνύμων

$$3(c^2-1)x^2 + 3c\left(1-c\right)x + 3\left(1-c\right) = 0 \Leftrightarrow c^2 - 1 = 0,\ c\left(1-c\right) = 0,\ 1-c = 0 \Leftrightarrow c = 1.$$

$c = 1$, οπότε έχουμε: $f\left(x\right) = x$, για κάθε $x > 0$.

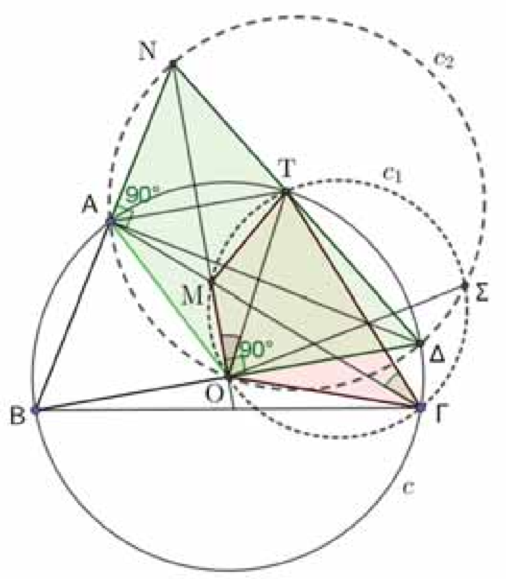
Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c\left(O,R\right)$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και έστω Δ το αντιδιαμετρικό του Β στον κύκλο *c*. Η μεσοκάθετος της ΒΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Μ και την ευθεία ΑΒ στο Ν. Η ευθεία ΝΔ τέμνει τον κύκλο *c* στο σημείο Τ. Αν Σ είναι το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων $c_1\left(O,\Gamma,M\right)$ και $c_2\left(O,A,\Delta\right)$, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΓΤ και ΟΣ περνούν από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Τ ανήκει στον κύκλο $c_1(\mathrm{O},\Gamma,\mathrm{M})$ και το σημείο Ν στο κύκλο $c_2(\mathrm{O},\mathrm{A},\Delta)$, δηλαδή ότι τα τετράπλευρα ΝΑΟΔ και ΜΟΓΤ είναι εγγράψιμα. Τότε θα ισχύουν τα εξής: η ευθεία ΑΔ θα είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων c και c_2, η ευθεία ΓΤ θα είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων c και c_1, η ευθεία ΟΣ θα είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων c_1 και c_2, οπότε οι ευθείες ΑΔ, ΓΤ και ΟΣ θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο των τριών κύκλων.

Η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμένη στον κύκλο c και βαίνει στη διάμετρό του ΒΔ Άρα έχουμε: $\mathrm{N}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 90^0$. Επίσης, η ΟΝ είναι μεσοκάθετος της ΒΔ, οπότε: $\mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^0$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι **το τετράπλευρο ΝΑΟΔ είναι εγγράψιμο**.



Σχήμα 1

Το τρίγωνο ΝΒΔ είναι ισοσκελές με $\mathrm{NB} = \mathrm{N}\Delta$ (διότι το σημείο Ν ανήκει στη μεσοκάθετο της ΒΔ), οπότε $\mathrm{N}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{N}\hat{\Delta}\mathrm{B}$.

Από την προηγούμενη ισότητα γωνιών μαζί με τις ισότητες των τμημάτων $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{O}\Delta = \mathrm{OT} = R$ συμπεραίνουμε ότι τα ισοσκελή τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΤ είναι ίσα και κατά συνέπεια

(α) $\mathrm{OA} = \mathrm{OT}$

(β) $\mathrm{AB} = \Delta\mathrm{T} \overset{\mathrm{NB}=\mathrm{N}\Delta}{\Rightarrow} \mathrm{NA} = \mathrm{NT}$.

Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΝ και ΟΤΝ έχουν τις τρεις πλευρέστους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα με συνέπεια την ισότητα των γωνιών $\mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = \mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{T} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{T}$, (1)

Όμως ισχύει και ότι $\mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{T} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{T} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{T}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $\mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{T} = \mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{T} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{T}$, από την οποία έπεται ότι **το τετράπλευρο ΜΟΓΤ είναι εγγράψιμο**.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu,\dots,\nu\in\mathbb{N}$, με στοιχεία ακέραιους, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικούς μεταξύ τους, ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $0 \le \alpha_i \le i$, **για κάθε ακέραιο** $i \ge 0$,

(β) $\binom{\kappa}{\alpha_0}+\binom{\kappa}{\alpha_1}+\cdots+\binom{\kappa}{\alpha_\kappa}=2^\kappa$**, για κάθε ακέραιο** $\kappa\ge 0$**.**

Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $n\ge 0$**, υπάρχει** $i\ge 0$ **τέτοιο ώστε** $\alpha_i=n$**.**

Λύση

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ως προς το κ ότι οποιοδήποτε αρχικό τμήμα $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\kappa$ της ακολουθίας αποτελείται από τους παρακάτω ακέραιους (όχι απαραίτητα με τη σειρά των όρων της ακολουθίας) $0,1,\dots,\ell-1,\ 0,1,\dots,\kappa-\ell,$ για κάποιο $\ell\ge 0$ με $2\ell\le\kappa+1$.

Για $\kappa=0$, είναι $\alpha_0=0$ και ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε ότι για $\kappa=\nu$ οι όροι $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu$ είναι της μορφής $0,0,1,1,2,2,\dots,\ell-1,\ell-1,\ell,\ell+1,\dots,\nu-\ell-1,\nu-\ell,$ για κάποιο ℓ με $0\le 2\ell\le\kappa+1$. Για $\kappa=\nu+1$ έχουμε από την υπόθεση (β) ότι:

$$\binom{\nu+1}{\alpha_0}+\binom{\nu+1}{\alpha_1}+\cdots+\binom{\nu+1}{\alpha_\nu}+\binom{\nu+1}{\alpha_{\nu+1}}=2^{\nu+1}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\binom{\nu+1}{0}+\binom{\nu+1}{1}+\cdots+\binom{\nu+1}{\ell-1}\right\}+\left\{\binom{\nu+1}{0}+\binom{\nu+1}{1}+\cdots+\binom{\nu+1}{\nu-\ell}\right\}+\binom{\nu+1}{\alpha_{\nu+1}}=2^{\nu+1}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\binom{\nu+1}{0}+\binom{\nu+1}{1}+\cdots+\binom{\nu+1}{\ell-1}\right\}+\left\{\binom{\nu+1}{\nu+1}+\binom{\nu+1}{\nu}+\cdots+\binom{\nu+1}{\ell+1}\right\}+\binom{\nu+1}{\alpha_{\nu+1}}=2^{\nu+1}. \quad (1)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι: $$\binom{\nu+1}{0}+\binom{\nu+1}{1}+\cdots+\binom{\nu+1}{\nu+1}=2^{\nu+1}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι: $$\binom{\nu+1}{\alpha_{\nu+1}}=\binom{\nu+1}{\ell}. \quad (3)$$

Από τη σχέση (3), χρησιμοποιώντας το ότι οι δυωνυμικοί συντελεστές $\binom{\nu+1}{i}$ αυξάνουν όταν αυξάνει η μεταβλητή $i\le\frac{\nu+1}{2}$ και μικραίνουν όταν αυξάνει η μεταβλητή $i\ge\frac{\nu+1}{2}$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha_{\nu+1}=\ell$ ή $\alpha_{\nu+1}=\nu+1-\ell$. Και στις δύο περιπτώσεις το τμήμα $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{\nu+1}$ της ακολουθίας είναι της μορφής που ζητάμε. Επομένως, με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα, κάθε ακέραιος $n\ge 0$ θα απαντάει ως όρος α_i της ακολουθίας για κάποιο i με $0\le i\le 2n$. Πράγματι, η ακολουθία θα έχει όρους $0,1,\dots,\ell-1,\ 0,1,\dots,2n-\ell,$ για κάποιο $\ell\le\frac{2n+1}{2}$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- αν $n<\ell\le\frac{2n+1}{2}$, τότε $n\le\ell-1$, οπότε υπάρχει $i\ge 0$ τέτοιο ώστε $\alpha_i=n$.
- αν $n\ge\ell$, τότε $n>\ell-1\Rightarrow 2n-n<2n-\ell+1\Rightarrow n\le 2n-\ell$, οπότε πάλι υπάρχει $i\ge 0$ τέτοιο ώστε $\alpha_i=n$.

Πρόβλημα 4

Έστω α,β **θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος** $\alpha^2+\left\lceil\frac{4\alpha^2}{\beta}\right\rceil$ **δεν είναι δυνατόν να ισούται με το τετράγωνο ακεραίου.**

Σημείωση: *Με* $\lceil x\rceil$ *συμβολίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του* $x\in\mathbb{R}$*.*

Λύση

Υποθέτουμε ότι ισχύει: $\alpha^2+\left\lceil \frac{4\alpha^2}{\beta}\right\rceil=(\alpha+\kappa)^2, \kappa\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow \left\lceil \frac{4\alpha^2}{\beta}\right\rceil=(2\alpha+\kappa)\kappa, \kappa\in\mathbb{N}^*$.

Αν θέσουμε $2\alpha=x$, ισχύει ότι: $\left\lceil \frac{x^2}{\beta}\right\rceil=(x+\kappa)\kappa, \kappa\in\mathbb{N}^*$. Ισοδύναμα, έχουμε υποθέσει ότι: η εξίσωση

$$\left\lceil \frac{x^2}{\beta}\right\rceil=(x+\kappa)\kappa, \kappa\in\mathbb{N}^* \qquad (1)$$

έχει μία λύση (x,κ) στους θετικούς ακέραιους με x άρτιο.

Υποθέσουμε ότι η εξίσωση (1) έχει μία λύση (x,κ), όπου κ είναι ο ελάχιστος δυνατός ακέραιος και θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε άτοπο.

Έχουμε ότι: $$\frac{x^2}{\beta}>\left\lceil \frac{x^2}{\beta}\right\rceil-1=(x+\kappa)\kappa-1=x\kappa+\kappa^2-1\ge x\kappa\Rightarrow \frac{x}{\beta}>\kappa\Rightarrow x>\beta\kappa \qquad (2)$$

Επίσης, έχουμε: $$\frac{x^2-\kappa^2}{\beta}<\frac{x^2}{\beta}\le\left\lceil \frac{x^2}{\beta}\right\rceil=(x+\kappa)\kappa\Rightarrow \beta\kappa\ge x-\kappa. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) (3) έπεται ότι: $x>\beta\kappa\ge x-\kappa$, οπότε υπάρχει υ τέτοιο ώστε:

$$x=\beta\kappa+\upsilon,\ 0<\upsilon<\kappa \qquad (4)$$

Από τις () έχουμε: $$\left\lceil \frac{x^2}{\beta}\right\rceil=\left\lceil \frac{(\beta\kappa+\upsilon)^2}{\beta}\right\rceil=\beta\kappa^2+2\kappa\upsilon+\left\lceil \frac{\upsilon^2}{\beta}\right\rceil \qquad (5)$$

$$(x+\kappa)\kappa=(\beta\kappa+\upsilon+\kappa)\kappa=\beta\kappa^2+2\kappa\upsilon+\kappa(\kappa-\upsilon) \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) λαμβάνουμε:

$$\left\lceil \frac{\upsilon^2}{\beta}\right\rceil=\kappa(\kappa-\upsilon)\overset{\substack{x'=\upsilon\\ \kappa'=\kappa-\upsilon}}{\Leftrightarrow}\left\lceil \frac{x'^2}{\beta}\right\rceil=(x'+\kappa')\kappa',$$

από την οποία προκύπτει ότι η εξίσωση (1) έχει λύση (x',κ') στους θετικούς ακέραιους με $\kappa'=\kappa-\upsilon<\kappa$, που είναι άτοπο.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 116

Γ50. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ<ΑΓ<ΑΒ$. Πάνω στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τα σημεία $Β_1$ και $Γ_2$ έτσι ώστε $ΒΒ_1=ΒΓ$ και $ΑΓ=ΑΓ_2$. Πάνω στην πλευρά ΓΑ παίρνουμε το σημείο $Β_2$ έτσι ώστε $ΓΒ_2=ΒΓ$ και στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β παίρνουμε σημείο $Γ_1$ έτσι ώστε $ΓΓ_1=ΓΑ$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $Β_1Β_2$ και $Γ_1Γ_2$ είναι παράλληλες.

Λύση

Έστω $ΑΒ=\gamma, ΒΓ=\alpha, ΓΑ=\beta$. Αν η ευθεία $Γ_1Γ_2$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ, τότε από το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο ΑΒΓ με διατέμνουσα την ευθεία $Γ_1Δ$ έχουμε:

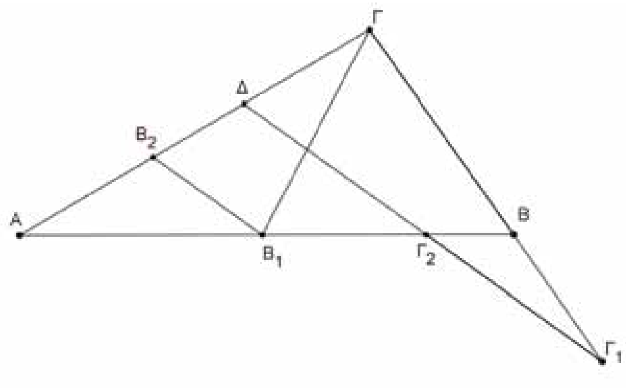
$$\frac{ΑΓ_2}{Γ_2Β}\cdot\frac{Γ_1Β}{Γ_1Γ}\cdot\frac{ΔΓ}{ΔΑ}=1\Rightarrow\frac{\beta}{\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\beta}\cdot\frac{ΔΓ}{ΔΑ}=1\Rightarrow\frac{ΔΑ}{ΔΓ}=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\beta}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΓ}+1=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\beta}+1\Rightarrow\frac{ΔΑ+ΔΓ}{ΔΓ}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\Rightarrow\frac{\beta}{ΔΓ}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\Rightarrow ΔΓ=\frac{\beta(\gamma-\beta)}{\gamma-\alpha}.$$

Άρα είναι

$$\Delta B_2 = \Gamma B_2 - \Gamma\Delta = \alpha - \frac{\beta(\gamma-\beta)}{\gamma-\alpha} = \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha}.$$



Έτσι έχουμε:

$$\frac{B_2\Delta}{B_1\Gamma_2} = \frac{\dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha}}{\beta+\alpha-\gamma} = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}. \qquad (1)$$

Όμως, αφού $B_2\Gamma = \alpha = B_1B$, ισχύει και ότι

$$\frac{AB_2}{AB_1} = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \qquad (2)$$

οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα $\frac{B_2\Delta}{B_1\Gamma_2} = \frac{AB_2}{AB_1}$ και επομένως, από θεώρημα Θαλή προκύπτει η παραλληλία $B_1B_2 \parallel \Gamma_2\Delta \Rightarrow B_1B_2 \parallel \Gamma_2\Gamma_1$.

Α61. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(x_n), n \in \mathbb{N}^*$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\mathbf{x_1 = \alpha > 0,\ x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{x_n}}{n^2},\ n \geq 1,}$$

είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη. **[Βιετνάμ, 2012]**

Λύση

Ισχύει ότι: $x_{n+1} - x_n = \frac{\sqrt{x_n}}{n^2} > 0$, για κάθε $n \geq 1$, οπότε η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{x_n}}{n^2} < x_n + \frac{2\sqrt{x_n}}{2n^2} + \frac{1}{4n^4} = \left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{2n^2}\right)^2,$$

οπότε $\sqrt{x_{n+1}} < \sqrt{x_n} + \frac{1}{2n^2}$, $n \geq 1$.

Επομένως, έχουμε

$$\sqrt{x_{n+1}} < \sqrt{x_1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2n^2}\right) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$< \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n-1)}\right) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \sqrt{\alpha} + 1.$$

Επομένως, ισχύει ότι $x_{n+1} < \left(\sqrt{\alpha}+1\right)^2$, για κάθε $n \geq 1$ και αφού $x_1 = \alpha$ η ακολουθία είναι φραγμένη πάνω.

N46. Έστω $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ οι θετικοί διαιρέτες του θετικού ακέραιου α και $b_1 < b_2 < \ldots$ οι θετικοί διαιρέτες του θετικού ακέραιου b. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,b που ικανοποιούν το σύστημα:

$$\alpha_{10} + b_{10} = \alpha,\ \ \alpha_{11} + b_{11} = b.$$

[Μογγολία, 2017]

Λύση

Αν ήταν $b = b_{11}$, τότε θα είχαμε $\alpha_{11} = 0$, άτοπο. Άρα είναι $b \geq 2b_{11}$. Έστω $\alpha = \alpha_{10} \cdot n$. Επειδή $\alpha > \alpha_{10}$, θα είναι $n \geq 2$ και επομένως

$$b_{10} = \alpha - \alpha_{10} = \alpha_{10} \cdot (n-1) \geq \alpha_{10}.$$

Άρα έχουμε:

$$2b_{10} \geq b_{10} + \alpha_{10} = \alpha,$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$2b_{11} > 2b_{10} \geq \alpha \geq \alpha_{11} \text{ και ότι } 3b_{11} > b_{11} + \alpha_{11} = b.$$

Επομένως, έχουμε $2b_{11} \leq b < 3b_{11}$, οπότε $b = 2b_{11}$ και $\alpha_{11} = b_{11}$. Τότε θα έχουμε $b = 2b_{11} = 2\alpha_{11} > \alpha > \alpha_{10}$, οπότε $\alpha = \alpha_{11}$. Αυτό σημαίνει ότι ο α έχει 11 διαιρέτες και αφού ο 11 είναι πρώτος, έπεται ότι $\alpha = p^{10}$, όπου p πρώτος. Τότε $b = 2p^{10}$, οπότε εύκολα καταλήγουμε ότι $p = 2$ και $\alpha = 2^{10}$, $b = 2^{11}$.

Πράγματι, αν ήταν $p \neq 2$, τότε θα είχαμε $\alpha_{11} = b_{11} = p^{10}$, $\alpha_{10} = b_{10} = p^9 \Rightarrow \alpha = \alpha_{10} + b_{10} = 2p^9$, οπότε προκύπτει η ισότητα $\alpha = 2p^9 = p^{10} \Rightarrow p = 2$, άτοπο.

Ασκήσεις για λύση

A62. Αν α, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a+b+c=1$, να αποδείξετε ότι:

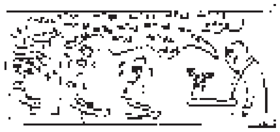
$$\alpha\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2\alpha+1} \leq \sqrt{2-\left(\alpha^2+b^2+c^2\right)}.$$

N47. Να προσδιορίσετε όλους τους πρώτους αριθμούς p για τους οποίους ο αριθμός $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

N48. Έστω n ακέραιος. Αν ο αριθμός $2+2\sqrt{1+12n^2}$ είναι ακέραιος, αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο.

N50. Να προσδιορίσετε το μέγιστο δυνατό θετικό ακέραιο κ ο οποίος είναι τέτοιος ώστε, αν για τους ακέραιους α,β ο αριθμός α+β διαιρείται με το κ, τότε και ο αριθμός αβ διαιρείται με το κ.

Γ51. Θεωρούμε κύκλο ω_1 και τη χορδή του ΑΒ. Γράφουμε κύκλο ω_2 ο οποίος εφάπτεται της χορδής ΑΒ στο σημείο Β και έχει το κέντρο του Ο πάνω στον κύκλο ω_1. Η ευθεία ε περνάει από το σημείο Α και τέμνει τον κύκλο ω_2 στα σημεία Δ και Ε, με το Δ μεταξύ των σημείων Α και Ε. Η ευθεία ΒΔ τέμνει τον κύκλο ω_1 στο σημείο Ζ, διαφορετικό του Β. Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΖ, αν, και μόνον αν, η ευθεία ΒΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου ω_1.



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

προλεγόμενα: *η πανδημία του COVID–19, εκτός από τα δεινά που σώρευσε στην ανθρωπότητα, έγινε και αφορμή να δοθεί μια απάντηση στο "ερώτημα" μερικών παιδιών: «**τί τα θέλουμε τα Μαθηματικά;**». Σ' αυτά, λοιπόν, τα παιδιά αφιερώνουμε με πολύ αγάπη το παρόν δημοσίευμα. Είναι ελάχιστα αποσπάσματα από μια συνέντευξη του Κωνσταντίνου Σιέττου, καθηγητή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Νάπολης, ο οποίος ερευνά την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων, με διάφορες εφαρμογές, μεταξύ των οποίων και η πρόβλεψη της πορείας των επιδημιών.* *Με αφορμή τον COVID–19 ο ίδιος και η ομάδα του έχουν πραγματοποιήσει δύο σημαντικές έρευνες. Η μία αφορά **την ανάλυση** της δυναμικής της επιδημίας στην περιοχή της Χουμπέι στην Κίνα, στα πρώτα της στάδια, και η άλλη **την πρόβλεψη** για την εξέλιξη της επιδημίας στην περιοχή της Λομβαρδίας, στην ευρύτερη περιοχή του Μιλάνου. Συνεργάτες σ' αυτές τις έρευνες ήταν καθηγητές και καθηγήτριες της Ιατρικής Σχολής Αθηνών και του Εθνικού Ιδρύματος Ερευνών της Ιταλίας. Για λόγους οικονομίας χώρου, παραθέτουμε μόνο δύο ερωτήσεις–απαντήσεις:*

— Μπορείτε να μας πείτε πώς λειτουργεί το μοντέλο που έχετε αναπτύξει; Ποια δεδομένα απαιτεί και τι αποτελέσματα μπορεί να δώσει;

Τα δεδομένα είναι αυτά που δίνονται στη δημοσιότητα από τα αντίστοιχα υπουργεία Υγείας της Κίνας και της Ιταλίας και αφορούν τα επιβεβαιωμένα κρούσματα, τους νοσούντες, αυτούς που αναρρώνουν και αυτούς που πεθαίνουν.

Στο μοντέλο της Κίνας χρησιμοποιήσαμε **μαθηματικές τεχνικές** για να βρούμε τις παραμέτρους που περιγράφουν καλύτερα την εξέλιξη της επιδημίας.

Με βάση αυτό, κάναμε μία πρόβλεψη – και ήταν από τις πρώτες εργασίες που έγινε αυτό – της εξέλιξης της επιδημίας στη Χουμπέϊ, μία περιοχή 60 εκατομμυρίων κατοίκων, τρεις βδομάδες μπροστά. Δηλαδή, η δημοσίευση υποβλήθηκε στις 10 Φεβρουαρίου και η πρόβλεψή μας ήταν μέχρι το τέλος Φεβρουαρίου. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα ήταν ότι προς το τέλος Φεβρουαρίου – αρχές Μαρτίου, το μοντέλο έδειχνε μια μείωση του ρυθμού των επιβεβαιωμένων κρουσμάτων, το οποίο αποδείχθηκε από τα ίδια τα δεδομένα.

Στην περίπτωση της Ιταλίας χρησιμοποιήσαμε κάποιες πιο προχωρημένες μεθόδους ανάλυσης, για να βρούμε την «ημέρα μηδέν» και τον πραγματικό αριθμό των κρουσμάτων στο συνολικό πληθυσμό. Καταλαβαίνετε ότι τα επιβεβαιωμένα κρούσματα – και δεν είναι η δικιά μου εκτίμηση, είναι και εκτίμηση ειδικών επιδημιολόγων – αποτελούν ένα μέρος των συνολικών κρουσμάτων στο συνολικό πληθυσμό, λόγω ουσιαστικά της αδυναμίας μας να ελέγξουμε με διαγνωστικά τεστ όλο τον πληθυσμό.

— Υπάρχει ένας αριθμός που ακούμε πολύ συχνά το τελευταίο διάστημα και νομίζω υπεισέρχεσαι και στις δικές σας μελέτες. Είναι ο βασικός ρυθμός αναπαραγωγής της νόσου, που, αν δεν κάνω λάθος, εσείς τον εκτιμάτε για την περιοχή της Λομβαρδίας περίπου στο 4. Πείτε μας τι δείχνει αυτός ο αριθμός και πόσο αντιπροσωπευτικός είναι τελικά για να εκτιμήσουμε την επικινδυνότητα της νόσου;

Ο βασικός αριθμός αναπαραγωγής χρησιμοποιείται είτε ακούσια είτε εκούσια για την εξαγωγή συμπερασμάτων, που μπορεί να είναι λανθασμένα, προς τη λάθος κατεύθυνση.

Καταρχάς, να πούμε ότι ο βασικός αριθμός αναπαραγωγής της επιδημίας αντιπροσωπεύει ουσιαστικά τον αναμενόμενο αριθμό νέων κρουσμάτων από έναν φορέα της ασθένειας. Προσέξτε όμως: Στην αρχή της επιδημίας, όταν όλος ο πληθυσμός δεν έχει καμία ανοσία και είναι ευάλωτος στην ασθένεια, άρα στα πρώτα της στάδια.

Έτσι, όταν αυτός ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, σημαίνει ότι ένας ο οποίος έχει την ασθένεια και είναι φορέας μπορεί να τη μεταδώσει σε περισσότερα από ένα άτομα. Σε αυτήν την περίπτωση **ο ρυθμός εξάπλωσης** της επιδημίας εξαρτάται ακριβώς από αυτόν τον αριθμό. Καταλαβαίνετε ότι είναι άλλο ο ρυθμός εξάπλωσης να είναι 3 και άλλο να είναι 12. Αυτό συμβάλλει και μεταβάλλει πάρα πολύ **τη δυναμική** της επιδημίας.

Άρα, μπορούμε να πούμε συνολικά ότι αυτός ο αριθμός αποτελεί ένα μέτρο, αν θέλετε, της επιθετικότητας της επιδημίας. Θα πρέπει όμως να τονίσω ότι αυτός ο αριθμός δεν προέρχεται από κάποια κλινική μέτρηση, δεν είναι κάποια βιολογική σταθερά. Προέρχεται ουσιαστικά από μαθηματική ανάλυση και ως εκ τούτου εξαρτάται από τις υποθέσεις αυτής της ανάλυσης και των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται.

Θέλω να πω ότι πραγματικά αυτός ο αριθμός εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, οι οποίοι μπορεί να έχουν σχέση με το κοινωνικό δίκτυο επαφής, με τον τρόπο εργασίας, με περιβαλλοντικούς παράγοντες, με κοινωνικές συμπεριφορές κ.λπ. Άρα, είναι ένας αριθμός ο οποίος δεν μπορεί να γενικευτεί από μία περιοχή σε μία άλλη. Αυτό γίνεται συχνά λάθος.

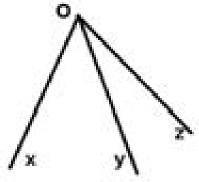
Επίσης, εν μέσω μιας επιδημίας χρησιμοποιείται ένας άλλος αριθμός, ο οποίος λέγεται «φαινόμενος αριθμός αναπαραγωγής». Περιγράφει κι αυτός τον αναμενόμενο αριθμό κρουσμάτων από έναν φορέα, όμως τώρα η διαφορά είναι ότι υπολογίζεται όταν ένα σημαντικό μέρος του πληθυσμού έχει νοσήσει, όταν δεν είμαστε στην αρχή μιας επιδημίας, το οποίο ως έννοια και ως χρησιμότητα είναι διαφορετικό σε σχέση με τον βασικό αριθμό αναπαραγωγής, ο οποίος υπολογίζεται, όπως είπα, στην πολύ αρχή της εν δυνάμει εξάπλωσης μιας ασθένειας.

Πρέπει πάντα να θυμόμαστε ότι τα μαθηματικά μοντέλα βρίθουν υποθέσεων και αβεβαιοτήτων και, φυσικά, όπως και η στατιστική, σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούν, υπάρχει το περιθώριο να προσαρμοστούν ανάλογα...

ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου

προλεγόμενα συνεχίζουμε τον περίπατό μας στον πραγματικό κόσμο, δηλ. τον κόσμο των τριών διαστάσεων, τον μαγευτικό κόσμο της Στερεομετρίας. Στο προηγούμενο τεύχος περιηγηθήκαμε στον κόσμο των δίεδρων γωνιών· σε τούτο θα γνωρίσουμε την αρχόντισσα των στερεών, την *τρίεδρη γωνία*

ορισμός τρίεδρης γωνίας Δίνονται τρεις ημιευθείες Ox,Oy,Oz, με κοινό αρχικό σημείο. *Τρίεδρη*, οριζόμενη από τα δοσμένα στοιχεία, είναι ένα σημειοσύνολο που, σαν στοιχεία, έχει τα σημεία των δοσμένων ημιευθειών καθώς και τα σημεία που είναι εσωτερικά των γωνιών που ορίζουν ανά δύο οι δοσμένες ημιευθείες. (σχήμα 01)



σχήμα 01

στοιχεία της τρίεδρης

α. το κοινό σημείο O των τριών ημιευθειών λέγεται *κορυφή* της τρίεδρης,

β. οι δοσμένες ημιευθείες Ox,Oy,Oz λέγονται *ακμές* της τρίεδρης,

γ. τα εσωτερικά των (κυρτών) γωνιών ∢xOy, ∢yOz, ∢zOx, λέγονται *έδρες* της τρίεδρης,

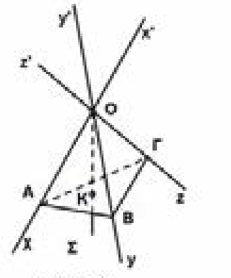
δ. οι γωνίες ∢xOy, ∢yOz, ∢zOx, λέγονται *εδρικές* γωνίες της τρίεδρης,

ε. είναι φανερό ότι σε κάθε ακμή της τρίεδρης αντιστοιχείται από μια δίεδρη, άρα, *κάθε τρίεδρη έχει τρεις δίεδρες γωνίες*.

στ. δίνεται μια τρίεδρη κι ένα ημιεπίπεδο που περιέχει μια ακμή κι είναι κάθετο στην απέναντι έδρα. Αυτό το ημιεπίπεδο λέγεται *επίπεδο ύψος της τρίεδρης*. Άρα, κάθε τρίεδρη έχει τρία επίπεδα ύψη.

εσωτερικό τρίεδρης *Δίνεται μια τρίεδρη O.xyz και πάνω στις ακμές της Ox,Oy,Oz αντίστοιχα τυχαία σημεία Α,Β,Γ, διάφορα του O. Ας είναι Κ σημείο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία O,K, ορίζουν μια ημιευθεία ΟΣ. Το σύνολο των ημιευθειών ΟΣ, λέγεται εσωτερικό της τρίεδρης O.xyz (σχήμα 02)*

σημείωση. την τρίεδρη (του σχήματος 01), θα τη γράφουμε "O.xyz" ή "O.zyx". Στο σχήμα (02), υπάρχουν οι κατακορυφή τρίεδρες O.xyz, O.x΄y΄z΄.



σχήμα 02

είδη τριέδρων

κατακορυφή ή συμμετρικές τρίεδρες Δύο τρίεδρες λέγονται *κατακορυφή ή συμμετρικές προς την κορυφή τους*, αν οι ακμές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των ακμών της άλλης (σχήμα 02) *ισοσκελής τρίεδρη* Μια τρίεδρη γωνία θα λέγεται ισοσκελής τρίεδρη, αν δύο δίεδρές της ή δύο εδρικές της γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

ισόπλευρη τρίεδρη Μια τρίεδρη θα λέγεται ισόπλευρη τρίεδρη, αν όλες οι δίεδρές της ή όλες οι εδρικές της γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

δισορθογώνια τρίεδρη Μια τρίεδρη θα λέγεται δισορθογώνια τρίεδρη, αν δύο δίεδρές της ή δύο εδρικές της γωνίες, είναι ορθές.

τρισορθογώνια τρίεδρη Μια τρίεδρη λέγεται τρισορθογώνια τρίεδρη, αν και οι τρεις δίεδρες ή και οι τρεις εδρικές γωνίες, είναι ορθές.

III. Αυτό το ξέρατε;

ένας καλός φίλος της στήλης, ισχυρίζεται πως μπορούμε, καθισμένοι αναπαυτικά στο γραφείο μας, να διαβάζουμε αρχαία χειρόγραφα με αναφορά στον Ευκλείδη. Μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο;

[η απάντηση στο τέλος της στήλης]

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν–ερωτούν»

1^{ο} θέμα. τα Μαθηματικά κι ο Covid–19, του Κωνσταντίνου Δασκαλάκη

προλεγόμενα στις 14 Μάρτη 2020, ο διαδικτυακός τόπος "piraeuspress.gr" δημοσιοποίησε* ένα σημείωμα, συμβολή στην ενημέρωση του κόσμου σχετικά με την πανδημία του κορονοϊού. Συγγραφέας του σημειώματος ο Κωνσταντίνος Δασκαλάκης, **ο δικός μας άνθρωπος**, ο άνθρωπος που τιμά την επιστημονική του ιδιότητα. Ο Κώστας Δασκαλάκης, καθηγητής του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Επιστήμης Υπολογιστών του MIT, με μία συγκλονιστική ανάρτηση στο προφίλ του στο Facebook προτρέπει τους Έλληνες να μείνουν στο σπίτι τους και εξηγεί με παραστατικό τρόπο τι σημαίνει εκθετική αύξηση. Ας παρακολουθήσουμε το δημοσίευμα:

«ΕΙΝΑΙ ΚΡΙΣΙΜΟ ΝΑ ΜΕΙΝΟΥΜΕ ΟΛΟΙ ΣΠΙΤΙΑ ΜΑΣ!

Ο μύθος μιλάει για ένα βασιλιά στην μακρινή Ινδία που ήταν **καλός στο σκάκι** και είχε τη συνήθεια να καλεί τους περαστικούς να παίξουνε παρτίδες. Μια

μέρα προσκάλεσε ένα σοφό περαστικό, λέγοντας του ότι αν χάσει θα του χάριζε ό,τι ζητούσε. Ο σοφός του ζήτησε να πληρωθεί σε ρύζι με τον εξής τρόπο: δύο κόκκους ρύζι για το πρώτο τετράγωνο της σκακιέρας, τέσσερις για το δεύτερο, οχτώ για το τρίτο, και ούτω καθεξής, βάζοντας σε κάθε τετράγωνο της σκακιέρας δύο φορές τον αριθμό από κόκκους του γειτονικού τετραγώνου. Ο βασιλιάς δέχτηκε και έπαιξαν.

Ο περαστικός ήταν βιρτουόζος στο σκάκι, και προς έκπληξη όλων κέρδισε τον βασιλιά. Ο βασιλιάς ζήτησε να φέρουν ένα σακί με ρύζι για να πληρώσει τον περαστικό. Και άρχισε να βάζει τους κόκκους στη σκακιέρα. Όμως σύντομα κατάλαβε ότι ακόμα και η αμύθητη περιουσία του δεν αρκούσε για να πληρώσει τον περαστικό. Συνειδητοποίησε ότι όταν έφτανε στο εικοστό τετράγωνο θα χρειαζόταν περίπου 1 εκατομμύριο κόκκους ρυζιού, στο τριακοστό 1 δισεκατομμύριο κόκκους, στο τεσσαρακοστό 1 τρισεκατομμύριο, και πάει λέγοντας. Για να πληρώσει τον περαστικό θα χρειαζόταν περίπου 1 τρισεκατομμύριο τόνους ρυζιού, δηλαδή περισσότερους τόνους από όσο ρύζι παράγει η Κίνα σε 7000 χρόνια, με βάση την περσινή της παραγωγή!

Ποιο είναι το ηθικό δίδαγμα της ιστορίας; Ότι η **εκθετική αύξηση** είναι ύπουλο πράγμα. Το σκέφτεσαι λίγο και τα νούμερα φαίνονται μικρά. Αλλά τελικά θα σου τη φέρει. Όσο μεγάλος και να είσαι θα σου τη φέρει. Μετά από λίγα μόλις βήματα έχει γίνει τόσο μεγάλη που δεν το χωράει ο νους σου. Ο αριθμός γίνεται τόσο εξωφρενικά μεγάλος που είναι μεγαλύτερος από τα μόρια του σύμπαντος.

Δεν είμαι γιατρός, βιολόγος ή επιδημιολόγος, αλλά η δουλειά μου στην επιστήμη των υπολογιστών είναι να δαμάζω τις **εκθετικές αυξήσεις**.

Η εξάπλωση του κοροναϊού είναι μια ύπουλη εκθετική αύξηση. Αρχίζει με 1 κρούσμα. Μετά από δύο–τρεις μέρες τα κρούσματα γίνονται 2. Μετά από άλλες δύο–τρεις μέρες γίνονται 4. Έχει περάσει μια βδομάδα και φαίνεται υπό έλεγχο. Έλα όμως που αν περάσουν άλλες δύο βδομάδες τα κρούσματα θα γίνουν περίπου 1000, και αν περάσουν άλλες δύο–τρεις βδομάδες θα γίνουν πάνω από εκατό χιλιάδες!

Και το ακόμα πιο ύπουλο είναι το εξής. Όταν τα επιβεβαιωμένα κρούσματα είναι 1000, ακόμα και εκείνη την μέρα να καθόμαστε όλοι σπίτι μας για 10 μέρες χωρίς καμιά ανθρώπινη επαφή, παρόλα αυτά τα κρούσματα θα γίνονταν αρκετές χιλιάδες. Μα πώς; Ο λόγος είναι ότι όταν τα 1000 έδειξαν συμπτώματα, είχαν ήδη μεταδώσει τον ιό σε άλλους.

Στην Ελλάδα τα κρούσματα είναι τώρα περίπου 200. Αν καθόμαστε όλοι κλεισμένοι σπίτια μας, τότε σε ένα καλό σενάριο μετά από πέντε–έξι–εφτά μέρες τα κρούσματα θα έφταναν περίπου τα 1000 μεγαλώνοντας εκθετικά μέχρι τότε, ***αλλά*** μετά θα βλέπαμε τον αριθμό νέων κρουσμάτων να πέφτει, αν ***συνεχίζαμε να παραμένουμε*** στα σπίτια μας. Μετά από ακόμα δύο–τρεις βδομάδες, δηλαδή σε ένα μήνα από τώρα ίσως και να είχαμε 0 καινούρια κρούσματα.

Αν είσαι νέος και ωραίος, χωρίς συμπτώματα, πρέπει να μείνεις και εσύ σπίτι σου. Και να τη γλιτώσεις, με το να μην μείνεις μέσα συνεισφέρεις στην εξάπλωση του ιού, συνεισφέρεις να φτάσει και να σκοτώσει άλλους, ίσως τους γονείς σου, ίσως τους παππούδες σου. Αλλά και η πιθανότητα να πεθάνεις είναι μη τετριμμένη, και η πιθανότητα να ταλαιπωρηθείς πολύ ακόμα μεγαλύτερη.

Στέλνω πολλούς χαιρετισμούς από τον καναπέ μου σε εσάς στον καναπέ σας (ελπίζω!) και απέραντη ευγνωμοσύνη στους γιατρούς και τις νοσοκόμες που παλεύουν και μέχρι να παρέλθει αυτή η λαίλαπα θα συνεχίσουν να παλεύουν για τη ζωή όλων μας!

ΥΓ: Οι υπολογισμοί **και οι προβλέψεις** παραπάνω βασίζονται **σε εκτιμήσεις ρυθμών** για το πως εξαπλώνεται ο ιός και ποια είναι η επίδραση δρακόντειων μέτρων από άλλες χώρες. Είναι οι καλύτερες όμως εκτιμήσεις που διαθέτουμε αυτή τη στιγμή»

* *https://piraeuspress.gr/diethni/412677/daskalakis–an–minoume–oli–mesa–apo–simera–se–mia–vdomada–tha–echoume–1000–nea–krousmata–allios/*

2^ο^ θέμα. ***ο χρόνος της καραντίνας***

προλεγόμενα σχετικά με το αν η καραντίνα (σε περίπτωση πανδημίας), είναι χρήσιμη ή όχι, υπάρχουν πολλές απόψεις, η κάθε μια με τα επιχειρήματά της. Σε ένα μόνο θέμα όλοι συμφωνούν· ότι η σωστή **αξιοποίηση** του διαθέσιμου **χρόνου**, μπορεί να δώσει σπουδαία πράγματα. Στο σημείο αυτό εμείς συμφωνούμε με τον σημαντικό φίλο Σωτήρη Γκουντουβά, που γράφει:

Μια επωφελής καραντίνα

«Ο Ισαάκ Νεύτων ήταν μόλις 22 ετών όταν η Μεγάλη Πανώλη χτύπησε το Λονδίνο. Εκείνη την εποχή δεν είχε ακόμα αποκτήσει τον τίτλο του «Sir» ούτε φορούσε τη μεγάλη, επίσημη περούκα με την οποία τον ξέρουμε εμείς σήμερα. Ήταν ένας απλός φοιτητής στο Trinity College στο πανεπιστήμιο του Cambridge.

Θα έπρεπε να περάσουν 200 χρόνια από τότε για να ανακαλυφθούν τα βακτήρια που προξενούσαν την πανώλη αλλά ακόμα και στην εποχή του Νεύτωνα, όταν ακόμα οι άνθρωποι δεν γνώριζαν τι ακριβώς την προκαλεί εφάρμοζαν ό,τι και εμείς σήμερα για να την αποφύγουν: έμπαιναν σε καραντίνα.

Βρισκόμαστε στο **1665**. Και όπως ακριβώς συμβαίνει και σήμερα έτσι και τότε οι αρχές της εποχής, στη Μεγάλη Βρετανία, αποφάσισαν να εφαρμόσουν το μέτρο της καραντίνας. Έτσι λοιπόν, το πανεπιστήμιο του Cambridge έκλεισε και έστειλε τους φοιτητές στα σπίτια τους για να συνεχίσουν εκεί το διάβασμά τους Το σπίτι του Νεύτωνα ήταν στο Woolsthorpe Manor σε μια περιοχή έξω από το Cambridge.

Χωρίς τους καθηγητές του να τον καθοδηγούν σε συγκεκριμένα μονοπάτια (η εξ' αποστάσεως εκπαίδευση και οι ψηφιακές πλατφόρμες τότε ήταν παντελώς άγνωστες), ο Νεύτων «άνθισε», πολύ αργότερα θα χαρακτήριζε τη χρονιά που πέρασε στο σπίτι του σε καραντίνα ως **annus mirabilis**, «Χρονιά των Θαυμάτων». Καταρχάς, συνέχισε να εργάζεται πάνω στα μαθηματικά προβλήματα με τα οποία είχε αρχίσει να καταπιάνεται στο Κέμπριτζ.

Ό,τι έγραψε ήταν ένα πρώιμος Διαφορικός Λογισμός. Μετά, προμηθεύτηκε τα πρώτα του πρίσματα και άρχισε να πειραματίζεται με αυτά στο υπνοδωμάτιό του. Μάλιστα άνοιξε στα παντζούρια του δωματίου του μια τρύπα τόσο μικρή ώστε να μπαίνει μόνο μια αχτίδα φωτός. Έτσι, έκανε τα πρώτα του πειράματα στα οποία αργότερα βασίστηκε η θεωρία της Οπτικής και της ανάλυσης του φωτός.

Και έξω ακριβώς από το παράθυρο του δωματίου του στο Woolsthorpe βρισκόταν μια μηλιά. Ναι! μια μηλιά. Ο θρύλος θέλει να συνέλαβε **θεωρία της βαρύτητας** (νόμος της παγκόσμιας έλξης) ενώ καθόταν κάτω από τη μηλιά στον κήπο του σπιτιού του και ένα μήλο έπεσε στο κεφάλι του. Η ιστορία αυτή είναι κατασκευασμένη όμως, σύμφωνα με το βοηθό του John Conduitt, υπάρχουν σε αυτή ψήγματα αλήθειας:

«*Καθώς περιφερόταν στον κήπο σκεφτόταν ότι η ίδια δύναμη βαρύτητας που έκανε ένα μήλο να πέσει στο έδαφος από το δέντρο δεν πρέπει να περιορίζεται σ' ένα συγκεκριμένο σημείο απόστασης από τη Γη. "Γιατί η βαρύτητα να μην επιδρά σε μια απόσταση μέχρι τη Σελήνη" αναρωτήθηκε*».

