ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

119

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

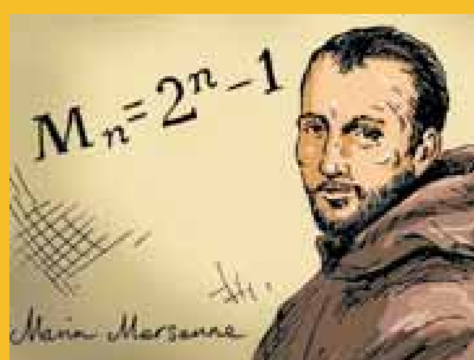
Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2021 ευρώ 3,5

Κλιματική αλλαγή

Το κυνήγι του θησαυρού

Κβάντο υπολογιστής



Θεώρημα Zsigmondy

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 119 - Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2021 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη

Γενικά Θέματα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

με ψυχραιμία να κοιτάξουμε
μπροστά

και με δύναμη ψυχής
να αντιμετωπίσουμε

τα δύσκολα
και όπως λέει και ο ποιητής...

" Το νερο δεν μπορει να γεμισει το χαος.
Στεκεται (...)
Μετεωρο, ζωντανο και ψαχνει
να βρει την αλλη οχθη... "

Έκτωρ Κακναβάτος [1920-2010]
Ποιήματα 1943-1987
μαθηματικός, ποιητής - συγγραφέας
στον υπερρεαλιστικό χώρο

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στην πρόσφατη επικαιρότητα των Μαθηματικών

Το 2021 να έχει χαρά αισιοδοξία και όραμα για το καλύτερο ...

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	6 Νοεμβρίου	2020
Ευκλείδης:	23 Ιανουαρίου	2021
Αρχιμήδης:	27 Φεβρουαρίου	2021

$$2021 = 20^2+(2\cdot 20)^2+21$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δε επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.** Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Ανακαλύπτουμε τον κρυμμένο θησαυρό με τη βοήθεια της Γεωμετρίας

Χρήστος Μπατέλης - Παράρτημα ΕΜΕ **Αχαΐας**

*Η Γεωμετρία ξεκίνησε από τη μέτρηση της γης εδώ και χιλιάδες χρόνια. Η εξέλιξή της στους αιώνες ήταν θεαματική. Μέχρι σε σημείο που μπορεί να βοηθήσει έναν καλό γεωμέτρη να βρει θησαυρό κρυμμένο στη γη! Αυτό είναι το **θέμα** που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.*

Πρώτα, όμως, πρέπει να αποκτήσουμε το υπόβαθρο του καλού γεωμέτρη, ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τις γνώσεις μας για να ανακαλύψουμε τον κρυμμένο θησαυρό. Πώς, όμως, θα γίνει αυτό;

*Θα γνωρίσουμε **τρία γεωμετρικά προβλήματα** και θα εμβαθύνουμε στις λύσεις τους. Κάθε επόμενο πρόβλημα είναι μια εξέλιξη του προηγούμενου προβλήματος ώστε να περάσουμε από το **ειδικό** στο **γενικό** και τέλος στην εφαρμογή τους στην **πραγματικότητα**.*

*Το πρώτο πρόβλημα που ήταν θέμα στις εισαγωγικές εξετάσεις του Πολυτεχνικού κύκλου το **1976**, αναφέρεται σε ορθογώνιο τρίγωνο. Παρουσιάζουμε 4 διαφορετικές λύσεις αυτού του προβλήματος.*

Το δεύτερο πρόβλημα θέλει να αποδείξουμε ό,τι αποδείξαμε στο πρώτο αλλά αναφέρεται σε τυχαίο τρίγωνο.

Το τρίτο πρόβλημα θέλει ό,τι και τα προηγούμενα αλλά με μία από τις κορυφές του τυχαίου τριγώνου να αλλάζει θέσεις στο ημιεπίπεδο που ορίζει με τα άλλα δύο σημεία.

*Τέλος, θα προσπαθήσουμε να **συνδέσουμε** τα παραπάνω προβλήματα με το πρόβλημα του **κρυμμένου θησαυρού** για να το λύσουμε και να τον βρούμε!*

Πρώτο πρόβλημα: Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$). Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΔΙ και ΑΓΗΖ. Αν Ρ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΗ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΡΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

1η λύση

Υπόθεση	Συμπέρασμα
$\hat{A}=90^o$ ΑΒΔΙ τετράγωνο ΑΓΗΖ τετράγωνο Ρ μέσο ΔΗ	$\hat{ΡΒΓ}$ ορθογώνιο και ισοσκελές

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα σημεία Δ, Α, Η είναι συνευθειακά. Είναι $\hat{A}_1=\hat{A}_2=45^o$ και επειδή $B\hat{A}\Gamma=90^o$, θα είναι $\Delta\hat{A}H=180^o$, άρα τα σημεία Δ, Α, Η είναι συνευθειακά, (σχήμα 1). Έστω Κ το σημείο τομής των ΔΒ, ΗΓ. Τότε στο τρίγωνο ΚΔΗ θα είναι $\hat{\Delta}=\hat{H}=45^o$, άρα το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, και επειδή ΚΡ διάμεσος, θα είναι $KP=\frac{\Delta H}{2}=\Delta P=PH$ (1).

Επίσης η ΚΡ θα είναι και διχοτόμος της $\Delta\hat{K}H=90^o$, άρα θα είναι και $\Delta\hat{K}P=H\hat{K}P=45^o$ (2).

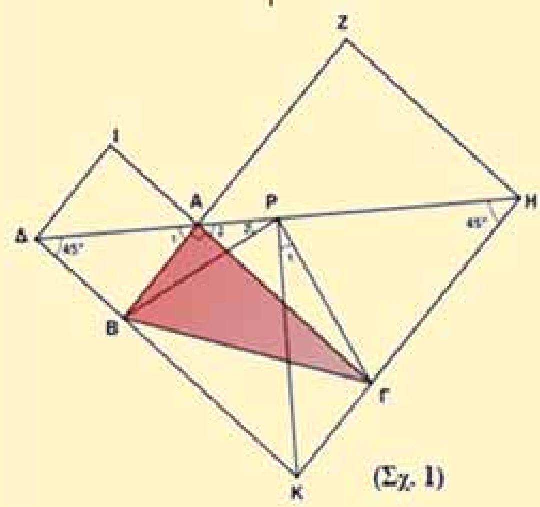
Θα αποδείξουμε ότι ΡΒ=ΡΓ.

Αρκεί να είναι ίσα τα τρίγωνα ΡΔΒ και ΡΚΓ.

Τα τρίγωνα ΡΔΒ, ΡΚΓ έχουν ΔΡ=ΚΡ λόγω (1)

$P\hat{\Delta}B=P\hat{K}\Gamma=45^o$ λόγω (2)

ΔΒ=ΚΓ διότι ΔΒ=ΑΒ (ΑΒΔΙ τετράγωνο) και ΑΒΚΓ ορθογώνιο οπότε ΑΒ=ΚΓ.



(Σχ. 1)

Άρα τα τρίγωνα ΡΔΒ και ΡΚΓ είναι ίσα, οπότε ΡΒ=ΡΓ, δηλαδή το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ισοσκελές.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $B\hat{P}\Gamma=90^o$.

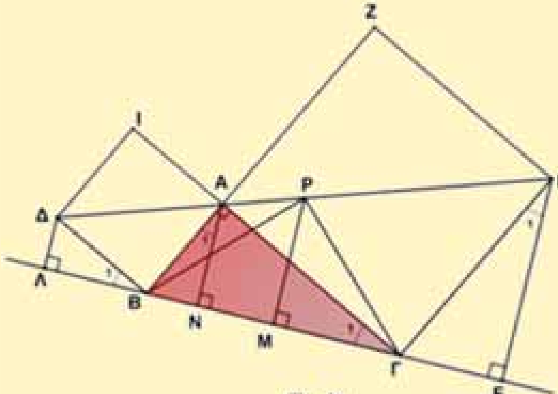
Είναι $B\hat{P}\Gamma = B\hat{P}K + \hat{P}_1 = B\hat{P}K + \hat{P}_2 = 90^o$, διότι τα τρίγωνα ΡΔΒ και ΡΚΓ είναι ίσα, οπότε $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$.
Άρα το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Σχόλιο: *Ακολουθούν οι τρεις από τις τέσσερεις λύσεις που αναφέρονται στο περιοδικό Ευκλείδης Β, τόμος 1, τεύχος 1, Οκτώβριος–Νοέμβριος 1976 (σελ. 22–23–26).*

2η λύση [περιοδικό Ευκλείδης, τ. 1 – 1976]

Τα σημεία Δ, Α, Η είναι συνευθειακά $\Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}H = 45^o + 90^o + 45^o = 180^o$, (σχήμα 2).

Φέρνουμε τις ΔΛ, ΡΜ, ΗΕ⊥ΒΓ, τότε το ΔΛΕΗ θα είναι τραπέζιο και επειδή το Ρ είναι το μέσο της ΔΗ θα είναι και το Μ μέσο της ΛΕ και ΡΜ⊥ΒΓ.
Θα είναι λοιπόν ΜΛ=ΜΕ (1).
Φέρνουμε ΑΝ⊥ΒΓ, τότε τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΑΒΝ έχουν: ΔΒ=ΑΒ (Υπόθεση), $\Delta\hat{\Lambda}B = A\hat{N}B = 90^o$
$\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ (Πλευρές κάθετες), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε θα είναι: ΛΒ=ΑΝ (2), ΔΛ=ΒΝ (3).
Όμοια τα τρίγωνα ΑΝΓ, ΗΓΕ έχουν
ΑΓ=ΓΗ (Υπόθεση), $A\hat{N}\Gamma = H\hat{E}\Gamma = 90^o$
$\hat{\Gamma}_1 = \hat{H}_1$ (Πλευρές κάθετες), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε θα είναι: ΑΝ=ΓΕ (4), ΝΓ=ΗΕ (5).

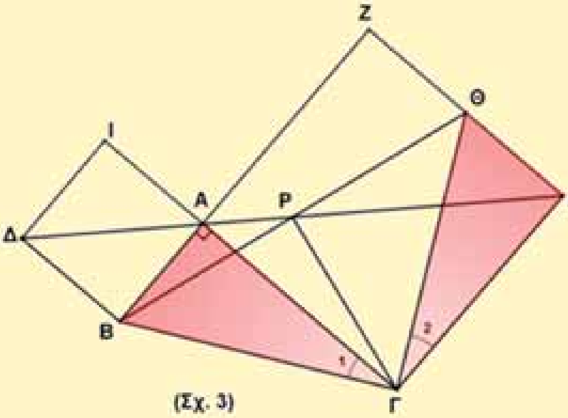

(Σχ. 2)

Η (1) γίνεται ΜΛ=ΜΕ⇒ΜΒ+ΒΛ=ΜΓ+ΓΕ⇒ΜΒ=ΜΓ, διότι ΒΛ=ΑΝ λόγω (2) και ΑΝ=ΓΕ λόγω (4). Άρα το Μ θα είναι το μέσο της ΒΓ και επειδή ΡΜ⊥ΒΓ, άρα ΡΒ=ΡΓ, οπότε το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ισοσκελές. Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι $B\hat{P}\Gamma = 90^o$.

Στο τραπέζιο ΔΛΕΗ η ΡΜ είναι διάμεσος, άρα $PM = \frac{\Delta\Lambda + EH}{2} \overset{(3),(5)}{=} \frac{BN + N\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$. Δηλαδή στο τρίγωνο ΡΒΓ η διάμεσος ΡΜ είναι το μισό της ΒΓ, άρα το τρίγωνο ΒΡΓ είναι ορθογώνιο.

3η λύση [περιοδικό Ευκλείδης, τ.1-1976]

Τα σημεία Δ, Α, Η είναι συνευθειακά $\Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}H = 45^o + 90^o + 45^o = 180^o$, (σχήμα 3).
Έστω ότι η ΒΡ τέμνει τη ΖΗ στο Θ.
Είναι ΗΖ⊥ΒΖ (Β, Α, Ζ συνευθειακά) και ΔΒ⊥ΑΒ, άρα ΔΒ//ΗΖ.
Τα τρίγωνα ΔΒΡ και ΘΗΡ έχουν ΔΡ=ΡΗ (Υπόθεση)
$B\hat{\Delta}P = P\hat{H}\Theta$ (Εντός εναλλάξ)
$\Delta\hat{P}B = \Theta\hat{P}H$ (κατά κορυφή)
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα είναι ΡΒ=ΡΘ (1) και ΔΒ=ΘΗ (2). Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΘΗΓ έχουν ΑΓ=ΓΗ (Υπόθεση), ΑΒ=ΘΗ (λόγω (2) και ΑΒ=ΔΒ)
$B\hat{A}\Gamma = \Theta\hat{H}\Gamma = 90^o$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΓΒ=ΓΘ, δηλαδή το τρίγωνο ΓΒΘ είναι ισοσκελές και επειδή το Ρ είναι μέσο της ΒΘ, θα είναι ΓΡ ⊥ ΒΘ. Δηλαδή το τρίγωνο ΒΡΓ είναι ορθογώνιο, οπότε αρκεί να είναι και ισοσκελές (ΡΒ = ΡΓ).


(Σχ. 3)

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΘΗΓ θα έχουμε επίσης $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (3).

Είναι $H\hat{\Gamma}A = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_2 + \Theta\hat{\Gamma}A = 90^o \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{\Gamma}_1 + \Theta\hat{\Gamma}A = 90^o \Leftrightarrow \Theta\hat{\Gamma}B = 90^o$, άρα το τρίγωνο ΘΓΒ είναι ορθογώνιο και επειδή ΓΡ διάμεσος θα είναι $\Gamma P = \frac{B\Theta}{2} = PB = P\Theta$, οπότε το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ισοσκελές

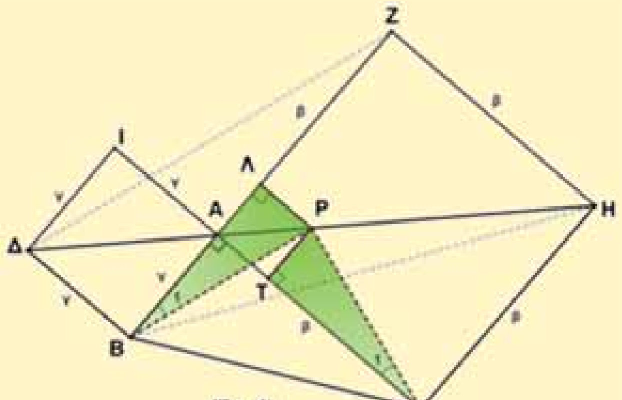
4η Λύση [περιοδικό Ευκλείδης, τ.1 – 1976]

Τα σημεία Δ, Α, Η είναι συνευθειακά $\hat{\Delta A B}+\hat{B A \Gamma}+\hat{\Gamma A H}=45^{o}+90^{o}+45^{o}=180^{o}$, σχήμα 4.

Είναι ΗΖ ⊥ ΒΖ (Β, Α, Ζ συνευθειακά) και ΔΒ ⊥ ΑΒ, άρα ΔΒ // ΗΖ, οπότε το τετράπλευρο ΔΒΗΖ είναι τραπέζιο και το Ρ είναι το μέσο της διαγωνίου ΔΗ.

Φέρνουμε ΡΛ ⊥ ΒΖ, οπότε το Λ θα είναι το μέσον της ΒΖ και θα είναι $\Lambda P=\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ $(\beta>\gamma)$ (1).

Όμοια ΔΙ ⊥ ΙΓ και ΗΓ ⊥ ΙΓ, άρα το τετράπλευρο ΔΙΗΓ είναι τραπέζιο και το Ρ είναι το μέσο της διαγωνίου ΔΗ. Φέρνουμε ΡΤ ⊥ ΙΓ, οπότε το Τ θα είναι το μέσον της ΙΓ και θα είναι $TP=\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ (2).



(Σχ. 4)

Το Λ είναι μέσο της ΒΖ, άρα $B\Lambda=\dfrac{BZ}{2}=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ (3). Το Τ είναι μέσο της ΙΓ, άρα $\Gamma T=\dfrac{I\Gamma}{2}=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ (4).

Τα τρίγωνα ΛΡΒ, ΡΤΓ έχουν ΛΡ = ΤΡ λόγω (1), (2), ΒΛ = ΓΤ λόγω (3), (4)

$\hat{B\Lambda P}=\hat{PT\Gamma}=90^{o}$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα είναι ΡΒ = ΡΓ, δηλαδή το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ισοσκελές. Αρκεί να είναι και ορθογώνιο. Επίσης είναι και $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$, άρα το τετράπλευρο ΑΡΓΒ είναι εγγράψιμο, οπότε $\hat{BP\Gamma}=\hat{BA\Gamma}=90^{o}$, άρα το τρίγωνο ΡΒΓ θα είναι και ορθογώνιο.

Δεύτερο Πρόβλημα: Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΔΙ και ΑΓΗΖ. Έστω Ρ το μέσον της ΔΗ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΜΡ, είναι κάθετο στην ΒΓ και ίσο με το μισό της.

Υπόθεση	Συμπέρασμα
ΑΒΔΙ τετράγωνο ΑΓΗΖ τετράγωνο Ρ μέσο ΔΗ Μ μέσο ΒΓ	ΜΡ ⊥ ΒΓ $MP=\dfrac{B\Gamma}{2}$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Πρέπει να εκμεταλλευτούμε το μέσο Μ της ΒΓ και τις ισότητες των πλευρών των δύο τετραγώνων. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΚΓ.

Φαίνεται ότι τα τρίγωνα ΔΡΒ και ΡΚΓ είναι ίσα, αν το αποδείξουμε αυτό τότε ΡΒ = ΡΓ.

Τα τρίγωνα ΔΡΒ, ΡΚΓ έχουν:

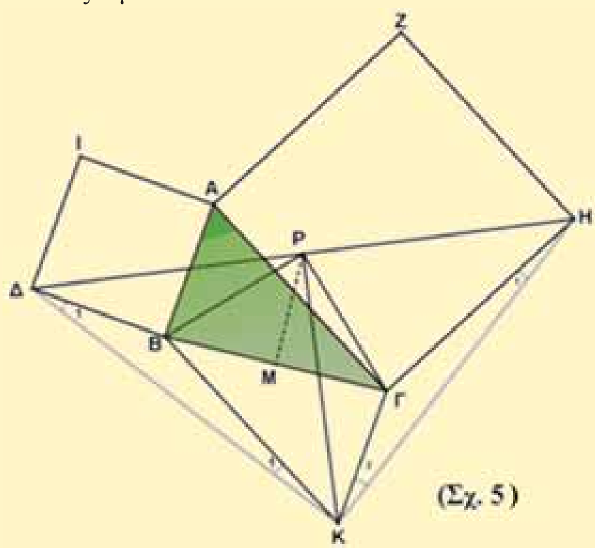
ΔΒ = ΚΓ (ΔΒ=ΑΒ=ΓΚ, ΑΒΔΙ τετράγωνο και ΑΒΚΓ παραλληλόγραμμο)

Αν είναι ΔΡ = ΚΡ τότε $\Delta P=KP=PH=\dfrac{\Delta H}{2}$, δηλαδή θα πρέπει το τρίγωνο ΔΚΗ να είναι ορθογώνιο, αρκεί $\left(\hat{\Delta K H}=90^{o}\right)$.

Είναι $\hat{\Delta K H}=\hat{K}_1+\hat{BK\Gamma}+\hat{K}_2=\hat{K}_1+\hat{BA\Gamma}+\hat{K}_2$ (1).

Ας δούμε τι σχέση έχουν οι γωνίες $\hat{K}_1,\hat{K}_2$.

Τα τρίγωνα ΒΔΚ, ΓΚΗ έχουν ΔΒ=ΚΓ διότι ΔΒ=ΑΒ=ΚΓ (τετράγωνο ΑΒΔΙ και παραλληλόγραμμο ΑΒΚΓ)



(Σχ. 5)

ΒΚ=ΓΗ διότι ΒΚ=ΑΓ=ΓΗ (παραλληλόγραμμο ΑΒΚΓ και τετράγωνο ΑΓΗΖ)

$\hat{\Delta BK}=\hat{K\Gamma H}$ διότι $\hat{\Delta BK}=360^{o}-90^{o}-\hat{ABK}=270^{o}-\hat{A\Gamma K}=\hat{K\Gamma H}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΚΗ=ΚΔ, άρα το τρίγωνο ΔΚΗ είναι ισοσκελές.

Επίσης θα είναι $\hat{K}_1 = \hat{H}_1$, $\hat{K}_2 = \hat{\Delta}_1$ (2). Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$\Delta\hat{K}H = \hat{H}_1 + B\hat{A}\Gamma + \hat{K}_2 = \hat{H}_1 + \hat{K}_2 + B\hat{A}\Gamma = 180^o - K\hat{\Gamma}H + 180^o - A\hat{\Gamma}K = 360^o - (K\hat{\Gamma}H + A\hat{\Gamma}K) =$

$360^o - (360^o - 90^o) = 90^o$, δηλαδή το τρίγωνο ΔΚΗ είναι και ορθογώνιο.

Επειδή το τρίγωνο ΔΚΗ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, θα είναι ΚΡ=ΔΡ=ΡΗ (3).
Τα τρίγωνα ΔΡΒ και ΡΚΓ έχουν δύο πλευρές ίσες (ΔΒ=ΚΓ και ΔΡ=ΡΚ λόγω (3), αρκεί η περιεχόμενες γωνίες να είναι ίσες. Αρκεί $P\hat{\Delta}B = P\hat{K}\Gamma$. Επειδή το τρίγωνο ΚΔΗ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και η ΚΡ είναι ύψος, θα είναι και διχοτόμος, άρα $P\hat{K}H = P\hat{K}\Delta = 45^o$, οπότε $P\hat{K}\Gamma = 45^o - \hat{K}_2 \overset{(2)}{=} 45^o - \hat{\Delta}_1$ (4).

Επειδή το τρίγωνο ΚΔΗ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, θα είναι $K\hat{\Delta}H = \Delta\hat{H}K = 45^o$, οπότε $P\hat{\Delta}B = 45^o - \hat{\Delta}_1$ και λόγω (4) θα είναι $P\hat{\Delta}B = P\hat{K}\Gamma$. Άρα τα τρίγωνα ΔΡΒ, ΡΚΓ είναι ίσα, οπότε ΡΒ=ΡΓ.

Επίσης θα είναι $\Delta\hat{P}B = K\hat{P}\Gamma$ (5). Το τρίγωνο ΒΡΓ είναι ισοσκελές και η ΡΜ είναι διάμεσος, άρα ΡΜ⊥ΒΓ. Για να αποδείξουμε ότι $PM = \frac{B\Gamma}{2}$, αρκεί $B\hat{P}\Gamma = 90^o$.

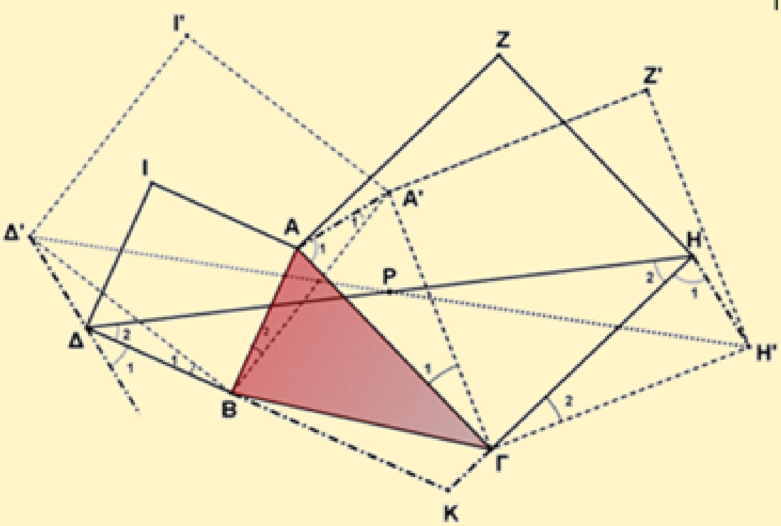
Είναι $B\hat{P}\Gamma = B\hat{P}K + K\hat{P}\Gamma \overset{(5)}{=} B\hat{P}K + \Delta\hat{P}B = 90^o$, διότι ΚΡ⊥ΔΗ.

Τρίτο πρόβλημα: Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΔΙ και ΑΓΗΖ. Εάν οι κουφές Β και Γ του τριγώνου είναι σταθερές, ενώ η κορυφή Α κινείται πάνω στο ένα από τα ημιεπίπεδα, που ορίζει η ευθεία ΒΓ, ν' αποδείξετε ότι το μέσο Ρ του ευθυγράμμου τμήματος ΔΗ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή η θέση του δεν εξαρτάται από τη θέση του Α.

Λύση

Επειδή τα σημεία Β, Γ είναι σταθερά και το Α μεταβλητό, θεωρούμε μία άλλη τυχαία θέση για το Α, έστω Α΄.
Τότε τα νέα τετράγωνα θα είναι τα Α΄ΒΔ΄Ι΄ και Α΄ΓΗ΄Ζ΄, Θα αποδείξουμε ότι η Δ΄Η΄ διέρχεται από το Ρ.

Υπόθεση	Συμπέρασμα
Β, Γ σταθερά ΑΒΔΙ τετράγωνο ΑΓΗΖ τετράγωνο Ρ μέσο ΔΗ	Ρ σταθερό



(Σχ. 6)

Η νέα θέση Α΄ στρέφει την ΒΑ κατά γωνία $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$, διότι

$\Delta'\hat{B}A' = \Delta\hat{B}A = 90^o \Rightarrow \Delta'\hat{B}A + A\hat{B}A' = \Delta\hat{B}\Delta' + \Delta'\hat{B}A \Rightarrow \Delta'\hat{B}A + \hat{B}_2 = \hat{B}_1 + \Delta'\hat{B}A \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{B}_1$.

Όμοια στρέφει την ΓΑ κατά γωνία $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, διότι $H'\hat{\Gamma}A' = H\hat{\Gamma}A = 90^o \Rightarrow H'\hat{\Gamma}H + H\hat{\Gamma}A' = H\hat{\Gamma}A' + A'\hat{\Gamma}A \Rightarrow$

$\hat{\Gamma}_2 + H\Gamma A' = H\Gamma A' + \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1$.

Για να αποδείξουμε ότι η Δ΄Η΄ διέρχεται από το Ρ, αρκεί να αποδείξουμε ότι το ΔΔ'ΗΗ' είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοι θα διχοτομούνται. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΔΔ' = // της ΗΗ'.

Θα εκμεταλλευτούμε την ισότητα των γωνιών $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1$.

Τα τρίγωνα ΒΔΔ΄ και ΒΑΑ΄ έχουν ΒΔ = ΒΑ (Υπόθεση), ΒΔ΄= ΒΑ΄ (Υπόθεση), $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΔΔ' = ΑΑ' (1).

Τα τρίγωνα ΓΑΑ΄ και ΓΗΗ΄ έχουν ΓΑ=ΓΗ (Υπόθεση), ΓΑ΄=ΓΗ΄ (Υπόθεση), $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΗΗ' = ΑΑ' (2). Από τις (1) και (2) έχουμε ΔΔ' = ΗΗ'. Αρκεί ΔΔ' // ΗΗ'.

Αρκεί $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^o$. Η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΒΔ΄, άρα $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{\Delta}'B + \hat{B}_1$.

Από την ισότητα των τριγώνων ΒΔΔ΄, ΒΑΑ΄ θα έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ και $\Delta\hat{\Delta}'B = \hat{A}'_1$, οπότε θα είναι: $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{\Delta}'B + \hat{B}_1 = \hat{A}'_1 + \hat{B}_2$ (3). Από την ισότητα των τριγώνων ΓΑΑ΄ και ΓΗΗ΄ θα έχουμε $\hat{H}_1 = \hat{A}_1$, οπότε θα είναι: $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \overset{(3)}{=} \hat{A}'_1 + \hat{B}_2 + \hat{\Delta}_2 + \hat{A}_1 + \hat{H}_2$ και θέλουμε αυτό το άθροισμα να κάνει 180^o.

Από το τρίγωνα ΑΒΑ΄ θα έχουμε: $\hat{A}'_1 + \hat{B}_2 + B\hat{A}\Gamma + \hat{A}_1 = 180^o$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Delta}_2 + \hat{H}_2 = B\hat{A}\Gamma$. Προεκτείνουμε τις ΔΒ, ΗΓ που τέμνονται στο Κ. Οι γωνίες $\hat{\Delta}_2, \hat{H}_2$ είναι γωνίες του τριγώνου ΔΗΚ, οπότε $\hat{\Delta}_2 + \hat{H}_2 = 180^o - \Delta\hat{K}H$ (4). Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ είναι εγγράψιμο (ΑΒ⊥ΒΚ και ΑΓ⊥ΚΓ), άρα $B\hat{K}\Gamma + B\hat{A}\Gamma = 180^o \Rightarrow \Delta\hat{K}H + B\hat{A}\Gamma = 180^o \Rightarrow \Delta\hat{K}H = 180^o - B\hat{A}\Gamma$ (5).

Η (4) λόγω της (5) γίνεται $\hat{\Delta}_2 + \hat{H}_2 = 180^o - (180^o - B\hat{A}\Gamma) = B\hat{A}\Gamma$. Άρα ΔΔ' =//ΗΗ', οπότε το ΔΔ΄ΗΗ΄ παραλληλόγραμμο άρα οι διαγώνιοι διχοτομούνται, δηλαδή η Δ' Η' διέρχεται από το Ρ.

Παρατηρήσεις:

1. Το τρίγωνο ΡΒΓ συνεχίζει να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Α.
2. Επειδή η κατασκευή του, εξαρτάται μόνο από την πλευρά ΒΓ, η θέση του σημείου Ρ θα είναι κατασκευάσιμη.
3. Με διάμετρο τη ΒΓ κατασκευάζουμε κύκλο, φέρνουμε τη μεσοκάθετη της ΒΓ και εκεί που τέμνει τον κύκλο είναι το σημείο Ρ.

Ας δούμε τώρα πώς με τη βοήθεια της Γεωμετρίας μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα **κρυμμένου θησαυρού** και να το λύσουμε βασιζόμενοι στην εμπειρία που αποκομίσαμε λύνοντας τα τρία προβλήματα και εστιάζοντας στις παρατηρήσεις μας.

Το πρόβλημα του κρυμμένου θησαυρού

Έστω ότι βρίσκουμε ένα παλιό χάρτη που απεικονίζει ένα νησί στο οποίο υπάρχει κρυμμένος θησαυρός. Εκτός από το γεωγραφικό πλάτος και μήκος του νησιού, ο χάρτης έχει σχεδιασμένα επάνω του μια οξιά Β, μια βελανιδιά Ε, μια κρεμάλα G, και δύο σημεία Β΄ και Ε΄, ανάμεσα στα οποία, στη μέση ακριβώς, είναι ο θησαυρός.

Το σημείο Β' μπορεί να το βρει κανείς αν προχωρήσει από την κρεμάλα G προς την οξιά Β, μετρώντας τα βήματα και στραφεί κατόπιν αριστερά κατά 90^o, κάνοντας τόσα βήματα όσα έκανε από την κρεμάλα μέχρι την οξιά.

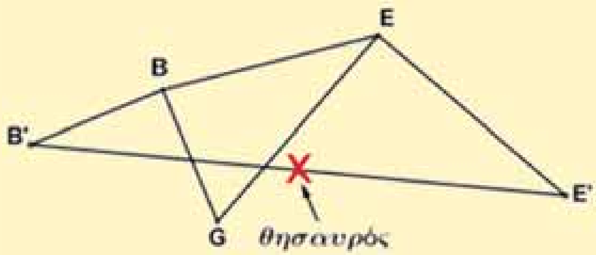
Με τον ίδιο τρόπο, προχωρώντας από την κρεμάλα G προς την βελανιδιά Ε, μετρώντας τα βήματα και στρεφόμενος όμως προς τα δεξιά κατά 90^o κάνοντας τόσα βήματα όσα έκανε από την κρεμάλα, βρίσκει κανείς το σημείο Ε'.

Όταν όμως έφτασε στο νησί, βρίσκει τα δύο δένδρα, αλλά **όχι** και την **κρεμάλα** που έχει εξαφανιστεί τελείως, χωρίς ν΄ αφήσει το παραμικρό ίχνος.

Πώς θα μπορέσει τώρα να βρει τον θησαυρό;

Λύση

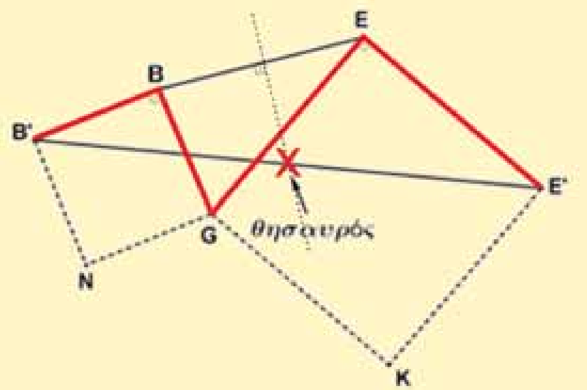
Ας κάνουμε πρώτα ένα σχήμα για τη θέση του θησαυρού.



Όπως φαίνεται από τα παραπάνω σχήμα, έχουμε ένα τρίγωνο το GBE και τα ευθύγραμμα τμήματα BB', EE', τέτοια ώστε BB' $\perp$ BG με BB' = BG και GE $\perp$ EE' με GE = EE'.

Επειδή BB' $\perp$ BG και BB' = BG, αυτό παραπέμπει σε τετράγωνο, το GBB' N.

Όμοια επειδή GE $\perp$ EE' με GE = EE', αυτό παραπέμπει σε τετράγωνο GEE' K, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Αυτό το σχήμα παραπέμπει σε προηγούμενο πρόβλημα (το πρόβλημα 2)

Στο πρόβλημα αυτό αποδείξαμε ότι το μέσον του Β΄Ε΄ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη της BE και σε απόσταση $\frac{\text{BE}}{2}$ από το μέσον της BE. Δηλαδή η θέση της κρεμάλας G δεν παίζει κανένα ρόλο στην ανακάλυψη του θησαυρού.

Συμπερασματικά: **Με τη βοήθεια της Γεωμετρίας ανακαλύψαμε τον κρυμμένο θησαυρό χωρίς καν να χρειαστεί να... σκάψουμε παρά μόνον στο και με το μυαλό μας. Η συστηματική μετάβαση από τις ιδιότητες ενός συγκεκριμένου τριγώνου (1ο πρόβλημα) στις ίδιες ιδιότητες ενός τυχαίου τριγώνου με μετακινούμενη κορυφή (3ο πρόβλημα) ανέδειξε τη δυναμική της Γεωμετρίας και την εφαρμογή της στην ανακάλυψη του κρυμμένου θησαυρού.**

Πηγές:

• Περιοδικό Ευκλείδης για το Λύκειο τόμος Ι΄, τεύχος 1, [Οκτώβριος - Νοέμβριος 1976 σελίδα 22–23–26].
• Περιοδικό Ευκλείδης για το Λύκειο τόμος ΙΒ΄, τεύχος 5, [Μάιος – Ιούνιος 1979].
• Περιοδικό Ευκλείδης για το Λύκειο τόμος ΚΑ΄, τεύχος 4, [Απρίλιος 1988 σελίδα 197].

Κλιματική αλλαγή

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Πριν 650 εκατομμύρια χρόνια, κατά τους Γεωλόγους, υπήρξε η Κρυογενής περίοδος στη Γη, και μάλιστα πιστεύουν ότι οι πάγοι είχαν φτάσει στο Ισημερινό. Η **Γη** τότε ήταν μια **χιονόμπαλα** (Snowball Earth). Εδώ και 2,5 εκατομμύρια χρόνια είμαστε στην τεταρτογενή παγετωνική περίοδο, δηλαδή περίοδος αυτή την οποία διανύει η Γη τώρα είναι **μεσοπαγετωνική περίοδος**. Σύμφωνα με το **μαθηματικό μοντέλο** του Μιλουτίν Μιλάνκοβιτς, τους «κύκλους Μιλάνκοβιτς», υπάρχουν χρονικές περίοδοι, κατά τις οποίες έχουμε σημαντική πτώση της θερμοκρασίας με αύξηση των παγετώνων και χρονικές περιόδους με αύξηση της θερμοκρασίας και λιώσιμο των πάγων. Όλα έχουν να κάνουν με τις περιοδικές κινήσεις της Γης και τη θέση που παίρνει κάθε φορά σε σχέση με τον Ήλιο. Η πιο «πρόσφατη», εποχή των παγετώνων στη Γη άρχισε να υποχωρεί πριν από 12.000 χρόνια, που έχουμε την εμφάνιση των πρώτων πολιτισμών. Αυτό επέτρεψε στους ανθρώπους **να αφήσουν την νομαδική ζωή**, να εγκατασταθούν μόνιμα σε εύκρατες περιοχές της Μεσογείου και εκεί να αναπτύξουν την γεωργία και την κτηνοτροφία.

Όμως τους τελευταίους δύο αιώνες, η ανθρωπότητα ανέπτυξε τον **«πολιτισμό της καμινάδας»** όπως ονομάστηκε, ο οποίος προξένησε μεγάλη μόλυνση στον πλανήτη μας και βίαιη μεταβολή των καιρικών φαινομένων. Αν δεν είχε αναπτυχθεί η Μετεωρολογία, να μας προειδοποιούν για τα καιρικά φαινόμενα, πιστεύω ότι θα είχαμε πολύ μεγάλες τραγωδίες. Η μόλυνση αυτή του περιβάλλοντος από την κάπνα του πετρελαίου, τα πλαστικά, τα βιομηχανικά απόβλητα, τα χημικά, το κόψιμο και κάψιμο των δασών, τον περιορισμό των ρεμάτων, την υπερβολική ανοικοδόμηση, και γενικά τη μεταβολή της όψης του πλανήτη, αφύπνισαν ευτυχώς την ανθρωπότητα. Για την κλιματική αλλαγή, κανείς δεν θα μπορούσε να πει με βεβαιότητα ποιες είναι οι αιτίες.

Σύμφωνα όμως με τους επιστήμονες, υπεύθυνη είναι η **ανθρώπινη δραστηριότητα**. Μπροστά σε αυτόν τον κίνδυνο **200** περίπου χώρες **υπέγραψαν το 2016** Συμφωνία στο **Παρίσι** για τον περιορισμό των ρυπογόνων δραστηριοτήτων και προσπάθειες για πράσινη ενέργεια.

«Πρέπει να καταβάλουμε κάθε προσπάθεια για να διασφαλίσουμε ότι το κλίμα δεν θα αλλάξει δραματικά» είχε πει ο Ρώσος πρόεδρος Vladimir Putin.

Δυστυχώς ο προηγούμενος πρόεδρος της Αμερικής είχε αποχωρήσει από την Συμφωνία του Παρισιού, με τη δικαιολογία, πως επέτρεπε σε **Κίνα και Ινδία**, τις δύο χώρες με υψηλότερες εκπομπές ρύπων, να καταναλώνουν ελεύθερες, ορυκτά καύσιμα. Αλλά με την συμφωνία που έγινε πριν λίγες μέρες μεταξύ του νέου προέδρου των ΗΠΑ και της Ρωσίας για να συνεργαστούν περαιτέρω **στο πλαίσιο του Αρκτικού Συμβουλίου** για το περιβάλλον, έχουμε ελπίδες ότι όλες οι χώρες **θα εντείνουν** τις προσπάθειές τους για να σταματήσουν την αύξηση της θερμοκρασίας, προκειμένου να αποτραπεί μια καταστρεπτική κλιματική αλλαγή. Κλασσική ευκαιρία να γίνει αυτό, στη σύνοδο κορυφής, που πρόκειται να φιλοξενηθεί στις ΗΠΑ στις **22 Απριλίου 2021** (ημέρα της Γης)
«Η επιστήμη θα είναι πάντα στην πρώτη γραμμή της διοίκησής μου» δήλωσε ο νέος πρόεδρος **Joe Biden** της Αμερικής. Τη θέση του Διευθυντή, του γραφείου Επιστήμης και Τεχνολογικής πολιτικής εμπιστεύτηκε σε έναν **μαθηματικό**, τον **Eric Steven Lander,** που είναι και γενετιστής. Καθηγητής βιολογίας στο **MIT**, είναι ένας από τους πιο γνωστούς ερευνητές στο ανθρώπινο γονιδίωμα. Αλλά και οι άλλοι καθηγητές αυτής της επιτροπής είναι παγκοσμίου φήμης επιστήμονες. Είναι όλοι επιστήμονες της **υγείας**, της **διατροφής** και του **περιβάλλοντος**. Υπάρχει επομένως, η ελπίδα ότι **δεν θα** έχουμε χειρότερες ημέρες στο μέλλον, αφού όλες οι χώρες και όλοι οι επιστήμονες του κόσμου θα ριχτούν στη μάχη για την κλιματική αλλαγή. Μάλιστα λένε ότι σε αντίθετη περίπτωση, οι καταστροφές που θα προκαλέσει η κλιματική αλλαγή θα είναι χειρότερες από αυτές της πανδημίας του κορωνοϊού. Οι χώρες που υπέγραψαν τη **σύμβαση-πλαίσιο** των **Ηνωμένων Εθνών** για την κλιματική αλλαγή συμφώνησαν να περιορίσουν την παγκόσμια μέση αύξηση της επιφανειακής θερμοκρασίας από την προβιομηχανική εποχή σε λιγότερο από **2° C**

Η Ευρωπαϊκή Ένωση έχει δεσμευτεί να μειώσει μέχρι το **2030** κατά **55%** τις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακος σε σύγκριση με τα επίπεδα του **1990**. Βέβαια για τους ανθρώπους που ζούνε σε πόλεις και απομακρύνονται από τη φύση, τα καιρικά φαινόμενα θα τους είναι άγνωστα, αλλά θα τους φοβίζουν και ακόμα περισσότερο θα τους φοβίζουν τα ονόματα που βάζουν οι μετεωρολόγοι για να τα καταγράψουν.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 118

N49. Να προσδιορίσετε όλους τους πρώτους αριθμούς p που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $5^p + 4p^4$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

(Μ. Ο. Σιγκαπούρης, 2008)

Λύση

Έστω ότι $5^p + 4p^4 = q^2, q \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$5^p = q^2 - 4p^4 = \left(q - 2p^2\right)\left(q + 2p^2\right),\ q \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή ο 5 είναι πρώτος, έπεται ότι:

$$q - 2p^2 = 5^s,\ \ q + 2p^2 = 5^t,\ \ 0 \le s < t,\ \ s + t = p,$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$4p^2 = 5^t - 5^s = 5^s \cdot \left(5^{t-s} - 1\right).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $s > 0$. Τότε $5 \mid 4p^2 \Rightarrow p \mid 5 \Rightarrow p = 5$, οπότε $5^p + 4p^4 = 5^5 + 4 \cdot 5^4 = 5625 = 75^2 \Rightarrow q = 75$, οπότε ο $p = 5$ είναι μία λύση.

2. $s = 0$. Τότε $p = t$ και $5^p = 4p^2 + 1$. Όμως θα αποδείξουμε με επαγωγή, για κάθε $p \ge 2$ ότι ισχύει $5^p > 4p^2 + 1$, οπότε σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει λύση.
   Πράγματι, η σχέση $5^k > 4k^2 + 1$ είναι αληθής για $k = 2$, ενώ με υπόθεση $5^k > 4k^2 + 1$, έπεται ότι
   $$5^{k+1} = 5 \cdot 5^k > 5\left(4k^2 + 1\right) = 20k^2 + 5 \ \text{ και}$$
   $$4\left(k+1\right)^2 + 1 = 4k^2 + 8k + 5 = 4k\left(k+2\right) + 5 < 4k \cdot 5k + 5 = 20k^2 + 5,$$
   οπότε $5^{k+1} > 4\left(k+1\right)^2 + 1$.

N50. Να προσδιορίσετε το μέγιστο δυνατό θετικό ακέραιο κ ο οποίος για όλους τους ακέραιους α, β είναι τέτοιος ώστε, αν ο αριθμός αβ+1 διαιρείται με το κ, τότε και ο αριθμός α + β διαιρείται με το κ.

Mathematical Excalibur, Vol. 21, no4.

Λύση

Έστω κ ένας από τους ακέραιους που ζητάμε και έστω $S=\{\alpha : \alpha\in\mathbb{Z} \text{ και } (\alpha,\kappa)=1\}$.

Θεωρούμε $\alpha\in S$ και επιλέγουμε ακέραιο μ, $1\le\mu\le\kappa-1$, έτσι ώστε: $\mu\alpha^2\equiv-1(\bmod\kappa)$. Επομένως, αν $\beta=\mu\alpha$, τότε $\alpha\beta+1=\mu\alpha^2+1\equiv0(\bmod\kappa)$, οπότε $\kappa|\alpha\beta+1$. Τότε, σύμφωνα με την υπόθεση, $\kappa|\alpha+\beta$ και $\kappa\big|(\alpha+\beta)\alpha-(\alpha\beta+1)=\alpha^2-1$.

Τότε, για κάθε $\alpha\in S$, κάθε πρώτος παράγοντας p του κ ικανοποιεί την ισοτιμία: $\alpha^2\equiv1(\bmod p)$. Αν όλοι οι πρώτοι παράγοντες p του κ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 5, τότε οι 2, 3 ανήκουν στο σύνολο S, αλλά δεν ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2\equiv1(\bmod p)$, αφού $2^2-1=3\neq$ πολ.p και επίσης $3^2-1=8\neq$ πολ.p. Επομένως οι μοναδικοί δυνατοί πρώτοι παράγοντες του κ είναι οι 2 και 3, οπότε

$$\kappa=2^\rho\cdot3^\sigma \quad \text{και} \quad S=\{\alpha:\alpha\in\mathbb{Z} \text{ και } (\alpha,2)=1=(\alpha,3)\}.$$

Αν πάρουμε $\alpha=5\in S$, τότε από τη σχέση $5^2=25\equiv1(\bmod 2^\rho)$ προκύπτει ότι $2^\rho|24\Rightarrow\rho\le3$.

Ομοίως, για $\alpha=5\in S$, τότε από τη σχέση $5^2=25\equiv1(\bmod 3^\sigma)$ προκύπτει ότι $3^\sigma|24\Rightarrow\sigma\le1$.

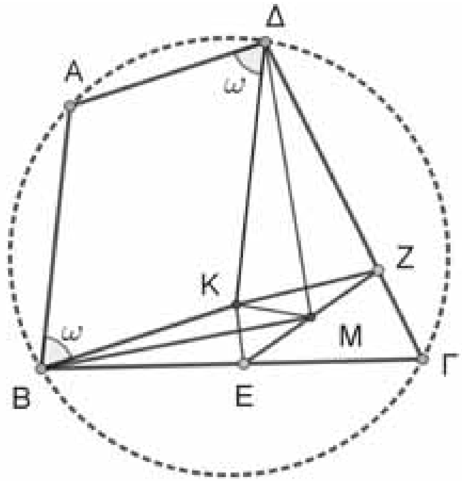
Άρα είναι $\kappa\le2^3\cdot3^1=24$.

Θεωρούμε τώρα $\kappa=24$. Τότε από $\kappa=24|\alpha\beta+1$, έπεται ότι $(\alpha,24)=1=(\beta,24)$, οπότε $\alpha\equiv\gamma(\bmod 24)$ και $\beta\equiv\gamma(\bmod 24)$, όπου $\gamma\in\{1,5,7,11,13,17,19,23\}$. Τα ζευγάρια που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha\beta+1\equiv0(\bmod 24)$ είναι τα $(\alpha,\beta)\in\{(1,23),(5,19),(7,17),(11,13)\}$ και για αυτά ισχύει ότι $24|\alpha+\beta$. Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του κ είναι το 24.

Γ52. Έστω ΑΒΓΔ εγγράψιμο τετράπλευρο τέτοιο ώστε $B\Gamma>A\Delta$ και $\Gamma\Delta>AB$. Τα σημεία Ε, Ζ ανήκουν στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ, αντίστοιχα, και το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ. Αν $BE=A\Delta$ και $\Delta Z=AB$, τότε να αποδείξετε ότι $BM\perp\Delta M$.

Mathematical Excalibur, Vol. 20, no1.

Λύση



Θεωρούμε σημείο Κ έτσι ώστε ΑΒΚΔ παραλληλόγραμμο, οπότε $A\hat{B}K=A\hat{\Delta}K=\omega$ και επιπλέον έχουμε τις ισότητες $BE=A\Delta=BK$ και $\Delta Z=AB=\Delta K$.

Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΕ, ΔΚΖ και το παραλληλόγραμμο ΑΒΚΔ έχουμε:

$$B\hat{K}\Delta = 180\hat{0} - \omega,\;\; B\hat{K}E = 90^0 - \frac{K\hat{B}E}{2} = 90^0 - \frac{A\hat{B}\Gamma - \omega}{2} \;\; \text{και} \;\; \Delta\hat{K}Z = 90^0 - \frac{K\hat{\Delta}Z}{2} = 90^0 - \frac{A\hat{\Delta}\Gamma - \omega}{2}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω τριών ισοτήτων, λαμβάνοντας υπόψιν και τη σχέση $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^0$, έχουμε

$$B\hat{K}\Delta + B\hat{K}E + \Delta\hat{K}Z = 270^0.$$

Επομένως, θα είναι $E\hat{K}Z = 360^0 - 270^0 = 90^0$, οπότε $KZ \perp KE$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΚΖ έπεται ότι $KM = ME = MZ$. Επίσης έχουμε ότι $BE = BK$ και $\Delta K = \Delta Z$, οπότε η ευθεία ΒΜ είναι μεσοκάθετη του ΚΕ και η ευθεία ΔΜ είναι μεσοκάθετη του ΚΖ.

Επομένως, είναι $BM \parallel KZ$ και $\Delta M \parallel KE$, οπότε $BM \perp \Delta M$.

Ασκήσεις για λύση

Ν51. Έστω n θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς διαιρέτες d του $3n^2$ που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $n^2 + d$ να ισούται με το τετράγωνο ακεραίου.

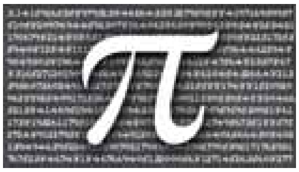
Γ53. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Ι το έκκεντρο του, Δ το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με την πλευρά ΒΓ και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Θεωρούμε και το μέσο Μ του τόξου ΒΓ του περιγεγραμμένου κύκλου που περιέχει την κορυφή Α και έστω Ζ το σημείο τομής των ευθειών ΔΙ και ΑΜ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ περνάει από το μέσο του ΕΖ.

Γ54. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Έστω Ε και Ζ οι ορθές προβολές του σημείου Β πάνω στις ευθείες ΑΔ και ΑΓ, αντίστοιχα. Δίνεται ότι το Ζ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Γ, ενώ το Α βρίσκεται μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Επίσης η ευθεία ΕΖ περνάει από το μέσο της διαγωνίου ΒΔ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

Α63. Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $3(\alpha^2 + \beta^2 - 1) = 4(\alpha + \beta)$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $K(\alpha, \beta) = \dfrac{16}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$.

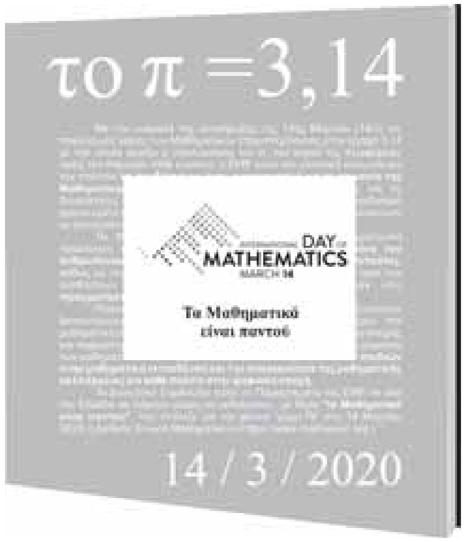
Παγκόσμια Ημέρα του π=3,14

Η διεθνής ημέρα Μαθηματικών [**IDM 2021**] εορτάστηκε και φέτος, στις 14 Μαρτίου 2021, παγκοσμίως υπό την αιγίδα της **Unesco**, έχοντας ως κεντρικό θέμα: «Τα **Μαθηματικά** για έναν καλύτερο κόσμο» λόγω και της συγκυρίας της covid-19. Τα Μαθηματικά αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία σε όλο τον κόσμο για την πρόβλεψη της εξέλιξης και την υποβοήθηση των



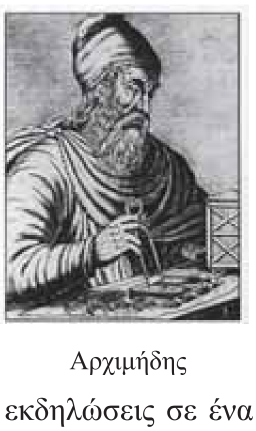
αρμοδίων αρχών στη λήψη βέλτιστων αποφάσεων. Αλλά και πέρα από την πανδημία – σε όλο το **φάσμα** των όψεων και εφαρμογών της **καθημερινότητας** – συμβάλλουν σημαντικά στο σχεδιασμό καλύτερων οικονομικών και κοινωνικών πολιτικών. Η παγκόσμια αυτή ημέρα, οργανώθηκε από τη **διεθνή μαθηματική ένωση** σε περισσότερες από **70 χώρες** και πραγματοποιήθηκαν, πάνω από **450** εκδηλώσεις (συνέδρια, διαγωνισμοί, εκθέσεις, ομιλίες κ.λ.π.) [www.idm314.org/launch 2021 - program.html].

Ο εορτασμός αυτός, ξεκινάει ακριβώς στις **1:59**, μετά το μεσημέρι, καθώς είναι οι τρεις αριθμοί που ακολουθούν τη σταθερά π=3,14 η οποία στην εφταψήφια εκδοχή της, είναι π=3,14159. Η ημέρα **π** καθιερώθηκε το 1988 από τον **Larry Shaw**, στο μουσείο στο Exploratorium του Σαν Φρανσίσκο, ενώ το **π** αναφέρεται για πρώτη φορά προσεγγιστικά, ανάμεσα στις αναλογίες της μεγάλης Πυραμίδας της Γκίζας, που κατασκευάστηκε το 2589-2566 π.Χ.



Από το εξώφυλλο του Ευκλείδη Β΄ το 2020

Ο Αρχιμήδης (**3^{ος}** αιώνας π. Χ.) πολύ αργότερα κατέληξε, μετά από τις μελέτες του **Ιπποκράτη του Χίου** (μηνίσκοι) (**470** π.Χ.) και του **Αντιφώντα** (κυκλικός δίσκος, κανονικά πολύγωνα) (**430** π.Χ.), στη σημαντική σχέση $\frac{223}{71}<\frac{L}{2\rho}<\frac{22}{7}$ (όπου L=μήκος κύκλου και ρ ακτίνα κύκλου).



Αρχιμήδης

Το σύμβολο **π** καθιερώθηκε από τον **Eüler το 1737** στο βιβλίο του «Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση». Το **1882 ο Lindeman** απέδειξε ότι ο **π** είναι **υπερβατικός αριθμός**, δηλαδή δεν είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακεραίους ή ρητούς αριθμούς. Η απόδειξη αυτή έδωσε την τελική απάντηση, ότι ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται. Στις 14 Μαρτίου **2018 η Google** γιόρτασε την **30^{η}** επέτειο της σταθεράς του **π** με την έκφραση Happy Pi Pay. Το **Πρίνστον**, κάθε χρόνο φιλοξενεί πολυάριθμες εκδηλώσεις σε ένα κοινό εορτασμό της Ημέρας το **π** και των γενεθλίων του **Αϊνσταϊν** (έζησε περισσότερο από 20 χρόνια στο Πρίνστον, σαν ερευνητής στο χώρο των Μαθηματικών).

Αξίζει να σημειωθεί ότι στον Ελλαδικό χώρο, έγιναν αρκετές εκδηλώσεις, για το **π,** στις 14 Μαρτίου 2021, ενδεικτικά αναφέρουμε τα Παραρτήματα της ΕΜΕ **Καστοριάς** και **Έβρου** σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας και το Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο αντίστοιχα. [**Δείτε** σχετικά στην www.hms.gr]

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστη
μών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

προλεγόμενα ικανοποιώντας επιθυμία αρκετών συναδέλφων, παραθέτουμε (από τούτο το τεύχος), την άποψη σχετικά με το "τί είναι τα Μαθηματικά", ορισμένων διακεκριμένων ομάδων (ή προσώπων). Λόγω έλλειψης χώρου της στήλης μας, οι εκτιθέμενες απόψεις θα είναι σχεδόν επιγραμματικές.

1. οι Πυθαγόρειοι και τα Μαθηματικά

Ξεκινάμε την προσπάθειά μας αυτή, με την "άποψη" των Πυθαγορείων. Το απόκομμα δανειστήκαμε από την διδακτορική εργασία του Βασίλη Λιόση (τον οποίο ευχαριστούμε) (επιβλέπων καθηγητής, Παναγιώτης Σπύρου).

*«...Είναι γνωστό πως γραπτά κείμενα από τους Πυθαγόρειους δεν υπάρχουν, ωστόσο υπάρχουν κάποιες αναφορές για αυτούς οι οποίες κυρίως προέρχονται από τον Αριστοτέλη. Μπορεί να μη διατυπώνεται με ρητό τρόπο κάποιος ορισμός των Μαθηματικών, ωστόσο η άποψή τους για την έννοια του αριθμού δηλώνει με ένα υπόρρητο τρόπο και την αντίληψή τους για το τι είναι μαθηματικά και πού αυτά υπάρχουν. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη : «…οι λεγόμενοι Πυθαγόρειοι καταπιάστηκαν πρώτοι με τα Μαθηματικά και όχι μόνο τα ανέπτυξαν αλλά καθώς αυτά τους έγιναν δεύτερη φύση, **θεώρησαν ότι οι αρχές τους είναι αρχές των όντων**. Επειδή λοιπόν στα Μαθηματικά οι αριθμοί έρχονται, από τη φύση τους, πρώτοι και επειδή θεωρούσαν ότι στους αριθμούς βλέπουν πολλές ομοιότητες με τα όντα και τα γεγονότα, περισσότερες από ότι στη φωτιά, στη γη και στο νερό, ότι ο τάδε αριθμός με τις συγκεκριμένες ιδιότητες είναι η δικαιοσύνη, ο τάδε η ψυχή και ο νους, ο άλλος ο καιρός και ούτω καθ' εξής. Στους αριθμούς ακόμα έβλεπαν τις ιδιότητες και τις σχέσεις των μουσικών αρμονιών. Αφού, λοιπόν, όλα τα άλλα όντα φαίνονταν να είναι τέλεια απεικόνιση των αριθμών και αφού οι αριθμοί είναι πρωταρχικοί σε ολόκληρη τη φύση, θεώρησαν ότι τα στοιχεία όλων των όντων και ότι ολόκληρος ο ουρανός δεν είναι παρά αρμονία και αριθμός όσες, λοιπόν, αναλογίες μπορούσαν να δείξουν ανάμεσα στους αριθμούς και στις αρμονίες αφενός και στις μεταβολές, τα μέρη του ουρανού και τη γενική διάταξη του κόσμου αφετέρου, τις συγκέντρωναν και τις ενσωμάτωναν στο σύστημά τους...».*

II. Γεωμετρία αγάπη μου

▪ ***πόλος και πολική ως προς κύκλο***

Δίνεται κύκλος C και σταθερό σημείο K. Από το K διέρχονται διατέμνουσες τον κύκλο, που τον τέμνουν στα N,M με N μεταξύ M,K. Αν Λ είναι το αρμονικό συζυγές του K ως προς τα N,M, ο γεωμ. τόπος των σημείων Λ είναι μία ευθεία (ε).

— Το σημείο K. ονομάζεται "*πόλος της ευθείας (ε) ως προς τον κύκλο C*".

— Η (ε) ονομάζεται "*πολική του σημείου K, ως προς τον κύκλο C*".

▪ ***μεταπολικά σημεία – μεταπαράλληλα τρίγωνα***

Δίνονται δύο τρίγωνα. Από τα κορυφές του πρώτου φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του δεύτερου. Αν αυτές οι παράλληλες διέρχονται από το ίδιο σημείο O_1, τότε και οι παράλληλες από τις κορυφές του δεύτερου προς τις πλευρές του πρώτου διέρχονται από το ίδιο σημείο O_2.

—Τα σημεία O_1,O_2 ονομάζονται "*μεταπολικά*" σημεία των δύο τριγώνων.

—Τα δύο τρίγωνα ονομάζονται "*μεταπαράλληλα*"

▪ ***σημεία ορθοπολικά – τρίγωνα ορθολογικά***

Δίνονται δύο τρίγωνα. Από τα κορυφές του πρώτου φέρουμε κάθετες προς τις πλευρές του δεύτερου. Αν αυτές οι κάθετες διέρχονται από το ίδιο σημείο O_1, τότε και οι κάθετες από τις κορυφές του δεύτερου

προς τις πλευρές του πρώτου διέρχονται από το ίδιο σημείο O_2.
— Τα δύο τρίγωνα ονομάζονται "*ορθολογικά*"
— Τα σημεία O_1,O_2 ονομάζονται "*ορθοπολικά*"

III. Αυτό το ξέρατε;

ποιες υποθετικές προτάσεις λέγονται: i. αντίστροφες, ii. αντίθετες, iii. ανάστροφες;

(η απάντηση στο τέλος της στήλης)

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν–ερωτούν»

1ο θέμα. ***Θανάσης Φωκάς:*** ***Ο μεγαλύτερος σύγχρονος Έλληνας μαθηματικός*** ***[από τον Μ. Μιχαηλίδη, σε ρεπορτάζ Γιάννη Πανταζόπουλου]***

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Μιχάλης Μιχαηλίδης, μας έστειλε ελάχιστη περίληψη από συνέντευξη του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού Θανάση Φωκά προς τον δημοσιογράφο Γιάννη Πανταζόπουλο [LIFO.gr, 7–5–2019]

Θανάσης Φωκάς

«Ο Θανάσης Φωκάς γεννήθηκε το 1952 και μεγάλωσε στο Αργοστόλι Κεφαλλονιάς. Ο Israel Gelfand, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς και βιολόγους του 20ού αιώνα, έχει πει γι' αυτόν: «Ο Φωκάς είναι μια σπάνια περίπτωση αναγεννησιακού επιστήμονα». Αποφοίτησε πρώτος από την Αεροναυπηγική Σχολή του Imperial College, έκανε διδακτορικό στα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά** στο Πανεπιστήμιο Caltech και έλαβε πτυχίο Ιατρικής από το Πανεπιστήμιο του Μαϊάμι. Το 1995 ανέλαβε την έδρα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Imperial College και από το 2002 μέχρι και σήμερα κατέχει την έδρα της Μη Γραμμικής Μαθηματικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου του Κέμπριτζ.

— Σε τι περιβάλλον μεγαλώσατε;

Γεννήθηκα και μεγάλωσα στην Κεφαλλονιά. Ήμουν πολύ καλός μαθητής, αλλά τα τελευταία χρόνια του Γυμνασίου ανακάλυψα ότι ήμουν πολύ **καλός τερματοφύλακας**. Η ενασχόλησή μου με το ποδόσφαιρο είχε ως αποτέλεσμα να μη διαβάζω και να πάρω διαγωγή «κοσμία», μέγιστο πρόβλημα εκείνη την εποχή. Τότε ο πατέρας μου με έστειλε τον τελευταίο χρόνο του Γυμνασίου στην Αθήνα, όπου επανήλθα στον παλιό μου ρυθμό. Είχα αντιληφθεί ότι είχα κάποια κλίση στα Μαθηματικά, επειδή όμως τότε επικρατούσε η άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι άχρηστα, αποφάσισα να γίνω μηχανικός. Ρωτώντας, έμαθα ότι οι μηχανικοί που χρησιμοποιούν τα περισσότερα μαθηματικά είναι οι αεροναυπηγοί και οι ηλεκτρολόγοι μηχανολόγοι. Έδωσα εξετάσεις για το Πολυτεχνείο, αλλά απέτυχα. Έτσι, αποφάσισα να πάω στην Αγγλία. Ήταν δύσκολες οι συνθήκες, δεν ήξερα τη γλώσσα και δεν είχα χρήματα. Κατάφερα όμως, μαθαίνοντας περίπου τριακόσιες λέξεις την ημέρα, να μάθω αγγλικά σε τρεις μήνες. Από τα παιδικά μου χρόνια **νοσταλγώ το ποδόσφαιρο** και τη φωνή του πατέρα μου, ο οποίος ήταν εξαιρετικός τενόρος. Κάθε φορά που τραγουδούσε ένα ντουέτο από την όπερα του Βέρντι «Η δύναμη του πεπρωμένου» δάκρυζα. Για πολλά χρόνια μετά τον θάνατο του δεν μπορούσα να ακούσω μουσικά κομμάτια που ο ίδιος τραγουδούσε. Βέβαια, η νοσταλγία, με τη γλυκιά θλίψη που την συνοδεύει, είναι μία από τις αιτίες που η ζωή είναι υπέροχη.

— Πότε ανακαλύπτετε την «κλίση» σας στα Μαθηματικά;

Στην Ε' Δημοτικού, όταν ένας δάσκαλος μας έβαλε ένα πρόβλημα που μόνο εγώ έλυσα σε όλη την τάξη. Αυτό επέδρασε σημαντικά στην πορεία μου.

— Τι σας γοητεύει στην επιστήμη των Μαθηματικών;

Η πολυπλοκότητα. Ξεκινάς από τελείως διαφορετικές αφετηρίες και καταλήγεις σε αποτελέσματα με εσωτερική συνέπεια.

— Όλα τα προβλήματα έχουν λύση;

Στο Κέμπριτζ έχω έναν φοιτητή πολύ διάσημο επειδή είναι ο νεότερος που κατάφερε να μπει στο πανεπιστήμιο από το 1774 και ολοκλήρωσε τις διδακτορικές του σπουδές του πριν διαβεί το εικοστό έτος της ηλικίας του. Ήρθε πριν από λίγες μέρες και με ρώτησε ποιο είναι το μυστικό της λύσης τόσων προβλημάτων. Του απάντησα ότι είναι πολύ απλό: να ξυπνάς και να κοιμάσαι με το πρόβλημα. Αναλογιστείτε ότι για να φτάσω στην «μέθοδο Φωκά» πέρασαν δεκαπέντε χρόνια.

— Τι απαντάτε σ' αυτούς που λένε ότι τα Μαθηματικά δεν μας χρησιμεύουν πουθενά;

Θα είχαμε αυτή την τεράστια εξέλιξη και την τεχνολογική πρόοδο αν δεν υπήρχε ο ηλεκτρονικός υπολογιστής; Θα υπήρχε ηλεκτρονικός υπολογιστής χωρίς τα Μαθηματικά; Μόνο αν δεις την επιστήμη των Μαθηματικών σε γενικό πλαίσιο θα αντιληφθείς την μέγιστη σημασία τους στην πορεία του κόσμου. Είναι βέβαιο ότι δεν μπορείς να πλησιάσεις την ουσία του κόσμου χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών.

— *Μια χρήσιμη συμβουλή που σας έχουν δώσει;*

Κάποτε, πριν εκφωνήσω μια ομιλία, την έδωσα να τη διαβάσει η μεγάλη κυρία της ποίησης Κική Δημουλά, η οποία έσβησε απ' αυτήν δύο γραμμές και μου είπε ότι αυτές θα μπορούσε να τις είχε πει ο καθένας. Η δεύτερη συμβουλή, σε πλήρη συνέπεια με την πρώτη, ήλθε από τον σημαντικότερο συνεργάτη της ζωής μου, τον Israel Gelfand: «Ποτέ μη λύσεις ένα πρόβλημα που μπορεί να λύσει κάποιος άλλος, διότι αν κάποιος άλλος μπορεί να το λύσει, τότε η επιστήμη δεν σε χρειάζεται».

2^ο^ θέμα. Μαθηματικά και κορονοϊός (του Κώστα Δόρτσιου)

προλεγόμενα με αφορμή την όλο και εντονότερη απειλή από την πανδημία του κορονοϊού και την κούρσα των εμβολιασμών, μας ήρθε στο νου η συμβολή της επιστήμης των Μαθηματικών, σ' αυτόν τον πόλεμο. Η στήλη μας έχει δημοσιεύσει, στο παρελθόν, σχετικές αναφορές (π.χ. του Κώστα Σιέτου, του Κώστα Δασκαλάκη, κ.ά. αξιόλογων Ελλήνων ερευνητών). Σε τούτο το τεύχος σας παρουσιάζουμε, *ενδεικτικά*, τον πρόλογο μιας πολύ μεγάλης και αξιόλογης εργασίας του σημαντικού φίλου της στήλης, του Κώστα Δόρτσιου (Γρεβενά). Η ερευνητική του εργασία πάνω σ' αυτό το θέμα είναι μεγάλη σε έκταση και αφορά τον ελληνικό χώρο. Αρκούμαστε, λοιπόν, στην εισαγωγική σημείωση, που έκανε πριν ένα περίπου χρόνο (στην έγκυρη ιστοσελίδα "mathematica.gr")

«από **KDORTSI** » Τετ Απρ 08, 2020 9:56 pm

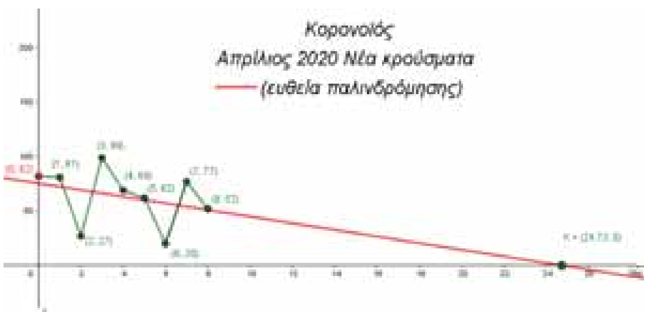
Καλησπέρα από Γρεβενά...

Τις μέρες τούτες όλοι μας, αλλά και ολόκληρος ο κόσμος, ζει και βιώνει την επιδημία του κορωνοϊού. Επειδή πίσω από την επιστήμη της ιατρικής ακούγονται και διάφορα μαθηματικά μοντέλα, (στατιστικοί πίνακες, πιθανότητες, προβλέψεις, καμπύλες, γεωμετρικές πρόοδοι, εκθετικές συναρτήσεις, κ.ά.), δηλαδή μελέτες και προβλέψεις μέσα από ***τη λογική της Μαθηματικής Σκέψης****, που πηγάζει από ένα ολόκληρο και αφανή κόσμο των μαθηματικών, αξίζει να τονιστεί η ανθρωπιστική σημασία του έργου κι αυτών των ανθρώπων, όπου γης.*

Εγώ κλεισμένος και μπροστά στον υπολογιστή παρακολουθώ τα δρώμενα σχετικά με τον κορονοϊό. Ακούγοντας κάθε απόγευμα τα στατιστικά από τον κ. Σωτήρη Τσιόδρα, κυρίως τα νέα κρούσματα, σκέφτηκα να ρωτήσω τα Μαθηματικά. Έτσι σκέφτηκα την παλινδρόμηση ....

Το σχήμα που αναρτώ έχει ακριβώς τα στοιχεία, των νέων κρουσμάτων μέχρι και σήμερα 8 Απριλίου 2020, από τις 30 Μαρτίου 2020 .

Η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης, όπως φαίνεται από το διάγραμμα αυτό, "προβλέπει"(;), ότι ο μηδενισμός των κρουσμάτων θα συμβεί κατά το διάσημα μεταξύ της 24 μει 25 Απριλίου, αν βέβαια όλες οι άλλες παράμετροι του όλου δρώμενου είναι σταθερές.



Ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τις μέρες του Απριλίου 2020 και ο κατακόρυφος τον αριθμό των νέων κρουσμάτων.

Το γράφημα αυτό το ενημερώνω κάθε μέρα..... Ίδωμεν.... Κώστας Δόρτσιος»

3^ο^ θέμα. Ίωνες προσωκρατικοί φυσικοί φιλόσοφοι και Μαθηματικά (του Πέτρου Σοφιανού)

προλεγόμενα ο Πέτρος Σοφιανός είναι από τους παλιούς συνεργάτες της στήλης μας. Διακρίνεται για τη γνώση των Ιώνων φιλοσόφων. Δεν υπάρχει κείμενό του που να μη περιλαμβάνει έμμετρες εκφράσεις (όπως η παρακάτω έμμετρη εισαγωγή στο θέμα):

«Σε δώδεκα ίσα τμήματα χώρισαν το κορδόνι
του Χώρου Χρόνου κατ' αρχάς με τ' όνομα «αρπεδόνη»!
Δώδεκα Πόλεις κτίστηκαν , όσοι και οι θεοί τους
στης Ιωνίας τη μεριά κι άξιοι οι Φιλόσοφοί τους!»

Λόγω έλλειψης χώρου, δημοσιεύουμε μόνο ένα μέρος του σημειώματός του.

«...***Ο Θαλής από την Μίλητο***, ο πρώτος από του 7 σοφούς της πρώτης εκείνης Ελληνικής περιοχής που έφερε το όνομα Ιωνία, ταξίδευε στην Αίγυπτο με σκοπούς εμπορικούς, αλλά και ερευνητικούς του πολιτισμού της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας.

Είναι ευρύτατα γνωστό πως **ο Θαλής**, εφαρμόζοντας την αναλογία σαν αριθμητική σχέση και την ομοιότητα ορθογωνίων τριγώνων, κατάφερνε να **υπολογίζει** μπροστά στα μάτια των έκπληκτων ιερέων **τα ύψη των πυραμίδων** ή των ιερών οβελίσκων, χρησιμοποιώντας τη ράβδο του σαν μονάδα μέτρησης και μετατρέποντας το αποτέλεσμα στις μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούσαν εκεί.

Είναι ακόμη γνωστό στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα ότι από αυτή την εποχή η Γεωμετρία, η Αριθμητική και η Κοσμολογία από Τέχνες και μυθολογικές Κοσμογονίες (με κάθε λαό της γης να φέρει την δική του κοσμογονία) μετασχηματίζονται σε κλάδους της Επιστήμης των Μαθηματικών και ενοποιούνται στην Επιστήμη των επιστημών που από τότε έως σήμερα καλούμε Φιλοσοφία !

Τα Θεωρήματα λοιπόν αυτά του **Θαλή** μαζί με το θεώρημα του μαθητή του, ***Πυθαγόρα,*** από τη Σάμο, αποτελούν τα δυο γερά θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που θεμελιώνει με τη σειρά της όχι μόνο την Γεωμετρία σαν κλάδο της Επιστήμης των Μαθηματικών αλλά μέσα από την αποδεικτική της μεθοδολογία, της επιστημονικής σκέψης γενικότερα.

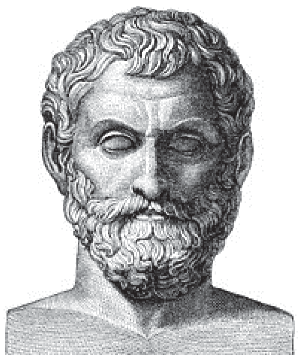
Τι είναι όμως αυτό που κάνει τέσσερις αιώνες ύστερα από τον κύκλο της ζωής του Θαλή τον άγνωστο Αλεξανδρινό «αξιολογητή» να τον κατατάξει ως πρώτο και όχι μόνο κατ' αρχαιότητα, από τους 7 σοφούς της αρχαίας Ελλάδας;

Αυτό που κατά την άποψή μου τον κάνει ιδιαίτερο φιλόσοφο εν ζωή και σοφό μετά τον θάνατό του , είναι ο παρακάτω δεκάλογος πέντε αρχών:

- Πρεσβύτατον των όντων Θεός , αγέννητον γαρ.
- Κάλλιστον Κόσμος , ποίημα γαρ Θεού.
- Μέγιστον Τόπος , άπαντα γαρ χωρεί. (Το σύμπαν τα χωράει όλα)
- Τάχυστον Νους , δια παντός γαρ τρέχει.
- Σοφότατον Χρόνος , ανευρίσκει γαρ πάντα

και πέντε παραινέσεων:

- Γνώθι σ' αυτόν (αυτογνωσία – αυτοκριτική)
- Μέτρω χρω (να χρησιμοποιείς το μέτρο)
- Κολακεύειν γονείς μη όκνει (Μην τεμπελιάζεις να ικανοποιείς τους γονείς)
- Βαρύ η απαιδευσία (άσχημο πράγμα η αμορφωσιά)
- Φίλων παρόντων και απόντων μέμνησο (να θυμάσαι τους φίλους ...)



Θαλής ο Μιλήσιος

και την συμπλήρωση των παραπάνω 5 ορισμών εννοιών με το:

«Ισχυρότατον Ανάγκα , θεοί γαρ πείθονται»

(Πιο ισχυρό όλων είναι η Ανάγκη , διότι σ' αυτήν υπακούουν και οι θεοί).

Σε τούτη την Αναγκαιότητα – Νομοτέλεια του Λόγου όλοι οι επόμενοι Ίωνες Φυσικοί – Μαθηματικοί Φιλόσοφοι στήριξαν τη φιλοσοφία τους ερευνώντας , ανακαλύπτοντας και αξιοποιώντας τα αποτελέσματα τούτης της έρευνας , βάζοντας έτσι τα θεμέλια της παγκόσμιας Επιστήμης και Φιλοσοφίας.

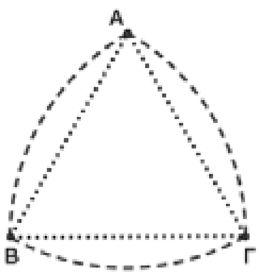
Από τους μαθητές του Θαλή ***ο Αναξίμανδρος*** της πρώτης αυτής Σχολής της Μιλήτου θέτοντας το ΑΠΕΙΡΟΝ σαν αρχή – βάση ερμηνείας του υλικού Κόσμου και με την ιδέα της «Ανακύκλησης της Ύλης» δημιουργεί για πρώτη φορά μια επιστημονική θεμελίωση της Εξελικτικής Θεωρίας , την οποία ο Δαρβίνος με ένα πιο σύγχρονο και ολοκληρωμένο τρόπο παρουσιάζει ενάμισι μόλις αιώνα περίπου πριν από σήμερα.

Για τον ***Πυθαγόρα τον Σάμιο*** αν και χρειάζεται ειδικό και ιδιαίτερο άρθρο για να αναφερθεί κανείς στο πολύπλευρο Φιλοσοφικό Έργο του, ας σημειώσουμε πέραν της συμβολής του στην επιστημονική θεώρηση της Γεωμετρίας, της Θεωρίας Αριθμών, της καθιέρωσης του Δεκαδικού συστήματος έναντι του εξηκονταδικού των προελληνικών πολιτισμών και της Αστρονομίας, η Μουσική βρίσκει μέσω των Αριθμών την πρώτη γραπτή Μαθηματική έκφρασή της.

Προσωπική μου γνώμη σήμερα είναι ότι με την αξιοποίηση και της συνεχώς αναπτυσσόμενης Τεχνολογίας η Κοινωνία μέσα από ένα σύγχρονο προοδευτικό Εκπαιδευτικό Σύστημα πρέπει να αξιοποιήσει τη προσφορά και το μεγάλο Επιστημονικό Έργο των Ιώνων Μαθηματικών Φιλοσόφων»

4ο θέμα. οι τετράγωνες τρύπες του Franz Reuleaux (Φράντς Ρελό) (από τον Άρη Διβέρη)

προλεγόμενα κανονικά το θέμα θα έπρεπε να επιγράφεται: *Μαθηματικά και Τεχνολογία…..*



"Τα Μαθηματικά αξιοποιούνται και εφαρμόζονται στις ευρεσιτεχνίες με εντυπωσιακούς τρόπους· ένας από αυτούς είναι το τρίγωνο Ρελό – ένα τρίγωνο με καμπύλες πλευρές. Η συγκεκριμένη πατέντα με το τρίγωνο Ρελό αφορά κεφαλές τρυπανιών που μας βοηθούν να ανοίξουμε τετράγωνες τρύπες! ["Τρυπάνι για τετράγωνες τρύπες" (δίπλωμα ευρεσιτεχνίας, ΗΠΑ 4.074.778)]. Η διατομή τους ορίζεται από το τρίγωνο Ρελό (διπλανό σχήμα), το οποίο πήρε το όνομά του από τον διακεκριμένο Γερμανό μηχανολόγο μηχανικό Franz Reuleaux (1829–1905). Η ιδέα ενός τρυπανιού που ανοίγει *σχεδόν* τετράγωνες τρύπες εναντιώνεται στην κοινή λογική! Πώς είναι δυνατόν μια περιστρεφόμενη κεφαλή τρυπανιού να ανοίγει μη κυκλικές τρύπες;"; Η απάντηση στην απορία μας, δόθηκε όταν το 2013 κυκλοφόρησε το βιβλίο "Η λωρίδα του Μέμπιους", του Clifford Rickover (εκδ. ΤΡΑΥΛΟΣ),

Είναι εύκολο να κατασκευαστεί ένα τρίγωνο Ρελό. Αρχικά κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά μήκους α. Στη συνέχεια σχεδιάστε τρεις κύκλους (Α,α),(Β,α),(Γ,α). Τα τόξα που σχηματίζονται από τα σημεία τομής των τριών κύκλων και περνούν από τις κορυφές του αρχικού τριγώνου, αποτελούν τις πλευρές του τριγώνου Ρελό.

Χάρη στις μελέτες πολλών μαθηματικών, γνωρίζουμε αρκετά για τις ιδιότητες του τριγώνου Ρελό. Το εμβαδό του ισούται με: $E=1/2.(\pi-3^{1/2})\alpha^2$ και το εμβαδό της περιοχής που διανοίγεται από ένα τέτοιο τρυπάνι καλύπτει το 0,9877003907... του εμβαδού ενός τετραγώνου. Η μικρή αυτή διαφορά οφείλεται στο ότι η κεφαλή του τρυπανιού Ρελό δημιουργεί τελικά ένα τετράγωνο με ελαφρώς στρογγυλεμένες κορυφές."

5ο θέμα «ο διαμεσολαβητικός ρόλος της Γεωμετρίας **στην ανάδειξη της αλληλοεξάρτησης μεταξύ των γραμμικών εξισώσεων, ευθειών, διανυσμάτων και γραμμικών συστημάτων»**

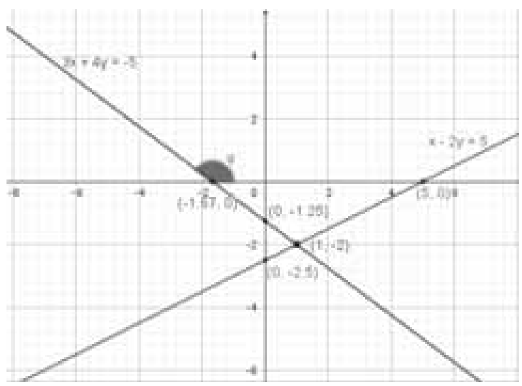
[του Στέργιου Τουρναβίτη]

προλεγόμενα το θέμα τούτο το δημοσιεύουμε στη στήλη μας, όχι σαν υλικό Άλγεβρας Λυκείου αλλά για να δούμε τον «διαμεσολαβητικό ρόλο της Γεωμετρίας...»

«*Σκοπός αυτής της εργασίας, είναι να αναδείξει και να αλληλοσυνδέσει τη λύση και στη συνέχεια την διερεύνηση γραμμικών συστημάτων με τα διανύσματα.*

Αρχίζουμε με την επίλυση ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=5 \\ 3x+4y=-5 \end{array}\right\}(\Sigma_1)$$



Για να απαλείψουμε τον άγνωστο *x* από την 2η εξίσωση, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της 1ης εξίσωσης με το –3 και την εξίσωση που θα προκύψει προσθέτουμε κατά μέλη με την 2η εξίσωση. Έτσι έχουμε τα ισοδύναμα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x-2y=5 \\ -3x+3x+6y+4y=-15-5 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x-2y=5 \\ 10y=-20 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x-2\cdot(-2)=5 \\ y=-2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{c} x=1 \\ y=-2 \end{array}$$

Με την μέθοδο των οριζουσών, βρίσκουμε ξανά τις ίδιες λύσεις, εφόσον βέβαια **η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του 0**. Σύμφωνα λοιπόν με τη μέθοδο Cramer, έχουμε: $D=10$ και $x=D_x/D=1$, $y=D_y/D=-2$

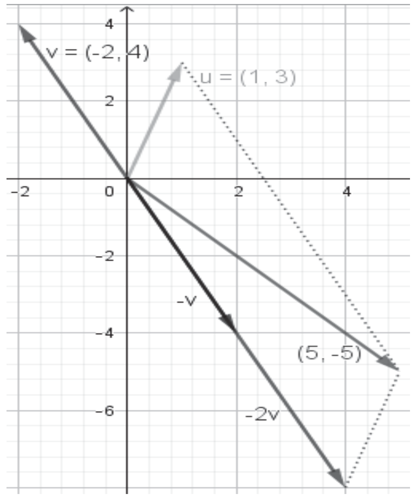
Στα ίδια αποτελέσματα καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε ότι οι ευθείες που είναι γραφικές αναπαραστάσεις των γραμμικών εξισώσεων του συστήματος, τέμνονται στο σημείο (1,–2).

Η παραπάνω γραφική λύση του συστήματος, επικεντρώνεται στις **ξεχωριστές γραμμικές εξισώσεις** (rows). Αυτός ο τρόπος μας είναι ιδιαίτερα προσιτός στις δύο διαστάσεις (επίπεδο), αρκεί να δώσουμε δύο αυθαίρετες τιμές στις μεταβλητές *x* για την κάθε εξίσωση και να λύσουμε ως προς τα αντίστοιχα y. Π.χ. η ευθεία με εξίσωση

x–2y=5 διέρχεται από τα ότι διασταυρώνεται–τέμνει την πρώτη, στο σημεία (0,–2.5), (5,0) το (1,–2) και όλα τα ενδιάμεσα μεταξύ των δύο πρώτων σημείων. Την δεύτερη εξίσωση 3x+4y=5, μπορούμε να την προσδιορίσουμε από την κλίση της –3/4 και σημείο (1,–2) την λύση του συστήματος.
Η δεύτερη προσέγγιση φαίνεται στα διανύσματα στήλες του γραμμικού συστήματος.

$$x\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}\quad(1)$$

Αλγεβρικά η σχέση (1) επαληθεύεται για x=1, y=–2
Το πρόβλημα εδώ είναι να βρούμε ένα κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων – στηλών του συστήματος που να παράγει το διάνυσμα της δεξιάς πλευράς της ισότητας. Προσθέτοντας τα διανύσματα $1\cdot u+(-2)\cdot v$ με τον «κανόνα του παραλληλογράμμου» παίρνουμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}$



V. ειδήσεις – ειδησούλες

1. προ η μερών έφυγε από τη ζωή ο ***Isidore Singer*** [3/5/1924–11/2/2021] (λεπτομέρειες στο επόμενο τεύχος)

2. ***Vietta ή Vieta***; τον προηγούμενο μήνα ο σημαντικός φίλος Μιχάλης Λάμπρου, ανάρτησε στο "mathematica.gr", το επόμενο ερώτημα: «Παρατηρώ ότι σχεδόν όλοι οι φοιτητές στα γραπτά τους γράφουν Vietta (με δύο t) όταν αναφέρονται στον Vieta, πράγμα που βλέπω πάρα πολύ συχνά και αλλού, συμπεριλαμβανομένου και του "mathematica.gr". Δεν ξέρω την πηγή της ανορθογραφίας, αλλά αφού είναι τόσο διαδεδομένη υποθέτω ότι θα είναι σε κάποιο βιβλίο που το λαμβάνει/διαβάζει μεγάλη μάζα μαθητών. Και έμεινε, αλλά καλό είναι να το διορθώσουμε. Κάνω εδώ μία πρώτη αρχή. Το όνομα του εν λόγω Γάλλου μαθηματικού είναι François Viète (1540–1603). Έμεινε γνωστός με την εκλατινισμένη εκδοχή του ονόματός του Franciscus Vieta ή στην Γενική πτώση Francisci Vieta με την οποία υπέγραφε τα υπέροχα βιβλία του.

3. Ο καθηγητής της "Ιστορίας των Μαθηματικών", Γιάννης Χριστιανίδης, υποστηρίζει ότι αντίθετα με ό,τι πιστεύαμε ως σήμερα, η Άλγεβρα δεν είναι επινόηση των Αράβων. Νέα μελέτη εγγράφων αποδεικνύει ότι παλαιότερα οι αρχαίοι Έλληνες είχαν εφεύρει «αλγεβρικούς» τρόπους επίλυσης πρακτικών προβλημάτων. Μέσα σε αυτά τα δύο έγγραφα κρύβεται μια σημαντική για τα Ελληνικά Μαθηματικά ανακάλυψη. Στο επόμενο τεύχος θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στο θέμα.

4. από την έγκυρη ιστοσελίδα "Σταγόνα4u.gr", δανειζόμαστε ένα σημείωμα του Κώστα Αναγνωστόπουλου για τα...Μαθηματικά: Ο Λιεβ Ποντριάγκιν (Μόσχα, 1908 – 1988) ήταν μαθηματική ιδιοφυΐα με σημαντικότατο έργο στα καθαρά και εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ο Ποντριάγκιν τυφλώθηκε ολοκληρωτικά από την έκρηξη μιας γκαζιέρας σε ηλικία 14 ετών. Τότε η μητέρα του, Tatyana Andreevna Pontryagina, σήκωσε τα μανίκια και αφιερώθηκε στον γιό της. Ήταν διαρκώς πλάι του στη δύσκολη καθημερινότητά του. Πάνω απ' όλα, αυτή η δίχως ιδιαίτερες γνώσεις γυναίκα, αλλά με απίστευτο κουράγιο, έγινε επί πολλά χρόνια η «γραμματέας» του: του διάβαζε επιστημονικές εργασίες, έγραφε τις δικές του κ.ο.κ. Μέχρι και ξένες γλώσσες έμαθε να διαβάζει για να τον βοηθά. Λέγεται πως τα κατάφερε με τα μαθηματικά σύμβολα για το νόημα των οποίων δεν είχε ιδέα, περιγράφοντας τη μορφή τους, π.χ. για το σύμβολο της τομής συνόλων ∩ έλεγε «άκρες προς τα κάτω». Δεν χρειάζεται να είναι κάποιος ιδιοφυΐα για να καταλάβει πόσο ιδιοφυής ήταν ο αναγκασμένος να δουλεύει υπ' αυτές τις συνθήκες Ποντριάγκιν, και την αφοσίωση της μητέρας του. Η επιστήμη χρωστάει πολλά στον Ποντριάγκιν· και άλλα τόσα στη μητέρα του.

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;

δύο υποθετικές προτάσεις λέγονται:
i. αντίστροφες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από Β έπεται Α),
ii. αντίθετες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από όχι Α έπεται όχι Β),
iii. ανάστροφες, αν ισχύουν (από Α έπεται Β) και (από όχι Β έπεται όχι Α). Δύο ανάστροφες προτάσεις ή αληθεύουν και οι δύο ή ψεύδονται και οι δύο (σχετιζόμενες προτάσεις)

Τάξη Α΄

Εξισώσεις, Ανισώσεις
Βασικές έννοιες συναρτήσεων

Θανάσης Ντρίζος
Τρίκαλα

Γιώργος Ρίζος
7ο Γυμνάσιο Κέρκυρας

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ – Εξισώσεις 2ου Βαθμού
Ανισώσεις 1ου Βαθμού – Ανισώσεις 2ου Βαθμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i. $x^2 = \lambda^3$ και ii. $x^3 = \lambda^4$,
όπου λ πραγματικός αριθμός.