Στο Λονδίνο, από το 1665 έως το 1666, σε μια μόλις χρονιά, το 1/4 του πληθυσμού πέθανε από την πανώλη. Ο Νεύτων επέστρεψε στο Cambridge το 1667 με τις θεωρίες του υπό μάλης. Μέσα σε έξι μήνες έγινε εταίρος (fellow) και δύο χρόνια αργότερα το 1669 καθηγητής στην Λουκασιανή έδρα των μαθηματικών, θέση που του παραχώρησε ο καθηγητής του Isaac Barrow (1630–1677), ο οποίος παραιτήθηκε αναγνωρίζοντας τις καταπληκτικές ικανότητες του μαθητή του.

Ως καθηγητής δεν είχε την αναμενόμενη ίσως αναγνώριση, καθώς, όπως μας πληροφορεί ο Χάμφρεϊ Νεύτων, ανιψιός του Ισαάκ: «...τόσο λίγοι πήγαιναν να τον ακούσουν, και ακόμη λιγότεροι τον καταλάβαιναν, που πολλές φορές, κατά κάποιο τρόπο ελλείψει ακροατηρίου, διάβαζε στους τοίχους». Στις παραδόσεις «έμενε συνήθως γύρω στη μισή ώρα· όταν δεν είχε ακροατήριο, επέστρεφε συνήθως σε επτά λεπτά ή λιγότερο».

Το καλοκαίρι του 1684 ωστόσο, όταν ο Έντμοντ Χάλεϊ επισκέφτηκε τον Νεύτωνα για να συζητήσει μαζί του για θέματα *Κινηματικής*, ο Νεύτων αποφάσισε να διακόψει καθετί άλλο και να ασχοληθεί σοβαρά με τη *Μηχανική*. Το αποτέλεσμα ήταν να ολοκληρώσει μέσα σε τρία χρόνια (1687) ένα από τα σημαντικότερα επιστημονικά έργα του αιώνα του –και όχι μόνο– το *Philosophies Naturalis Principles Mathematica*. Σε αυτό το αυστηρά δομημένο έργο ο Νεύτων βασίζεται εν μέρει στα θεωρητικά αποτελέσματα του Κέπλερ και εξάγει το γνωστό νόμο της *παγκόσμιας έλξης* θεμελιώνοντας τη μηχανική. Εγκαθίδρυσε έτσι μία **κοσμολογική άποψη** για τη βαρύτητα που κυριάρχησε στην επιστημονική κοινότητα, ώσπου να την αναθεωρήσει ο Άλμπερτ Αϊνστάιν το 1915 με τη *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας*. (Περίφημη παραμένει η φράση του Αϊνστάιν «*Νεύτων, συγχώρεσέ με!»).* Έτσι λοιπόν, ας δούμε τα θετικά στην καραντίνα. Έχοντας το χρόνο να σκεφτεί εκτός του προγράμματός του ο Νεύτων δοκίμασε πράγματα που άλλαξαν τη ζωή του και τη δικιά μας κατ' επέκταση και σήμερα κανείς δεν ασχολείται με το γεγονός ότι όλα αυτά τα σκέφτηκε κλεισμένος, αναγκαστικά, στο σπίτι του λόγω της καραντίνας»

3^o θέμα. ταξίδι στο Περού

Ο καλός μας φίλος Τάκης "Παρμενίδης" (κατά κόσμον, **Τάκης Χρονόπουλος**), με μια ανάρτηση στη Ιστοσελίδα του, μας μεταφέρει... "Γεωμετρικά", στην άλλη άκρη του ημισφαιρίου, στη χώρα **των Ίνκας, στο Περού**. Είναι αρκετό να γράψουμε: *Punto de Brocard | Teoría y demostración de 6 teoremas asociados*, στη μηχανή αναζήτησης Google και... κλικ. Εμείς την επισκεφθήκαμε και, πραγματικά, μεταφερθήκαμε στο Περού.

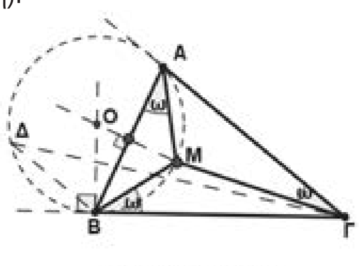
Εκεί γνωρίσαμε έναν νέο γεωμέτρη, τον **Cristian Tello**, ο οποίος (με ένα βίντεό του), μας κάνει μια υποδειγματική διδασκαλία του θέματος που είναι γνωστό (στους απανταχού της Γης θαυμαστές της σχολικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας), ως "***σημείο Brocard***" ενός τριγώνου. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.

Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ,Α), φέρουμε την κάθετη επί την ΒΓ, στο Β, που τέμνει την μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ, στο Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Ο,ΟΒ). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ, που ξανατέμνει τον κύκλο (Ο,ΟΒ) στο Δ. Φέρω την ΔΓ που τέμνει τον (Ο,ΟΒ) στο στο Μ.

Είναι $\sphericalangle B A M = \sphericalangle B \Delta M = \omega$.

Επειδή $\Delta B // A\Gamma$, θα είναι και $\sphericalangle B \Delta M = \sphericalangle M \Gamma A = \omega$.

Είναι, επίσης, $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MB\Gamma$ (γωνία από χορδή και εφαπτόμενη).



Μ, σημείο Brocard
$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MB\Gamma = \sphericalangle M\Gamma A = \omega$

Άρα: $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MB\Gamma = \sphericalangle M\Gamma A = \omega$

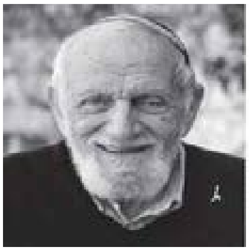
V. ειδήσεις – ειδησούλες

1. στις 21 Μάη 2020, η ΕΜΕ γνωστοποίησε το θάνατο του **Βαγγέλη Σπανδάγου**: «Με βαθιά θλίψη ανακοινώνουμε τον αιφνίδιο χαμό του Ευάγγελου Σπανδάγου. Ο Ευάγγελος Σπανδάγος ήταν ένα δραστήριο μέλος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, χρημάτισε μέλος του ΔΣ της Εταιρείας. Τη διετία αυτή ήταν και υπεύθυνος για την σύνταξη της περιοδικής έκδοσης της ΕΜΕ Ευκλείδης Β΄ (1990-1993). Είχε πλούσιο συγγραφικό έργο ... Για το έργο του έχει βραβευτεί από... Επιστημονικές Ενώσεις και φορείς. Τον Μάιο του 2018 στο πλαίσιο του εορτασμού των 100 χρόνων από την ίδρυσή της, η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία βράβευσε τον Ευάγγελο Σπανδάγο για το έργο του στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά...» [πηγή: ΕΜΕ]

2. στις 12 Απρίλη 2020, έφυγε από τη ζωή ο **Θεόφιλος Κάκουλλος**, ομότιμος καθηγητής Πιθανοτήτων και Στατιστικής στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ. Διετέλεσε μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ στις αρχές της δεκαετίας του 1970 και Αντιπρόεδρος του ΔΣ της ΕΜΕ το 1972. [πηγή: ΕΜΕ]

3. με ανακοίνωση της η ΕΜΕ γνωστοποίησε ότι στις **17 Απρίλη 2020**, έφυγε από τη ζωή ο **Νικόλαος Καρκανιάς**, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου. Ο Νικόλαος Καρκανιάς ήταν ειδικός στη **Θεωρία Ελέγχου** [πηγή: ΕΜΕ]

4. σε ηλικία 97 ετών έφυγε από τη ζωή η **Αν Μίτσελ**. Πτυχιούχος μαθηματικός από το Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης, κατά τη διάρκεια του Β' Παγκόσμιου Πολέμου και σε απόλυτη μυστικότητα ακόμη και από τον σύζυγό της, υπηρέτησε τη χώρα της ως στέλεχος της ομάδας που κατάφερε να αποκρυπτογραφήσει τα μηνύματα του γερμανικού στρατού (υπόθεση Enigma) και κατ΄ αυτόν τον τρόπο να αποκτήσει τη δυνατότητα να ενημερώνει εγκαίρως τις βρετανικές ένοπλες δυνάμεις για τα γερμανικά επιχειρησιακά σχέδια. [πηγή: Protagon.gr]



5. για το ευρύ και καινοτόμο έργο τους τιμήθηκαν με το φετινό *Βραβείο Abel* (γνωστό και ως «Νόμπελ» των Μαθηματικών) δύο επιφανείς μαθηματικοί, ο Ισραηλινός Χιλέλ Φούρστενμπεργκ (πρώτος απ' αριστερά, καθηγητής στο Εβραϊκό Πανεπιστήμιο της Ιερουσαλήμ) και ο Ρωσο–Αμερικανός Γκρεγκόρι Μαργκούλις (δεύτερος απ' αριστερά, καθηγητής ακόμη στο Πανεπιστήμιο Yale των ΗΠΑ)

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;

Ο σημαντικός φίλος μας **Μιχάλης Λάμπρου** (Μαθηματικό Κρήτης), σε παλιότερο σημείωμά του, μας πληροφορούσε:

«...αρκεί να πληκτρολογήσετε τη διεύθυνση, https://digi.vatlib.it/, θα βρείτε το ψηφιακό τμήμα μιας από τις σημαντικότερες βιβλιοθήκες του κόσμου, με τεράστιο υλικό. Ο ιστότοπος έχει, βέβαια, την δυνατότητα για search.

Αν την χειριστείτε σωστά θα βρείτε άπειρο υλικό που θα σας καθηλώσει. Την ίδια την βιβλιοθήκη του Βατικανού την επισκέφθηκα πρώτη φορά στα φοιτητικά μου χρόνια πριν από 45 και βάλε χρόνια, αλλά και πολλές φορές έκτοτε.

Θυμάμαι σαν τώρα τα δύο πρώτα χειρόγραφα που έπιασα στα χέρια μου, με αναφορά στον Ευκλείδη.

Τα εντόπισα και σας παραπέμπω:

https://digi.vatlib.it/view/MSS_Vat.gr.190.pt.1 και

https://digi.vatlib.it/view/MSS_Barb.gr.244

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις Άλγεβρας

Δημήτριος Χρονόπουλος - Παράρτημα της ΕΜΕ Αργολίδας

Άσκηση 1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4-x^3-2x^2-x+1=0$ δεν έχει αρνητικές ρίζες.

Λύση: Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα $\rho<0$, όποτε έχουμε: $\rho^4-\rho^3-2\rho^2-\rho+1=0 \Leftrightarrow$ $\left(\rho^4-2\rho^2+1\right)-\rho^3-\rho=0 \Leftrightarrow \left(\rho^2-1\right)^2-\rho\left(\rho^2+1\right)=0$ το οποίο δεν ισχύει, διότι $\left(\rho^2-1\right)^2\geq 0$ και $-\rho\left(\rho^2+1\right)>0$ (αφού $-\rho>0$) οπότε $\left(\rho^2-1\right)^2-\rho\left(\rho^2+1\right)>0$.

Άσκηση 2. Αν $\alpha^2=2\alpha+\beta$ (1) και $\beta^2=\alpha+2\beta$ (2) με $\alpha\neq\beta$ να βρείτε μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες α και β.

Λύση: Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)=0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow}$ $\alpha+\beta=1$ (3). Τότε έχουμε $\alpha^2=1+\alpha$ και $\beta^2=1+\beta$, οπότε προκύπτει $\alpha^2+\beta^2=2+\alpha+\beta \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3 \Leftrightarrow$ $\alpha\beta=-1$. Αφού $S=\alpha+\beta=1$ και $P=\alpha\beta=-1$ από την σχέση $x^2-Sx+P=0$ παίρνουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-x-1=0$.

Άσκηση 3. i. Αν $\alpha,\beta\geq 0$ και ισχύει $\alpha+\beta=0$ να δείξετε ότι $\alpha=\beta=0$.

ii. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z που ικανοποιούν την σχέση

$$x^2+4y^2-4xy+|x+3y-5|+\sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)(z+3)}=0.$$

Λύση: i. Έστω ένα τουλάχιστον από τα α,β είναι μεγαλύτερα του μηδενός, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\alpha>0$ τότε $-\alpha<0$, αφού $\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-\alpha<0$ δηλαδή προκύπτει ότι $\beta<0$, άτοπο αφού $\beta\geq 0$, άρα $\alpha=0$ οπότε και $\beta=0$.

Β΄ τρόπος: Αφού $\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=-\beta\leq 0$. Άρα έχουμε $\left.\begin{matrix}\alpha\geq 0\\ \alpha\leq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha=0$. Συνεπώς και $\beta=0$.

ii. $x^2+4y^2-4xy+|x+3y-5|+$
$+\sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)(z+3)}=0 \Leftrightarrow$
$(x-2y)^2+|x+3y-5|+\sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)(z+3)}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-2y=0\\ x+3y-5=0\\ \left(x^2+y^2+1\right)(z+3)=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=2\\ y=1\\ z=-3\end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 4. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{7}{6}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x+2}$.

Λύση: 1ος τρόπος: Για $x\neq -1$ και $x\neq -2$ έχουμε:
$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{7}{6} \Leftrightarrow 6(x+2)+12(x+1)=7(x+1)(x+2) \Leftrightarrow$
$(6x+12)+(12x+12)=7\left(x^2+3x+2\right) \Leftrightarrow$
$18x+24=7x^2+21x+14 \Leftrightarrow 7x^2+21x-18x+14-24=0 \Leftrightarrow$
$7x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\dfrac{10}{7}$ Για $x=1$ έχουμε

$$A=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+2}=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Για $x=-\dfrac{10}{7}$ έχουμε

$$A=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+2}=x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)=$$

$$=-\frac{10}{7}\left(\frac{1}{-\frac{10}{7}+1}+\frac{1}{-\frac{10}{7}+2}\right)=-\frac{10}{7}\left(\frac{1}{-\frac{3}{7}}+\frac{1}{\frac{4}{7}}\right)=\frac{5}{6}.$$

2ος τρόπος:

$$A=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+2}=\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{x+2-2}{x+2}=$$

$$1-\frac{1}{x+1}+1-\frac{2}{x+2}=2-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)=2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$$

Άσκηση 5. i. Αν $\alpha,\beta\geq 0$ να δείξετε ότι

$$\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

ii. Να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=(x-2)^2+2$$

Λύση: i. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε διαδοχικά: $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$
$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow$
$(\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

ii. Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x τέτοιο ώστε $x-1\geq 0$ και $3-x\geq 0$ δηλαδή $1\leq x\leq 3$. Παρατηρούμε ότι $(x-2)^2+2\geq 2$ (1), με την ισότητα να ισχύει όταν $x=2$. Με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned}2\sqrt{x-1}&=2\sqrt{1\cdot(x-1)}\le 1+x-1=x\\2\sqrt{3-x}&=2\sqrt{1\cdot(3-x)}\le 1+3-x=4-x\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$2\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}\le x+4-x=4\Rightarrow$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\le 2$, με την ισότητα να ισχύει όταν $x=2$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $x=2$ η οποία είναι δεκτή με βάση τον περιορισμό $1\le x\le 3$ και ικανοποιεί την αρχική εξίσωση.

Άσκηση 6. i. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta>0$ και $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}\ge\dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $x,y,z\in\mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

Λύση: i. Επειδή $\alpha,\beta,\alpha+\beta>0$ έχουμε διαδοχικά:

$\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}\ge\dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\beta(\alpha+\beta)x^2+\alpha(\alpha+\beta)y^2\ge\alpha\beta(x+y)^2\Leftrightarrow$

$\beta\alpha x^2+\beta^2x^2+\alpha^2y^2+\alpha\beta y^2\ge\alpha\beta x^2+2\alpha\beta xy+\alpha\beta y^2\Leftrightarrow$

$\beta^2x^2+\alpha^2y^2\ge 2\alpha\beta xy\Leftrightarrow\beta^2x^2-2\alpha\beta xy+\alpha^2y^2\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\beta x-\alpha y)^2\ge 0$, που ισχύει.

ii. Με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος προκύπτει ότι: $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\ge\dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Άσκηση 7. i. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ ισχύει:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\ge\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2}$$

Λύση: Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\ge\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε διαδοχικά:

$\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\right)^2\ge\left(\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}+\gamma^2+\delta^2\ge$

$\ge(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}+\gamma^2+\delta^2\ge$

$\ge\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2+2\beta\delta+\delta^2\Leftrightarrow$

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\ge\alpha\gamma+\beta\delta$.

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\ge\alpha\gamma+\beta\delta$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί οπότε: $\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\right)^2\ge(\alpha\gamma+\beta\delta)^2\Leftrightarrow$

$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)\ge\alpha^2\gamma^2+2\alpha\gamma\beta\delta+\beta^2\delta^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2\ge\alpha^2\gamma^2+2\alpha\gamma\beta\delta+\beta^2\delta^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2\ge 2\alpha\gamma\beta\delta\Leftrightarrow\alpha^2\delta^2-2\alpha\gamma\beta\delta+\beta^2\gamma^2\ge 0\Leftrightarrow$

$(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\ge 0$, που ισχύει.

Άσκηση 8. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}+2\sqrt{5}+6}{3\sqrt{3}-\sqrt{15}-2\sqrt{5}+6}$ και να γραφεί με ρητό παρονομαστή.

Λύση: $A=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}+2\sqrt{5}+6}{3\sqrt{3}-\sqrt{15}-2\sqrt{5}+6}=$

$\dfrac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}+2(\sqrt{5}+3)}{3(\sqrt{3}+2)-\sqrt{5}(\sqrt{3}+2)}=\dfrac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{3}+2)}{(3-\sqrt{5})(\sqrt{3}+2)}=$

$\dfrac{(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}=\dfrac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{9+6\sqrt{5}+5}{9-5}=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 9. Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $\alpha^2+6\alpha+9+|\alpha+2\beta+1|=0$.

Να βρείτε τους αριθμούς α και β. Για τους αριθμούς α,β που θα βρείτε να λυθούν:

i. η εξίσωση $|\alpha+x+1|=2\beta$,

ii. η εξίσωση $||\alpha+x|+1|=2\beta$

iii. η ανίσωση $|\alpha+2x+\beta|<2\beta$

Λύση: i. $\alpha^2+6\alpha+9+|\alpha+2\beta+1|=0\Leftrightarrow$

$(\alpha+3)^2+|\alpha+2\beta+1|=0\Leftrightarrow\alpha+3=0$ και $\alpha+2\beta+1=0\Leftrightarrow$

$\alpha=-3$ και $2\beta-2=0\Leftrightarrow\alpha=-3$ και $\beta=1$

ii. Για $\alpha=-3$ και $\beta=1$ έχουμε:

$|\alpha+x+1|=2\beta\Leftrightarrow|x-2|=2\Leftrightarrow x-2=2$ ή $x-2=-2\Leftrightarrow x=4$ ή $x=0$.

iii. $||\alpha+x|+1|=2\beta\underset{\beta=1}{\overset{\alpha=-3}{\Leftrightarrow}}||x-3|+1|=2\Leftrightarrow$

$|x-3|+1=2\Leftrightarrow|x-3|=1\Leftrightarrow x=4$ ή $x=2$.

iv. $|\alpha+2x+\beta|<2\beta\underset{\beta=1}{\overset{\alpha=-3}{\Leftrightarrow}}|2x-2|<2\Leftrightarrow$

$|x-1|<1\Leftrightarrow-1<x-1<1\Leftrightarrow 0<x<2$

Άσκηση 10. Να λυθεί η εξίσωση

$$2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}=x^2+4$$

Λύση: 1ος τρόπος: Πρέπει και αρκεί

$$\left.\begin{aligned}1-x\ge 0\\1+x\ge 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x\le 1\\x\ge -1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow -1\le x\le 1.$$

Έχουμε: $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}=x^2+4\Leftrightarrow$

$x^2+4-2\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}=0\Leftrightarrow$

$x^2+1+1+1+1+x-x-2\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}=0\Leftrightarrow$

$x^2+\left(1-\sqrt{1-x}\right)^2+\left(1-\sqrt{1+x}\right)^2=0\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r}x=0\\1-\sqrt{1-x}=0\\1-\sqrt{1+x}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}x=0\\\sqrt{1-x}=1\\\sqrt{1+x}=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}x=0\\x=0\\x=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow x=0$$

2^{ος} τρόπος: Πρέπει και αρκεί

$$\left.\begin{array}{r}1-x\ge 0\\1+x\ge 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}x\le 1\\x\ge -1\end{array}\right\}\Leftrightarrow -1\le x\le 1.$$

Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε διαδοχικά:

$$2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}=x^2+4\Leftrightarrow$$

$$\left(2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}\right)^2=\left(x^2+4\right)^2\Leftrightarrow 8+8\sqrt{1-x^2}=\left(x^2+4\right)^2$$

Έχουμε ότι: $x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+4\ge 4\Leftrightarrow\left(x^2+4\right)^2\ge 16\ (1)$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Επίσης $x^2\ge 0\Leftrightarrow -x^2\le 0\Leftrightarrow 1-x^2\le 1\overset{x\in[-1,1]}{\Leftrightarrow}$

$$\sqrt{1-x^2}\le 1\Leftrightarrow 8\sqrt{1-x^2}\le 8\Leftrightarrow 8+8\sqrt{1-x^2}\le 16\quad(2)$$

με την ισότητα να ισχύει για $x=0$. Από (1) και (2) προκύπτει ότι $x=0$, η οποία είναι δεκτή.

3^{ος} τρόπος: Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\alpha,\beta\ge 0$ ισχύει $\alpha+\beta\ge 2\sqrt{\alpha\beta}$.

$$\left.\begin{array}{l}2\sqrt{1-x}=2\sqrt{1\cdot(1-x)}\le 1+1-x=2-x\\2\sqrt{1+x}=2\sqrt{1\cdot(1+x)}\le 1+1+x=2+x\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$$2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}\le x+2+2-x=4\Rightarrow$$

$$2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}\le 4.$$

Άρα $x^2+4\le 4\Leftrightarrow x^2\le 0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Άσκηση 11. Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει $\alpha\ne 0$ και $\alpha+2\beta+5\gamma=0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι η διακρίνουσα Δ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Αφού $\alpha+2\beta+5\gamma=0\Leftrightarrow\alpha=-2\beta-5\gamma$.

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\beta^2-4\gamma(-2\beta-5\gamma)=\beta^2+8\beta\gamma+20\gamma^2=$$

$$=\beta^2+8\beta\gamma+16\gamma^2+4\gamma^2=(\beta+4\gamma)^2+4\gamma^2\ge 0.$$

Αν $\Delta=0\Leftrightarrow(\beta+4\gamma)^2+4\gamma^2=0\Leftrightarrow\gamma=\beta=0$ και τότε θα προέκυπτε και $\alpha=0$, άτοπο. Άρα $\Delta=(\beta+4\gamma)^2+4\gamma^2>0$.

Άσκηση 12. Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει $\alpha+2\beta+5\gamma=0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Λύση : • Αν $\alpha\ne 0$ αρκεί να δείξουμε ότι η διακρίνουσα Δ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Αφού $\alpha+2\beta+5\gamma=0\Leftrightarrow\alpha=-2\beta-5\gamma$.

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\beta^2-4\gamma(-2\beta-5\gamma)=$$

$$=\beta^2+8\beta\gamma+16\gamma^2+4\gamma^2=(\beta+4\gamma)^2+4\gamma^2>0,$$ άρα έχει δύο ρίζες άνισες.

- Αν $\alpha=0$ τότε έχουμε $\beta x+\gamma=0\Leftrightarrow\beta x=-\gamma$, οπότε Αν $\beta\ne 0$ η εξίσωση έχει μία ρίζα την $x=-\dfrac{\gamma}{\beta}$.

Αν $\beta=0$ τότε προκύπτει και $\gamma=0$ άρα η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Άσκηση 13. Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha+\beta=1$ να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}\ge\sqrt{5}\ (1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση: Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}\ge\sqrt{5}\ (1)$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}\ge\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}\right)^2\ge 5\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+1+2\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}+\beta^2+1\ge 5\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta+2\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\ge 3\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\ge 3\overset{a+b=1}{\Leftrightarrow}$$

$$1-2\alpha\beta+2\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\ge 3\Leftrightarrow$$

$$-\alpha\beta+\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\ge 1+\alpha\beta\ (2)$$

- Αν $1+\alpha\beta\le 0$ ισχύει η (2) άρα και η (1).
- Αν $1+\alpha\beta>0$ και τα δύο μέλη της ανισότητας $\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\ge 1+\alpha\beta$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί οπότε $\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\ge 1+\alpha\beta\Leftrightarrow$

  $$\left(\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}\right)^2\ge(1+\alpha\beta)^2\Leftrightarrow$$

  $$\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1\ge 1+2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2\Leftrightarrow$$

  $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\ge 0$, που ισχύει. Άρα αληθεύει η (2) άρα και η (1).

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$. Πράγματι για $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ έχουμε $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}=\sqrt{5}$

Άσκηση 14. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{2015\cdot 2017+1}$ και $b=\sqrt[3]{\dfrac{4^{10}+16^4}{2^{14}+4^5}}$. Να δείξετε ότι $\alpha+\beta\in\mathbb{N}$.

Λύση: $\alpha=\sqrt{2015\cdot 2017+1}=\sqrt{(2016-1)\cdot(2016+1)+1}=$

$$\sqrt{2016^2-1+1}=\sqrt{2016^2}=2016$$

$$\beta=\sqrt[3]{\frac{4^{10}+16^4}{2^{14}+4^5}}=\sqrt[3]{\frac{\left(2^2\right)^{10}+\left(2^4\right)^4}{2^{14}+\left(2^2\right)^5}}=\sqrt[3]{\frac{\left(2^{20}\right)+\left(2^{16}\right)}{2^{14}+\left(2^{10}\right)}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2^{16}\left(2^4+1\right)}{2^{10}\left(2^4+1\right)}}=\sqrt[3]{\frac{2^{16}}{2^{10}}}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$$

Άρα $\alpha+\beta=2016+4=2020\in\mathbb{N}$

Άσκηση 15. Δίνονται οι αριθμοί

$$\boldsymbol{\alpha=\sqrt{2015\cdot 2017+1}-3\sqrt{2}\,,\ \beta=\sqrt[3]{\frac{4^{10}+16^4}{2^{14}+4^5}}-2\sqrt{3}}$$

και $\boldsymbol{\gamma=\dfrac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}$**. Να δείξετε ότι** $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma\in\mathbb{N}}$**.**

Λύση: $\alpha=\sqrt{2015\cdot 2017+1}-3\sqrt{2}=$

$\sqrt{(2016-1)\cdot(2016+1)+1}-3\sqrt{2}=$

$\sqrt{2016^2-1+1}-3\sqrt{2}=\sqrt{2016^2}-3\sqrt{2}=2016-3\sqrt{2}$

$$\beta=\sqrt[3]{\frac{4^{10}+16^4}{2^{14}+4^5}}-2\sqrt{3}=\sqrt[3]{\frac{\left(2^2\right)^{10}+\left(2^4\right)^4}{2^{14}+\left(2^2\right)^5}}-2\sqrt{3}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{\left(2^{20}\right)+\left(2^{16}\right)}{2^{14}+\left(2^{10}\right)}}-2\sqrt{3}=\sqrt[3]{\frac{2^{16}\left(2^4+1\right)}{2^{10}\left(2^4+1\right)}}-2\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2^{16}}{2^{10}}}-2\sqrt{3}=\sqrt[3]{2^6}-2\sqrt{3}=2^{\frac{6}{3}}-2\sqrt{3}=2^2-2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$$

$$\gamma=\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}=$$

$$\frac{6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{18-12}=\frac{6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{6}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

Συνεπώς έχουμε $\alpha+\beta+\gamma=$

$2016-3\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=2020\in\mathbb{N}$

Άσκηση 16. Ποιός από τους αριθμούς $\boldsymbol{\alpha=3^{333}}$, $\boldsymbol{\beta=33^{33}}$ **και** $\boldsymbol{\gamma=333^3}$ **είναι ο μεγαλύτερος και ποιός είναι ο μικρότερος.**

Λύση: $\alpha=3^{333}=\left(3^{111}\right)^3$, $\beta=33^{33}=\left(33^{11}\right)^3$ και $\gamma=333^3$.

Θα συγκρίνουμε τους αριθμούς 3^{111}, 33^{11} και 333

$33^{11}=33\cdot 33\cdot 33^9=1089\cdot 33^9>333$, άρα $\beta>\gamma$ (1).

$3^{111}=\left(3^6\right)^{18}\cdot 3^3=(729)^{18}\cdot 3^3>(729)^{18}>$

$>33^{18}>33^{11}$, άρα $\alpha>\beta$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha>\beta>\gamma$, άρα ο **α** είναι ο μεγαλύτερος και **γ** είναι ο μικρότερος.

Άσκηση 17.

i. Για κάθε $\boldsymbol{x,y\in\mathbb{R}}$ **να δείξετε ότι:**

$$\boldsymbol{x^2+y^2\geq 2xy}$$

ii. Για κάθε $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}}$ **να δείξετε ότι:**

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

iii. Για κάθε $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}}$ **να δείξετε ότι**

$$\boldsymbol{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Λύση:

i. $x^2+y^2\geq 2xy\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$ που ισχύει.

ii. Α΄ τρόπος. Ισχύει ότι $\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta\\ \beta^2+\gamma^2\geq 2\beta\gamma\\ \alpha^2+\gamma^2\geq 2\alpha\gamma\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2\geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma\Rightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$

Β΄ τρόπος. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2\geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma\Leftrightarrow$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma\geq 0\Leftrightarrow$

$\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma\geq 0\Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geq 0$, που ισχύει

iii. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\left(\alpha^2\right)^2+\left(\beta^2\right)^2+\left(\gamma^2\right)^2\geq$

$\geq\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq$

$\geq\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\alpha\beta\cdot\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

Άσκηση 18. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\boldsymbol{9^3+8}$ **δεν μπορεί να είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.**

Λύση:

Α΄ τρόπος: Ο αριθμός $9^3+8=729+8=737$ και γνωρίζουμε ότι ισχύει $27^2=729<737<784=28^2$ άρα ο 9^3+8 δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Β΄ τρόπος: Έχουμε ότι $9^3+8=9^3+1+7=\left(9^3+1^3\right)+7=$

$(9+1)\cdot\left(9^2-9+1\right)+7=10\cdot\left(9^2-9+1\right)+7=10\cdot\kappa+7$,

όπου $\kappa=9^2-9+1$. Το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $10\cdot\kappa$ είναι το 0, άρα του αριθμού $10\cdot\kappa+7$ είναι το 7 και δεν μπορεί να είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, αφού τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών έχουν ως τελευταίο ψηφίο. Το 0, αν ο αριθμός τελειώνει σε 0, Το 1, αν τελειώνει σε 1 ή 9, το 4, αν τελειώνει σε 2 ή 8, το 5, αν τελειώνει σε 5, και το 6, αν τελειώνει σε 4 ή 6.

Γ΄ τρόπος: $9^3+8=9^3+2^3=$

$=(9+2)\cdot\left(9^2-2\cdot 9+2^2\right)=11\cdot 67\neq\kappa^2$, γιατί το 11 και το 67 είναι πρώτοι αριθμοί.

Προτεινόμενη άσκηση: Να δείξετε, χωρίς να γίνουν οι πράξεις, πως ο αριθμός 9999^3+9 δεν μπορεί να είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Ευκλείδεια Γεωμετρία

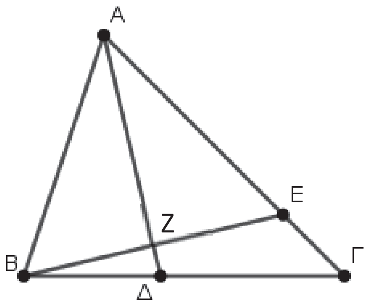
Ανθή Φιλιππίδη –Παράρτημα της ΕΜΕ Αργολίδας

Άσκηση 1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ < ΑΓ)$ και ΑΔ η διχοτόμος του. Αν Ε είναι σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΒ$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $ΒΕ \perp ΑΔ$.

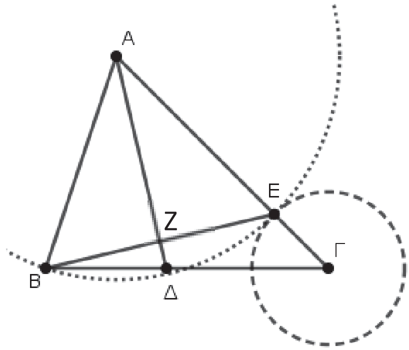
β. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων $(Α,ΑΒ)$ και $(Γ,ΕΓ)$.

Λύση: α) Ας ονομάσουμε Ζ το σημείο τομής του ΒΕ με το ΑΔ.



Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές και το ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$. Επομένως το ΑΖ είναι και ύψος. Άρα $ΑΖ \perp ΒΕ$ και $ΒΕ \perp ΑΔ$.

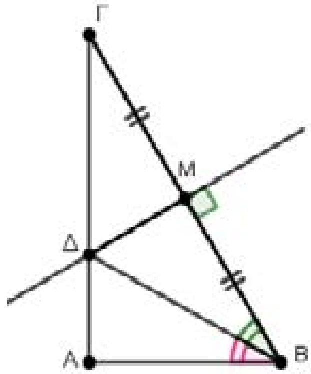
β) Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $ΑΒ = ΑΕ$. Άρα $ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ = ΑΒ + ΕΓ$.



Δηλαδή η διάκεντρος των δυο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Επομένως οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Άσκηση 2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90°$ και ΒΔ η διχοτόμος του. Αν η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ να δείξτε ότι: α) $ΑΔ = ΔΜ$ β) $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$

Λύση: α) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΜ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με κοινή υποτείνουσα την ΒΔ και επιπλέον $Α\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Μ$ αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος.



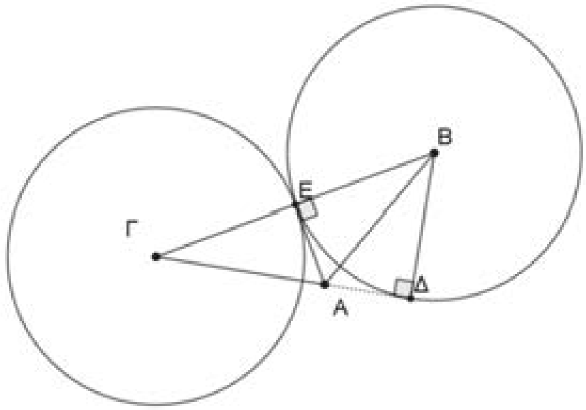
Επομένως προκύπτει ότι $ΑΔ = ΜΔ$ και $ΑΒ = ΒΜ$.

β) Αφού $ΑΒ = ΒΜ$ και το Μ είναι το μέσο της ΒΓ προκύπτει ότι $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άσκηση 3. Δίνεται αμβλυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και ΒΔ το ύψος του. Αν οι κύκλοι $(Β,ΒΔ)$ και $\left(Γ,\frac{ΒΓ}{2}\right)$ εφάπτονται εξωτερικά να αποδείξετε ότι:

α) Οι δυο κύκλοι είναι ίσοι β) $Δ\hat{Β}Γ = 2\hat{Γ}$

Λύση: α) Για να δείξουμε ότι οι δυο κύκλοι είναι ίσοι πρέπει να αποδείξουμε ότι έχουν ίσες ακτίνες. Έστω Ε το σημείο επαφής των δυο κύκλων. Το Ε ανήκει στην διάκεντρο ΒΓ των δυο κύκλων. Επιπλέον $ΓΕ = \frac{ΒΓ}{2}$, επομένως το Ε είναι το μέσο της ΒΓ και $ΒΕ = \frac{ΒΓ}{2}$, δηλαδή οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες.

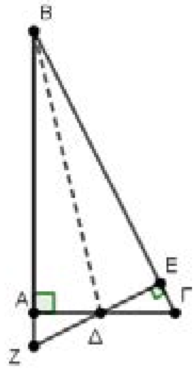


β) Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αφού το Ε είναι το μέσο της ΒΓ τότε τότε η ΑΕ είναι διάμεσος του τριγώνου. Επειδή όμως το τρίγωνο είναι ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$) έπεται ότι το ΑΕ είναι επίσης διχοτόμος και ύψος. Άρα $ΑΕ \perp ΒΓ$

και $ΑΕ \perp ΒΕ$, οπότε το ΑΕ είναι εφαπτόμενο στους δυο κύκλους.
Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΔ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και $ΒΕ = ΒΔ$ (ακτίνες του κύκλου) και η υποτείνουσα ΒΑ είναι κοινή. Επομένως και $Α\hat{Β}Δ = Ε\hat{Β}Α$. Οπότε $Δ\hat{Β}Γ = 2 \cdot Ε\hat{Β}Α$. Αλλά $Ε\hat{Β}Α = \hat{Γ}$ γιατί το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
Επομένως $Δ\hat{Β}Γ = 2 \cdot \hat{Γ}$.

Άσκηση 4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^{\circ}$. Στην προέκταση της ΒΑ προς τη μεριά του Α παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $ΒΖ = ΒΓ$. Η κάθετη από το Ζ στη ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ και την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΒΔ διχοτομεί την $Ζ\hat{Β}Γ$.

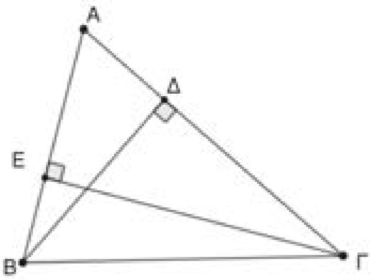
Λύση: Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια ($\hat{Α} = \hat{Ε} = 90^{\circ}$), έχουν ίσες υποτείνουσες ($ΒΓ = ΒΖ$) και έχουν κοινή την οξεία γωνία $\hat{Β}$.

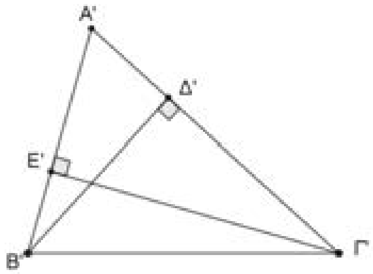


Οπότε προκύπτει ότι $ΑΒ = ΒΕ$. Τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΒΕΔ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια ($\widehat{Α} = \widehat{Ε} = 90^{\circ}$), έχουν κοινή υποτείνουσα την ΒΔ και $ΑΒ = ΒΕ$. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι $Α\hat{Β}Δ = Ε\hat{Β}Δ$. Οπότε η ΒΔ διχοτομεί την γωνία $\hat{Β}$.

Άσκηση 5. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$, $υ_β = υ_{β'}$ και $υ_γ = υ_{γ'}$. Να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

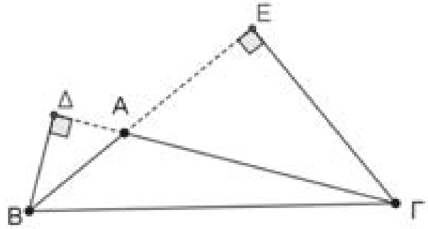
Λύση: Αν η γωνία $\widehat{Α}$ είναι οξεία τότε τα ίχνη των υψών $υ_β, υ_γ, υ_{β'}, υ_{γ'}$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τριγώνου. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και $Α'Β'Δ'$ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές ΒΔ και Β΄Δ΄ και τις οξείες γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{Α'}$. Από την ισότητα των τριγώνων αυτών προκύπτει ότι $ΑΒ = Α'Β'$.
Επίσης τα τρίγωνα ΑΓΕ και $Α'Γ'Ε'$ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές ΓΕ και $Γ'Ε'$ και τις οξείες γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{Α'}$.

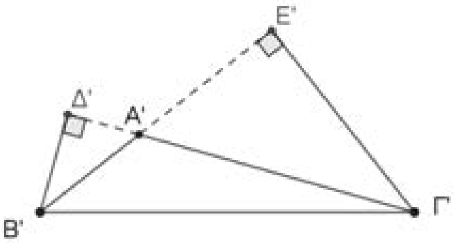




Από την ισότητα των τριγώνων αυτών προκύπτει ότι $ΑΓ = Α'Γ'$. Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$ είναι ίσα διότι $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$, $ΑΒ = Α'Β'$ και $ΑΓ = Α'Γ'$.

Αν η γωνία $\hat{Α}$ είναι αμβλεία τότε τα ίχνη των υψών $υ_β, υ_γ, υ_{β'}, υ_{γ'}$ βρίσκονται στις προεκτάσεις των αντίστοιχων πλευρών των δυο τριγώνων όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.





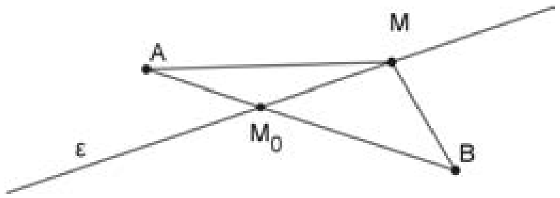
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Δ' είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές ΔΒ και Δ'Β' και τις οξείες γωνίες $Δ\widehat{Α}Α = Δ΄\widehat{Α}Β΄$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{Α}$ και $\widehat{Α'}$). Επομένως έχουν και ίσες υποτείνουσες $ΑΒ = Α'Β'$.
Επίσης τα τρίγωνα ΑΓΕ και $Α'Γ'Ε'$ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές ΕΓ και Ε'Γ' και τις οξείες γωνίες $\widehat{ΕΑΓ} = \widehat{Ε'Α'Γ'}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{Α}$ και $\widehat{Α'}$). Επομένως έχουν και ίσες υποτείνουσες $ΑΓ = Α'Γ'$.

Οπότε και τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α΄Β΄Γ΄$ είναι ίσα διότι $\widehat{Α}=\widehat{Α'}$, $ΑΒ=Α'Β'$ και $ΑΓ=Α'Γ'$.

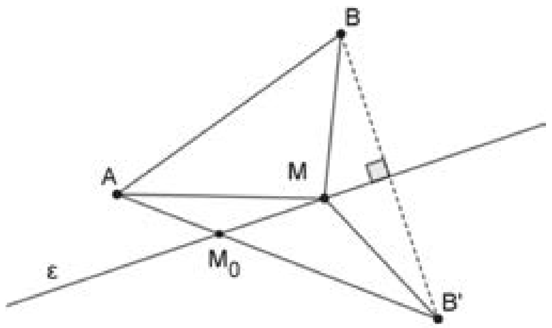
Τέλος αν η γωνία $\widehat{Α}$ είναι ορθή τότε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ είναι ορθογώνια και τα ύψη $υ_β,\ υ_γ,\ υ_{β'},\ υ_{γ'}$ ταυτίζονται με τις πλευρές $ΒΑ, ΓΑ,\ Β'Α'$ και $Γ'Α'$ αντίστοιχα. Οπότε και τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α΄Β΄Γ΄$ είναι ίσα διότι $\widehat{Α}=\widehat{Α'}$, $ΑΒ=Α'Β'$ και $ΑΓ=Α'Γ'$.

Άσκηση 6. Δίνεται ευθεία $(ε)$ και δυο σημεία Α και Β εκτός αυτής. Να βρείτε το σημείο Μ της ευθείας τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α και Β να είναι ελάχιστο.

Λύση: 1η περίπτωση: Θεωρούμε την ευθεία $(ε)$ και τα σημεία Α και Β εκατέρωθεν αυτής. Αν το σημείο Μ της ευθείας δεν είναι σημείο του τμήματος $ΑΒ$ τότε ισχύει $ΜΑ+ΜΒ>ΑΒ$ ενώ αν το Μ είναι σημείο του $ΑΒ$ τότε $ΜΑ+ΜΒ=ΑΒ$. Οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει $ΜΑ+ΜΒ\geq ΑΒ$ με το άθροισμα $ΜΑ+ΜΒ$ να γίνεται ελάχιστο όταν το Μ ταυτιστεί με το σημείο τομής της $(ε)$ και του $ΑΒ$ (το $Μ_0$ όπως φαίνεται στο σχήμα).