Λύση:

i. Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda^3 < 0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού θα είχαμε $x^2 < 0$.
Αν $\lambda \geq 0$, τότε $\lambda^3 \geq 0$, άρα

$$x^2 = \lambda^3 \Leftrightarrow x = \sqrt{\lambda^3} \ \text{ ή } \ x = -\sqrt{\lambda^3}$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda\sqrt{\lambda} \ \text{ ή } \ x = -\lambda\sqrt{\lambda}$$

ii.

$$x^3 = \lambda^4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\lambda^4} = \sqrt[3]{\lambda^3 \cdot \lambda}$$

$$= \sqrt[3]{|\lambda|^3} \cdot \sqrt[3]{|\lambda|} = |\lambda| \cdot \sqrt[3]{|\lambda|}$$

$$\text{Άρα } x = \begin{cases} \lambda\sqrt[3]{\lambda}, \text{ αν } \lambda \geq 0 \\ -\lambda\sqrt[3]{-\lambda}, \text{ αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$x - 4(2 - x) \leq 12 \ \text{ και } \ \frac{x}{3} - 4x < \frac{5x}{2} + \frac{111}{6}$$

και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα x΄x. Ποιες είναι οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων;

Λύση:

$$x - 4(2 - x) \leq 12 \Leftrightarrow x - 8 + 4x \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 5x \leq 20 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 4} \quad (1)$$

$$\frac{x}{3} - 4x < \frac{5x}{2} + \frac{111}{6} \Leftrightarrow$$

$$6 \cdot \frac{x}{3} - 6 \cdot 4x < 6 \cdot \frac{5x}{2} + 6 \cdot \frac{111}{6} \Leftrightarrow$$

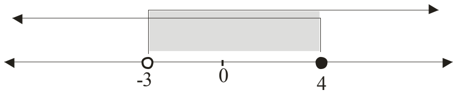
$$2x - 24x < 15x + 111 \Leftrightarrow$$

$$-37x < 111 \Leftrightarrow$$

$$x > \frac{111}{-37} \Leftrightarrow \boxed{x > -3} \quad (2)$$

Οι (1) και (2) συναληθεύουν όταν

$$\boxed{-3 < x \leq 4}$$



3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{\lambda x - \lambda}{2} + 1 > \frac{x}{2}.$$

Λύση:

$$\frac{\lambda x - \lambda}{2} + 1 > \frac{x}{2} \underset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \lambda x - \lambda + 2 > x$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)x > \lambda - 2$$

Αν $\lambda > 1$, τότε $x > \dfrac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$

Αν $\lambda < 1$, τότε $x < \dfrac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$

Αν $\lambda = 1$, τότε $0 \cdot x > -1$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού κ η εξίσωση

$$(x + \kappa)^2 + 2(x + \kappa) = 15$$

έχει ρίζα τον αριθμό 5;

Απάντηση:

Το 5 θα είναι ρίζα της εξίσωσης, αν και μόνο αν την επαληθεύει. Θέτοντας όπου x τον αριθμό 5 διαδοχικά έχουμε:

$(5 + \kappa)^2 + 2(5 + \kappa) = 15 \Leftrightarrow$
$25 + 10\kappa + \kappa^2 + 10 + 2\kappa = 15 \Leftrightarrow$
$\kappa^2 + 12\kappa + 20 = 0.$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς κ με διακρίνουσα:
$\Delta = 144 - 80 = 64$, άρα έχει δύο ρίζες

$$\kappa_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-12 \pm 8}{2}.$$

Άρα $\kappa = -10$ ή $\kappa = -2$.

5. Αν α, γ ετερόσημοι, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Διατυπώστε και ελέγξτε αν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

Απάντηση:

Αν α, γ ετερόσημοι, τότε $\alpha \neq 0$, οπότε η εξίσωση είναι 2ου βαθμού ως προς x. Είναι $\alpha\gamma < 0 \Rightarrow -4\alpha\gamma > 0$
$\Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Rightarrow \Delta > 0$,
οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Το αντίστροφο διατυπώνεται ως εξής:
Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τότε οι α, γ είναι ετερόσημοι.
Θα ελέγξουμε αν ισχύει ο ισχυρισμός αυτός.
Έστω ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
Τότε $\Delta > 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Rightarrow \beta^2 > 4\alpha\gamma$.
Αρκεί λοιπόν να είναι ο β^2 μεγαλύτερος του 4αγ, δίχως ασφαλώς να απαιτείται οι α, γ να είναι ετερόσημοι.

ΣΧΟΛΙΟ: Εδώ αρκεί και ένα αντιπαράδειγμα, για να απορρίψουμε τον ισχυρισμό αυτόν. Π.χ. η εξίσωση $x^2 - 10x + 9 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 64 > 0$, άρα έχει δύο ρίζες άνισες $x_1 = 9$, $x_2 = 1$ ενώ είναι $\alpha = 1$, $\gamma = 9$, που είναι ομόσημοι.

6. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \ \ (1),\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q},$$

$\alpha \neq 0$, έχει ρητές ρίζες, αν και μόνο αν η διακρίνουσά της είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

ii. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$6x^2 - (\kappa + 5\lambda)x - \kappa^2 + \lambda^2 = 0,\ \kappa,\lambda \in \mathbb{Q},$$

Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί.

Απάντηση:

i. Η έκφραση "αν και μόνο αν" δηλώνει ότι πρέπει να αποδείξουμε το ορθό αλλά και το αντίστροφο της πρότασης.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει ρητές ρίζες.
Τότε $\Delta \geq 0$.
Αν οι ρίζες είναι ίσες, τότε $\Delta = 0 = 0^2$, οπότε η πρόταση ισχύει.
Αν οι ρίζες είναι άνισες, τότε $\Delta > 0$.
Έστω $\rho_1 > \rho_2$
Οπότε

$$\left(\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ ,\ \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{\Delta} = 2\alpha\rho_1 + \beta \ \text{ή} \ -\sqrt{\Delta} = 2\alpha\rho_2 + \beta\right) \Rightarrow$$

$$\left(\Delta = (2\alpha\rho_1 + \beta)^2 \ \text{ή} \ \Delta = (2\alpha\rho_2 + \beta)^2\right).$$

Άρα η Δ γράφεται ως τετράγωνο ρητού αριθμού.

($\Leftarrow$) Έστω ότι η διακρίνουσα είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.
Τότε υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Q}$, τέτοιο ώστε

$$\Delta = \kappa^2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = |\kappa|.$$

Τότε $\rho_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-\beta \pm |\kappa|}{2\alpha} = \dfrac{-\beta \pm \kappa}{2\alpha}$.

Οι ρ_1, ρ_2 είναι ρητοί αριθμοί, ως πηλίκα ρητών αριθμών.

ii. Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού. Είναι

$$\Delta = \left[-(\kappa + 5\lambda)\right]^2 - 4 \cdot 6\left(-\kappa^2 + \lambda^2\right) =$$

$$= 25\kappa^2 + 10\kappa\lambda + \lambda^2 = (5\kappa + \lambda)^2$$

Όπως αποδείξαμε στο (i) η εξίσωση έχει ρητές ρίζες, αφού η διακρίνουσά της είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

7. Να αποδείξετε ότι αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, τότε $x_1^2 + x_2^2 = \beta^2 - 2\gamma$.

Απάντηση:

Από τους τύπους Vieta έχουμε

$x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{1} = -\beta$ και $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{1} = \gamma$.

Άρα $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$
$= (-\beta)^2 - 2\gamma = \beta^2 - 2\gamma$.

8. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x + \lambda = 0$ έχουν λόγο 2.

Απάντηση:

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, οπότε θα έχει άνισες ρίζες αν και μόνο $\Delta > 0$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < \frac{9}{4}$$

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της με λόγο

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 2 \Leftrightarrow \rho_1 = 2\rho_2.$$

Τότε από τους τύπους Vieta έχουμε

$\rho_1 + \rho_2 = -3$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda$

$$\rho_1 + \rho_2 = -3 \Leftrightarrow 3\rho_2 = -3 \Leftrightarrow \rho_2 = -1,$$

οπότε $\rho_1 = -2$.

Έτσι, για το γινόμενο των ριζών έχουμε

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = (-2)\cdot(-1) = 2, \text{ οπότε } \lambda = 2.$$

9. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2 + 4\lambda x + 3\mu = 12x + 6$ να έχει διπλή ρίζα τον αριθμό 0.

Απάντηση:

Η εξίσωση γράφεται

$$x^2 + 4(\lambda - 3)x + 3\mu - 6 = 0, \ (1)$$

Είναι 2ου βαθμού ως προς x, οπότε θα έχει ρίζα το 0, αν και μόνο αν είναι

$$3\mu - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\mu = 6 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Με $\mu = 2$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2 + 4(\lambda - 3)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x + 4(\lambda - 3)\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -4(\lambda - 3)$$

Οπότε η εξίσωση (1) θα έχει διπλή ρίζα την $x = 0$, αν και μόνο αν $\lambda = 3$.

ΣΧΟΛΙΟ: Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε, αν χρησιμοποιούσαμε τη συνθήκη: *Η εξίσωση (1) θα έχει διπλή ρίζα, αν και μόνο αν είναι $\Delta = 0$.*

Πράγματι, είναι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16(\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

10. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda - 2)x - (\lambda + 1) = 0$$

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 1$$

Για ποια τιμή του λ η παράσταση $x_1^2 + x_2^2$ γίνεται ελάχιστη;

Απάντηση:

i. Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = \left[-(\lambda - 2)\right]^2 - 4\left(-(\lambda + 1)\right)$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda + 4$$

$$= \lambda^2 + 8 > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, τότε

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-(\lambda - 2)}{1} = \lambda - 2$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{-(\lambda + 1)}{1} = -\lambda + 1$$

Είναι $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$

$$= (\lambda - 2)^2 - 2(-\lambda + 1) =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 2\lambda - 2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$= (\lambda - 1)^2 + 1 \geq 1,$$

με το «ίσον» να ισχύει όταν $\lambda = 1$.

Επομένως η παράσταση $x_1^2 + x_2^2$ γίνεται ελάχιστη όταν $\lambda = 1$.

11. Αν η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1), έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2, να βρείτε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τις $\rho_1 + 2$ και $\rho_2 + 2$.

Απάντηση:

Το άθροισμα και το γινόμενο της εξίσωσης (1) είναι $\begin{cases} S = \rho_1 + \rho_2 = -\beta \\ P = \rho_1\rho_2 = \gamma \end{cases}$

Για το άθροισμα S' και το γινόμενο P' της ζητούμενης εξίσωσης είναι

$$S' = (\rho_1 + 2) + (\rho_2 + 2) =$$

$$= \rho_1 + \rho_2 + 4 = -\beta + 4$$

$$P' = (\rho_1 + 2)(\rho_2 + 2) =$$

$$= \rho_1\rho_2 + 2(\rho_1 + \rho_2) + 4 = \gamma - 2\beta + 4$$

Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (\beta - 4)x + \gamma - 2\beta + 4 = 0$$

12. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ (1)$ με $\alpha,\gamma\neq 0$ και $\Delta>0$. Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1).

Απάντηση:

Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) είναι $\begin{cases} S=\rho_1+\rho_2=-\dfrac{\beta}{\alpha} \\ P=\rho_1\rho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}\end{cases}$

Η ζητούμενη εξίσωση έχει ρίζες $\dfrac{1}{\rho_1},\ \dfrac{1}{\rho_2}$ που έχουν άθροισμα και γινόμενο:

$$\begin{cases} S'=\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{S}{P}=-\dfrac{\beta}{\gamma} \\ P'=\dfrac{1}{\rho_1}\cdot\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{1}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{1}{P}=\dfrac{\alpha}{\gamma}\end{cases}$$

Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$x^2-S'x+P'=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha}{\gamma}=0$$

$$\Leftrightarrow \gamma x^2+\beta x+\alpha=0$$

13. i. Αν η εξίσωση

$$\mathbf{2021x^2+\kappa x+\lambda=0,\ (1),\ \text{με}\ \lambda\neq 0}$$

έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\mathbf{\lambda x^2+\kappa x+2021=0 \quad (2)}$$

έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1).

ii. Να εξηγήσετε γιατί η παραπάνω άσκηση δεν έχει ημερομηνία λήξης! Θέτοντας, δηλαδή, στη θέση του 2021 οποιοδήποτε άλλο ημερολογιακό έτος (ή οποιονδήποτε αριθμό διαφορετικό του 0), δεν αλλάζει το ζητούμενο της εκφώνησης.

Απάντηση:

i. Από τους τύπους Vieta για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{\kappa}{2021} \quad \text{και} \quad \rho_1\cdot\rho_2=\frac{\lambda}{2021}$$

Οι αντίστροφοι των ρ_1,ρ_2 είναι: $\dfrac{1}{\rho_1},\ \dfrac{1}{\rho_2}$.

Τότε $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\cdot\rho_2}=\dfrac{-\dfrac{\kappa}{2021}}{\dfrac{\lambda}{2021}}=-\dfrac{\kappa}{\lambda}$

και $\dfrac{1}{\rho_1}\cdot\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{1}{\rho_1\cdot\rho_2}=\dfrac{1}{\dfrac{\lambda}{2021}}=\dfrac{2021}{\lambda}$.

Οπότε, από τους τύπους του Vieta οι $\dfrac{1}{\rho_1},\ \dfrac{1}{\rho_2}$ θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\lambda x^2+\kappa x+2021=0 \quad (2).$$

ii. Θέτοντας στη θέση του 2021 έναν άλλον αριθμό α, με $\alpha\neq 0$, παρατηρούμε ότι ισχύει η παραπάνω σχέση. Μπορούμε, λοιπόν, να παρουσιάζουμε αυτήν την άσκηση κάθε χρόνο σαν «καινούρια»!

ΣΧΟΛΙΟ: *Μία τέτοια πρακτική ακολουθείται σε πολλές περιπτώσεις. Μη μας τρομάζουν λοιπόν ασκήσεις με παραστάσεις αυτής της μορφής ή π.χ. εκθέτες της μορφής α^{2021} ή … α^{1821}. Συνήθως η μόνη χρησιμότητα τους είναι το να καθορίζουν αν ο εκθέτης είναι άρτιος ή περιττός*

14. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ η οποία έχει ρίζες τους διαφορετικούς μεταξύ τους πραγματικούς αριθμούς β και γ. Να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Απάντηση:

Επειδή οι αριθμοί β και γ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma=0$, θα ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} \beta^2+\beta^2+\gamma=0 \\ \gamma^2+\beta\gamma+\gamma=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\beta^2=-\gamma \\ \gamma(\gamma+\beta+1)=0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \gamma=-2\beta^2,\ (1) \\ -2\beta^2(-2\beta^2+\beta+1)=0,\ (2) \end{Bmatrix}$$

Από την (2) ισοδύναμα παίρνουμε:

$$\beta=0 \ \text{ή}\ \beta=-\frac{1}{2}\ \text{ή}\ \beta=1$$

• Με $\beta=0$ από την (1) προκύπτει και $\gamma=0$. Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται γιατί οι αριθμοί β και γ πρέπει να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

• Με $\beta=-\frac{1}{2}$ από την (1) προκύπτει και $\gamma=-\frac{1}{2}$. Για τον ίδιο λόγο και η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

• Με $\beta=1$ από την (1) βρίσκουμε $\gamma=-2$. Δηλαδή, οι ζητούμενες τιμές είναι $\beta=1$ και $\gamma=-2$.

2η λύση:

Αν S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma=0$, τότε από τους τύπους του Vieta παίρνουμε:

$$S=\beta+\gamma=\frac{-\beta}{1} \text{ και } P=\beta\gamma=\frac{\gamma}{1}$$

Οπότε $2\beta=-\gamma$ (1) και $\gamma(1-\beta)=0$ (2)

Από την (2) ισοδύναμα παίρνουμε

$$\gamma=0 \text{ ή } \beta=1.$$

• Με $\gamma=0$ από την (1) βρίσκουμε και $\beta=0$. Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται γιατί οι αριθμοί β και γ πρέπει να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

• Με $\beta=1$ από την (1) βρίσκουμε $\gamma=-2$. Δηλαδή, οι ζητούμενες τιμές είναι $\beta=1$ και $\gamma=-2$.

15. Θεωρούμε την εξίσωση
$3x^2-2(\lambda+1)x+\lambda+1=0$, (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$

i. Για τις διάφορες τιμές του λ, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει ετερόσημες ρίζες.

Απάντηση:

i. Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta&=\left[-2(\lambda+1)\right]^2-4\cdot3(\lambda+1)\\&=4(\lambda+1)^2-12(\lambda+1)\\&=4(\lambda+1)\left[(\lambda+1)-3\right]\\&=4(\lambda+1)(\lambda-2)\end{aligned}$$

• Αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=2$ βρίσκουμε $\Delta=0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα (δύο ίσες πραγματικές ρίζες).

• Αν $-1<\lambda<2$ βρίσκουμε $\Delta<0$, οπότε η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

• Αν $\lambda<-1$ ή $\lambda>2$ βρίσκουμε $\Delta>0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

ii. Βρήκαμε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες όταν $\lambda<-1$ ή $\lambda>2$ (2)

Το γινόμενο των ριζών της είναι

$$\rho_1\rho_2=\frac{\lambda+1}{3}$$

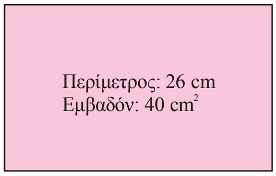
Για να είναι οι ρ_1,ρ_2 ετερόσημες πρέπει

$$\lambda+1<0\Leftrightarrow\lambda<-1 \quad (3)$$

Οι (2) και (3) συναληθεύουν για $\lambda<-1$.

16. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 26 cm, ενώ το εμβαδό του είναι 40 cm^2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του.

Απάντηση:



Έστω x και y οι πλευρές του ορθογωνίου. Η περίμετρός του είναι Π = 2x + 2y, άρα

$$2x+2y=26\Leftrightarrow x+y=13.$$

Το εμβαδό του είναι Ε = x·y, άρα x·y = 40.

Προκύπτει το σύστημα: $\begin{cases}x+y=13\\x\cdot y=40\end{cases}$

1η Λύση:

Τα x, y είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2-13\omega+40=0$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή βρίσκουμε:

(x = 8 και y = 5) ή (x = 5 και y = 8)

2η Λύση:

Είδαμε ότι συστήματα σαν το παραπάνω λύνονται εύκολα με τους τύπους Vieta. Στη συνέχεια λύνουμε το παραπάνω σύστημα $\begin{cases}x+y=13 & (1)\\x\cdot y=40 & (2)\end{cases}$ δίχως χρήση των τύπων Vieta.

Από την (1) παίρνουμε $x=-y+13$ και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$\begin{aligned}x\cdot y=40 &\Leftrightarrow (-y+13)\cdot y=40\\&\Leftrightarrow -y^2+13y-40=0 \ (4).\end{aligned}$$

Η εξίσωση (4) είναι 2ου βαθμού ως προς y με διακρίνουσα

$\Delta = 13^2 - 4(-1)(-40) = 169 - 160 = 9$

Οπότε η (4) έχει ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{2\cdot(-1)} = \frac{-13 \pm 3}{-2}$$

Δηλαδή τις $y_1 = 8$ και $y_2 = 5$.

Με $y = 8$ από την εξίσωση (1) παίρνουμε: $x = -8 + 13 = 5$, ενώ με $y = 5$ από την (1) παίρνουμε: $x = -5 + 13 = 8$.

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(x, y) = (5, 8)$ ή $(8, 5)$.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ:

Το ορθογώνιο με πλευρές 8 cm και 5 cm έχει περίμετρο $\Pi = 2(8 + 5) = 26$ cm και εμβαδό $E = 5\cdot 8 = 40\ cm^2$.

Παρατηρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές που βρήκαμε για τις πλευρές x και y του ορθογωνίου επαληθεύουν τις υποθέσεις της άσκησης. Επομένως είναι οι τιμές που ζητούσαμε.

17. Πλησιάζω έναν καστανά, που ψήνει κάστανα.
— Πόσα κάστανα έχει η μερίδα;
— Οκτώ έχει.
— Πόσο κάνει η μερίδα;
— Όσα κάστανα θα έπαιρνες, αν μού έδινες μισό ευρώ.
Σκέφτομαι για λίγο. Τού δίνω ακριβώς το ποσό που ζήτησε, παίρνω τα αχνιστά κάστανα και ξεκινώ να φύγω. Μού λέει: «Μαθηματικός είσαι;». Απαντώ: «Μάγος είσαι;». Πόσα χρήματα τού έδωσα;

Απάντηση:

Αν x το κόστος της μερίδας (8 κάστανα), αλλά και τα κάστανα που παίρνω με 0,5 ευρώ, σχηματίζεται η εξίσωση

$$\frac{x}{8} = \frac{0,5}{x} \Leftrightarrow x^2 = 8\cdot 0,5 = 4,$$

που έχει δεκτή ρίζα την $x = 2$.

Τού έδωσα 2 ευρώ.

18. Αγοράσαμε μερικά κιλά ξηρούς καρπούς και πληρώσαμε 60 ευρώ. Αν παίρναμε 10 κιλά περισσότερα η τιμή κάθε κιλού θα ήταν κατά 1 ευρώ φθηνότερη. Πόσα κιλά αγοράσαμε και πόσο κοστίζει το κιλό;

Απάντηση:

Έστω ότι αγοράσαμε x κιλά. Το κόστος του κιλού είναι $\frac{60}{x}$ ευρώ.

Αν παίρναμε 10 κιλά περισσότερα, το κόστος του κιλού θα ήταν $\frac{60}{x+10}$ ευρώ.

Σχηματίζουμε και λύνουμε την εξίσωση

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+2} = 1$ για $x > 0$.

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$60(x+10) - 60x = x^2 + 10x \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 10x - 600 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+2400}}{2} = \frac{-10 \pm 50}{2}$$

Δεκτή είναι η θετική ρίζα $x = 20$.

Αγοράσαμε 20 κιλά. Το κόστος κάθε κιλού είναι $60 : 20 = 3$ ευρώ.

*Οι διατυπώσεις των δύο παραπάνω προβλημάτων είναι διασκευές από το βιβλίο του **Ι. Χατζηδάκι**, "Στοιχειώδης Άλγεβρα", 1923.*

19. Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο

$$\boldsymbol{\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda + 1}$$

είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Απάντηση:

Αρχικά πρέπει να είναι διάφορος του 0 ο συντελεστής του x^2, δηλαδή $\lambda \neq 0$.

Για να διατηρεί το τριώνυμο σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $\Delta < 0$.

Τότε το τριώνυμο θα είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, οπότε για να είναι θετικό, πρέπει να είναι $\lambda > 0$.

Από τις δύο αυτές συνθήκες προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ (2\lambda-1)^2 - 4\lambda(\lambda+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 - 4\lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ 1 - 8\lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda > \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{8}$$

20. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\mathbf{x^2-7x+6<0 \quad και \quad -x^2-x+12\le 0}$$

και στη συνέχεια να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

Λύση:

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.

Το τριώνυμο x^2-7x+6 έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 6 κι επειδή είναι $\alpha=1>0$, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

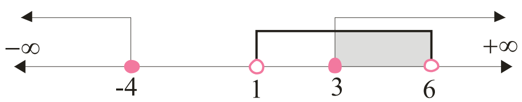
x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
x^2 - 7x+6		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η ανίσωση $x^2-7x+6<0$ έχει λύσεις τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $1<x<6$

Το τριώνυμο $-x^2-x+12$ έχει ρίζες τους αριθμούς -4 και 3 κι επειδή είναι $\alpha=-1<0$, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$-x^2$ - x + 12		−	0	+	0	−	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η ανίσωση $-x^2-x+12\le 0$ έχει λύσεις τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x\le -4$ ή $x\ge 3$



Άρα οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(1,3]$, δηλαδή οι κοινές τους λύσεις είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(1,3]$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνονται οι εξισώσεις

$$\mathbf{x^2-2x-3=0 \ (1),\ x^2-10x+9=0 \ (2)}$$

i. Να βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων, συμβολίζοντας με Δ τη διακρίνουσα της εξίσωσης (1) και με Δ' τη διακρίνουσα της (2).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις ρίζες της εξίσωσης (2) με τις ρίζες της (1);

Στόχος: **Να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι τα τετράγωνα των ριζών της (1).**

iii. Να κατασκευάσετε και άλλα ζεύγη εξισώσεων με αυτήν την ιδιότητα: ***οι ρίζες της δεύτερης εξίσωσης να είναι τα τετράγωνα των ριζών της πρώτης.***

Στόχος: **Με κατάλληλη καθοδήγηση να ανακαλύψουν οι μαθητές τη σχέση $\Delta'=S^2\cdot\Delta$, που συνδέει τη διακρίνουσα Δ' της δεύτερης εξίσωσης με το γινόμενο $S^2\cdot\Delta$, όπου S και Δ είναι το άθροισμα των ριζών και η διακρίνουσα της πρώτης εξίσωσης.**

Εδώ πρέπει να αναπτυχθεί συζήτηση για το πώς θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε αν η ισότητα $\Delta'=S^2\cdot\Delta$ ισχύει σε όλες τις ανάλογες περιπτώσεις ή είναι απλά αποτέλεσμα μελέτης ειδικών περιπτώσεων.

Η συζήτηση πρέπει να καταλήξει στην ανάγκη της απόδειξης της εικασίας, με το επόμενο ερώτημα:

iv. Να εξετάσετε αν αληθεύει ο παρακάτω ισχυρισμός:

Έστω η εξίσωση $x^2-Sx+P=0$ με διακρίνουσα Δ και ρίζες τις $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ για τις οποίες είναι

$$x_1+x_2=S \ \textit{και} \ x_1x_2=P.$$

Αν συμβολίσουμε με Δ' τη διακρίνουσα της εξίσωσης με ρίζες τις $x_1{}^2$ και $x_2{}^2$, τότε είναι $\Delta'=S^2\cdot\Delta$.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η έννοια της συνάρτησης
Γραφική παράσταση συνάρτησης
Η συνάρτηση $f(x) = αx + β$

1. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}+\dfrac{x+1}{x^2-1}$.

ii. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις f και φ, όπου $φ(x)=\dfrac{2}{x-1}$

Απάντηση:

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει
$x^2 - x \neq 0$ και $x^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow$
$x(x-1) \neq 0$ και $(x-1)(x+1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$
($x \neq 0$ και $x \neq 1$ και $x \neq -1$).
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το:
$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

ii. Για κάθε $x \in A$ είναι

$$f(x)=\frac{x}{x^2-x}+\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x}{x(x-1)}+\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$$

Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το:
$B = \mathbb{R} - \{-1\}$, άρα οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

ΣΧΟΛΙΑ:

i. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης το βρίσκουμε στην αρχική της μορφή και όχι μετά τις απλοποιήσεις, γιατί ενδέχεται να χαθούν ρίζες του παρανομαστή, όπως στο παραπάνω παράδειγμα η ρίζα $x = -1$.

ii. Εδώ λέμε τότε ότι η συνάρτηση f είναι ένας περιορισμός της φ στο A, ενώ η φ είναι μια επέκταση της f στο B.

2. Ποια τριάδα από τα παρακάτω σημεία δεν μπορούν να ανήκουν στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f; Γιατί;

Α.	**K(3, 5)**	**Λ(5, 6)**	**M(6, –2)**
Β.	**K(1, 3)**	**Λ(2, 3)**	**M(3, 3)**
Γ.	**K(–2, 5)**	**Λ(0, 0)**	**M(2, –5)**
Δ.	**K(1, 4)**	**Λ(3, –2)**	**M(1, 3)**
Ε.	**K(1, 1)**	**Λ(2, 2)**	**M(3, 3)**

Απάντηση:

Η τριάδα (Δ).
Υπενθυμίζουμε ότι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f λέμε το σύνολο των σημείων M(x, y) του καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, με τα x να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

Στην τριάδα (Δ), το $x = 1$ του σημείου K αντιστοιχίζεται μέσω της f στο $y = 4$ και συγχρόνως το $x = 1$ του σημείου M αντιστοιχίζεται στο $y = 3$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό της συνάρτησης που μας λέει ότι «καθένα x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο y».

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 10(x – 1)(x + 3)$ τέμνει τον άξονα x΄x των τετμημένων σε δύο σημεία A και B. Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι τα σημεία του άξονα x΄x είναι της μορφής $(x,0)$, ενώ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f είναι της μορφής $(x,f(x))$. Άρα, οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x, (αν υπάρχουν), είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Έτσι,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 10(x-1)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-3.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στα σημεία A και B με συντεταγμένες (1, 0) και (–3,0).
Η απόστασή τους είναι $|1-(-3)| = 4$.

4. Να βρείτε σε ποια σημεία τέμνουν τους άξονες οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x – 4$

ii. $f(x) = (x – 2)(x – 3)$

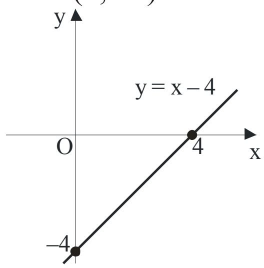
iii. $f(x)=x\sqrt{x+2}$

Απάντηση:

i. Η συνάρτηση $f(x) = x – 4$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

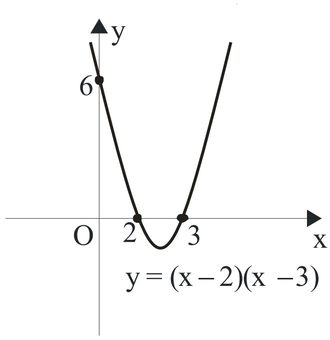
Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x έχουν τεταγμένη y = 0, αφού κάθε σημείο του άξονα x΄x έχει τεταγμένη 0.
Έτσι, με $y = 0$ από την εξίσωση $y = x - 4$ παίρνουμε $x = 4$.
Άρα τέμνει τον x΄x στο σημείο A(4, 0).

Γνωρίζουμε ότι τα σημεία του άξονα y΄y είναι της μορφής $(0, y)$, άρα είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο με τον άξονα y΄y, αν και μόνο αν αριθμός 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.
Με $x = 0$ από την $y = x - 4$ έχουμε:
$y = 0 - 4 \iff y = -4$, άρα τέμνει τον y΄y στο σημείο B(0, –4).

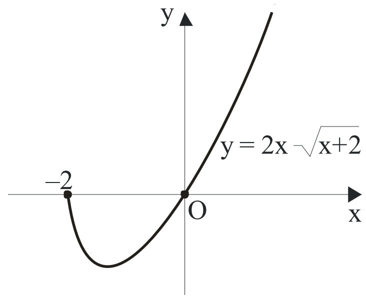


ii. Η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
Όπως παραπάνω, για $x = 0$ έχουμε:
$$y = (0 - 2)(0 - 3) \iff y = 6,$$
άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, 6).

Για y = 0 έχουμε:
$$(x - 2)(x - 3) = 0 \iff x = 2 \text{ ή } x = 3,$$
άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία A(2, 0) και B(3, 0).



iii. Η συνάρτηση $f(x) = 2x\sqrt{x+2}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-2, +\infty)$.
Για x = 0 παίρνουμε y = 0, άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο O(0, 0) (αρχή των αξόνων).
Για y = 0 έχουμε:
$$2x\sqrt{x+2} = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = -2,$$
άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία O(0, 0) (που είναι κοινό σημείο των δύο αξόνων) και B(–2, 0).



ΣΧΟΛΙΟ: Σχεδιάσαμε τη γραφική παράστάση της συνάρτησης f με τη βοήθεια προγράμματος Η.Υ., ώστε στο σύστημα συντεταγμένων να αποδίδονται ακριβώς τα ζητούμενα σημεία.

5. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ και $g(x) = \dfrac{8}{x}$

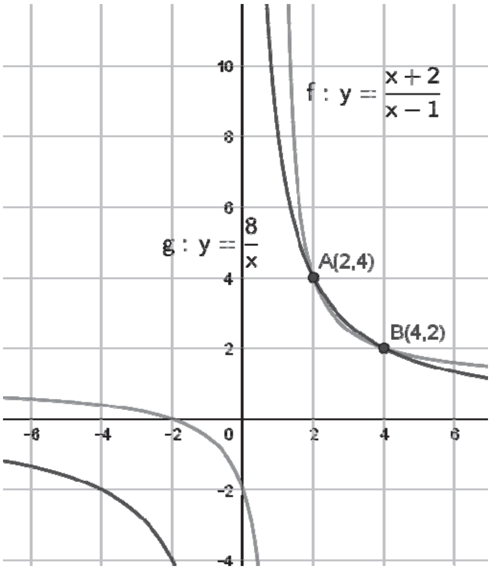
Απάντηση:

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g προκύπτουν από τη επίλυση του συστήματος των εξισώσεών τους: $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ και $y = \dfrac{8}{x}$.

Αρχικά, για να ορίζονται τα κλάσματα πρέπει: $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

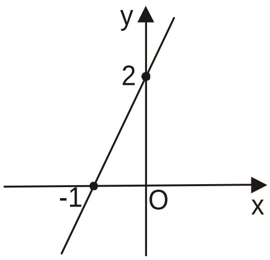
Αντικαθιστούμε την τιμή του y από τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη:
$$\frac{8}{x} = \frac{x+2}{x-1} \iff 8x - 8 = x^2 + 2x$$
$$\iff x^2 - 6x + 8 = 0,$$ η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 4$
και ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} \langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$

Με x = 4 βρίσκουμε $y = 2$, ενώ με x = 2 βρίσκουμε $y = 4$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία A(2, 4) και B(4, 2).



ΣΧΟΛΙΟ: Σχεδιάσαμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με τη βοήθεια προγράμματος Η.Υ., ώστε να αποδίδονται ακριβώς τα σημεία τομής τους.

6. **Αν η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ έχει τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα, τότε:**



$\alpha > 0$	**ΝΑΙ**	**ΟΧΙ**
$\beta = 2$	**ΝΑΙ**	**ΟΧΙ**
$\alpha > \beta$	**ΝΑΙ**	**ΟΧΙ**
$\alpha = 2$	**ΝΑΙ**	**ΟΧΙ**

Απάντηση:

Η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ έχει κλίση τον αριθμό **$\alpha > 0$**.
Τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, 2), άρα είναι **$\beta = 2$,** αφού οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση

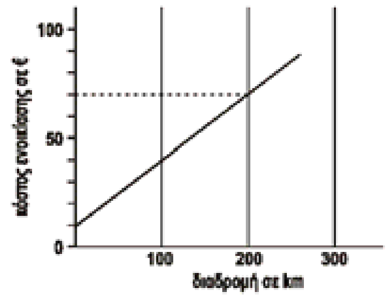
$$2 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ διέρχεται από τα σημεία Α(–1, 0) και Β(0,2), επομένως για τον συντελεστή διεύθυνσής της έχουμε

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2.$$

Οπότε στην επιλογή **$\alpha > \beta$** απαντούμε ΟΧΙ, ενώ σε όλες τις υπόλοιπες ΝΑΙ.

7. **Κάποιος ενοικίασε για τις διακοπές του ένα αυτοκίνητο πληρώνοντας ως δικαίωμα ενοικίασης 10 €. Το επιπλέον κόστος ενοικίασης είναι ανάλογο με τα χιλιόμετρα (Km) που θα κάνει. Στη γραφική παράσταση φαίνεται το ποσό (σε €) που θα εισπράξει το γραφείο ενοικίασης ως συνάρτηση των χιλιομέτρων που θα διανυθούν.**



i. Με βάση τα στοιχεία αυτά, ποια είναι η χρέωση που γίνεται για κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο;

Διαγ. Δημοσίου 2004

(Με διατύπωση επιλογής πολλαπλής απάντησης)

ii. Ποιο το συνολικό ποσό που θα εισπράξει το γραφείο για διαδρομή 600 χιλιομέτρων;

Απάντηση:

i. Η γραφική παράσταση που δείχνει το ποσό που θα εισπράξει το γραφείο είναι η ημιευθεία με αρχή το σημείο Α(0, 10) η οποία διέρχεται από το Β(200, 70).
Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωσή της. Έχει συντελεστή διεύθυνσης

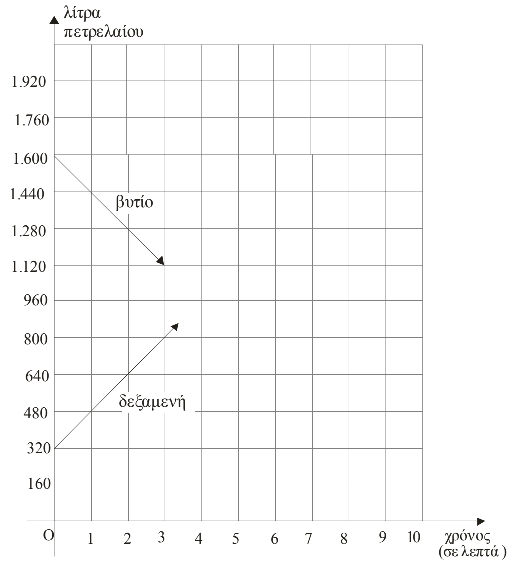
$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{70 - 10}{200 - 0} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) της ευθείας δείχνει τη μεταβολή του y (ποσό σε ευρώ) για κάθε μοναδιαία μεταβολή του x (χιλιόμετρα). Άρα η χρέωση που γίνεται για κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο είναι 0,3 €

ii. Η ημιευθεία διέρχεται από το σημείο Α(0, 10) του άξονα y΄y, άρα είναι $\beta = 10$, οπότε έχει εξίσωση την $y = 0,3x + 10$.
Για $x = 600$ βρίσκουμε

$$y = 0,3 \cdot 600 + 10 = 180 + 10 = 190 \text{ €}.$$

8. **Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι περιεκτικότητες σε λίτρα μιας δεξαμενής και του βυτίου, που την τροφοδοτεί με πετρέλαιο με ρυθμό 160 λίτρα το λεπτό. Το βυτίο θα αδειάσει όλο το πετρέλαιο στη δεξαμενή.**

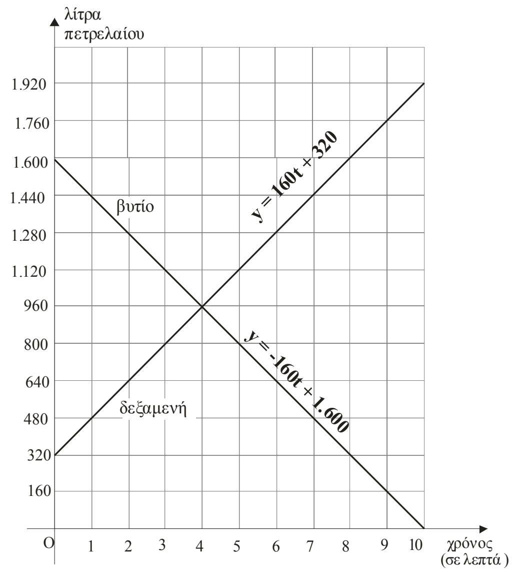


i. Πόσο πετρέλαιο είχε η δεξαμενή μόλις άρχισε η τροφοδοσία και πόσο θα έχει στο τέλος; Πόσο χρόνο διαρκεί η τροφοδοσία;
ii. Γράψτε τις εξισώσεις που δίνουν την ποσότητα πετρελαίου σε δεξαμενή και βυτίο, σε σχέση με το χρόνο τροφοδοσίας. Τι σχέση έχουν οι συντελεστές διεύθυνσής τους, Γιατί;
iii. Θα έχουν κάποια στιγμή ίσες ποσότητες δεξαμενή και βυτίο; Αν ναι, σε πόσο χρόνο μετά την αρχή της τροφοδοσίας θα συμβεί αυτό;

Απάντηση:

i. Η στιγμή που αρχίζει η τροφοδοσία αντιστοιχεί στο χρόνο t = 0 (σε λεπτά) στο σύστημα αξόνων. Τότε η δεξαμενή είχε 320 λίτρα πετρέλαιο και το βυτίο 1.600. Στο τέλος θα έχει 320 + 1.600 = 1.920 λίτρα. Αφού τροφοδοτείται με 160 λίτρα το λεπτό, η δεξαμενή θα γεμίσει σε 10 λεπτά.

ii. Η γραφική παράσταση που δείχνει το πόσο πετρέλαιο έχει η δεξαμενή είναι ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το Α(0,320), τέλος το Β(10, 1.920). Έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) 160, αφού κάθε λεπτό το ύψος της στάθμης στον κατακόρυφο άξονα αυξάνει κατά 160 (λίτρα). Άρα η εξίσωσή της είναι $y = 160t + 320$, με το t να παίρνει τιμές στο διάστημα [0, 10].
Ομοίως, η γραφική παράσταση που δείχνει το πόσο πετρέλαιο έχει το βυτίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το Γ(0, 1600), τέλος το σημείο Δ(10, 0) και κλίση –160, αφού κάθε λεπτό το ύψος της στάθμης στον κατακόρυφο άξονα μειώνεται κατά 160. Οπότε η εξίσωσή της είναι $y = -160t + 1.600$ με $0 \le t \le 10$.



Οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι αντίθετοι αριθμοί, αφού το βυτίο αδειάζει με τον ίδιο ρυθμό που αυξάνει η ποσότητα στη δεξαμενή.

iii. Η δεξαμενή και το βυτίο θα περιέχουν ίσες ποσότητες πετρελαίου (y) τη χρονική στιγμή (t) που θα είναι ίσες οι τιμές των συναρτήσεων που εκφράζουν τις ποσότητες πετρελαίου που περιέχουν.
Έχουμε $160t + 320 = -160t + 1.600 \Leftrightarrow$
$320t = 1.280 \Leftrightarrow t = 4$.
Άρα, το ζητούμενο θα συμβεί σε 4 λεπτά από την έναρξη της τροφοδοσίας.

9. Σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια. Με καθένα απ' αυτά σχηματίζουμε τετράγωνα.
i. Αν x cm είναι το μήκος του πρώτου κομματιού, να εκφράσετε τα εμβαδά τους ως συναρτήσεις του x.
ii. Να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν του δεύτερου να είναι εννιά φορές μεγαλύτερο του πρώτου.

Απάντηση:

i. Αφού x είναι το μήκος του πρώτου κομματιού, το πρώτο τετράγωνο θα έχει πλευρά $\frac{x}{4}$. Το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός από το διάστημα (0, 20),

άρα το εμβαδόν του δίνεται από τη συνάρτηση $E_1(x)=\dfrac{x^2}{16}$, με $0<x<20$.
Το κομμάτι σύρματος που απομένει είναι 20 – x cm, οπότε το δεύτερο τετράγωνο θα έχει πλευρά $\dfrac{20-x}{4}$. Κι εδώ το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός από το διάστημα (0, 20), άρα το εμβαδόν του δίνεται από τη συνάρτηση

$$E_2(x)=\frac{(20-x)^2}{16},\ \text{με } 0<x<20.$$

ii. Λύνουμε την εξίσωση $E_1(x) = 9E_2(x) \Leftrightarrow$

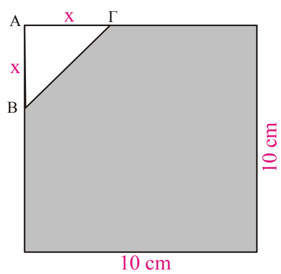
$$\frac{(20-x)^2}{16}=\frac{9x^2}{16}\Leftrightarrow 400-40x+x^2=9x^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+40x-400=0 \underset{:8}{\Leftrightarrow} x^2+5x-50=0$$

που έχει ρίζες τις $x = 5$ και $x = -15$.
Δεκτή ρίζα είναι η $x = 5$ cm. Το εμβαδόν του πρώτου είναι ίσο με $E_1(5)=\dfrac{25}{16}\text{cm}^2$ και του δεύτερου είναι

$$E_2(5)=\frac{(20-5)^2}{16}=\frac{225}{16}\text{cm}^2.$$

10. Από τετράγωνο με πλευρά 10 cm αποκόπτουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = x cm, όπως φαίνεται στο σχήμα.



i. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που απομένει ως συνάρτηση του x;
ii. Να βρείτε την τιμή του x έτσι, ώστε το εμβαδόν που απομένει να είναι τα $\dfrac{7}{8}$ του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.

Απάντηση:

i. Το τετράγωνο έχει εμβαδόν 100 cm^2. Το τρίγωνο που αφαιρούμε έχει εμβαδόν $\dfrac{x^2}{2}$, με το x να παίρνει τιμές στο διάστημα (0, 10). Άρα η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν Ε της επιφάνειας που απομένει είναι: $E(x)=100-\dfrac{x^2}{4}$, $0<x<100$

ii. Λύνουμε την εξίσωση:

$$E(x)=\frac{7}{8}\cdot 100 \quad \Leftrightarrow 100-\frac{x^2}{4}=\frac{700}{8}$$

$$\Leftrightarrow 800-2x^2=700 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2=100$$

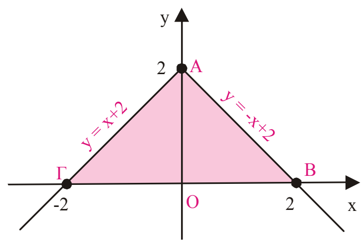
$$\Leftrightarrow x^2=50 \quad \Leftrightarrow x=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\ \text{cm}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-|x|+2$.
i. Βρείτε τις εξισώσεις των δύο ημιευθειών ($ε_1$) και ($ε_2$) από τις οποίες αποτελείται η γραφική της παράσταση.
ii. Βρείτε τα σημεία στα οποία οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνουν τους άξονες.
iii. Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τον άξονα x΄x και τις $ε_1$, $ε_2$.

Απάντηση:

i. Είναι: $\begin{cases} ε_1: & y=-x+2,\ x\geq 0 \\ ε_2: & y=x+2,\quad x<0 \end{cases}$

ii. Για $x = 0$ έχουμε:
$$y = f(0) = -0 + 2 \Leftrightarrow y = 2,$$
άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 2).



Για y = 0 η εξίσωση της $ε_1$ δίνει $0 = -x + 2 \Leftrightarrow x = 2$, άρα η ημιευθεία $ε_1$ τέμνει τον x΄x στο σημείο Β(2, 0), ενώ η εξίσωση της $ε_2$ δίνει $0 = x + 2 \Leftrightarrow x = -2$, άρα η ημιευθεία $ε_2$ τέμνει τον x΄x στο σημείο Γ(–2, 0).

iii. Η περιοχή που περικλείεται από τον άξονα x΄x και τις $ε_1$, $ε_2$ είναι το τρίγωνο ΑΒΓ με βάση $ΒΓ = |2 - (-2)| = 4$ και ύψος την τεταγμένη 2 του Α, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$E=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4\ \text{τ.μ.}$$

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Περιοδικό *Ευκλείδης Β΄*, ΕΜΕ.
[2] Αρχείο θεμάτων διαγωνισμού “*Ο Θαλής*”, ΕΜΕ.
[3] Ντρίζος Θανάσης, *Θέματα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου* (αδημοσίευτες σημειώσεις).

Θέματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Σπύρος Γιαννακόπουλος - Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

Θέμα 1: Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ//ΓΔ$ και $ΓΔ<ΑΒ$. Από το $Γ$ φέρουμε παράλληλη ευθεία προς το $ΑΔ$ που τέμνει την $ΑΒ$ στο $Ε$. Έστω $Κ,Λ,Μ$ τα μέσα των $ΓΕ,ΕΒ,ΒΓ$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι:

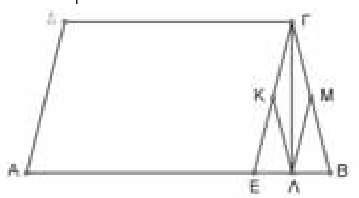
α. i. $ΓΛ \perp ΔΓ$.

ii. Το τετράπλευρο $ΚΛΜΓ$ είναι ρόμβος.

β. i. $ΚΜ=\dfrac{ΑΒ-ΔΓ}{2}$.

ii. Αν $Λ\hat{Γ}Β=30^0$, τότε $ΚΜ=\dfrac{ΑΔ}{2}$.

Λύση: α. i. Το τετράπλευρο $ΑΕΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Άρα $ΓΕ=ΑΔ \Leftrightarrow ΓΕ=ΓΒ$, αφού $ΓΒ=ΑΔ$. Άρα το $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές με κορυφή το $Γ$. Το $ΓΛ$ αφού είναι διάμεσος του τριγώνου $ΓΕΒ$ θα είναι και ύψος του. Συνεπώς $ΓΛ \perp ΑΒ$ και αφού $ΔΓ//ΑΒ$ θα είναι $ΓΛ \perp ΔΓ$.

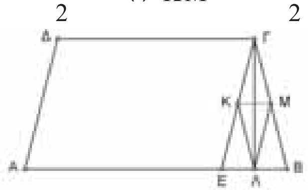


ii. Το $ΚΛ$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του $ΓΕΒ$, οπότε $ΚΛ//=\dfrac{ΓΒ}{2} \Leftrightarrow ΚΛ//=ΓΜ \Rightarrow ΚΛΜΓ$ παραλληλόγραμμο.Επιπλέον έχουμε $ΛΚ$ και $ΛΜ$ διάμεσοι στα ορθογώνια τρίγωνα $ΛΕΓ, ΛΒΓ$ αντίστοιχα οπότε $ΛΚ=\dfrac{ΓΕ}{2}=\dfrac{ΓΒ}{2}=ΛΜ \Rightarrow ΛΚ=ΛΜ$.

Άρα το τετράπλευρο $ΚΛΜΓ$ είναι ρόμβος.

β. i. Από το παραλληλόγραμμο $ΑΕΓΔ$ έχουμε $ΑΕ=ΔΓ$. Το τμήμα $ΚΜ$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $ΓΕΒ$ οπότε

$$ΚΜ=\frac{ΕΒ}{2}=\frac{ΑΒ-ΑΕ}{2} \Leftrightarrow ΚΜ=\frac{ΑΒ-ΔΓ}{2}.$$

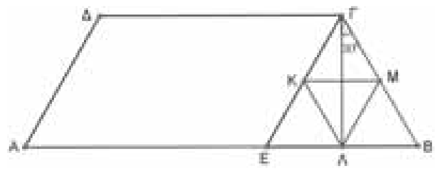


ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΛΒΓ$ αφού

$$Λ\hat{Γ}Β=30^0 \Leftrightarrow ΛΒ=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΛΒ=\frac{ΓΕ}{2} \Leftrightarrow$$

$ΛΒ=\dfrac{ΑΔ}{2}$ αφού $ΑΕΓΔ$ παραλληλόγραμμο.

Όμως $ΚΜ=\dfrac{ΕΒ}{2} \Leftrightarrow ΚΜ=ΛΒ \Leftrightarrow ΚΜ=\dfrac{ΑΔ}{2}$.



Θέμα 2: Θεωρούμε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ//ΓΔ$ και $ΑΒ<ΓΔ, \hat{Α}=\hat{Δ}=90^0$. Έστω ότι $ΑΒ=ΒΓ$. Το ημικύκλιο διαμέτρου $ΒΓ$ τέμνει την πλευρά $ΔΓ$ στο σημείο $Ε$ έτσι ώστε $ΕΓ=\dfrac{ΒΓ}{2}$

α. Δείξτε ότι $Α\hat{Β}Γ=120^0$.

β. Φέρουμε το τμήμα $ΑΖ//ΒΓ$ (το σημείο $Ζ$ ανήκει στο $ΔΓ$). Να δείξετε ότι:

i. Το σημείο τομής $Τ$ των $ΑΓ$, $ΒΖ$ είναι σημείο του ημικυκλίου.

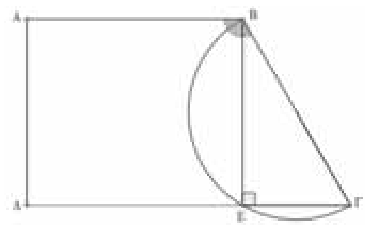
ii. Το τρίγωνο $ΑΖΒ$ είναι ισόπλευρο.

γ. Θεωρούμε τα δεδομένα του (β) και $Μ,Ν$ τα μέσα των $ΑΖ$ και $ΒΕ$ αντίστοιχα. Αν $ΑΒ=ΒΓ=4$ τότε.

i. Να βρείτε το μήκος του $ΜΝ$.

ii. Να δείξετε ότι τα σημεία $Μ,Τ,Ν$ είναι συνευθειακά.

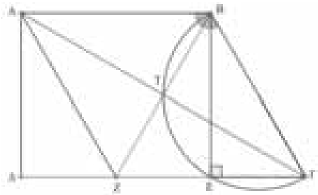
Λύση: α. Η $Β\hat{Ε}Γ=90^0$ γιατί είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή $Ε$ και αφού $ΕΓ=\dfrac{ΒΓ}{2} \Rightarrow Ε\hat{Β}Γ=30^0$.



Το τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο, οπότε

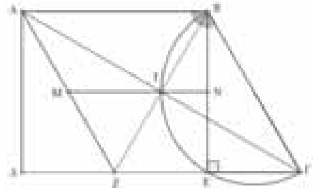
$$Α\hat{Β}Γ=Α\hat{Β}Ε+Ε\hat{Β}Γ=90^0+30^0=120^0.$$

β. i. Το τετράπλευρο $ΑΒΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Επιπλέον $ΑΒ=ΒΓ$ οπότε το $ΑΒΓΖ$ είναι ρόμβος. Τα τμήματα $ΑΓ,ΒΖ$ είναι διαγώνιες του ρόμβου, οπότε $ΑΓ \perp ΒΖ \Rightarrow Β\hat{Τ}Γ=90^0$ που σημαίνει ότι το $Τ$ είναι σημείο του ημικυκλίου με διάμετρο το $ΒΓ$.



ii. Αφού το ΑΒΓΖ είναι ρόμβος είναι ΓΒ=ΓΖ. Επίσης $\hat{\mathrm{B\Gamma\Delta}}=60^0$. Άρα το ΒΓΖ είναι ισόπλευρο. Άρα $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}\Rightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{BZ}$ και $\hat{\mathrm{ABZ}}=60^0$, οπότε το ΖΑΒ είναι ισόπλευρο.

γ. i. Το ΒΓΖ είναι ισόπλευρο οπότε το ΒΕ ως ύψος του είναι και είναι διάμεσός του και άρα ΖΕ=2.



Το ΑΒΕΖ είναι τραπέζιο με διάμεσο τη ΜΝ. $\mathrm{MN}=\dfrac{\mathrm{ZE}+\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3$.

ii. $1^{\text{ος}}$ τρόπος

$\left\{\begin{array}{l}\text{Μ μέσο του ΑΖ}\\ \text{Τ μέσο του ΑΓ}\end{array}\right.\Rightarrow \mathrm{TM}//\mathrm{Z\Gamma}$. Όμοια $\mathrm{TN}//\mathrm{ZE}\Rightarrow\mathrm{TN}//\mathrm{Z\Gamma}$. Σύμφωνα με το αίτημα της παραλληλίας τα σημεία $\mathrm{M,T,N}$ είναι συνευθειακά.

$2^{\text{ος}}$ τρόπος: $\hat{\mathrm{MTN}}=\hat{\mathrm{MTZ}}+\hat{\mathrm{ZT\Gamma}}+\hat{\mathrm{\Gamma TN}}$ (1).

$\mathrm{MT}//\mathrm{Z\Gamma}\Rightarrow \hat{\mathrm{MTZ}}=\hat{\mathrm{TZ\Gamma}}$ και $\mathrm{TN}//\mathrm{Z\Gamma}\Rightarrow$

$\hat{\mathrm{NT\Gamma}}=\hat{\mathrm{T\Gamma Z}}$. Επειδή $\mathrm{BZ}\perp\mathrm{A\Gamma}\Rightarrow$

$\hat{\mathrm{MTZ}}+\hat{\mathrm{NT\Gamma}}=\hat{\mathrm{TZ\Gamma}}+\hat{\mathrm{T\Gamma Z}}=90^0$.

Άρα $(1)\Rightarrow \hat{\mathrm{MTN}}=180^0\Rightarrow \mathrm{M,T,N}$ συνευθειακά.

Θέμα 3: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$ και ο κύκλος με διάμετρο την ΑΒ κέντρου Ο που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε την ημιευθεία $\mathrm{By}\perp\mathrm{B\Gamma}$ με την By να ανήκει στο ημιεπίπεδο που δεν περιέχει το σημείο Α. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει την ΑΓ στο Μ και την By στο Λ. Έστω Κ το μέσο του ΔΛ.

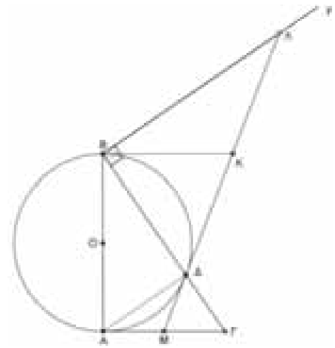
α. Δείξτε ότι:

i. Το Μ είναι μέσο του ΑΓ. ii. $\mathrm{BK}//\mathrm{A\Gamma}$.

β. i. Φέρουμε κάθετη ευθεία στην ΑΓ στο σημείο Μ η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν δείξτε ότι το ΟΑΜΝ είναι ορθογώνιο.

ii. Αν $\hat{\mathrm{AB\Gamma}}=30^0$, τότε δείξτε ότι: $\Delta\mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{KM}}{4}$.

Λύση: α. i. Αφού $\mathrm{A\Gamma}\perp\mathrm{AB}$ (διάμετρος) $\Rightarrow$ ΑΓ εφαπτομένη του κύκλου. $\hat{\mathrm{A\Delta B}}=90^0$ ως εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο. $\mathrm{M\Delta}=\mathrm{MA}$ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου. $\hat{\mathrm{A\Delta M}}=\hat{\mathrm{AB\Gamma}}$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) $\Rightarrow$



$\hat{\mathrm{M\Delta\Gamma}}=90^0-\hat{\mathrm{A\Delta M}}=90^0-\hat{\mathrm{AB\Gamma}}\Rightarrow\hat{\mathrm{M\Delta\Gamma}}=\hat{\mathrm{A\Gamma B}}\Rightarrow\overset{\Delta}{\mathrm{M\Delta\Gamma}}$ ισοσκελές με $\mathrm{M\Delta}=\mathrm{M\Gamma}$ (2).

Από τις (1), (2) $\mathrm{MA}=\mathrm{M\Gamma}\Rightarrow$ Μ μέσο του ΑΓ.

ii. Έχουμε ότι το ΜΔΓ είναι ισοσκελές με $\hat{\mathrm{M\Delta\Gamma}}=\hat{\mathrm{M\Gamma\Delta}}$ (3). Στο ορθογώνιο ΒΔΛ είναι $\mathrm{BK}=\dfrac{\Lambda\Delta}{2}\Rightarrow\mathrm{BK}=\Delta\mathrm{K}\Rightarrow\hat{\mathrm{B\Delta K}}=\hat{\mathrm{\Delta BK}}$ (4).

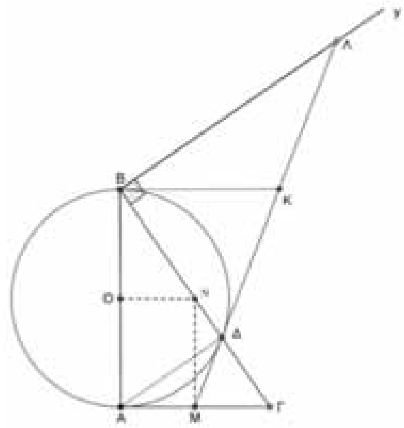
Επειδή $\hat{\mathrm{M\Delta\Gamma}}=\hat{\mathrm{B\Delta K}}$ (5) (ως κατακορυφήν),

$$(3),(4)\overset{(5)}{\Rightarrow}\hat{\mathrm{\Delta BK}}=\hat{\mathrm{M\Gamma\Delta}}\Rightarrow\mathrm{BK}//\mathrm{A\Gamma}.$$

β. i. Είναι $\mathrm{MN}//\mathrm{AB}$ ως κάθετες στην ΑΓ και επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΓ, το Ν είναι μέσο του ΒΓ και μάλιστα $\mathrm{MN}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\Leftrightarrow\mathrm{MN}=\mathrm{OA}$.

Άρα το ΟΑΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{\mathrm{A}}=90^0$ είναι ορθογώνιο.

ii. Αν $\hat{\mathrm{B}}=30^0$ τότε είναι $\hat{\Gamma}=60^0\Rightarrow$ Το ΜΔΓ είναι ισόπλευρο, οπότε ΜΔ=ΔΓ. Είναι $\mathrm{BK}=\dfrac{\Delta\Lambda}{2}$, οπότε το ΒΔΚ είναι ισοσκελές.



$\hat{\mathrm{B\Delta K}}=\hat{\mathrm{M\Delta\Gamma}}=60^0$ και επειδή το ΚΒΔ είναι ισοσκελές, θα είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{K\Delta}=\mathrm{B\Delta}$. Έτσι έχουμε $\mathrm{KM}=\mathrm{B\Gamma}$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

$\Delta\mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$, όμως $\hat{\mathrm{B}}=30^0\Rightarrow\mathrm{A\Gamma}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

Άρα $\Delta\mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{4}\Leftrightarrow\Delta\mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{KM}}{4}$.

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Πολυωνύμων

Ζέρβας Νικόλαος - Παράρτημα **ΕΜΕ Λάρισας**

1. Αν ισχύει η σχέση $P(x)=P(x-1)+P(x-2)$ (1) και επιπλέον δίνεται ότι $P(0)=P(1)+2=5$ (2), να βρεθεί το $k\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $P(-P(-1))=P(3)-k$ (3)

Λύση: Από τη σχέση (2) έχουμε $P(0)=5$ και $P(1)=3$. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$P(1)=P(0)+P(-1)\Rightarrow 3=5+P(-1)\Rightarrow P(-1)=-2$,

$P(2)=P(1)+P(0)=3+5=8$

και $P(3)=P(2)+P(1)=8+3=11$

Άρα η σχέση (3) γίνεται:

$$P(-(-2))=P(3)-k\Rightarrow P(2)=P(3)-k\Rightarrow$$
$$\Rightarrow k=P(3)-P(2)=11-8=3$$

2. Αν ισχύουν οι σχέσεις $P(x+5)=2x-1$ (1) και $P(Q(x)+1)=4x+3$ (2), να υπολογισθεί η τιμή $Q(P(7))$.

Λύση: Έχουμε:

$(1)\Rightarrow P(x+5)=2(x+5)-11\Rightarrow P(x)=2x-11$ (3)

Από τις σχέσεις (2), (3) έχουμε:

$$2(Q(x)+1)-11=4x+3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2Q(x)+2-11=4x+3\Rightarrow Q(x)=2x+6$$

Επομένως $Q(P(7))=Q(3)=12$

3. Αν το P(x) είναι ένα πολυώνυμο 5ου βαθμού για το οποίο ισχύει $P(x)-P(x-1)=-2x$ (1) και $P(0)=0$ (2), να βρείτε την τιμή του αθροίσματος των συντελεστών του.

Λύση: Έστω

$P(x)=\alpha x^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f, \alpha,b,c,d,e,f\in R$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των συντελεστών του είναι ίσο με P(1)

Από τις σχέσεις (1), (2) για x = 1 έχουμε $P(1)-P(0)=-2\cdot 1\Rightarrow P(1)=-2$

Επομένως $\alpha+b+c+d+e+f=-2$

4. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(2n-1)x^{16n}-(5n-3)x^{8n}+(n+5)x^{4n+5}-$$
$$-(3n-15)x^{39}+n+2$$

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$

Λύση

Είναι γνωστό ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με P(ρ). Επομένως το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με

$P(-1)=(2n-1)(-1)^{16n}-(5n-3)(-1)^{8n}+(n+5)(-1)^{4n+5}-$

$-(3n-15)(-1)^{39}+n+2=$

$2n-1-5n+3-n-5+3n-15+n+2=-16$

5. Αν για τα πολυώνυμα P, Q ισχύουν οι σχέσεις: $P(Q(x))=\dfrac{x}{x-2}$ (1)

$$P(x+1)=\frac{x+2}{x} \quad (2)$$

Να βρείτε το $Q(x+1)$

Λύση: Από τη σχέση (2) έχουμε:

$P(x+1)=\dfrac{(x+1)+1}{(x+1)-1}$ επομένως $P(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (3) έχουμε:

$$\frac{Q(x)+1}{Q(x)-1}=\frac{x}{x-2}\Rightarrow Q(x)=x-1$$

Επομένως $Q(x+1)=x+1-1=x$

6. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^2+2$ και $Q(x)=x+\alpha, \alpha\in R$.

Να υπολογίσετε το α ώστε να ισχύει $P(Q(\alpha+3))=Q(P(\alpha-3))$ (1)

Λύση: Έχουμε $P(Q(\alpha+3))=Q^2(\alpha+3)+2$ και

$$Q(P(\alpha-3)=P(\alpha-3)+\alpha \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$Q^2(\alpha+3)+2=P(\alpha-3)+\alpha\Rightarrow(\alpha+3+\alpha)^2+2=$

$=(\alpha-3)^2+2+\alpha\Rightarrow(2\alpha+3)^2+2=(\alpha-3)^2+2+\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow 4\alpha^2+12\alpha+9+2=\alpha^2-6\alpha+9+2+\alpha\Rightarrow$

$3\alpha^2+17\alpha=0\Rightarrow\alpha(3\alpha+17)=0$

Άρα $\alpha=0$ ή $\alpha=-\dfrac{17}{3}$

7. Αν για τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) ισχύουν οι σχέσεις $Q(P(x)-2)=3x+1$ (1) και $Q(x-1)=x+3$ (2), να υπολογίσετε την τιμή $Q(P(2))$

Λύση: Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$Q(x-1)=x+3\Rightarrow Q(x-1)=(x-1)+4,$$

επομένως ισχύει $Q(P(x)-2)=[P(x)-2]+4$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (3) έχουμε:

$$[P(x)-2]+4=3x+1\Rightarrow P(x)=3x-1$$

Επομένως $Q(P(2))=Q(5)$

Από τη σχέση (2) για x = 6 έχουμε:

$Q(5)=6+3=9$, άρα $Q(P(2))=9$

8. Αν ισχύει η σχέση $P(x)=P(x-1)+P(x-2)$ (1), και επιπλέον δίνεται ότι $P(0)=5$ και $P(1)=3$ (2), να βρείτε το n ώστε να ισχύει $P(-P(-1))+n=P$ (3)

Λύση: $(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}P(1)=P(0)+P(-1)\overset{(2)}{\Rightarrow}3=5+P(-1)\Rightarrow$
$\Rightarrow P(-1)=-2$, επίσης

$(1)\overset{x=2}{\Rightarrow}P(2)=P(1)+P(0)\overset{(2)}{\Rightarrow}P(2)=8$

Επομένως έχουμε:

$P(-P(-1))+n=P(3)\Rightarrow P(-(-2))+n=P(3)\overset{(1)}{\Rightarrow}$
$P(2)+n=P(2)+P(1)\Rightarrow 8+n=8+3\Rightarrow n=3$

**9. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=3x-1$ και $Q(x)=2x+n, n\in R$.
Αν ισχύει $P(Q(x))+3=Q(P(x))$ (1), να υπολογίσετε το $Q(P(Q(2)))$**

Λύση: $(1)\Rightarrow P(2x+n)+3=Q(3x-1)\Rightarrow 3(2x+n)-1+3=$
$=2(3x-1)+n\Rightarrow 6x+3n-1+3=6x-2+n\Rightarrow$
$\Rightarrow 2n=-4\Rightarrow n=-2$

Επομένως έχουμε $P(x)=3x-1$ και $Q(x)=2x-2$, επομένως $Q(P(Q(2)))=Q(P(2))=Q(5)=8$

10. Για x > 0 να βρείτε το πολυώνυμο P(x) αν ισχύει $P(\sqrt{x}-1)=2x-5$

Λύση: Θέτουμε $\sqrt{x}-1=y\Rightarrow\sqrt{x}=y+1\overset{y\geq-1}{\Rightarrow}x=(y+1)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow x=y^2+2y+1$. Επομένως έχουμε:

$P(y)=2(y^2+2y+1)-5\Rightarrow P(y)=2y^2+4y-3, y\geq-1$,

άρα $P(x)=2x^2+4x-3, x\geq-1$

**11. Δίνεται το πολυώνυμο P για το οποίο ισχύει $P(mx+n)=nx+m$, m, $n\in R$ (1)
Να βρείτε την τιμή του P(n) αν επιπλέον δίνεται ότι $P(n+m)+P(n-m)=8$ (2)**

Λύση: $(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}P(m+n)=n+m$ (3)

$(1)\overset{x=-1}{\Rightarrow}P(-m+n)=-n+m$ (4)

$(2)\overset{(3),(4)}{\Rightarrow}n+m-n+m=8\Rightarrow 2m=8\Rightarrow m=4$

Από τη σχέση (1) όμως για $x=0$ έχουμε:
$P(n)=m\Rightarrow P(n)=4$

12. Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει η σχέση $P(x)=x^2+P(x-1)$ (1), να υπολογίσετε την τιμή της διαφοράς P(10) – P (7)

Λύση: Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι
$P(1)=0^2+P(0), P(2)=1^2+P(1)=0^2+1^2+P(0)$,
$P(3)=2^2+P(2)=0^2+1^2+2^2+P(0)$

Επομένως $P(7)=0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+P(0)$
και $P(10)=0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+P(0)$
Άρα $P(10)-P(7)=7^2+8^2+9^2=194$

13. Δίνονται τα πολυώνυμα P, F, G για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$P(x)=2x+3$ (1)
$P[F(x)+G(x)]=4x+3$ (2)
$P[F(x)-G(x)]=7$ (3)

**Να υπολογίσετε την παράσταση
$A=F(G(F(G.(...(F(G(1))).......)))))$**

Λύση: Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:
$2[F(x)+G(x)]+3=4x+3\Rightarrow F(x)+G(x)=2x$ (4)
Από τις σχέσεις (1), (3) έχουμε:
$2[F(x)-G(x)]+3=7\Rightarrow F(x)-G(x)=2$ (5)
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4), (5) παίρνουμε $F(x)=x+1$ και με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε $G(x)=x-1$.
Επομένως $G(1)=0$ και $F(G(1))=F(0)=1$
Άρα $A=F(G(F(G.(...(F(G(1))).......)))))=1$

**14. Έστω $P(x)=\alpha^x+b^x+c^x$, $x\in N$, $x\leq 3$ (1)
Αν ισχύει ότι $P(1)=5$, $P(2)=8$, $P(3)=9$ (2), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης**

$$A=\frac{\alpha bc}{\alpha b+bc+\alpha c},\quad \alpha b+bc+\alpha c\neq 0$$

Λύση: Από τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε:

$\alpha+b+c=5$ (3)
$\alpha^2+b^2+c^2=8$ (4)
$\alpha^3+b^3+c^3=9$ (5)

Από τη σχέση (3) παίρνουμε:

$(\alpha+b+c)^2=25\Rightarrow\alpha^2+b^2+c^2+2(\alpha b+bc+\alpha c)=25\overset{(4)}{\Rightarrow}$

$8+2(\alpha b+bc+\alpha c)=25\Rightarrow\alpha b+bc+\alpha c=\frac{17}{2}$ (6)

Από τη σχέση (3) παίρνουμε επίσης
$(\alpha+b+c)^3=125\Rightarrow\alpha^3+b^3+c^3+3(\alpha+b)(b+c)(\alpha+c)=$
$=125\overset{(5),(3)}{\Rightarrow}9+3(5-c)(5-\alpha)(5-b)=125\Rightarrow$

$(5-\alpha)(5-b)(5-c)=\frac{116}{3}\Rightarrow$

$125-25(\alpha+b+c)+5(\alpha b+bc+\alpha c)-\alpha bc=$

$=\frac{116}{3}\overset{(3),(6)}{\Rightarrow}\alpha bc=\frac{23}{6}$ (7)

Από τις σχέσεις (6), (7) έχουμε: $A=\dfrac{\frac{23}{6}}{\frac{17}{2}}=\frac{23}{51}$

Θέματα για εμβάθυνση...

Γεώργιος Μπατέλης - Παράρτημα ΕΜΕ **Αχαΐας**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x)=\begin{cases} 2\eta\mu^3 x+1 & , \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \\ 2\eta\mu^3 x-1 & , \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \text{και}$$

$$g(x)=1-\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x}}+\eta\mu x$$

B1.I. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

II. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

III. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=1$.

B2.I. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

II. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

III. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

B3. Να λυθεί η ανίσωση

$$2f(x)\le g(x)+\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x}} \text{ για } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται το μηδενικό πολυώνυμο:

$P(x)=(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-\kappa)x^2+(\kappa^2-1)x+\kappa^3-1$

και το πολυώνυμο:

$Q(\lambda)=(\lambda\sigma\upsilon\nu x)^4+\left[(2-\lambda)\eta\mu^2 x\right]^2+(\lambda+1)\eta\mu^2 x-\lambda$, το οποίο έχει παράγοντα το λ–1.

Γ1. I. Να δείξετε ότι κ=1

II. Αν $\theta\in[0,\pi]$ να δείξετε ότι $\theta=0$ ή $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Γ2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους το πολυώνυμο Q(λ) έχει παράγοντα το λ–1. Με τι είναι ίσο το Q(λ) για την τιμή του x που θα βρείτε;

Γ3.I. Αν $Q(\lambda)=\lambda^4-\lambda$ και $R(\lambda)=Q(\lambda)+\lambda^2+\lambda-2$ να λυθεί η ανίσωση $R(\lambda)<0$.

II. Να λυθεί η ανίσωση $R(\eta\mu\omega)\ge 0,\ \omega\in[0,\pi]$

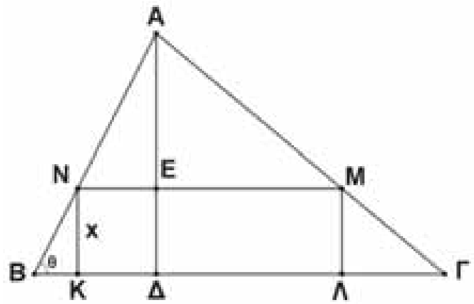
Γ4. Αν $\omega=\frac{\pi}{2}$ να λυθεί η εξίσωση:

$\sqrt{x^2-\omega^2}=x-\rho$ (1), για τις διάφορες τιμές του ρ.

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα εξής:

- ΒΓ=4, ΑΔ⊥ΒΓ, ΑΔ=2, ΒΝ=1, ΚΝ=x
- ΚΛΜΝ ορθογώνιο
- $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$



Δ1. Να αποδείξετε ότι: $(\text{ΚΛΜΝ})=-2\eta\mu^2\theta+4\eta\mu\theta$.

Δ2. Για ποια γωνία θ το (ΚΛΜΝ) αποκτά τη μέγιστη τιμή και για ποια την ελάχιστη;

Δ3. I. Να αποδείξετε ότι $(\text{ΒΚΝ})=\frac{1}{2}\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$

και $(\text{ΑΝΕ})=\frac{(2-\eta\mu\theta)^2}{2\eta\mu\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, για $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

II. Να αποδείξετε ότι το (ΑΝΕ) είναι μεγαλύτερο από το (ΒΚΝ) για $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

III. Να αποδείξετε ότι

$$(\text{ΚΔΕΝ})=2\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta,\ \theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right).$$

IV. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε τα εμβαδά (ΒΚΝ) και (ΚΔΕΝ) να γίνονται ίσα.

Δ4. Να αποδείξετε ότι το (ΚΛΜΝ) είναι μεγαλύτερο από το (ΑΝΜ) για $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

Σημείωση: *Αποφύγαμε να δώσουμε ερωτήσεις για το **Θέμα Α**, για να επιμείνουμε περισσότερο στα άλλα θέματα. Αντί αυτού, προτείνεται να δοθούν **ερωτήσεις κατανόησης** του σχολικού βιβλίου για εμβάθυνση και σε αρκετές από αυτές, όπου κρίνεται σκόπιμο, να ζητηθεί **αιτιολόγηση**.*

Υποδείξεις

Β1.Ι. Για $-\frac{\pi}{2}\le x<0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\ge -x>0$, άρα

$f(-x)=2\eta\mu^3(-x)-1=-2\eta\mu^3x-1=-f(x)$.

Για $0<x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0>-x\ge-\frac{\pi}{2}$, άρα

$f(-x)=2\eta\mu^3(-x)+1=-2\eta\mu^3x+1=-f(x)$.

Για κάθε $x\in A=\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$-x\in A$ και $f(-x)=-f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

ΙΙ. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ με

$x_1<x_2 \overset{\eta\mu x\uparrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right)}{\Rightarrow} \eta\mu x_1<\eta\mu x_2\Rightarrow \eta\mu^3x_1<\eta\mu^3x_2\Rightarrow$ $2\eta\mu^3x_1+1<2\eta\mu^3x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ με

$x_1<x_2 \overset{\eta\mu x\uparrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow} \eta\mu x_1<\eta\mu x_2\Rightarrow \eta\mu^3x_1<\eta\mu^3x_2\Rightarrow$ $2\eta\mu^3x_1-1<2\eta\mu^3x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ΙΙΙ. Για $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι $f(x)=1\Leftrightarrow$

$2\eta\mu^3x+1=1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=0\notin\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$,

άρα η τιμή x=0 απορρίπτεται.

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]: f(x)=1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$, δεκτό.

Β2. Ι. $\begin{cases} x\ge 0\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ που είναι το πεδίο ορισμού της g.

ΙΙ. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με

$$0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}0\le\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\ 0\le\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\le 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\ge-\sqrt{x_1}>-\sqrt{x_2}\ge-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\ 0\le\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\le 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ge\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x_1}>\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x_2}\ge 0\\ 0\le\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\le 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x_1}}>\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x_2}}\ge 0\\ 1\le 1+\eta\mu x_1<1+\eta\mu x_2\le 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x_1}}<-\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x_2}}\\ 1+\eta\mu x_1<1+\eta\mu x_2\end{cases}$$ και με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε $g(x_1)<g(x_2)$

ΙΙΙ.

$$0\le x\le\frac{\pi}{2}\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}g(0)\le g(x)\le g\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 1-\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\le g(x)\le 2$$

Β3. $2(2\eta\mu^3x-1)\le 1-\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x}}+\eta\mu x+\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow 4\eta\mu^3x-\eta\mu x-3\le 0\Leftrightarrow 3\eta\mu^3x+\eta\mu^3x-\eta\mu x-3\le 0$

$\Leftrightarrow 3(\eta\mu^3x-1)+\eta\mu x(\eta\mu^2x-1)\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(\eta\mu x-1)(\eta\mu^2x+\eta\mu x+1)+\eta\mu x(\eta\mu x-1)(\eta\mu x+1)\le 0$

$\Leftrightarrow(\eta\mu x-1)(3\eta\mu^2x+3\eta\mu x+3+\eta\mu^2x+\eta\mu x)\le 0$

$\Leftrightarrow(\eta\mu x-1)(4\eta\mu^2x+4\eta\mu x+3)\le 0$

$\Leftrightarrow(\eta\mu x-1)\left[(2\eta\mu x)^2+2\cdot 2\eta\mu x+1+2\right]\le 0$

$\Leftrightarrow(\eta\mu x-1)\left[(2\eta\mu x+1)^2+2\right]\le 0\Leftrightarrow(\eta\mu x-1)\le 0\Leftrightarrow\eta\mu x\le 1$

που ισχύει για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ1. Ι. Πρέπει:

$$\begin{cases}\kappa^2-1=0\\ \kappa^3-1=0\\ \eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=\pm1\\ \kappa=1\\ \eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=\kappa\end{cases}$$

άρα πρέπει $\begin{cases}\kappa=1\\ \eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=1\end{cases}$

ΙΙ. Έχω $\begin{cases}(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2=1^2\\ \eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=1\\ \eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=0\\ \eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\end{cases}\Leftrightarrow\eta\mu2\theta=0\Leftrightarrow\eta\mu2\theta=\eta\mu0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2\theta = 2\kappa\pi \\ 2\theta = 2\kappa\pi+\pi\end{cases}, \kappa\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}\theta = \kappa\pi \\ \theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\end{cases}, \kappa \in Z.$$

- Αν $\theta=\kappa\pi, \kappa\in Z$ τότε $0\le\theta\le\pi \Leftrightarrow 0\le\kappa\pi\le\pi$ $\Leftrightarrow 0\le\kappa\le 1 \Leftrightarrow$κ=0 ή κ=1, άρα θ=0 ή θ=π.
- Αν $\theta=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z$ τότε $0\le\theta\le\pi\Leftrightarrow$

$$0\le\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\le\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le\kappa\pi\le\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\kappa\pi\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le\kappa\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow \kappa=0, \text{ άρα } \theta=\frac{\pi}{2}.$$

Επειδή πρέπει να επαληθεύεται και η σχέση $\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=1$ θα πρέπει να εξετάσουμε τι γίνεται για τις τιμές του θ. Για θ=0 είναι $\eta\mu 0+\sigma\upsilon\nu 0=1$ ισχύει. Για θ=π είναι $\eta\mu\pi+\sigma\upsilon\nu\pi=1$ απορρίπτεται.

Για $\theta=\frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1$ ισχύει, άρα θ=0 ή $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Γ2. Q(1)=0$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^4 x+\eta\mu^4 x+2\eta\mu^2 x-1=0\Leftrightarrow$

$$(\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x)^2-2\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu^2 x+2\eta\mu^2 x-1=0$$
$$\Leftrightarrow 1-2\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu^2 x+2\eta\mu^2 x-1=0$$
$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)=0\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu^2 x=0$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu^4 x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu 0\Leftrightarrow x=\kappa\pi$$

Για x=κπ έχουμε

$$Q(\lambda)=(\lambda\sigma\upsilon\nu\kappa\pi)^4+\left[(2-\lambda)\eta\mu^2\kappa\pi\right]^2+(\lambda+1)\eta\mu^2\kappa\pi-\lambda$$
$$\Leftrightarrow Q(\lambda)=\lambda^4-\lambda$$

Γ3.I $R(\lambda)=\lambda^4-\lambda+\lambda^2+\lambda-2=\lambda^4+\lambda^2-2$

1	0	1	0	−2	1
	1	1	2	2	
1	1	2	2	0	

$$R(\lambda)<0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+2)<0$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-1)\left[\lambda^2(\lambda+1)+2(\lambda+1)\right]<0$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+2)<0\Leftrightarrow\lambda\in(-1,1)$$

II. $R(\eta\mu\omega)\ge 0\Leftrightarrow(\eta\mu\omega-1)(\eta\mu\omega+1)(\eta\mu^2\omega+2)\ge 0$ (1)

Είναι : $\eta\mu^2\omega+2>0$ και $0\le\eta\mu\omega\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}\eta\mu\omega+1>0\\ \eta\mu\omega-1\le 0\end{cases}$

Άρα $(\eta\mu\omega-1)(\eta\mu\omega+1)(\eta\mu^2\omega+2)\le 0$ άρα η (1)

$$\Leftrightarrow\eta\mu\omega=1\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\omega=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z.$$

$$0\le\omega\le\pi\Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\le\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}\le\kappa\pi\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\kappa=0 \text{ άρα } \omega=\frac{\pi}{2}$$

Γ4. Για $\omega=\frac{\pi}{2}$ η (1) γίνεται $\sqrt{x^2-\frac{\pi^2}{4}}=x-\rho$ (2).

$$\text{πρέπει}: \begin{cases}x^2-\frac{\pi^2}{4}\ge 0\\ x-\rho\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ge 0\\ x\ge\rho\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)\\ x\ge\rho\end{cases}$$ η (2) γίνεται:

$$x^2-\frac{\pi^2}{4}=x^2-2x\rho+\rho^2\Leftrightarrow 2x\rho=\rho^2+\frac{\pi^2}{4} \quad (3).$$

Για ρ=0 η (3) γίνεται $0x=\frac{\pi^2}{4}$ που είναι αδύνατη.

Για ρ≠0 η (3) γίνεται $x=\dfrac{\rho^2+\frac{\pi^2}{4}}{2\rho}$ και επειδή

$$x\ge\rho\Leftrightarrow\frac{\rho^2+\frac{\pi^2}{4}}{2\rho}\ge\rho\Leftrightarrow\frac{\rho^2+\frac{\pi^2}{4}}{2\rho}-\frac{2\rho^2}{2\rho}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\pi^2}{4}-\rho^2}{2\rho}\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{\pi^2}{4}-\rho^2\right)2\rho\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{2}+\rho\right)\left(\frac{\pi}{2}-\rho\right)2\rho\ge 0$$

ρ	$-\infty$ $-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$\frac{\pi^2}{4}-\rho^2$	−	+	+	−
2ρ	−	−	+	+
Γινόμενο	+	−	+	−

Άρα $\rho\in\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

Δ1. Στο $\overset{\triangleleft}{BNK}$ έχουμε $\eta\mu\theta=\frac{x}{1}\Leftrightarrow x=\eta\mu\theta=NK$

και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{BK}{1}\Leftrightarrow BK=\sigma\upsilon\nu\theta$.

Είναι NM//ΒΓ άρα $\overset{\triangleleft}{ANM}\approx\overset{\triangleleft}{AB\Gamma}$ άρα

$$\frac{A\Delta}{AE}=\frac{B\Gamma}{MN}\Leftrightarrow\frac{2}{2-x}=\frac{4}{MN}\Leftrightarrow MN=2(2-x)\Leftrightarrow$$

$MN=4-2x$, άρα

$$(K\Lambda MN)=(4-2x)\cdot x=-2x^2+4x=-2\eta\mu^2\theta+4\eta\mu\theta$$

Δ2. $f(\theta)=-2\eta\mu^2\theta+4\eta\mu\theta=-2(\eta\mu^2\theta-2\eta\mu\theta)=$

$$=-2(\eta\mu^2\theta-2\eta\mu\theta+1-1)=-2(\eta\mu\theta-1)^2+2$$

Είναι $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu\theta\uparrow}{\Rightarrow}\eta\mu\frac{\pi}{6}\le\eta\mu\theta\le\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le ημθ \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le ημθ-1 \le 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \ge (ημθ-1)^2 \ge 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le -2(ημθ-1)^2 \le 0 \Rightarrow 2-\frac{1}{2} \le -2(ημθ-1)^2+2 \le 2$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le f(θ) \le 2$.

Είναι $f(θ)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow -2ημ^2θ+4ημθ=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$-4ημ^2θ+8ημθ-3=0 \Leftrightarrow -4(ημ^2θ-2ημθ+\frac{3}{4})=0$

$\Leftrightarrow -4(ημ^2θ-2ημθ+1-1+\frac{3}{4})=0$

$\Leftrightarrow -4(ημθ-1)^2+4-3=0 \Leftrightarrow (ημθ-1)^2=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow ημθ-1=\pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημθ=\frac{3}{2}$ απορ. ή $ημθ=\frac{1}{2}$

οπότε $θ=\frac{π}{6}$.

Άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι

$f\left(\frac{π}{6}\right)=\frac{3}{2}$.

Είναι $f(θ)=2 \Leftrightarrow -2ημ^2θ+4ημθ=2 \Leftrightarrow$

$ημ^2θ-2ημθ+1=0 \Leftrightarrow (ημθ-1)^2=0 \Leftrightarrow ημθ=1$,

οπότε $θ=\frac{π}{2}$.

Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι

$f\left(\frac{π}{2}\right)=2$.

Δ3.Ι. $(ΒΚΝ)=\frac{1}{2}ΒΚ\cdot ΚΝ=\frac{1}{2}ημθ\cdot συνθ$

Είναι ΝΚ//ΑΕ, άρα $\overset{\triangleleft}{ΑΝΕ} \approx \overset{\triangleleft}{ΒΚΝ}$, οπότε

$\frac{ΝΕ}{ΒΚ}=\frac{ΑΕ}{ΝΚ} \Leftrightarrow \frac{ΝΕ}{συνθ}=\frac{2-x}{x} \Leftrightarrow \frac{ΝΕ}{συνθ}=\frac{2-ημθ}{ημθ} \Leftrightarrow$

$ΝΕ=\frac{2-ημθ}{ημθ}\cdot συνθ$ και $ΑΕ=2-ημθ$. Άρα

$(ΑΝΕ)=\frac{1}{2}ΝΕ\cdot ΑΕ=\frac{1}{2}\frac{(2-ημθ)^2}{ημθ}\cdot συνθ=$
$=\frac{(2-ημθ)^2}{2ημθ}\cdot συνθ.$

ΙΙ. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{(2-ημθ)^2}{2ημθ}\cdot συνθ>\frac{1}{2}ημθ\cdot συνθ$, αρκεί $(2-ημθ)^2>ημ^2θ$, αρκεί $4-4ημθ+ημ^2θ>ημ^2θ$, αρκεί $4>4ημθ$, αρκεί $ημθ<1$ το οποίο ισχύει για κάθε $θ\in\left[\frac{π}{6},\frac{π}{2}\right)$.

ΙΙΙ. Ξέρω ότι $(ΚΔΕΝ)=ΚΔ\cdot x=ΚΔ\cdot ημθ$.

Είναι ΝΚ//ΑΔ άρα $\overset{\triangleleft}{ΑΒΔ} \approx \overset{\triangleleft}{ΒΚΝ}$ άρα $\frac{ΑΔ}{ΚΝ}=\frac{ΒΔ}{ΒΚ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x}=\frac{ΒΔ}{συνθ} \Leftrightarrow ΒΔ=\frac{2συνθ}{ημθ}$. Είναι:

$ΚΔ=ΒΔ-ΒΚ=\frac{2συνθ}{ημθ}-συνθ=\frac{2συνθ-ημθ\cdot συνθ}{ημθ}$

Άρα : $(ΚΔΕΝ)=ΚΔ\cdot x=\frac{2συνθ-ημθ\cdot συνθ}{ημθ}\cdot ημθ=$
$=2συνθ-ημθ\cdot συνθ.$

IV. Έστω ότι (ΚΔΕΝ)= (ΒΚΝ) $\Leftrightarrow$

$2συνθ-ημθ\cdot συνθ=\frac{1}{2}ημθ\cdot συνθ \Leftrightarrow$

$2συνθ=\frac{3}{2}ημθ\cdot συνθ \Leftrightarrow$

$συνθ=\frac{3}{4}ημθ\cdot συνθ \underset{θ\in\left[\frac{π}{6},\frac{π}{2}\right)}{\overset{συνθ\neq 0}{\Leftrightarrow}} 1=\frac{3}{4}ημθ \Leftrightarrow ημθ=\frac{4}{3}$ που

είναι αδύνατον.

Δ4. Είναι $(ΚΛΜΝ)\overset{(Δ_1)}{=}-2ημ^2θ+4ημθ$ και

$(ΑΝΜ)=\frac{1}{2}ΜΝ\cdot ΑΕ\overset{(Δ_1)}{=}\frac{1}{2}(4-2x)\cdot(2-x)=(2-x)^2=(2-ημθ)^2$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$t(θ)=-2ημ^2θ+4ημθ-(2-ημθ)^2$, $θ\in\left[\frac{π}{3},\frac{π}{2}\right]$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $t(θ)>0$, $θ\in\left[\frac{π}{3},\frac{π}{2}\right]$.

$t(θ)=-2ημ^2θ+4ημθ-(4-4ημθ+ημ^2θ)=$

$-2ημ^2θ+4ημθ-4+4ημθ-ημ^2θ=-3ημ^2θ+8ημθ-4=$

$-3ημ^2θ+6ημθ+2ημθ-4=-3ημθ(ημθ-2)+2(ημθ-2)$

$=(ημθ-2)(-3ημθ+2)$, $θ\in\left[\frac{π}{3},\frac{π}{2}\right]$.

Είναι $t(θ)>0 \Leftrightarrow (ημθ-2)(-3ημθ+2)>0$ και επειδή $(ημθ-2)<0$ αρκεί $(-3ημθ+2)<0$, αρκεί

$ημθ>\frac{2}{3}$ (1). Είναι:

$\frac{π}{3}<θ<\frac{π}{2} \overset{ημθ\uparrow}{\Rightarrow} ημ\frac{π}{3}<ημθ<ημ\frac{π}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}<ημθ<1$ (2).

Από τις (1), (2) αρκεί $\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{2}{3}$, αρκεί $3\sqrt{3}>4$, αρκεί $27>16$ που ισχύει.

Κύκλος – Κανονικά Πολύγωνα.

Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

1. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ο εγγεγραμμένος σε αυτό κύκλος έχει εμβαδόν 4π cm^2. Να βρείτε:

α) Την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

β) Την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

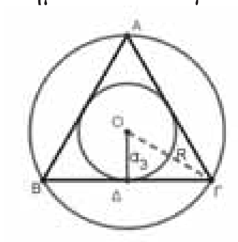
γ) Την πλευρά του τριγώνου.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου.

Λύση

α) Ας είναι ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\pi\rho^2$ οπότε έχουμε $4\pi=\pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=4 \Leftrightarrow \rho=2(\text{cm})$.

β) Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου σε κανονικό πολύγωνο είναι το απόστημα του πολυγώνου, οπότε $\alpha_3=\rho=2$ cm.



Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου έχουμε $\alpha_3=\dfrac{R}{2} \Leftrightarrow 2=\dfrac{R}{2} \Leftrightarrow$ R=4 cm.

γ) Η πλευρά του τριγώνου είναι $\lambda_3=R\sqrt{3}$ οπότε είναι $\lambda_3=4\sqrt{3}$ cm.

δ) Το εμβαδόν κανονικού ν/γωνου δίνεται από τον τύπο $E_\nu=\dfrac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu=\dfrac{1}{2}\nu\cdot\lambda_\nu\alpha_\nu$, οπότε έχουμε:

$$E_3=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\lambda_3\alpha_3=\frac{3}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Επομένως είναι $E_3=\dfrac{3\cdot4^2\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

2. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, R) και (Ο, 2R). Δύο χορδές ΑΒ και ΑΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτονται του μικρότερου κύκλου στα σημεία Μ και Ν αντιστοίχως.

α) Να βρείτε την περίμετρο του χωρίου που περικλείεται από τα τόξα ΑΒ, ΜΝ και τα τμήματα ΑΝ και ΜΒ.

β) Να δείξετε ότι το παραπάνω χωρίο είναι ισεμβαδικό με τον κύκλο (Ο,R).

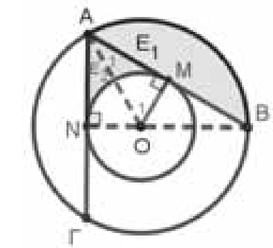
Λύση

Το χωρίο που μας ενδιαφέρει αποτελείται από τα δύο σκιασμένα χωρία E_1 και E_2.

Είναι $OM\perp AB$, ΟΑ=2R και ΟΜ=R.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ είναι $OM=\dfrac{1}{2}OA$ οπότε είναι $\hat{A}_1=30°$ και $\hat{O}_1=60°$.

Είναι $A\hat{O}B=M\hat{O}N=2\hat{O}_1=120°=\omega_3$.



Επομένως η ΑΒ είναι η πλευρά λ_3 (και το ΟΜ το απόστημα α_3) του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,2R) οπότε είναι $AB=2R\sqrt{3}$.

α) Είναι

$$L=L_{\overset{\frown}{AB}}+L_{\overset{\frown}{MN}}+MB+AN.$$

Έχουμε

$$L_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\pi(2R)120}{180} \text{ ή } L_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{4\pi R}{3}.$$

$$L_{\overset{\frown}{MN}}=\frac{\pi R\cdot120}{180} \text{ ή } L_{\overset{\frown}{MN}}=\frac{2\pi R}{3}$$

$$AN=AM=MB=\frac{1}{2}AB=R\sqrt{3}.$$

Άρα είναι $L=\dfrac{4\pi R}{3}+\dfrac{2\pi R}{3}+R\sqrt{3}+R\sqrt{3}$

ή $L=2\pi R+2R\sqrt{3}$.

β) Έχουμε $E_1=\left(O.\overset{\frown}{AB}\right)-(OAB)=$

$$=\frac{\pi(2R)^2\cdot120}{360}-\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OM=$$

$$=\frac{4\pi R^2}{3}-\frac{1}{2}\cdot2R\sqrt{3}\cdot R \text{ ή } E_1=\frac{4\pi R^2}{3}-R^2\sqrt{3}.$$

Είναι $E_2=(AMON)-\left(O.\overset{\frown}{MN}\right)$ ή

$E_2=2(AMO)-\left(O.\overset{\frown}{MN}\right)$, αφού

(AMON)=2(AMO) *(γιατί;)*.

Άρα $E_2=2\cdot\dfrac{1}{2}AM\cdot OM-\dfrac{\pi R^2120}{360}=$

$$=\frac{2R\sqrt{3}}{2}\cdot R-\frac{\pi R^2}{3} \text{ ή } E_2=R^2\sqrt{3}-\frac{\pi R^2}{3}.$$

Συνεπώς είναι $E=E_1+E_2=$

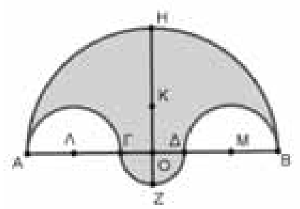
$$=\frac{4\pi R^2}{3}-R^2\sqrt{3}+R^2\sqrt{3}-\frac{\pi R^2}{3}=\pi R^2.$$

Επομένως είναι $E=E_{(O,R)}$.

3. Το σχήμα, που ονομάζεται «Σαλινόν» ή «Σελήνιον» και βρίσκεται στο Βιβλίο Λημμάτων που αποδίδεται στον Αρχιμήδη, αποτελείται τα ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.

Αν ΑΓ=ΔΒ και ΖΗ⊥ΑΒ, να δείξετε ότι:

α) **Το μήκος του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ ισούται με το άθροισμα των μηκών των τριών ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.**



β) **Το εμβαδόν του «Σαλινόν» ισούται με το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο την ΗΖ.**

Λύση

α) Έστω ΑΓ=ΔΒ=$2\rho_1$ και ΓΔ=$2\rho_2$.

Αν είναι L_{AB}, $L_{A\Gamma}$, $L_{\Gamma\Delta}$, $L_{\Delta B}$ τα μήκη των ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ αντιστοίχως, έχουμε:

$$L_{AB}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(A\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta B)=$$

$$=\frac{1}{2}\pi(2\rho_1+2\rho_2+2\rho_1)\ \ L_{AB}=\pi(2\rho_1+\rho_2).$$

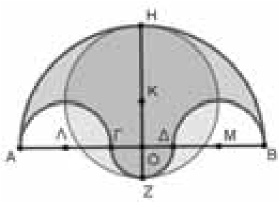
Ομοίως $L_{A\Gamma}=L_{\Delta B}=\pi\rho_1$ και $L_{\Gamma\Delta}=\pi\rho_2$.

Επομένως $L_{A\Gamma}+L_{\Gamma\Delta}+L_{\Delta B}=2\pi\rho_1+\pi\rho_2=$ $=\pi(2\rho_1+\rho_2)=L_{AB}$.

β) Έχουμε ΗΖ = ΗΟ+ΟΖ.

Είναι όμως ΗΟ=ΑΟ και ΟΖ=ΟΔ *(γιατί;)*, οπότε ΗΖ=ΑΟ+ΟΔ=ΑΔ=ΑΓ+ΓΔ=$2\rho_1+2\rho_2$ και τελικά $HZ=2(\rho_1+\rho_2)$.

Αν Ε είναι το εμβαδόν του «Σαλινόν», E_{AB}, $E_{A\Gamma}$, $E_{\Gamma\Delta}$, $E_{\Delta B}$ τα εμβαδά των ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ αντιστοίχως και E_{HZ} το εμβαδόν του του κύκλου με διάμετρο την ΗΖ, έχουμε:



$$E=E_{AB}+E_{\Gamma\Delta}-E_{A\Gamma}-E_{\Delta B}\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(AB)^2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(\Gamma\Delta)^2}{4}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(A\Gamma)^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(\Delta B)^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(4\rho_1+2\rho_2)^2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(2\rho_2)^2}{4}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(2\rho_1)^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(2\rho_1)^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\pi(2\rho_1+\rho_2)^2+\frac{1}{2}\cdot\pi\rho_2^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\rho_1^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\rho_1^2\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\pi\left[(2\rho_1+\rho_2)^2+\rho_2^2-2\rho_1^2\right]\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\pi\left[4\rho_1^2+\rho_2^2+4\rho_1\rho_2+\rho_2^2-2\rho_1^2\right]\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(2\rho_1^2+2\rho_2^2+4\rho_1\rho_2\right)\Leftrightarrow$$

$$E=\pi\left(\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\right)\Leftrightarrow E=\pi(\rho_1+\rho_2)^2\quad \mathbf{(1)}$$

Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο την ΗΖ είναι: $E_{HZ}=\dfrac{\pi\cdot(HZ)^2}{4}\Leftrightarrow E_{HZ}=\dfrac{\pi\cdot\left(2(\rho_1+\rho_2)\right)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow E_{HZ}=\frac{4\pi(\rho_1+\rho_2)^2}{4}=\pi(\rho_1+\rho_2)^2\quad \mathbf{(2)}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $E=E_{HZ}$

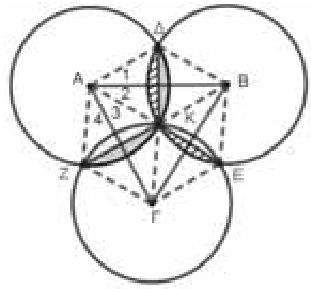
4. **Τρείς ίσοι κύκλοι με κέντρα (Α, R), (Β, R) και (Γ, R) διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ το οποίο βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ.**

α) **Να δείξετε ότι το μήκος του τρίφυλλου σχήματος που σχηματίζεται από τα κοινά μέρη των τριών κύκλων ισούται με το μήκος του κάθε κύκλου.**

β) **Να υπολογίσετε συναρτήσει του R και του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ το εμβαδό του παραπάνω τρίφυλλου.**

Λύση

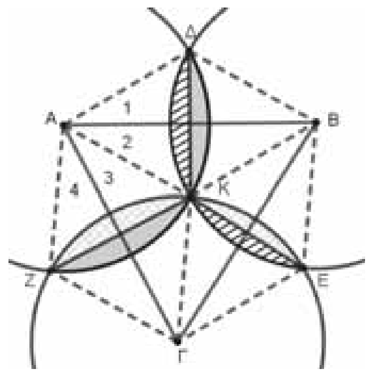
Τα φύλλα του τρίφυλλου χωρίου σχηματίζονται από τα τρία τόξα $\overset{\frown}{\Delta KZ}$, $\overset{\frown}{ZKE}$ και $\overset{\frown}{EK\Delta}$.



α) Είναι επομένως $L=L_{\overset{\frown}{\Delta KZ}}+L_{\overset{\frown}{ZKE}}+L_{\overset{\frown}{EK\Delta}}$.

Παρατηρούμε ότι στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta KZ}$ βαίνει η επίκεντρη γωνία $\Delta\hat{A}Z$ η οποία είναι το άθροισμα των γωνιών $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ και $\hat{A}_4$.

Είναι όμως $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ και $\hat{A}_3=\hat{A}_4$ γιατί τα τετράπλευρα ΑΔΒΚ και ΑΖΓΚ είναι ρόμβοι *(γιατί;)* και συνεπώς οι διαγώνιοι τους διχοτομούν τις γωνίες του.



Οπότε είναι

$$\Delta\hat{A}Z=\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+\hat{A}_4=$$

$$=2\hat{A}_2+2\hat{A}_3=2\left(\hat{A}_2+\hat{A}_3\right)\ \text{ή}\ \Delta\hat{A}Z=2\hat{A}.$$

Επομένως είναι $L_{\overset{\frown}{\Delta KZ}} = \dfrac{\pi R\left(2\hat{A}\right)}{180} \Leftrightarrow$

$L_{\overset{\frown}{\Delta KZ}} = \dfrac{\pi R\left(\hat{A}\right)}{90}$. Ομοίως είναι

$L_{\overset{\frown}{EK\Delta}} = \dfrac{\pi R\left(\hat{B}\right)}{90}$ και $L_{\overset{\frown}{ZKE}} = \dfrac{\pi R\left(\hat{\Gamma}\right)}{90}$.

Επομένως για το μήκος του τρίφυλλου έχουμε: $L = L_{\overset{\frown}{\Delta KZ}} + L_{\overset{\frown}{ZKE}} + L_{\overset{\frown}{EK\Delta}} =$

$$= \frac{\pi R\left(\hat{A}\right)}{90} + \frac{\pi R\left(\hat{\Gamma}\right)}{90} + \frac{\pi R\left(\hat{B}\right)}{90} =$$

$$= \frac{\pi R\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}\right)}{90} = \frac{\pi R \cdot 180}{90} \text{ ή } L = 2\pi R.$$

β) Το εμβαδόν Ε του ζητούμενου χωρίου είναι το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που είναι σκιασμένα με συμπαγές γέμισμα, με γραμμές και με πλέγμα. Το εμβαδόν των χωρίων με το συμπαγές γέμισμα βρίσκεται αν από το εμβαδόν του τομέα $\left(A.\overset{\frown}{\Delta KZ}\right)$ αφαιρέσουμε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΚ και ΑΖΚ, δηλαδή είναι:

$$E_1 = \frac{\pi R^2\left(2\hat{A}\right)}{360} - (A\Delta K) - (AZK) \text{ ή}$$

$$E_1 = \frac{\pi R^2\left(\hat{A}\right)}{180} - (A\Delta K) - (AZK). \quad \textbf{(1)}$$

Ομοίως το εμβαδόν E_2 των χωρίων που είναι σκιασμένα με γραμμές είναι:

$$E_2 = \frac{\pi R^2\left(2\hat{B}\right)}{360} - (B\Delta K) - (BEK) \text{ ή}$$

$$E_2 = \frac{\pi R^2\left(\hat{B}\right)}{180} - (B\Delta K) - (BEK) \quad \textbf{(2)}$$

Και το εμβαδόν E_3 των χωρίων που είναι σκιασμένα με πλέγμα είναι:

$$E_3 = \frac{\pi R^2\left(2\hat{\Gamma}\right)}{360} - (\Gamma EK) - (\Gamma ZK) \text{ ή}$$

$$E_3 = \frac{\pi R^2\left(\hat{\Gamma}\right)}{180} - (\Gamma EK) - (\Gamma ZK) \quad \textbf{(3)}$$

Από τις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 =$$

$$= \frac{\pi R^2\left(\hat{A}\right)}{180} - (A\Delta K) - (AZK) +$$

$$+ \frac{\pi R^2\left(\hat{B}\right)}{180} - (B\Delta K) - (BEK) +$$

$$+ \frac{\pi R^2\left(\hat{\Gamma}\right)}{180} - (\Gamma EK) - (\Gamma ZK) \text{ ή}$$

$$E = \frac{\pi R^2\left(\hat{A}\right)}{180} + \frac{\pi R^2\left(\hat{B}\right)}{180} + \frac{\pi R^2\left(\hat{\Gamma}\right)}{180} - \begin{bmatrix}(A\Delta K)+(AZK)+(B\Delta K)+ \\ +(BEK)+(\Gamma EK)+(\Gamma ZK)\end{bmatrix}$$

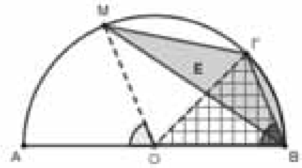
$$E = \frac{\pi R^2\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}\right)}{180} - (A\Delta BE\Gamma Z) \text{ ή}$$

$$E = \frac{\pi R^2 \cdot 180}{180} - 2(AB\Gamma) \text{ ή τελικά}$$

$E = \pi R^2 - 2(AB\Gamma)$, γιατί είναι

(ΑΔΒΕΓΖ)= (ΑΔΒΚ)+(ΒΕΓΚ)+(ΓΖΑΚ) =
= 2(ΚΑΒ) + 2(ΚΒΓ) + 2(ΚΓΑ) =
= 2[(ΚΑΒ) + (ΚΒΓ) + (ΚΓΑ)] ή
(ΑΔΒΕΓΖ) = 2(ΑΒΓ).

5. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 4cm παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 135°$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν οι χορδές ΜΒ, ΜΓ και το τόξο ΒΓ.



Λύση

Το χωρίο Ε που μας ενδιαφέρει είναι το σκιασμένο με συμπαγή σκίαση.

Είναι $A\hat{O}M = \dfrac{135°}{2} = 62{,}5°$ ως επίκεντρη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma} = 135°$.

Είναι επίσης $A\hat{B}\Gamma = \dfrac{135°}{2} = 62{,}5°$ ως εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma} = 135°$.

Επομένως είναι $A\hat{O}M = A\hat{B}\Gamma$ πράγμα που σημαίνει ότι ΟΜ//ΒΓ *(γιατί;)*.

Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΜΒΓ είναι ισοδύναμα γιατί έχουν κοινή βάση τη ΒΓ και τις κορυφές τους Ο και Μ αντιστοίχως στην ΟΜ//ΒΓ.

Αν ε είναι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή τη ΒΓ, έχουμε:

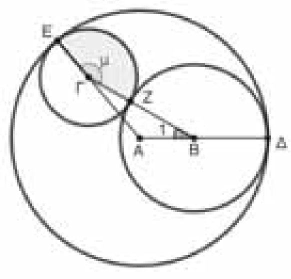
$$E = (MB\Gamma) + \varepsilon = (OB\Gamma) + \varepsilon = E_{\left(O.\overset{\frown}{B\Gamma}\right)}.$$

Είναι $B\hat{O}\Gamma = 180° - 135° = 45°$ οπότε το εμβαδόν του τομέα $O.\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι:

$$E_{\left(O.\overset{\frown}{B\Gamma}\right)} = \frac{\pi \cdot (OB)^2 \cdot 45}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 45}{360} \text{ ή}$$

$$E_{(O.\widehat{B\Gamma})}=\frac{\pi}{4}\left(cm^2\right)$$

6. **Τρεις κύκλοι με κέντρα Α, Β και Γ εφάπτονται όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν είναι $\widehat{\Delta E}=130°$, $\widehat{\Delta Z}=150°$ και ΓΕ=3cm, να βρείτε το εμβαδόν του τομέα $\Gamma.\widehat{EZ}$.**



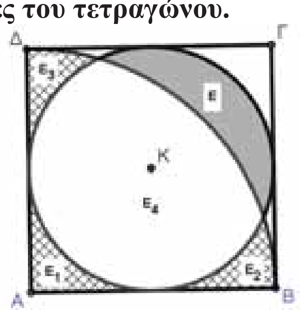
Λύση

Είναι $\widehat{\Delta E}=130°$ οπότε $\Delta\widehat{A}E=130°$. Επίσης είναι $\widehat{\Delta Z}=150°$ οπότε $\Delta\widehat{B}Z=150°$ και επομένως $\widehat{B}_1=30°$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία μ είναι εξωτερική, οπότε είναι $\hat{\mu}=130°+30°=160°$.

Άρα το εμβαδόν του τομέα $\Gamma.\widehat{EZ}$ είναι:

$$E_{(\Gamma.\widehat{EZ})}=\frac{\pi\cdot(\Gamma E)^2\cdot\mu}{360}=\frac{\pi\cdot 3^2\cdot 160}{360}=4\pi\left(cm^2\right).$$

7. **Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, ο εγγεγραμμένος σε αυτό κύκλος και το τεταρτοκύκλιο με κέντρο Α και ακτίνα α που περιέχεται στο τετράγωνο. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου που ορίζουν ο κύκλος και το τεταρτοκύκλιο ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριών χωρίων που περικλείονται από το τεταρτοκύκλιο, τον εγγεγραμμένο κύκλο και τις πλευρές του τετραγώνου.**



Λύση

Ονομάζουμε Ε το εμβαδόν του μηνίσκου, E_1, E_2, E_3 τα εμβαδά των τριών χωρίων και E_4 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει ο κύκλος και το τεταρτοκύκλιο. Είναι $E+E_4=E_{(K,\rho)}$ οπότε αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, τότε είναι $E+E_4=\pi\rho^2$. (1)

Είναι επίσης $E_1+E_2+E_3+E_4=E_{(A,\widehat{B\Delta})}$ οπότε $E_1+E_2+E_3+E_4=\frac{\pi\cdot(2\rho)^2\cdot 90}{360}=$

$=\frac{\pi\cdot 4\rho^2\cdot 90}{360}\Leftrightarrow E_1+E_2+E_3+E_4=\pi\rho^2$. (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $E=E_1+E_2+E_3$.

Πηγές:

- *Ευκλείδειος Γεωμετρία Β΄ Λυκείου* ΟΕΔΒ 1984
- *http://www.gogeometry.com/problem/index.html*

Έφυγαν από κοντά μας

† Πέτρος Κατσιλιέρης

Έφυγε πρόσφατα, ο συνάδελφος μαθηματικός, και για πολλά χρόνια **βουλευτής Μεσσηνίας,** Πέτρος Κατσιλιέρης. Ο εκλιπών υπήρξε **ενεργό** μέλος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας από το 1971, την οποία αγαπούσε και στήριζε με πολλούς τρόπους στο χώρο των Μαθηματικών και της Εκπαίδευσης.

Ο Πέτρος Κατσιλιέρης ήταν ένας από τους κεντρικούς ομιλητές στην εκδήλωση με θέμα "Μαθηματικά - Πολιτικοί και Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση" που διοργάνωσε η ΕΜΕ το **1998** στο πλαίσιο του εορτασμού των **80 χρόνων** από την ίδρυση της ΕΜΕ.

Συμμετείχε ως μέλος του Ελληνικού Κοινοβουλίου στην Τιμητική Επιτροπή της **45ης** Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας που διοργάνωσε η ΕΜΕ στην Αθήνα, **τον Ιούλιο του 2004**.

Το Δ.Σ. της ΕΜΕ και απ' αυτή τη θέση, εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του.

† Λάμπρος Τσίκας

Με θλίψη πληροφορηθήκαμε τον θάνατο του συναδέλφου μαθηματικού Λάμπρου Τσίκα, **ιδρυτή** και **πρώτο Πρόεδρο** του Παραρτήματος ΕΜΕ Ηλείας

Το ΔΣ της ΕΜΕ εκφράζει και απ' αυτή τη θέση τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του.

Παραθέτουμε το συλλυπητήριο μήνυμα της Διοικούσας Επιτροπής του Παραρτήματος **ΕΜΕ Ηλείας**

Συλλυπητήριο μήνυμα

Στην είδηση του θανάτου του Λάμπρου Τσίκα, μαθηματικού, συγγραφέα, ιδρυτικού μέλους και πρώτου Προέδρου του Παραρτήματος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας Ν. Ηλείας «**ΙΠΠΙΑΣ Ο ΗΛΕΙΟΣ**», η Διοικούσα Επιτροπή του Παραρτήματος εκφράζει τη βαθύτατη θλίψη της.

Ο Λάμπρος Τσίκας υπήρξε σπουδαίος μαθηματικός, με πολύχρονη και διαρκή **προσφορά** στα Μαθηματικά, και στην Εκπαίδευση. Η αγάπη του για τα Μαθηματικά υπήρξε **μοναδική** και διαχρονική. Τον ευχαριστούμε για όλα και θα τον **θυμόμαστε** πάντα. Στην οικογένειά του Λάμπρου Τσίκα εκφράζουμε τα ειλικρινή μας συλλυπητήρια.

Ασκήσεις στις Κωνικές Τομές

Γιώργος Τσαβαρής, Χρήστος Π. Τσιφάκης

Άσκηση 1. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ με $\varphi \in [0, 2\pi)$.

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$, με $\varphi \in [0, 2\pi)$.

β) Έστω ότι $E(\varphi)$, με $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Να αποδείξετε ότι $E(\varphi) \geq 20$.

Λύση

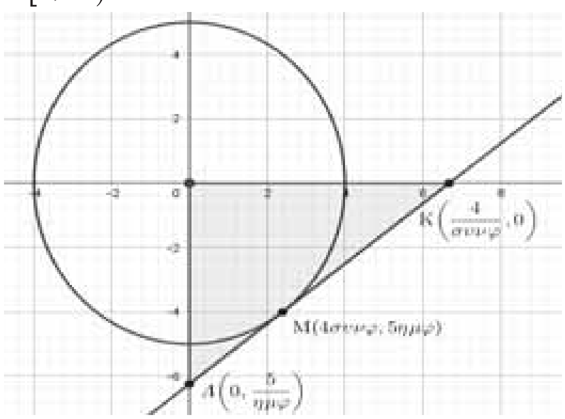
α) i) Έχουμε ότι:

$$\left.\begin{matrix} x_M = 4\sigma\upsilon\nu\varphi \\ y_M = 5\eta\mu\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x_M}{4} = \sigma\upsilon\nu\varphi \\ \frac{y_M}{5} = \eta\mu\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x_M^2}{16} = \sigma\upsilon\nu^2\varphi \\ \frac{y_M^2}{25} = \eta\mu^2\varphi \end{matrix}\right\}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{x_M^2}{16} + \frac{y_M^2}{25} = \sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{16} + \frac{y_M^2}{25} = 1.$$

Άρα τα σημεία M ανήκουν σε έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, για τις διάφορες τιμές της $\varphi \in [0, 2\pi)$.



ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$, με $\varphi \in [0, 2\pi)$ δίνεται

$$\frac{x \cdot x_M}{16} + \frac{y \cdot y_M}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 4\sigma\upsilon\nu\varphi}{16} + \frac{y \cdot 5\eta\mu\varphi}{25} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{4} \cdot x + \frac{\eta\mu\varphi}{5} \cdot y = 1.$$

β) Η εφαπτομένη στο σημείο M με $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K\left(\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\varphi}, 0\right)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Lambda\left(0, \frac{5}{\eta\mu\varphi}\right)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$ είναι

$$(OK\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OK}\right| \cdot \left|\overrightarrow{O\Lambda}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right| \cdot \left|\frac{5}{\eta\mu\varphi}\right| =$$

$$\left|\frac{20}{2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi}\right| \overset{\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{=} \frac{20}{\eta\mu(2\varphi)}$$ (χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\eta\mu(2\varphi) = 2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$).

Για κάθε $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $2\varphi \in (0, \pi)$ και

$$0 < \eta\mu(2\varphi) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu(2\varphi)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{20}{\eta\mu(2\varphi)} \geq 20$$

Άρα $E(\varphi) \geq 20$ με την ισότητα να ισχύει όταν $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Άσκηση 2. Έστω η παραβολή $(C): x^2 = y$ και τα σημεία της $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ και $x_1, x_2 \neq 0$. Αν είναι $(OA) \perp (OB)$, να δείξετε ότι:

α) $x_1 \cdot x_2 = -1$

β) Η εξίσωση της χορδής (AB) είναι η $(AB): (x_1^2 - 1)x - x_1 y + x_1 = 0$

γ) Η ευθεία (AB) διέρχεται από σταθερό σημείο.

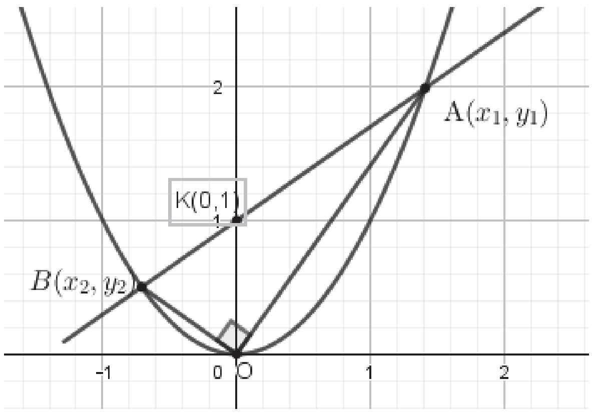
Λύση

α) Αφού τα σημεία A, B ανήκουν στην παραβολή έχουμε $y_1 = x_1^2$ και $y_2 = x_2^2$ και $A(x_1, x_1^2)$, $B(x_2, x_2^2)$.

Αφού $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (1 + x_1 \cdot x_2) = 0 \underset{x_2 \neq 0}{\overset{x_1 \neq 0}{\Leftrightarrow}}$

$1 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = -1$.



β) Η χορδή (AB) έχει

$\lambda_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 =$

$= x_1 - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1^2 - 1}{x_1}$ και εξίσωση

$y - y_1 = \lambda_{AB} \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow y - x_1^2 = \dfrac{x_1^2 - 1}{x_1} \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow$

$x_1 y - \cancel{x_1^3} = (x_1^2 - 1)x - \cancel{x_1^3} + x_1 \Leftrightarrow$

$(x_1^2 - 1)x - x_1 y + x_1 = 0$.

γ) Η εξίσωση γράφεται

$(x_1^2 - 1)x - x_1 y + x_1 = 0 \Leftrightarrow x x_1^2 + (1 - y)x_1 - x = 0$.

Αφού αληθεύει για κάθε τιμή του x_1: $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ 1 - y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$. Άρα η (AB) διέρχεται από το σημείο $K(0,1)$.

Άσκηση 3. Έστω Α, Β σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| \leq 1$.

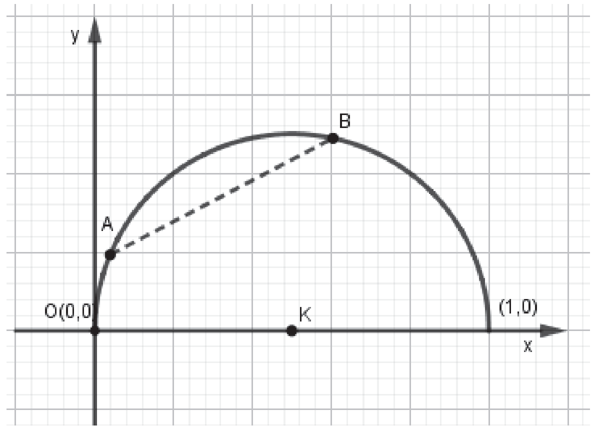
Λύση

i. Πρέπει να ισχύει

$$x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $A = [0,1]$

ii. Έστω $y = \sqrt{x - x^2} \Leftrightarrow y^2 = x - x^2 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - x = 0$, με $y \geq 0$.



Η εξίσωση $x^2 + y^2 - x = 0$ παριστάνει ημικύκλιο με κέντρο $K\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, ακτίνα $R = \dfrac{1}{2}$ και $y \geq 0$ αφού $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1 > 0$. Άρα για την απόσταση των σημείων A, B θα ισχύει: $0 \leq (AB) \leq 2R \Leftrightarrow 0 \leq (AB) \leq 1$. Έτσι $|\overrightarrow{AB}| \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει όταν τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά.

Άσκηση 4. Δίνεται η εξίσωση

$x^2 + y^2 + (\mu + 1)x + (\mu - 1)y + \mu^2 + 3\mu + 3 = 0$ (1), $\mu \in R$.

i) Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in R$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

ii) Να βρεθεί η γραμμή που ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

iii) Να δείξετε ότι όλοι αυτοί οι κύκλοι βρίσκονται στην ταινία που ορίζεται από τις ευθείες $(\varepsilon): x - y - 1 = 0$ και $(\delta): x - y + 3 = 0$

iv) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με την μέγιστη ακτίνα. Διαγωνισμός Ξανθόπουλος 2011

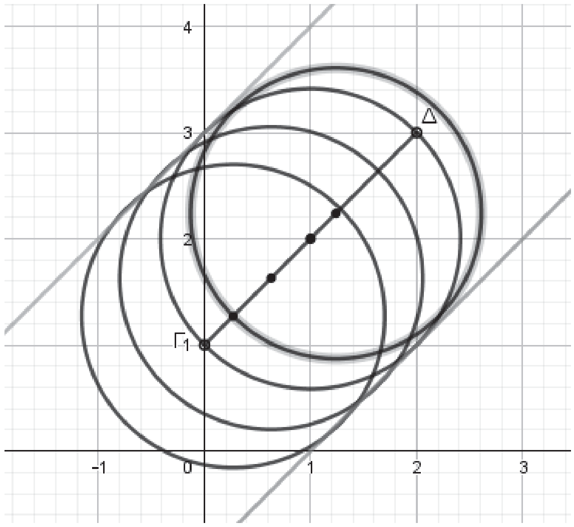
Λύση

i) Η (1) είναι εξίσωση κύκλου αν και μόνο αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow -2\mu^2 - 12\mu - 10 > 0 \Leftrightarrow$

$\mu^2 + 6\mu + 5 < 0 \Leftrightarrow \mu \in (-5, -1)$

ii) Για την τετμημένη x_o και τεταγμένη y_o του κέντρου των παραπάνω κύκλων θα πρέπει να ισχύει: $\left.\begin{array}{r} x_o=-\dfrac{\mu+1}{2} \\ y_o=-\dfrac{\mu-1}{2} \\ -5<\mu<-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \mu=-2x_o-1 \\ \mu=-2y_o+1 \\ -5<-2x_o-1<-1 \\ -5<-2y_o+1<-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{r} x_o-y_o+1=0 \\ 0<x_o<2 \\ 1<y_o<3 \end{array}\right\}$



Άρα η γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα είναι το ευθύγραμμο τμήμα, μέρος της ευθείας $(\zeta): x-y+1=0$, με άκρα τα σημεία $\Gamma(0,1)$, $\Delta(2,3)$ χωρίς τα άκρα Γ και Δ.

iii) Παρατηρούμε ότι είναι $(\varepsilon)//(\zeta)//(\delta)$. Αφού αυτές τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$, $M(-1,0)$ και $B(-3,0)$ με το σημείο M να είναι μέσο του AB συμπεραίνουμε ότι η ευθεία (ζ) είναι μεσοπαράλληλη των (ε) και (δ).

Επειδή τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται στην ευθεία (ζ), αρκεί η ακτίνα τους να είναι μικρότερη ή ίση της απόστασης των ευθειών (ε) και (ζ).

$$d((\zeta),(\varepsilon))=d(M,(\varepsilon))=\frac{|-1+0\cdot(-1)-1|}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \quad (2)$$

και $\rho=\dfrac{\sqrt{-2\mu^2-12\mu-10}}{2}$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) αρκεί να ισχύει $\rho\le\sqrt{2}$, δηλαδή $\dfrac{\sqrt{-2\mu^2-12\mu-10}}{2}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\mu^2-12\mu-10\le 8 \Leftrightarrow 2(\mu+3)^2\ge 0$, που ισχύει.

iv) Έχουμε ότι $\rho=\dfrac{\sqrt{-2\mu^2-12\mu-10}}{2}$.

Για να γίνει η ακτίνα μέγιστη, αρκεί η παράσταση $f(\mu)=-2\mu^2-12\mu-10$ να γίνει μέγιστη.

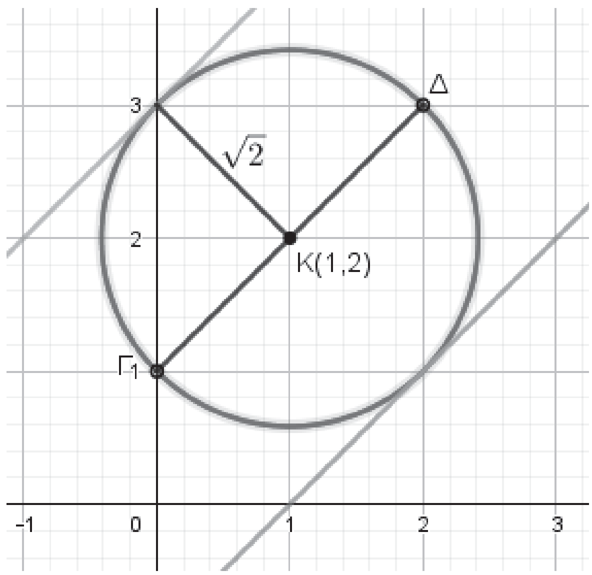
Έτσι έχουμε:

$f(\mu)=-2\mu^2-12\mu-10=-2(\mu^2+6\mu+5)=$

$-2\left[(\mu+3)^2-4\right]=-2(\mu+3)^2+8$.

Άρα $f(\mu)-8=-2(\mu+3)^2\le 0\Leftrightarrow f(\mu)\le 8=f(-3)$.

Έτσι έχουμε μέγιστη ακτίνα όταν $f(\mu)=8$ το οποίο ισχύει όταν $\mu=-3$, δεκτή γιατί $-5<\mu<-1$.



Όταν $\mu=-3$ τότε έχουμε κύκλο με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$.

Επομένως ο κύκλος με την μεγαλύτερη ακτίνα είναι ο $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=2$

Παρατήρηση:

Το τριώνυμο $f(\mu)=-2\mu^2-12\mu-10$ έχει $\alpha=-2<0$ άρα παρουσιάζει μέγιστο για $\mu=-\dfrac{-12}{-4}=-3$, το $f(-3)=8$.

Τάξη: Γ΄

Αξιοσημείωτα υπαρξιακά θεωρήματα

Θεωρήματα: Bolzano – Rolle – Μέσης τιμής

Σπύρος Γιαννακόπουλος - Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

Τα τρία παραπάνω θεωρήματα με τις συνέπειές τους, είναι η βάση της στοιχειώδους Μαθηματικής Ανάλυσης. Αναφέρονται στις συνεχείς συναρτήσεις και στο διαφορικό λογισμό.

Τα θεωρήματα Bolzano – Rolle – Μέσης τιμής χαρακτηρίζονται ως «Υπαρξιακά θεωρήματα». Πάνω στο θεώρημα Bolzano στηρίζεται ***αλγόριθμος*** *(μέθοδος διχοτόμησης) για την προσεγγιστική επίλυση εξισώσεων.*

*Ιστορικά πρέπει να πούμε ότι το θεώρημα που εμείς σήμερα το αναφέρουμε ως θεώρημα Bolzano, οι μαθηματικοί του 18^{ου} αιώνα, παρασυρόμενοι από τη γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα, δεχόντουσαν ως προφανή την ισχύ του θεωρήματος και το χρησιμοποιούσαν σιωπηρά για την απόδειξη άλλων θεωρημάτων. Πρώτα ο Bolzano [****Bernard Bolzano*** *1781-1848, καθολικός ιερέας-μαθηματικός], ήταν ο πρώτος, που είδε ότι πολλές προφανείς προτάσεις για τις συνεχείς συναρτήσεις, χρειάζονται απόδειξη και αργότερα ο Weierstrass [****Karl Weierstrass*** *1815-1897, καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, πολέμιος της αοριστίας και ανακρίβειας της μαθηματικής σκέψης του 19^{ου} αιώνα], ασκώντας αυστηρή κριτική στις θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης, έδωσε ο καθένας τους, αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος.*

Θέμα 1ο

Έστω ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f(0)=0$ και $f(3)=\frac{\pi}{2}$.

α. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(-x+\eta\mu x+1)=-x$ έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα.

β. i. Αν ρ είναι η αρνητική ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος α, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x}{f(1)+\rho-x^2}$.

ii. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της g έχει με την ευθεία $y=x+1$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Λύση

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$h(x)=f(-x+\eta\mu x+1)+x, x\in\mathbb{R}.$$

• Η h είναι συνεχής συνάρτηση ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

• $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(3)$.

$\frac{\pi}{2}<3 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(3)\Rightarrow h\left(-\frac{\pi}{2}\right)<0$.

• $h(0)=f(1)>0$,

αφού $0<1 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f(0)<f(1)\Rightarrow f(1)>0$.

Οπότε $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)h(0)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(-x_0+\eta\mu x_0+1)=-x_0$.

β. i. Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει και αρκεί
$$f(1)+\rho-x^2\neq 0.$$

Από το ερώτημα (α) είναι $f(-\rho+\eta\mu\rho+1)=-\rho$.

Είναι: $|\eta\mu\rho|<|\rho|\Rightarrow -|\rho|<\eta\mu\rho<|\rho|$

$\overset{\rho<0}{\Rightarrow}\rho<\eta\mu\rho<-\rho\Rightarrow\rho<\eta\mu\rho\Rightarrow-\rho+\eta\mu\rho>0$

$\Rightarrow-\rho+\eta\mu\rho+1>1 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f(-\rho+\eta\mu\rho+1)>f(1)$

$\Rightarrow-\rho>f(1)\Rightarrow f(1)+\rho<0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $f(1)+\rho-x^2<-x^2\leq 0\Rightarrow f(1)+\rho-x^2<0$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=x+1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

• Η φ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

• Είναι $f(1)+\rho-x^2<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$$\varphi(-1)=g(-1)=-\frac{1}{f(1)+\rho-1}>0 \text{ και}$$

$$\varphi(1)=g(1)-2=\frac{1}{f(1)+\rho-1}-2<0,$$

Άρα $\varphi(-1)\varphi(1)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)=\xi+1$.

Θέμα 2ο

Η συνάρτηση $f:\Delta\to R$ με Δ διάστημα είναι συνεχής και "1-1".

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g:R\to R$ για την οποία να ισχύει $g(g(x))+x^{2021}=0$ (1) για κάθε $x\in R$.

γ. Αν $\Delta=R$ και ισχύει $|f(x)-f(y)|\ge\kappa|x-y|$ (2) για κάθε $x,y\in R$, $\kappa>0$ σταθερός, τότε:

i. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iii. Δείξτε ότι f^{-1} είναι συνεχής.

iv. Αν $\alpha<\beta$ και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\left|\left(f^{-1}\right)'(\xi)\right|\le\dfrac{1}{\kappa}$.

Λύση

α. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in\Delta$ με $x_1<x_2<x_3$ και δεν ισχύει καμία από τις σχέσεις: $\begin{cases} f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)\\ f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)\end{cases}$, δηλαδή το $f(x_2)$ δεν περιέχεται μεταξύ των $f(x_1),f(x_3)$. Αφού η f είναι «1–1» θα έχουμε $f(x_1)\ne f(x_3)$.

Έστω $f(x_1)<f(x_3)$. Έτσι θα έχουμε μία από τις σχέσεις: $\begin{cases} f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)\ (3)\\ \text{ή}\\ f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)\ (4)\end{cases}$.

Οι περιπτώσεις $f(x_2)=f(x_1)$ ή $f(x_2)=f(x_3)$ αποκλείονται αφού η f είναι «1–1».

Έστω ότι ισχύει η (3). Στο $[x_2,x_3]$ εφαρμόζεται την f το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(x_2,x_3)$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)=f(x_1)\overset{f\ "1-1"}{\Rightarrow}\kappa=x_1$, άτοπο αφού $x_1<x_2<x_3$

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν ισχύει η (4). Όμοια αν $f(x_1)>f(x_3)$. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Έστω ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το R και για κάθε $x\in R$ να ισχύει η (1). Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow$

$$g(g(x_1))=g(g(x_2))\overset{(1)}{\Rightarrow}-x_1^{2021}=-x_2^{2021}\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η g είναι «1–1». Σύμφωνα με το ερώτημα α η g είναι γνησίως μονότονη.

Έστω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow$

$$g(g(x_1))<g(g(x_2))\Rightarrow -x_1^{2021}<-x_2^{2021}\Rightarrow x_1>x_2,$$

άτοπο. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g:R\to R$ για την οποία να ισχύει η (1) για κάθε $x\in R$.

γ. i. Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ λόγω της (2) έχουμε $|f(x_1)-f(x_2)|\ge\kappa|x_1-x_2|\Rightarrow$ $|x_1-x_2|\le 0\Rightarrow|x_1-x_2|=0\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι «1–1», οπότε αντιστρέφεται.

ii. Η f είναι συνεχής και «1–1». Σύμφωνα με το ερώτημα α η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

• Για $x<0\Rightarrow f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)-f(0)<0$.

Άρα $(2)\Rightarrow-(f(x)-f(0))\ge-\kappa x\Rightarrow$ $f(x)-f(0)\le\kappa x\Leftrightarrow f(x)\le\kappa x+f(0)$ (5).

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(\kappa x+f(0))=-\infty$, λόγω της (5) είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

• Για $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)-f(0)>0$.

Άρα $(2)\Rightarrow f(x)-f(0)\ge\kappa x\Rightarrow f(x)\ge\kappa x+f(0)$ (6).

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(\kappa x+f(0))=+\infty$, λόγω της (6) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το R.

Όμοια αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Αντικαθιστούμε στην (2) το x με $f^{-1}(x)$ και το y με $f^{-1}(y)$ και παίρνουμε:

$$|x-y|\ge\kappa\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\Rightarrow\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\le\frac{1}{\kappa}|x-y|$$

για κάθε $x,y\in R$. Έστω τυχαίο $x_0\in R$. Έχουμε

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\le\frac{1}{\kappa}|x-x_0|$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\kappa}|x-x_0|\le f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\le\frac{1}{\kappa}|x-x_0|$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\kappa}|x-x_0|+f^{-1}(x_0)\le f^{-1}(x)\le\frac{1}{\kappa}|x-x_0|+f^{-1}(x_0)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{\kappa}|x-x_0|+f^{-1}(x_0)\right)=f^{-1}(x_0)$

και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\kappa}|x-x_0|+f^{-1}(x_0)\right)=f^{-1}(x_0)$,

από το **κριτήριο της παρεμβολής** προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο x_0, οπότε είναι συνεχής στο R.

iv. Από το ερώτημα (γ iii) έχουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής και $\left|f^{-1}(\beta)-f^{-1}(\alpha)\right|\le\frac{1}{\kappa}|\beta-\alpha|$

$$\Rightarrow\left|\frac{f^{-1}(\beta)-f^{-1}(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\le\frac{1}{\kappa}\ \text{(I)}.$$

Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), οπότε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\left(f^{-1}\right)'(\xi)=\frac{f^{-1}(\beta)-f^{-1}(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

και λόγω της (I) προκύπτει ότι

$$\left|\left(f^{-1}\right)'(\xi)\right|\le\frac{1}{\kappa}.$$

Σχόλιο: Μία συνάρτηση $h: A\to R$ για την οποία υπάρχει σταθερά $M>0$ ώστε να ισχύει:

$|h(x)-h(y)|\le M|x-y|$ (*) για κάθε $x,y\in A$

ονομάζεται Lipschitz συνεχής.

Η σχέση (*) ονομάζεται **συνθήκη Lipschitz**. Ο Rudolf Lipschitz [14 Μαΐου 1832 – 7 Οκτωβρίου 1903] ήταν μαθηματικός που συνέβαλε στη μαθηματική ανάλυση. Η f^{-1} στο ερώτημα (γ iii) του παραπάνω θέματος είναι Lipschitz συνεχής.

Θέμα 3ο

Η συνάρτηση $f:[0,\kappa]\to R$, κ>0 είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και μη αντιστρέψιμη.

i. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο ορίζεται οριζόντια εφαπτομένη της C_f.

ii. Αν $M(\rho,f(\rho))$ σημείο της C_f στο οποίο ορίζεται οριζόντια εφαπτομένη της C_f, δείξτε ότι υπάρχει $\theta\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$(\kappa-\rho)f''[\rho+\theta(\kappa-\rho)]=f'(\kappa).$$

Λύση

i. Αφού η f δεν είναι αντιστρέψιμη δεν είναι «1–1» δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,\kappa]$ με $x_1\ne x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$. Έστω $x_1<x_2$.