$2^η$ περίπτωση: Αν τα Α και Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η $(ε)$ τότε θεωρούμε το συμμετρικό $Β'$ του Β ως προς την $(ε)$.



Επειδή η $(ε)$ είναι μεσοκάθετος του $ΒΒ'$ ισχύει ότι $ΜΒ=ΜΒ'$.

Οπότε $ΜΑ+ΜΒ=ΜΑ+ΜΒ'\geq ΑΒ'$ και το άθροισμα γίνεται ελάχιστο όταν το Μ ταυτιστεί με το σημείο τομής της $(ε)$ με το $ΑΒ'$.

Άσκηση 7. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Α}=60^ο$ και $\hat{Β}=80^ο$. Έστω ΑΔ, ΒΕ οι διχοτόμοι του. Θεωρούμε στην προέκταση της ΑΒ τμήμα $ΒΖ=ΒΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΖ=ΔΓ$.

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΕ//ΖΔ$.

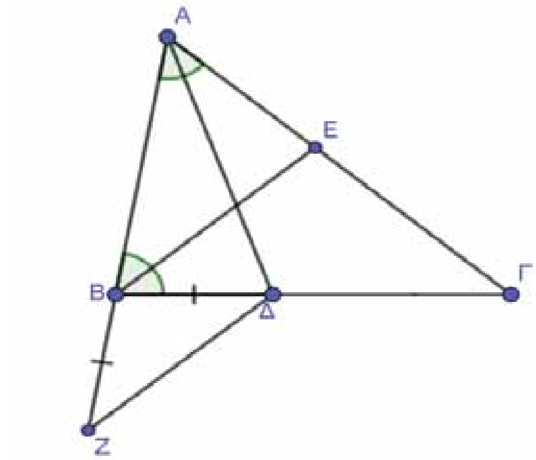
γ) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ+ΒΔ=ΑΕ+ΕΒ$.

δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ:

i) Είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΖ.

ii) Διχοτομεί τη γωνία $Ζ\hat{Δ}Γ$.

Λύση: α) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν $ΑΔ$ κοινή πλευρά, $Β\widehat{Α}Δ=Δ\widehat{Α}Γ=30^ο$ ($ΑΔ$ διχοτόμος της $\hat{Α}$), $Α\hat{Δ}Ζ=Α\hat{Δ}Γ=110^ο$ γιατί $\hat{Γ}=40^ο$ οπότε $Α\hat{Δ}Γ=180^ο-30^0-40^ο=110^ο$ και $Α\hat{Δ}Ζ=Α\hat{Δ}Β+Β\hat{Δ}Ζ=(180^ο-80^0-30^ο)+\hat{Ζ}=110^ο$



($\hat{Ζ}=40^ο$ γιατί το τρίγωνο $ΒΔΖ$ είναι ισοσκελές). Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε: $ΑΖ=ΑΓ$ και $ΔΖ=ΔΓ$.

β) $Α\hat{Β}Ε=\hat{Ζ}=40^ο$ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες) οπότε $ΒΕ//ΖΔ$.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΖ$ και $ΑΔΓ$ έχουμε: $ΑΖ=ΑΓ$, $ΑΒ+ΒΖ=ΑΕ+ΕΓ$ (1). Όμως $ΒΖ=ΒΔ$ από υπόθεση και $ΕΓ=ΕΒ$ γιατί το $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές αφού $Ε\hat{Β}Δ=\hat{Γ}=40^ο$.

Άρα (1) $\Rightarrow ΑΒ+ΒΖ=ΑΕ+ΕΓ$ άρα

$ΑΒ+ΒΔ=ΑΕ+ΕΒ$

δ) i) Έχουμε: $ΑΖ=ΑΓ$, $ΔΖ=ΔΓ$ δηλαδή τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από τα Ζ και Γ. Οπότε η ευθεία $ΑΔ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΖΓ$.

ii) Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΖΔΓ$ η $ΔΜ$ είναι διάμεσος ($ΑΔ$ είναι μεσοκάθετος του $ΖΓ$) άρα και διχοτόμος.

Τάξη: Β΄ — Άλγεβρα: Συστήματα

Ελένη Μηλιώτη –Ανθή Φιλιππίδη – Μέλη του Παραρτήματος της ΕΜΕ Αργολίδας

Η επίλυση ενός γραμμικού ή μη γραμμικού συστήματος γίνεται με τις γνωστές μεθόδους της αντικατάστασης, των αντίθετων συντελεστών και με την βοήθεια των οριζουσών. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δούμε συστήματα όπου εφαρμόζονται τεχνάσματα που θα οδηγήσουν στην επίλυση τους καθώς και κάποια προβλήματα.

Άσκηση 1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

α) $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=7 \\ x+z=8 \end{cases}$ β) $\begin{cases} xy=1 \\ yz=3 \\ xz=27 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} xy+z=0 \\ yz+x=0 \\ xz+y=0 \end{cases}$

Λύση: α) Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα εργαζόμενοι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Λόγω όμως της μορφής του μπορούμε να εργασθούμε ποιο γρήγορα ως εξής:

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε:

  $2x+2y+2z=20 \Leftrightarrow x+y+z=10 \overset{x+y=5}{\Leftrightarrow} z=5$

- Στη συνέχεια με διαδοχικές αντικαταστάσεις βρίσκουμε $y=2$ και $x=3$. Άρα λύση του συστήματος είναι $(x,y,z)=(3,2,5)$.

β) Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις εξισώσεις έχουμε: $x^2y^2z^2=81 \Leftrightarrow xyz=9$ (1) ή $xyz=-9$ (2)

- $xyz=9 \overset{xy=1}{\Leftrightarrow} z=9$, $xyz=9 \overset{yz=3}{\Leftrightarrow} x=3$ και $y=\frac{1}{3}$

- $xyz=-9 \overset{xy=1}{\Leftrightarrow} z=-9$, $xyz=-9 \overset{yz=3}{\Leftrightarrow} x=-3$ και $y=-\frac{1}{3}$.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι:

$(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{3},9\right),\left(-3,-\frac{1}{3},-9\right)$.

γ) Προφανώς αυτό το σύστημα έχει λύση την $(x,y,z)=(0,0,0)$. Αναζητούμε άλλες λύσεις με την προϋπόθεση οι αριθμοί x,y,z να είναι διαφορετικοί του μηδενός. Παρατηρούμε ότι σε κάθε εξίσωση έχουμε τα γινόμενα ανά δύο των αγνώστων του συστήματος. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με z, την δεύτερη με x και την τρίτη με y έχουμε:

$$\begin{cases} xyz+z^2=0 \\ xyz+x^2=0 \\ xyz+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz=-z^2 \\ xyz=-x^2 \\ xyz=-y^2 \end{cases}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει

$$x^2=y^2=z^2 \Leftrightarrow |x|=|y|=|z|$$

- Αν $x=y=z$ τότε αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση του συστήματος έχουμε:

  $x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x=-1$, άρα $x=y=z=-1$.

- Αν $x=y=-z$ τότε αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση του συστήματος έχουμε:

  $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x=1$, άρα $x=y=1$ και $z=-1$.

- Αν $x=-y=-z$ τότε αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση του συστήματος έχουμε:

  $x^2+x=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x=-1$, άρα $x=-1$ και $y=z=1$.

- Αν $x=-y=z$ τότε αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση του συστήματος έχουμε:

  $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x=1$, άρα $x=z=1$ και $y=-1$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι:

$(x,y,z)=(0,0,0),(-1,-1,-1),(1,1,-1),(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$.

Άσκηση 2. Να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{yz}{y+z}=6 \\ \dfrac{xz}{x+z}=8 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{y+4}=\dfrac{1}{z-1} \\ x-2y+z=5 \end{cases}$

Λύση

α) Για να ορίζονται οι εξισώσεις πρέπει $x+y\neq 0$ και $y+z\neq 0$ και $x+z\neq 0$, άρα $x\neq y\neq z\neq x$. Αντιστρέφουμε τα κλάσματα και στην συνέχεια κάνουμε διάσπαση κλασμάτων.

$$\begin{cases}\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}\\ \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{6}\\ \frac{x+z}{xz}=\frac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=\frac{1}{2}\\ \frac{y}{yz}+\frac{z}{yz}=\frac{1}{6}\\ \frac{x}{xz}+\frac{z}{xz}=\frac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{8}\end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{19}{24}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{48}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=\frac{19}{48}\Leftrightarrow\frac{1}{z}=-\frac{5}{48}\Leftrightarrow z=-\frac{48}{5}.$$

Στη συνέχεια με διαδοχικές αντικαταστάσεις βρίσκουμε $y=\frac{48}{13},x=\frac{48}{11}$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x,y,z)=\left(\frac{48}{11},\frac{48}{13},-\frac{48}{5}\right)$.

β) Όταν η μία εξίσωση του συστήματος είναι αναλογία τη θέτουμε ίση με λ και βρίσκουμε κάθε άγνωστο ως συνάρτηση του λ.

Αντικαθιστούμε στη $2^η$ εξίσωση και βρίσκουμε το λ οπότε στην συνέχεια βρίσκουμε τους αριθμούς x,y,z. Για να ορίζονται οι εξισώσεις πρέπει $x\neq 2$ και $y\neq -4$ και $z\neq 1$. Οπότε:

$$\frac{1}{x-2}=\frac{2}{y+4}=\frac{1}{z-1}=\lambda.$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$\frac{1}{x-2}=\lambda\Leftrightarrow\lambda x-2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda x=2\lambda+1\Leftrightarrow x=\frac{2\lambda+1}{\lambda}$$

$$\frac{2}{y+4}=\lambda\Leftrightarrow\lambda y+4\lambda=2\Leftrightarrow\lambda y=2-4\lambda\Leftrightarrow y=\frac{2-4\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{1}{z-1}=\lambda\Leftrightarrow\lambda z-\lambda=1\Leftrightarrow\lambda z=\lambda+1\Leftrightarrow z=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

Αντικαθιστούμε στην $2^η$ εξίσωση και έχουμε:

$$x-2y+z=5\Leftrightarrow\frac{2\lambda+1}{\lambda}-2\frac{2-4\lambda}{\lambda}+\frac{\lambda+1}{\lambda}=5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{11\lambda-2}{\lambda}=5\Leftrightarrow 11\lambda-2=5\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{3}.$$ Οπότε $(x,y,z)=(5,2,4)$.

Άσκηση 3. Δύο πλοία κινούνται ευθύγραμμα, το $1^ο$ από το λιμάνι $A(2,5)$ προς το λιμάνι $B(-1,2)$ και το $2^ο$ από το λιμάνι $\Gamma(3,4)$ προς το λιμάνι $\Delta(-1,0)$. Να εξετάσετε αν τα πλοία θα συναντηθούν.

Λύση Αρχικά θα βρούμε τις εξισώσεις των ευθειών (AB) και $(\Gamma\Delta)$. Η ευθεία (AB) έχει εξίσωση $(AB): y=\alpha x+\beta$ και επαληθεύεται από τις αντίστοιχες συντεταγμένες των σημείων A,B. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=5\\-\alpha+\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=5\\\beta=2+\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha=3\\\beta=2+\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=3\end{cases}$$

Άρα $(AB): y=x+3$.

Η ευθεία $(\Gamma\Delta)$ έχει εξίσωση $(\Gamma\Delta): y=\alpha x+\beta$ και επαληθεύεται από τις αντίστοιχες συντεταγμένες των σημείων Γ,Δ. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases}3\alpha+\beta=4\\-\alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha+\beta=4\\\beta=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=1\end{cases}.$$

Άρα $(\Gamma\Delta): y=x+1$. Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα είναι παράλληλες. Επομένως τα πλοία δεν θα συναντηθούν.

Άσκηση 4. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x,y οι οποίοι έχουν άθροισμα 6 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 16.

Λύση: Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x,y τότε θα είναι αυτοί που θα προκύψουν από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}x+y=6\\x^2+y^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x\\x^2+(6-x)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=6-x\\x^2+36-12x+x^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x\\2x^2-12x+20=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x\\x^2-6x+10=0,\Delta=-4<0\end{cases}.$$ Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση 5. Να βρεθεί τριψήφιος αριθμός αν γνωρίζουμε ότι:

- **Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 16**
- **Αν αλλάξουμε τη θέση του πρώτου και του δεύτερου ψηφίου ο αριθμός ελαττώνεται κατά 180.**
- **Αν αλλάξουμε τη θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9**

Λύση: Έστω x,y,z τα ψηφία του αριθμού όπου x το ψηφίο των εκατοντάδων, y το ψηφίο των δεκάδων και z το ψηφίο των μονάδων. Προφανώς οι αριθμοί x,y,z είναι ακέραιοι από το 0 έως το 9 με $x\neq 0$. Αφού το άθροισμα των ψηφίων του είναι 16 έχουμε: $x+y+z=16$ (1). Ο τριψήφιος αριθμός xyz στην δεκαδική κλίμακα γράφεται: $\overline{xyz}=100x+10y+z$. Αν αλλάξουμε την θέση του πρώτου και του δεύτερου ψηφίου ο αριθμός είναι yxz και γράφεται $\overline{yxz}=100y+10x+z$ οπότε $100y+10x+z=100x+10y+z-180\Leftrightarrow$ $90x-90y=180\Leftrightarrow x-y=2$ (2). Αν αλλάξουμε την θέση των δύο τελευταίων ψηφίων ο αριθμός είναι xzy και γράφεται $\overline{xzy}=100x+10z+y$ οπότε $100x+10z+y=100x+10y+z-9\Leftrightarrow$ $y-z=1$ (3).

Οπότε οι x,y,z προκύπτουν από την λύση του συστήματος των εξισώσεων (1), (2), (3).

$$\begin{cases}x+y+z=16\\ x-y=2\\ y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=16\\ x-y=2\\ y=1+z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x+y+z=16\\ x=3+z\\ y=1+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3z+4=16\\ x=3+z\\ y=1+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=4\\ x=7\\ y=5\end{cases}.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι 754.

Άσκηση 6. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}\mathbf{x=\alpha(6-x)-6y}\\ \mathbf{1+2y=\alpha(4-x-y)}\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **και η συνάρτηση** $f(x)=x^2-3x+k$, $k\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ για την οποία το σημείο $M(-2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές των α και k που βρήκατε στα προηγούμενα ερωτήματα, τα σημεία $A(k+6,\alpha+2)$, $B\left(\frac{1}{3}k,\alpha+2\right)$, $\Gamma(6\alpha+k,\alpha-1)$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

Λύση: α) Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται $\begin{cases}(\alpha+1)x+6y=6\alpha\\ \alpha x+(\alpha+2)y=4\alpha-1\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και έχει ορίζουσα: $D=\begin{vmatrix}\alpha+1 & 6\\ \alpha & \alpha+2\end{vmatrix}=\alpha^2+3\alpha+2-6\alpha=$ $\alpha^2-3\alpha+2=(\alpha-1)(\alpha-2)$. Για να είναι το σύστημα αδύνατο, πρέπει $D=0\Leftrightarrow\alpha=1$ ή $\alpha=2$.

- Για $\alpha=1$ το σύστημα γράφεται: $\begin{cases}2x+6y=6\\ x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow x+3y=3\Leftrightarrow x=3-3y$. Άρα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(3-3y,y), y\in\mathbb{R}$, οπότε η τιμή $\alpha=1$ απορρίπτεται.
- Για $\alpha=2$ το σύστημα γράφεται: $\begin{cases}3x+6y=12\\ 2x+4y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=4\\ x+2y=\frac{7}{2}\end{cases}$, άρα είναι αδύνατο. Οπότε $\alpha=2$.

β) Για να ανήκει το σημείο M στη C_f πρέπει και αρκεί να ισχύει: $f(-2)=4\Leftrightarrow k=-6$

γ) Για $\alpha=2$ και $k=-6$ έχουμε $A(0,4), B(-2,0), \Gamma(6,1)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της απόστασης δυο σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ που είναι

$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$

$=\sqrt{(-2-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}$,

$(A\Gamma)=\sqrt{6^2+(-3)^2}=\sqrt{45}$

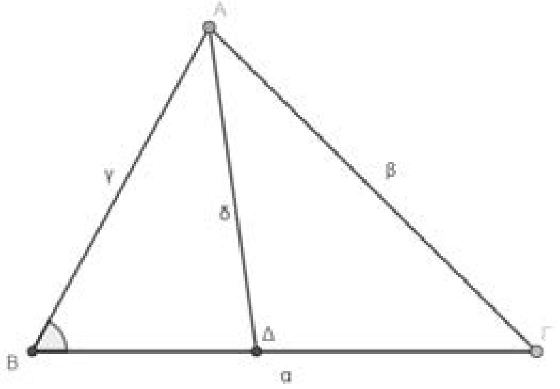
και $(B\Gamma)=\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{65}$. Παρατηρούμε ότι $(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2$. Ισχύει λοιπόν το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $B\Gamma$.

Τάξη: Β΄

Ευκλείδεια Γεωμετρία

Χρονόπουλος Δημήτριος- Παράρτημα της ΕΜΕ Αργολίδας

Άσκηση 1: Υπολογισμός του μήκους της διχοτόμου δ τριγώνου, σε συνάρτηση των πλευρών α, β και γ.



Λύση:

Από θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\gamma}{\beta}\Leftrightarrow\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma+B\Delta}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\frac{B\Delta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\Leftrightarrow B\Delta=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\quad(1)$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΑΔ έχουμε:

$$\delta^2=\gamma^2+B\Delta^2-2\gamma\cdot B\Delta\cdot\sigma\upsilon\nu B\Leftrightarrow$$

$$2\gamma\cdot B\Delta\cdot\sigma\upsilon\nu B=\gamma^2+B\Delta^2-\delta^2\quad(2)$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΑΓ έχουμε: $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B\Leftrightarrow$

$$2\alpha\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B=\alpha^2+\gamma^2-\beta^2\quad(3)$$

Από (2) και (3)

$$\frac{2\gamma B\Delta\sigma\upsilon\nu B}{2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\gamma^2+B\Delta^2-\delta^2}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}\Leftrightarrow\frac{B\Delta}{\alpha}=\frac{\gamma^2+B\Delta^2-\delta^2}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}\Leftrightarrow$$

$$B\Delta\left(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2\right)=\alpha\left(\gamma^2+B\Delta^2-\delta^2\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\left(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2\right)=\alpha\left(\gamma^2+\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2-\delta^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\left(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2\right)=\gamma^2+\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2-\delta^2\Leftrightarrow$$

$$\delta^2=\gamma^2+\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2-\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\left(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta^2=\frac{\gamma^2(\beta+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}+\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\beta+\gamma)^2}-\frac{\gamma(\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)^2}\left(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta^2=\frac{\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\left(\gamma(\beta+\gamma)^2+\alpha^2\gamma-(\beta+\gamma)\left(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta^2=\frac{\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\left(\gamma\beta^2+2\beta\gamma^2+\gamma^3+\alpha^2\gamma-\beta\gamma^2-\beta\alpha^2+\beta^3-\gamma^3-\gamma\alpha^2+\gamma\beta^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta^2=\frac{\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\left(2\gamma\beta^2+\beta\gamma^2-\beta\alpha^2+\beta^3\right)\Leftrightarrow$$

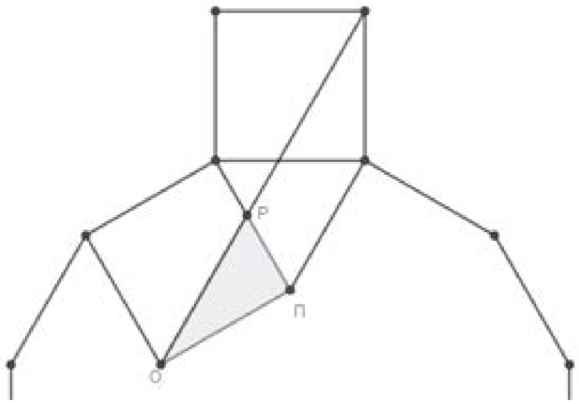
$$\delta^2=\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\left(2\gamma\beta+\gamma^2-\alpha^2+\beta^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta^2=\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\left(\beta^2+2\gamma\beta+\gamma^2-\alpha^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta^2=\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\left((\beta+\gamma)^2-\alpha^2\right)\Leftrightarrow\delta^2=\beta\gamma\left(1-\frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2}\right)$$

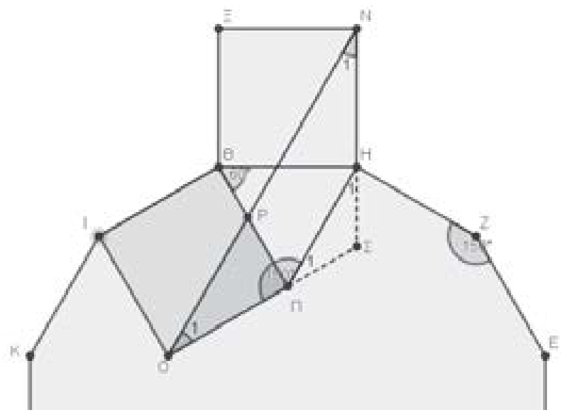
Άσκηση 2: Το κανονικό δωδεκάγωνο του σχήματος έχει μήκος πλευράς $12\sqrt{3}$. Σχεδιάζουμε τα τετράγωνα ΙΟΠΘ και ΘΗΝΞ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΠΡ

[Bhim Karki]



Λύση:

Το άθροισμα των γωνιών σε ένα πολύγωνο είναι $(2\nu-4)\cdot 90^o$ όπου ν το πλήθος των πλευρών του.



Άρα στο 12γωνο είναι

$\left(2\cdot 12-4\right)\cdot 90^o = 20\cdot 90^o = 1800^o$

Αφού το 12γωνο είναι κανονικό, έχει όλες τις γωνίες του ίσες, άρα $1800^o : 12 = 150^o$ 1800^o:

Η γωνία $\Pi\hat{\Theta}H = I\hat{\Theta}H - I\hat{\Theta}\Pi = 150^o - 90^o = 60^o$

Αφού $\Theta H = \Theta\Pi$ και η γωνία $\Pi\hat{\Theta}H = 60^o$ το τρίγωνο $\Pi\Theta H$ είναι ισόπλευρο, άρα $O\Pi = \Pi H = HN$ και η γωνία

$\Pi\hat{H}N = \Pi\hat{H}\Theta + \Theta\hat{H}N = 150^o$ και με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος $\hat{O}_1 = \hat{N}_1 = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Pi P$

$$\varepsilon\varphi\, \hat{O}_1 = \frac{\Pi P}{O\Pi} \Rightarrow \Pi P = O\Pi\cdot \varepsilon\varphi 30^o \Rightarrow$$

$$\Pi P = 12\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \Pi P = 12$$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $O\Pi P$ είναι $\left(O\Pi P\right) = \frac{1}{2}O\Pi\cdot\Pi P = \frac{1}{2}12\sqrt{3}\cdot 12 = 72\sqrt{3}$τ.μ

Άσκηση 3: Οι κύκλοι (K,ρ) και (O,R) εφάπτονται εσωτερικά. Αν $ZH = 10$ και $EB = 18$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου.

[Maths tips and tricks by Aslam]

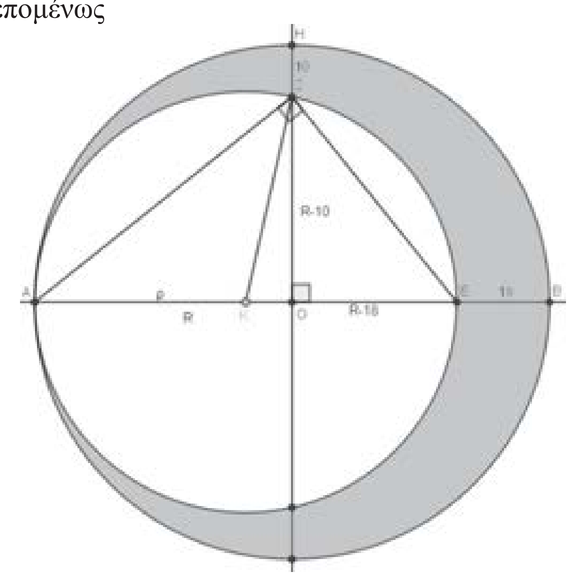
Λύση:

Ισχύουν $AB = 2R$, $AE = 2\rho$

$AB - AE = 2R - 2\rho = 18 \Leftrightarrow R - \rho = 9$.

Η γωνία $A\hat{Z}E = 90^o$ AZE ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AZE, το ZO είναι το ύψος επομένως



$ZO^2 = OA\cdot OE \Rightarrow \left(R-10\right)^2 = R\left(R-18\right) \Rightarrow$

$R^2 - 20R + 100 = R^2 - 18R \Rightarrow R = 50$

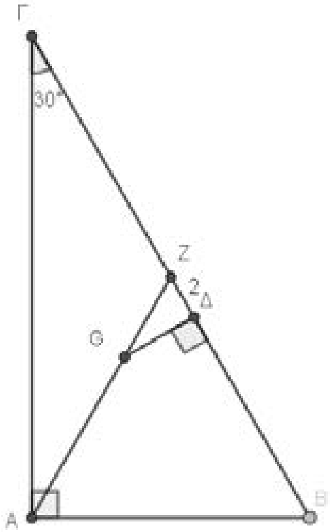
Αφού $R - \rho = 9 \Leftrightarrow \rho = 41$ και το εμβαδόν είναι

$E = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\left(50^2 - 41^2\right) = 819\pi$.

Άσκηση 4: Το σημείο G είναι το βαρύκεντρο του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Αν $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, $Z\Delta = 2$ και η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^o$ να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνουΑΒΓ.

Λύση:

Αφού το σημείο G είναι το κέντρο βάρους του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ τότε η AZ θα είναι διάμεσος και $AZ = \Gamma Z = ZB$, δηλαδή το τρίγωνο $AZ\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{\Gamma} = 30^o$. Η γωνία $A\hat{Z}B = 60^o$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $AZ\Gamma$ και το τρίγωνο $GZ\Delta$ είναι ορθογώνιο τότε η γωνία $Z\hat{G}\Delta = 30^o$, επομένως $GZ = 2Z\Delta = 4$.



Από την ιδιότητα του βαρύκεντρου

$$AG = \frac{2}{3}AZ \Rightarrow AG = 2GZ = 8$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $AZ = 12$ και επειδή η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι το μισό αυτής τότε $B\Gamma = 2AZ = 24$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο

$AB\Gamma$ η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^o$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας δηλαδή $AB = 12$. Απομένει να υπολογίσουμε και το μήκος της πλευράς $A\Gamma$. Μπορούμε είτε με το πυθαγόρειο θεώρημα είτε με τριγωνομετρία. Με το πυθαγόρειο θεώρημα:

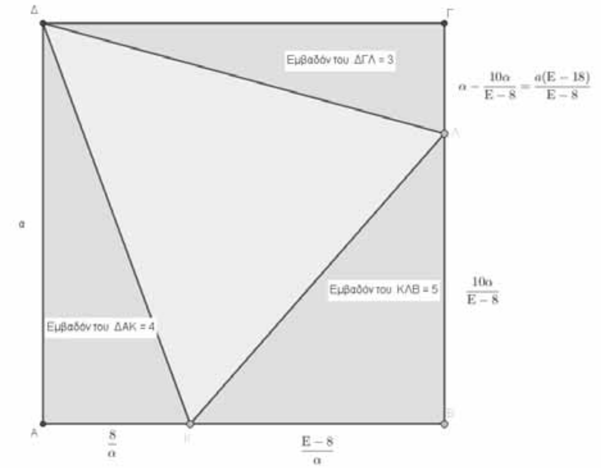
$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 \Rightarrow A\Gamma = 12\sqrt{3}$$

$$\text{ή } \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma = \frac{AB}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\cdot 12}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$AB+B\Gamma+A\Gamma=36+12\sqrt{3}\,.$$

Άσκηση 5: Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ τα εμβαδά των τριγώνων ΔΑΚ, ΚΛΒ και ΔΓΛ είναι 4, 5 και 3 αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Λύση:

Έστω $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta A=\alpha$. Αν Ε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, τότε $E=\alpha^2$.

Για το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$ έχουμε:

$$(AK\Delta)=\frac{1}{2}AK\cdot A\Delta\Leftrightarrow$$

$$4=\frac{1}{2}AK\cdot\alpha\Leftrightarrow AK=\frac{8}{\alpha},$$

$$KB=AB-AK=\alpha-\frac{8}{\alpha}=\frac{\alpha^2-8}{\alpha}=\frac{E-8}{\alpha}\text{, με } E>8$$

Για το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $KB\Lambda$ έχουμε:

$$(KB\Lambda)=\frac{1}{2}KB\cdot B\Lambda\Leftrightarrow$$

$$5=\frac{1}{2}\frac{E-8}{\alpha}\cdot B\Lambda\Leftrightarrow B\Lambda=\frac{10\alpha}{E-8}.$$

$$\Lambda\Gamma=B\Gamma-B\Lambda=\alpha-\frac{10\alpha}{E-8}=\frac{\alpha(E-18)}{E-8},\ E>18.$$

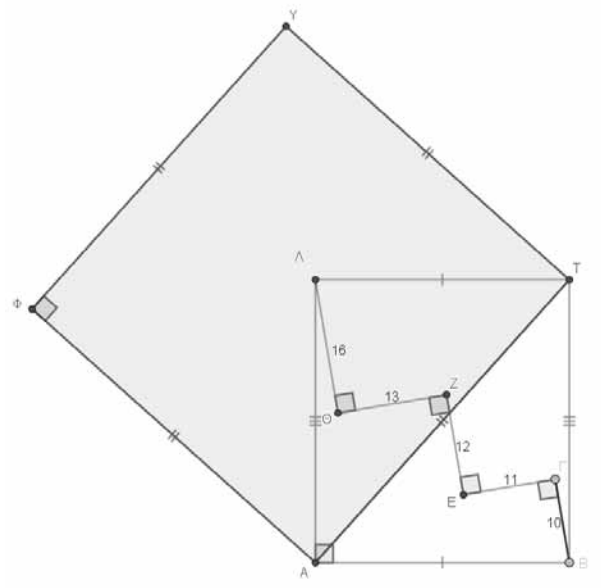
Για το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta\Gamma\Lambda$ έχουμε:

$$(\Delta\Gamma\Lambda)=\frac{1}{2}\Delta\Gamma\cdot\Gamma\Lambda\Leftrightarrow$$

$$3=\frac{1}{2}\alpha\frac{\alpha(E-18)}{E-8}\Leftrightarrow\frac{E(E-18)}{E-8}=6\Leftrightarrow$$

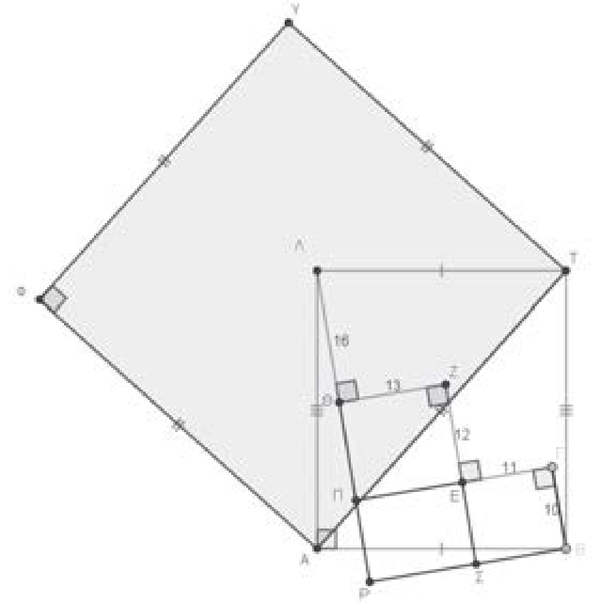
$$E^2-24E+48=0\overset{E>18}{\Leftrightarrow}E=12+4\sqrt{6}\,.$$

Άσκηση 6: Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΤΥΦ στο παρακάτω σχήμα.



Λύση:

Το τετράπλευρο $AB T\Lambda$ είναι ορθογώνιο οπότε οι διαγώνιοί του είναι ίσες δηλαδή $AT=B\Lambda$.



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $PB\Lambda$ έχουμε:

$$B\Lambda^2=P\Lambda^2+PB^2=38^2+24^2=2020$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου

$$(AT\Upsilon\Phi)=AT^2=B\Lambda^2=2020$$

Άσκηση 7: Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά μήκους 18. Παίρνουμε σημεία Ε, Ζ πάνω στις πλευρές ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΕΖ=15. Να υπολογίσετε:

i. το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΓΕ.

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΓΕΖ.

Λύση:

i. Φέρνουμε κάθετη στη $Z\Gamma$ στο Γ η οποία τέμνει την $A\Delta$ στο Η.

Τότε $\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2+45^o=90^o$ (1) και

$\hat{\Gamma}_3+\hat{\Gamma}_2+45^o=90^o$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_3$.

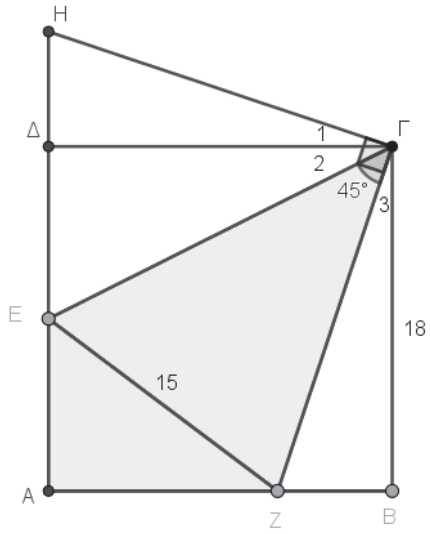
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΖ και ΓΔΗ είναι ίσα, διότι $ΒΓ=ΓΔ$ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_3$. Τα τρίγωνα ΓΕΗ και ΓΕΖ είναι ίσα διότι ΓΕ κοινή πλευρά, $ΓΗ=ΓΖ$ και οι γωνίες $Η\hat{Γ}Ε=Ε\hat{Γ}Ζ$, άρα $ΗΕ=ΕΖ=15$.

Τότε έχουμε:

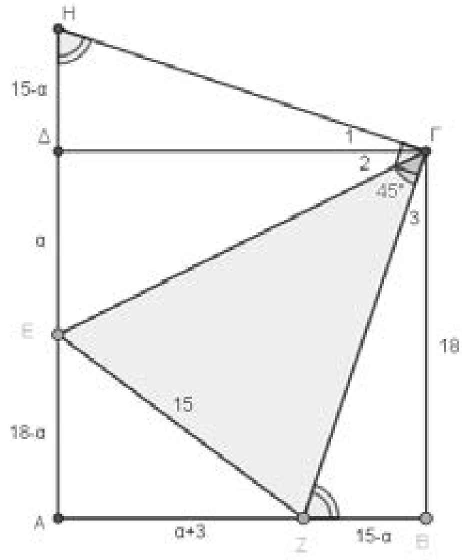
$$(ΑΖΓΕ)=(ΑΒΓΔ)-(ΓΔΕ)-(ΒΓΖ)=$$

$$(ΑΒΓΔ)-(ΓΔΕ)-(ΓΔΗ)=(ΑΒΓΔ)-(ΓΕΗ)=$$

$$18^2-\frac{1}{2}ΗΕ\cdot ΓΔ=324-135=189$$



ii. Έστω $ΔΕ=α$ τότε $ΑΕ=18-α$, $ΗΕ=ΕΖ=15$ άρα $ΗΔ=ΖΒ=15-α$ και επομένως $ΑΖ=α+3$.



Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΖ έχουμε: $ΕΖ^2=ΑΕ^2+ΑΖ^2 \Leftrightarrow$

$15^2=(18-α)^2+(α+3)^2 \Leftrightarrow$

$α^2-15α+54=0 \Leftrightarrow α=6$ ή $α=9$.

Αν $α=6$ τότε $ΑΕ=12$ και $ΑΖ=9$ οπότε

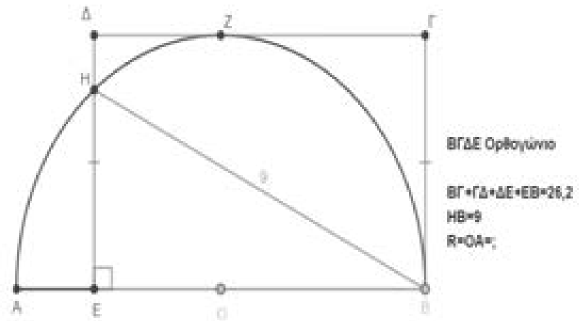
$(ΑΕΖ)=\frac{1}{2}ΑΕ\cdot ΑΖ=54$.

Αν $α=9$ τότε $ΑΕ=9$ και $ΑΖ=12$ οπότε

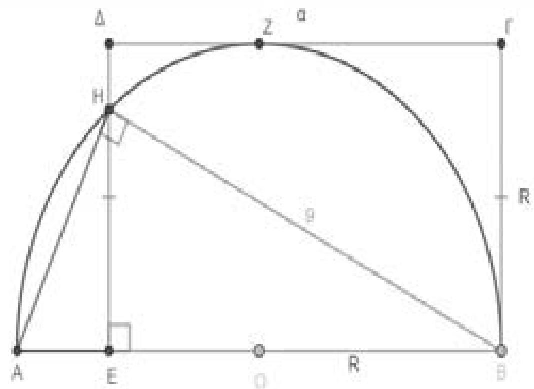
$(ΑΕΖ)=\frac{1}{2}ΑΕ\cdot ΑΖ=54$.

Άρα $(ΓΕΖ)=(ΑΖΓΕ)-(ΑΕΖ)=189-54=135$.

Άσκηση 8: Δίνεται το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με περίμετρο 26,2m και το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ που εφάπτεται της ΓΔ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν Η το σημείο τομής της πλευράς ΔΕ με το ημικύκλιο και ΗΒ = 9 cm, να υπολογίσετε την ακτίνα R του ημικυκλίου.



Λύση:



Έχουμε $ΟΒ=ΒΓ=R$, $ΓΔ=ΒΕ=α$ με $α>R$.

Φέρνουμε την ΗΑ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΗ ισχύει: $ΗΒ^2=ΕΒ\cdot ΑΒ \Leftrightarrow 81=α\cdot 2R \Leftrightarrow α\cdot R=\frac{81}{2}$.

Αφού η περίμετρος του είναι 26,2 έχουμε $2α+2R=26,2 \Leftrightarrow α+R=13,1$. Τα α και R είναι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2-13,1x+40,5=0 \Leftrightarrow x=5$ ή $x=8,1$, οπότε αφού $α>R$ προκύπτει $α=8,1$ και $R=5$.

Άσκηση 9: Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=24, ΒΓ=9, ΓΔ=25 και ΑΔ=16. Αν Ε είναι το

μέσο της πλευράς ΑΒ, ΔΕ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$ (1) και $ΕΔ \perp ΕΓ$ να δείξετε ότι:

i. **η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$ και**
ii. **να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.**

Λύση:

i. Πάνω στην ΔΓ παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $ΔΖ = ΔΑ = 16$ (2).
Τότε $ΓΔ = 25$ και $ΖΓ = 9$ (3).
Φέρνουμε τη ΕΖ και τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΖ έχουν $ΑΔ = ΔΖ$ από (2), οι γωνίες $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ από (1) και ΔΕ κοινή πλευρά, οπότε είναι ίσα και $ΕΖ = ΕΑ = 12$ (4).
Όμοια, τα τρίγωνα ΕΓΖ και ΕΓΒ είναι ίσα, οπότε $ΕΖ = ΕΑ = 12$ και οι γωνίες $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$, άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$.

ii. Έχουμε $\hat{Γ} + \hat{Δ} = 2\hat{Γ}_2 + 2\hat{Δ}_2 = 2\left(\hat{Γ}_2 + \hat{Δ}_2\right) = 180^o$,

άρα $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180^o$.
Εφαρμόζοντας νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ έχουμε:

$ΕΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΕ^2 - 2ΑΔ \cdot ΑΕ \cdot συν\hat{Α} =$

$400 - 384συν\hat{Α}$ και

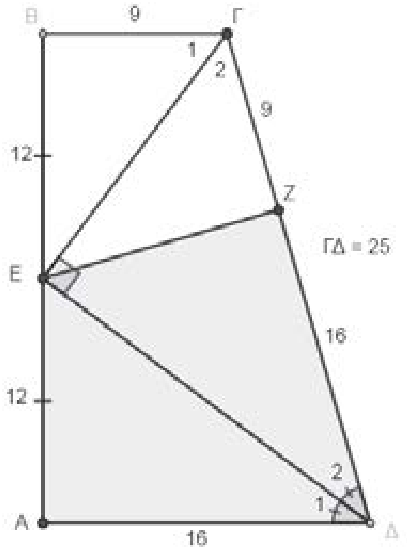
$ΕΓ^2 = ΒΓ^2 + ΒΕ^2 - 2ΒΓ \cdot ΒΕ \cdot συν\hat{Β} \overset{\hat{Β}=180^o-\hat{Α}}{=}$

$225 + 216συν\hat{Α}$.
Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$ΕΔ^2 + ΕΓ^2 = 625 - 159συν\hat{Α} \quad (5).$$

Επειδή το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι

$$ΕΔ^2 + ΕΓ^2 = ΓΔ^2 = 625 \quad (6)$$



Από (5) και (6) προκύπτει

$625 - 159συν\hat{Α} = 625 \Leftrightarrow συν\hat{Α} = 0 \Leftrightarrow \hat{Α} = 90^o$

άρα και $\hat{Β} = 90^o$.
Το τετράπλευρο λοιπόν ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο οπότε

$$\left(ΑΒΓΔ\right) = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2}ΑΒ = \frac{16+9}{2}24 = 300τ.μ$$

Άσκηση 10: **Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 10 και σημεία Ζ, Η και Ε στις πλευρές ΑΔ, ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΕΖ=10 και ΖΗ=5 και η γωνία $Ε\hat{Ζ}Η = 90^o$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τα x, y, z.**

Λύση:

Τα τρίγωνα ΑΗΖ και ΔΖΕ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και $\hat{Η}_1 = 90^o - \hat{Ζ}_2$ και

$\hat{Ζ}_1 = 180^o - Η\hat{Ζ}Ε - \hat{Ζ}_2 = 90^o - \hat{Ζ}_2$, άρα $\hat{Η}_1 = \hat{Ζ}_2$.

Έτσι έχουμε

$\frac{ΖΗ}{ΖΕ} = \frac{ΑΖ}{ΔΕ} = \frac{ΑΗ}{ΔΖ} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{y}{z} = \frac{x}{10-y} \Rightarrow z = 2y$ και

$x = \frac{10-y}{2}$.

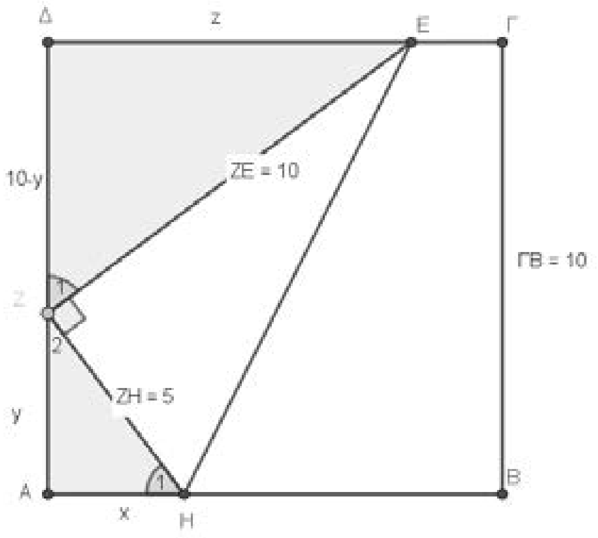
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΖΗΑ έχουμε:

$ΗΖ^2 = ΑΖ^2 + ΑΗ^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{10-y}{2}\right)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 5y^2 - 20y = 0 \Leftrightarrow$

$y = 0$ ή $y = 4 \Leftrightarrow y = 4$.

Τότε $z = 8$ και $x = 3$.



Διανύσματα και Ευθεία

Ελένη Μηλιώτη –Παράρτημα της ΕΜΕ Αργολίδας

Άσκηση 1. Δίνονται τα σημεία Α(6,–1), Β(1,3), Γ(1,2), Δ(–1,–1) και Ε(1,–1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Μ ως συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{MA}$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του λ ώστε τα σημεία Γ, Δ, Μ να είναι συνευθειακά.

γ) Αν επιπλέον ισχύουν $\overrightarrow{MA} = \kappa\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{\Delta E} = \mu\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{\Gamma B} = \rho\overrightarrow{\Gamma E}$, $\kappa,\rho,\mu \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\kappa\mu\rho = 1$.

Λύση:

α) Έστω Μ(x,y) τότε :

$$\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow (x-1, y-3) = \lambda(6-x, -1-y) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1 = 6\lambda - \lambda x \\ y-3 = -\lambda - \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = 6\lambda + 1 \\ (1+\lambda)y = 3-\lambda \end{cases}$$

Αν $\lambda = -1$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Επομένως για $\lambda \neq -1$ έχουμε

$$x = \frac{6\lambda+1}{\lambda+1} \text{ και } y = \frac{3-\lambda}{\lambda+1}, \text{ άρα } M\left(\frac{6\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{3-\lambda}{\lambda+1}\right).$$

β) Τα σημεία Γ, Δ, Μ να είναι συνευθειακά αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (-2,-3)$ και $\overrightarrow{\Gamma M} = (x-1, y-2)$ είναι παράλληλα, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\det\left(\overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{\Gamma M}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ x-1 & y-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2y + 4 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = -1 \Leftrightarrow$$

$$3\frac{6\lambda+1}{\lambda+1} - 2\frac{3-\lambda}{\lambda+1} = -1 \Leftrightarrow \frac{18\lambda+3-6+2\lambda}{\lambda+1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$20\lambda - 3 = -\lambda - 1 \Leftrightarrow 21\lambda = 2 \lambda = \frac{2}{21}.$$

γ) Για $\lambda = \frac{2}{21}$ έχουμε $M\left(\frac{33}{23}, \frac{61}{23}\right)$, οπότε:

$$\overrightarrow{MA} = \kappa\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$$

$$\left(6 - \frac{33}{23}, -1 - \frac{61}{23}\right) = \kappa\left(1 - \frac{33}{23}, 3 - \frac{61}{23}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{105}{23}, -\frac{84}{23}\right) = \kappa\left(-\frac{10}{23}, \frac{8}{23}\right) \Leftrightarrow \kappa = -\frac{21}{2}.$$

$$\overrightarrow{\Delta E} = \mu\overrightarrow{\Delta A} \Leftrightarrow (2,0) = \mu(7,0) \Leftrightarrow \mu = \frac{2}{7} \text{ και}$$

$$\overrightarrow{\Gamma B} = \rho\overrightarrow{\Gamma E} \Leftrightarrow (0,1) = \rho(0,-3) \Leftrightarrow \rho = -\frac{1}{3}.$$

Άρα $\kappa\mu\rho = 1$.

Άσκηση 2. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ τέμνονται κάθετα. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ τότε:

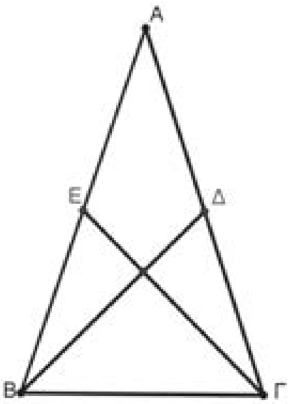
α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας Α

Λύση:

α) $$\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{2} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

$$\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{\gamma} - \vec{\beta}$$



β) Επειδή $\overrightarrow{B\Delta} \perp \overrightarrow{\Gamma E}$ έχουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma E} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} - \frac{1}{2}\vec{\beta}^2 - \frac{1}{2}\vec{\gamma}^2 + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0$$

$$5\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 2\vec{\beta}^2 + 2\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow 5|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\text{συν}A = 2\vec{\beta}^2 + 2\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow$$

$$5|\vec{\beta}|^2 \text{συν}A = 4|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \text{συν}A = \frac{4}{5}, \text{ αφού } |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|.$$

Άσκηση 3. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy θεωρούμε τα σημεία Β(β,0) και Γ(0,γ) όπου β,γ θετικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ.

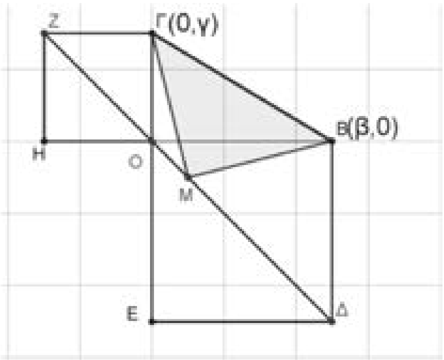
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Δ, Ε, Ζ, Η των τετραγώνων.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ο και Δ είναι συνευθειακά

γ) Αν Μ είναι το μέσο της ΖΔ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση:

α) Επειδή οι πλευρές ενός τετραγώνου είναι ίσες προκύπτει ότι οι συντεταγμένες των κορυφών είναι:



$\Delta(\beta,-\beta)$, $E(0,-\beta)$, $Z(-\gamma,\gamma)$ $H(-\gamma,0)$

β) Τα σημεία Ζ, Ο, Δ να είναι συνευθειακά αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{OZ}=(-\gamma,\gamma)$ και $\overrightarrow{O\Delta}=(\beta,-\beta)$ είναι παράλληλα, δηλαδή αν και μόνο αν $\det\left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{O\Delta}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} -\gamma & \gamma \\ \beta & -\beta \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \beta\gamma-\beta\gamma=0$, ισχύει.

γ) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ είναι $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ οπότε $M\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2},\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{MB}=\left(\beta-\frac{\beta-\gamma}{2},0-\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=\left(\frac{\beta+\gamma}{2},\frac{\beta-\gamma}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{M\Gamma}=\left(0-\frac{\beta-\gamma}{2},\gamma-\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=\left(\frac{\gamma-\beta}{2},\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}},$$

$$\left|\overrightarrow{M\Gamma}\right|=\sqrt{\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}}.$$

Άρα $\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{M\Gamma}\right|$ οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. Για να δείξουμε ότι είναι και ορθογώνιο αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι κάθετα. Πράγματι έχουμε:

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=\left(\frac{\beta+\gamma}{2},\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\cdot\left(\frac{\gamma-\beta}{2},\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=$$

$$\frac{\gamma^2-\beta^2}{4}+\frac{\beta^2-\gamma^2}{4}=0.$$

Άσκηση 4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{2},\ 3|\vec{\gamma}|=\sqrt{10},\ \vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}\ \text{ και }\ 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$$

α) Να αποδείξετε ότι: i) $\left|\vec{\beta}\right|=3\sqrt{2}$ ii) $3(\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta})=-10$

β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\gamma},\vec{\beta}$.

γ) Να βρείτε το $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$ και $3\vec{\alpha}-\mu\vec{\gamma}$ να είναι κάθετα.

Λύση:

α) i) Έχουμε $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}-3\vec{\gamma}$ άρα $\left|\vec{\beta}\right|=\left|-2\vec{\alpha}-3\vec{\gamma}\right|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|^2=\left|2\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}\right|^2\Leftrightarrow|\vec{\beta}|^2=\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|^2=4\vec{\alpha}^2+6\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+9\vec{\gamma}^2\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|^2=18\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|=3\sqrt{2}$

ii) $3\left(\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}\right)=3\vec{\gamma}\cdot\left(-2\vec{\alpha}-3\vec{\gamma}\right)=-6\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}-9|\vec{\gamma}|^2=-10$

β) $$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\gamma}|\left|\vec{\beta}\right|}=\frac{-\frac{10}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot3\sqrt{2}}=\frac{-10}{3\sqrt{20}}=$$

$$=-\frac{10}{6\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

γ) $(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\perp(3\vec{\alpha}-\mu\vec{\gamma})\Leftrightarrow(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\cdot(3\vec{\alpha}-\mu\vec{\gamma})=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3\vec{\alpha}^2-\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\mu\vec{\gamma}^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow6+\dfrac{10}{9}\mu=0\Leftrightarrow\mu=-\dfrac{27}{5}.$

Άσκηση 5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=\sqrt{5}$, $\left|\vec{\beta}\right|=1$.

Αν $\vec{v}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε:

α) Να βρείτε το λ ώστε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ να είναι ελάχιστο.

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε να δείξετε ότι: i) $\vec{v}\perp\vec{\beta}$ ii) $5\le\vec{\alpha}\cdot\vec{v}\le10$

Λύση:

α) Το μέτρο του $\vec{v}$ είναι ελάχιστο εκεί που $|\vec{v}|^2$ είναι ελάχιστο.

Οπότε $|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)^2 =$

$= \vec{\alpha}^2 + 2\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right) + \lambda^2\vec{\beta}^2 = 5 + 2\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right) + \lambda^2 =$

$= \lambda^2 + 2\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right) + 5,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right) + 5$ παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = -\dfrac{2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)}{2} = -\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)$.

β) Για $\lambda = -\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)$ έχουμε:

$\vec{v}\cdot\vec{\beta} = \left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \lambda|\vec{\beta}|^2 =$

$= \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$, άρα $\vec{v} \perp \vec{\beta}$.

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right) = |\vec{\alpha}|^2 - \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right) =$

$= 5 - \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 = 5 - \left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right)^2 =$

$= 5 - 5\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

Ισχύει $0 \le \sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 5\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \le 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \le 5 - 5\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \le 10 \Leftrightarrow \hat{5} \le \vec{\alpha}\cdot\vec{v} \le 10.$

Άσκηση 6. Θεωρούμε τις ευθείες $(\varepsilon): 2x+y=4(\varepsilon)$ και $(\zeta): 4x-3y=-2$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι συμμετρική της (ε) ως προς την (ζ).

Λύση:

Βρίσκουμε το κοινό σημείο των δύο ευθειών λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ 4x-3(4-2x)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ 10x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Άρα οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Α(1,2). Θεωρούμε σημείο της ε, έστω Β(2,0) και βρίσκουμε το σημείο Δ που είναι το συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία ζ. Τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η ευθεία ΑΔ. Θα βρούμε πρώτα τις συντεταγμένες του σημείου Γ που είναι η προβολή του Β στην ευθεία ζ. Έχουμε $B\Gamma \perp (\zeta)$ άρα

$$\lambda_{B\Gamma}\cdot\lambda_{\zeta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma}\cdot\frac{4}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = -\frac{3}{4}.$$

Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ είναι:

$$y-0 = -\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow 3x+4y=6.$$

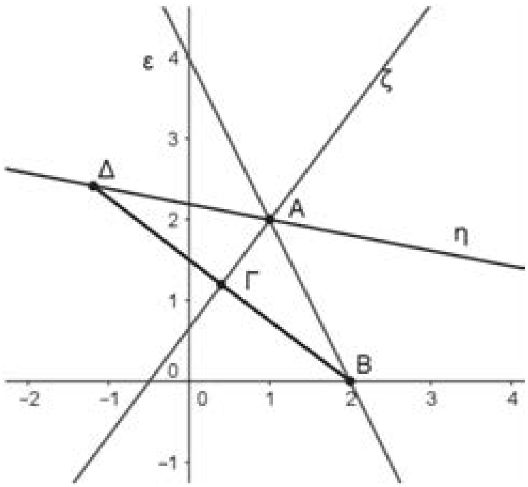
Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6}{5} \\ x=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

Άρα $\Gamma\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{6}{5}\right)$. Το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ επομένως: $x_\Gamma = \dfrac{x_B+x_\Delta}{2}$, $y_\Gamma = \dfrac{y_B+y_\Delta}{2}$

ή $\dfrac{2}{5} = \dfrac{2+x_\Delta}{2}$, $\dfrac{6}{5} = \dfrac{0+y_\Delta}{2}$ ή $x_\Delta = -\dfrac{6}{5}$, $y_\Delta = \dfrac{12}{5}$

Βρίσκουμε τέλος την εξίσωση της ευθείας ΑΔ. Έχουμε $\lambda_{A\Delta} = \dfrac{y_\Delta - y_A}{x_\Delta - x_A} = -\dfrac{2}{11}$. Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι:

$$y-2 = -\frac{2}{11}(x-1) \Leftrightarrow 2x+11y=24.$$



Άσκηση 7. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε Α(–1,2) και Γ(3,1). Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ.

Λύση:

Το κέντρο Κ του τετραγώνου είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ, επομένως έχει συντεταγμένες $K\left(\dfrac{-1+3}{2},\dfrac{2+1}{2}\right)$ ή $K\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$. Η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην διαγώνιο ΑΓ άρα:

$$\lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A}\cdot\lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = 4$$

και διέρχεται από το σημείο Κ, οπότε η εξίσωσή της είναι: $y-\dfrac{3}{2} = 4(x-1) \Leftrightarrow 8x-2y=5$ (1).

Έστω Β(κ, λ) τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση (1), άρα

$8\kappa - 2\lambda = 5$ (2) και ισχύει $\left|\overrightarrow{AK}\right| = \left|\overrightarrow{BK}\right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2} = \sqrt{(1-\kappa)^2+\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4+\dfrac{1}{4}=\kappa^2-2\kappa+1+\dfrac{9}{4}-3\lambda+\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa^2+\lambda^2-2\kappa-3\lambda=1$ (3).

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2),(3).

$$\begin{cases} 8\kappa-2\lambda=5 \\ \kappa^2+\lambda^2-2\kappa-3\lambda=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{8\kappa-5}{2} \\ \kappa^2+\lambda^2-2\kappa-3\lambda=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

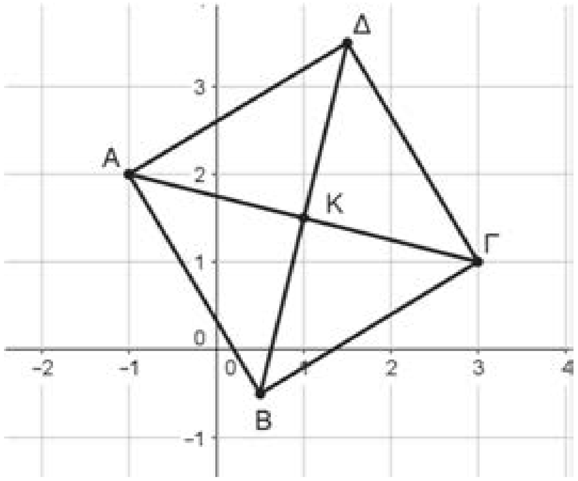
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{8\kappa-5}{2} \\ \kappa^2+\dfrac{(8\kappa-5)^2}{4}-2\kappa-3\dfrac{8\kappa-5}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{8\kappa-5}{2} \\ 68\kappa^2-136\kappa+51=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{8\kappa-5}{2} \\ 4\kappa^2-8\kappa+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{8\kappa-5}{2} \\ \kappa=\dfrac{3}{2} \text{ ή } \kappa=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{7}{2} \\ \kappa=\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \lambda=-\dfrac{1}{2} \\ \kappa=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Οι προϋποθέσεις που πήραμε για το Β είναι ίδιες και για το σημείο Δ άρα έχουμε:

$B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right)$ και $\Delta\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ ή $B\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ και $\Delta\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right)$.



Άσκηση 7. Δίνεται η εξίσωση

$\left(\lambda^2-1\right)x+\left(3\lambda^2-2\lambda-1\right)y-2\lambda^2+2\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει ευθεία.

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ.

γ) Αν το Κ είναι το κέντρο ενός τετραγώνου του οποίου η μία πλευρά βρίσκεται πάνω στην ευθεία $(\varepsilon): 6x-8y-1=0$, να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.

δ) Για $\lambda=0$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν η ευθεία που προκύπτει από την εξίσωση με τη ευθεία $(\zeta): y=2x+6$ και τον άξονα x΄x.

Λύση:

α) Η εξίσωση έχει την μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ και για να παριστάνει ευθεία πρέπει να ισχύει $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ (δηλαδή τα Α,Β να μην μηδενίζονται συγχρόνως). Έχουμε:

$$\begin{cases} \lambda^2-1=0 \\ 3\lambda^2-2\lambda-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1 \\ \lambda=-\dfrac{1}{3} \text{ ή } \lambda=1 \end{cases}$$

άρα για να παριστάνει ευθεία η παραπάνω εξίσωση πρέπει $\lambda\neq 1$.

β) Για $\lambda\neq 1$ η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\lambda^2 x - x+3\lambda^2 y-2\lambda y-y-2\lambda^2+2\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$(x+3y-2)\lambda^2+(2-2y)\lambda-x-y=0 \quad (1).$$

Για να διέρχονται οι ευθείες από το ίδιο σημείο πρέπει να υπάρχουν τιμές των x, y για τις οποίες η (1) αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Αυτό συμβαίνει όταν $x+3y-2=0$ και $2-2y=0$ και $-x-y=0$. Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει $x=-1,\ y=1$. Επομένως οι ευθείες διέρχονται από το σταθερό σημείο $K(-1,1)$.

γ) Υπολογίζουμε την απόσταση του σημείου Κ από την ευθεία $(\varepsilon): 6x-8y-1=0$.

Έχουμε: $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|6\cdot(-1)-8\cdot 1-1|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{15}{10}=\dfrac{3}{2}$

Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι $2\cdot d(K,(\varepsilon))=3$, επομένως το εμβαδόν του είναι 9 τ.μ.

δ) Για $\lambda=0$ προκύπτει η ευθεία (ε), με εξίσωση $y=-x$. Θα βρούμε το κοινό σημείο των ευθειών $(\varepsilon),(\zeta)$ καθώς και τα σημεία στα οποία η ευθείες $(\varepsilon),(\zeta)$ τέμνουν τον άξονα x΄x.

$$\begin{cases} y=-x \\ y=2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6=-x \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases},$$

άρα το κοινό σημείο είναι $A(-2,\ 2)$.

Για $y=0$ στην εξίσωση $y=2x+6$ προκύπτει $x=-3$ επομένως το σημείο είναι $B(-3,\ 0)$ και η ευθεία $y=-x$ διέρχεται από το σημείο $O(0,\ 0)$,

οπότε: $(OAB)=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\right|=$

$\dfrac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}-2 & 2\\ -3 & 0\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}|-6|=3$τ.μ

Τάξη: Γ΄

Η αντίστροφη συνάρτηση

Ελένη Μηλιώτη - Παράρτημα της ΕΜΕ Αργολίδας

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-6x+11,\ x\in R.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται στο R.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο $(-\infty,3]$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

Λύση

Κατ' αρχήν ισχύει ότι:

$f(x)=x^2-6x+11=x^2-6x+9+2=(x-3)^2+2$

α) 1^ος τρόπος. Η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$ αφού ενώ $0\neq 6$ έχουμε $f(0)=f(6)=11$. Συνεπώς δεν αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.

2^ος τρόπος. Έστω $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-3)^2+2=(x_2-3)^2+2\Rightarrow$

$\sqrt{(x_1-3)^2}=\sqrt{(x_2-3)^2}\Rightarrow |x_1-3|=|x_2-3|\Rightarrow$

$x_1-3=x_2-3$ ή $x_1-3=-x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$ ή

$x_1=-x_2+6$. Άρα η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$

β) Έστω τώρα $x_1,x_2\in(-\infty,3]$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-3)^2+\cancel{2}=(x_2-3)^2+\cancel{2}\Rightarrow$

$\sqrt{(x_1-3)^2}=\sqrt{(x_2-3)^2}\Rightarrow |x_1-3|=|x_2-3|\Rightarrow$

$x_1-3=x_2-3\Rightarrow x_1=x_2$ Άρα η f είναι $1-1$.

Για να βρούμε την αντίστροφη λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x με $x\in(-\infty,3]$:

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+2=y\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2=y-2,\ y\ge 2\\ x\le 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x-3|=\sqrt{y-2}, y\ge 2\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=\sqrt{y-2}, y\ge 2\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=3-\sqrt{y-2}, y\ge 2\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-\sqrt{y-2}, y\ge 2\\ 3-\sqrt{y-2}\le 3,\ \text{ισχύει}\end{cases},\ (1)$$

Επομένως, $f^{-1}(y)=3-\sqrt{y-2},\ y\ge 2$

ή $f^{-1}(x)=3-\sqrt{x-2},\ x\ge 2$.

Σημείωση:

Από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $y\ge 2$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει, ως προς x, μοναδική λύση στο $(-\infty,3]$ οπότε η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$, $x\in R$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο R και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x^2-2x)=x$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ μπορεί να πάρει την μορφή $f(x)=(x-2)^3$.

Έστω $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-2)^3=(x_2-2)^3\Rightarrow$

$x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι $1-1$ οπότε αντιστρέφεται στο R.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x με $x\in R$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow (x-2)^3=y$$

$$\Leftrightarrow x-2=\sqrt[3]{y},\ y\ge 0 \text{ ή } x-2=-\sqrt[3]{-y},\ y<0$$

$$\Leftrightarrow x=2+\sqrt[3]{y},\ y\ge 0 \text{ ή } x=2-\sqrt[3]{-y},\ y<0.$$

Άρα: $f^{-1}(x)=\begin{cases}2+\sqrt[3]{x}, & x\ge 0\\ 2-\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}$

β) Με $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f^{-1}(x^2-2x)=x\Leftrightarrow f(x)=x^2-2x\Leftrightarrow$$

$$(x-2)^3=x^2-2x\Leftrightarrow (x-2)^3-x(x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left[(x-2)^2-x\right]=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2-5x+4)=0\Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \text{ ή } x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=4$$

Άσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}x^3+2, & x\le 0\\ 4-x, & x>0\end{cases}\quad \text{και}\quad g(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x\le 1\\ \ln x+1, & x>1\end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Επισήμανση – Μεθοδολογία:

Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου ακολουθούμε τα επόμενα βήματα.

- Αποδεικνύουμε ότι κάθε κλάδος της f είναι 1–1
- Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σύνολα τιμών για κάθε κλάδο της
- Αν τα σύνολα τιμών έχουν κοινά στοιχεία, τότε υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$, που σημαίνει ότι η f δεν είναι 1–1.

Λύση

α) Για κάθε κλάδο έχουμε:

Για $x \le 0$ η $f(x)=x^3+2$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$ στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, με $f(\Delta_1)=(-\infty,2]$ αφού με $x\in\Delta_1$ έχουμε:

$$x\le 0 \Leftrightarrow x^3\le 0 \Leftrightarrow x^3+2\le 2 \Leftrightarrow f(x)\le 2$$

Για $x>0$ η $f(x)=4-x$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$ στο $\Delta_2=(0,+\infty)$, με $f(\Delta_2)=(-\infty,4)$ αφού με $x\in\Delta_2$ έχουμε:

$$x>0 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow 4-x<4 \Leftrightarrow f(x)<4$$

Παρατηρούμε ότι $f(\Delta_1)\cap f(\Delta_2)\neq\varnothing$. Άρα, υπάρχουν $x_1\le 0<x_2$ με $f(x_1)=f(x_2)$, οπότε η f δεν είναι 1–1.

2^{ος} τρόπος: Παρατηρούμε ότι $f(0)=f(2)$, οπότε η f δεν είναι «1-1» δηλαδή δεν αντιστρέφεται.

β) Για $x\le 1$ η $g(x)=-\sqrt{1-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1–1 στο $\Delta_1=(-\infty,1]$. Για $x\in\Delta_1$ έχουμε:

$$g(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{1-x}=y\\ x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-x=y^2,\ y\le 0\\ x\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-y^2,\ y\le 0\\ x\le 1\ (\text{ισχύει})\end{cases}$$

Άρα $g(\Delta_1)=(-\infty,0]$

Για $x>1$ η $g(x)=\ln x+1$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$ στο $\Delta_2=(1,+\infty)$. Για $x\in\Delta_2$ έχουμε:

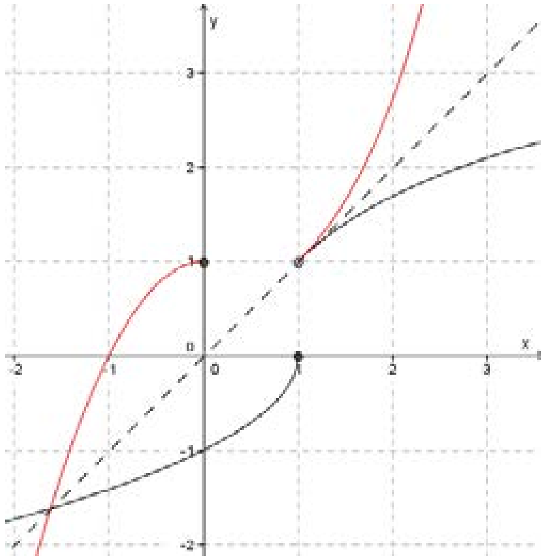
$$g(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases}\ln x+1=y\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln x=y-1\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=e^{y-1}\\ x>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=e^{y-1}\\ e^{y-1}>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=e^{y-1}\\ y>1\end{cases}$$

Άρα $g(\Delta_2)=(1,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $g(\Delta_1)\cap g(\Delta_2)=\varnothing$, άρα η συνάρτηση g είναι $1-1$. Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση είναι: $g^{-1}(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\le 0\\ e^{x-1}, & x>1\end{cases}$

Παρακάτω βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης g (μαύρο χρώμα) και της συνάρτησης g^{-1} (κόκκινο χρώμα).



Άσκηση 4

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2-x &, \ x\le 1\\ 2\lambda+3-x, & x>1\end{cases} \text{ να αντιστρέφεται.}$$

Λύση

Για $x\le 1$ η $f(x)=\lambda^2-x$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$ στο $\Delta_1=(-\infty,1]$, με $f(\Delta_1)=[\lambda^2-1,+\infty)$, αφού με $x\in\Delta_1$ έχουμε:

$$x\le 1 \Leftrightarrow -x\ge -1 \Leftrightarrow \lambda^2-x\ge\lambda^2-1 \Leftrightarrow f(x)\ge\lambda^2-1$$

Για $x>1$ η $f(x)=2\lambda+3-x$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$ στο $\Delta_2=(1,+\infty)$, με $f(\Delta_2)=(-\infty,2\lambda+2)$, αφού με $x\in\Delta_2$ έχουμε:

$$x>1 \Leftrightarrow -x<-1 \Leftrightarrow 2\lambda+3-x<2\lambda+3-1 \Leftrightarrow f(x)<2\lambda+2$$

Η f αντιστρέφεται μόνο όταν $f(\Delta_1)\cap f(\Delta_2)=\varnothing$, ισοδύναμα:

$2\lambda+2\le\lambda^2-1 \Leftrightarrow \quad \lambda^2-2\lambda-3\ge 0 \Leftrightarrow \lambda\le -1$ ή $\lambda\ge 3$

Άσκηση 5

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις αληθείς ή ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α) Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

β) Αν μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=x$.

γ) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως

φθίνουσα τότε η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι πάντοτε ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=x$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και 1–1 τότε η f^{-1} είναι συνεχής.

Λύση

α) Αληθής.

Απόδειξη: Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, σύνολο τιμών f(A) και γνησίως μονότονη, τότε η f είναι 1–1 οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού f(A), σύνολο τιμών Α και ισχύουν:

$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, $f(f^{-1}(y))=y$, $y\in f(A)$

Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ότι για κάθε $y_1,y_2\in f(A)$ ισχύει:

$y_1<y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ Έστω $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$ Έχουμε: $y_1<y_2\Rightarrow$

$f(f^{-1}(y_1))<f(f^{-1}(y_2))\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

Ομοίως αποδεικνύεται αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αληθής.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $x_0\in A$ ώστε $f^{-1}(x_0)=f(x_0)$ και έστω ότι $f(x_0)\neq x_0$. Υποθέτουμε ότι $f(x_0)>x_0$ (1). Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (όπως αποδείχθηκε στο α ερώτημα) οπότε $(1)\Rightarrow f^{-1}(f(x_0))>f(x_0)\Rightarrow x_0>f(x_0)$, άτοπο.

Άρα, $f(x_0)=x_0$ Όμοια αν $f(x_0)<x_0$

Αντίστροφα, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης $f(x)=x$. Ισχύει: $f(x_0)=x_0\Rightarrow x_0=f^{-1}(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0)=f^{-1}(x_0)$ επομένως το x_0 είναι λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x)=f(x)$.

γ) Ψευδής.

Η συνάρτηση $f(x)=-x+2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^{-1}(x)=-x+2$, $x\in\mathbb{R}$

Η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει άπειρες λύσεις και δεν είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=x$ που έχει μοναδική λύση την $x=1$.

δ) Ψευδής

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ x-1, & 2<x\le 3\end{cases}$ είναι συνεχής, αντιστρέφεται με

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ x+1, & 1<x\le 2\end{cases},$$

η οποία δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Άσκηση 6

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $|f(x)-f(y)|\ge\frac{1}{\kappa}|x-y|$,

$\forall x,y\in\mathbb{R}$, (1) $\kappa\in(0,1)$. Να δείξετε ότι:

α) Η f αντιστρέφεται.

β) $|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\le\kappa|x-y|$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)

γ) Η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

δ) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α) Έστω $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε

$|f(x_1)-f(x_2)|\ge\frac{1}{\kappa}|x_1-x_2|\Rightarrow\frac{1}{\kappa}|x_1-x_2|\le 0\Rightarrow x_1=x_2$

αφού $\kappa\in(0,1)$. Δηλαδή η f είναι 1–1, οπότε αντιστρέφεται.

β) Επειδή $f(R)=R$ και η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ θέτουμε $f^{-1}(x)$ στο x και $f^{-1}(y)$ στο y οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

γ) Έστω $x_0\in f(R)$ θα δείξουμε $\lim\limits_{x\to x_0}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$.

Στη σχέση (2) θέτουμε $y=x_0$.

$|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)|\le\kappa|x-x_0|\Rightarrow$

$-\kappa|x-x_0|\le f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\le\kappa|x-x_0|$. Όμως $\lim\limits_{x\to x_0}(-\kappa|x-x_0|)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa|x-x_0|)=0$. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0}(f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0))=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$

δ) Έστω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ έχει δύο ρίζες $x_1\neq x_2$, τότε $f^{-1}(x_1)=x_1$ και $f^{-1}(x_2)=x_2$.

Θέτουμε στην σχέση (2): $x=x_1$ και $y=x_2$ οπότε:

$|f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)|\le\kappa|x_1-x_2|\Rightarrow$

$|x_1-x_2|\le\kappa|x_1-x_2|\Rightarrow\kappa\ge 1$ άτοπο.

Άρα, η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f^3(x)+5f(x)=x+5$, για κάθε $x\in R$ (1).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(2e^{x-3}+x+8)=2$.

Λύση

α) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ θα δείξουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Για $x = x_0$ στην (1) έχουμε:

$f^3(x_0) + 5f(x_0) = x_0 + 5$ (2). Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει:

$$f^3(x) - f^3(x_0) + 5f(x) - 5f(x_0) = x - x_0 \Rightarrow$$

$$\left[f(x) - f(x_0)\right]\left[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5\right] = x - x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5}$$

(αφού $f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5 > 0$)

Οπότε:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 5}\right| \le$$

$$\le \frac{|x - x_0|}{5} \Leftrightarrow -\frac{|x - x_0|}{5} \le f(x) - f(x_0) \le \frac{|x - x_0|}{5}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{|x - x_0|}{5} = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{|x - x_0|}{5}\right) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$ ή ισοδύναμα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ 5f(x_1) = 5f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + 5f(x_1) = f^3(x_2) + 5f(x_2) \Rightarrow$$

$x_1 + 5 = x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f είναι $1-1$ επομένως αντιστρέφεται. Η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και για να βρούμε τον τύπο της θέτουμε $f(x) = y$ στη σχέση (1) οπότε: $y^3 + 5y = x + 5 \Leftrightarrow x = y^3 + 5y - 5$ άρα

$f^{-1}(y) = y^3 + 5y - 5$, $y \in R$

ή $f^{-1}(x) = x^3 + 5x - 5 \quad x \in R$

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$, αφού οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι γνησίως αύξουσες σύμφωνα με τις προτάσεις που αποδείξαμε στην άσκηση 5. Είναι:

$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 5x - 5 = x \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$. Άρα το κοινό σημείο είναι το (1, 1).

δ) $f\left(2e^{x-3} + x + 8\right) = 2 \Leftrightarrow 2e^{x-3} + x + 8 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow$

$2e^{x-3} + x + 8 = 13 \Leftrightarrow 2e^{x-3} + x - 5 = 0$

Η εξίσωση έχει προφανή λύση την $x = 3$.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = 2e^{x-3} + x - 5$, $x \in R$ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα οπότε και $1-1$, οπότε η λύση $x = 3$ είναι μοναδική.

Σημαντικές και αξιόλογες δωρεές

Πολλές φορές βλέπεις βιβλιοθήκες με αξιόλογα βιβλία, που είναι μεστές από περιεχόμενο και σωστή **ιστορική εξέλιξη** αναφοράς, σε δρώμενα που είχαν και εξακολουθούν να έχουν **σημασία**. Έτσι, χωρίς να το θέλεις, νοιώθεις ότι παρακολουθείς μέσα από αυτό, κάθε τι που σημάδεψε το επίκαιρο, το χρήσιμο, το ουσιαστικό, το ζητούμενο. Ειδικά για την εκπαίδευση και τα Μαθηματικά είναι ένα βήμα **προόδου** και ένας πολύτιμος **πλούτος** για τις επόμενες γενιές

Δωρεά βιβλίων από την Οικογένεια του Δημήτρη Καραγιώργου

Η οικογένεια του εκλιπόντος εκλεκτού μέλους της ΕΜΕ Δημήτρη Καραγιώργου, μόνιμου παρέδρου του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και συγγραφέα πολλών βιβλίων, δώρισε στην ΕΜΕ τις παρακάτω εκδόσεις.

Περιλαμβάνει βιβλία Μαθηματικών και βιβλία ειδικής διδακτικής και παιδαγωγικών. Ξεχωρίζουν από τα **(62)** βιβλία σε ελληνική γλώσσα, από το **1950** και ύστερα, όπως των Μαντά, Ζήβα, Καζαντζή, Κανέλλου, Κωστάκη, Εξαρχάκου, Μάγειρα, Polya, Ν. Κριτικού, Birkhoff, Gardner κ.λ.π. και **(5)** δικά του βιβλία σε θέματα διδακτικής και στατιστικής. Επίσης **(110)** ξενόγλωσσα κυρίως σε θέματα εκπαίδευσης, Μαθηματικών, ειδικής διδακτικής, Παιδαγωγικά, Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών

Δωρεά βιβλίων από τον Παναγιώτη Γ. Μαυραγάνη

Από τον συνάδελφο **Παναγιώτη Γ. Μαυραγάνη** λάβαμε τα παρακάτω βιβλία, ανάμεσα στα οποία υπάρχουν και πολλές παλιές και ιδιαίτερα αξιόλογες εκδόσεις.

Περιλαμβάνει βιβλία Μαθηματικών από το **1918** και ύστερα σε θέματα κυρίως Στερεομετρίας, Προβολικής Γεωμετρίας, Μετεωρολογίας, Τριγωνομετρίας, Άλγεβρας, κ.λ.π. με πιο χαρακτηριστικά αυτά των Αιγινήτη, Κανέλλου, Gask, Thomson, Λαδόπουλου, Herzberg, Σακελλαρίου, Κυπάρισου Στέφανου, Βαρόπουλου, Πάλλα, Χατζιδάκη, κ.λ.π

Αναλυτικές πληροφορίες: www.hms.gr

Θέματα αντίστροφης συνάρτησης

Χρήστος Π. Τσιφάκης, Μαθηματικός

αφιερωμένο στην μνήμη του φίλου Θωμά Ραϊκόφτσαλη.

Άσκηση 1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f^3(x)+3f(x)+x=0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$.

γ) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} και δίνεται από τον τύπο $f^{-1}(x)=-x^3-3x$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{f^{-1}(x)}$ και ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)+4}{x^2-1}$

Β. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R και ότι η συνάρτηση g με $g(x)=e^{f(x)}+f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

β) Να βρείτε τον αριθμό $g^{-1}(1)$.

Λύση

Α. α) Για $x=0$ η δοσμένη σχέση μας δίνει:
$f^3(0)+3f(0)+0=0\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+3\right)=0\Leftrightarrow f(0)=0.$

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \left.\begin{matrix} f^3(x_1)=f^3(x_2)\\ 3f(x_1)=3f(x_2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$f^3(x_1)+3f(x_1)=f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow$$

$-x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$, άρα η συνάρτηση είναι $1-1$.

γ) Η συνάρτηση f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται και αφού έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ μπορούμε στην αρχική σχέση να βάλουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και να αξιοποιήσουμε την ισότητα $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$.

Είναι: $\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)^3+3f\left(f^{-1}(x)\right)+f^{-1}(x)=0\Rightarrow$

$x^3+3x+f^{-1}(x)=0\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^3-3x, x\in\mathbb{R}$

δ) i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{-x^3-3x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}\cdot\dfrac{1}{(-x^2-3)}=1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^3-3x+4}{x^2-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(-x^2-x-4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2-x-4}{x+1}=-3$

Β. α) 1ος τρόπος: Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

Τότε έχουμε:

$-x_1>-x_2\Rightarrow f^3(x_1)+3f(x_1)>f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow f^3(x_1)-f^3(x_2)+3f(x_1)-3f(x_2)>0\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\cdot\left(f^2(x_1)-f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+3\right)>0$

$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>0\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, γιατί αν θεωρήσουμε την παράσταση

$f^2(x_1)-f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+3$ ως τριώνυμο του $y=f(x_1)$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=f^2(x_2)-4f^2(x_2)-12=-3f^2(x_2)-12<0$$

οπότε $f^2(x_1)-f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+3>0$.

2ος τρόπος: $f^3(x)+3f(x)+x=0\Leftrightarrow$

$f^3(x)+3f(x)=-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $φ(x)=-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε την $h(x)=x^3+3x, x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $h\left(f(x)\right)=f^3(x)+3f(x)$ και:

$$x_1<x_2\Rightarrow\left.\begin{matrix}{x_1}^3<{x_2}^3\\ 3x_1<3x_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow {x_1}^3+3x_1<{x_2}^3+3x_2\Rightarrow$$

$h(x_1)<h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα με $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow$

$h\left(f(x_1)\right)>h\left(f(x_2)\right)\overset{h<}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{f\ γν.φθιν}{\Rightarrow}\left.\begin{matrix}f(x_1)>f(x_2)\\ -x_1>-x_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}e^{f(x_1)}>e^{f(x_2)}\\ f(x_1)>f(x_2)\\ -x_1>-x_2\end{matrix}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι και $1-1$, άρα ορίζεται η g^{-1}. Για $x=0$ έχουμε $g(0)=e^{f(0)}+f(0)-0=e^0=1$, άρα $g^{-1}(1)=0$.

Άσκηση 2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f(x)+f(-x)=2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to α}f(x)=α>0$ και $\lim\limits_{x\to -α}f(x)=1$, να

βρεθεί το α.

γ) Αν $\lim_{x\to 2} f(x)=1$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 4} f(x)$

δ) Να δείξετε ότι κάθε συνάρτηση $g(x)=x^2+\lambda x$, $x\in R$ και $\lambda\in R$, επαληθεύει την αρχική συνθήκη.

Λύση α) Στις συναρτησιακές σχέσεις της μορφής ($f(x+y)=......$, για κάθε $x,y\in R$) συνήθως το μυστικό είναι να βρούμε το $f(0)$. Αφού η σχέση ισχύει για κάθε $x,y\in R$, θέτουμε όπου $x=y=0$ και έχουμε:

$$f(0+0)=f(0)+f(0)+2\cdot 0\cdot 0 \Leftrightarrow f(0)=0$$

Στη συναρτησιακή σχέση θέτουμε τώρα όπου y το $-x$ και έχουμε: $f(x+(-x))=f(x)+f(-x)+2x(-x)\Rightarrow$

$f(0)=f(x)+f(-x)-2x^2\Rightarrow$

$f(x)+f(-x)-2x^2=0\Rightarrow f(x)+f(-x)=2x^2$

β) Όταν σε άσκηση μας δίνεται το όριο $\lim_{x\to k} f(x)$ και μας ζητούν να βρούμε το $\lim_{x\to m} f(x)$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να κάνουμε αλλαγή στη μεταβλητή. Έχουμε ότι $\lim_{x\to \alpha} f(x)=\alpha>0$.

Αν θέσουμε όπου x το $-u$ τότε, αφού το $x\to\alpha$ το $-x\to-\alpha$ οπότε το $u\to-\alpha$ και έχουμε:

$$\alpha=\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{u\to-\alpha} f(-u)\overset{f(-u)=2u^2-f(u)}{=}$$

$$\lim_{u\to-\alpha}\left[2u^2-f(u)\right]=2\alpha^2-\lim_{u\to-\alpha} f(u).$$

Άρα $\lim_{u\to-\alpha} f(u)=2\alpha^2-\alpha$ και επειδή $\lim_{x\to-\alpha} f(x)=1$, έχουμε τελικά $2\alpha^2-\alpha=1\Leftrightarrow 2\alpha^2-\alpha-1=0\Leftrightarrow$

$\alpha=1$ ή $\alpha=-\frac{1}{2}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=1$.

γ) Θέλουμε να βρούμε το $\lim_{x\to 4} f(x)$ το οποίο γράφεται $\lim_{x\to 4} f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$. Με τη βοήθεια της αρχικής σχέσης έχουμε $\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4} f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=$

$$\lim_{x\to 4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\right]=$$

$\lim_{x\to 4}\left[2f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\right]$. Θέτουμε όπου $\frac{x}{2}$ το u, οπότε αφού το $x\to 4$ το $u\to 2$ και έχουμε

$$\lim_{x\to 4}\left[2f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\right]=\lim_{u\to 2}\left[2f(u)+2u^2\right]=10$$

Άρα $\lim_{x\to 4} f(x)=10$.

δ) $g(x+y)=(x+y)^2+\lambda(x+y)=$

$x^2+2xy+y^2+\lambda x+\lambda y=$

$x^2+2xy+y^2+\lambda x+\lambda y=g(x)+g(y)+2xy$

Άσκηση 3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της με $f(0)=e^2$, $f(1)=e^4$ και για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f(x)>0$,

ii. $g(x)=\ln(f(x))$, για κάθε $x\in[0,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα τουλάχιστον σημείο $M_o(x_o,3)$ με $x_o\in(0,1)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi)=f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Λύση α) Η συνάρτηση $g(x)=\ln(f(x))$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για $x=0$ έχουμε $g(0)=\ln(f(0))=\ln(e^2)=2$ και για $x=1$ έχουμε $g(1)=\ln(f(1))=\ln(e^4)=4$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 3 περιέχεται μεταξύ των $g(0)$ και $g(1)$, άρα απ' το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)=3$, δηλαδή η ευθεία $y=3$ τέμνει την C_g σε ένα τουλάχιστον σημείο.

β) Αφού η συνάρτηση $g(x)=\ln(f(x))$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ θα παρουσιάζει μέγιστη M και ελάχιστη τιμή m στο $[0,1]$, άρα θα έχουμε $m\le g(x)\le M$ για κάθε $x\in[0,1]$. Για $x=\frac{1}{3}$ έχουμε $m\le g\left(\frac{1}{3}\right)\le M\Rightarrow m\le\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\le M$ (1).