Εφαρμόζεται για την f στο $[x_1,x_2]$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(x_1,x_2)\subseteq(0,\kappa)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho)=0$. Αυτό μας εξασφαλίζει το ζητούμενο. Όμοια αν $x_1>x_2$.

ii. Έχουμε $f'(\rho)=0$. Η f' είναι συνεχής στο $[\rho,\kappa]$ ως παραγωγίσιμη και παραγωγίσιμη στο (ρ,κ). Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho,\kappa)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi)=\frac{f'(\kappa)-f'(\rho)}{\kappa-\rho}\Rightarrow f''(\xi)=\frac{f'(\kappa)}{\kappa-\rho}$$

$$\Rightarrow(\kappa-\rho)f''(\xi)=f'(\kappa)\ (1).$$

$$\rho<\xi<\kappa\Leftrightarrow 0<\xi-\rho<\kappa-\rho\overset{\kappa-\rho>0}{\Leftrightarrow}0<\frac{\xi-\rho}{\kappa-\rho}<1.$$

Άρα υπάρχει $\theta=\frac{\xi-\rho}{\kappa-\rho}\Rightarrow\xi=\rho+\theta(\kappa-\rho)$ και είναι $\theta\in(0,1)$.

Η (1) γράφεται $(\kappa-\rho)f''[\rho+\theta(\kappa-\rho)]=f'(\kappa)$.

Θέμα 4ο

Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ είναι γνησίως αύξουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f''(x)\ne0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Αν $f'(1)>f'(0)$ και για κάποιο $c>0$ είναι $f(1)=f(0)+c$, να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)+f(1)=2f(x)$.

Λύση

Για τη συνάρτηση f' εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\kappa)=f'(1)-f'(0)>0$ (1).

Σύμφωνα με την υπόθεση η f'' διατηρεί στο $[0,+\infty)$ σταθερό πρόσημο και λόγω της (1) είναι

$f''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η εξίσωση ορίζεται στο $[0,+\infty)$. Το μηδέν δεν είναι ρίζα της εξίσωσης γιατί αν ήταν θα είχαμε $f(1)=f(0)\Rightarrow c=0$, άτοπο.

Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x_0=1$. Θα δείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και άλλη μία ρίζα $0<\rho\neq 1$, τότε έχουμε $f(\rho^2)+f(1)=2f(\rho)$

$f(1)-f(\rho)=f(\rho)-f(\rho^2)\Rightarrow$ (2).

- Αν $0<\rho<1$,τότε $0<\rho^2<\rho<1$.

Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής. Άρα η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho^2,\rho]$, $[\rho,1]$ και παραγωγίσιμη στα $(\rho^2,\rho),(\rho,1)$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1\in(\rho^2,\rho)$ και $\xi_2\in(\rho,1)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\rho)-f(\rho^2)}{\rho-\rho^2}\overset{(2)}{\Rightarrow}f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(\rho)}{\rho(1-\rho)},$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(\rho)}{1-\rho}.$$

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\text{ γν.αυξ.}}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow\frac{f(1)-f(\rho)}{\rho(1-\rho)}<$$

$$<\frac{f(1)-f(\rho)}{1-\rho}\overset{1-\rho>0}{\Rightarrow}\frac{f(1)-f(\rho)}{\rho}<f(1)-f(\rho)\ (3).$$

$\rho<1\overset{f\text{ γν.αύξ}}{\Rightarrow}f(\rho)<f(1)\Rightarrow f(1)\text{-}f(\rho)>0$. Έτσι, από την (3) παίρνουμε $\frac{1}{\rho}<1\overset{\rho>0}{\Rightarrow}\rho>1$, άτοπο.

- Αν $\rho>1$,τότε είναι $1<\rho<\rho^2$.

Εργαζόμαστε ανάλογα στα διαστήματα $[1,\rho]$ και $[\rho,\rho^2]$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη $x_0=1$.

Θέμα 5^o

Έστω η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=\alpha e^x+x^2+2x+2 \text{ με } \alpha>0}.$$

i. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha>0$ υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$, καθώς το α μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Λύση

$D_f=R$. Για τις τιμές του $\alpha>0$ η f εκφράζει μία οικογένεια συναρτήσεων. Για κάθε $\alpha\in(0,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\alpha e^x+2x+2$.

i. Θέλουμε να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης της οικογένειας των συναρτήσεων f έχει ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>0$, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει στο R ακριβώς μία ρίζα.

- Η f' είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$, οπότε υπάρχει $\kappa<0$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)<0$. Επιπλέον, $f'(0)=\alpha+2>0$, οπότε $f'(\kappa)f'(0)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\alpha e^x+2>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς το x_0 είναι μοναδικό σημείο στο R με $x_0<0$ και $f'(x_0)=0$, οπότε για κάθε τιμή του $\alpha>0$ υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της αντίστοιχης C_f, παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii. Η καθεμία από τις συναρτήσεις f με βάση το ερώτημα (i) έχει ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη. Ζητάμε να βρούμε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν τα σημεία επαφής.

Έστω $M(x_0,y_0)\in C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Τότε είναι $f'(x_0)=0$ και $x_0<0$.

Για κάθε $x\in R$, $f(x)-f'(x)=x^2$ (1).

Για $x=x_0$ από την (1) παίρνουμε:

$$f(x_0)-f'(x_0)=x_0^2\Leftrightarrow f(x_0)=x_0^2.$$

Άρα τα σημεία M βρίσκονται πάνω στο τμήμα της παραβολής με εξίσωση $y=x^2$ που βρίσκεται αριστερά του άξονα $y'y$.

Θέμα 6ο

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,\pi)$ ισχύει

$$e^x ημx - e^{ημx} < (x-1)e^x$$

β. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^x-1-e}{x}+\frac{1}{ημx}=\frac{(x-1)e^x}{xημx}+1 \quad (1)$$ **έχει στο** $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **μία τουλάχιστον ρίζα.**

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει: $|ημx|\le|x|$. Το "=" ισχύει στο μηδέν. Άρα για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $ημx<x$.

Για $x\in(0,\pi)$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t)=e^t, t\in[ημx,x].$$

Η f είναι συνεχής στο $[ημx,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(ημx,x)$ με $f'(t)=e^t$.

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(ημx,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(ημx)}{x-ημx}\Rightarrow\frac{e^x-e^{ημx}}{x-ημx}=e^\xi \quad (2).$$

$$ημx<\xi<x\Rightarrow e^\xi<e^x\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{e^x-e^{ημx}}{x-ημx}<e^x\overset{x-ημx>0}{\Rightarrow}$$

$$e^x-e^{ημx}<xe^x-e^xημx\Rightarrow e^xημx-e^{ημx}<(x-1)e^x$$

β. Η εξίσωση ορίζεται για $x\ne κ\pi, κ\in Z$.

$$(1)\Leftrightarrow(e^x-1-e)ημx+x=(x-1)e^x+xημx$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(e^x-1-e)ημx-(x-1)e^x+x-xημx$$

$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $g(0)=1>0$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-e-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}-1.$$

Από τη ανισότητα του ερωτήματος (α) για $x=\frac{\pi}{2}$ παίρνουμε $e^{\frac{\pi}{2}}-e-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}<0$, οπότε $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Έτσι έχουμε $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{e^{x_0}-1-e}{x_0}+\frac{1}{ημx_0}=\frac{(x_0-1)e^{x_0}}{x_0ημx_0}+1.$$

Θέμα 7ο

Η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ είναι παραγωγίσιμη και $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\ln f(x)+x$$

Δείξτε ότι:

i. Υπάρχει σημείο της C_g στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη παράλληλη στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

ii. Υπάρχει $\rho\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\rho)=\ln f(\alpha)+\frac{\alpha+\beta}{2}$$

iii. Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\rho)$, όπου ρ αυτό του ερωτήματος ii, τέτοιο ώστε $f'(\xi)>-\frac{f(\xi)}{2}$.

Λύση

i. Εφαρμόζεται για την f στο $[\alpha,\beta]$ το θεώρημα Rolle οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ είναι $D_g=R$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}+1$

Είναι $g'(x_0)=1$, που σημαίνει ότι στο σημείο $A(x_0,g(x_0))$ ορίζεται εφαπτομένη της C_g παράλληλη στην ευθεία $y=x$ η οποία είναι η διχοτόμος της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

ii. Αφού $f(\alpha)=f(\beta)$, $g(\alpha)+g(\beta)=$

$$2\ln f(\alpha)+\alpha+\beta \Rightarrow \frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}=\ln f(\alpha)+\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Είναι $g(\alpha)\neq g(\beta)$ γιατί αν ήταν $g(\alpha)=g(\beta)$, τότε $\ln f(\alpha)+\alpha=\ln f(\beta)+\beta \overset{f(\alpha)=f(\beta)}{\Leftrightarrow} \alpha=\beta$, άτοπο.

Το κλάσμα $\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}$ περιέχεται μεταξύ των $g(\alpha), g(\beta)$ οπότε από το θεώρημα των **ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\rho)=\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}\Rightarrow g(\rho)=\ln f(\alpha)+\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

iii. Εφαρμόζεται για την g στο $[\alpha,\rho]$ το θεώρημα της μέσης τιμής οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\rho)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(\rho)-g(\alpha)}{\rho-\alpha}\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+1=\frac{\beta-\alpha}{2(\rho-\alpha)} \quad (1).$$

Είναι $\frac{\beta-\alpha}{2(\rho-\alpha)}>\frac{1}{2}\overset{\rho-\alpha>0}{\Rightarrow}\beta-\alpha>\rho-\alpha\Rightarrow\rho<\beta$, που ισχύει αφού $\rho\in(\alpha,\beta)$. Άρα από την (1) παίρνουμε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+1>\frac{1}{2}\overset{f(\xi)>0}{\Rightarrow}f'(\xi)>-\frac{f(\xi)}{2}.$$

Θέμα 8^o (Θεώρημα Flett)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f'(\alpha)=f'(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}.$$

Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θέματος.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, & x\in(\alpha,\beta]\\ f'(\alpha), & x=\alpha\end{cases}$$

- Η g είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, αφού η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής.

Επιπλέον έχουμε

$$\lim_{x\to\alpha^+}g(x)=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=$$

$f'(\alpha)=g(\alpha)$. Άρα η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-\alpha)-(f(x)-f(\alpha))}{(x-\alpha)^2} \quad (1).$$

— Αν $g(\alpha)=g(\beta)$,τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\rho)=0$.

— Αν $g(\alpha)\neq g(\beta)$.

✓ Έστω ότι $g(\alpha)<g(\beta)$,τότε

$$f'(\alpha)<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{f'(\alpha)=f'(\beta)}{\Rightarrow}f'(\beta)<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$\Rightarrow f'(\beta)(\beta-\alpha)-(f(\beta)-f(\alpha))<0.$$

Έτσι από την (1) έχουμε

$$g'(\beta)<0\Rightarrow\lim_{x\to\beta^-}\frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}<0,$$

οπότε υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{g(x_1)-g(\beta)}{x_1-\beta}<0\overset{x_1-\beta<0}{\Rightarrow}g(x_1)-g(\beta)>0$$

$$\Rightarrow g(x_1)>g(\beta)\Rightarrow g(x_1)>g(\beta)>g(\alpha)$$

Στο $[\alpha,x_1]$ εφαρμόζεται για την g το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, οπότε υπάρχει $\rho_1\in(\alpha,x_1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho_1)=g(\beta)$.

Στο $[\rho_1,\beta]$ εφαρμόζεται για την g το θεώρημα του Rolle,οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $r\in(\rho_1,\beta)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(r)=0$. Τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ όπου $\xi=\rho$ ή $\xi=r$, τέτοιο ώστε

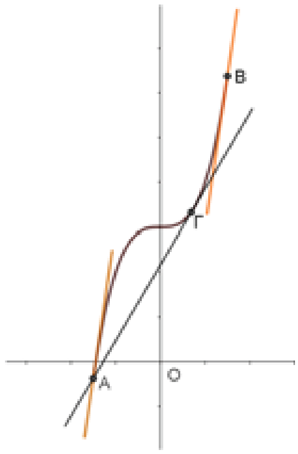
$$g'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)(\xi-\alpha)-(f(\xi)-f(\alpha))=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$$

✓ Όμοια εργαζόμαστε αν $g(\alpha)>g(\beta)$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και στα σημεία $A(\alpha,f(\alpha)),B(\beta,f(\beta))$ ορίζονται εφαπτόμενες της C_f παράλληλες , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Γ της C_f μεταξύ των A,B τέτοιο ώστε η ευθεία $A\Gamma$ να είναι εφαπτομένη της C_f στο Γ.



Θέμα 9ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to R$, $\alpha>0$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)+f'(-x)=0$ (1) για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$. Δείξτε ότι:

i. Η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

ii. Η εξίσωση $f'(x)=0$ (2) έχει στο $(-\alpha,\alpha)$ μοναδική ρίζα.

iii. Υπάρχει $\theta\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\alpha)=\alpha f''(\theta\cdot\alpha)$

Λύση

i. Για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ έχουμε: $-x\in[-\alpha,\alpha]$ και

$(1)\Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x)\Leftrightarrow f'(x)=[f(-x)]'\Leftrightarrow$

$f(x)=f(-x)+c$ (3), $c\in R$ σταθερά. Για $x=0$ από την (3) παίρνουμε $f(0)=f(0)+c\Leftrightarrow c=0$. Άρα για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει $f(-x)=f(x)$, συνθήκη που μας εξασφαλίζει ότι η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

ii. Από την (1) για $x=0$ παίρνουμε $f'(0)=0\cdot$ Άρα το 0 είναι ρίζα της (2) στο $(-\alpha,\alpha)$.

Αν υποθέσουμε ότι και ο $\rho\in(-\alpha,\alpha)$ με $\rho\neq 0$ π.χ. $\rho>0$ είναι ρίζα της (2), τότε για την f' έχουμε ότι είναι:

- Συνεχής στο $[0,\rho]$.
- Παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ και
- $f'(0)=f'(\rho)=0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\rho)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$, άτοπο αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$.

Όμοια αν $\rho<0$.

Άρα το 0 είναι μοναδική ρίζα της (2) στο $(-\alpha,\alpha)$

iii. Στο $[0,\alpha]$ η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\alpha)$ ώστε

$$f''(\xi)=\frac{f'(\alpha)-f'(0)}{\alpha-0}\Rightarrow f''(\xi)=\frac{f'(\alpha)}{\alpha}\ (4).$$

Έχουμε $0<\xi<\alpha\Rightarrow 0<\frac{\xi}{\alpha}<1$, οπότε υπάρχει $\theta\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\frac{\xi}{\alpha}=\theta\Rightarrow\xi=\theta\cdot\alpha$ και η (4) γράφεται $f'(\alpha)=\alpha f''(\theta\cdot\alpha)$.

Θέμα 10ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

Να δείξετε ότι:

i. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ για κάθε $x\in R$.

ii. Η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}

iii. Για κάθε x>0 ισχύει: $\sqrt{x^2+1}\cdot f^{-1}(x)>x$.

Λύση

i. Για κάθε $x\in R$ έχουμε: $f''(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)\Leftrightarrow(f'(x)+f(x))'=$

$f'(x)+f(x)\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=ce^x$ (1), όπου $c\in R$ σταθερά. Για $x=0$ από την (1) παίρνουμε

$$f'(0)+f(0)=c\Leftrightarrow c=1$$

Η (1) γράφεται

$$f'(x)+f(x)=e^x\Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x)+e^x f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' \Leftrightarrow$$

$e^x f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}+c_1$ (2) για κάθε $x\in R$, $c_1\in R$ σταθερά.

Για $x=0$ από τη (2) παίρνουμε

$$f(0)=\frac{1}{2}+c_1 \Leftrightarrow c_1=-\frac{1}{2}.$$

Η (2) γίνεται

$e^x f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ για κάθε $x\in R$.

ii. Για κάθε $x\in R$ $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι «1–1», οπότε αντιστρέφεται.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε

$$f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R.$$

Για $x\in D_f=R$ και $y\in f(R)=R$ έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=2y \Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x-1=0 \quad (3).$$

Λύνουμε την (3) ως προς e^x και βρίσκουμε

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

Για κάθε $y\in R$ ισχύει:

$y^2+1>y^2 \Rightarrow$

$$\sqrt{y^2+1}>\sqrt{y^2}=|y|\ge -y \Rightarrow y+\sqrt{y^2+1}>0,$$

Όμοια $\sqrt{y^2+1}>\sqrt{y^2}=|y|\ge y \Rightarrow y-\sqrt{y^2+1}<0$.

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in R$, δεκτή τιμή είναι η $e^x=y+\sqrt{y^2+1}>0$.

Άρα $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$.

Έτσι έχουμε $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in R$.

iii. Θέτουμε $f^{-1}(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$, $t\in R$.

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\left(f^{-1}\right)'(t)=\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)'=$$

$$\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Για κάθε $x>0$ η $f^{-1}(t)$ είναι συνεχής στο $[0,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$$\left(f^{-1}\right)'(\xi)=\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\xi)=\frac{f^{-1}(x)}{x}$$

Η $\left(f^{-1}\right)'$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\left(f^{-1}\right)''(t)=-\frac{\left(\sqrt{t^2+1}\right)'}{t^2+1} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)''(t)=-\frac{t}{\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}$$

Για κάθε $t\in(0,+\infty)$ $f''(t)<0$.

Άρα η $\left(f^{-1}\right)'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

$$0<\xi<x \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\xi)>\left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(x)}{x}>\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \sqrt{x^2+1}\cdot f^{-1}(x)>x.$$

Σχόλιο: Η συνάρτηση f στο παραπάνω θέμα ονομάζεται **υπερβολικό ημίτονο** και συμβολίζεται **sinh** και η f' ονομάζεται **υπερβολικό συνημίτονο** και συμβολίζεται **cosh**. Οι τιμές τους συμβολίζονται για το υπερβολικό ημίτονο **sinhx** και για το υπερβολικό συνημίτονο **coshx**. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται υπερβολικές γιατί τα σημεία $(\sinh x, \cosh x)$ είναι σημεία ενός κλάδου **υπερβολής**.

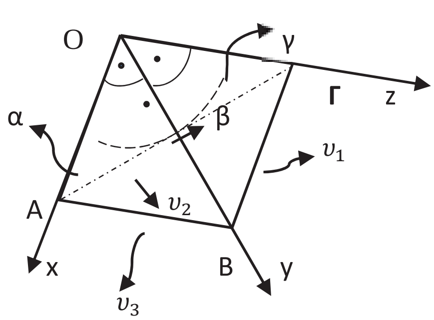
Το Βήμα του Ευκλείδη

Πυθαγόρειες τετράδες στο χώρο

Τσιλιακός Λευτέρης – Αθήνα

Δίνεται η τρισορθογώνια στερεά γωνία Ο, xyz. Στις Οx, Οy, Οz θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε (ΟΑ)=α, (ΟΒ)=β και (ΟΓ)=γ. Να βρεθούν οι α, β, γ ∈ Ν*, τέτοιοι ώστε να ισχύει στο Ν* η γνωστή σχέση: $(OAB)^2+(OB\Gamma)^2+(O\Gamma A)^2=(AB\Gamma)^2$ (1) (όπου (ΟΑΒ) = εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, κλπ.)

Λύση: Αρχικά θα αποδείξουμε την **(1)** γνωστή και ως Θεώρημα **Degois**.



(Σχήμα 1)

$$(OAB)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\beta\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\alpha^2\cdot\beta^2$$

$$(OB\Gamma)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\beta\cdot\gamma\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\beta^2\cdot\gamma^2$$

$$(O\Gamma A)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot\alpha\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\gamma^2\cdot\alpha^2$$

Οπότε: $(OAB)^2+(OB\Gamma)^2+(O\Gamma A)^2=\frac{1}{4}\left(\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^2\cdot\gamma^2+\gamma^2\cdot\alpha^2\right)$ **(2)**

Θέτουμε $B\Gamma=\upsilon_1$, $\Gamma A=\upsilon_2$, $AB=\upsilon_3$.

Είναι: $\upsilon_1^2=\beta^2+\gamma^2$, $\upsilon_2^2=\gamma^2+\alpha^2$, $\upsilon_3^2=\alpha^2+\beta^2$ **(3)** Θέτουμε: $\tau=\frac{\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3}{2}\Rightarrow\tau-\upsilon_1=\frac{-\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3}{2}$,

$\tau-\upsilon_2=\frac{\upsilon_1-\upsilon_2+\upsilon_3}{2}$, $\tau-\upsilon_3=\frac{\upsilon_1+\upsilon_2-\upsilon_3}{2}$ **(4)** Άρα από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε:

$$(AB\Gamma)^2=\left(\sqrt{\tau\cdot(\tau-\upsilon_1)\cdot(\tau-\upsilon_2)\cdot(\tau-\upsilon_3)}\right)^2\overset{(4)}{\Leftrightarrow}(AB\Gamma)^2=\frac{\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3}{2}\cdot\frac{-\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3}{2}\cdot\frac{\upsilon_1-\upsilon_2+\upsilon_3}{2}\cdot\frac{\upsilon_1+\upsilon_2-\upsilon_3}{2}\Leftrightarrow$$

$$(AB\Gamma)^2=\frac{1}{16}\cdot\left[(\upsilon_2+\upsilon_3)^2-\upsilon_1^2\right]\cdot\left[\upsilon_1^2-(\upsilon_2-\upsilon_3)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left[\left[\upsilon_1\cdot(\upsilon_2+\upsilon_3)\right]^2-\left[(\upsilon_2+\upsilon_3)(\upsilon_2-\upsilon_3)\right]^2-\upsilon_1^4+\left[\upsilon_1(\upsilon_2-\upsilon_3)\right]^2\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left[(\upsilon_1\upsilon_2+\upsilon_1\upsilon_3)^2-(\upsilon_2^2-\upsilon_3^2)^2-\upsilon_1^4+(\upsilon_1\upsilon_2-\upsilon_1\upsilon_3)^2\right]=(\dots)=\frac{1}{16}\cdot\left[2\upsilon_1^2\upsilon_2^2+2\upsilon_2^2\upsilon_3^2+2\upsilon_3^2\upsilon_1^2-\upsilon_1^4-\upsilon_2^4-\upsilon_3^4\right]\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{16}\left[2(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)+2(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)-(\beta^2+\gamma^2)^2-(\gamma^2+\alpha^2)^2-(\alpha^2+\beta^2)^2\right]=(\dots)$$

$$=\frac{1}{16}\left[4\alpha^2\beta^2+4\beta^2\gamma^2+4\gamma^2\alpha^2\right]=\frac{1}{4}\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)\overset{(2)}{=}(OAB)^2+(OB\Gamma)^2+(O\Gamma A)^2$$

Δηλαδή αποδείξαμε την **(1).**

Σχόλιο: Επειδή η εξίσωση $(AB\Gamma)^2=\frac{1}{4}\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)$ δεν αλλάζει με κυκλική μετατροπή των α, β, γ μπορούμε να θεωρήσουμε $\alpha\le\beta$ και ελεύθερο τον γ.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε ζεύγος (α,β) με $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ και $\alpha\le\beta$ υπάρχει ένα ή περισσότερα $\gamma\in\mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε ο (ΑΒΓ) να είναι φυσικός αριθμός.

Απόδειξη: Πράγματι έχουμε ότι: *Αν α, β άρτιοι θετικοί ακέραιοι, τότε καθένα από τα εμβαδά (ΟΑΒ), (ΟΒΓ), (ΟΓΑ) είναι φυσικός αριθμός. Για να είναι και το (ΑΒΓ) φυσικός αριθμός, θα πρέπει ο αριθμός $\frac{1}{4}\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)$ να είναι ίσος με K^2, ($K\in N^*$), οπότε και ο αριθμός $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ να είναι* *ίσος με τον $4K^2$ δηλαδή με έναν $\lambda^2, (\lambda \in N^*)$.* Έχουμε λοιπόν την διοφαντική εξίσωση:

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=\lambda^2 \Leftrightarrow \beta^2\left(\alpha^2+\gamma^2\right)=\lambda^2-\gamma^2\alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2\left(\alpha^2+\gamma^2\right)=(\lambda+\gamma\cdot\alpha)(\lambda-\gamma\cdot\alpha)$$

Οπότε μπορούν να ισχύουν τα συστήματα: $(\Sigma_1): \left.\begin{matrix}\lambda+\gamma\alpha=\beta^2\\ \lambda-\gamma\alpha=\alpha^2+\gamma^2\end{matrix}\right\}$ ή $(\Sigma_2): \left.\begin{matrix}\lambda+\gamma\alpha=\alpha^2+\gamma^2\\ \lambda-\gamma\alpha=\beta^2\end{matrix}\right\}$

Από το (Σ_1) παίρνουμε: $\lambda=\alpha^2+\gamma^2+\gamma\alpha \Rightarrow \left(\alpha^2+\gamma^2+\gamma\alpha\right)+\gamma\alpha=\beta^2 \Leftrightarrow (\alpha+\gamma)^2=\beta^2 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta \Leftrightarrow \gamma=\beta-\alpha$ **(5)**

Από το (Σ_2) παίρνουμε: $\lambda=\beta^2+\gamma\alpha \Rightarrow \left(\beta^2+\gamma\alpha\right)+\gamma\alpha=\alpha^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2=(\gamma-\alpha)^2 \Leftrightarrow \beta=\gamma-\alpha \Leftrightarrow \gamma=\beta+\alpha$ **(6)**

(Η ισότητα $\beta=\alpha-\gamma \Leftrightarrow \gamma=\alpha-\beta\leq 0$ απορρίπτεται αφού γ>0). Έτσι για κάθε τριάδα (α,β,γ) με α,β άρτιους, $\alpha<\beta$ και $\gamma=\beta-\alpha$ ή $\gamma=\beta+\alpha$, ο αριθμός $\frac{1}{4}\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)$ είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού και όπως αποδείξαμε ισούται με $(AB\Gamma)^2$. Άρα ο αριθμός (ΑΒΓ) είναι φυσικός αριθμός· έτσι η τετράδα (ΟΑΒ), (ΟΒΓ), (ΟΓΑ), (ΑΒΓ) είναι πυθαγόρεια αφού η (1) ισχύει για φυσικούς αριθμούς. Αυτή η τετράδα συναρτήσει των α,β,γ γράφεται:

$\frac{1}{2}\alpha\beta,\ \frac{1}{2}\beta\gamma,\ \frac{1}{2}\gamma\alpha,\ \frac{1}{2}\lambda$ [γιατί $(AB\Gamma)^2=\frac{1}{4}\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)=\frac{1}{4}\lambda^2 \Leftrightarrow (AB\Gamma)=\frac{1}{2}\lambda$)]

- Αν γ=β–α, τότε $\lambda=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma$ οπότε: $\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}\left[\alpha^2+(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)\alpha\right]=\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$

  και η Πυθαγόρεια τετράδα γράφεται: $\frac{1}{2}\alpha\beta,\ \frac{1}{2}\beta(\beta-\alpha),\ \frac{1}{2}\alpha(\beta-\alpha),\ \frac{1}{2}\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$ **(7)**

- Αν γ = β + α, τότε $\lambda=\beta^2+\alpha\gamma$ οπότε: $\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}\left(\beta^2+\gamma\alpha\right)=\frac{1}{2}\left[\beta^2+(\beta+\alpha)\alpha\right]=\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$

  και η Πυθαγόρεια τετράδα γράφεται: $\frac{1}{2}\alpha\beta,\ \frac{1}{2}\beta(\beta+\alpha),\ \frac{1}{2}\alpha(\beta+\alpha),\ \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$ **(8)**

1η Παρατήρηση: Από τις Πυθαγόρειες Τετράδες (7) και (8) προκύπτουν αμέσως και οι Πυθαγόρειες Τετράδες: $\alpha\beta,\ \beta(\beta\pm\alpha),\ \alpha(\beta\pm\alpha),\ \left(\alpha^2\pm\alpha\beta+\beta^2\right)$ **(9)**

2η Παρατήρηση: Αν α περιττός ή α,β περιττοί και θετικοί ακέραιοι, τότε από τις τριάδες (α,β, β±α) προκύπτουν οι Πυθαγόρειες Τετράδες: $\frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot 2\beta,\ \frac{1}{2}\cdot 2\beta(2\beta\pm 2\alpha),\ \frac{1}{2}\cdot 2\alpha(2\beta\pm 2\alpha),\ \frac{1}{2}\left[4\alpha^2\pm 4\alpha\beta+4\beta^2\right]$ ή καλύτερα

$2\alpha\beta,\ 2\beta(\beta\pm\alpha),\ 2\alpha(\beta\pm\alpha),\ 2\left[\alpha^2\pm\alpha\beta+\beta^2\right]$ **(10)**

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι με δεδομένους μόνο τους α,β (α < β) βρίσκουμε Πυθαγόρειες Τετράδες που θα επαληθεύουν την (1) αρκεί να ισχύει: $\gamma=\beta+\alpha$ ή $\gamma=\beta-\alpha$.

3η Παρατήρηση: Από κάθε τριάδα (α,β,γ) με $\gamma=\beta\pm\alpha$ και α < β προκύπτουν άμεσα οι Πυθαγόρειες Τετράδες: $\alpha\beta,\ \beta(\beta\pm\alpha),\ \alpha(\beta\pm\alpha),\ \left[\alpha^2\pm\alpha\beta+\beta^2\right]$

4η Παρατήρηση: Αν α = β = θ τότε έχουμε μία Πυθαγόρεια Τετράδα, που είναι η: $(\theta^2, 2\theta^2, 2\theta^2, 3\theta^2)$, αφού $\theta^4+4\theta^4+4\theta^4=(3\theta^2)^2$, που ισχύει.

1η Εφαρμογή: Αν στο (Σχήμα 1) είναι: α = 5 και β = 9, τότε ποιες τιμές πρέπει να έχει ο γ έτσι ώστε να ισχύει στο N* η σχέση (1) (δηλαδή να έχουμε μία ή περισσότερες Πυθαγόρειες Τετράδες στο χώρο); Ποιες είναι αυτές οι Πυθαγόρειες Τετράδες;

Λύση: Σύμφωνα με τη θεωρία που εκθέσαμε θα πρέπει: $\gamma=\beta+\alpha$ ή $\gamma=\beta-\alpha$. Δηλαδή γ = 14 ή γ = 4. Άρα μέσω των τύπων (9) έχουμε τις εξής Π_1 και Π_2 Πυθαγόρειες Τετράδες:

- $\Pi_1=\left(\alpha\beta,\beta(\beta+\alpha),\alpha(\beta+\alpha),\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)\right)=(45,126,70,151)$ Πράγματι $45^2+126^2+70^2=151^2$ και
- $\Pi_2=\left(\alpha\beta,\beta(\beta-\alpha),\alpha(\beta-\alpha),\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)\right)=(45,36,20,61)$ Πράγματι $45^2+36^2+20^2=61^2$

2η Εφαρμογή: Να βρεθεί η Πυθαγόρεια Τετράδα με τους μικρότερους όρους που προκύπτει από την (α, β, β–α)=(4, 10, 6).

Λύση: Μία Πυθαγόρεια Τετράδα που προκύπτει από τη δεδομένη τριάδα είναι η: $\left(\alpha\beta,\ \beta(\beta-\alpha),\ \alpha(\beta-\alpha),\ \left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)\right)$ δηλαδή η: 40,60,24,76 από την οποία προκύπτουν και οι εξής: 20,30, 12,38 και 10,15,6,19 που είναι και η ζητούμενη. Επαλήθευση: $10^2+15^2+6^2=19^2$, που ισχύει.

$$\text{Με } (\alpha,\beta,\gamma)=(4,10,6) \Rightarrow (AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=\frac{1}{2}(16-40+100)=38$$

Θεώρημα Zsigmondy

Μανώλης Πετράκης - μαθητής Α' Λυκείου, **2ου Λυκείου Αγρινίου**

Ο **Karl Zsigmondy** (1826–1925) σπούδασε Μαθηματικά στα πανεπιστήμια Βιέννης, Βερολίνου, Γκέτινγκεν και Σορβόννης. Εργάστηκε στο πανεπιστήμιο της Βιέννης από το 1894 μέχρι και το 1925.
Το 1882 ανακάλυψε το σχετικό θεώρημα Zsigmondy:
Έστω οι θετικοί ακέραιοι α,b και $n \geq 2$ με $\alpha > b$ και $(\alpha,b) = 1$ τότε:
Ο $\alpha^n - b^n$ έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη p ο οποίος δεν διαιρεί τον $\alpha^k - b^k$ για κάθε $k<n$.
Εξαιρούνται οι περιπτώσεις:

- **$2^6 - 1^6$**
- **$n = 2$ και $\alpha+b$ = δύναμη του 2**
  Ο α^n+b^n έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη p ο οποίος δεν διαιρεί τον α^k+b^k για κάθε $k<n$. Εξαίρεση 2^3+1^3.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετά πολύπλοκη και στηρίζεται στη θεωρία των κυκλοτομικών πολυωνύμων. Διάφορες αποδείξεις μπορούν να αναζητηθούν στην πανεπιστημιακή βιβλιογραφία και στο διαδίκτυο.

15 Εφαρμογές **με τι χρήση του θεωρήματος Zsigmondy**

1. Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n=3^n-2^n$ δεν περιέχει 3 όρους που να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. **[Ρουμανία 1994]**

Λύση

Αν η a_n ήταν γεωμετρική πρόοδος τότε θα ήταν $\alpha_n \alpha_{n+2} = \alpha^2_{n+1} \Leftrightarrow \alpha_n(3^{n+2}-2^{n+2}) = (3^{n+1}-2^{n+1})^2$
Από το θεώρημα ***Zsigmondy*** υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε:

$$p \mid 3^{n+2}-2^{n+2}\ (1) \text{ και } p \nmid 3^{n+1}-2^{n+1} \overset{p:\text{πρώτος}}{\Rightarrow} p \nmid (3^{n+1}-2^{n+1})^2 = \alpha_n(3^{n+2}-2^{n+2})$$

Άτοπο λόγω της (1). Έτσι η α_n δεν περιέχει 3 όρους που να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

2. Να βρείτε τις τριάδες των θετικών ακεραίων (α,b,p) έτσι ώστε $2^\alpha+p^b = 19^\alpha$ όπου p: πρώτος **[Ιταλία 2003]**

Λύση

$p^b=19^\alpha-2^\alpha$

- Αν $\alpha=1$ τότε $p=17$ και $b=1$
- Αν $\alpha \geq 2 \overset{\text{Zsigmondy}}{\Rightarrow}$ υπάρχει πρώτος q τέτοιος ώστε $q \mid 19^\alpha-2^\alpha$ και $q \nmid 19^1-2^1 = 17$

$\Leftrightarrow q \mid p^b$ και $q \nmid 17 \overset{p,q:\text{πρώτοι}}{\Leftrightarrow} p=q$ και $q \neq 17 \Rightarrow p \neq 17$ (1)

Αλλά $19 \equiv 2(\text{mod}17) \Leftrightarrow 19^\alpha \equiv 2^\alpha(\text{mod}17) \Leftrightarrow 19^\alpha-2^\alpha \equiv 0(\text{mod}17)$

$\Leftrightarrow p^b \equiv 0(\text{mod}17) \overset{p:\text{πρώτοι}}{\Leftrightarrow} p=17$ Άτοπο λόγω της (1). Έτσι $(\alpha,b,p)=(1,1,17)$

3. Να λυθεί στο $\mathbb{N}^*$ η εξίσωση: $5^x-3^y=z^2$ **[B.M.O 2009]**

Λύση

$z^2 \equiv 0, 1(\text{mod}3) \equiv 5^x-3^y \Leftrightarrow 5^x \equiv 0, 1(\text{mod}3) \overset{3 \nmid 5^x}{\Leftrightarrow} 5^x \equiv 1(\text{mod}3) \Leftrightarrow x=2w$ όπου $w \approx \mathbb{N}^*$

Άρα η αρχική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $5^{2w}-3^y=z^2 \Leftrightarrow (5^w+z)(5^w-z)=3^y$

Αν $3 \mid 5^w+z$ και $3 \mid 5^w-z$ τότε $3 \mid (5^w+z)+(5^w-z) = 2\cdot 5^w$ Αδύνατο

Αλλά $5^w-z \mid 3^y \Rightarrow 5^w-z = 1 \Leftrightarrow z=5^w-1$

Έτσι $5^x-3^y=z^2 \Leftrightarrow 5^{2w}-3^y = (5^w-1)^2 \Leftrightarrow 3^y+1=2\cdot 5^w \quad (1)$

- Αν y=1 η (1) είναι αδύνατη
- Αν $y=2 \overset{(1)}{\Rightarrow} w=1 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow z=4$
- Αν $y\geq 3 \overset{\text{Zsigmondy}}{\Rightarrow}$ Υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $p \mid 3^y+1$ και $p \nmid 3^2+1 \Leftrightarrow p \mid 2\cdot 5^w$, $p\neq 2$, $p\neq 5$ Άτοπο

Έτσι $(x,y,z) = (2,2,4)$

4. Αν p,q είναι 2 πρώτοι αριθμοί τέτοιοι ώστε q>p>2 δείξτε ότι ο $2^{pq}-1$ έχει τουλάχιστον 3 διακεκριμένους διαιρέτες.

Λύση

Είναι $2^p\equiv 1(\text{mod } 2^p-1) \Rightarrow 2^{pq}\equiv 1(\text{mod } 2^p-1) \Leftrightarrow 2^{pq}-1 \equiv 0(\text{mod } 2^p-1) \Leftrightarrow 2^p-1 \mid 2^{pq}-1 \quad (1)$

και ομοίως $2^q-1 \mid 2^{pq}-1 \quad (2)$

Είναι q>p>2 έτσι λόγω του θεωρήματος ***Zsigmondy***:

- Υπάρχει a:πρώτος τέτοιος ώστε $\alpha|2^p-1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha|2^{pq}-1$
- Υπάρχει b:πρώτος τέτοιος ώστε $b \mid 2^q-1$ και $b \nmid 2^p-1 \overset{(2)}{\Rightarrow} b \mid 2^{pq}-1$ και $\alpha\neq b$
- Υπάρχει c:πρώτος τέτοιος ώστε $c \mid 2^{pq}-1$, $c \nmid 2^p-1$, $c \nmid 2^q-1 \Leftrightarrow c \mid 2^{pq}-1$ και $\alpha\neq b\neq c\neq \alpha$

$\Rightarrow$ Οι α,b,c είναι 3 διακεκριμένοι πρώτοι διαιρέτες του $2^{pq}-1$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

5. Να βρεθούν οι τριάδες των θετικών ακεραίων (x,r,p,n) έτσι ώστε ο p να είναι πρώτος n,r>1 και $x^r-1=p^n$

Λύση

Α) Αν x=2 τότε $p^n+1=2^r$

- Αν n=3 και p=2 τότε r=3
- Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις λόγω του θεωρήματος του ***Zsigmondy*** υπάρχει πρώτος q τέτοιος ώστε $q \mid p^n+1$ και $q \nmid p+1 \Leftrightarrow q \mid 2^r$ και $q \nmid p+1 \Leftrightarrow q=2$ και $q \nmid p+1 \Leftrightarrow q=2$ και $2 \nmid p+1 \Leftrightarrow 2 \nmid p^n+1$

Άτοπο

Β) Αν $r=2$, $x+1=2^\alpha \Rightarrow x^2-1=p^n \Leftrightarrow 2^\alpha(x-1)=p^n \Rightarrow 2|p^n \overset{p:\text{πρώτος}}{\Rightarrow} p=2 \Rightarrow x+1=2^\alpha$, $x-1=2^b \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)-(x-1)=2^\alpha-2^b \Leftrightarrow 2=2^\alpha-2^b \Leftrightarrow 1= 2^{b-1}(2^{\alpha-b}-1) \Leftrightarrow b-1=0 \Leftrightarrow b=1 \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow n=3$

Γ) Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις σύμφωνα με το θεώρημα ***Zsigmondy***:

Υπάρχει q: πρώτος τέτοιος ώστε $q \mid x^r-1$ και $q \nmid x-1 \Leftrightarrow q \mid p^n$ και $q \nmid x-1 \Leftrightarrow q=p$ και $p \nmid x-1 \quad (1)$

Αλλά $x-1 \mid p^n \overset{p:\text{πρώτος}}{\Leftrightarrow} p \mid x-1$. Άτοπο λόγω της (1)

$\Rightarrow (x,r,p,n)=(2,3,2,3)$

6. Να βρεθούν όλες τις θετικές και ακέραιες λύσεις της $p^x-y^p=1$ [Τσεχοσλοβακία 1996]

Λύση

Η αρχική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $p^x=y^p+1$

- Αν y=2 και $p=3 \Rightarrow x=2$
- Αν $p=2 \Rightarrow y^2+1=2^x \overset{\text{Zsigmondy}}{\Rightarrow}$ Υπάρχει q: πρώτος τέτοιος ώστε $q \mid y^2+1=2^x$ και $q \nmid y+1 \overset{p:\text{πρώτος}}{\Rightarrow} q=2$ και $2 \nmid y+1 \Leftrightarrow y\equiv 0(\text{mod}2) \Leftrightarrow y^2\equiv 0(\text{mod}2) \Leftrightarrow 2 \nmid y^2+1$ Άτοπο.
- Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις λόγω του θεωρήματος ***Zsigmondy*** υπάρχει πρώτος q τέτοιος ώστε: $q \mid y^p+1 = p^x$ και $q \nmid y+1 \Leftrightarrow q = p$ και $p \nmid y+1 \quad (1)$

Αλλά y + 1 | y^p + 1 διότι p: περιττός $\Rightarrow$ y+1 | $p^x \overset{y+1\neq 1}{\Leftrightarrow}$ p | y+1 Άτοπο λόγω της (1)

$\Rightarrow$ (x,y,p)=(2,2,3)

7. Να βρεθούν οι πεντάδες (α,n,p,q,r) των θετικών ακεραίων για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^n-1=(\alpha^p-1)(\alpha^q-1)(\alpha^r-1)$$

Λύση

- Αν α=1 ισχύει για κάθε $n,p,q,r\in\mathbb{N}^*$.
- Αν p>n και α ≥2 $\Rightarrow$ $(\alpha^p-1)(\alpha^q-1)(\alpha^r-1)>\alpha^n-1$ Αδύνατο. Ομοίως για q>n και r>n.
- Αν n=p,α ≥ 2 $\Rightarrow$ $\alpha^q-1=\alpha^r-1=1$ $\Rightarrow$ (α,n,p,q,r) = (2,n,n,1,1) κυκλικά για τα p,q,r.
- Αν α=2, n=6 $\Rightarrow$ $63=(2^p-1)(2^q-1)(2^r-1)$.

Είναι $2^b-1\neq 9$ και $2^b-1\neq 21$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Έτσι παίρνουμε την μοναδική περίπτωση:

$2^p-1=3$, $2^q-1=3$, $2^r-1=7$ $\Leftrightarrow$ (α,n,p,q,r)=(2,6,2,2,3). Κυκλικά για τα p,q,r.

- Αν α ≥ 2 και n=2 $\Rightarrow$ $\alpha^2-1=(\alpha^p-1)(\alpha^q-1)(\alpha^r-1)$. Παίρνουμε υποχρεωτικά την περίπτωση: p=q=r=1 $\Rightarrow$ (α,n,p,q,r)=(3,2,1,1,1).
- Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις λόγω του θεωρήματος ***Zsigmondy*** παίρνουμε:

Υπάρχει πρώτος t τέτοιος ώστε $t\mid\alpha^n-1$ και $t\nmid\alpha^p-1$, $t\nmid\alpha^q-1$, $t\nmid\alpha^r-1$

$\Rightarrow t\mid\alpha^n-1$ και $t\nmid(\alpha^p-1)(\alpha^q-1)(\alpha^r-1)$ διότι t: πρώτος. Η εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση είναι αδύνατη.

$\Rightarrow$ (α,n,p,q,r)=(2,n,n,1,1),(1,n,p,q,r),(3,2,1,1,1),(2,6,2,2,3) με $n,p,q,r\in\mathbb{N}^*$, κυκλικά για τα p,q,r.