Για $x=\frac{2}{3}$ έχουμε $m\le g\left(\frac{2}{3}\right)\le M\Rightarrow$

$m\le\ln\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)\le M$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$2m\le\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\ln\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)\le 2M\Rightarrow$$

$$m\le\frac{\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2}\le M \quad (3).$$

Από την σχέση (3), από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in (0,1)$

ώστε $g(\xi)=\dfrac{\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2} \Rightarrow$

$\ln\left(f(\xi)\right)=\dfrac{\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2} \Rightarrow$

$\ln\left(f^2(\xi)\right)=\ln\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \Rightarrow f^2(\xi)=f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2020 – 2021

Θέμα Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση $f: A \to R$ ονομάζεται $1-1$; **[Μον: 4]**

Α2. Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.»

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως **Αληθής** ή **Ψευδής** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **[Μον: 1 + 4]**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. **[Μον: 2x8=16]**

α) Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in R$, ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση (– f) είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι $1-1$ στο R, τότε και η συνάρτηση gof είναι $1-1$ στο R.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της.

ε) Η συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της Α, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$ είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

στ) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ μέγιστο, το $f(x_o)$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \le f(x_o)$.

ζ) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

η) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Θέμα Β

Δίνονται οι αντιστρέψιμες στο R συναρτήσεις f, g με σύνολο τιμών το R για τις οποίες ισχύει ότι: $f^{-1}(g(x)+2)=4-x$ και

$g^{-1}(8-2x-f(4-x))=x$ για κάθε $x \in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+1,\ x \in R$ και $g(x)=3-x,\ x \in R$. **[Μον: 10]**

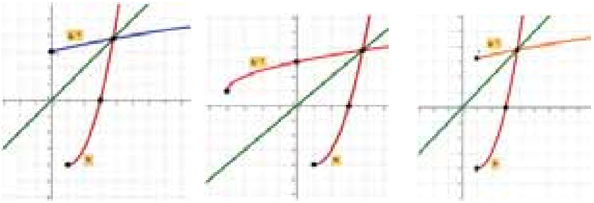
Β. Ορίζουμε την $h(x)=-(f\cdot g)(x)$ με $x \ge 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία:

- Η C_h τέμνει τον άξονα $x'x$
- Η C_h τέμνει τον άξονα $y'y$.

γ. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και τα στοιχεία από τα προηγούμενα ερωτήματα, να αναφέρετε ποιο από τα παρακάτω σχήματα 1, 2, ή 3 νομίζετε ότι είναι αυτό που δείχνει τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων h και h^{-1}, δικαιολογώντας την απάντηση σας.



σχήμα 1 σχήμα 2 σχήμα 3

[Μον: 15]

Θέμα Γ

Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις με

$f(x)=x+e^x-1$ και $g(x)+e^{g(x)}=x+1,\ x \in R$.

Γ1. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τον άξονα xx' **[Μον: 4]**

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R. **[Μον: 5]**

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $(gof)(x)>0$. **[Μον: 7]**

Γ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της g^{-1}. **[Μον: 9]**

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. **[Μον: 7]**

ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1$. **[Μον: 8]**

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$e^{x^2}-e^{x+2}>\ln\left(\dfrac{x+3}{x^2+1}\right)$. **[Μον: 10]**

Από τη γεωμετρική εποπτεία στην Ανάλυση

Προκλήσεις για διερευνητική διδασκαλία και μάθηση

Δημήτρης Ντρίζος, πρώην Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Προλογικό σημείωμα

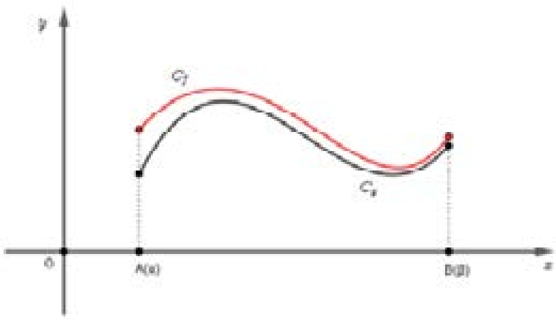
Στο άρθρο αυτό η γεωμετρική εποπτεία δεν εισάγεται με σκοπό να ερμηνεύσει μια μαθηματική πρόταση μετά από την απόδειξή της, αλλά κυρίως για να συμβάλλει εξαρχής στην **επινόηση κάποιου επιχειρήματος** που θα αιτιολογεί την κεντρική ιδέα της πρότασης ή της άσκησης και, επιπλέον, να μας δίνει και κάποιες ιδέες για την απόδειξή τους.

Πριν από τη φάση της επινόησης και της τελικής διατύπωσης ενός ερωτήματος, μιας άσκησης ή μιας δραστηριότητας προηγείται η φάση του στοχασμού για τον εντοπισμό των κομβικών συνδέσεων και τη σύλληψη των ιδεών που οδηγούν στη ***μαθηματική δημιουργία***. Και σ' αυτήν την πορεία προς τη *δημιουργία* η γεωμετρική εποπτεία παίζει έναν σημαντικό ρόλο[1] τον οποίο θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε αξιοποιώντας ασκήσεις και προβληματισμούς που προσφέρονται στην ανάπτυξη αυτού του άρθρου.

Ένας προβληματισμός για συζήτηση

Στον πίνακα της τάξης, ο καθηγητής που δίδασκε Μαθηματικά Γ' Λυκείου[2], σχεδίασε τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δύο συναρτήσεων f και g που ήταν ορισμένες και συνεχείς σε κλειστό διάστημα [α,β], κατά τρόπο που η C_f να βρίσκεται ελάχιστα πιο πάνω από την C_g για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. (Σχ.1)

Και το ερώτημα που έθεσε ήταν το εξής: Θα μπορούσαμε να μετατοπίσουμε την C_g κατακόρυφα κατά τι προς τα πάνω, χωρίς όμως αυτή να "ακουμπήσει" την C_f ;



Σχήμα 1

Ακολούθησε διάλογος γύρω από το ερώτημα: κάποιοι μαθητές αυθόρμητα απάντησαν θετικά, ενώ άλλοι κράτησαν επιφυλάξεις.

Στη συνέχεια ο καθηγητής, περνώντας στο επόμενο βήμα του σχεδίου του, πρότεινε στους μαθητές να ασχοληθούν με την παρακάτω άσκηση 1. Ήθελε μέσα από αυτήν να δοθεί έμμεσα και η απάντηση στο ερώτημα που έθεσε, τεκμηριωμένη στο πλαίσιο της Ανάλυσης.

Άσκηση 1

Για δύο συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$f(x) > g(x) \text{ για κάθε } x \in [\alpha,\beta]$$

α) **Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:**

$$f(x) - f(x_0) \geq g(x) - g(x_0) \text{ για κάθε } x \in [\alpha,\beta]$$

β) **Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό $r \in (0, f(x_0) - g(x_0))$ ισχύει:**

$$f(x) > g(x) + r \text{ για κάθε } x \in [\alpha,\beta].$$

Απόδειξη

α) Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x),\ x \in [\alpha,\beta]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής με θετικές τιμές στο $[\alpha,\beta]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία ελάχιστη τιμή έστω ίση με m, $m > 0$. Δηλαδή, υπάρχει

[1] Στην πορεία προς τη *μαθηματική δημιουργία* σημαντικό ρόλο παίζει και η *διαίσθηση* που βασίζεται κυρίως στην εποπτεία (κατά τον Richard Courant, η έλλειψη της εξάρτησης των αποδείξεων από τη διαίσθηση οδηγεί σε "μαθηματική ατροφία").
Για τον ρόλο της *διαίσθησης* στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους δείτε την βιβλιογραφική πηγή [3] του παρόντος άρθρου.

[2] Τα ερωτήματα που εξετάζουμε σε αυτό το άρθρο τα συζητήσαμε διεξοδικά με μαθητές θετικού προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου στο 3ο ΓΕΛ Τρικάλων, το σχολικό έτος 2019-2020.

$x_0 \in [\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει $h(x) \geq m$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, όπου $m = h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$

Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $h(x) \geq m \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq f(x_0) - g(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq g(x) - g(x_0)$

β) Για κάθε $r \in (0, f(x_0) - g(x_0))$, δηλαδή για κάθε r με $0 < r < f(x_0) - g(x_0)$, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε $f(x) - g(x) \geq f(x_0) - g(x_0) > r$

Άρα $f(x) - g(x) > r$ και ισοδύναμα $f(x) > g(x) + r$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Σχόλιο 1

Η σχέση $f(x) > g(x) + r$ που αποδείξαμε στο ερώτημα β) εποπτικά μας λέει ότι, δεδομένων των υποθέσεων της άσκησης, μπορούμε να μετατοπίσουμε την C_g κατακόρυφα προς τα πάνω κατά r, χωρίς η C_g να ακουμπήσει την C_f.

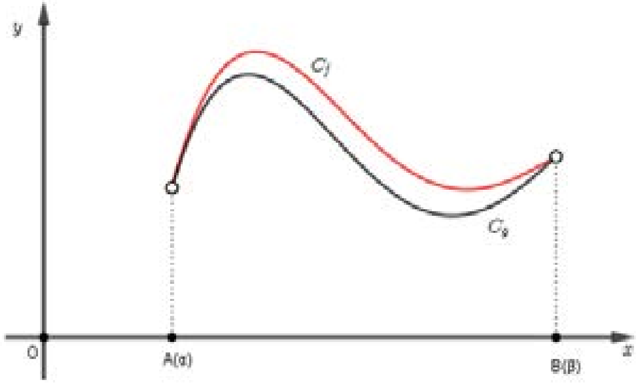
Σχόλιο 2

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ εκφράζει (μετράει) την κατακόρυφη απόσταση των σημείων των C_f και C_g, δηλαδή των σημείων τους με την ίδια τετμημένη.

Νέα ερωτήματα

Αν στον παραπάνω προβληματισμό αντικαθιστούσαμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ με το διάστημα (α,β) κατά τρόπο που $\lim_{x\to\alpha^+}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to\beta^-}(f(x)-g(x)) = 0$, θα μπορούσαμε τότε να μετατοπίσουμε την C_g κατακόρυφα κατά τι προς τα πάνω, χωρίς αυτή να "ακουμπήσει" την C_f; (Σχ.2)

Ποια θα ήταν η απάντηση αν αντικαθιστούσαμε το $[\alpha,\beta]$ με $[\alpha,\beta)$ ή με $(\alpha,\beta]$ ή με διάστημα που ένα τουλάχιστον από τα άκρα του είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$;



Σχήμα 2

Ας εξετάσουμε ενδεικτικά την περίπτωση κατά την οποία οι συναρτήσεις f και g ορίζονται και είναι συνεχείς σε διάστημα $(\alpha,\beta]$ με $\lim_{x\to\alpha^+}(f(x)-g(x)) = 0$, δηλαδή $\lim_{x\to\alpha^+} h(x) = 0$, όπου $h(x) = f(x) - g(x)$ με $x \in (\alpha,\beta]$.

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει θετικός r, ώστε $f(x) > g(x) + r$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta]$.

Τότε έχουμε $f(x) > g(x) + r \Rightarrow h(x) > r \Rightarrow \lim_{x\to\alpha^+} h(x) \geq \lim_{x\to\alpha^+} r \Rightarrow 0 \geq r$, που είναι άτοπο.

Επομένως, στο πλαίσιο του προβληματισμού που θέσαμε στην αρχή αυτού του άρθρου, αν θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις f και g ορίζονται και είναι συνεχείς σε διάστημα $(\alpha,\beta]$ με $\lim_{x\to\alpha^+}(f(x)-g(x)) = 0$, τότε δεν μπορούμε να μετατοπίσουμε την C_g κατά τι προς τα πάνω, χωρίς αυτή (η C_g) να μην "ακουμπήσει" την C_f.

Άσκηση 2

Σε επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο με κέντρο $K(\alpha,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, και ακτίνα ρ. Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha-\rho) = f(\alpha+\rho) = 0$ και η γραφική της παράσταση έχει με τον κύκλο τουλάχιστον ένα ακόμη κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$ τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι κάθετες.

Σχόλιο

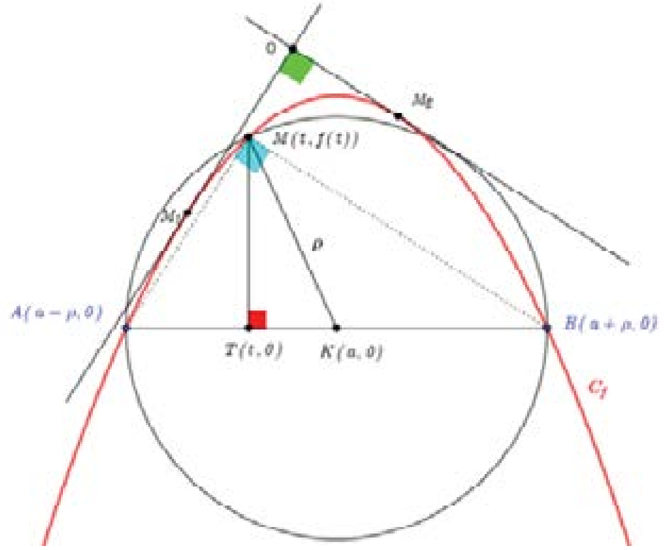
Πριν αποδείξουμε την άσκηση 2 με διαφορικό λογισμό, σας προτείνουμε να δείτε προσεκτικά το σχήμα 3, όπου δίνεται εποπτικά η λύση "*χωρίς λόγια*".

Η κεντρική ιδέα της άσκησης βασίζεται στις εξής γεωμετρικές προτάσεις:

α) κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή, και β) δύο ευθείες παράλληλες, μία προς μία, προς δύο άλλες που τέμνονται κάθετα είναι και αυτές κάθετες μεταξύ τους.

Απόδειξη

Από την υπόθεση $f(\alpha-\rho)=f(\alpha+\rho)=0$ παίρνουμε ότι η γραφική παράσταση C_f της f έχει με τον κύκλο κοινά τα σημεία $A(\alpha-\rho,0)$ και $B(\alpha+\rho,0)$, που είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου και ανήκουν στον άξονα $x'x$.



Σχήμα 3

Έστω $M(t,f(t))$ ένα άλλο κοινό σημείο της C_f με τον κύκλο, διαφορετικό των A και B, και $T(t,0)$ η προβολή του σημείου M πάνω στη διάμετρο AB.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[\alpha-\rho,t]$ και $[t,\alpha+\rho]$. Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha-\rho,t)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(t,\alpha+\rho)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(t)-f(\alpha-\rho)}{t-(\alpha-\rho)}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{f(t)}{\rho-(\alpha-t)}$, (1)

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha+\rho)-f(t)}{(\alpha+\rho)-t}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{-f(t)}{\rho+(\alpha-t)},\quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{-f^2(t)}{\rho^2-(\alpha-t)^2}$, (3)

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο MTK έχουμε $(KM)^2-(KT)^2=(MT)^2$, δηλαδή $\rho^2-(\alpha-t)^2=f^2(t)$, (4)

Από την (3) λόγω της (4) παίρνουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=-1$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της $(\xi_1,f(\xi_1))$ και $(\xi_2,f(\xi_2))$ είναι κάθετες.

Ερώτημα

Να εξετάσετε την ειδική περίπτωση που το M ταυτίζεται με το μέσον του άνω ημικυκλίου που απεικονίζεται στο σχήμα 3. Η θεώρηση αυτή επηρεάζει, και πώς, την προηγούμενη απόδειξη;

Απάντηση

Στην περίπτωση αυτή η προβολή του M στον άξονα $x'x$ ταυτίζεται με το κέντρο K του κύκλου, οπότε δεν ορίζεται τρίγωνο MTK καθώς το T θα συμπίπτει με το K, και θα έχουμε:

$t=\alpha$ και $f(t)=\rho$. Τότε οι (1) και (2) γίνονται $f'(\xi_1)=\dfrac{f(t)}{\rho}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{-f(t)}{\rho}$, από τις οποίες προκύπτει $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{-f^2(t)}{\rho^2}$. Όμως, στην περίπτωση που εξετάζουμε είναι $f(t)=\rho$, οπότε

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{-f^2(t)}{f^2(t)}\Leftrightarrow f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=-1$$

Άρα και σε αυτήν την περίπτωση οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι πάλι κάθετες.

Άσκηση 3

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1] για την οποία:

$$\mathbf{f(0)=0\,,\ f(1)=\theta<1\ \ \text{και}\ \ f'(0)>0}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2\xi$.

Ανάπτυξη σχεδίου για τη σύνθεση απόδειξης

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=2x$, δηλαδή ισοδύναμα η εξίσωση $\left(f(x)-x^2\right)'=0$ έχει ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. Και προς αυτή την κατεύθυνση μια πρώτη σκέψη είναι να εξετάσουμε αν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, με $x\in[0,1]$.

Είναι $g(0)=0$ και $g(1)=f(1)-1^2=\theta-1<0$ άρα $g(1)<0$.

Επειδή $g(0)=0$, το ζητούμενο της άσκησης θα προέκυπτε με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση g, αν αποδεικνύαμε ότι υπάρχει αριθμός $\alpha\in(0,1)$ για τον οποίο $g(\alpha)=0$.

Με βάση την ιδέα αυτή και παίρνοντας υπόψη ότι $g(1)<0$ αναρωτιόμαστε μήπως θα μπορούσαμε να έχουμε κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$, οπότε με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\beta,1]$ θα εξασφαλίζαμε την ύπαρξη αριθμού $\alpha\in(\beta,1)$ τέτοιου, ώστε $g(\alpha)=0$.

Εφαρμογή του σχεδίου (απόδειξη)

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$. Δηλαδή, ισοδύναμα ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $g(x)\le 0$.

Τότε: $g(x)\le 0 \Rightarrow f(x)\le x^2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}\le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le \lim\limits_{x\to 0^+} x \Rightarrow f'(0)\le 0$, που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης $f'(0)>0$.

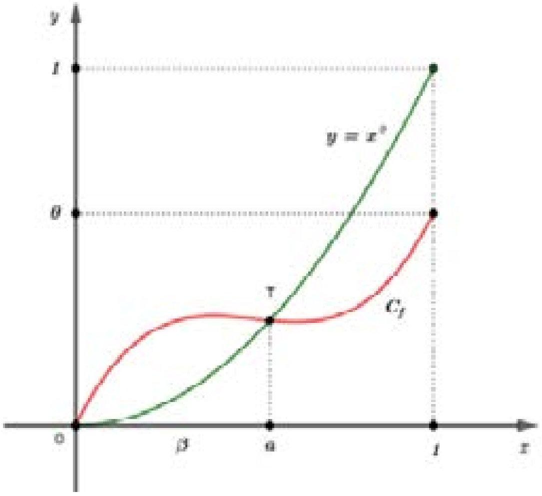
Άρα υπάρχει κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$.

Οπότε, καθώς η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[\beta,1]$ και ισχύει $g(\beta)\cdot g(1)<0$, από το θεώρημα Bolzano για την g στο $[\beta,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\alpha\in(\beta,1)$ ώστε $g(\alpha)=0$.

Τέλος, από το θεώρημα Rolle για την g στο διάστημα $[0,\alpha]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$, δηλαδή $f'(\xi)=2\xi$.

Σχόλιο

Το κομβικό σημείο στην παραπάνω απόδειξη εντοπίζεται ουσιαστικά στο ότι αποκλείεται να είναι $g(x)\le 0$, δηλαδή αποκλείεται να είναι $f(x)\le x^2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Κι αυτό εποπτικά σημαίνει ότι ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f βρίσκεται πάνω από την παραβολή $y=x^2$ στο διάστημα $(0,1)$. Σε αυτήν ακριβώς τη γεωμετρική επισήμανση βασίζεται η κεντρική ιδέα της άσκησης, η οποία αποτυπώνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης

Θα περιγράψουμε εδώ και έναν δεύτερο τρόπο απόδειξης, διατηρώντας, για πρακτικούς λόγους, τον ίδιο συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Είναι $g(x)=f(x)-x^2$ με $x\in[0,1]$, $g(0)=0$ και $g(1)<0$. Επίσης $g'(x)=f'(x)-2x$,

άρα $g'(0)=f'(0)>0$.

Από τον ορισμό της παραγώγου της g στο 0 από τα δεξιά έχουμε:

$$g'(0)>0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}>0, \quad (1)$$

Και επειδή $x>0$, λόγω της (1) θα είναι $g(x)>0$ κοντά στο 0 από τα δεξιά. Άρα υπάρχει $\beta\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\beta)>0$. Έχουμε λοιπόν $g(\beta)\cdot g(1)<0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\beta,1]$, από το θεώρημα Bolzano για την g στο $[\beta,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\alpha\in(\beta,1)$ ώστε $g(\alpha)=0$. Τέλος, η απόδειξη της άσκησης ολοκληρώνεται με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για την g στο διάστημα $[0,\alpha]$.

Μία γενίκευση του συμπεράσματος

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία:

$$f(0)=0,\ f(1)=\theta<1 \text{ και } f'(0)>0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει η ισότητα: $\lambda f(\alpha)+\kappa f(\beta)=(\kappa+\lambda)f\left(\frac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}\right)$, όπου κ,λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

i. **Να αποδείξετε ότι $\alpha<\frac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}<\beta$.**

ii. **Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' στο σημείο της $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.**

Σχόλιο

Πριν από την απόδειξη της άσκησης 4 με διαφορικό λογισμό, προτείνεται να αποδειχτεί πρώτα η περίπτωση όπου $\kappa=\lambda=1$.

Σ' αυτήν την περίπτωση η υπόθεση $\lambda f(\alpha)+\kappa f(\beta)=(\kappa+\lambda)f\left(\frac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}\right)$ γίνεται $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, δηλαδή $\frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)]=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Η τελευταία ισότητα παραπέμπει στην πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που συνδέει το μήκος της διαμέσου τραπεζίου με τα μήκη των βάσεών του. Και σ' αυτήν την πρόταση βασίζεται η κεντρική ιδέα της εν λόγω περίπτωσης της άσκησης 4 (για λεπτομερή ανάπτυξη βλ. [5], σελ. 12-15).

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Cobb, P., Wood T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). *Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis*, American Educational Research Journal, 29, 573-604.

[2] Στράτος Μάκρας, *Γεωμετρική εποπτεία και απόδειξη*, άρθρο στον Ευκλείδη Β', τχ 25, (Ιούλιος, Αύγουστος, Σεπτέμβριος 1997), σελ. 11-17, έκδοση ΕΜΕ.

[3] Δημήτρης Ντρίζος & Κώστας Δόρτσιος, *Από τις διαισθητικές προσεγγίσεις στις μαθηματικές βεβαιότητες*, άρθρο στον Ευκλείδη Γ', τχ 90 (Ιανουάριος-Ιούνιος 2019), σελ. 1-16, έκδοση ΕΜΕ.

[4] Δημήτρης Ντρίζος, *Πλεονεκτήματα της γεωμετρικής αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών: Η απόδειξη του θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού για συναρτήσεις μιας ή δύο πραγματικών μεταβλητών*, άρθρο στον Ευκλείδη Γ', τχ 77 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2012), σελ. 31-45, έκδοση ΕΜΕ.

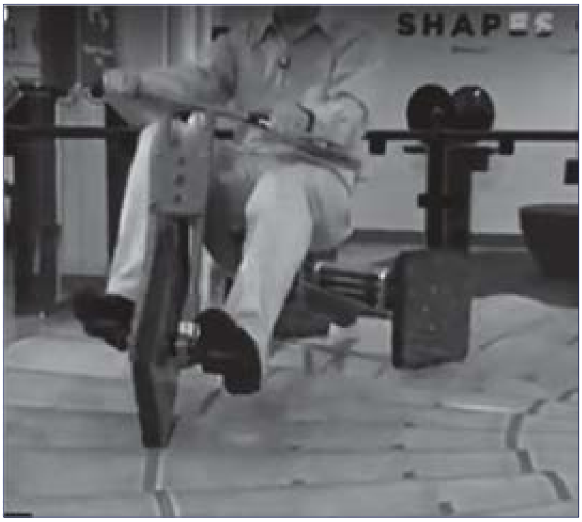
[5] Δημήτρης Ντρίζος, *Στοχεύοντας στην ανάπτυξη μιας διερευνητικής τάξης στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Λύκειο*, άρθρο στον Ευκλείδη Γ', τχ 85 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2016), σελ. 1-23, έκδοση ΕΜΕ.

[6] Δημήτρης Ντρίζος, *Ο ρόλος των πολλαπλών προσεγγίσεων της μαθηματικής γνώσης – Ενδεικτικά θέματα από τα Μαθηματικά του Λυκείου*, άρθρο στον Ευκλείδη Β', τχ 109 (Ιούλιος, Αύγουστος, Σεπτέμβριος 2018), σελ. 51-54, έκδοση ΕΜΕ.

Η κίνηση ενός ποδηλάτου με τετράγωνες ρόδες

Αλκιβιάδης Τζελέπης

Πιστεύετε ότι μπορείτε εύκολα να οδηγήσετε ένα ποδήλατο με τετράγωνους τροχούς; Στη Νέα Υόρκη, στο **MoMath** – Μουσείο των Μαθηματικών μπορείτε να το επιχειρήσετε σε ένα από τα περίπτερα αφιερωμένο στην "**μαθηματική διασκέδαση**". Είναι βέβαια προφανές, ότι το προφίλ της επιφάνειας πάνω στην οποία θα κινείται η πλευρά του τροχού, πρέπει να ικανοποιεί ορισμένες προϋποθέσεις. Τί **Μαθηματικά** χρειάζονται όμως για να περιγράψουμε την κίνηση;



Πληροφορίες για το Mo – Math Museum:
https://www.youtube.com/watch?v=Z6AXKnse0E8

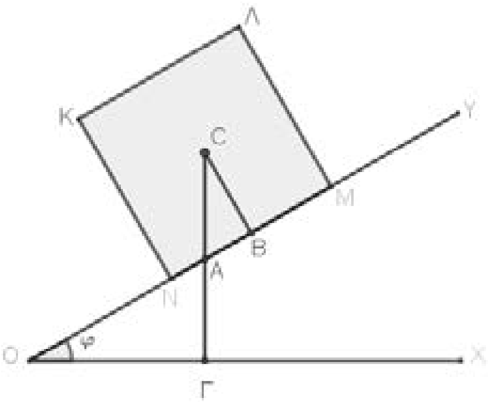
Δίδεται μία προσέγγιση του προβλήματος, **ακολουθώντας μία διαδρομή**, η οποία έχει ως αφετηρία τη Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου, συνεχίζει με την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου και **ολοκληρώνεται στην Ανάλυση** της Γ΄ Λυκείου.

Πρόβλημα 1ο Η κίνηση ενός τετραγώνου επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο

***Α΄ Μέρος:* «το πρόβλημα της Γεωμετρίας»** ***Β΄ Μέρος:* «το πρόβλημα της Τριγωνομετρίας»**

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y = \varphi$ και επάνω στην πλευρά της Oy ένα τετράγωνο $ΚΛΜΝ$ πλευράς 2. Επιπλέον από το κέντρο C του τετραγώνου φέρουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα CB, $CΓ$ προς τις δύο πλευρές της γωνίας (βλ. σχήμα).

Α) Να αποδειχθεί ότι $CA = \frac{OA}{OΓ}$.



Λύση

Τα τρίγωνα CAB και $OAΓ$ είναι όμοια, διότι:

- $\hat{B} = \hat{Γ} = 90°$
- $\hat{C} = \hat{O} = \varphi$, ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Επομένως, οι ομόλογες πλευρές είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{CA}{OA} = \frac{AB}{AΓ} = \frac{CB}{OΓ}$. Ως γνωστόν η απόσταση του κέντρου του τετραγώνου από κάθε πλευρά του ισούται με το μισό αυτής, δηλαδή $CB = 1$. Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{CA}{OA} = \frac{1}{O\Gamma} \Leftrightarrow CA = \frac{OA}{O\Gamma}$$

Σχόλιο: Τα παραπάνω ισχύουν σε οποιαδήποτε θέση του τετραγώνου επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Β) Αν η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου είναι κ, τότε να εκφρασθεί το μήκος CA συναρτήσει του κ.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $OA\Gamma(\hat{\Gamma} = 90°)$ είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{O\Gamma}{OA} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{OA}{O\Gamma} \overset{A)\ \varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha}{\Longleftrightarrow} CA = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση με $\varepsilon\varphi\varphi$, οπότε είναι $\kappa = \varepsilon\varphi\varphi$.
Ως γνωστόν ισχύει η επόμενη τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$1 + \varepsilon\varphi^2\varphi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

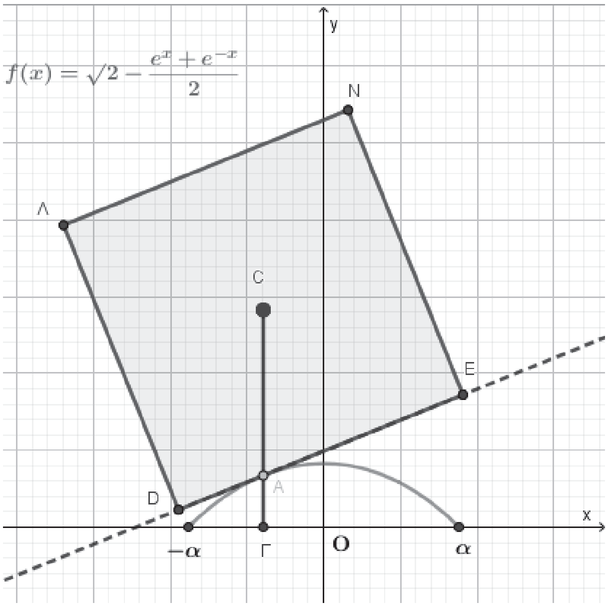
Ως εκ τούτου, ισχύει:

$$CA = \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} \Leftrightarrow CA = \sqrt{1 + \kappa^2}\,.$$

Πρόβλημα 2ο Η κίνηση ενός τετραγώνου επάνω σε μία καμπύλη

Γ΄ Μέρος: «το πρόβλημα γεωμετρικού τόπου – Εκθετικής συνάρτησης»

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-\alpha, \alpha]$ ($\pm\alpha$ τα σημεία τομής με άξονα x΄x) και ένα τετράγωνο πλευράς *2*, το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, εφαπτόμενο σε αυτήν σε ένα σημείο Α (βλ. σχήμα).



Η πλευρά του τετραγώνου που εφάπτεται στην C_f έχει κλίση η οποία ισούται με $\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$.

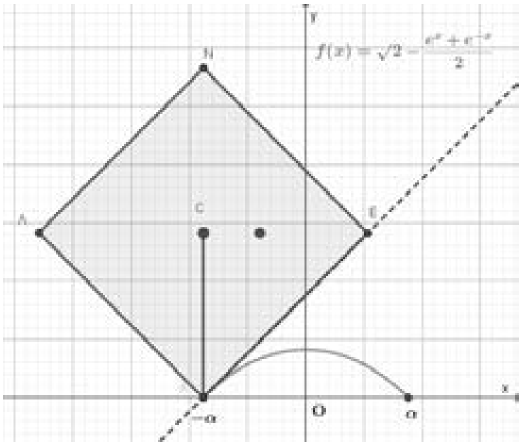
Α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους C του τετραγώνου.

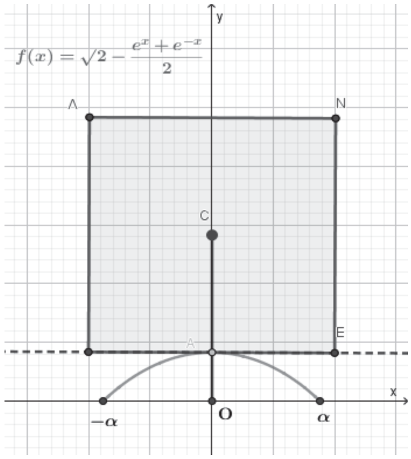
Β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου C του τετραγώνου καθώς αυτό κινείται.

Λύση

Έστω $C(x, d)$. Για την τετμημένη του σημείου C έχουμε ότι $x \in [-\alpha, \alpha]$, ενώ για την τεταγμένη του C είναι $d = CA + f(x)$.

Ως πρώτο βήμα μπορεί να διερευνηθεί τι συμβαίνει σε δύο ειδικές περιπτώσεις και να γίνει μία εικασία.





- Στα σημεία με $x_0 = -\alpha$ και $x_0 = 0$.
- Εικάζεται λοιπόν ότι $d = \sqrt{2}$, δηλαδή το ήμισυ της διαγωνίου του τετραγώνου (με χρήση Πυθαγορείου Θεωρήματος σε κατάλληλο ορθογώνιο τρίγωνο).

Η επιβεβαίωση της εικασίας
Είναι:

$$CA = \sqrt{1+\kappa^2} \Rightarrow CA = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2} = \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$d = CA + f(x) \Rightarrow d = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + \left(\sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ η τιμή της τεταγμένης d του κέντρου του τετραγώνου είναι σταθερή και συγκεκριμένα $d = \sqrt{2}$. Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο του τετραγώνου απέχει πάντα σταθερή απόσταση από τον άξονα x΄x και ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι το σημείο C κινείται πάνω σε ευθεία η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων C του επιπέδου είναι η ευθεία με εξίσωση:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{2}}$$

Πρόβλημα 3ο Η κίνηση ενός ποδηλάτου με τετράγωνες ρόδες

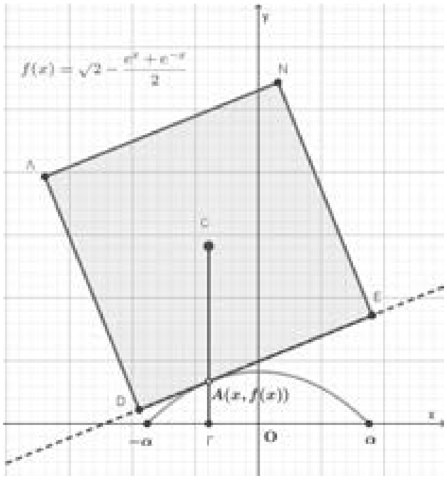
Δ΄ Μέρος: «το πρόβλημα στην Ανάλυση»

1. Με βάση τις πληροφορίες που είναι ανακτήσιμες από το διπλανό γράφημα, να αποδείξετε με τα κατάλληλα επιχειρήματα, ότι η συνάρτηση

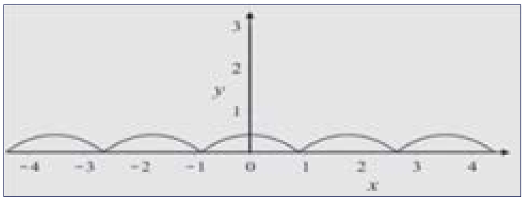
$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

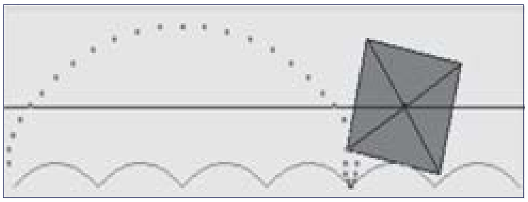
αντιπροσωπεύει επαρκώς το προφίλ της επιφάνειας στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

Να καθορίσετε επίσης τις τιμές των άκρων $\pm\alpha$ του διαστήματος.



Για να δείτε το πλήρες προφίλ της επιφάνειας (επόμενο σχήμα), επί της οποίας κινείται το ποδήλατο με τις τετράγωνες ρόδες, αρκεί να επαναλάβετε περιοδικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, $x \in [-\alpha, \alpha]$, με περίοδο $T = 2\alpha$. Η κατάλληλη λοιπόν επιφάνεια μοντελοποιείται από μία περιοδικά επαναλαμβανόμενη ανεστραμμένη αλυσοειδή καμπύλη.





2. Για να κινηθεί το ποδήλατο ομαλά επάνω στην επιφάνεια είναι απαραίτητα τα εξής:
α) οι εφαπτόμενες της καμπύλης $f(x)$, στα σημεία τομής της με τον άξονα x΄x, να είναι κάθετες μεταξύ τους.
β) το μήκος της πλευράς του τετράγωνου τροχού, να είναι ίσο με το μήκος του τόξου του ανεστραμμένου αλυσοειδούς, πάνω στο οποίο κινείται.
(Το μήκος του τόξου μιας καμπύλης, η οποία περιγράφεται από τη συνάρτηση με εξίσωση $y = \varphi(x)$, *το οποίο περικλείεται μεταξύ δύο άκρων με τετμημένες αντίστοιχα* x_1 *και* x_2, *δίδεται από τον τύπο*

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\varphi'(x)\right)^2}\, dx).$$

Να προσδιορίσετε αν επαληθεύονται οι παραπάνω συνθήκες.
3. Να αποδείξετε ότι η τιμή της τεταγμένης του κέντρου του τροχού C διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης. Ως εκ τούτου, φαίνεται ότι ο ποδηλάτης κινείται πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων $C(x, d)$, ο οποίος είναι το προφίλ αυτής της επιφάνειας.

Λύση

1. Αρχικά θα μελετήσουμε και θα κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$.
α) Η συνάρτηση είναι άρτια, δηλαδή συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y,
διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = f(x)$.
β) Είναι $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} < 0 \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow x < 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > 0$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 0$ και μέγιστη τιμή την $f(0) = \sqrt{2} - 1$.
γ) Είναι $f''(x) = -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ως εκ τούτου η συνάρτηση είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.
δ) Στα άκρα του πεδίου ορισμού, είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Επιπροσθέτως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(\mathbb{R}) = (-\infty, \sqrt{2}-1]$. Επομένως, αφού είναι συνεχής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$. Εξ' αιτίας όμως της συμμετρίας και της μονοτονίας της f συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς αντίθετες ρίζες, τις οποίες συμβολίζουμε με $x_1 = -a$ και $x_2 = a$.

ε) Εύρεση των σημείων τομής, $x_1 = -a$ και $x_2 = a$, της C_f με τον άξονα x΄x:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} = 2\sqrt{2} \xLongleftrightarrow{e^x = \omega > 0}$$

$$\omega^2 - 2\sqrt{2}\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \sqrt{2}+1 \text{ ή } \omega_2 = \sqrt{2}-1$$

Είναι λοιπόν

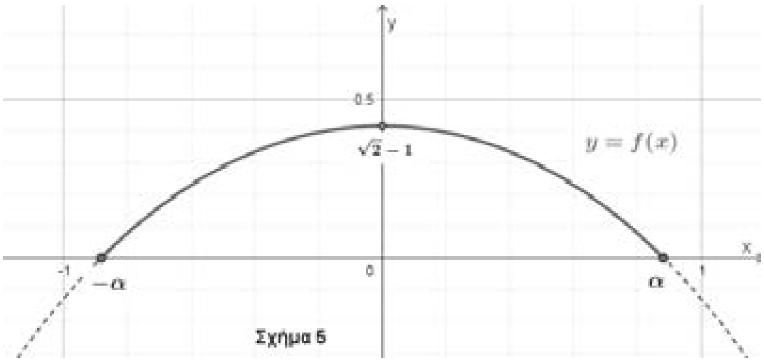
$$\left\{\begin{array}{c} e^x = \sqrt{2}+1 \\ \text{ή} \\ e^x = \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2 = \ln(\sqrt{2}+1) = \alpha \\ \text{ή} \\ x_1 = \ln(\sqrt{2}-1) = -\alpha \end{array}\right.$$

αφού $\sqrt{2}-1 < \sqrt{2}+1 \overset{\ln\uparrow}{\Rightarrow} \ln(\sqrt{2}-1) < \ln(\sqrt{2}+1)$.

και επιπλέον ισχύει

$$\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)] = \ln 1 = 0.$$

στ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$, αλλά και ο περιορισμός της στο διάστημα $[-\alpha, \alpha] = [\ln(\sqrt{2}-1), \ln(\sqrt{2}+1)]$, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα 5.



Σχήμα 5

2. α) Για να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της $f(x)$ στα σημεία με συντεταγμένες $(\ln(\sqrt{2}+1), 0)$ και $(\ln(\sqrt{2}-1), 0)$ είναι κάθετες μεταξύ τους, αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$f'(a) \cdot f'(-a) = f'(\ln(\sqrt{2}+1)) \cdot f'(\ln(\sqrt{2}-1)) = -1.$$

Αφού $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, είναι $f'(a) \cdot f'(-a) = -\frac{1}{4}(e^\alpha - e^{-\alpha})^2$.

Επομένως αρκεί να αποδειχθεί ότι $(e^\alpha - e^{-\alpha})^2 = 4$. Πραγματικά είναι

$$(e^\alpha - e^{-\alpha})^2 = \left(e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{\ln(\sqrt{2}-1)}\right)^2 = \left[(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)\right]^2 = 2^2 = 4.$$

Αυτό που στην πραγματικότητα απεδείχθηκε, όσον αφορά στο πρόβλημα, είναι ότι οι γωνίες της τετράγωνης ρόδας εφαρμόζουν τέλεια στα σημεία που επαναλαμβάνεται η συνάρτηση.

β) Το μήκος του ζητούμενου τόξου δίδεται από τον τύπο $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$, όπου

$\varphi'(x) = f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $x_1 = \ln(\sqrt{2}-1)$ και $x_2 = \ln(\sqrt{2}+1)$. Είναι λοιπόν

$$1+\left(f'(x)\right)^2=1+\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right)^2=\frac{4+e^{-2x}-2e^{-x}e^{x}+e^{2x}}{4}==\frac{e^{-2x}+2e^{-x}e^{x}+e^{2x}}{4}$$

$$=\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)^2,\ \text{με}\ \frac{e^{-x}+e^{x}}{2}>0$$

$$L=\frac{1}{2}\int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)}(e^{-x}+e^{x})\,dx=\frac{1}{2}\left[e^{x}-e^{-x}\right]_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)}=$$

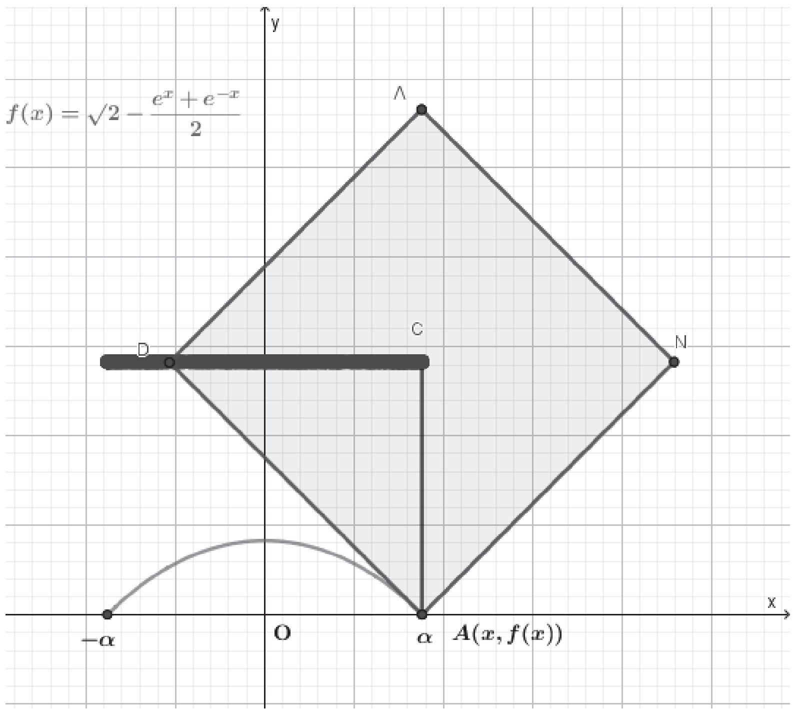
$$\frac{1}{2}\left(e^{\ln(\sqrt{2}+1)}-e^{-\ln(\sqrt{2}+1)}-e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+e^{-\ln(\sqrt{2}-1)}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\ln(\sqrt{2}+1)}-e^{\ln(\sqrt{2}-1)}-e^{\ln(\sqrt{2}-1)}+e^{\ln(\sqrt{2}+1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1\right)=2$$

Πράγματι λοιπόν, ισχύει ότι $L=DE\ =\ 2.$

Επομένως επαληθεύονται και οι δύο συνθήκες που είναι απαραίτητες, έτσι ώστε να κινηθεί το ποδήλατο ομαλά επάνω στην επιφάνεια που μοντελοποιείται από την ανεστραμμένη αλυσοειδή καμπύλη.

3. Η συνέχεια έχει ήδη διαπραγματευθεί στα αρχικά προβλήματα.



4. Επέκταση του προβλήματος:

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\ ,\ \text{ με }\ x\in\left[-\frac{\ln 3}{2},\ \frac{\ln 3}{2}\right]$$

επαναληφθεί περιοδικά αρκετές φορές, να βρείτε ποιού κανονικού πολυγώνου ρόδα θα έπρεπε να έχει το ποδήλατο, το οποίο θα μπορούσε να κινείται ομαλά στην καινούργια επιφάνεια; Να υπολογίσετε επιπλέον και το μήκος της πλευράς του.

Θεώρημα των δύο ίσων εξωτερικών διχοτόμων τριγώνου

Γεώργιος Δ. Μιστριώτης

Εισαγωγή: Σε αυτό το άρθρο ανακαλύπτεται, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το "**θεώρημα των δύο ίσων εξωτερικών διχοτόμων τριγώνου**" που δίνει μία απλή γεωμετρική σχέση επί ενός τριγώνου, που αν ισχύει, τότε το τρίγωνο είναι σκαληνό και έχει δύο εξωτερικές διχοτόμους ίσες.

Το άμεσο επακόλουθο αυτής της σχέσης είναι η απλή και εύκολη κατασκευή σκαληνού τριγώνου ΑΒΓ, που να έχει αυθαίρετα δοσμένη την γωνία κορυφής $\widehat{A}$<60° και ίσες τις δύο εξωτερικές διχοτόμους, που άγονται από τις κορυφές **Β** και **Γ**.

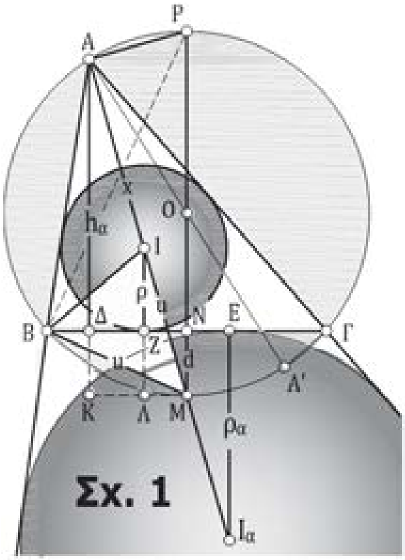
Ταυτόχρονα και έμμεσα, αυτό το θεώρημα σχετίζεται με ένα παλιό, τουλάχιστον ηλικίας **175 ετών**, ερώτημα: "Αν δύο διχοτόμοι ενός τριγώνου είναι ίσες, είναι το τρίγωνο ισοσκελές;"

Η απάντηση για τις εσωτερικές διχοτόμους είναι **ΝΑΙ** και δίνεται από το πολυσυζητημένο θεώρημα **Steiner –Lemus**[*], δημοσιευμένο με τεράστια ποικιλία αποδείξεων.

Όσον αφορά όμως τις εξωτερικές διχοτόμους, η απάντηση είναι "ΟΧΙ απαραίτητα", ενώ η σχετική αρθρογραφία* είναι περίεργα και ανεξήγητα πτωχή. Ένα από τα κυρίαρχα στοιχεία για μία τέτοια απάντηση είναι η ευρύτατα γνωστή πρόταση ότι το σκαληνό τρίγωνο με γωνίες $\widehat{A}$=36°, $\widehat{B}$=132°, $\widehat{\Gamma}$=12° έχει ίσες δύο εξωτερικές διχοτόμους του, ήτοι $\alpha=B\Gamma=\Delta_\beta=\Delta_\gamma$. Αυτό το άρθρο, όμως παρουσιάζει το "**φάσμα**" όλων των σκαληνών τριγώνων με $\Delta_\beta=\Delta_\gamma$, δίνοντας ξεκάθαρη και εξαντλητική απάντηση στο σχετικό ερώτημα, ενώ το τρίγωνο 36°, 132°, 12° είναι πλέον μία επί μέρους απλή περίπτωση και όχι το κυρίαρχο στοιχείο απάντησης στο σχετικό ερώτημα.

§1.1. Σύμβολα και ορισμοί: Σε τρίγωνο ΑΒΓ, με πλευρές **α=ΒΓ, β=ΓΑ, γ=ΑΒ** και ημιπερίμετρο **τ=½(α+β+γ),** τον εγγεγραμμένο κύκλο **(Ι, ρ)**, τον παρεγεγραμμένοκύκλο **(I_α, ρ_α)** και **(Ο, R)** τον περιγεγραμμένο κύκλο του **ΑΒΓ**. Επίσης, **ρ=ΙΖ⊥ΒΓ**, **$\rho_\alpha=I_\alpha E\perp B\Gamma$**, **ΑΔ=$h_\alpha$** το ύψος αγόμενο από την κορυφή **Α**, σημεία **Ν**, **Μ** και **Ρ** μέσα της **ΒΓ**, του ελάσσονος και μείζονος τόξου $\widehat{B\Gamma}$, αντίστοιχα. Τέλος, **2R=ΜΡ=ΑΑ΄** διάμετροι του περιγεγραμμένου κύκλου **(Ο, R)** (βλέπε σχ. 1).

§1.2. Χρήσιμες σχέσεις σε κάθε τρίγωνο:



Σχ. 1

- Ορθ. τρίγωνα **ΔΒΑ≈ΓΑ΄Α ⇒ $\beta\gamma=2Rh_\alpha$** ενώ εμβαδό του τριγώνου **ΑΒΓ**: **$E=\frac{1}{2}\alpha h_\alpha=\rho_\alpha(\tau-\alpha)$,** οπότε, **$\alpha\beta\gamma=\alpha(\beta\gamma)=\alpha(2Rh_\alpha)=4R(\frac{1}{2}\alpha h_\alpha)=4R.E \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma=4R\rho_\alpha(\tau-\alpha)$** **(d1)**
- Τρίγωνα **ΜΙΒ**, **ΜΙΓ** $MI_\alpha B$ και **$MI_\alpha\Gamma$** είναι ισοσκελή και ορίζουμε: **$u \stackrel{def}{=} BM=\Gamma M=IM=I_\alpha M$** **(d2)**
- **ΒΖ=ΓΕ=τ –β** (Σχ.1), **⇒ΒΝ –ΒΖ = ΓΝ –ΓΕ ⇒ΖΝ=ΕΝ** **(d3)**
- Στο τραπέζιο **$IZI_\alpha E$** το ευθ. τμήμα **$d\stackrel{def}{=}MN$** συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του, ⇒ **$d\stackrel{def}{=}MN=\frac{1}{2}(I_\alpha E-IZ)$** ή
$d=\frac{1}{2}(\rho_\alpha-\rho)\Leftrightarrow\rho_\alpha=\rho+2d$ **(d4)**
- Ορθογώνιο τρίγωνο **ΒΜΡ ⇒ $u^2=BM^2=MN.MP=2R.MN$**
$=u^2=2Rd$ **(d5)**
- (d1), (d4) & (d5): ⇒ **$\alpha\beta\gamma=(\tau-\alpha)(4R\rho+4u^2)$** **(d6)**
- Τέλος, ορίζομε **$x\stackrel{def}{=}xAI$** και λόγω της (d2):
$AM=AI+MI=AI+BM\stackrel{def}{=}x+u$ **(d7)**
- Τύποι εξωτερικών Διχοτόμων Τριγώνου:

$$\Delta_\alpha^2=\frac{4\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{(\gamma-\beta)^2},\ \Delta_\beta^2=\frac{4\gamma\alpha(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{(\alpha-\gamma)^2},\ \Delta_\gamma^2=\frac{4\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{(\beta-\alpha)^2}$$

§2. Θεώρημα: Έστω τρίγωνο **ΑΒΓ** με στοιχεία όπως δίνονται και ορίζονται στην §1.1.

Να αποδειχθεί ότι:

(α) Για οιουσδήποτε β∈R, γ∈R, τ.ώ. (τέτοιους ώστε**) β>γ>0 υπάρχει μοναδικός αριθμός α∈R, τ.ώ. β>α>γ>0 και επίσης α, β και γ είναι τα μήκη πλευρών μοναδικού σκαληνού τριγώνου ΑΒΓ, με ίσες τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών του $\Delta_\beta=\Delta_\gamma$, αγόμενες από Β και Γ.**

---

[*] **Σχόλιο σύνταξης:** Στην παρουσίαση αυτή, δίνουμε τον λόγο, στον αρθρογράφο Γ. Μιστριώτη για μια διερευνητική ματιά, με αφορμή το σχετικό θεώρημα Steiner –Lemus (που αφορά τις εσωτερικές διχοτόμους τριγώνων) για τη διατύπωση ειδικών περιπτώσεων για τις εξωτερικές διχοτόμους.

(β) $\{\Delta_\beta = \Delta_\gamma\} \Leftrightarrow$ **Τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) ή** $A\Gamma \stackrel{def}{=} \beta \neq \gamma \stackrel{def}{=} AB$ **και ΑΙ=2.ΜΝ**

(γ) $\beta \geq \gamma$ **και ΑΙ=2.ΜΝ** $\Rightarrow$ **Τρ. ΑΒΓ ισόπλευρο, ή είναι σκαληνό με** $\Delta_\beta=\Delta_\gamma$ **και** $\widehat{B}>60°>\widehat{A}>\widehat{\Gamma}$.

(δ) Αν $\{\widehat{A}>60°\}$ **ή** $\{\widehat{A}$ **Ελάχιστη είτε Μέγιστη Γωνία του Τρ. ΑΒΓ} ΤΟΤΕ**

$\{\Delta_\beta=\Delta_\gamma\} \Rightarrow$ **Τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (β=γ)**

(Περιορισμένης ισχύος Συζυγές Θ. Steiner –Lemus για Εξωτερικές Διχοτόμους Τριγώνου)

Απόδειξη (α): $\Delta_\beta=\Delta_\gamma \Leftrightarrow \Delta_\beta^2=\Delta_\gamma^2 \Leftrightarrow \frac{4\gamma\alpha(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{(\alpha-\gamma)^2} = \frac{4\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{(\beta-\alpha)^2}$

$\Leftrightarrow \gamma(\tau-\gamma).(\beta-\alpha)^2 - \beta(\tau-\beta).(\alpha-\gamma)^2=0$ Με εξαντλητικές πράξεις και παραγοντοποίηση

$\Delta_\beta=\Delta_\gamma \Leftrightarrow (\beta-\gamma)\{\alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\alpha\beta\gamma-\beta\gamma(\beta+\gamma)=0 \Leftrightarrow$ **Οπότε** $\{\beta=\gamma \Rightarrow \Delta_\beta=\Delta_\gamma\}$, έτσι το 1ο σκέλος του (β) του θεωρήματος, όντας αναμενόμενο, τετριμμένο και προφανές, αποδείχθηκε.

Επίσης, $\{\beta\neq\gamma$ και $\Delta_\beta=\Delta_\gamma\} \Leftrightarrow f(\alpha) \stackrel{def}{=} \alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha-\beta\gamma(\beta+\gamma)=0$ **(1).**

Λήμμα: Για οιαδήποτε β>γ>0, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (1) f(α)=0 έχει μία μόνο πραγματική λύση τ.ώ. $\beta>\alpha>\gamma>0$ **και** $|\beta-\gamma|=\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$.

Απόδειξη Λήμματος: Με αλλαγή μεταβλητής $\alpha = x + \frac{\beta+\gamma}{3}$ η εξίσωση **f(α)=0** παίρνει την τυπική μορφή: $f(x) \stackrel{def}{=} x^3+mx+n=0$ όπου $m = 3\beta\gamma - \frac{(\beta+\gamma)^2}{3}$ και $n = -\frac{2(\beta+\gamma)^3}{27}$.

Ορίζουμε $\mathbb{D} \stackrel{def}{=} \frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27} = \frac{1}{27}[(\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})^3+(3\beta\gamma-\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})^3] =(\ldots)= \frac{\beta\gamma}{27}[\beta^4-5\beta^3\gamma+15\beta^2\gamma^2-5\beta\gamma^3+\gamma^4] =$
$= \frac{\beta\gamma}{27}[(\beta^2-\frac{5}{2}\beta\gamma)^2+(\gamma^2-\frac{5}{2}\beta\gamma)^2+\frac{5}{2}\beta^2\gamma^2]$. Άρα, για **β>0, γ>0**, $\mathbb{D}>0$. Οπότε, η εξίσωση (1) έχει μία και μοναδική πραγματική λύση (βλέπε [3] ή [4]). Ειδικές τιμές του πολυωνύμου f(α):

$f(\gamma)=\beta\gamma(\gamma-\beta)<0$, $f(\beta-\gamma)=-2\gamma^3<0$ και $f(\beta)=\beta\gamma(\beta-\gamma)>0$

$f(\gamma).f(\beta)<0$ από το θεώρημα Bolzano $\Rightarrow$ η μοναδική λύση $\alpha\in\mathbb{R}$ τ.ώ. **0,** $\beta>\alpha>\gamma>0$.

Ενώ $f(\beta-\gamma).f(\beta)<0$ από το ίδιο θεώρημα $\Rightarrow$ λύση $\alpha\in\mathbb{R}$ τ.ώ. $0<\beta-\gamma<\alpha<\beta.<\beta+\gamma$. **ό. έ. δ.**

Συμπέρασμα 1ο: Για οιαδήποτε αυθαίρετα δοσμένα $\beta\in\mathbb{R}$ και $\gamma\in\mathbb{R}$, τ.ώ.. $\beta>\gamma>0$ υπάρχει πάντα μοναδικός αριθμός $\alpha\in\mathbb{R}$ τ.ώ. **α**, **β** και **γ** είναι τα μήκη των πλευρών **σκαληνού** τριγώνου **ΑΒΓ**, με $\Delta_\beta=\Delta_\gamma$ και με σχέση πλευρών –γωνιών: $\beta>\alpha>\gamma>0 \Leftrightarrow \widehat{B}>\widehat{A}>\widehat{\Gamma}$ **(1α)**

Αναλυτική Λύση της **f(α)=0**: δίνει ο τύπος $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{3} + \sqrt[3]{\frac{(\beta+\gamma)^3}{27}+\sqrt{\mathbb{D}}} + \sqrt[3]{\frac{(\beta+\gamma)^3}{27}-\sqrt{\mathbb{D}}}$ **(1b)**

Συμπέρασμα 2ο: Δεν υπάρχει Τρ. **ΑΒΓ** τ.ώ. $\{\Delta_\beta=\Delta_\gamma\}\wedge\{\widehat{A}\geqq\widehat{B}>\widehat{\Gamma}\}$ ή $\{\Delta_\beta=\Delta_\gamma\}\wedge\{\widehat{B}>\widehat{\Gamma}\geqq\widehat{A}\}$

Πρέπει να τονιστεί ότι αν και τα πράγματα αλγεβρικά είναι πλήρως διαχειρίσιμα, το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει στον γεωμετρικό τομέα. Για **β>γ** δοσμένα ευθ. τμήματα,είναι αδύνατη η γεωμε – τρική κατασκευή του ευθ, τμήματος **α=ΒΓ**, που δίνεται από την εξίσωση (1b), αλλιώς θα λυνόταν το Δήλιο πρόβλημα, που έχει απλούστερη εξίσωση $x = \sqrt[3]{2}\,\alpha$, διπλαπλασιασμού του κύβου α^3.

Απόδειξη (β): Εξίσωση (1) μπορεί να πάρει τη μορφή: $(\tau-\alpha)(\alpha^2+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma=0$ (2)
Λόγω της (d6): (2) $\Leftrightarrow (\tau-\alpha)\{\alpha^2+\beta\gamma-4R\rho-4u^2\}=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta\gamma-4R\rho-4u^2=0$ (3)
Αλλά $\beta\gamma=2R\,h_\alpha$ και $\alpha^2=4(½\alpha)^2=4BN^2=4(u^2-d^2)$, οπότε (3) $\Leftrightarrow 2Rh_\alpha-4R\rho-4d^2=0$ (4)

Χαράσσομε ευθεία **ΜΚ ∥ ΒΓ** (βλέπε Σχ. 1) που τέμνει τις προεκτάσεις των **ΑΔ** και **ΙΖ** στα σημεία **Κ** και **Λ**, αντίστοιχα. Ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΜ≈ΛΙΜ≈ΑΜΡ (όμοια) με υποτείνουσες τις ΑΜ, ΙΜ, ΜΡ, αντίστοιχα και επίσης έχουν μία οξεία γωνία ίση με $K\widehat{A}M=\Lambda\widehat{I}M=A\widehat{M}P$. Επομένως

$$\frac{KA}{AM}=\frac{\Lambda I}{IM}=\frac{AM}{MP} \text{ ή } \frac{h_\alpha+d}{x+u}=\frac{\rho+d}{u}=\frac{x+u}{2R}$$

$u^2=2Rd$, με 1ο & 3ο λόγο δίνουν: $2R(h_\alpha+d)=(x+u)^2$ ή $2Rh_\alpha=(x+u)^2-u^2$ (5)
$u^2=2Rd$, με 2ο & 3ο λόγο δίνουν: $2R(\rho+d)=u.(x+u)$ ή $-4R\rho=2u(x+u)-2u^2$ (6)
Λόγω (5) , (6): εξίσωση (2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow \{(x+u)^2-u^2\}-\{2u(x+u)-2u^2\}-4d^2=0$
$\Leftrightarrow (x+u)^2-2u.(x+u)+u^2-4d^2=0$ **Λύση:** $x+u=u\pm2d \Leftrightarrow x=2d$ (Λύση $x=-2d<0$ μη δεκτή)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: $\{\beta\neq\gamma$ και $\Delta_\beta=\Delta_\gamma\} \Leftrightarrow AI=x=2d=2.MN \Leftrightarrow AM=BM+2.MN$ **(7)**

Απόδειξη (γ): Υποθέτομε $\beta\geq\gamma$ και **ΑΙ=2.ΜΝ.** Ορίζομε $\varphi\stackrel{def}{=}½\widehat{A}$. Γωνία $\widehat{A}<180° \Rightarrow 0°<\varphi<90° \Rightarrow$ $v\stackrel{def}{=}\eta\mu\varphi=\frac{MB}{MP}=\frac{MN}{MB}>0$ θετική και καθαρά αύξουσα συνάρτηση του $\varphi\in(0°, 90°)$.

Προφανώς, $AM \le 2R = MP$, οπότε και έχομε τις ακόλουθες ισοδύναμες ανισότητες:

$$\{\mathbf{AI=2.MN}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{AM=MI+AI=MB+2.MN \le MP=2R}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{MB+2.MN \le MP}\} \Leftrightarrow$$

$\{\frac{MB+2.MN}{MB} \le \frac{MP}{MB}\} \Leftrightarrow \{1+2v \le \frac{1}{v}\}$ και αφού $v>0 \Leftrightarrow \{v+2v^2-1 \le 0\} \Leftrightarrow \{2(v+1)(v-½) \le 0\}$
$\Leftrightarrow \{\mathbf{v - ½ \le 0}\}$, απλοποιώντας με $(v+1)>v>0 \Leftrightarrow \{v=ημφ \le ½=ημ30°\} \Leftrightarrow \{φ=½\widehat{A} \le 30°\} \Leftrightarrow$
$\{\widehat{A} \le 60°\}$. Τελικά, αποδείξαμε τις ισοδυναμίες:

$$\{\mathbf{AI=2.MN}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{AM \le MP}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{\widehat{A} \le 60°}\}.$$

Ισότητα **ΑΜ=ΜΡ=2R** ⇔ **$\widehat{A}$=60°** και με **Α≡Ρ** ⇔ **ΑΓ=ΑΒ**, ήτοι το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι ισοσκελές, με γωνία κορυφής **$\widehat{A}$=60°** ⇔ Τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι ισόπλευρο. ό. έ. δ. (1ο μέρος).

Ενώ η καθαρή ανισότητα, **ΑΜ<ΜΡ=2R** ⇔ **Α≠Ρ και $\widehat{A}$<60°,** το τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει την κορυφή **Α** εκτός της μεσοκαθέτου **ΜΡ**, άρα είναι , ανισοσκελές, **ΑΓ=β>γ=ΑΒ** , αφού εξ υποθέσεως ΑΓ=β≥γ=ΑΒ. Σχέση **$\widehat{A}$<60°** σε συνδυασμό με την **(1α)** **$\widehat{B}>\widehat{A}>\widehat{Γ}$,** καθώς επίσης, ότι σε κάθε σκαληνό τρίγωνο μία τουλάχιστον γωνία είναι μεγαλύτερη των 60° έχομε: **$\widehat{B}$>60°>$\widehat{A}$>$\widehat{Γ}$** ό.έ.δ.

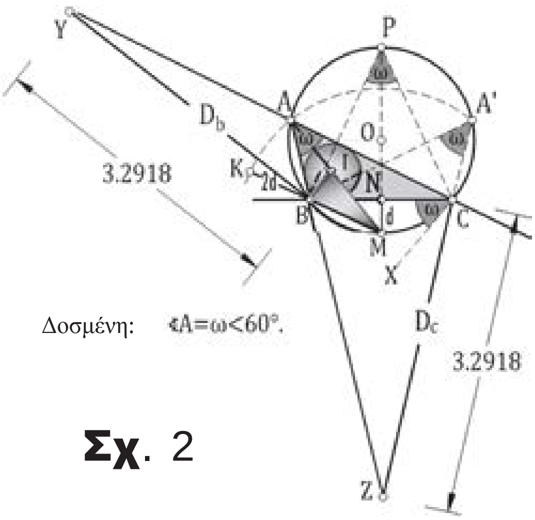
Απόδειξη (δ): Έστω Τρίγωνο **ΑΒΓ** με **$Δ_β=Δ_γ$** και γωνία **$\widehat{A}$** την ελαχίστη. Οπότε,
$\{\{Δ_β=Δ_γ\}\wedge\{\widehat{B}\geqq\widehat{Γ}\geqq\widehat{A}\}\}=\{\{Δ_β=Δ_γ\}\wedge\{\widehat{B}=\widehat{Γ}\geqq\widehat{A}\}\} \vee \{\{Δ_β=Δ_γ\}\wedge\{\widehat{B}>\widehat{Γ}\geqq\widehat{A}\}\}=\{\{Δ_β=Δ_γ\}\wedge\{\widehat{B}=\widehat{Γ}\geqq\widehat{A}\}\}$, αφού δεν υπάρχει τρ. ΑΒΓ με $\{\{Δ_β=Δ_γ\}\wedge\{\widehat{B}>\widehat{Γ}\geqq\widehat{A}\}\}$ Βλέπε συμπέρασμα 2ο της απόδειξης (α). Αν **$\widehat{A}$** μέγιστη γωνία του τρ. **ΑΒΓ ⇒ $\widehat{A}$>60°** εμπίπτει στην επόμενη περίπτωση.

Τέλος, η ισοδυναμία $\{\widehat{A} \le 60° \Leftrightarrow AI=2.MN\} \Rightarrow \{\widehat{A} \nleq 60° \Leftrightarrow AI \ne 2.MN\} \Rightarrow \{\widehat{A}>60° \Rightarrow AI \ne 2.MN\} \Rightarrow$ $\{\widehat{A}>60° \wedge Δ_β=Δ_γ\} \Rightarrow \{AI \ne 2.MN \wedge Δ_β=Δ_γ\} \Rightarrow$ Τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, λόγω του (β) μέρους του θεωρήματος. ό**. έ. δ.**

§3. Κατασκευή σκαληνού τριγώνου ΑΒΓ με $Δ_β=Δ_γ$:

Θεωρούμε δοσμένα ευθ. τμήμα **α=ΒΓ** και γωνία **$\widehat{A}$ =ω<60°.** Χαράσσομε κύκλο **c(Ο, R=ΟΒ=ΟΓ)** του οποίου το τόξο **$\widehat{ΒΡΓ}$** είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που "βλέπουν" το τμήμα **ΒΓ** με γωνία ω (βλ. Σχ. 2) Έστω **Ν** μέσο της **ΒΓ** και **Μ** και **Ρ** τα μέσα των τόξων **$\widehat{ΒΓ}$,** ελάσσονος και μείζονος, αντίστοιχα.

Φέρομε την **ΒΜ** και στην προέκτασή του χαράζομε **ΒΚ=2.ΜΝ**, οπότε **ΜΚ=ΒΜ+2.ΜΝ** (βλ. Σχ.2). Ο κύκλος **(Μ, ΜΚ)** τέμνει τον κύκλο c**(Ο, R)** στα σημεία **Α** και **Α΄**, που δίνουν δύο συμμετρικά(και ίσα) **τρίγωνα ΑΒΓ** και **Α΄ΒΓ** λύσεις στο πρόβλημα. Διότι, **Β$\widehat{A}$Γ=Β$\widehat{A}$΄Γ=Β$\widehat{Γ}$Χ= =ω <60°, ΒΓ=α**, και στο τρίγωνο **ΑΒΓ**, εκ κατασκευής, **ΑΙ=ΒΚ=2ΜΝΝ** ⇒ κατά το θεώρημα της §2, τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι σκαληνό με **$Δ_β=Δ_γ$**. ό.έ.δ.



Σχ. 2

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

[1] **Corliss J.J. (1939),** "If two external Bisectors are equal, is the triangle Isoskeles?" – School Science and Mathematics Journal, vol. 39, issue 8, pp 732 –735.

[2] H. S.M. Coxeter & S.L. Greitzer:: Geometry Revisited, 1967 Mathematical Association of America

[3] **Burngton**: Handbook of Mathematical Tables and Formulas.

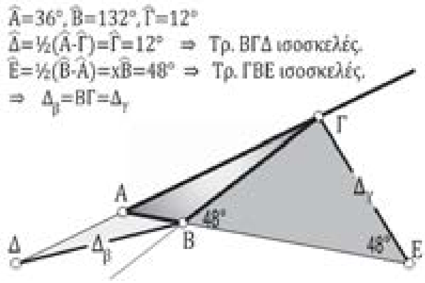
[4] **Web site:** Cubic Formula, Wolfram MathWorld

[5] **Conway J. – Ryba A.:** The Steiner –Lehmus angle –bisector theorem Mathematical Gazette, Vol 98. No. 542, 2014.

Τα **ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΑ,** που ακολουθούν, συντάχτηκαν περισσότερο, για την διευκόλυνση του ελέγχου ορθότητας των επί μέρους αναλυτικών υπολογισμών και για την πληρέστερη αναφορά στις σχέσεις που προκύπτουν.

υπόμνημα Α

Ένα **"καπρίτσιο"** σχήματος και αριθμών: Το σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\widehat{A}=36°$, $\widehat{B}=132°$, $\widehat{\Gamma}=12°$ έχει ίσες τις εξωτερικές διχοτόμους που άγονται από τις κορυφές Β και Γ. Συγκεκριμένα, $\Delta_\beta=\Delta_\gamma=\alpha$.



Απόδειξη: Από την κορυφή Β χαράσσομε την εξωτερική διχοτόμο ΒΔ, που τέμνει την απέναντι πλευρά ΑΓ στην προέκτασή της και μάλιστα προς το μέρος της κορυφής με την μεγαλύτερη γωνία, δηλαδή την Α αφού $\widehat{A}=36°>\widehat{\Gamma}=12°$. Όσο για τη γωνία πρόσπτωσης $\widehat{\Delta}=B\widehat{\Delta}A=½(\widehat{A}\ -\widehat{\Gamma})=½(36°\ -12°)=12°=\widehat{\Gamma}$ ⇒ Τρίγωνο ΒΔΓ ισοσκελές ⇒ $\Delta_\beta=Β\Delta=ΒΓ=\alpha$. (1)

Επίσης, γωνία πρόσπτωσης $\widehat{E}=\Gamma\widehat{E}B=½(\widehat{B}\ -\widehat{A}\widehat{\Gamma})=½(132°\ -36°)=48°=180°\ -132°=180°\ -\widehat{B}=\Gamma\widehat{B}E$ ⇒ Τρίγωνο ΓΒΕ ισοσκελές ⇒ $\Delta_\gamma=\Gamma E=B\Gamma=\alpha$ (2). Σχέσεις (1) και (2) ⇒ $\Delta_\beta=\Delta_\gamma=\alpha$ ό.έ.δ.

υπόμνημα Β

§Β1: $\boldsymbol{\Delta_\beta=\Delta_\gamma \Leftrightarrow \Delta_\beta^2=\dfrac{4\gamma\alpha(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{(\gamma-\alpha)^2}=\Delta_\gamma^2=\dfrac{4\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}}$

$\boldsymbol{\Delta_\beta=\Delta_\gamma} \Leftrightarrow \gamma(\tau-\gamma)(\alpha-\beta)^2=\beta(\tau-\beta)(\gamma-\alpha)^2 \Leftrightarrow (\gamma-\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)=(\beta-\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma)$

$\Leftrightarrow \quad \alpha^2\gamma+\beta^2\gamma\ \underline{-2\alpha\beta\gamma\tau}\ -\alpha^2\gamma^2\ \underline{-\beta^2\gamma^2}+2\alpha\beta\gamma^2=\alpha^2\beta+\beta\gamma^2\tau\ \underline{-2\alpha\beta\gamma\tau}\ -\alpha^2\beta^2\ \underline{-\gamma^2\beta^2}+2\alpha\beta^2\gamma$

Απαλείφοντας τους ίδιους όρους και στα δύο ίσα μέρη $-2\alpha\beta\gamma\tau$ και $-\beta^2\gamma^2$ έχομε:

$\Leftrightarrow(\alpha^2\gamma-\alpha^2\beta)+(\beta^2\gamma-\beta\gamma^2\tau)+(\alpha^2\beta^2-\alpha^2\gamma^2)+(2\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta^2\gamma)=0 \Leftrightarrow \alpha^2\tau(\gamma-\beta)-\beta\gamma\tau(\gamma-\beta)-\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)+2\alpha\beta\gamma(\gamma-\beta)=0$ (…)

$\Leftrightarrow(\gamma-\beta)\{\alpha^2 2\tau-\beta\gamma 2\tau-2\alpha^2(\beta+\gamma)+4\alpha\beta\gamma\}=0 \Leftrightarrow (\beta-\gamma)\{\alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha-\beta\gamma(\beta+\gamma)\}=0$ **(α)**

$(\beta-\gamma)\{(\tau-\alpha)(\alpha^2+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma\}=0$ **(β)**

§Β2: Συνάρτηση $f(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha-\beta\gamma(\beta+\gamma)$ με $\beta>\gamma>0$ έχει επιλεγμένες τιμές

$f(\gamma)=\gamma^3-(\beta+\gamma)\gamma^2+3\beta\gamma^2-\beta\gamma(\beta+\gamma)=-\gamma^2(\beta+\gamma-\gamma)-\beta\gamma(\beta+\gamma-3\gamma)=-\beta\gamma^2-\beta\gamma(\beta-2\gamma)=-\beta\gamma(\gamma+\beta-2\gamma)=\beta\gamma(\gamma-\beta)<0$

$f(\beta)=\beta\gamma(\beta-\gamma)>0$, διότι $f(\alpha)$ είναι συμμετρική παράσταση ως προς β και γ

$f(\beta-\gamma)=(\beta-\gamma)^3-(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)^2+3\beta\gamma(\beta-\gamma)-\beta\gamma(\beta+\gamma)=(\beta-\gamma)^2(\beta-\gamma-\beta-\gamma)+\beta\gamma(3\beta-3\gamma-\beta-\gamma)=$

$-2\gamma(\beta-\gamma)^2+\beta\gamma(2\beta-4\gamma)=-2\gamma(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)+2\beta^2\gamma-4\beta\gamma^2=-2\beta^2\gamma-2\gamma^3+4\beta\gamma^2+2\beta^2\gamma-4\beta\gamma^2=-2\gamma^3<0$

§Β3: Έστω Εξίσωση $f(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\alpha^3-(\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha-\beta\gamma(\beta+\gamma)=0$ με $\beta>\gamma>0$

Με αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής $\alpha=x+\frac{\beta+\gamma}{3}$ η εξίσωση $f(\alpha)=0$ γίνεται:

$f(x)\overset{\text{def}}{=}(x+\frac{\beta+\gamma}{3})^3-(\beta+\gamma)(x+\frac{\beta+\gamma}{3})^2+3\beta\gamma(x+\frac{\beta+\gamma}{3})-\beta\gamma(\beta+\gamma)$

$f(x)\overset{\text{def}}{=}\{x^3+(\beta+\gamma)x^2+\frac{(\beta+\gamma)^2}{3}x+\frac{(\beta+\gamma)^3}{3^3}\}\ -(\beta+\gamma)\{x^2+2\,\frac{\beta+\gamma}{3}x+\frac{(\beta+\gamma)^2}{3^2}\}+3\beta\gamma x+\beta\gamma(\beta+\gamma)-\beta\gamma(\beta+\gamma)$

$f(x)\overset{\text{def}}{=}x^3+(\beta+\gamma)x^2+\frac{(\beta+\gamma)^2}{3}x+\frac{(\beta+\gamma)^3}{27}-(\beta+\gamma)x^2-2\,\frac{(\beta+\gamma)^2}{3}x-\frac{(\beta+\gamma)^3}{9}+3\beta\gamma x$

$f(x)\overset{\text{def}}{=}x^3+\{3\beta\gamma+\frac{(\beta+\gamma)^2}{3}-2\frac{(\beta+\gamma)^2}{3}\}x+\frac{(\beta\pm\gamma)^3}{27}\ -\frac{(\beta+\gamma)^3}{9}$ και τελικά

$f(x)=x^3+mx+n=0$ με $m=3\beta\gamma-\frac{(\beta+\gamma)^2}{3}$ και $n=-\frac{2(\beta+\gamma)^3}{27}$.

Ορίζομε $\mathbb{D}\overset{\text{def}}{=}\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}$ και για να έχει η εξίσωση $f(x)=0$ μία μόνο πραγματική ρίζα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbb{D}>0$. Με $\mathbb{D}=\frac{1}{27}[(\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})^3+(3\beta\gamma-\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})^3]=\frac{3\beta\gamma}{27}[(\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})^2-(\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})(3\beta\gamma-\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})+(3\beta\gamma-\frac{(\beta+\gamma)^2}{3})^2]=$

$=\frac{3\beta\gamma}{27}[\frac{(\beta+\gamma)^4}{9}-\beta\gamma(\beta+\gamma)^2+\frac{(\beta+\gamma)^4}{9}+9\beta^2\gamma^2-2\beta\gamma(\beta+\gamma)^2+\frac{(\beta+\gamma)^4}{9}]=\frac{\beta\gamma}{27}[(\beta+\gamma)^4-9\beta\gamma(\beta+\gamma)^2+27\beta^2\gamma^2]=$ (…)

$=\frac{\beta\gamma}{27}[\beta^4-5\beta^3\gamma+15\beta^2\gamma^2-5\beta\gamma^3+\gamma^4]$ (…) οπότε τελικά

$$\mathbb{D}=\frac{\beta\gamma}{27}[(\beta^2-\tfrac{5}{2}\beta\gamma)^2+(\gamma^2-\tfrac{5}{2}\beta\gamma)^2+\tfrac{5}{2}\beta^2\gamma^2]$$ προφανώς για $\beta>0$, $\gamma>0$, $\mathbb{D}>0$.

Η εκθετική συνάρτηση με τα “μάτια” του κορωνοϊου

Μαθιουδάκης Νίκος, Πλέσσα Σταματίνα, *Προπτυχιακοί φοιτητές τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ*

Εισαγωγικό σημείωμα: *Στο πλαίσιο του μαθήματος «Πρακτική Άσκηση σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης» του τμήματος Μαθηματικών στο ΕΚΠΑ, το οποίο πραγματοποιήθηκε το εαρινό εξάμηνο 2019-2020 με υπεύθυνο καθηγητή τον Γ. Ψυχάρη, δημιουργήσαμε την παρακάτω εργασία την οποία επεξεργάστηκαν 3 μαθητές του Πειραματικού Λυκείου Αγίων Αναργύρων. Οι ασκήσεις, οι οποίες περιέχονται στην εργασία σχετίζονται με την εξάπλωση του SARS-Cov-2. Για την ολοκλήρωση της εργασίας χρειάστηκαν 4 διδακτικές ώρες καθώς μέριμνά μας αποτέλεσε η* ***διερεύνηση του τρόπου σκέψης των μαθητών*** *και όχι* ***απλώς η επίλυση των ασκήσεων.***

Πηγή μας αποτέλεσε η επικαιρότητα και η συνομιλία μας με Βιολόγο και Φαρμακοποιό. Η θεματική περιοχή στην οποία πραγματοποιήθηκε η παρέμβαση στους μαθητές ήταν η ***εκθετική συνάρτηση****. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις τις οποίες χρειάζονταν να έχουν οι μαθητές ήταν η έννοια της συνάρτησης, η κατασκευή και η ερμηνεία γραφικής παράστασης και η στρογγυλοποίηση αριθμών. Στόχος μας ήταν η εμπέδωση της έννοιας της εκθετικής συνάρτησης, η* ***εξοικείωση*** *των μαθητών με* ***προβλήματα μοντελοποίησης, η καλύτερη διαχείριση των γραφικών παραστάσεων*** *από τους μαθητές, η δυνατότητα να μοντελοποιούν ένα πραγματικό πρόβλημα, η άμεση σύνδεση των Μαθηματικών με την* ***πραγματική ζωή*** *και με τις επιστήμες υγείας, η ανάδειξη της χρήσης των Μαθηματικών σε προβλήματα της επικαιρότητας και η έμφαση στον πολυδιάστατο χαρακτήρα των προβλημάτων της επικαιρότητας. Τέλος, η ποικιλία των ερωτημάτων στοχεύει στην εγρήγορση των μαθητών.*

Αρχικά, για να ξεκινήσουμε τη δραστηριότητα δείξαμε στα παιδιά ένα βίντεο με τον καθηγητή του MIT, Κ. Δασκαλάκη με σκοπό να τους εισάγουμε στο κλίμα της δραστηριότητας και να διερευνήσουν μόνοι τους τη γενική μορφή της εκθετικής συνάρτησης. Στο video ο Δασκαλάκης επεσήμανε τον τρόπο με τον οποίο εξαπλώνεται ο κορωνοϊός αλλά και την σημαντικότητα της καθιέρωσης της καραντίνας. Ύστερα έγινε μία συζήτηση με τους μαθητές πάνω στο συγκεκριμένο video.

Εκθετική Συνάρτηση και Μοντελοποίηση

Η εξάπλωση του SARS-Cov-2 **αυξάνεται** σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση $f(t) = αβ^t$ στις ευρωπαϊκές χώρες, όπου α, β σταθερές και t δηλώνει την κάθε ημέρα που πέρασε από την εμφάνιση των πρώτων κρουσμάτων (δηλαδή η ημερά 0 αναφέρεται στην εμφάνιση των πρώτων κρουσμάτων, η ημέρα 1 είναι η πρώτη μέρα ύστερα από την εμφάνιση των πρώτων κρουσμάτων κ.ο.κ.).

Έτσι έχουμε:

κρούσματα	3	8	22	59	159	430	1162
ημέρα	0	1	2	3	4	5	6

Στον παρακάτω πίνακα αποτυπώνονται τα κρούσματα του ιού στην Ιταλία ημερησίως.

κρούσματα	8.473			8.862.938	64.610.819	
ημέρα		10	11			18

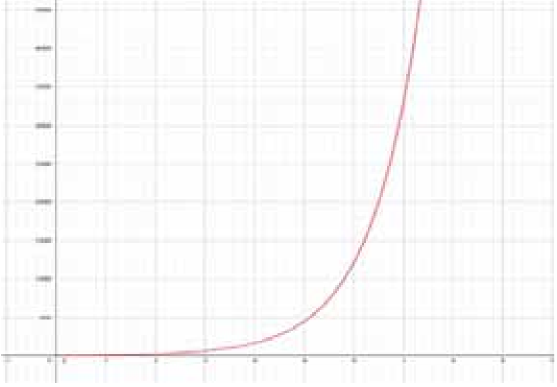
α) Μελετώντας τον παραπάνω πίνακα βρείτε τις τιμές των α,β κάνοντας τις απαραίτητες προσεγγίσεις. (π.χ. 5,78→6, 3,5→3 κ.ο.κ και επίσης 2,666→2,7 και 2,7≅e)

β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

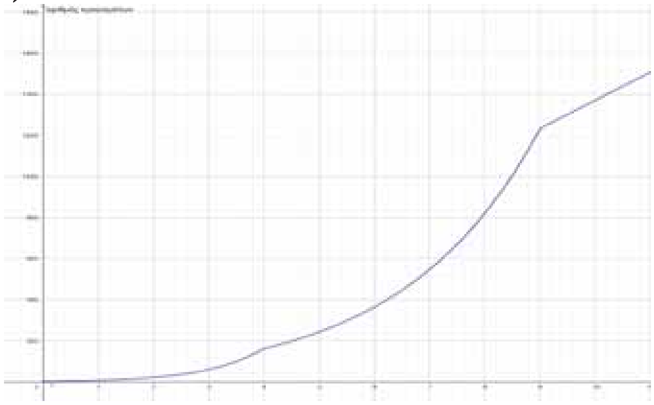
γ) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

δ) Αν υποθέσουμε ότι η Ιταλία είχε πάρει περιοριστικά μέτρα για την εξάπλωση του κορωνοϊού την ημέρα 4 τότε η γραφική παράσταση που θα απεικόνιζε την εξάπλωση θα ήταν όπως στο:

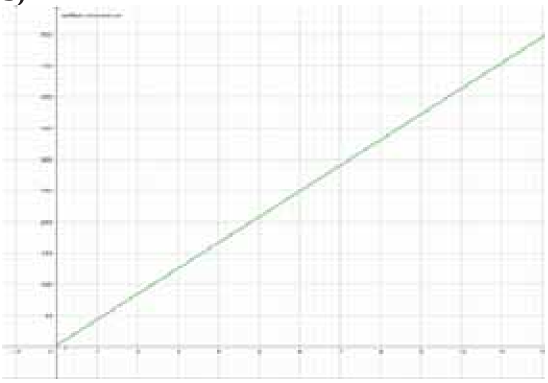
1)



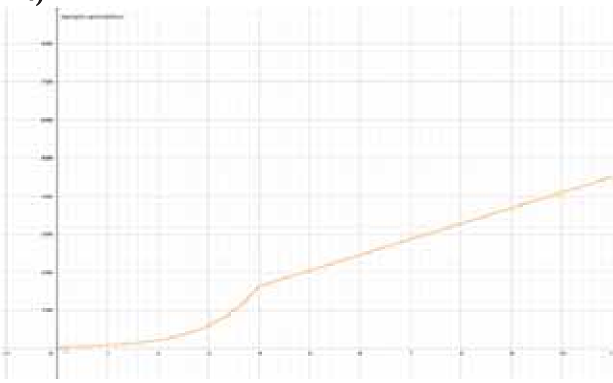
2)



3)



4)



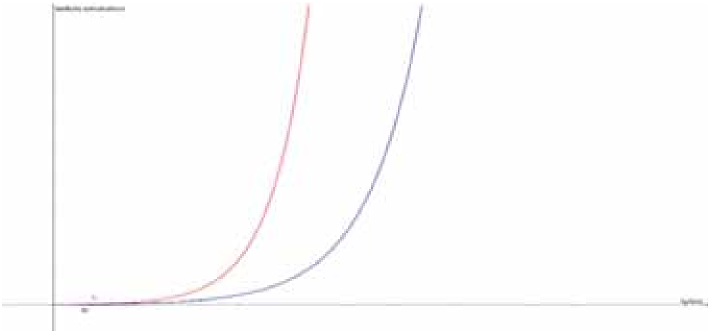
ε) Να συγκρίνετε το πλήθος των κρουσμάτων την 12η μέρα που θα είχε η Ιταλία χωρίς τα μέτρα με το πλήθος των κρουσμάτων που θα έχει η Ιταλία ύστερα από περιοριστικά μέτρα. Τι παρατηρείτε;

στ) Υποθέτουμε ότι η Αγγλία και η Ιταλία έχει κάνει άρση των μέτρων και έχει αποκατασταθεί η κανονικότητα αλλά παρατηρείται νέο κύμα κρουσμάτων.

i. Αν πάρουμε ως δεδομένο ότι η θερμοκρασία επηρεάζει την μετάδοση του ιού και η συνάρτηση που δίνει τα συνολικά κρούσματα αν αυτά εξαρτώνται από τη θερμοκρασία είναι η εξής:

$$\mathbf{g(\theta)} = \begin{cases} (\boldsymbol{e-0,01\theta})^{\boldsymbol{t}}, & \boldsymbol{0 \le \theta < 30} \\ (\boldsymbol{e-0,03\theta})^{\boldsymbol{t}}, & \boldsymbol{30 \le \theta \le 45} \end{cases}, \boldsymbol{t \ge 0}$$

όπου θ η θερμοκρασία σε °C και t η μέρα μετά την εμφάνιση των πρώτων κρουσμάτων.