8. Να βρεθούν οι τριάδες των θετικών ακεραίων (α,m,n) που είναι τέτοιες ώστε $\alpha^m+1\mid(\alpha+1)^n$

[I.M.O. Shortlist 2000]

Λύση

- Αν m=1 ισχύει για κάθε $\alpha,n\in\mathbb{N}^*$
- Αν α=1 ισχύει για κάθε $m,n\in\mathbb{N}^*$
- Αν α = 2, m = 3 $\Rightarrow 9\mid 3^n \Rightarrow$ ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
- Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις λόγω του θεωρήματος ***Zsigmondy*** παίρνουμε:

Υπάρχει p: πρώτος τέτοιος ώστε $p\mid\alpha^m+1=(\alpha+1)^n$ και $p\nmid\alpha+1 \overset{p:\text{πρώτος}}{\Leftrightarrow} p\mid(\alpha+1)^n$ και $p\nmid(\alpha+1)^n$ Άτοπο

$\Rightarrow$ (α,m,n)=$(\alpha_1,1,n_1)(1,m_1,n_1)(2,3,n_2)$ όπου $\alpha_1,m_1,n_1\in\mathbb{N}^*$ και $n_2\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

9. Να βρεθούν οι μη αρνητικοί ακέραιοι x,y,z που ικανοποιούν την εξίσωση: $2^x+3^y=z^2$

[British M.O. 1996]

Λύση

- Αν x=0 $\Rightarrow 1+3^y=z^2 \Leftrightarrow 3^y=(z+1)(z-1)$

Αν 3 | z+1 και 3 | z–1 $\Rightarrow$ 3 | (z+1) – (z–1) = 2. Άτοπο $\overset{z-1\mid 3^y}{\Rightarrow}$ z–1=1 $\Leftrightarrow$ z = 2 $\Rightarrow$ y = 1

- Αν y=0 $\Rightarrow 2^x+1=z^2\Leftrightarrow 2^x=(z+1)(z-1)\Rightarrow z+1=2^\alpha,\ z-1=2^b\Rightarrow(z+1)-(z-1)=2^\alpha-2^b\Leftrightarrow 2=2^\alpha-2^b\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 1=2^{b-1}(2^{\alpha-b}+1)\overset{2\nmid 1}{\Rightarrow} b-1=0\Leftrightarrow b=1\Leftrightarrow z=3\Rightarrow x=3$
- Αν z = 0 η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ τότε $2^x+3^y=z^2\Rightarrow z\equiv 1(\text{mod}2)$ (1)

  $z^2\equiv 0,1(\text{mod}3)\equiv 2^x+3^y\equiv 2^x \overset{3\nmid 2^x}{\Rightarrow} 2^x\equiv 1(\text{mod}3)\Leftrightarrow x=2d\Rightarrow x\geq 2$ (2)

  $z^2\equiv 0,1(\text{mod}4)\equiv 2^x+3^y \overset{(2)}{\equiv} 3^y \overset{4\nmid 3^y}{\Leftrightarrow} 3^y\equiv 1(\text{mod}4)\Leftrightarrow y=2\alpha$

Άρα η αρχική γράφεται ισοδύναμα: $z^2-3^{2\alpha}=2^x\Leftrightarrow(z-3^\alpha)(z+3^\alpha)=2^x$

$\Rightarrow z+3^\alpha=2^b$ και $z-3^\alpha=2^c$ με $b>c \Rightarrow (z-3^\alpha)+(z+3^\alpha)=2^b+2^c \Rightarrow 2z=2^b+2^c \Leftrightarrow z=2^{b-1}+2^{c-1}$ με $b>c$. Λόγω της (1) είναι:

$2^{b-1}+2^{c-1} \equiv 1(\mathrm{mod}2) \overset{b>c\geq 1}{\Leftrightarrow} +2^{c-1} \equiv 1(\mathrm{mod}2) \Leftrightarrow c=1 \Leftrightarrow z=3^\alpha+2$

Αντικαθιστώντας στην αρχική: $2^x+3^y=(3^\alpha+2)^2 \Leftrightarrow 2^x+3^{2\alpha}=3^{2\alpha}+4\cdot 3^\alpha+4 \Leftrightarrow 2^x=4\cdot 3^\alpha+4 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2^{x-2}=3^\alpha+1$

- Αν $\alpha=1 \Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow (x,y,z)=(4,2,5)$
- Αν $\alpha\geq 2 \overset{Zsigmondy}{\Rightarrow}$ Υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $p \mid 3^\alpha+1$ και $p \nmid 3+1 \Leftrightarrow p \mid 2^{x-2}$ και $p \nmid 4$ με p:πρώτο. Άτοπο
  $\Rightarrow (x,y,z)=(0,1,2),(3,0,3),(4,2,5)$

10. Αν $b,m,n\in\mathbb{N}$, $b>1$, $m\neq n$ και οι b^m-1, b^n-1 έχουν το ίδιο σύνολο πρώτων διαιρετών, δείξτε ότι ο $b+1$ είναι δύναμη του 2. [I.M.O. Shortlist 1997]

Λύση

- Αν ο $b=2$ και $m=6$ τότε πρέπει οι 2^n-1 και $2^6-1=63$ να έχουν το ίδιο σύνολο διαιρετών. Παίρνοντας όλες τις τιμές του n μικρότερες του $m=6$, βρίσκουμε ότι είναι αδύνατο.
- Αν ο $b+1$ δεν είναι δύναμη του 2 και δεν ισχύει η παραπάνω περίπτωση από το θεώρημα ***Zsigmondy*** υπάρχει p πρώτος τέτοιος ώστε $p \mid b^m-1$ και $p \nmid b^n-1$. Άρα οι b^m-1 και b^n-1 δεν έχουν το ίδιο σύνολο διαιρετών.

$\Rightarrow b+1=2^\alpha$ (Παράδειγμα $(b,m,n)=(7,2,1)$)

11. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι θετικές και ακέραιες λύσεις της: $x^{2009}+y^{2009}=7^z$

Λύση

- Αν $(x,y)=1 \overset{Zsigmondy}{\Rightarrow}$ Υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $p \mid x^{2009}+y^{2009}=7^z$ και $p \nmid x+y$.
  $\Rightarrow p=7$ και $7 \nmid x+y \overset{x+y>1}{\Leftrightarrow} x+y \nmid 7^z \Leftrightarrow x+y \nmid x^{2009}+y^{2009}$ Άτοπο διότι 2009: περιττός.
- Αν $(x,y)=k$ και $\dfrac{x}{k}=x_1$, $\dfrac{y}{k}=y_1$ με $k\geq 2$ και $(x_1,y_1)=1$ τότε:
  $x^{2009}+y^{2009}=7^z \Leftrightarrow k^{2009}(x_1^{2009}+y_1^{2009})=7^z \Rightarrow k^{2009} \mid 7^z \Rightarrow k=7^\alpha \Leftrightarrow 7^{2009a}(x_1^{2009}+y_1^{2009})=7^z$
  $\overset{z-2009\alpha=z_1}{\Leftrightarrow} x_1^{2009}+y_1^{2009}=7^{z_1}$ με $(x_1,y_1)=1$. Αδύνατο όπως παραπάνω.

12. Για ποιους θετικούς ακέραιους α,b και $c\geq 2$ ισχύει: $\alpha^b+1=(\alpha+1)^c$

Λύση

- Αν $b=1 \Rightarrow \alpha+1=(\alpha+1)^c \Leftrightarrow c=1<2$ Αδύνατο
- Αν $\alpha=2$, $b=3 \Rightarrow c=2$
- Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις λόγω του θεωρήματος ***Zsigmondy*** υπάρχει p πρώτος τέτοιος ώστε
  $p \mid \alpha^b+1$ (1) και $p \nmid \alpha+1 \overset{p:\text{πρώτος}}{\Leftrightarrow} p \nmid (\alpha+1)^c \Leftrightarrow p \nmid \alpha^b+1$ Αδύνατο λόγω της (1)
  $\Rightarrow(\alpha,b,c)=(2,3,2)$

13. Να βρείτε τους $m,n \approx \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε: $3^m-5^n=x^2$

Λύση

$x^2\equiv 0,1(\mathrm{mod}4)\equiv 3^m-5^n\equiv 3^m-1 \Leftrightarrow 3^m\equiv 1,2(\mathrm{mod}4) \overset{2\nmid 3^m}{\Leftrightarrow} 3^m\equiv 1(\mathrm{mod}4) \Leftrightarrow m=2k$ με $k\in\mathbb{N}^*$

Άρα η αρχική γράφεται ισοδύναμα:

$3^{2k}-5^n=x^2 \Leftrightarrow 5^n=(3^k-x)(3^k+x)$

Αν $5 \mid 3^k - x$ και $5 \mid 3^k + x \Rightarrow 5 \mid (3^k+x) + (3^k-x) = 2\cdot 3^k$ Αδύνατο

$\overset{3^k - x \mid 5^n}{\Rightarrow} 3^k - x = 1 \Leftrightarrow x = 3^k + 1$

Έτσι η αρχική γράφεται: $3^{2k} - 5^n = (3^k+1)^2 \Leftrightarrow 5^n + 1 = 2\cdot 3^k$

- Αν $n \geq 2 \overset{\text{Zsigmondy}}{\Rightarrow}$ Υπάρχει p:πρώτος τέτοιος ώστε $p \mid 5^n+1$ και $p \nmid 5+1=6 \Leftrightarrow p \mid 2\cdot 3^k$ και $p \neq 2$, $p \neq 3$ Άτοπο.
- Αν n=1 παίρνουμε $k = 1 \Rightarrow (m,n)=(2,1)$ η οποία είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης.

14. Για ποιους θετικούς ακέραιους m,n,l,k με l>1 ισχύει: $(m^n+1)^l = m^k+1$

Λύση

$m>0$, $l>1 \Rightarrow m^n+1 < (m^n+1)^l = m^k+1 \Rightarrow m^n+1 < m^k+1 \Leftrightarrow n<k$ (1)

- Αν $m = 1$ τότε $2^l = 2$. Αδύνατο διότι $l>1$
- Αν $m = 2$, $k=3 \Rightarrow 9 = (2^n+1)^l \overset{l>1}{\Rightarrow} (m,n,l,k)=(2,1,2,3)$

Σε κάθε άλλη περίπτωση λόγω του θεωρήματος ***Zsigmondy*** και της σχέσης (1): Υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $p \mid 1+m^k$ και $p \nmid 1+m^n \overset{p:\text{πρώτος}}{\Leftrightarrow} p \mid (m^k+1)^l$ και $p \nmid m^n+1$. Άτοπο

$\Rightarrow (m,n,l,k)=(2,1,2,3)$

15. Για ποιους θετικούς ακέραιους ισχύει: $p^\alpha - 1 = 2^n(p-1)$

Λύση

Α) Αν p=2 Αδύνατο για $\alpha, n \in \mathbb{N}^*$.

Β) Αν $p \geq 3$ και $\alpha \geq 3$ από το θεώρημα ***Zsigmondy*** υπάρχει πρώτος q τέτοιος ώστε $q \mid p^\alpha - 1$ και $q \nmid p-1$. Αν $q=2 \Rightarrow 2 \mid p^\alpha - 1$ και $2 \nmid p-1$. Άτοπο.

$\Rightarrow q \neq 2$ (1). Αλλά $q \mid p^\alpha - 1$, $q \nmid p-1 \overset{p-1 \mid p^\alpha - 1}{\Rightarrow} q \mid \dfrac{p^\alpha - 1}{p-1} \Leftrightarrow q \mid 2^n \overset{(1)}{\Rightarrow}$ Αδύνατο.

Γ) Αν $\alpha = 1 \Rightarrow p-1 = 2^n(p-1) \Leftrightarrow 2^n = 1$ Αδύνατο.

Δ) Αν $\alpha = 2 \Rightarrow p^2 - 1 = 2^n(p-1) \Leftrightarrow p = 2^n - 1$

- Αν $n=km$ με $k,m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ (n: σύνθετος) τότε $2^k \equiv 1 (\text{mod } 2^k-1) \Leftrightarrow 2^{km} \equiv 1 (\text{mod } 2^k-1) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 2^{km} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 2^k - 1) \Leftrightarrow 2^n - 1 \equiv 0 (\text{mod } 2^k - 1)$ με $k \geq 2$. Ομοίως $2^n - 1 \equiv 0 (\text{mod } 2^m - 1) \Rightarrow 2^n - 1$ σύνθετος.
  Άρα η $2^n - 1 = p$ είναι αδύνατη για n: σύνθετο.
- Αν n: πρώτος τότε ο p είναι υποχρεωτικά ***πρώτος Mersenne***
  $\Rightarrow (\alpha,n,p)=(2,n_1,p_1)$ όπου n_1: πρώτος, τέτοιος ώστε ο $p_1 = 2^{n_1} - 1$ να είναι πρώτος Mersenne

Παρατήρηση: πρώτος Mersenne ονομάζεται ένας πρώτος αριθμός της μορφής $2^p - 1$, προς τιμήν του Γάλλου μαθηματικού Marin Mersenne. Έχουν βρεθεί μέχρι σήμερα 51 πρώτοι Mersenne. Ο 51^{ος} είναι ο $2^{82589933}$ -1 (από το **GIMPS,** Φεβρουάριος **2021** και βρέθηκε τον Δεκέμβριο του **2018** με 24.862.048 ψηφία).

Βιβλιογραφία:

1. *Andy Loo Zsigmondy's Theorem, Mathematical Excalibur, Volume 16, Number 4, 2012*
2. *Bart Michels, Zsigmondy's Theorem, https://pommetatin.be/files/zsigmondy_en.pdf, 2014*
3. *Pisolve, The Zsigmondy Theorem, https://www.scribd.com/document/367670824/Zsigmondy–Theorem–pdf, 2011*

Μία διερεύνηση των αριθμών Fibonacci

Γιώργος Κατσανεβάκης - Χανιά

Οι αριθμοί / όροι της ακολουθίας Fibonacci ή απλά αριθμοί Fibonacci, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Α/Α αριθμών Fibonacci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…n
Αριθμοί Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	… F_n

Για τους αριθμούς Fibonacci ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (1)$$

$$F_n{}^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n-1} \qquad (2)$$

όπου οι F_{n-1} , F_n και F_{n+1} είναι φυσικοί αριθμοί.

Όταν ο αύξων αριθμός n είναι περιττός τότε n–1 είναι άρτιος και η (2) γράφεται:

$$F_n{}^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + 1 \qquad (3)$$

Ενώ όταν ο n είναι άρτιος ο n–1 είναι περιττός και η (2) γράφεται:

$$F_n{}^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} - 1 \qquad (4)$$

Οι ισότητες (3) και (4) συμπτύσσονται στην

$$F_n{}^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} \pm 1 \qquad (5)$$

FIBONACCI, έζησε τον 12ο αιώνα

Για λόγους καλλίτερης εποπτείας θέτουμε:

$F_{n-1} = x$, $F_n = y$ και $F_{n+1} = z$

Οπότε οι ισότητες (1) και (5) γράφονται:

$z = y + x$ (6)

$y^2 = xz \pm 1$ (7)

Από τις (6) και (7) έχουμε τις παρακάτω ισότητες:

$y^2 = x(x+y) + 1$ (8) για n περιττό

$y^2 = x(x+y) - 1$ (9) για n άρτιο

Στις (8) και (9) θεωρούμε άγνωστο το $y = F_n$ και γνωστό το $x = F_{n-1}$ οπότε προκύπτουν οι παρακάτω δύο δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

$y^2 - xy - (x^2 + 1) = 0$ (10) για n περιττό

$y^2 - xy - (x^2 - 1) = 0$ (11) για n άρτιο

Α! Διερεύνηση της (10)

Η διακρίνουσα της (10) είναι:

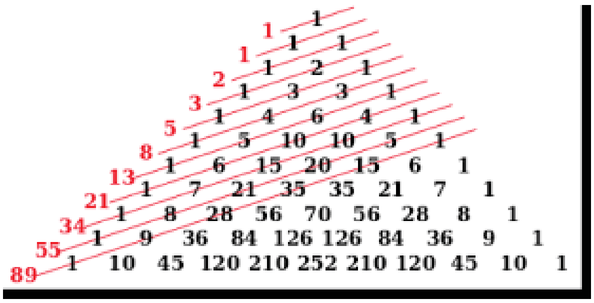
$\Delta = x^2 + 4(x^2 + 1) = 5x^2 + 4$ (12)

για n περιττό και αναφέρεται στην τιμή του x στην άρτια θέση n – 1 λόγω της $x = F_{n-1}$.

Οι ρίζες της (10) είναι: $y_{1,2} = \dfrac{x \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ (13)

Επειδή είναι $x = F_{n-1}$, $y = F_n$, $z = F_{n+1}$, ακέραιοι αριθμοί πρέπει καταρχήν η $\sqrt{\Delta}$ της (13) να είναι ακέραιος, δηλαδή η Δ να είναι τέλειο τετράγωνο. Καταλήγουμε επομένως στο παρακάτω

1ο συμπέρασμα: Για τους αριθμούς / όρους $x = F_{n-1}$ της ακολουθίας Fibonacci που βρίσκονται στις άρτιες θέσεις n – 1, όταν το n είναι σε περιττή θέση, ισχύει η ισότητα: $5x^2 + 4 = \alpha^2$ (14)
όπου το α είναι ακέραιος αριθμός



Ισχύει και το αντίστροφο: Αν ένας αριθμός x ικανοποιεί την ισότητα (14) τότε ισχύει $x = F_{n-1}$, όπου ο F_{n-1} είναι ο όρος της ακολουθίας Fibonacci στην άρτια θέση n – 1 με την προϋπόθεση ότι το n είναι σε περιττή θέση της ακολουθίας.
Επίσης επειδή είναι $y = F_n$ φυσικός αριθμός, είναι και οι τιμές της (13) ακέραιοι αριθμοί.

Β! Διερεύνηση της (11)

Με παρόμοιους συλλογισμούς καταλήγουμε στο παρακάτω

2ο συμπέρασμα

Όταν το n είναι άρτιο, δηλαδή το n – 1 είναι περιττό, τότε για τους αριθμούς / όρους $x = F_{n-1}$ της ακολουθίας Fibonacci ισχύει η ισότητα: $5x^2 - 4 = \alpha^2$ (15)
όπου το α είναι ακέραιος αριθμός.
Επίσης είναι ακέραιοι αριθμοί και οι ρίζες της (11), λόγω της $y = F_n$

Γ! Εφαρμογή των ανωτέρω. Παραδείγματα.

Γ.1. Περίπτωση της (10): $y^2 - xy - (x^2 + 1) = 0$

n	$x = F_{n-1}$	Μορφή της (10)	Ρίζες y_1, y_2 της (10)
3	1	$y^2 - y - 2 = 0$	2, – 1
5	3	$y^2 - 3y - 10 = 0$	5, – 2
7	8	$y^2 - 8y - 65 = 0$	13, – 5
9	21	$y^2 - 21y - 442 = 0$	34, – 13
15	377	$y^2 - 377y - 142.130 = 0$	610, – 233
19	2584	$y^2 - 2584y - 6.677.057 = 0$	4181, – 1597
21	6765	$y^2 - 6754y - 45.765.226 = 0$	10.946, – 4181
29	317211	$y^2 - 317811y - 101.003.831.722 = 0$	514.229, – 196.418

Γ.2. Περίπτωση της (11) : $y^2 - xy - (x^2 - 1) = 0$

n	$x = F_{n-1}$	Μορφή της (11)	Ρίζες y_1, y_2 της (11)
2	1	$y^2 - y = 0$	1, 0
4	2	$y^2 - 2y - 3 = 0$	3, – 1
6	5	$y^2 - 5y - 24 = 0$	8, – 3
8	13	$y^2 - 13y - 168 = 0$	21, – 8
14	233	$y^2 - 233y - 54.288 = 0$	377, – 144
18	1597	$y^2 - 1597y - 2.550.408 = 0$	2584, – 987
20	4181	$y^2 - 4181 - 17.480.760 = 0$	6765, – 2524
28	196.418	$y^2 - 196.418y - 38.580.030.723 = 0$	317.811, – 121.393

Παρατηρούμε ότι και στους δύο πίνακες, επειδή είναι $y_1 + y_2 = x$, έχουμε $x = F_{n-1}$, $y_1 = F_n$ και $y_2 = -F_{n-2}$. Επομένως είναι $F_n - F_{n-2} = F_{n-1}$ και τελικά $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Δ! Δημιουργία της ακολουθίας Fibonacci όταν γνωρίζουμε μόνο ένα οποιοδήποτε όρο της

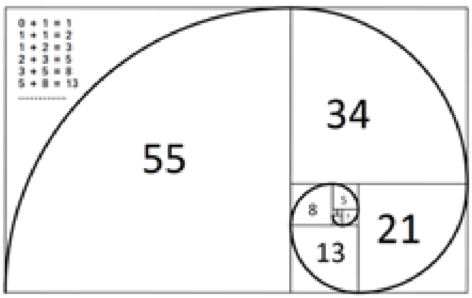
Αν μας δοθεί οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός x, όσο μεγάλος και αν είναι, για να διαπιστώσουμε αν είναι αριθμός Fibonacci, εργαζόμαστε ως εξής:

Εξετάζουμε αν η παράσταση $5x^2 + 4$ ή η παράσταση $5x^2 - 4$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Αν καμία από τις δύο παραστάσεις δεν είναι τέλειο τετράγωνο τότε ο αριθμός x δεν είναι αριθμός Fibonacci.

Αν η μία από τις δύο αυτές παραστάσεις είναι τέλειο τετράγωνο, τότε ο αριθμός x είναι ο αριθμός Fibonacci $x = F_{n-1}$.

Ειδικότερα:



α) Αν είναι τέλειο τετράγωνο η παράσταση $5x^2 + 4$ τότε θέτουμε την τιμή του x στη δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$y^2 - xy - (x^2 + 1) = 0 \qquad (10)$$

και βρίσκουμε τις ρίζες της y_1 και y_2 όπου είναι $y_1 > 0$, $y_2 < 0$ και $y_1 + y_2 = x$ λόγω της (10)

Στην περίπτωση αυτή είναι: $x = F_{n-1}$, $y_1 = F_n$ και $y_2 = -F_{n-2}$ όπου το n είναι περιττός αριθμός.

Ακολούθως από τη γενική ισότητα: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ δημιουργούμε ολόκληρη την ακολουθία Fibonacci τόσο δεξιά όσο και αριστερά του αριθμού $x = F_{n-1}$.

β) Αν είναι τέλειο τετράγωνο η παράσταση $5x^2 - 4$ τότε θέτουμε την τιμή του x στη δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 - xy - (x^2 - 1) = 0 \qquad (11)$

και εργαζόμεθα όπως στην προηγούμενη περίπτωση (α).

Στην περίπτωση (β) το n των F_{n-1}, F_n και F_{n-2} είναι άρτιος αριθμός.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 349 (ΤΕΥΧΟΣ 115)

α. Σε κανονικό πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$, $\nu \geq 3$ ισχύει $A_1A_5^2 = A_1A_2(A_1A_{10} + A_1A_{12})$. Να βρείτε τον αριθμό ν.

β. Το κανονικό επτάγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν K είναι το αντιδιαμετρικό σημείο της κορυφής A_1 να αποδείξετε ότι $KA_2 - KA_3 + KA_4 = R$

Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

α. Αν θέσουμε $x = \dfrac{\pi}{\nu}$ τότε έχουμε:

$A_1A_2 = 2R\eta\mu x$, $A_1A_5 = 2R\eta\mu 4x$, $A_1A_{10} = 2R\eta\mu 9x$ και $A_1A_{12} = 2R\eta\mu 11x$.

Η δοσμένη ισότητα γράφεται:

$$\eta\mu^2 4x = \eta\mu x \cdot \eta\mu 9x + \eta\mu x \cdot \eta\mu 11x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu 8x = \sigma\upsilon\nu 8x - \sigma\upsilon\nu 10x + \sigma\upsilon\nu 10x - \sigma\upsilon\nu 12x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 12x - 2\sigma\upsilon\nu 8x + 1 = 0$$

Αν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu 4x = t$, τότε $t \in (0, 1)$ και η επιλύουσα της εξίσωσης είναι η

$$4t^3 - 3t - 2(2t^2 - 1) + 1 = 0$$

που είναι ισοδύναμη με την $(t-1)(4t^2-3) = 0$ και η μοναδική της ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ είναι $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Έτσι, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{4\pi}{\nu} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6},\ \kappa \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \nu(12\kappa \pm 1) = 24 \Leftrightarrow \nu = \frac{24}{12\kappa \pm 1}$$

που είναι θετικός ακέραιος μόνο όταν $\kappa = 0$ και δεδομένου ότι $\nu \geq 3$, έχουμε $\nu = 24$.

β. Τα τρίγωνα A_1A_2K, A_1A_3K και A_1A_4K είναι ορθογώνια με υποτείνουσα $A_1K = 2R$. Επιπλέον,

$$A_1\hat{K}A_2 = \frac{\pi}{7},\ A_1\hat{K}A_3 = \frac{2\pi}{7},\ A_1\hat{K}A_4 = \frac{3\pi}{7}$$

οπότε $KA_2 - KA_3 + KA_4 =$

$$= 2R\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}\right)$$

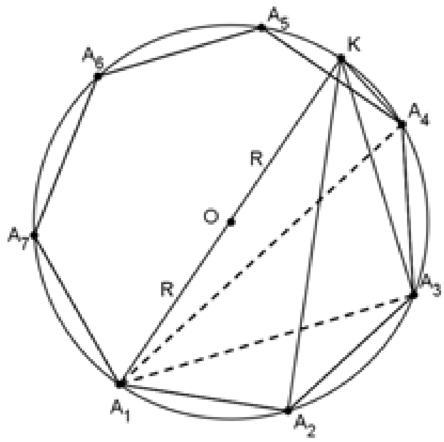
$$= 2R\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}\right)$$

$$= R\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{14} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} - \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{14} - \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{14} + \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{14} + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{14}\right)$$

$$= R\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14} + \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{14}\right) =$$

$$= R\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) = R$$

που είναι το ζητούμενο.



Λύση έστειλαν επίσης, οι συνάδελφοι **Τσιώλης Γεώργιος** – Τρίπολη και **Λαγογιάννης Βασίλης** – Αγ. Παρασκευή

ΑΣΚΗΣΗ 350 (ΤΕΥΧΟΣ 115)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που είναι ανά δυο διαφορετικοί μεταξύ τους, ισχύει

$$\left(\frac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\beta-\gamma}{\beta-\gamma}\right)^2 + \left(\frac{2\gamma-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 \geq 5$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

Αν θέσουμε $\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} = x$, $\dfrac{\beta}{\beta-\gamma} = y$, $\dfrac{\gamma}{\gamma-\alpha} = z$ τότε έχουμε:

$$(x-1)(y-1)(z-1) = \frac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\gamma}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\beta}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}=xyz$$

οπότε: $(xy-x-y+1)(z-1)=xyz\Rightarrow$

$$\Rightarrow -xy-xz-yz+x+y+z=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+z=xy+xz+yz+1$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\left(\frac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right)^2+\left(\frac{2\beta-\gamma}{\beta-\gamma}\right)^2+\left(\frac{2\gamma-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2$$

$$=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$$

$$=x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+3$$

$$=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2+3=$$

$$=(x+y+z)^2+5\geq 5$$

Σημείωση σύνταξης:

Η αντικατάσταση στο προηγούμενο πρόβλημα έδωσε **λύση** πολύ **πιο απλή** από οποιαδήποτε άλλη. Αυτό συμβαίνει συχνά σε προβλήματα που περιέχουν **συμμετρικές** παραστάσεις. Το ζητούμενο είναι, σε κάθε περίπτωση, η εύρεση της κατάλληλης αντικατάστασης που αποτελεί τον **μίτο της Αριάδνης** για την επίλυση του προβλήματος. Στο βιβλίο PROBLEMS FROM THE BOOK των Andreescu – Despinescu συναντάμε μερικές τέτοιες χρήσιμες αντικαταστάσεις. Έτσι, για παράδειγμα:

- Η συνθήκη $\alpha\beta\gamma=1$ μπορεί να προσομοιωθεί μέσω της προφανούς αντικατάστασης

$$\alpha=\frac{x}{y},\ \beta=\frac{y}{z},\ \gamma=\frac{z}{x}$$

- Η συνθήκη $xyz=x+y+z+2$ με $x,y,z>0$ μπορεί να γραφεί

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1$$

και αν θέσουμε

$$\frac{1}{1+x}=\alpha,\ \frac{1}{1+y}=\beta,\ \frac{1}{1+z}=\gamma$$

παίρνουμε την αντικατάσταση

$$x=\frac{\beta+\gamma}{\alpha},\ y=\frac{\gamma+\alpha}{\beta},\ z=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

η οποία εμπεριέχει την αρχική συνθήκη.

- Η συνθήκη $xy+yz+zx+2xyz=1$ με $x,y,z>0$ μπορεί να γραφεί

$$\frac{1}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2$$

που είναι η προηγούμενη για τους αντίστροφους των αριθμών x, y, z. Έτσι, η ενδεδειγμένη αντικατάσταση εδώ είναι η

$$x=\frac{\alpha}{\beta+\gamma},\ y=\frac{\beta}{\gamma+\alpha},\ z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$$

Παράδειγμα

Έστω x, y, z θετικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$xy+yz+zx+2xyz=1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 4(x+y+z)$$

Λύση

Με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$x=\frac{\alpha}{\beta+\gamma},\quad y=\frac{\beta}{\gamma+\alpha},\quad z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$$

η αποδεικτέα γράφεται

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\geq 4\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)$$

και προκύπτει άμεσα από την προφανή και τις κυκλικές σχέσεις της.

Τέλος, αξίζει να επισημάνουμε και τον ρόλο των τριγωνομετρικών αντικαταστάσεων, όταν τα δεδομένα του προβλήματος υποδηλώνουν κάτι τέτοιο.

ΑΣΚΗΣΗ 351 (ΤΕΥΧΟΣ 116)

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\eta\mu 2x<\frac{2}{3x-x^2}$$

Καμπούκος Κυριάκος – Αθήνα

ΛΥΣΗ 1η (Γιώργος Σ. Τασσόπουλος – Αθήνα)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{2}{3x-x^2}$ και $g(x)=\eta\mu 2x$ με $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Ισχύει:

$$f'(x)=\frac{2(2x-3)}{(3x-x^2)^2}\ \text{ και }\ f''(x)=\frac{12(x^2-3x+3)}{x^3(3-x)^3}>0$$

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η f είναι κυρτή.

Εξάλλου, για τιμές του x στο ίδιο διάστημα έχουμε:

$$g'(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x\ \text{ και }\ g''(x)=-4\eta\mu 2x<0$$

Άρα η g είναι κοίλη.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η C_g βρίσκεται κάτω από μια εφαπτομένη της C_f, για παράδειγμα της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $x_o=1$ η οποία είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι για κάθε

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}>\eta\mu 2x$ (1)

Έστω $h(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\eta\mu 2x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Για την απόδειξη της (1) αρκεί, $h(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι: $h'(x)=-\frac{1}{2}-2\sigma\upsilon\nu 2x$, οπότε

$h'(x)>0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x<-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x<\sigma\upsilon\nu\theta$, όπου $\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{1}{4}>-\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$, και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης συνημίτονο στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ έχουμε $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$, δηλαδή

$\frac{\theta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ Άρα,

$h'(x)>0\Leftrightarrow 2x>\theta\Leftrightarrow x>\frac{\theta}{2}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{3}\right)$ και

$h'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\theta}{2}\right)$. Επομένως, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\theta}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{3}\right)$, οπότε

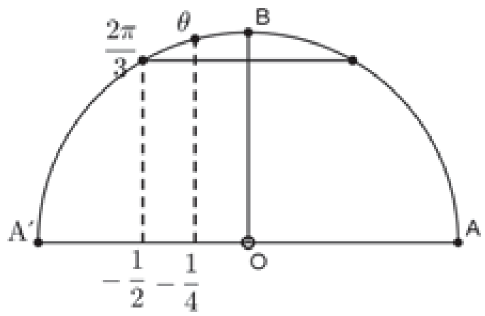
$$\min h(x)=h\left(\frac{\theta}{2}\right)=-\frac{\theta}{4}+\frac{3}{2}-\eta\mu\theta$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $-\frac{\theta}{4}+\frac{3}{2}-\eta\mu\theta>0$, ή ότι $6>\theta+4\eta\mu\theta$. Αλλά:

$$\eta\mu\theta>0\Rightarrow \eta\mu\theta=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$6>\frac{2\pi}{3}+\sqrt{15},\ \ (2)\text{, αφού } \theta<\frac{2\pi}{3}$$



Πραγματικά, $\frac{2\pi}{3}<\frac{2\cdot 3{,}15}{3}=2{,}1$ και οπότε $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{15}<6$, που είναι η (2)

Παρατήρηση:
Στην ίδια αποδεικτέα σχέση (2) θα καταλήγαμε, αν σκεφτόμαστε αντί της σχέσης (1) να αποδείξουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη (ε΄) της C_g σε κάποια θέση $x_o\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ παράλληλη της (ε) που να βρίσκεται κάτω από αυτή.

Προφανώς είναι $(\varepsilon'): y-g(x_o)=g'(x_o)(x-x_o)$, οπότε

$$\begin{pmatrix}(\varepsilon')//(\varepsilon)\\ \text{ή}\\ (\varepsilon')\equiv(\varepsilon)\end{pmatrix}\Leftrightarrow g'(x_o)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x_o=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x_o=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x_0=\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow x_0=\frac{\theta}{2}$$

με $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$, δηλαδή $\frac{\theta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ και $\eta\mu\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$. Άρα

$$(\varepsilon'): y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_o+\eta\mu 2x_o\Leftrightarrow(\varepsilon'): y=-\frac{1}{2}x+\frac{\theta}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}>-\frac{1}{2}x+\frac{\theta}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}$$

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,

ή $6>\theta+\sqrt{15}$, ή $6>\frac{2\pi}{3}+\sqrt{15}$ (2), αφού $\theta<\frac{2\pi}{3}$

ΛΥΣΗ 2η (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$f(x)-1=\frac{2}{3x-x^2}-1=\frac{x^2-3x+2}{x(3-x)}=\frac{(x-1)(x-2)}{x(3-x)}>0$$

Άρα $f(x)>1\geq\eta\mu 2x=g(x)$ για κάθε $x\in(0,1)$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\left[1,\frac{\pi}{2}\right)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-g(x),\ x\in\left[1,\frac{\pi}{2}\right),$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\left[1,\frac{\pi}{2}\right)$. Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$f''(x)>0 \text{ και } g''(x)<0$$

Άρα, στο $\left[1,\frac{\pi}{2}\right)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα και η

g' γνησίως φθίνουσα, δηλαδή η $-g'$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$h' < \left[1, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow h'(x) > h'(1) \text{ για κάθε } x \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

Έχουμε: $h'(1) = f'(1) - g'(1) = -\frac{1}{2} - 2\sigma\upsilon\nu 2$

Είναι όμως γνωστό (Σχολικό βιβλίο) ότι για κάθε $x > 0$ έχουμε $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$, οπότε και

$$\eta\mu 2x > 2x - \frac{1}{6}8x^3 = 2x - \frac{4}{3}x^3$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα στο $[0, \alpha]$, θα βρούμε ανισοτική σχέση που θα περιέχει το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ και το α. Με $\alpha = 1$ έχουμε:

$$\int_0^1 \eta\mu 2x dx > \int_0^1 \left(2x - \frac{4}{3}x^3\right) dx \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^1 > \left[x^2 - \frac{x^4}{3}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2 + \frac{1}{2} > \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{6} > \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2 < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} - 2\sigma\upsilon\nu 2 > 0 \Rightarrow h'(1) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$

για κάθε $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε για κάθε $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε: $h(x) \geq h(1) = f(1) - g(1) = 1 - \eta\mu 2 > 0$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι **Λαγογιάννης Βασίλης** – Αγ. Παρασκευή, **Ιωαννίδης Αντώνης** – Λάρισα.

ΑΣΚΗΣΗ 352 (ΤΕΥΧΟΣ 116)

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{5-\alpha}{3-\alpha}\right)^{\alpha^3} \left(\frac{5-\beta}{3-\beta}\right)^{\beta^3} \left(\frac{5-\gamma}{3-\gamma}\right)^{\gamma^3} \geq 8$$

Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα)

Από τη δοσμένη ισότητα, εύκολα βρίσκουμε ότι καθένας από τους αριθμούς α, β, γ περιέχεται στο διάστημα (0, 3)

Για την απόδειξη της ζητούμενης, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha^3 \ln\frac{5-\alpha}{3-\alpha} + \beta^3 \ln\frac{5-\beta}{3-\beta} + \gamma^3 \ln\frac{5-\gamma}{3-\gamma} \geq \ln 8$$

ή, αρκεί $\alpha^3 \ln\frac{5-\alpha}{3-\alpha} + \beta^3 \ln\frac{5-\beta}{3-\beta} + \gamma^3 \ln\frac{5-\gamma}{3-\gamma} \geq 3\ln 2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f:(0, 3) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 \ln\frac{5-x}{3-x} = x^3 \ln\frac{x-5}{x-3}$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 3\ln 2$$

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{4x^2(2x^2 - 20x + 45)}{(x-5)^2(x-3)^2} + \frac{6x}{(x-5)(x-3)}\ln\frac{x-5}{x-3}$$

για κάθε $x \in (0,3)$

Στο διάστημα (0, 3) έχουμε:

- $2x^2 - 20x + 45 = 2(x-3)^2 + 8(3-x) + 3 > 0$
- $(x-5)(x-3) > 0$
- $5 - x > 3 - x > 0 \Rightarrow \frac{5-x}{3-x} > 1 \Rightarrow \frac{x-5}{x-3} > 1$

οπότε $f''(x) > 0$.

Άρα, η f είναι κυρτή οπότε από την **ανισότητα του Jensen** (με τρεις όρους) έχουμε:

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3} \geq f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3} \geq f(1)$$

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 3\ln 2$$

που είναι το ζητούμενο.

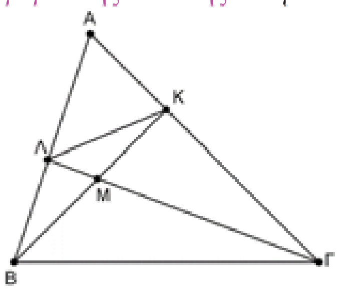
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι **Καρτσακλής Δημήτρης** – Αγρίνιο, **Ντόρβας Νίκος** – Αθήνα.

ΑΣΚΗΣΗ 353 (ΤΕΥΧΟΣ 116)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Λ, Κ σημεία των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν τα τμήματα ΒΚ και ΓΛ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΚΛ})} = \frac{(\text{ΜΒΓ})}{(\text{ΜΚΛ})}$

Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλης – Αγ. Παρασκευή)



Τα τρίγωνα ΛΒΜ και ΛΜΚ έχουν ίσα ύψη από το Λ οπότε

$$\frac{(\text{ΜΒΛ})}{(\text{ΜΚΛ})} = \frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}}$$

Ομοίως και τα τρίγωνα ΓΜΒ και ΓΜΚ, οπότε

$$\frac{(\text{ΜΒΓ})}{(\text{ΜΚΓ})} = \frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\frac{(\text{ΜΒΛ})}{(\text{ΜΚΛ})} = \frac{(\text{ΜΒΛ}) + (\text{ΜΒΓ})}{(\text{ΜΚΛ}) + (\text{ΜΚΓ})} \Rightarrow \frac{(\text{ΜΒΛ})}{(\text{ΜΚΛ})} = \frac{(\text{ΓΒΛ})}{(\text{ΓΚΛ})}, \ (1)$$

Επίσης

$$\frac{ΒΛ}{ΑΒ}=\frac{(ΓΒΛ)}{(ΑΒΓ)} \text{ και } \frac{ΚΓ}{ΑΚ}=\frac{(ΓΚΛ)}{(ΑΚΛ)}$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$\frac{(ΜΒΛ)}{(ΜΚΛ)}=\frac{(ΑΒΓ)\cdot ΒΛ\cdot ΑΚ}{(ΑΚΛ)\cdot ΑΒ\cdot ΚΓ}, \quad (2)$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο στα ζεύγη των τριγώνων ΜΒΓ, ΜΒΛ και ΜΚΓ, ΜΚΛ βρίσκουμε

$$\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΒΛ)}=\frac{ΜΓ}{ΜΛ}=\frac{(ΜΚΓ)}{(ΜΚΛ)}, \text{ οπότε}$$

$$\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΒΛ)}=\frac{(ΜΒΓ)+(ΜΚΓ)}{(ΜΒΛ)+(ΜΚΛ)}\Rightarrow\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΒΛ)}=\frac{(ΓΚΒ)}{(ΒΚΛ)}, (3)$$

Αλλά, $\frac{ΚΓ}{ΑΓ}=\frac{(ΓΒΚ)}{(ΑΒΓ)}$ και $\frac{ΒΛ}{ΑΛ}=\frac{(ΒΚΛ)}{(ΑΚΛ)}$

οπότε η (3) γράφεται

$$\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΒΛ)}=\frac{(ΑΒΓ)\cdot ΚΓ\cdot ΑΛ}{(ΑΚΛ)\cdot ΑΓ\cdot ΒΛ}, \quad (4)$$

Με πολλαπλασιασμό των (2), (4) παίρνουμε

$$\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΚΛ)}=\frac{(ΑΒΓ)^2\cdot ΑΚ\cdot ΑΛ}{(ΑΚΛ)^2\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ}, \quad (5)$$

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ έχουν τη γωνία $\hat{Α}$ κοινή, οπότε

$$\frac{(ΑΚΛ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΑΚ\cdot ΑΛ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}\overset{(5)}{\Rightarrow}\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΚΛ)}=\frac{(ΑΒΓ)^2(ΑΚΛ)}{(ΑΚΛ)^2(ΑΒΓ)}$$

$$\Rightarrow\frac{(ΜΒΓ)}{(ΜΚΛ)}=\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΚΛ)}$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι **Ιωαννίδης Αντώνης** – Λάρισα και **Τσιώλης Γεώργιος** – Τρίπολη

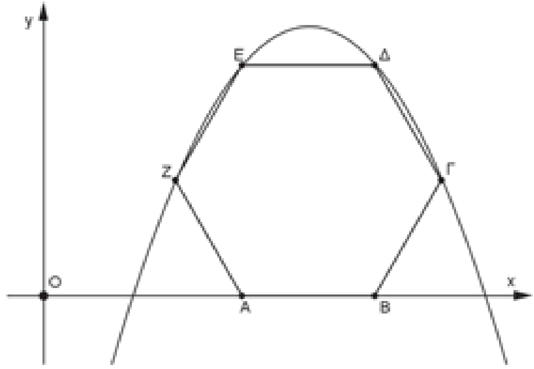
Προτεινόμενα Θέματα

367. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $αβ\neq 0$ και $α\neq β$. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του φ, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$Α=\frac{1}{\sqrt{α^2ημ^2φ+β^2συν^2φ}}+\frac{1}{\sqrt{β^2ημ^2φ+α^2συν^2φ}}$$

Γεώργιος Τσιώλης – Τρίπολη

368. Θεωρούμε μια παραβολή στην οποία εγγράφουμε το κανονικό εξάγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η πλευρά του εξάγωνου είναι ίση με 2, να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων τομής της παραβολής με τον άξονα x΄x

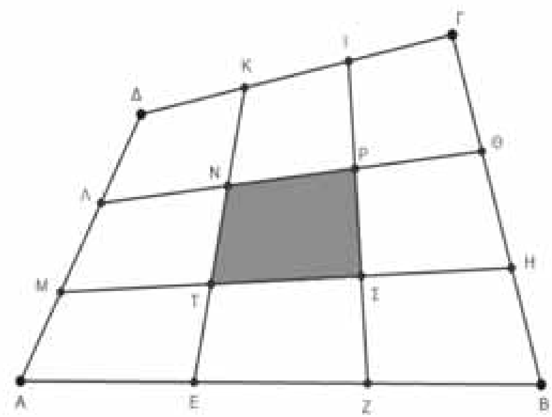


Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

369. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς α, $β\in(0,\pi)$ ισχύει

$$e^{e^{ημβ-1}}\geq ημβ\cdot(ημα)^{\frac{1}{ημα}-1}$$

Ντόρβας Νίκος – Αγ. Ανάργυροι



370. Θεωρούμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε κατά σειρά τα σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε: $ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ$. Όμοια, στη ΒΓ τα σημεία Η και Θ έτσι ώστε: $ΒΗ=ΗΘ=ΘΓ$ στη ΓΔ τα σημεία Ι και Κ έτσι ώστε: $ΓΙ=ΙΚ=ΚΔ$ και στη ΔΑ τα σημεία Λ και Μ έτσι ώστε: $ΔΛ=ΛΜ=ΜΑ$. Φέρουμε τα τμήματα: ΚΕ, ΙΖ, ΛΘ και ΜΗ. Έτσι σχηματίζονται εννέα τετράπλευρα, εκ των οποίων το μεσαίο το ονομάζουμε: ΝΡΣΤ (βλέπε σχήμα)

Να αποδείξετε ότι $(ΝΡΣΤ)=\frac{1}{9}(ΑΒΓΔ)$.

Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία

Απαραίτητη διευκρίνιση:

Διευκρινίζουμε ότι για λόγους ενιαίας παρουσίασης της στήλης, συχνά, οι λύσεις που παρουσιάζουμε δεν ταυτίζονται απόλυτα με τις λύσεις που στέλνουν οι συνάδελφοι - συνεργάτες της στήλης. Σε καμία περίπτωση όμως οι όποιες «προσαρμοστικές» μικροπαρεμβάσεις που γίνονται, δεν αλλοιώνουν τη φιλοσοφία της λύσης που έχουμε λάβει.

Μαθηματικά που έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον …

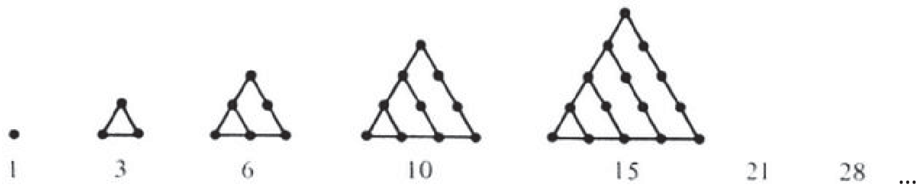
Νίκος Αντωνόπουλος

Πήραμε και δημοσιεύουμε μια εργασία από τον μαθητή **Αίαντα Ράγκο** *της Γ΄ Λυκείου στο ΓΕΛ Κρυονερίου*
*"… Το αρχείο που σας επισυνάπτω είναι μια εργασία μου πάνω στους **τριγωνικούς αριθμούς**. Αν και η δουλειά είναι δικιά μου, δε γνωρίζω τίποτα όσον αφορά την πρωτοτυπία του αποτελέσματος, δηλαδή αν η τελική πρόταση της εργασίας έχει διατυπωθεί στο παρελθόν. Έτσι θα το εκτιμούσα αν μπορούσατε να με ενημερώσετε ως προς αυτό, καθώς και να μου πείτε την άποψή σας για την εργασία, εφόσον τελικά **το αποτέλεσμά της** είναι πράγματι πρωτότυπο".*

Έστω κ τριγωνικός αριθμός. Ως γνωστόν ισχύει: $\boldsymbol{\kappa=\frac{1}{2}\nu(\nu+1),\ \nu\in\mathbb{N}-\{0\}}$ [Αίαντας Ράγκος]

Από αυτή έχουμε:

$$2\kappa=\nu(\nu+1)$$
$$2\kappa=\nu^2+\nu$$
$$\nu^2+\nu-2\kappa=0 \quad (1)$$
$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2\kappa)$$
$$\Delta=1+8\kappa$$
$$\Delta=8\kappa+1$$



Αφού κ τριγωνικός αριθμός, τότε: $8\kappa+1>0\Rightarrow\Delta>0$

Έτσι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες. Όμως $\nu\in\mathbb{N}-\{0\}$, οπότε η μόνη δεκτή λύση θα είναι θετική και η θετική λύση θα είναι επίσης και φυσικός αριθμός (διάφορος του μηδενός).
Οπότε έχουμε:

$$\nu_1=\frac{\left(-1-\sqrt{8\kappa+1}\right)}{2}=-\frac{\left(\sqrt{8\kappa+1}+1\right)}{2},\ \text{απορρίπτεται αφού } \sqrt{8\kappa+1}+1>0\Rightarrow-\frac{\left(\sqrt{8\kappa+1}+1\right)}{2}<0$$

$$\nu_2=\frac{\left(-1+\sqrt{8\kappa+1}\right)}{2}=\frac{\left(\sqrt{8\kappa+1}-1\right)}{2},\ \text{δεκτό αφού } \sqrt{8\kappa+1}-1>0\overset{\text{κ τριγωνικός αριθμός}}{\Rightarrow}\frac{\left(\sqrt{8\kappa+1}-1\right)}{2}>0$$

Επειδή $\frac{\left(\sqrt{8\kappa+1}-1\right)}{2}>0\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{8\kappa+1}-1\right)}{2}\in\mathbb{N}-\{0\}$.Έτσι έχουμε το συμπέρασμα:

$$\frac{\left(\sqrt{8\kappa+1}-1\right)}{2}\in\mathbb{N}-\{0\}\ \text{για κάθε κ τριγωνικό αριθμό και αντίστροφα:}$$

Έστω $\alpha\in\mathbb{N}-\{0\}$. Αν ισχύει ότι: $\frac{\left(\sqrt{8\alpha+1}-1\right)}{2}\in\mathbb{N}-\{0\}$, τότε ο α είναι τριγωνικός αριθμός.