Για t=6 πόσα θα είναι τα συνολικά κρούσματα για την Αγγλία αν η μέση θερμοκρασία της κυμαίνεται στους 20°C και για την Ιταλία αν η μέση θερμοκρασία της κυμαίνεται στους 40°C; Τι έχετε να παρατηρήσετε σχετικά με την θερμοκρασία και την εξάπλωση του ιού; (Για τις πράξεις e≅2,7).

ii. Σύμφωνα με το συμπέρασμα που βγάλατε στο προηγούμενο ερώτημα ποιά καμπύλη αντιστοιχεί στην Αγγλία με μέση θερμοκρασία 20°C και ποια στην Ιταλία με μέση θερμοκρασία 40°C; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ο ανθρώπινος πνεύμονας αποτελείται από επιθηλιακά κύτταρα, τα οποία όταν ο ιός SARS-Cov-2 εισέλθει στον οργανισμό τα μολύνει. Υποθέτουμε ότι ο μέσος πνεύμονας αποτελείται από 500.000.000 επιθηλιακά κύτταρα. Σε έναν ασθενή από κορονοΐο ο οποίος ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και δεν νοσηλεύεται, παρατηρείται η εξής κατάσταση: Αρχικά, όταν εισέλθει ο ιός στον οργανισμό του, μολύνονται 1000 επιθηλιακά κύτταρα του πνεύμονα. Τις 3 πρώτες μέρες παρατηρείται μια εκθετική μόλυνση των κυττάρων τα οποία γίνονται στο σύνολο 5.604.760. Για τα επόμενα 2 εικοσιτετράωρα παρατηρείται σταθερότητα. Τελικά, όμως, ο οργανισμός λόγω του εξασθενημένου ανοσοποιητικού συστήματος δεν μπορεί να αντεπεξέλθει με αποτέλεσμα τα μολυσμένα κύτταρα να αυξάνονται εκθετικά με ρυθμό όπως και τις 3 πρώτες μερες. Έτσι, ο ασθενής ύστερα από 4,5 μέρες μολύνεται σχεδόν εξ’ ολοκλήρου.

ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση που περιγράφει την παραπάνω κατάσταση.

Γενικές παρατηρήσεις:

Από το (α) ερώτημα οι μαθητές παρατήρησαν, τον πίνακα που τους είχαμε δώσει και διαβάζοντας την εκφώνηση δεν καταλάβαιναν πλήρως την έννοια της προσέγγισης στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο. Ύστερα από συζήτηση που έκαναν τα παιδιά μεταξύ τους και με εμάς καθώς και με τη βοήθεια παραδειγμάτων κατάφεραν να βρουν τα α,β και εν τέλη τον τύπο της συνάρτησης. Στο (β) ερώτημα οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν έναν πίνακα και έγινε μία συζήτηση σχετικά με τη διαδικασία που ακολούθησαν. Επίσης, προέκυψε και μία συζήτηση σχετικά με τη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $\mathbf{e^x}$ και **lnx**. Συνεχίζοντας στο (γ) ερώτημα οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ενώ φάνηκε να καταλαβαίνουν **που θα τέμνει** η γραφική παράσταση τον άξονα y’y ο ένας από τους μαθητές αντιμετώπισε πρόβλημα σχετικά με το πως θα σχεδιαστεί η γραφική παράσταση. Συγκεκριμένα, προς τα που θα είναι τα **κοίλα της συνάρτησης**. Έπειτα ενώ ήξεραν τι αντιπροσωπεύει ο κάθε άξονας οι 2 από τους 3 μαθητές φάνηκε να μην έλαβαν υπόψιν τους το πεδίο ορισμού.

Ακολούθησε το (δ) ερώτημα στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ανάμεσα σε 4 γραφικές παραστάσεις, την μία που περιγράφει την κατάσταση που τους δώσαμε. Έτσι, οι μαθητές άρχισαν να εκφράζουν τις σκέψεις τους οι οποίες παρουσίασαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς χρησιμοποίησαν και οι 3 τη **μέθοδο της απόκλισης** αιτιολογώντας την κάθε τους σκέψη (βοήθεια αποτέλεσαν, όλα όσα είχαν ακούσει από τις ειδήσεις σχετικά με τα κρούσματα και πότε βλέπουμε την σταθεροποίηση και πτώση αυτών, ύστερα από την επιβολή περιοριστικών μέτρων) με αποτέλεσμα να φτάσουν πολύ γρήγορα στο συμπέρασμα. Στη συνέχεια, στο (ε) ερώτημα οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να βρουν τα κρούσματα τη $12^η$ μέρα στην περίπτωση που είχαν παρθεί περιοριστικά μέτρα λόγω της απώλειας τύπου. Ύστερα, σκέφτηκαν ποια είναι τα διαθέσιμα εργαλεία που έχουν και τα αξιοποίησαν. Στο ερώτημα (στ΄), οι μαθητές αφού διάβασαν την εκφώνηση του ερωτήματος το αντιμετώπισαν με μη αναμενόμενη ευκολία, συμμετείχαν και οι τρεις σε διάλογο μαζί μας. Έτσι, οι μαθητές διατύπωσαν τις σκέψεις τους με μεγαλύτερη άνεση σε σχέση με τα προηγούμενα ερωτήματα.

Στη συνέχεια στο ($στ_i$) ερώτημα που θέσαμε στους μαθητές, τους ζητήσαμε να βγάλουν τα δικά τους συμπεράσματα σύμφωνα με την διαπίστωση που έκαναν στο προηγούμενο ερώτημα. Έτσι, οι μαθητές διατύπωσαν τις σκέψεις τους και κατέληξαν οι 2 από τους 3 να διαφωνούν με τον $3^ο$ μαθητή, αλλά ύστερα από ανταλλαγή απόψεων, με εμάς και μεταξύ τους, κατέληξε να συμφωνεί με τους άλλους 2 μαθητές. Τέλος, στο ($στ_{ii}$) ερώτημα οι μαθητές κλήθηκαν να **μοντελοποιήσουν** ένα πραγματικό πρόβλημα φτιάχνοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που αποτύπωνε την κατάσταση που τους αναλύαμε. Ενώ στην αρχή φάνηκε ότι οι μαθητές είχαν κατανοήσει ποια μορφή θα έχει η συνάρτηση, από ποιο σημείο σημείο θα ξεκινάει και τι δηλώνει ο κάθε άξονας στη συνέχεια παρατηρήσαμε ότι μάλλον λόγω του ότι δεν έχουν εξοικιωθεί με τέτοιου είδους ασκήσεις δυσκολεύτηκαν σε πολλά σημεία (π.χ. δυσκολεύτηκαν στο να κατανοήσουν ότι η συνάρτηση έχει 3 κλάδους, στο να βρουν τον τύπο της, στο να την αποτυπώσουν γραφικά και να διαπιστώσουν ότι ο $3^{ος}$ κλάδος προκύπτει εφαρμόζοντας τις κατάλληλες μετατοπίσεις). Ωστόσο, με την συνεργασία που είχαν οι μαθητές και μέσω παραδειγμάτων, που έθετε ο ένας στον άλλον, κατάφεραν να λύσουν το πρόβλημα.

Όσον αφορά τις **στρατηγικές** που χρησιμοποίησαν οι μαθητές προκειμένου να εξάγουν τα συμπεράσματά τους ποικίλουν αφού διαπιστώσαμε ότι διερεύνησαν, ερμήνευσαν και αιτιολόγησαν τα αποτελέσματά τους, πειραματίστηκαν, δημιούργησαν μαθηματικά μοντέλα και έκαναν χρήση μαθηματικών εργαλείων.

Το συγκεκριμένο μαθηματικό έργο το επιλέξαμε για να κάνουμε την **σύνδεση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα**. Επίσης, θέλαμε να εξετάσουμε αν οι μαθητές έχουν κατακτήσει την έννοια της εκθετικής συνάρτησης. Ακόμα, μετά από αυτήν την άσκηση ευελπιστούμε οι μαθητές να διαχειρίζονται με μεγαλύτερη ευκολία τα γραφήματα. Επίσης, ένας ακόμα στόχος μας ήταν οι μαθητές μέσα από το τελευταίο ερώτημα **να έρθουν σε επαφή με την μοντελοποίηση ενός πραγματικού γεγονότος** και να εξοικειωθούν με αυτό. Τέλος, λόγω των επικείμενων συνθηκών, πιστεύουμε ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα, όχι μόνο τράβηξε το ενδιαφέρον των μαθητών αλλά και τόνισε τη σημαντικότητα των μαθηματικών μοντέλων.

Η δραστηριότητα είναι έτσι δομημένη ώστε οι μαθητές να εφαρμόσουν τις θεωρητικές γνώσεις που έχουν σχετικά με την εκθετική συνάρτηση στην πράξη (ερμηνεία γραφικών παραστάσεων). Επίσης, στο ερώτημα (ε) οι μαθητές ήρθαν αντιμέτωποι με την εφαρμογή μίας συνηθισμένης και γνώριμης σε αυτούς μέθοδο (απλή αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης και εξαγωγή αποτελέσματος) αλλά και με την εφαρμογή μίας λιγότερο συνηθισμένης μεθόδου (εξαγωγή αποτελέσματος μέσω γραφικής παράστασης). Τέλος, μέσω αυτής της δραστηριότητας ελπίζουμε και αναμένουμε οι μαθητές να μπορούν να διαχωρίσουν την ανεξάρτητη με την εξαρτημένη μεταβλητή.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

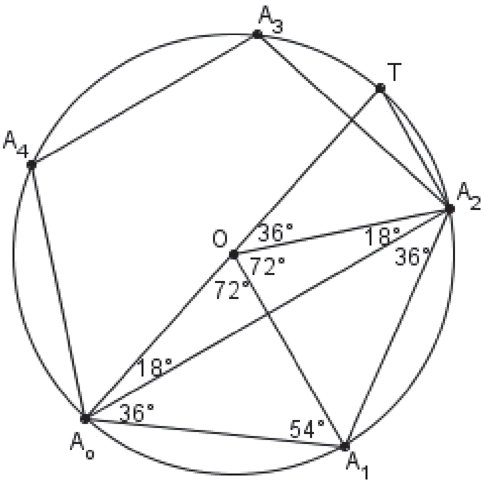
Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 337 (ΤΕΥΧΟΣ 113)

Έστω $A_oA_1A_2A_3A_4$ ένα κανονικό πεντάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα $R=1$. Να αποδείξετε ότι $(A_oA_1\cdot A_oA_2)^2=5$

(Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο)

ΛΥΣΗ (Σταματογιάννης Γιάννης - Πετρούπολη)



Αν Τ είναι το αντιδιαμετρικό του A_o, τότε το τμήμα A_2T είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R).

Με $R=1$ έχουμε:

$$\alpha_5=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ και } \lambda_5^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

οπότε $(A_oA_1)^2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Επιπλέον, από τον τύπο του Αρχιμήδη προκύπτει

$$\lambda_{10}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

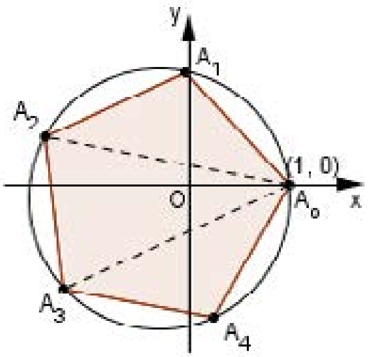
και από το ορθογώνιο τρίγωνο A_2TA_o έχουμε:

$$(A_oA_2)^2=4R^2-\lambda_{10}^2=4-\frac{1}{4}\left(6-2\sqrt{5}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Επομένως,

$$(A_oA_1\cdot A_oA_2)^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{2}=5$$

2η ΛΥΣΗ (Ανδρής Ιωάννης - Αθήνα)



Θεωρούμε την εξίσωση $z^5-1=0$, (1) η οποία πέρα από τη μονάδα, έχει και τις μιγαδικές ρίζες

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$$

των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4 αντίστοιχα. Αυτά, μαζί με το σημείο $A_o(1,0)$ σχηματίζουν το κανονικό πεντάγωνο $A_oA_1A_2A_3A_4$ με κορυφές στο μοναδιαίο κύκλο, όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου ισχύουν:

$$A_oA_1=|1-z_1|,\ A_oA_2=|1-z_2|,\ A_oA_3=|1-z_3|,\ A_oA_4=|1-z_4|$$

Επιπλέον, όπως εύκολα προκύπτει από το σχήμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}(A_oA_1\cdot A_oA_2)^2&=A_oA_1\cdot A_oA_1\cdot A_oA_2\cdot A_oA_2\\&=A_oA_1\cdot A_oA_2\cdot A_oA_3\cdot A_oA_4\\&=|(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_4)|,\ (2)\end{aligned}$$

Από την (1) προκύπτει ότι

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)=z^4+z^3+z^2+z+1$$

από την οποία, με $z=1$ παίρνουμε:

$$(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_4)=5$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}(A_oA_1\cdot A_oA_2)^2=5$$

Σημείωση

Λύση βασισμένη στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών λάβαμε και από τον Γιώργο Δεληστάθη, ο οποίος μας θυμίζει ότι η γενίκευση του παραπάνω θέματος είχε ζητηθεί ως 2^o Θέμα στις εισαγωγικές εξετάσεις του Πολυτεχνείου το 1971

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος και Χατζηελανίδης Πέτρος – Θεσσαλονίκη, Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή

ΑΣΚΗΣΗ 338 (ΤΕΥΧΟΣ 113)

Έστω (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ μια ακολουθία με

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \text{ και } \alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} \text{ για κάθε } \nu \ge 1$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\left(4^\nu(2-\alpha_\nu)\right)$

(Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο)

ΛΥΣΗ (Γιώργος Δεληστάθης - Αθήνα)

Είναι: $\alpha_2 = \sqrt{2+\alpha_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$$= \sqrt{2\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}} = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^3}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\alpha_1 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^2},\ \alpha_2 = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^3}$$

και επαγωγικά βρίσκουμε ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\alpha_\nu = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}$, οπότε

$$\lim\left(4^\nu(2-\alpha_\nu)\right) = \lim 2\cdot 4^\nu\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}\right)$$

$$= \lim\left(4\cdot 4^\nu \eta\mu^2\frac{\pi}{2^{\nu+2}}\right) = \lim\left(2^{\nu+1}\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+2}}\right)^2$$

$$= \lim\left(\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+2}}}{\frac{\pi}{2^{\nu+2}}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

αφού η ακολουθία $\beta_\nu = \frac{\pi}{2^{\nu+2}}$ είναι προφανώς μηδενική, οπότε $\lim\frac{\eta\mu\beta_\nu}{\beta_\nu} = 1$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΑΣΚΗΣΗ 339 (ΤΕΥΧΟΣ 113)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{\alpha^5}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^5}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^5}{\alpha+\beta} \ge 8(\mathrm{AB\Gamma})^2$$

(Νικητάκης Γιώργος – Σητεία)

ΛΥΣΗ (Διονύσης Γιάνναρος –Πύργος)

Είναι:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{AB\Gamma})^2 = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$$

$$\Rightarrow (\mathrm{AB\Gamma})^2 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow 8(\mathrm{AB\Gamma})^2 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha), (1)$$

Επίσης, έχουμε:

$$\frac{\alpha^5}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^5}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^5}{\alpha+\beta}$$

$$= \frac{\alpha^6}{\alpha(\beta+\gamma)} + \frac{\beta^6}{\beta(\gamma+\alpha)} + \frac{\gamma^6}{\gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{(\alpha^3)^2}{\alpha(\beta+\gamma)} + \frac{(\beta^3)^2}{\beta(\gamma+\alpha)} + \frac{(\gamma^3)^2}{\gamma(\alpha+\beta)} \ge \frac{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{2}\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha},\ (2)$$

Εύκολα, από την ανισότητα Αριθμητικού – Γεωμετρικού Μέσου παίρνουμε

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{2} \ge \frac{3}{2}\alpha\beta\gamma$$

και από το συνδυασμό των

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \ge \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{9} \text{ και}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \ge \frac{3}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

καταλήγουμε στην

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \ge \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

Έτσι λοιπόν, λόγω και των (1), (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{3}{2}\alpha\beta\gamma\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \ge \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$$

ή, αρκεί

$$\alpha\beta\gamma \ge (\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)$$

που ισχύει.

Λύση έστειλαν επίσης οι Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο, Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή

Σημείωση σύνταξης

i. Από την γνωστή ανισότητα $x+y \ge 2\sqrt{xy}$ που ισχύει για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς, εύκολα συμπεραίνουμε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τρίγωνο με πλευρές α, β, γ και θέσουμε

$$\alpha+\beta-\gamma=x,\ \beta+\gamma-\alpha=y,\ \gamma+\alpha-\beta=z$$

τότε προφανώς οι x, y, z είναι θετικοί και

$$x+y=2\beta,\ y+z=2\gamma,\ z+x=2\alpha$$

οπότε η παραπάνω ανισότητα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

Αν οι αριθμοί α, β, γ παριστάνουν μήκη πλευρών τριγώνου, τότε ισχύει

$$\alpha\beta\gamma\geq(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)$$

που γράφεται και $\alpha\beta\gamma\geq(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$

όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Η τελευταία με τη βοήθεια των τύπων

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\ \text{ και }\ E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

οδηγεί στην γνωστή ανισότητα $R\geq 2\rho$ **(Eüler)**

ii. Αποδεικνύεται ότι:

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί και x, y, z οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν:

- $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}\geq\dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$
- $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\geq\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

Η απόδειξη της πρώτης είναι απλή, ενώ η δεύτερη αποδεικνύεται με τη βοήθεια της πρώτης. Η δεύτερη συχνά στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως **ανισότητα Andreescu**, ενώ ο ίδιος την αναφέρει ως βοηθητικό λήμμα.

iii. Αποδεικνύεται ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ, κ, λ, μ, x, y, z ισχύει η ανισότητα

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)^{\frac{1}{3}}(x^3+y^3+z^3)^{\frac{1}{3}}\geq\alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu z$$

ανισότητα Holder

Αν σ' αυτή θέσουμε $\kappa=\lambda=\mu=x=y=1$ εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{9}$$

ΑΣΚΗΣΗ 340 (ΤΕΥΧΟΣ 113)

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$S=\frac{\sqrt{x^4+x^2+2x+1}+\sqrt{x^4-2x^3+5x^2-4x+1}}{x}$$

όταν το x μεταβάλλεται στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

(Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον)

ΛΥΣΗ (Γιάνναρος Διονύσης - Πύργος)

Είναι:

$$S=\frac{\sqrt{(x^2)^2+(x+1)^2}+\sqrt{(x^2-x)^2+(2x-1)^2}}{x}$$
$$=\frac{\sqrt{(x^2)^2+(x+1)^2}}{x}+\frac{\sqrt{(x^2-x)^2+(2x-1)^2}}{x}$$
$$=\sqrt{x^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{(x-1)^2+\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}$$

Αν θεωρήσουμε τα σημεία

$$A\left(x,\frac{1}{x}\right),\ x>0,\ B(1,2),\ \Gamma(0,-1)$$

τότε έχουμε: $S=(A\Gamma)+(AB)$

Τα Β, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν του πρώτου κλάδου της υπερβολής $y=\dfrac{1}{x},\ x>0$ οπότε το άθροισμα $(AB)+(A\Gamma)$ γίνεται ελάχιστο, μόνο όταν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Επιπλέον, $\overrightarrow{\Gamma A}=\left(x,\dfrac{1}{x}+1\right)$, $\overrightarrow{\Gamma B}=(1,3)$ οπότε τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν:

$$\det(\overrightarrow{\Gamma A},\overrightarrow{\Gamma B})=0\Leftrightarrow 3x-\frac{1}{x}-1=0\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0$$
$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

Γι' αυτή την τιμή του x το άθροισμα παίρνει την ελάχιστη τιμή του και επειδή

$$\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{13}-1}{2},\ x-1=\frac{\sqrt{13}-5}{6}$$

εύκολα βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι ίση με $\sqrt{10}$

Σημείωση

Λύση με τη βοήθεια της ανίσωσης

$$|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\geq|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$$

(που καθίσταται ισότητα μόνο όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα) πήραμε από τον **Γιώργο Δεληστάθη**, ο οποίος θεώρησε το διανύσματα

$$\vec{\alpha}=\left(x,1+\frac{1}{x}\right),\ \vec{\beta}=\left(x-1,\frac{1}{x}-2\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 341 (ΤΕΥΧΟΣ 114)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{(\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}\leq\frac{\tau^2}{3\rho(4R+\rho)}$$

όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου , ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο)

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού

$$E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}=\tau\rho=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

έχουμε:

$$\frac{\tau^2}{3\rho(4R+\rho)}=\frac{\tau^4}{3E(4R\tau+E)}=\frac{\tau^3}{3\alpha\beta\gamma+3(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\tau^2}{\tau^2-(\alpha+\beta+\gamma)\tau+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha+\beta+\gamma)^2+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha}{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha},\quad \textbf{(1)}$$

οπότε για την απόδειξη της δοσμένης ανισότητας, δεδομένου ότι οι όροι του τελευταίου κλάσματος είναι θετικοί, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$3(\beta+\gamma)^2(-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)$$
$$\le 4\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)$$

ή, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι τιμές του τριώνυμου του α

$$(3\beta^2+10\beta\gamma+3\gamma^2)\alpha^2-2(\beta+\gamma)(3\beta^2+3\beta\gamma+3\gamma^2)\alpha+(\beta+\gamma)^2(3\beta^2-2\beta\gamma+3\gamma^2)$$

είναι μονίμως μη αρνητικές.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι για τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου ισχύει $\Delta\le 0$.

Πραγματικά, αν για ευκολία στους υπολογισμούς θέσουμε $3\beta^2+3\gamma^2=\theta>0$ τότε έχουμε:

$$\Delta=4(\beta+\gamma)^2[(\theta+2\beta\gamma)^2-(\theta-2\beta\gamma)(\theta+10\beta\gamma)]$$
$$=4(\beta+\gamma)^2(4\beta\gamma\theta+4\beta^2\gamma^2-8\beta\gamma\theta+20\beta^2\gamma^2)$$
$$=4(\beta+\gamma)^2(-4\beta\gamma\theta+24\beta^2\gamma^2)=-48\beta\gamma(\beta+\gamma)^2(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)$$
$$=-48\beta\gamma(\beta+\gamma)^2(\beta-\gamma)^2\le 0$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλε επίσης ο Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή.

Σχόλιο

Εκτός από την παραπάνω λύση, ο συνάδελφος αναφέρει ότι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{27\alpha\beta\gamma}$$

παρεμβάλλεται ανάμεσα στους όρους της παραπάνω ανισότητας.

Σημείωση σύνταξης

Από την ισότητα (1) προκύπτει άμεσα ότι σε οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\ (2)$$

Αποδεικνύεται ότι, με τον συνηθισμένο συμβολισμό, οι πλευρές α, β, γ ενός τριγώνου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3-2\tau x^2+(\tau^2+\rho^2+4R\rho)x-4\tau R\rho=0$$

οπότε, σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\tau^2+\rho^2+4R\rho\ \text{Vieta}$$

(προηγούμενο τεύχος).

Με τη βοήθεια αυτής μπορούμε να δείξουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2<4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα η (2).

Αν δε συνυπολογίσουμε και την ανισότητα

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\ge 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, συμπεραίνουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$3\le\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}<4$$

ΑΣΚΗΣΗ 342 (ΤΕΥΧΟΣ 114)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\Gamma=90^o)$ με $\hat{B}=30^o$. Ένα σημείο Ρ εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ έχει την ιδιότητα $PA=\sqrt{3}$, $PB=5$ και $P\Gamma=2$

Να υπολογίσετε τις πλευρές του ΑΒΓ.

(Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι)

ΛΥΣΗ (Καραβότας Δημήτριος **– Κάτω Αχαΐα)**

Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{B}=30^o$, οπότε ισχύει $AB=2\beta$ και όπως εύκολα προκύπτει, $B\Gamma=\beta\sqrt{3}$

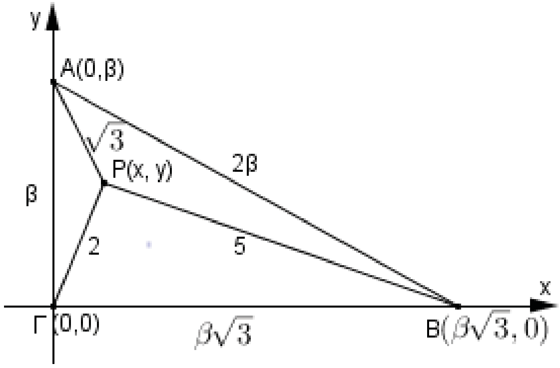
Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα με αρχή το σημείο Γ και άξονες τις ευθείες των πλευρών ΒΓ και ΓΑ. Τότε έχουμε:

$A(0,\beta)$, $B(\beta\sqrt{3},0)$, $P(x,y)$ και $\Gamma(0,0)$, οπότε,

$$P\Gamma=\sqrt{x^2+y^2}=2\Rightarrow x^2+y^2=4,\ (1)$$

$$PB=\sqrt{(x-\beta\sqrt{3})^2+y^2}=5\Rightarrow\left(x-\beta\sqrt{3}\right)^2+y^2=25,\ (2)$$

$$PA=\sqrt{x^2+(y-\beta)^2}=\sqrt{3}\Rightarrow x^2+(y-\beta)^2=3,\ (3)$$



Οι (2) και (3) λόγω της (1) δίνουν

$$3\beta^2-2\beta\sqrt{3}x=21 \ \text{ και } \ \beta^2-2\beta y=-1$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$x=\frac{3\beta^2-21}{2\beta\sqrt{3}} \ \text{ και } \ y=\frac{\beta^2+1}{2\beta}$$

Επομένως, η (1) γράφεται

$$\left(\frac{3\beta^2-21}{2\beta\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\beta^2+1}{2\beta}\right)^2=4$$

που είναι ισοδύναμη με την διτετράγωνη εξίσωση

$$\beta^4-14\beta^2+37=0$$

Η τελευταία έχει θετικές ρίζες τους αριθμούς

$$\sqrt{7-2\sqrt{3}} \ \text{ και } \ \sqrt{7+2\sqrt{3}}$$

Από αυτές η πρώτη απορρίπτεται διότι πρέπει $\beta>2$ Άρα, οι πλευρές του τριγώνου είναι:

$$\alpha=\sqrt{21+6\sqrt{3}},\ \beta=\sqrt{7+2\sqrt{3}} \ \text{ και } \ \gamma=2\sqrt{7+2\sqrt{3}}$$

Λύση έστειλαν επίσης οι Γιώργος Δεληστάθης – Αθήνα, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή

Προτεινόμενα Θέματα

357. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Στην προέκταση της πλευράς ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $B\Delta=A\Gamma$. Αν ισχύει $A\hat{\Delta}B=30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι

358. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=0$ και $f(1)=1$
- $\frac{1}{2}\le\frac{f(z)-f(y)}{f(y)-f(x)}\le 2$ για κάθε $x, y\in[0,1]$ με $0\le x\le y\le z\le 1$ και $z-y=y-x$

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{7}\le f\left(\frac{1}{3}\right)\le\frac{4}{7}$

Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο

359. Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο γραμμικές συναρτήσεις (συναρτήσεις οι οποίες είναι της μορφής $\alpha x+\beta$) οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες και έχουν τη ιδιότητα: ο αριθμός $f(x)$ είναι ακέραιος, αν και μόνο αν ο $g(x)$ είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ο αριθμός $f(x)-g(x)$ είναι ακέραιος. Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

360. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+3\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\ge 2(\alpha+\beta+\gamma)$$

Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι

361. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\le\sqrt{3}\frac{R}{2\rho}$

όπου R και ρ οι αντίστοιχες ακτίνες του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή

Λάβαμε από τους:

Τσιλιακό Λευτέρη, δυο εργασίες πάνω στον «εξίσωση» τριγώνου και τα τρίγωνα με μήκη πλευρών φυσικούς αριθμούς, διαδοχικούς σε αριθμητική πρόοδο και εμβαδόν επίσης φυσικό αριθμό.

Σπηλιόπουλο Μάριο, μια εργασία πάνω στους τέλειους αριθμούς.

Ντόρβα Νίκο, ασκήσεις πάνω στις ανισότητες.

Ηλιάδη Ηλία-Στέλιο, μαθητή, μια ενδιαφέρουσα άσκηση πάνω στις συναρτήσεις και στην αναλυτική Γεωμετρία.

Δελιβέρη Βασίλη, ενδιαφέρουσες ασκήσεις πάνω σε θέματα γεωμετρίας.

Οικονομίδη Ευάγγελο, ασκήσεις σε θέματα γεωμετρίας (κέντρο βάρους τριγώνου, μεσοτρίγωνο, κέντρο μάζας στη φυσική, κεντροειδές)

Τέλος, η στήλη αισθάνεται την ανάγκη να απολογηθεί για τυχόν παραλείψεις στην αναφορά ονομάτων συναδέλφων – συνεργατών που εν πολλοίς οφείλεται και στην παρατεταμένη «μη κανονικότητα» που βιώνουμε λόγω της πανδημίας (covid 19)

Διεθνείς Μαθηματικοί Διαγωνισμοί 2020

61^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Αγ. Πετρούπολη Ρωσία 18 - 28 Σεπτεμβρίου 2020

https://www.imo-official.org/year2020

Η 61η διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε **virtual** διοργάνωση στην Αγ. Πετρούπολη της Ρωσίας από 18 - 28 Σεπτεμβρίου 2020 με συμμετοχή **105 χωρών** και **616 μαθητών** εκ των οποίων **56** ήταν κορίτσια. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν **4** χάλκινα μετάλλια και **2** εύφημες μνείες με τους

Μαργαρίτης Μηνάς	Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου Κρήτης	Χάλκινο Μετάλλιο
Ντόκας Ευθύμιος	2ο Λύκειο Παλαιού Φαλήρου	Χάλκινο Μετάλλιο
Αδαμόπουλος Διονύσιος	3ο Λύκειο Πύργου Ηλείας	Χάλκινο Μετάλλιο
Εμμανουήλ Δημήτριος	Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης	Χάλκινο Μετάλλιο
Λιγνός Ορέστης	Εκπαιδευτήρια «Η Ελληνική Παιδεία»	Εύφημη Μνεία
Δημουλιός Ιωάννης	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Εύφημη Μνεία

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ κ. **Ανάργυρος Φελλούρης**, υπαρχηγός διδάκτωρ ο μαθηματικός κ. **Σιλουανός Μπραζιτίκος** και παρατηρητής Α, ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος**. Επισημαίνεται ότι η 61η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη διαδικτυακά, όπως αποφάσισε η Διεθνής Επιτροπή (**IMO Advisory Board**), με γνώμονα την ασφάλεια των συμμετεχόντων, διαμορφώθηκαν έτσι νέοι κανονισμοί ειδικά, για τη διαδικτυακή «εικονική» (**virtual**) διοργάνωση.

24^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων

MASSEE, Αθήνα 9 – 13 Σεπτεμβρίου 2020

https://massee /jbmo-2020

Η 24^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων έγινε από τη MASSEE από 9 μέχρι 13 Σεπτεμβρίου 2020 **Virtual**, με τη συμμετοχή μαθητών των χωρών της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και με μερικές ακόμη φιλοξενούμενες χώρες από Ασία και Ευρώπη (όπως Γαλλία, Κροατία, Ινδονησία, Σαουδική Αραβία κ.λ.π.). Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν **2** χρυσά, **2** αργυρά και **2** χάλκινα μετάλλια, με τους:

Κωνσταντινίδης Κωνσταντίνος	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Χρυσό Μετάλλιο
Φωτιάδης Πρόδρομος	Μουσικό Γυμνάσιο Δράμας	Χρυσό Μετάλλιο
Τζαχρήστας Γεώργιος	1ο Γυμνάσιο Ιωαννίνων	Αργυρό Μετάλλιο
Λιάμπας Παναγιώτης	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Αργυρό Μετάλλιο
Πετράκης Εμμανουήλ	4ο Γυμνάσιο Αγρινίου	Χάλκινο Μετάλλιο
Θέμελης Στυλιανός	9ο Γυμνάσιο Τρικάλων	Χάλκινο Μετάλλιο

Αρχηγός και υπαρχηγός της ομάδας μας, ήταν οι μαθηματικοί **Αγγελική Βλάχου** και **Ευαγγελία Λώλη**, αντίστοιχα. Την ευθύνη της διοργάνωσης είχε η MASSEE, μέσω τριμελούς Οργανωτικής Επιτροπής που αποτελείτο, από τον Πρόεδρο της Ε.Μ.Ε. κ. **Ανάργυρο Φελλούρη** και τους Zoran Kadelburg (**Σερβία**), Emil Kolev (**Βουλγαρία**). Σημαντική ήταν η συμβολή της Ε.Μ.Ε. που φιλοξένησε τον διαγωνισμό στην **Αθήνα** και συμμετείχε σε όλα τα στάδια της διοργάνωσης.

37^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Η 37^{η} Βαλκανική μαθηματική Ολυμπιάδα θα γίνει στη **Ρουμανία** virtual την **1 Νοεμβρίου 2020** με τη συμμετοχή μαθητών των χωρών της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και με μερικές ακόμη χώρες από Ασία και Ευρώπη.

9η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια

Zee – Ολλανδία, 15-21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2020

https://www.egmo.org

Η 9η Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών διοργανώθηκε φέτος στο **Zee** της **Ολλανδίας** με συμμετοχή **53 χωρών** (39 Ευρωπαϊκών και 14 από άλλες Ηπείρους). Συνολικά έλαβαν μέρος 204 κορίτσια. Οι μαθήτριες **Αθανασίου Μαρία, Αλεξανδρίδου Κωνσταντίνα, Καραφύλλια Χριστίνα και Παυλίδου Στυλιανή** αποτελούσαν την Ελληνική ομάδα με αρχηγό τον **Αχιλλέα Συνεφακόπουλο** και υπαρχηγό την **Ευαγγλία Λώλη**. Η χώρα μας είχε συμμετοχή και η διοργάνωση έγινε Virtual, δίνοντας έτσι στα παιδιά τη δυνατότητα να διαγωνιστούν.

Cyberspace Mathematical Competition

13-14 Ιουλίου 2020

Νέος **διαδικτυακός διαγωνισμός** ο Cyberspace Mathematical Competition (CMC) διοργανώθηκε φέτος, για πρώτη φορά από την Mathematical Association of America σε συνεργασία με το **Art of Problem Solving (AoPS)**. Στον διαγωνισμό αυτόν συμμετέχουν οκτώ υποψήφιοι εκ των οποίων τουλάχιστον δυο πρέπει να είναι κορίτσια. Σκοπός του διαγωνισμού ήταν η **διασκέδαση** και η **πρακτική εξάσκηση** για την Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών 2020. Ο διαγωνισμός δεν είχε σκοπό να υποκαταστήσει τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Συμμετείχαν συνολικά **75 χώρες** και **555** μαθητές και μαθήτριες. Η Ελληνική ομάδα κατέκτησε **ένα αργυρό** μετάλλιο (Μαργαρίτης Μηνάς), **δύο Χάλκινα** (Αδαμόπουλος Διονύσιος και Ντόκας Ευθύμιος) και τρεις Εύφημες Μνείες (Εμμανουήλ Δημήτριος, Λιγνός Ορέστης και Ντάγκας Αλέξανδρος). Αρχηγός της ελληνικής ομάδας ήταν ο Σιλουανός Μπραζιτίκος.

Διεθνείς Μαθητικές Ολυμπιάδες 2020

Στο παρακάτω άρθρο δίνουμε, για τη σχολική χρονιά που πέρασε (**2019-2020**), πληροφορίες για όλες τις επίσημες διεθνείς διοργανώσεις. Εδώ θα παρουσιάσουμε αυτές που έγιναν με όλα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους και την ελληνική παρουσία και διάκριση.

52 Icho 2020 Διεθνή Ολυμπιάδα Χημείας: Η 52η Ολυμπιάδα Χημείας έγινε με ζωντανή παρουσία συμμετοχής στην Κωνσταντινούπολη της Τουρκίας τον Ιούλιο του 2020. Η χώρα μας πήρε **1 χάλκινο μετάλλιο** (Ι. Καραγεωργίου – Ξάνθη) και 2 εύφημες μνείες (Κ. Καρακαράς, Ν. Τσακίρης). Η επόμενη θα γίνει στην Ιαπωνία 2021.

32 IOI 2020 Ολυμπιάδα Πληροφορικής: Η 32η Ολυμπιάδα Πληροφορικής έγινε στη Σιγκαπούρη **virtual** από 13-19 Σεπτεμβρίου του 2020 Στην 32η Ολυμπιάδα Πληροφορικής η χώρα μας πήρε **1 αργυρό μετάλλιο** με τον Ε. Πίπη (Αθήνα) **1 χάλκινο μετάλλιο** με τον Α. Παναγόπουλο (Πάτρα)

51 Iph 2020 Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής ήταν να γίνει στη Λιθουανία, αλλά αναβλήθηκε για την επόμενη χρονιά το 2021 στην ίδια χώρα, με τις συνθήκες να είναι κατάλληλες για τη διεξαγωγή του.

14 ΙΟΛΛ 2020 Ολυμπιάδα Αστρονομίας – Αστροφυσικής ήταν να γίνει στη Κολομβία από 13-29 Σεπτεμβρίου 2020, αλλά θα γίνει τέλη Σεπτέμβρη στην Εσθονία –**Virtual**- με 40 περίπου χώρες.

31 IBO 2020 Ολυμπιάδα Βιολογίας: Η 31η Ολυμπιάδα Βιολογίας έγινε **Virtual** τον Αύγουστο του 2020 στο Ναγκασάκι της Ιαπωνίας όπου συμμετείχαν **70 χώρες**, η χώρα μας δεν συμμετείχε για τους λόγους της πανδημίας.

Το Euromath & Euroscience τον Μάρτιο 2021 στην Θεσσαλονίκη

Το Συνέδριο απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας 9-18 ετών με ατομικές και ομαδικές παρουσιάσεις . Το Μάρτιο του 2019 έγινε στην Πάφο της Κύπρου με μεγάλη συμμετοχή μαθητών (Το 2018 είχε γίνει στην Κρακοβία της Πολωνίας). Φέτος λόγω της πανδημίας του Κορωναιού αναβλήθηκε με νέα ημερομηνία διοργάνωσης **10-15 Μαρτίου 2021** στη Θεσσαλονίκη . (**www.euromath.org**)

Ευάγγελος Σπανδάγος (1940-2020)

Μάρω Κ. Παπαθανασίου
Ομότιμη Καθηγήτρια της Ιστορίας των Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

Ο αγαπητός φίλος και συνάδελφος Ευάγγελος Σπανδάγος, ένα από τα πλέον δραστήρια μέλη της Ε.Μ.Ε. και παλαιό μέλος του Δ.Σ. της, έφυγε ξαφνικά για τον κόσμο των πνευμάτων στις 19 Μαΐου από ανακοπή καρδιάς στο βιβλιοπωλείο του. Εκεί, όπου ο ίδιος ως ακούραστος ερευνητής-συγγραφεύς εργαζόταν διαρκώς επί χρόνια, κρυμμένος πίσω από έναν όγκο βιβλίων. Ένα ανήσυχο πνεύμα που διαρκώς αναζητούσε διέξοδο σε δημιουργικό έργο διδασκαλίας και προβολής της Μαθηματικής επιστήμης, την οποία σπούδασε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και δίδαξε επί 28 χρόνια (1967-1996) στην δημόσια μέση εκπαίδευση.

Γεννήθηκε στις 21 Αυγούστου 1940 στο Ρέθυμνο και ως παιδί και έφηβος δεν έδειχνε καθόλου κλίση για σπουδές και τί θα γινόταν στο μέλλον. Άραγε, δεν έδειχνε, ή μήπως οι δάσκαλοι και οι καθηγητές του δεν μπορούσαν να καταλάβουν το ανεξάρτητο και ερευνητικό πνεύμα του; Στο αυτοβιογραφικό έργο του «Αναμνήσεις 74 ετών» αναφέρει αυτολεξεί τις κρίσεις δασκάλων και καθηγητών του για τον ίδιο προς την μητέρα του (σελ. 179-180), π.χ. «δεν κάνει για τα γράμματα», «είναι μονίμως αδιάβαστος», «μισεί τα Αρχαία» κ.ά..
Και βέβαια, ούτε συζήτηση ότι θα μπορούσε ποτέ να επιτύχει στις εισαγωγικές εξετάσεις για το Τμήμα Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Και όμως, να που επιτυγχάνει στις εξετάσεις και εντός Πανεπιστημίου ο νεαρός Ευάγγελος σπουδάζει την επιστήμη που αγαπά και έχει εξαιρετικές επιδόσεις στα μαθήματά του.

Ασφαλώς, οι κακές παιδικές και νεανικές εμπειρίες του από δασκάλους και καθηγητές τον έκαναν να γίνει ο ίδιος ένας εμπνευσμένος καθηγητής των Μαθηματικών και όχι μόνον. Θέλησε να βοηθήσει τους μαθητές της Μέσης εκπαίδευσης να καταλάβουν και να αγαπήσουν τα Μαθηματικά με το πλήθος των βοηθητικών βιβλίων που συνέγραψε και γι' αυτούς και για τους φοιτητές.

Τα τελευταία πέντε χρόνια (1991-1996) δίδαξε στο Πειραματικό Σχολείο του Πανεπιστημίου Αθηνών. Εκεί έκανε και την μεγάλη καινοτομία, να εντάξει στην διδασκαλία του διάφορα θεωρήματα από το αρχαίο κείμενο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου, ως μέρος του προγράμματος «Προσέγγιση των Αρχαίων Ελληνικών διά των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών». Επί 20 ακόμα έτη (έως το 2016) μετά την αφυπηρέτησή του συνέχισε να διδάσκει αυτό το πρόγραμμα σε άλλα 14 σχολεία.

Το ενδιαφέρον και ο ενθουσιασμός των μαθητών του για την πρωτόγνωρη εμπειρία, να αποδώσουν μαζί με τον καθηγητή τους προτάσεις από αρχαία μαθηματικά κείμενα και να τις μελετήσουν, και η παρότρυνση των μαθητών προς τον ίδιο, να ασχοληθεί με τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, έδειξε στον Ε. Σπανδάγο τον δρόμο της σπουδαιότερης προσφοράς του προς όλους μας, μαθητές και καθηγητές.

Από το 1994 άρχισε τις εκδόσεις βιβλίων ιστορικού και ερευνητικού περιεχομένου σχετικώς με την ζωή και τα έργα αρχαίων μαθηματικών, αστρονόμων, ιατρών, φαρμακολόγων κ.ά., με την σειρά να αριθμεί έως τώρα 37 βιβλία. Αναφέρω χαρακτηριστικά τα εξής: «Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων» (2000), «Η Αστρονομία των Αρχαίων Ελλήνων» (2004), «Η χρυσή τομή στην Αρχαία Ελλάδα» (2004), «Εύδημος ο Ρόδιος» (2007), «Το Δήλιο πρόβλημα στην Αρχαία Ελλάδα» (2008), «Εύδοξος ο Κνίδιος» (2008), «Αρχιμήδους Βίος και Έργον» (2011), «Ζηνόδωρος ο Παιανεύς» (2011).

Ορόσημο στην εκδοτική δραστηριότητα του Ε. Σπανδάγου αποτελεί το έτος 2000, όπου εγκαινιάζει την σειρά των έργων των αρχαίων μαθηματικών και αστρονόμων. Κάθε βιβλίο περιλαμβάνει το αρχαίο κείμενο, την απόδοσή του στην νεοελληνική από τον ίδιο και συνοδεύεται πάντοτε από σχόλιά του μαθηματικού περιεχομένου για την κατανόηση των σχετικών εννοιών. Μέσα στο 2000 εκδίδει τις «Χαμένες πραγματείες του Ευκλείδου», «Τα Οπτικά και Κατοπτρικά του Ευκλείδου», «Τα Φαινόμενα του Ευκλείδου», και «Τα Σφαιρικά του Θεοδοσίου».

Έκτοτε και μέχρι σήμερα ο «χαλκέντερος» μελετητής και συγγραφεύς εξέδωσε 38 έργα των εξής αρχαίων μαθηματικών και αστρονόμων: Αριστάρχου του Σαμίου, Νικομάχου του Γερασηνού, Γεμίνου του Ροδίου, Αράτου, Ερατοσθένους, Ιππάρχου, Αυτολύκου του Πιτανέως, Κλεομήδους, Υψικλέους, Θεοδοσίου, Ευκλείδου, Θέωνος του Σμυρναίου, Διοφάντου, Κλαυδίου Πτολεμαίου, Πάππου, Πρόκλου, και άλλων επιστημόνων. Ιδιαιτέρως αναφέρω την «Συναγωγή του Πάππου του Αλεξανδρέως» (4 τόμοι), η οποία αποτελεί πραγματικόν θησαυρό καθώς διασώζει επιτεύγματα αρχαιοτέρων μαθηματικών, των οποίων τα έργα έχουν χαθεί. Επίσης «Τα Σχόλια του Πρόκλου στο α′ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδου» (2 τόμοι) είναι ένα έργο που συμβάλλει στην κατανόηση της ιστορίας και της φιλοσοφίας των αρχαίων μαθηματικών.

Ο Ε. Σπανδάγος στο βιβλιοπωλείο του

Πέραν αυτών, ο ακούραστος Ε. Σπανδάγος το 1998 άρχισε ραδιοφωνικές εκπομπές για τις επιστήμες στην Αρχαία Ελλάδα στον ιδιωτικό σταθμό Ηρόδοτο και από το 2000 την εβδομαδιαία τηλεοπτική εκπομπή «Όπερ έδει ποιήσαι» στο High-TV της Αττικής. Στην όλη προσπάθειά του για την «Προβολή των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών» συνέβαλε και η θέση του ως Γραμματέως στον ομώνυμο Παγκόσμιο Όμιλο.

Πολλά από αυτά τα βιβλία ερευνητικού/ιστορικού περιεχομένου και των έργων των αρχαίων θετικών επιστημόνων, τα οποία συνέγραψε, ο Ε. Σπανδάγος εδώρισε ιδιαιτέρως σε σχολικές και πανεπιστημιακές βιβλιοθήκες (Πειραματικού Σχολείου και Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών, Μαθηματικού Τμήματος ΑΠΘ, Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Βαρβακείου, Σχολείων της Φιλεκπαιδευτικής Εταιρείας, Ευπαλίου Φωκίδος, κ.ά.), βιβλιοθήκες ιδρυμάτων στην Ελλάδα (Ακαδημίας Αθηνών, Βουλής των Ελλήνων, Αστεροσκοπείου Αθηνών), και στο εξωτερικό (Βιβλιοθήκη της Αλεξανδρείας, της Ελληνικής Κοινότητας στο Χαρτούμ, και στην Ελληνική Βιβλιοθήκη της Μαριούπολης Ουκρανίας).

Ο Ε. Σπανδάγος βραβεύθηκε δύο φορές «οίκοθεν» από την Ακαδημία Αθηνών: Το 2000 για το έργο του «Η ζωή και το Έργο του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή», και το 2007 για το συγγραφικό έργο του στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά και την Αστρονομία. Για την συνολική προσφορά του στην μαθηματική κοινότητα, ως ένα από τα πλέον δραστήρια μέλη της Ε.Μ.Ε., μέλος του Δ.Σ. της και της επιτροπής του περιοδικού Ευκλείδης Β′, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. τον βράβευσε σε πανηγυρική τελετή (18.6.2018) στο πλαίσιο των εκδηλώσεων για τα 100 χρόνια από την ίδρυση της Εταιρείας.

Πολύπλευρο ταλέντο και ανήσυχο πνεύμα ο ίδιος συνέγραψε επίσης πέντε συλλογές διηγημάτων και μία συλλογή ποιημάτων. Η αναγνώριση του λογοτεχνικού έργου του τον έκανε μέλος της Ένωσης Ελλήνων Λογοτεχνών, η οποία τον βράβευσε τον Ιανουάριο του 2009 με το πρώτο βραβείο στον Πανελλήνιο Διαγωνισμό Διηγήματος, τον Δεκέμβριο του ιδίου έτους με το πρώτο βραβείο στον Πανελλήνιο Διαγωνισμό Ποίησης, και τον Ιανουάριο του 2010 του απένειμε το Χρυσό μετάλλιο Πνευματικής Αξίας Α′ Τάξεως.

Είναι πραγματικά κρίμα, που τα Τμήματα Μαθηματικών των Πανεπιστημίων μας δεν αξιοποίησαν τις γνώσεις του καλώντας τον να δώσει κάποιες διαλέξεις σε σεμινάρια Ιστορίας των Μαθηματικών, επάνω σε ειδικά θέματα, με τα οποία είχε ιδιαιτέρως ασχοληθεί. Μόνη εξαίρεση το Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ, το οποίο τον προσκάλεσε στην επιστημονική ημερίδα «Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών» (18.4.2016) και μίλησε για τον Ζηνόδωρο τον Παιανέα. Το ίδιο είχε συμβεί και με τον Ευάγγελο Σταμάτη, ο οποίος πριν από μισόν και πλέον αιώνα είχε εκδώσει τα «Στοιχεία» του Ευκλείδου και τα «Αριθμητικά» του Διοφάντου στον ΟΕΣΒ, και τα Απαντα του Αρχιμήδους και του Απολλωνίου του Περγαίου στο Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδος.

Ομιλία του στην εκδήλωση βράβευσής του από τον Σύλλογο Αποφοίτων του Πειραματικού Σχολείου του Πανεπιστημίου Αθηνών (2013).

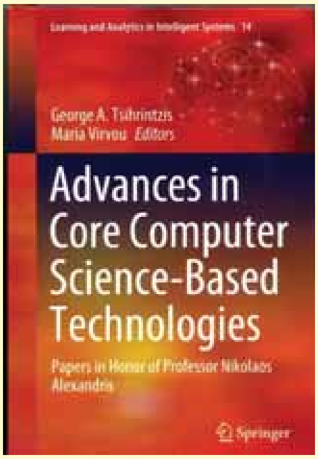
Όμως, η παρουσία του Ε. Σπανδάγου στο εκπαιδευτικό γίγνεσθαι θα είναι διαρκής μέσω της σειράς των εκδόσεών του των έργων των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων κ.ά.. Εκδόσεις που απευθύνονται σε διδάσκοντες και διδασκομένους στην Μέση και την Ανωτάτη εκπαίδευση και αποτελούν το πλέον ουσιαστικό βοήθημά τους, τόσο για μελέτη, όσο και για έρευνα.

Και θα ήταν μεγάλη παράλειψη να μην αναφέρω, ότι σε όλο αυτό το τεράστιο εκδοτικό εγχείρημα είχε ακούραστη βοηθό την κόρη του, Ρούλα, επίσης μαθηματικό.

Αγαπητέ φίλε και συνάδελφε, καλό ταξίδι.

Θα μάς λείπεις, αλλά θα ζεις και θα σε συναντούμε διαρκώς διαβάζοντας τα βιβλία σου.

Βιβλία που λάβαμε



Advances in Core Computer Science – Based Technologies

George A. Tsihrintzis, Maria Virvou (Editors)

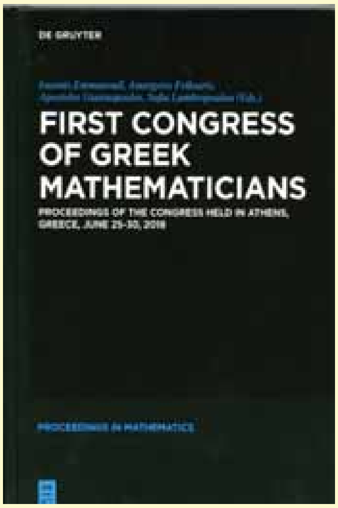
Εργασίες προς τιμήν του Καθηγητή Νικόλαου Αλεξανδρή

Το βιβλίο εισάγει τον αναγνώστη σε μερικές από τις πιο σημαντικές εξελίξεις στην τεχνολογία βασισμένες στην επιστήμη των Υπολογιστών. Στην έναρξη της 4ης βιομηχανικής επανάστασης η **επιστήμη** αναπτύσσεται συνεχώς και ταχύτατα, τόσο αυτή όσο και οι εφαρμογές της, σε πολλές άλλες επιστήμες. Επίσης στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές, που επιτρέπουν στον αναγνώστη την περαιτέρω διερεύνηση των εφαρμογών, που τον ενδιαφέρουν και του είναι χρήσιμες. Ο τόμος απευθύνεται σε καθηγητές, ερευνητές, μηχανικούς και φοιτητές της επιστήμης των υπολογιστών.

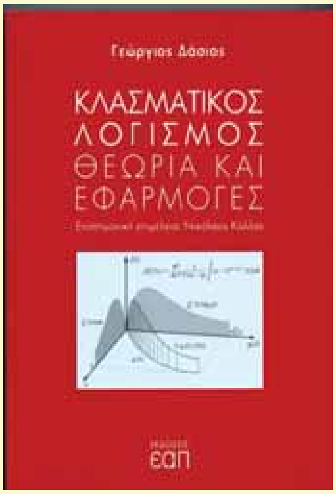
First Congress of Greek Mathematicians

Proceedings of the Congress held in Athens, Greece, 25-30 June 2018

Ioannis Emmanouil, Anargyros Fellouris
Apostolos Giannopoulos, Sofia Lambropoulou (Eds)



Ο τόμος περιμβάνει μια συλλογή εργασιών που παρουσιάστηκαν ως κεντρικές ομιλίες στο πρώτο Συνέδριο των **Απανταχού Ελλήνων Μαθηματικών**, που διοργανώθηκε από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, με την ευκαιρία του εορτασμού των 100 χρόνων από την ίδρυσή της το 2018. Στον τόμο που εκδόθηκε από τον Γερμανικό οίκο **Degruyter** περιλαμβάνονται οι κεντρικές ομιλίες σε πλήρη ανάπτυξη των: Δημητρίου Χριστοδούλου, Παναγιώτας Δασκαλοπούλου, Αθανασίου Φωκά, Λουκά Γραφάκου, Γεωργίου Καρνιαδάκη, Μιχάλη Κατεχάκη, Χαράλαμπου Μακριδάκη, Αντώνη Μελά, Γεωργίου Παπανικολάου και Χάρη Ταμβάκη



Κλασματικός Λογισμός

Θεωρία και Εφαρμογές

Γεώργιος Δάσιος

Ο Απειροστικός Λογισμός θεμελιώνεται πάνω στις έννοιες της **παραγώγου** και του **ολοκληρώματος** ακέραιης τάξης. Ο Κλασματικός Λογισμός αποτελεί την επέκταση αυτών των εννοιών για κάθε πραγματική, ακόμη και μιγαδική τάξη. Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της θεωρίας του Κλασματικού Λογισμού είναι ότι η **κλασματική παραγώγιση** έχει την ίδια ολική συμπεριφορά με του ολοκληρώματος, σε αντίθεση με τον τοπικό χαρακτήρα της παραγώγου στον Κλασικό Λογισμό. Η θεωρία του Κλασματικού Λογισμού, πέρα από την **ενδογενή γοητεία** που ασκεί στον αναγνώστη, έχει βρει τις τελευταίες δεκαετίες πολύ χρήσιμες εφαρμογές σε απαιτητικά προβλήματα της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας. Όπως φαίνεται, η νέο-αναπτυχθείσα αυτή θεωρία θα αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμη στο άμεσο μέλλον, γιατί παρέχει τη δυνατότητα να αντιμετωπίζουμε κάθε πρόβλημα με το **βέλτιστο μαθηματικό εργαλείο**, το οποίο υπαγορεύεται από το ίδιο το πρόβλημα.

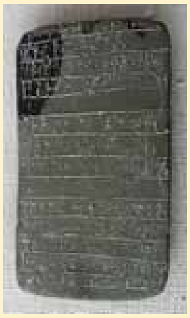
Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

> **Τα Μαθηματικά είναι πιο όμορφα από οποιοδήποτε σκακιστικό παιχνίδι.**
> **Ένας σκακιστής μπορεί να κάνει ένα ωραίο παιχνίδι,**
> **αλλά ο μαθηματικός προσφέρει το ίδιο το παιγνίδι.** **G.H. Hardy**

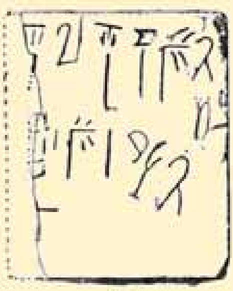
Τα κλάσματα στη Γραμμική Α΄

Κατά την ανασκαφή στο ανάκτορο του Νέστωρα το 1939 βρέθηκαν 1000 πινακίδες γραμμικής Β΄ του 1300 π.Χ.



Πινακίδες Γραμμικής Β γραφής από το Ανάκτορο του Νέστορα.

Οι πήλινες αυτές πινακίδες, αποκρυπτογραφήθηκαν το 1952 από τον αρχιτέκτονα **Michael Ventris** και το φιλόλογο και γλωσσολόγο **John Chadwick**. Η γραμμική Β΄ είναι ένα παλαιότερο είδος Ελληνικής γραφής. Περιέχουν πληροφορίες για την **Πύλο** και τη ζωή στο διοικητικό, πολιτικό και οικονομικό κέντρο της μυκηναϊκής Μεσσηνίας.



a

b

Γραμμική Α΄ από 3500 π. Χ. Ταμπλέτα PH-1 και Δίσκος της Φαιστού

«Ένα επάργυρο ενθύμιο από την Κρήτη που αναπαρίστανε τον Δίσκο της Φαιστού ήταν, το πρώτο «στολίδι» που κρέμασα όταν ήμουν μαθητής στον λαιμό μου», έχει δηλώσει ο Ουαλός καθηγητής **Gareth Alun Owens** που μαζί με τον συνεργάτη του **John Goleman** έχουν διαβάσει το 90% του δίσκου της Φαιστού».

Όμως μέχρι σήμερα οι ερευνητές κατανοούσαν ένα μικρό μόνο μέρος της γραφής των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν από τον Μινωικό πολιτισμό. Πρόσφατα αρχές Οκτώβρη του 2020 **για πρώτη φορά** αποκρυπτογραφήθηκαν τα κλάσματα **της Γραμμικής Α**.

Ο Μινωικός πολιτισμός άνθησε στην Κρήτη πριν από 3500 χρόνια. Οι Μινωίτες χρησιμοποιούσαν δύο συστήματα γραφής, τα ιερογλυφικά και τη Γραμμική Α.

Η γραφή αυτή δεν έχει σχεδόν καθόλου αποκρυπτογραφηθεί λόγω και της έλλειψης επαρκών ευρημάτων. Πάντως φαίνεται πως ήταν **συλλαβογραφική**, όπως και η **Γραμμική Β** που χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια. Ξέρουμε 70 τέτοια συλλαβογράμματα, 100 σύμβολα για συγκεκριμένες λέξεις, πολλά αριθμητικά σύμβολα που τα **17 σύμβολα** σήμαιναν **κλάσματα**. Ερευνητές, ο **Mikele Koratsa** και οι συνάδελφοί του από το Πανεπιστήμιο της Μπολόνια αποκρυπτογράφησαν τα αριθμητικά σύμβολα και διαπίστωσαν ότι οι **Μινωίτες** χρησιμοποιούσαν για τους υπολογισμούς τους και για την αναγραφή ποσοτήτων ακόμα και **δεκαδικά κλάσματα**.

Τα κλάσματα στη γραμμική Α΄

Οι δεκάδες σημειώνονταν με οριζόντιες γραμμές ή τελείες, οι εκατοντάδες με κύκλους και οι χιλιάδες με κύκλους πλαισιωμένους από γραμμές. Τα δεκαδικά κλάσματα παριστάνονταν με τριγωνικά ή ημικυκλικά σύμβολα που συμπληρώνονταν με μια ή περισσότερες τελείες.

Οι ερευνητές εκπόνησαν έναν πίνακα, πάνω στον οποίο όλα τα δυνατά σύμβολα των κλασμάτων της Γραμμικής Α κατατάχθηκαν σε συγκεκριμένα αριθμητικά μεγέθη. Ο πίνακας δημοσιεύθηκε στο επιστημονικό περιοδικό **Journal of Archaeological Science**. Στον πίνακα αυτό βλέπουμε ημικυκλικά σύμβολα με έναν αύξοντα αριθμό από γραμμές για τα κλάσματα ¼, 1/5 ή 1/20, 1/30 κοκ. Το σύμβολο για το 1/10 θυμίζει το δικό μας Τ. Εντοπίστηκαν σύμβολα μέχρι και το κλάσμα 1/60. Πάντως το κλάσμα που είναι συχνότερα στις πήλινες πινακίδες είναι το ½ που θυμίζει το J. Οι ερευνητές από τη Μπολόνια αισιοδοξούν ότι η **συνδυαστική** μέθοδος των **Μαθηματικών** που χρησιμοποίησαν θα οδηγήσει κάποτε και στην αποκρυπτογράφηση ολόκληρης της αινιγματικής Γραμμικής Α.

Απολιθώματα

Φωτογραφίες απολιθωμάτων, τα μυστικά της φύσης, και ένας Μετεωρίτης από προσωπικές εξορμήσεις στην ορεινή Τριφυλία

Επιστημονικές μελέτες αναφέρουν ότι τα απολιθώματα έγιναν από έντονη ηφαιστειακή δραστηριότητα περίπου πριν 20 εκατομμύρια χρόνια. Η δημιουργία υδροθερμικών διαλυμάτων του διοξειδίου του πυριτίου έκανε την απολίθωση της χλωρίδας που είχε καλυφθεί από ηφαιστειακά υλικά. Τα μεγαλύτερα απολιθωμένα δάση στον κόσμο είναι της **Λέσβου** και της **Αριζόνας**.

Μετεωρίτης

Ο μετεωρίτης είναι ένα αντικείμενο συνήθως **μεταλλικό**, που μπορεί να έχει μέγεθος από ένα χαλίκι μέχρι πολύ μεγάλο που ζυγίζει μερικούς τόνους. Συνήθως είναι τμήμα κομήτη που μπαίνει στην ατμόσφαιρα και καίγεται χωρίς να πέσει στη Γη («**διάττοντες αστέρες**»). Αν το τμήμα είναι μεγάλο και μπει με μικρή γωνία στην ατμόσφαιρα θα δούμε τη λάμψη του και ότι απομείνει θα πέσει στη Γη. Θυμάμαι κάποτε τον Αύγουστο του 1993 σε μια βραδιά ψαρέματος στον Ευβοϊκό κόλπο, στον Κάλαμο, δεν είχε ξημερώσει καν και ξάφνου η νύχτα έγινε ημέρα. Ένα τεράστιο πολύχρωμο φωτεινό ποτάμι ξεκίνησε από το **Αιγαίο** πάνω από το όρος **Δίρφη της Εύβοιας** και κατέληξε μέσα σε ένα λεπτό, στα πρώτα σπίτια της παραλίας του Καλάμου.

Μετεωρίτης

Κομήτης

Ο **Κομήτης**, είναι ουράνιο σώμα με μεγάλη ουρά που κινείται γύρω από τον ήλιο ή κάποιον πλανήτη, σε διαδρομή που διαρκεί πολλά χρόνια. Όταν ήμουν παιδί φέρνω στη μνήμη μου κάποιο κομήτη που φώτιζε τον ουρανό, αλλά και τον Ιούλιο 2020 πέρασε κάποιος κομήτης «κοντά» στη Γη. Οι κομήτες **εμπλουτίζουν το Ηλιακό Σύστημα** με οργανικά υλικά και νερό.

Μια ματιά στην επικαιρότητα

Η επέτειος των 200 χρόνων

Το 2021 η Ελλάδα θα εορτάσει τα 200 μόλις χρόνια από την Ελληνική Επανάσταση. Τα 200 χρόνια δυσκολιών, περιπετειών και πολέμων. Σήμερα η Ελλάδα έχει καταφέρει αρκετά για να είναι ένα σύγχρονο κράτος, ένα ισάξιο κράτος των υπόλοιπων Ευρωπαϊκών κρατών. Την επέτειό μας θα την τιμήσουμε, αν όλοι μελετήσουμε αυτό το παρελθόν και διδαχθούμε από τα σωστά και τα λάθη μας, αλλά κυρίως από τα λάθη μας. Πρέπει στο μέλλον να γίνουμε **πιο υπεύθυνοι** και πιο δημοκρατικοί πολίτες, για να είμαστε περήφανοι για τη χώρα μας και **άξιοι απόγονοι** των πολιτών που 2500 χρόνια πριν κατοικούσαν αυτόν τον τόπο. Το έργο των **Αρχαίων Ελλήνων** είναι ο φάρος του σύγχρονου πολιτισμένου κόσμου.

Το συλλεκτικό μετάλλιο της Επιτροπής «Ελλάδα 2021»

Στο μετάλλιο, που φέρει ένα έγχρωμο **πολυμερικό δακτύλιο**, απεικονίζεται από τον πίνακα του Θεόφιλου, "Αναγεννηθείσα Ελλάδα", ο **Ρήγας Φεραίος-Βελεστινλής** και ο **Αδαμάντιος Κοραής** να σηκώνουν την Ελλάδα. Ακόμα απεικονίζεται, ο φοίνικας που αναγεννιέται από τις στάχτες του και συμβολίζει την αναγέννηση της Ελλάδας.

- Το 2018 η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία γιόρτασε 100 χρόνια ζωής.
- Το 2004 η ΕΜΕ ανέλαβε την διοργάνωση για την 45η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, που έγινε στην Αθήνα.

Η Σχολή των Αθηνών

Ο πίνακας-αριστούργημα του **Ραφαήλ** με τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη κοσμεί από το Σεπτέμβρη την αίθουσα της Ολομέλειας της Γαλλικής Βουλής.

Η «Σχολή των Αθηνών», είναι ένα από τα διασημότερα έργα του **Ραφαήλ(1483-1520)**, σπουδαίου ζωγράφου της Αναγέννησης, για να τιμήσει τους μεγαλύτερους στοχαστές της αρχαιότητας τον **Πλάτωνα**, τον **Αριστοτέλη**, αλλά και εκείνους της Αναγέννησης. Ο πίνακας έγινε το 1510 για την διακόσμηση του Βατικανού.

Όρθιοι οι Γάλλοι βουλευτές πρόσφατα τον Σεπτέμβρη του 2020 χειροκροτούσαν, την ώρα των αποκαλυπτηρίων του αντιγράφου 4μ**x**9μ του πίνακα του Ραφαήλ. Οι Γάλλοι βουλευτές στο εξής θα συνεδριάζουν υπό τα βλέμματα των μεγάλων διανοητών που χάραξαν **την πορεία της ανθρωπότητας** και άνοιξαν τους **ορίζοντες του ανθρώπου**. Υπό τα βλέμματα των μεγάλων του πίνακα άλλωστε έχουν υπογραφεί από το **1510** τα περισσότερα και σημαντικότερα **Παπικά** έγγραφα.

Στον πίνακα, ο Πλάτωνας αναπαρίσταται με το πρόσωπο του Λεονάρντο Ντα Βίντσι, ο Ηράκλειτος με εκείνο του Μιχαήλ Αγγέλου, ενώ ο Ραφαήλ προσπάθησε να αποτυπώσει και τον Ευκλείδη. Κεντρικό πρόσωπο είναι ο Αριστοτέλης και ο Πλάτωνας. Το θέμα για τον Ραφαήλ ήταν η Φιλοσοφία και πάνω στον πίνακα έγραψε «**να γνωρίζεις τις αιτίες**».

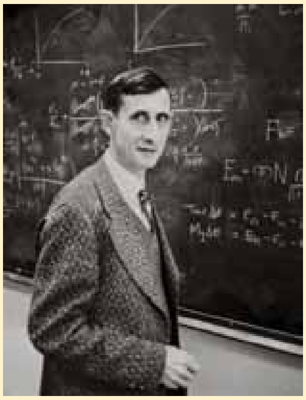
Γαλλικό κοινοβούλιο

Ο λόγιος **Πιέτρο Μπέμπο** στην επιτάφια πλάκα του Ραφαήλ, έγραψε το δίστιχο που λέει: «Εδώ κείται ο διάσημος Ραφαήλ, από τον οποίο **η Φύση** φοβήθηκε μήπως κατακτηθεί, όσο ζούσε και όταν πέθανε, φοβήθηκε και η ίδια μήπως πεθάνει».

Ο Ραφαήλ, μαζί με τον **Λεονάρντο ντα Βίντσι** και τον **Μιχαήλ Άγγελο**, ανήκει στους κορυφαίους καλλιτέχνες αυτής της περιόδου. Το μνημειώδες έργο του η «Σχολή των Αθηνών» κοσμεί μια αίθουσα του Βατικανού και είναι μια από τις σημαντικότερες και γνωστότερες τοιχογραφίες της Αναγέννησης, ένας ύμνος στην κλασική φιλοσοφία και στις απαρχές του Δυτικού πολιτισμού.

Freeman Dyson

Στο **Princeton** την 28η Φεβρουαρίου 2020, πέθανε ο Freeman John Dyson. Γεννήθηκε το 1923 ήταν βρετανός-αμερικανικός μαθηματικός και φυσικός με πολλά βραβεία και μετάλλια αλλά **όχι Nobel** . Γνωστός για τα έργα του στην **κβαντική θεωρία πεδίου**, την αστροφυσική, τους τυχαίους πίνακες, τη μαθηματική διαμόρφωση της κβαντικής μηχανικής, τη φυσική συμπυκνωμένης ύλης, πυρηνική φυσική και μηχανική, το περιβάλλον, κ.ά.. Δίδαξε στα πανεπιστήμια Πρίνστον. Κέιμπριτζ, Κόρνελ, κ.ά.



Ο Freeman είχε ταχθεί κατά των πυρηνικών. Είχε την άποψη ότι η υπερθέρμανση του πλανήτη με την αύξηση του διοξειδίου έχει και ευνοϊκές επιδράσεις. Πίστευε ότι τα θετικά οφέλη του CO_2 υπερτερούν κατά πολύ των αρνητικών επιπτώσεων και ότι δεν λαμβάνεται υπόψη από τους επιστήμονες του κλίματος η αυξημένη γεωργική απόδοση και υποστήριζε ότι οι πολιτικές προσπάθειες πρέπει να επικεντρωθούν σε άλλα μεγάλα παγκόσμια προβλήματα που έχουν προτεραιότητα και όχι για τη μείωση των αιτίων της κλιματικής αλλαγής.

Ο Dyson ασχολήθηκε με πολλά θέματα **μαθηματικών, φυσικής, αστρονομίας** αλλά και σε πολλά άλλα θέματα όπως γενετική μηχανική φυτών, που πολλές θεωρίες φέρουν το όνομά του. Όπως είχε δηλώσει η αδελφή του από μικρό παιδί διάβαζε εγκυκλοπαίδειες, έκανε **υπολογισμούς με μεγάλους αριθμούς** και έδειξε ενδιαφέρον για το **ηλιακό σύστημα**. Πολιτικά είπε ότι «μεγάλωσε ως σοσιαλιστής». Στην **επιστήμη** πίστευε, ότι είναι μάλλον σημαντικό, όχι μόνο να μην είσαι ορθόδοξος, αλλά **να είσαι** ανατρεπτικός.

Σπούδασε καθαρά Μαθηματικά στο Trinity College του Cambridge και ως φοιτητής στο Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο σε ηλικία 19 ετών του είχε ανατεθεί πολεμική εργασία της Αεροπορίας, όπου ανέπτυξε αναλυτικές μεθόδους για σχηματισμούς βομβαρδιστικών. Το 1947 με τη βοήθεια του Taylor πήγε στην Αμερική για μεταπτυχιακές σπουδές στο Πανεπιστήμιο Cornell, όπου γνώρισε τον Richard Feynman. Εργάστηκε σε πυρηνικές μελέτες, ανέδειξε τα διαγράμματα Feynman, εργάστηκε στο Ινστιτούτου Προηγμένων Μελετών του Princeton, στο Ινστιτούτο Ανάλυσης Ενέργειας με μελέτες για το κλίμα, ως πρόεδρος στο Ινστιτούτο Διαστημικών σπουδών, κ.ά..

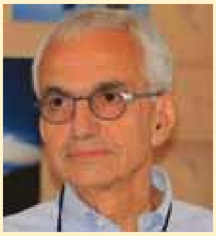
Ο Dyson έλεγε ότι για την κάλυψη των υλικών αναγκών του κόσμου, **η τεχνολογία** πρέπει να είναι **όμορφη και φθηνή**. Όπως περιγράφει σε βιβλίο του είναι εφικτό ένα όραμα της πράσινης τεχνολογίας που εμπλουτίζει τα χωριά σε όλο τον κόσμο και σταματά τη μετανάστευση προς τις μεγάλες πόλεις. Τα τρία συστατικά του οράματος είναι: **ο ήλιος** για την παροχή ενέργειας όπου χρειάζεται, το **γονιδίωμα** για την παροχή φυτών που μπορούν να μετατρέψουν το φως του ήλιου σε χημικά καύσιμα φθηνά και αποτελεσματικά, το **διαδίκτυο** για να τερματίσει την πνευματική και οικονομική απομόνωση των αγροτικών πληθυσμών. Με τα τρία αυτά συστατικά, **κάθε χωριό στην Αφρική** θα μπορούσε να απολαύσει το δίκαιο μερίδιο των ευλογιών του πολιτισμού.

Ο Dyson επινόησε τον όρο «**πράσινες τεχνολογίες**», με βάση τη βιολογία αντί της φυσικής ή της χημείας, για να περιγράψει νέα είδη μικροοργανισμών και φυτών που έχουν σχεδιαστεί για να **καλύψουν** τις **ανθρώπινες ανάγκες**. Υποστήριξε ότι τέτοιες τεχνολογίες θα βασίζονταν στην ηλιακή ενέργεια και όχι στα **ορυκτά καύσιμα** των οποίων η χρήση θεωρούσε ως μέρος αυτού που αποκαλεί «γκρίζες τεχνολογίες» της βιομηχανίας. Πίστευε ότι οι γενετικά τροποποιημένες καλλιέργειες, τις οποίες περιέγραψε ως πράσινες, μπορούν να βοηθήσουν στον τερματισμό της αγροτικής φτώχειας , με ένα κίνημα βασισμένο στην ηθική για τον τερματισμό της αδικαιολόγητης κατανομής του πλούτου στον πλανήτη.

Το διεθνές βραβείο Alonzo Church 2020 στον Φωκίωνα Κολαΐτη

Ο Έλληνας καθηγητής του University of California, Santa Cruz, Φωκίων Κολαΐτης και συνεργάτες του τιμήθηκαν για το 2020 με το διεθνές βραβείο **Alonzo Church** που απονέμεται κάθε χρόνο για διακεκριμένο ερευνητικό έργο στη **Λογική** και τη **Θεωρία Υπολογισμού**.

Το βραβείο έχει καθιερωθεί από τέσσερις επιστημονικές εταιρείες που αποτελούν τους εγκυρότερους διεθνώς επιστημονικούς οργανισμούς στη Μαθηματική Λογική και την Επιστήμη των Υπολογιστών (Association for Computer Machinery Special Interest Group for Logic and Computation



(ACM SIGLOG), European Association for Theoretical Computer Science (EATCS), European Association for Computer Science Logic (EACSL) και Kurt Gödel Society (KGS)) για διακεκριμένη συμβολή στη **Λογική** και τον **Υπολογισμό**. Η απονομή έγινε προς αναγνώριση του πρωτοποριακού τους έργου στη θεμελίωση των αρχών Λογικής **στην ανταλλαγή δεδομένων**.

Ο Φωκίων Κολαΐτης ήταν κεντρικός ομιλητης στο Πρώτο Συνέδριο των Απανταχού Ελλήνων Μαθηματικών **(FCGM-2018)**, που διοργάνωσε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία τον Ιούνιο του 2018 με την ευκαιρία της συμπλήρωσης των 100 χρόνων από την ίδρυσή της. Στο Συνέδριο ο Φωκίων Κολαΐτης παρουσίασε την εργασία του με θέμα: «Logic, Constraint Satisfaction, and Quantum Information».

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πόσοι είναι ενδιάμεσα: Από το 1^2 μέχρι το 2^2 είναι 2 αριθμοί ενδιάμεσα, από το 2^2 μέχρι το 3^2 είναι 4 αριθμοί ενδιάμεσα. Πόσοι αριθμοί είναι ενδιάμεσα από 300^2 μέχρι 305^2;

Οι Γυναίκες: Σε ένα συνέδριο την πρώτη μέρα οι γυναίκες ήταν 1% σε σύνολο 400 ατόμων. Την δεύτερη μέρα απουσίασαν 200 άνδρες ποιο ήταν την δεύτερη μέρα το ποσοστό των γυναικών;

Η παρέα: Μια παρέα από αγόρια και κορίτσια βγήκαν μια βόλτα για καφέ. Το κάθε αγόρι ήπιε ένα ποτήρι μπύρα, ενώ τα κορίτσια ήπιαν από μια πορτοκαλάδα. Η μπύρα είναι ακριβότερη από την πορτοκαλάδα (τιμές ακέραιοι αριθμοί). Κάποιος από την παρέα παρατήρησε ότι αν τα αγόρια έπιναν πορτοκαλάδα και τα κορίτσια μπύρα τότε θα πλήρωναν ένα Ευρώ λιγότερο. Στην παρέα περισσότερα ήταν τα αγόρια ή τα κορίτσια και πόσο περισσότερα;

Ο μαθηματικός: Ρώτησαν οι μαθητές τον καθηγητή τους την ημέρα των γενεθλίων του πόσο χρόνων είναι και είπε: Η ηλικία μου είναι εννεαπλάσια από εκείνη που είχε η κόρη μου όταν εγώ είχα την ηλικία που έχει σήμερα. Αλλά όταν η κόρη μου γίνει όσο είμαι εγώ σήμερα το άθροισμα των ηλικιών μας θα είναι 110 χρόνια. Πόσο ετών είναι ο καθηγητής;

Οι συνταξιδιώτες: Ο Ερμής γύρισε από ένα ταξίδι και είπε στη γυναίκα του: συνταξίδευα μαζί με ένα παλιό φίλο το Νίκο και τις δύο κόρες του.

- Τι ηλικίες έχουν;
- Το γινόμενο των ηλικιών και των τριών είναι 2450 και το άθροισμα διπλάσιο από την ηλικία σου.
- Δεν ξέρω
- Α! ναι η μια κόρη ήταν τρία χρόνια μεγαλύτερη από την άλλη.
- Εντάξει κατάλαβα. Εσείς ξέρετε τις ηλικίες τους;

Το ω: Ο ω+48 και ο ω-60 είναι τέλεια τετράγωνα . Ποιος είναι ο ω;

Οι σελίδες: Οι σελίδες ενός βιβλίου αριθμούνται από 1 μέχρι ν. Αθροίσαμε τους αριθμούς των σελίδων αλλά κατά λάθος κάποια σελίδα την προσθέσαμε δύο φορές και βρήκαμε άθροισμα 1998. Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο και ποια προσθέσαμε δύο φορές;

Η εκδρομή: Πέντε μαθητές ο Άρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος, η Δήμητρα και η Ελισάβετ, σε μια εκδρομή του σχολείου πήραν μαζί τους 100€. Τα χρήματα που είχαν ήταν: Α+Β=52, Β+Γ=43, Γ+Δ=34, και Δ+Ε=30 . Πόσα είχε ο καθένας;

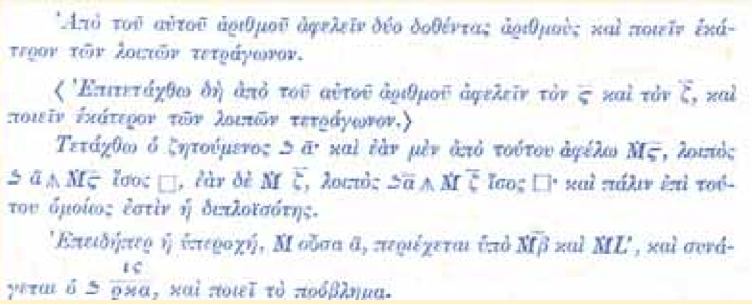
Όλα ίσα: Έχουμε τρία ίδια μπουκάλια με λάδι, εξωτερικά φέρουν χάραξη ανά ένα εκατοστό. Το πρώτο είναι γεμάτο μέχρι την ένδειξη 11, το δεύτερο μέχρι την 7 και το τρίτο μέχρι την 6. Μπορείτε με τρείς κινήσεις να τα φέρεται στο ίδιο ύψος;

Ο Δήμαρχος: Ο Δήμαρχος έχει τρείς οικισμούς και θέλει να κάνει ένα νέο δρόμο που να έχει την ίδια απόσταση από το κέντρο του κάθε οικισμού. Μπορείτε να βοηθήσετε το Δήμαρχο;

Ο αγρότης: Σε ένα μεγάλο αγρόκτημα ένας αγρότης έχει τρείς δεξαμενές αρκετά μακριά η μια από την άλλη. Θέλει να κάνει μια γεώτρηση αλλά να απέχει και από τις τρείς δεξαμενές το ίδιο. Μπορείτε να του υποδείξετε το σημείο;

Επτά αδελφές: Επτά αδελφές πήγαν στον κινηματογράφο η κάθε μια είναι με το αδελφό της. Πόσα εισιτήρια θα πληρώσουν;

Προβλήματα από τον Διόφαντο



Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον.

⟨Ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν τὸν ϛ̄ καὶ τὸν ζ̄, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον.⟩

Τετάχθω ὁ ζητούμενος ΔΥ ᾱ· καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω Μ ϛ̄, λοιπὸς ΔΥ ᾱ ⋔ Μ ϛ̄ ἴσος □, ἐὰν δὲ Μ ζ̄, λοιπὸς ΔΥ ᾱ ⋔ Μ ζ̄ ἴσος □· καὶ πάλιν ἐπὶ τούτου ὁμοίως ἐστὶν ἡ διπλοϊσότης.

Ἐπειδήπερ ἡ ὑπεροχή, Μ οὖσα ᾱ, περιέχεται ὑπὸ Μ β̄ καὶ Μ L', καὶ συνάγεται ὁ ΔΥ ρμα/ιϛ, καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

1. Να βρεθεί αριθμός από τον οποίο είτε αφαιρέσεις 6 είτε αφαιρέσεις 7 παίρνεις τέλειο τετράγωνο.

Στη διπλανή «φωτό» είναι το αρχαίο κείμενο από τα «Αριθμητικά του Διόφαντου» του Ε. Σταμάτη.

2. Δοθείς αριθμός να διαιρεθεί σε δύο αριθμούς και να βρεθεί τετράγωνος αριθμός ο οποίος αν προστεθεί σε καθέναν από αυτούς δίνει τέλειο τετράγωνο.
3. Να βρεθούν δύο αριθμοί που το τετράγωνο του καθενός συν τον άλλο δίνει τέλειο τετράγωνο.
4. Να βρεθούν δύο αριθμοί που αν από το τετράγωνο εκάστου αφαιρεθεί το άθροισμά τους προκύπτει τέλειο τετράγωνο.
5. Ένα πρόβλημα του Διόφαντου λέει: Ένα μουλάρι απευθύνεται στο Γαϊδούρι και λέει: αν μου έδινες ένα σακί θα είχα διπλάσια, αν έπαιρνες εσύ ένα θα είχαμε τα ίδια. Με πόσα σακιά ήταν φορτωμένα;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 116

Τι βαθμό θα πάρει στις Πανελλήνιες;

Όχι καλό βαθμό, γιατί το χ είναι μεταβλητή και όχι αριθμός.

Το ηλικιωμένο ζεύγος

Οι αριθμοί συνεχόμενα έδωσαν τον αριθμό $20151121=67^2$ και αν προστεθούν $2015+1121=3136=56^2$. Ο παππούς είναι 67 ετών, η γιαγιά είναι 56 ετών, η εγγονή 11 και ο αδελφός 21 ετών.

Μπορεί να γίνει αληθής σχέση;

247-118=129

Η Ισότητα

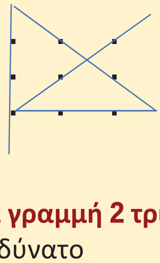
Αν το μηδέν από το δεύτερο μέλος γίνει εκθέτης του αριθμού και είναι: $\mathbf{574^0=1}$

Το κόψιμο της τούρτας

Κάνουμε πρώτα οριζόντια τομή η οποία χωρίζει την τούρτα σε 2 ισοπαχή επίπεδα.

Ύστερα κάνουμε δυο κάθετες τομές σε σχήμα σταυρού. Έτσι θα έχουμε 4 κομμάτια ανά επίπεδο.

Με μια γραμμή 3 τριάδες

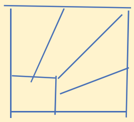


Με μια γραμμή 2 τριάδες

Είναι αδύνατο

Το οικόπεδο

Από το τετράγωνο οικόπεδο των 10 στρεμμάτων πουλήθηκαν 2,5 στρέμματα και τα υπόλοιπα μοιράστηκαν εξ ίσου στα 4 αδέλφια ως εξής:



Ο Φρειδερίκος ο 2ος

Ο μαθηματικός **G.N.Popov**, στο βιβλίο του «Ιστορικά προβλήματα» (1932) παρουσιάζει μια λύση του προβλήματος που μπορεί να έδωσε ο Φιμπονάτσι. Έστω $χ^2$ ο ζητούμενος αριθμός, τότε θα ισχύει: $χ^2+5=κ^2$ ή $χ^2-5=λ^2$. Αφαιρούμε κατά μέλη: $κ^2-λ^2 = 10$ αλλά, ή $2.5 = (κ-λ)(κ+λ)$ και $2.5= =(80 \times 18)/144$, ή$(49/12+31/12)(49/12-31/12) =10$ και επομένως $χ^2 = (41/12)^2$.

Από μνήμης

Το αποτέλεσμα είναι εύκολο $\mathbf{8}57^2-\mathbf{7}57.\mathbf{9}57= 100^2$ και $\mathbf{7}453^2-\mathbf{6}453Χ\mathbf{8}453=1000^2$

Το κλάσμα

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα και διπλασιάζουμε τους όρους των κλασμάτων οπότε μεταξύ τους έχουμε το 89/110 που οι όροι του έχουν διαφορά 110-89=21.