Αίαντα γεια σου.
*Η μικρή εργασία, όπως την αποκαλείς στους **τριγωνικούς αριθμούς** είναι πραγματικά ενδιαφέρουσα και το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγεις είναι πράγματι γνωστό.*

Αυτό φυσικά δεν αναιρεί κάτι από την προσπάθειά σου. Συνέχισε να ασχολείσαι και σίγουρα θα συναντήσεις πολλά ενδιαφέροντα πράγματα στο χώρο των Μαθηματικών.

Σου στέλνω ένα άρθρο πάνω στους τριγωνικούς αριθμούς που έχει δημοσιευθεί τον Ιούλιο του 2012 και το σχετικό αρχείο πάνω στο ίδιο θέμα, όπως παρουσιάστηκε φέτος (21Οκτωβρίου 2020) στους μαθητές που παρακολουθούν τον Όμιλο Μαθηματικών στο Πρότυπο ΓΕΛ Αγ. Αναργύρων Αθήνας και το παρουσιάζουμε το θέμα αυτό και στο περιοδικό, μιας και έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Σου εύχομαι κάθε επιτυχία.

[Νίκος Αντωνόπουλος]
μέλος της επιτροπής έκδοσης του περιοδικού «Ευκλείδης Β΄»

Το τρίγωνο του Pascal

Το παρόν άρθρο, είναι ακριβώς το ίδιο, που παρουσιάστηκε την τρέχουσα σχολική χρονιά στις 26 Οκτωβρίου 2020 στο Πρότυπο Λύκειο Αγίων Αναργύρων στα πλαίσια του Ομίλου Μαθηματικών με τίτλο

«Ενότητες από τα Ελκυστικά Μαθηματικά»

όπου φαίνονται και οι δραστηριότητες που ανατέθηκαν στους μαθητές που συμμετείχαν στον Όμιλο.

Το τρίγωνο του Pascal είναι μια άπειρη τριγωνική διάταξη αριθμών με τον αριθμό 1 να βρίσκεται στην κορυφή της και στην επόμενη γραμμή να βρίσκονται οι αριθμοί 1, 1. Από εκεί και πέρα ο κανόνας είναι απλός:

Σε κάθε γραμμή γράφουμε ως πρώτο και τελευταίο αριθμό το 1 και στο μέσο ακριβώς του κενού διαστήματος που σχηματίζουν οι αριθμοί της προηγούμενης γραμμής, το άθροισμα των αριθμών αυτών.

Σε κάθε γραμμή το πλήθος των αριθμών είναι κατά ένα μεγαλύτερο από το πλήθος των αριθμών της προηγούμενης γραμμής.

Οι πρώτες 9 γραμμές του τριγώνου φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………………………………………………….

Παρόλο που ο σχηματισμός του τριγώνου είναι εξαιρετικά απλός, συναντάμε σ' αυτό πολλές αξιοσημείωτες κανονικότητες και ιδιότητες.

Έτσι, για παράδειγμα οι αριθμοί κάθε σειράς, εξαιρουμένης της πρώτης είναι οι συντελεστές του αντίστοιχου αναπτύγματος του $(\alpha+\beta)^{\nu}$.

Πράγματι, όπως βλέπουμε οι συντελεστές του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^3$ που είναι 1, 3, 3, 1 βρίσκονται στην τρίτη (μετά την αρχική) σειρά του αναπτύγματος.

Επίσης αν θέλουμε το ανάπτυγμα $(\alpha+\beta)^6$, δεδομένου ότι σ' αυτό οι δυνάμεις του α φθίνουν σταδιακά, ενώ του β αυξάνουν σταδιακά, με βάση την αντίστοιχη γραμμή του τριγώνου έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^6=\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^3+6\alpha\beta^5+\beta^6$$

Δραστηριότητα 1.

Προσθέστε τα στοιχεία κάθε γραμμής του πίνακα. Πως αιτιολογείται ότι το αποτέλεσμα είναι πάντοτε δύναμη του 2;

Ας δούμε κάποιες άλλες ιδιότητες του τριγώνου

- Η πρώτη διαγώνιος έχει μόνο μονάδες
- Η δεύτερη διαγώνιος αποτελείται από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Το άθροισμα των στοιχείων της δεύτερης διαγωνίου είναι

$$S_1 = 1+2+3+4+5+...+\nu$$

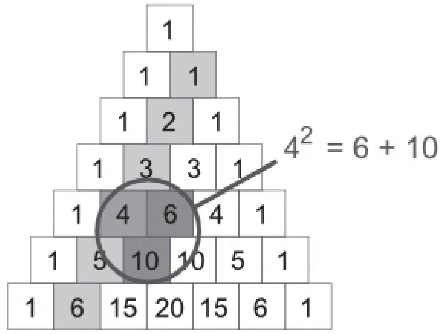
Δραστηριότητα 2.

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των στοιχείων της δεύτερης διαγωνίου είναι

$$S_1 = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

- Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε στοιχείου της δεύτερης διαγωνίου είναι ίσο με το άθροισμα του αριθμού που βρίσκεται δεξιά του και του αριθμού που βρίσκεται κάτω από αυτούς όπως

$$3^2 = 3+6,\ 4^2 = 6+10,\ 5^2 = 10+15 \text{ κτλ.}$$

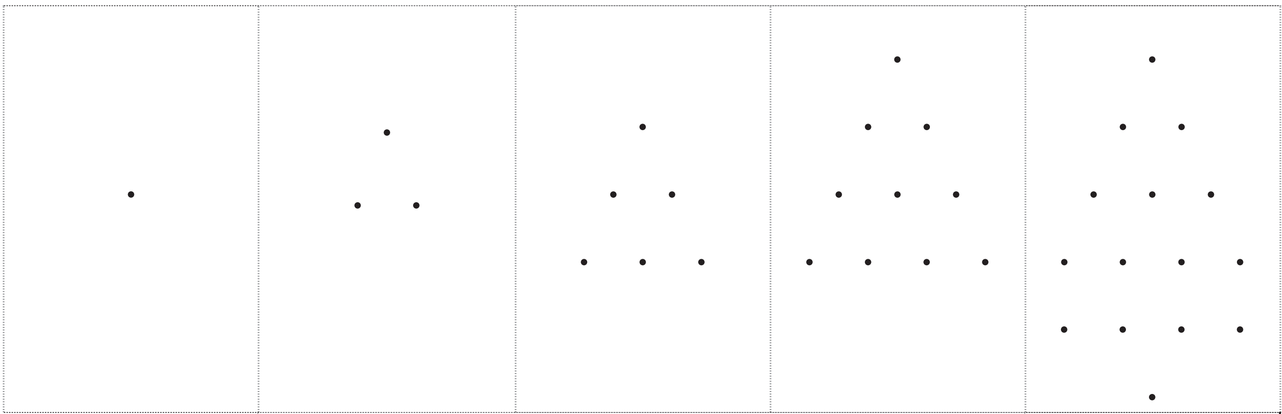


- Η τρίτη διαγώνιος αποτελείται από τους αριθμούς

1, 3, 6, 10, 15, ...

Τι χαρακτηριστικό έχουν αυτοί οι αριθμοί;

Οι αριθμοί αυτοί, με μορφή κουκίδων αντίστοιχου πλήθους, μπορεί να τοποθετηθούν σε τριγωνική διάταξη, όπως φαίνεται παρακάτω.



Τους αριθμούς αυτούς οι αρχαίοι Έλληνες τους ονόμαζαν **τριγωνικούς αριθμούς**, λόγω της διάταξης που μπορούμε να σχηματίσουμε όπως προαναφέραμε.

Ειδικά τον αριθμό 10 **«τετρακτύς»** των πυθαγορείων που είναι το άθροισμα

1 (σημείο) 2 (ευθεία) 3 (επίπεδο) και 4 (στερεό)

τον θεωρούσαν ως σύμβολο της τελειότητας.

Δραστηριότητα 3.

Αν T_ν είναι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός, τότε ισχύουν:

$$T_1 = 1,\ T_2 = T_1 + 2 = 3,\ T_3 = T_2 + 3 = 6,\ T_4 = T_3 + 4 = 10$$

και γενικά $T_\nu = T_{\nu-1} + \nu$

Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει

$$T_\nu = 1+2+3+...+(\nu-1)+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Τα υπόλοιπα της διαίρεσης των τριγωνικών αριθμών με:

- το 2 σχηματίζουν μια κανονικότητα με περίοδο 4 που είναι η

1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0,...

- το 3 σχηματίζουν μια κανονικότητα με περίοδο 3 που είναι η

  1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0,...

- με το 4 σχηματίζουν μια κανονικότητα με περίοδο 8 που είναι η

  1, 3, 2, 2, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 0, 0,...

Αποδεικνύεται ότι η περίοδος είναι ίση με τον αριθμό, αν αυτός είναι περιττός, ή ίση με το διπλάσιο του, αν αυτός είναι άρτιος.

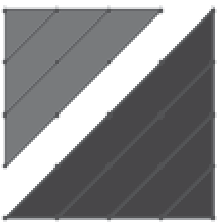
Δραστηριότητα 4.

Να αποδείξετε ότι:

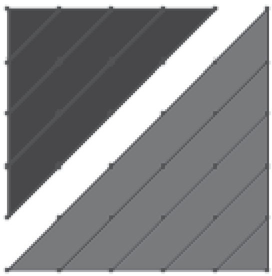
1. Το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών, είναι τέλειο τετράγωνο.

2. Το οκταπλάσιο ενός τριγωνικού αριθμού αυξημένο κατά μια μονάδα είναι τέλειο τετράγωνο.

Αποδείξεις των παραπάνω ιδιοτήτων (3 και 4), χωρίς λόγια βλέπουμε στα παρακάτω σχήματα



$5^2 = T_4 + T_5$



$6^2 = T_5 + T_6$

$8T_3 + 1 = 7^2 = 49$

Δραστηριότητα 5.

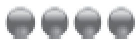
Αν T_ν ένας τριγωνικός αριθμός, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και με τους αριθμούς $9T_\nu + 1$ και $25T_\nu + 3$

Το πρόβλημα των χειραψιών

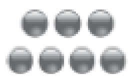
Ας υποθέσουμε ότι 5 άτομα, γνωστά μεταξύ τους, συναντώνται μετά από καιρό και ανταλλάσσουν χειραψίες (ο καθένας με όλους τους άλλους). Πόσες χειραψίες θα γίνουν συνολικά;

Απάντηση

Θεωρούμε τυχαία κάποιον από αυτούς. Αυτός, ανταλλάσσει χειραψίες με τους άλλους 4 οπότε έχουμε τις παρακάτω χειραψίες (τελείες)

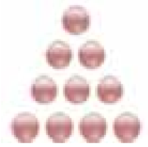


Θεωρούμε τώρα τυχαία κάποιον από τους υπόλοιπους 4. Αυτός, ανταλλάσσει 3 χειραψίες με τους υπόλοιπους, οπότε μέχρι τώρα έχουμε τις παρακάτω χειραψίες (τελείες)



Τώρα θεωρούμε τυχαία κάποιον από τους 3 που απομένουν. Αυτός θα πραγματοποιήσει 2 χειραψίες με τους άλλους 2, οπότε μέχρι τώρα έχουμε τις παρακάτω χειραψίες (τελείες)

Αν τώρα υπολογίσουμε και τη μοναδική χειραψία που θα πραγματοποιήσουν οι 2 που έμειναν, έχουμε την παρακάτω τριγωνική διάταξη με το πλήθος όλων των χειραψιών που θα πραγματοποιηθούν.



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, στην περίπτωση των πέντε ατόμων, το πλήθος των χειραψιών είναι ίσο με T_4. Γενικά αν έχουμε όλες τις δυνατές χειραψίες μεταξύ ν ατόμων τότε το πλήθος τους είναι ίσο με $T_{\nu-1}$

Το σύμβολο $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\nu$

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_\nu$ πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε

$$\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_\nu$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν:

i. $\sum_{i=1}^{\nu}(\alpha_i+\beta_i)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i+\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i$

ii. $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda\alpha_i)=\lambda\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i,\ \lambda\in\mathbb{R}$

iii. $\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\sum_{i=1}^{\nu-1}\alpha_i+\alpha_\nu$

Μ. Πασκάλ (1623-1662)

Σχετικά με τους τριγωνικούς αριθμούς, αποδεικνύεται ακόμα ότι:

1. Αν T_ν είναι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός, τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{T_\nu}=2$, δηλαδή, το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με 2.

Απόδειξη

Είναι: $$\frac{1}{T_\nu}=2\frac{1}{\nu(\nu+1)}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $$\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1},\quad (1)$$

Αν θέσουμε στην (1) στη θέση του ν διαδοχικά τους αριθμούς 1, 2, 3, 4,...,ν παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(\nu-1)\nu}=\frac{1}{\nu-1}-\frac{1}{\nu}$$
$$\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$$

Αν τώρα προσθέσουμε τις ν αυτές ισότητες παίρνουμε:

$$\sum_{1}^{\nu}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=1-\frac{1}{\nu+1}=\frac{\nu}{\nu+1}$$

Στην τελευταία ισότητα, αν θεωρήσουμε ότι το ν αυξάνεται απεριόριστα (τείνει στο $+\infty$), τότε το κλάσμα του δευτέρου μέλους τείνει στη μονάδα, οπότε έχουμε: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=1$. Άρα, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{T_\nu}=2$

Δραστηριότητα 6

Αν T_ν είναι ο νισοστός τριγωνικός αριθμός, να αποδείξετε ότι $T_{\nu+1}-2T_\nu+T_{\nu-1}=1$

Σχόλια - παρατηρήσεις

- Το 1796 ο Gauss ανακάλυψε ότι κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα το πολύ τριών (όχι αναγκαστικά διαφορετικών μεταξύ τους) τριγωνικών αριθμών, ανακοινώνοντας την ανακάλυψή του με την χαρακτηριστική ισότητα

$$\text{«Heureka! } num=\Delta+\Delta+\Delta\text{»}$$

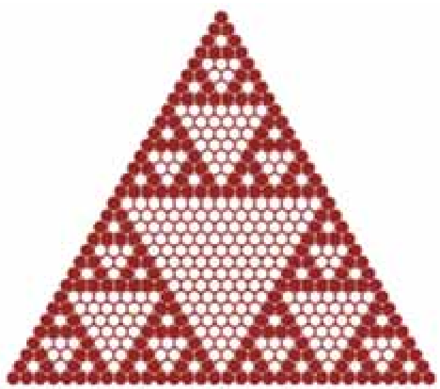
- Ένα ερώτημα που προκύπτει εύλογα είναι: Μπορούμε να αποφανθούμε αν ένας θετικός ακέραιος κ είναι ή όχι τριγωνικός;

Αποδεικνύεται ότι:

Αν ο αριθμός $\nu=\frac{\sqrt{8\kappa+1}-1}{2}$ είναι ακέραιος, τότε ο κ είναι τριγωνικός.

- Ανάμεσα στους τριγωνικούς αριθμούς υπάρχουν
  - Τέλειοι αριθμοί όπως οι: 6, 28, 490
  - Αριθμοί με επαναλαμβανόμενα ψηφία όπως οι 66, 666

- Αν θεωρήσουμε τους αριθμούς του τριγώνου σαν τελείες με το σκούρο χρώμα να συμβολίζει τους περιττούς αριθμούς και το ανοιχτόχρωμο τους άρτιους τότε προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



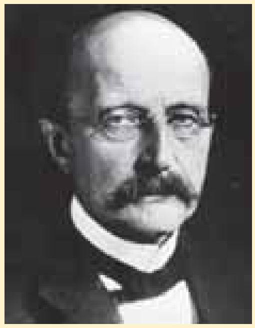
Παρατηρούμε ότι αν μια γραμμή έχει μαύρους και άσπρους κύκλους που εναλλάσσονται, τότε η επόμενη έχει μόνο μαύρους κύκλους. Πώς αιτιολογείται αυτό;

Το παραπάνω σχήμα θυμίζει το πιο διάσημο fractal. **Το τρίγωνο του Sierpinski**

Το τρίγωνο Sierpinski είναι το πιο γνωστό **fractal**, μέσα στα όρια ενός **ισόπλευρου τριγώνου** το οποίο διαιρείται **αναδρομικά** σε μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα. Αποτελεί ένα από τα βασικά παραδείγματα **αυτοόμοιων** ομάδων, όπου το σχήμα επαναλαμβάνεται σε οποιαδήποτε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Η ονομασία του προέρχεται από τον Πολωνό μαθηματικό **Βάτσλαφ Σιερπίνσκι**.

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος



Η επιστήμη δεν μπορεί να λύσει το ύψιστο μυστήριο της φύσης, και αυτό επειδή εμείς οι ίδιοι είμαστε μέρος του μυστηρίου που προσπαθούμε να λύσουμε.

Max Planck
Γερμανός φυσικός 1858-1947
Nobel Φυσικής 1918 – Θεωρία κβάντα

Κβάντο υπολογιστής

Από το BIT στο QUBIT

Από τη γάτα του Schrödinger στον κβάντο υπολογιστή

Τον 19^{ο} αιώνα, αλλά ιδιαίτερα τον 20^{ο} αιώνα, ο άνθρωπος ξεπέρασε τα όριά του, που για πολλούς αιώνες ήταν αμετακίνητα. Τη 10ετία του ΄70 στο Μαθηματικό του Πανεπιστημίου Αθηνών είχαμε ένα **νέο** μάθημα, το μάθημα της Κβαντομηχανικής. Μαθαίναμε ότι, με την κλασική Μηχανική δεν εξηγούνται ορισμένα αποτελέσματα πειραμάτων και άλλαζε το μοντέλο που γνωρίζαμε, για το άτομο με τις τροχιές των ηλεκτρονίων κλπ. Μαθαίναμε ότι το φως δεν είναι ένα συνεχές, αλλά μικρές-μικρές ποσότητες φωτονίων ή **κβάντα**. Η λέξη **κβάντο** προέρχεται από το λατινικό quantum, που σημαίνει «**ποσό**». Γενικά στη φυσική, ο όρος **κβάντο** ή **κβάντουμ** αναφέρεται σε μια χωρίς διάσταση μονάδα ποσότητας, ένα «ποσό από κάτι». Είναι δηλαδή η μικρότερη δυνατή μονάδα της έννοιας στην οποία αναφέρεται και όλες οι ποσότητες αυτής της έννοιας είναι πάντα, ακέραια πολλαπλάσια αυτής της μονάδας, δεν μπορούν να υπάρξουν δεκαδικές ποσότητες.

Ακόμα τη δεκαετία του ΄70 η **θεωρία της σχετικότητας** και η Πυρηνική Φυσική ήταν στην πρωτοκαθεδρία της επιστήμης. Τα κβάντα, ο νόμος της **εντροπίας** στη Θερμοδυναμική και η ακτινοβολία μέλανος σώματος, ήταν τα θέματα της επικαιρότητας στην επιστήμη.

Το **1894** ο Πλανκ [**Max Planck**] έστρεψε την προσοχή του **στη θερμοδυναμική,** στο πρόβλημα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος και τούτο γιατί είχε αναλάβει να ανακαλύψει για λογαριασμό εταιρειών ηλεκτρισμού, τον τρόπο παραγωγής πιο δυνατού φωτός με λαμπτήρες που θα κατανάλωναν την **ελάχιστη** ενέργεια.

Με αυτό το πρόβλημα είχε ήδη ασχοληθεί ο **Kirchhoff** το **1859**. Είχε μελετηθεί πειραματικά το πρόβλημα, αλλά με την Κλασική Φυσική δεν μπορούσαν να εξηγήσουν την παρατηρούμενη συμπεριφορά, σε υψηλές συχνότητες. Έτσι ο Πλανκ ανακάλυψε τον περίφημο «**Νόμο του Planck**» για την ακτινοβολία μέλανος σώματος, που συγκλόνισε τα θεμέλια στην επιστήμη της Φυσικής. Ο νόμος πρωτοπαρουσιάσθηκε στη Γερμανική Φυσική Εταιρεία, στις 19 Οκτωβρίου 1900. Ο **Planck** θεωρείται ο πατέρας της Κβαντικής Θεωρίας. Η θεωρία των κβάντων έδωσε την δυνατότητα στον **Αϊνστάιν** να εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, θεωρώντας ότι δεν είναι μια συνεχής ροή ενέργειας αλλά ένα σύνολο από κβάντα ή «πακέτα» ενέργειας, τα φωτόνια και έτσι πήρε το βραβείο **Nobel**. Άλλοι επιστήμονες που ήταν πρωτοπόροι και βραβεύτηκαν με **Nobel** είναι: **Max Planck** 1918, **N. Bohr** 1922, **W. Heisenberg** 1932, **E. Schroedinger** 1933, **Bose** 1954 κ.α. Ο **W. Heisenberg** επιβεβαίωσε με τους συλλογισμούς του την νέα αρχή που έχει γίνει το σήμα κατατεθέν της κβαντικής θεωρίας, που είναι γνωστή ως «**αρχή της αβεβαιότητας** του Heisenberg».

Η έντονη επικαιρότητα εκείνης της εποχής,
κατέγραψε τον τύπο **Heisenberg** στο **Τατόι**,
στα πρώην βασιλικά κτήματα, σ' αυτή την πλακέτα,
σαν ένα σημαντικό γεγονός

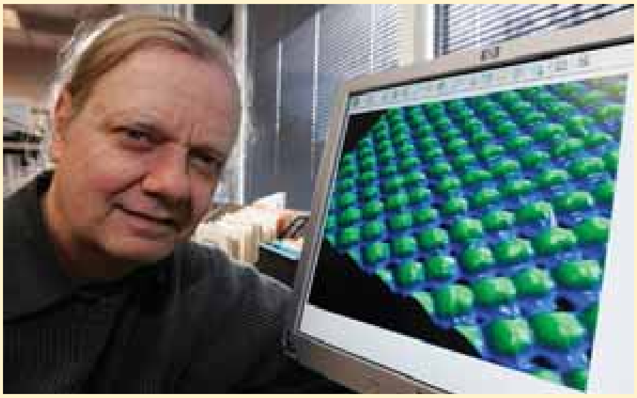
Το 1930 ο **Erwin Schrodinger** (Σρέντικερ) [Αυστριακός Φυσικός 1887-1961, **Nobel Φυσικής** 1933 – Κβαντική Φυσική, κυματική εξίσωση] σκέφτηκε το διάσημο νοητικό πείραμα που έχει μείνει στην ιστορία ως **"η γάτα του Schrodinger"**, για να φανεί η **υπέρθεση καταστάσεων.** Υπέθεσε ότι, η γάτα θα είναι ταυτόχρονα και ζωντανή και νεκρή, πριν εμείς την παρατηρήσουμε. Ο Schrodinger ήθελε να δείξει ότι η κβαντική θεωρία ήταν ακόμη ελλιπής.

Ο κβαντο υπολογιστής και η εξέλιξη στο μέλλον

Η ιδέα για έναν κβαντο υπολογιστή ήταν από τη 10ετία του 1970-80. Ο **Richard Phillips Feynman** (1918-1988), ήταν Αμερικανός φυσικός, από τους σημαντικότερους θεωρητικούς φυσικούς. Ο Feynman το **1965** τιμήθηκε και με το Βραβείο **Nobel Φυσικής,** για τη δουλειά του στην κβαντική ηλεκτροδυναμική. Ακόμα είχε προβλέψει την ύπαρξη των **κουάρκς** και είχε εξηγήσει την υπέρ ρευστότητα του υγρού ηλίου. Ο Richard Feynman πριν 40 χρόνια υποστήριξε ότι, ένα **κβαντικό σύστημα** θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμούς.

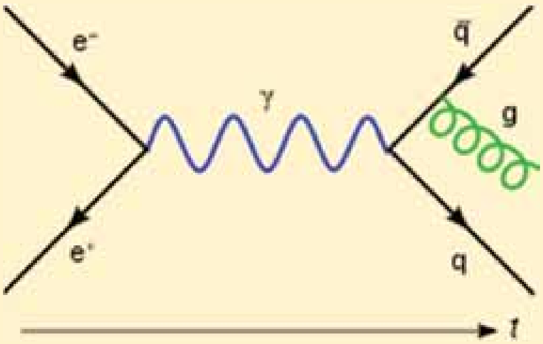
Τι είναι αυτό που **ονειρεύτηκε** ο Feynman; Η λειτουργία ενός κβαντο υπολογιστή είναι **δυσνόητη**, αλλά μπορούμε να πούμε σε γενικές γραμμές τα εξής: ότι στον κλασικό υπολογιστή το Bit μπορεί να έχει μόνο την τιμή 1 ή 0, ενώ στον κβαντικό υπολογιστή το Qubit μπορεί να έχει 1 ή 0 ή οποιαδήποτε υπέρθεση αυτών. Έτσι μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα, ένα πρόγραμμα για τις δύο τιμές του κάθε Qubit, **«μαζικός κβαντικός παραλληλισμός»**, δηλαδή τα 100 Qubits αντιστοιχούν σε 2^{100} Bits. Κάτι άλλο που συμβαίνει στους κβαντικούς υπολογιστές είναι ένα φαινόμενο που όταν δύο ηλεκτρόνια δημιουργηθούν μαζί, μένουν σε κατάσταση **διεμπλοκής** μεταξύ τους όσο μακριά και να είναι το ένα από το άλλο, μέσα στο σύμπαν. Αν τώρα κάνουμε κάτι στο ένα, ακαριαία αντιδρά και το άλλο. Έτσι λειτουργούν δύο Qubits που είναι σε διεμπλοκή.

Λένε οι ειδικοί, αυτός ο υπολογιστής **πρέπει** να διαθέτει **50 κβαντικά** bits ή **δυφία** (qubits). Αν στο μέλλον έχουμε και κβαντικό διαδίκτυο με κβαντικούς υπολογιστές, θα μηδενιστεί ο χρόνος για τη μεταφορά της πληροφορίας και ίσως έχουμε και **τηλε μεταφορές**. Επίσης και οι Κβαντικοί Αλγόριθμοι είναι διαφορετικοί, πρέπει να συνδέουν τον κλασικό χώρο με το χώρο της κβαντικής **υπέρθεσης**. Βέβαια οι επιστήμονες πρέπει να επιλύσουν ακόμα προβλήματα με το χρησιμοποιούμενο υλικό, την υπερθέρμανση, κ.α.



Ο Richard Phillips Feynman που ονειρεύτηκε το πάντρεμα Φυσικής και Πληροφορικής το **1982**.

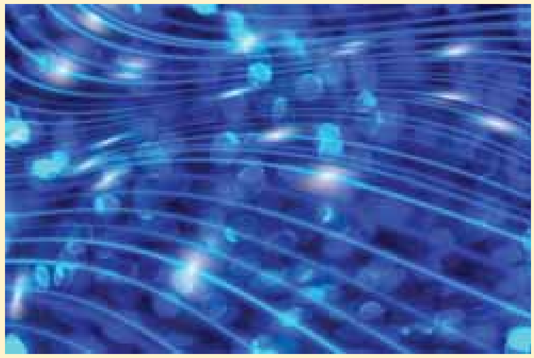
Πάντως προς το παρόν φαίνεται ότι οι υπολογιστές αυτοί είναι κατάλληλοι για δύσκολους υπολογισμούς, που με τους σημερινούς υπολογιστές είναι αδύνατο να γίνουν. Αυτοί οι υπολογιστές που έχουν κατασκευαστεί μέχρι τώρα είναι δισεκατομμύρια φορές ταχύτεροι και σχεδόν ακαριαία απαντούν σε πολύπλοκες πράξεις.



Διάγραμμα Feynman

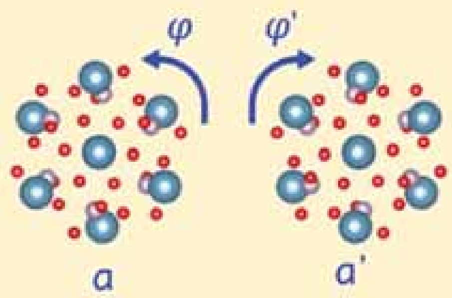
Ο Jiuzhang (76- qubits) εναντίον Sycamore (53-qubits).

Πολλοί επιστήμονες εργάζονται στην κατασκευή του κβάντο υπολογιστή. Οι υπερδυνάμεις Αμερική, Κίνα, Ρωσία, Ευρωπαϊκή Ένωση καθημερινά σχεδόν, κάνουν ανακοινώσεις για τις προσπάθειες τους. Πριν ένα χρόνο η **Google** δημοσίευσε ότι έχει πετύχει **Κβαντική Υπεροχή** με τον κβαντικό υπολογιστή **Sycamore** (53-qubits), αλλά τώρα η Κίνα απαντά ότι με τον **Jiuzhang** (76-qubits) και έτσι, κάνει το επίτευγμα της **Google** να φαίνεται **αστείο.** Ο **Sycamore** της **Google** έλυσε ένα πρόβλημα, μέσα σε 200 δευτερόλεπτα, που ο ισχυρότερος κλασικός υπολογιστής θα χρειαζόταν 10.000 χρόνια. Ενώ ο **Jiuzhang** κατάφερε να λύσει ένα πιο δύσκολο πρόβλημα, μέσα σε 200 δευτερόλεπτα, που ο ισχυρότερος κλασικός υπολογιστής θα χρειαζόταν εκατομμύρια ή δισεκατομμύρια χρόνια. Το πρόβλημα που δόθηκε να λύσει ο **Jiuzhang** είναι σε γενικές γραμμές **εισαγωγή φωτονίων** σε ένα οπτικό κύκλωμα από πολλές εισόδους και στη συνέχεια αυτά τα φωτόνια διασπώνται και σκεδάζονται στους εσωτερικούς καθρέπτες. Ο υπολογιστής καλείται να λάβει υπόψη του, όλες αυτές τις παραμέτρους για να υπολογίσει το τελικό αποτέλεσμα που θα έρθει στις εξόδους του συστήματος, κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο για έναν κλασικό υπολογιστή. Στον Jiuzhang, για τη ιστορία αναφέρουμε ότι, χρησιμοποιήθηκαν 50 φωτόνια, 100 πηγές εισόδου, 100 πηγές εξόδου, 300 splitters και 75 καθρέπτες. Ο επικεφαλής της κινέζικης αντιπροσωπείας **Λου Τσαογιανγκ** πρόσφατα δήλωνε ότι, θαυμάζει την πρόοδο της Google στον τομέα αυτόν, υπογραμμίζοντας επίσης ότι «*Η κατασκευή ενός* *κβαντικού υπερυπολογιστή αποτελεί κούρσα μεταξύ **των ανθρώπων** και της **φύσης**, όχι μεταξύ των χωρών*». Πριν λίγες μέρες η Ευρωπαϊκή Ένωση ανακοίνωνε ότι, σε βάθος πενταετίας, θέλει με την **2030 Digital Compass**, (ψηφιακή Πυξίδα) να διαθέτει υπολογιστή Κβαντικής επιτάχυνσης έτσι ώστε να μπορέσει να βρεθεί στην πρωτοπορία μέχρι **2030**, αναπτύσσοντας μια σειρά καίριων τεχνολογιών, ιδίως ημιαγωγών για να μπορέσει να προλάβει την εξέλιξη υπολογιστών υψηλών επιδόσεων σε συστήματα τεχνητής νοημοσύνης. Η Κβαντική Υπεροχή τελικά όμως, εξελίσσεται σε έναν αγώνα μεταξύ των υπερδυνάμεων για την απόκτηση ενός υπερόπλου, κάτι σαν τα πυρηνικά πιο παλιά, του $20^{ου}$ αιώνα. Ο ανταγωνισμός σίγουρα, θα φέρει αποτελέσματα εξέλιξης νέων δεδομένων, μέσα σε αυτή τη 10ετία. Ποιό όμως είναι το όπλο αυτού του αγώνα; Ποιο άλλο από τα **Μαθηματικά**. Καμία μηχανή δεν έχει τέτοια δύναμη. Την ψυχή και την προοπτική, την δίνουν τα **Μαθηματικά.** Οι μαθηματικοί τώρα, δουλεύουν πυρετωδώς για να βρουν τον **κατάλληλο αλγόριθμο** που θα δώσει την ικανότητα στον **κβαντο υπολογιστή** να κάνει θαύματα. Με τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία που θα αναπτυχθούν, αυτοί οι υπολογιστές με τις αστρονομικές ταχύτητες θα λύνουν πολλά άλυτα μαθηματικά προβλήματα, που τώρα δεν μπορούν να λυθούν, θα φέρουν υπεράνθρωπα αποτελέσματα έκβασης γεγονότων και θα μεταβάλλουν τη ζωή μας. Τον πρώτο αλγόριθμο για τον κβαντικό υπολογιστή, είχαμε το **1985** από το **Deutsch**.



Κβαντικό πλεονέκτημα με τη χρήση της φωτονικής

Το μεγάλο άλμα όμως, έγινε το 1994, όταν ο **Peter Shor** παρουσίασε τον αλγόριθμο Shor και πήρε το βραβείο **Fields**. Ο αλγόριθμος αυτός συνίσταται στην παραγοντοποίηση, μεγάλων αριθμών, πολύ γρήγορα. Τόσο γρήγορα ώστε να αχρηστεύει και τα πιο προηγμένα κλασικά **κρυπτογραφικά συστήματα** ασφαλείας. Το 1995 ο **Lov Grover** παρουσίασε το δικό του κβαντικό αλγόριθμο για την επιτάχυνση της γρήγορης αναζήτησης, σε μια αταξινόμητη βάση δεδομένων. Μάλιστα σε ένα άρθρο του έβαλε τίτλο **«Η κβαντική μηχανική μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε βελόνα στα άχυρα».** Σήμερα γίνεται έρευνα, για να βρεθεί αρχιτεκτονική προγραμματισμού για τους κβαντικούς υπολογιστές. Επίσης η έρευνα αυτή, αφορά και τον επεξεργαστή. Δεν έχει βρεθεί ακόμα κβαντικός επεξεργαστής που να μπορεί να εκτελεί γενικά υπολογιστικά καθήκοντα. Στους κβαντικούς υπολογιστές δεν υπάρχει σαφής διάκριση ανάμεσα στο **υλικό** και το **λογισμικό**, όπως συμβαίνει στους κλασικούς υπολογιστές. Η πληροφορική σύντομα θα βρεθεί σε νέες καταστάσεις, σε νέες προκλήσεις στην προσπάθεια της, να χειραγωγήσει το άπειρο.



Free cloud

Με μια ματιά

- Το **1742** ο Ρώσος μαθηματικός **Christian Goldbach** (Γκόλντμπαχ) σε επιστολή που έστειλε στον **Eüler** διατύπωσε την **εικασία** ότι «κάθε άρτιος (ζυγός) ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών». Πρόβλημα που και σήμερα παραμένει άλυτο.
- Το **1882** με το θεώρημα του **Hermite-Lindemann** αποδείχθηκε μετά από 2.300 χρόνια ότι δεν είναι δυνατός ο τετραγωνισμός του κύκλου με κανόνα και διαβήτη. Καθώς και το Δήλιο πρόβλημα

(2πλασιασμός του κύβου), αλλά και η τριχοτόμηση της γωνίας.

- ❖ Το **1995** ο **Wiles Andrew** έδωσε την τελική απόδειξη στο θεώρημα του **Fermat** αφού πέρασαν περισσότερα από 350 χρόνια, από τότε που διατυπώθηκε. (Δηλαδή ότι η εξίσωση $x^n+y^n=z^n$ δεν ισχύει για κανένα ακέραιο n>2).
- ❖ Το **Sudoku** (θέση του αριθμού), παιχνίδι από την Ιαπωνία πρωτοεμφανίστηκε στην Ευρώπη το **2004**, πατέρας του παιχνιδιού ο **Eüler**.
- ❖ Το **1900** σε ένα ναυάγιο ανοικτά των **Αντικυθήρων,** Σύμιοι σφουγγαράδες ανακάλυψαν τον λεγόμενο σήμερα «μηχανισμό των Αντικυθήρων», την αρχαιότερη σωζόμενη διάταξη με γρανάζια που χρονολογείται 150-100 π.Χ. Ο μηχανισμός είναι μέρος αστρονομικού οργάνου, είναι ημερολόγιο, δείχνει γεωγραφικό μήκος και πλάτος, τα χρόνια των Ολυμπιακών αγώνων, των Νεμέων, των Πυθίων κ.ά. ακόμα ερευνάται η λειτουργία του, **αλλά και ο βυθός** στα Αντικύθηρα για νέα ευρήματα.
- ❖ Το **1977** λύθηκε το πρόβλημα των **4 χρωμάτων** μετά από 125 χρόνια από τους Apel και Haken και είναι το πρώτο πρόβλημα στην ιστορία των Μαθηματικών που λύθηκε με την βοήθεια του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή. (Τα 4 χρώματα είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που χρειάζονται για να χρωματίσουμε ένα χάρτη έτσι ώστε δυο γειτονικές χώρες να μην έχουν το ίδιο χρώμα. **Guthrie 1852**)

- ❖ **Το παράδοξο του κουρέα**

Σε ένα μικρό νησί υπάρχει ένας μόνο κουρέας. Έχει πολλή δουλειά, καθώς «**κόβει τα μαλλιά όλων και μόνον εκείνων των χωρικών που δεν κόβουν οι ίδιοι τα μαλλιά τους**». Τότε όμως ποιος κόβει τα μαλλιά του ίδιου του κουρέα; Έστω ότι κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του. Αν το κάνει, τότε, αφού είναι και ο ίδιος κάτοικος στο νησί, δεν κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του. Αν υποθέσουμε, από την άλλη, ότι δεν κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του, τότε, αφού είναι και ο ίδιος κάτοικος του νησιού, έπεται ότι κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του. Επομένως, ο κουρέας σε αυτό το νησί κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του εάν και μόνον εάν δεν κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του!!

- ❖ **Το παράδοξο της πέτρας**

Μπορεί ένα όν παντοδύναμο να κατασκευάσει μια πέτρα, που να μην μπορεί να τη σηκώσει; Μπορεί γιατί είναι παντοδύναμο άρα μπορεί να κάνει τα πάντα. Ταυτόχρονα όμως δεν μπορεί, αφού αν κατάφερνε να την κατασκευάσει θα υπήρχε μια πέτρα που δεν θα μπορούσε να την σηκώσει!!

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η Απλοποίηση

Η Ελισάβετ στις εξετάσεις για να κάνει την πρόσθεση των κλασμάτων $\frac{16}{64}+\frac{19}{95}+\frac{26}{65}+\frac{49}{98}=$ σκέφτηκε να τα απλοποιήσει και διέγραψε τα ίδια ψηφία που υπήρχαν σε αριθμητή και παρονομαστή και έγραψε $=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{8}$. Είναι σωστό το αποτέλεσμα;

Η Θέα

Βρίσκεστε όρθιος στη θάλασσα, το ύψος των ματιών σας είναι π.χ. 2 μέτρα από το νερό, πόσα χιλιόμετρα μακριά βλέπετε; (Η Γη είναι σφαιρική με ακτίνα 6370 χιλιόμετρα).

Εννέα τετράγωνα

Μπορούμε να έχουμε 9 διαδοχικούς αριθμούς που το άθροισμα των τετραγώνων των 5 πρώτων ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των 4 άλλων;

Το αντιηλιακό

Το καλοκαίρι αγόρασα ένα αντηλιακό με δείκτη 15. Η Άννα πήρε ένα αντηλιακό με δείκτη 30. Πόσο χρόνο μπορεί να μείνει εκτεθειμένη στην υπεριώδη ακτινοβολία η Άννα αν χωρίς αντηλιακό ο χρόνος είναι 10 λεπτά;

Το κλάσμα

Ο Δημήτρης, μαθητής της Α΄ Λυκείου απλοποίησε ένα κλάσμα με όρους τετραψήφιους αριθμούς και προέκυψε το κλάσμα $\frac{2}{5}$. Ο μαθητής θυμάται ότι το κλάσμα είχε τη μορφή $\frac{ABBB}{BBB\Gamma}$. Ποιο μπορεί να ήταν το κλάσμα που απλοποίησε;

Top thirty

Σε ένα ραδιοφωνικό σταθμό στην αρχή κάθε εβδομάδας παίζεται το top thirty των τραγουδιών που ακούστηκαν την προηγούμενη εβδομάδα. Κάποια εβδομάδα λοιπόν, ***στη διαμόρφωση*** του top thirty παρατηρήθηκαν τα εξής:

1. Δεν υπήρξε τραγούδι ***που μπήκε στο*** *top thirty* με τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων με ***οποιοδήποτε*** άλλο τραγούδι
2. Κάθε τραγούδι ακούστηκε ***τουλάχιστον*** μία φορά
3. Εκτός των τραγουδιών του top thirty ακούστηκαν και άλλα τραγούδια

Αν υποθέσουμε ότι κάθε τραγούδι έχει διάρκεια περίπου 3 λεπτά τότε...

...ποιος είναι ο ελάχιστος συνολικός χρόνος που χρειάστηκε για να ακουστούν όλες οι επαναλήψεις των τραγουδιών που μπήκαν στο top thirty;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 118

Το κωνικό ποτήρι

Η κορυφή του κώνου είναι στη βάση του ποτηριού και η βάση του είναι τα χείλη του δηλαδή κύκλος ακτίνας R. Όταν το γεμίσουμε μέχρι τη μέση η επιφάνεια της πορτοκαλάδας είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας $\frac{R}{2}$. Ο συνολικός όγκος του ποτηριού είναι $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h$. Με το χυμό από ένα πορτοκάλι φτάνει στη μέση άρα ο όγκος του χυμού ενός πορτοκαλιού είναι $V_\pi=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h=\frac{1}{8}V$. Επομένως το ποτήρι γεμίζει με χυμό 8 πορτοκαλιών.

Τα κελιά

Ο πρώτος δεσμοφύλακας θα τα ανοίξει όλα. Στο τέλος θα μείνουν ανοιχτά όσα από τα κελιά έχουν περιττό αριθμό διαιρετών όπως π.χ. 4=1,2,4 ή 64=1,2,4,8,16,32,64. **Δηλαδή των αριθμών που είναι τέλεια τετράγωνα.**

Ηλικίες

Ποιος είναι μεγαλύτερος: Το γινόμενο 7·9=63 μας δίνει την ηλικία τους, άρα γεννήθηκαν και οι δύο, πριν 63 χρόνια και είναι της ίδιας ηλικίας.

Η τούρτα: Αφού ήταν με συμμαθητές είχε ηλικία από 6 έως 12 ετών, τώρα έχει 8πλάσια ηλικία από 48 έως 96 ετών. Άρα γεννήθηκε μεταξύ των ετών 1924 έως 1972.

Ο Περικλής: Πριν 42 χρόνια ήταν 6 ετών δηλαδή το $\frac{1}{7}$ του 42. Άρα τώρα είναι 48 ετών.

Ποιο χρόνο γεννήθηκε: Η Αγγελική το 2020 είχε τα $\frac{3}{4}$ του x που ήταν ίσο με x–7, όπου x η ηλικία του αδελφού της. Άρα ήταν $\frac{3}{4}\cdot x=x-7$ και x=28. Δηλαδή γεννήθηκε το 1992.

e- Ημερίδα:

Τα Μαθηματικά στην πανδημία του Covid - 19

Στις 24 Ιανουαρίου 2021, έγινε η e **- ημερίδα** στο διαδίκτυο, μέσω σχετικής πλατφόρμας zoom, με κεντρική ομιλήτρια την **Βάνα Σύψα**, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Επιδημιολογίας της Ιατρικής Στατιστικής της Ιατρικής Σχολής του ΕΚΠΑ με θέμα: Τα Μαθηματικά στην πανδημία του Covid – 19.

Στις σύντομες μεστές αναφορές της εισήγησης, έγινε μια σύντομη **ιστορική αναδρομή** για τις πανδημίες, για το ποσοστό μόλυνσης στο επόμενο χρονικό διάστημα, για τα μέτρα που πρέπει να παρθούν και για τις στρατηγικές αντιμετώπισης, τώρα και στο μέλλον.

Με πολύ καλή μαθηματική προσέγγιση, αναλύθηκαν το R_0 (Βασικός αριθμός αναπαραγωγής, που καθορίζει την πορεία της επιδημίας) τι γίνεται αν $R_0<1$, $R_0>1$, από ποιους παράγοντες εξαρτάται και η συμπεριφορά της εκθετικής μορφής του.

Επίσης αναφέρθηκε στη συλλογική ανοσία – ανοσία αγέλης, στα μαθηματικά μοντέλα πρόβλεψης (SIR), την αποτελεσματικότητα των μέτρων, στην τήρηση των μέτρων ατομικής υγιεινής αποστάσεων και στην επίδραση του εμβολιασμού για την επίτευξη των στόχων. Ενδεικτικό της επιστημονικής αναφοράς, η σχετική πληροφορία ότι στην Μ. Βρετανία υπήρχαν 68 άτομα, επιστημονικό προσωπικό, στην αρχή της πανδημίας του role of modeling, για την καλή επεξεργασία πρόβλεψης. Την ημερίδα την παρακολούθησε πολύς κόσμος, κυρίως από το μαθηματικό χώρο και όχι μόνο. Στο τέλος – έγιναν παρεμβάσεις με σχετικές αναφορές στο θέμα, από τους Δάσιο, Μπουρνέτα, Παπασταυρίδη, Καλαβάση, Κρητικό, Μενεξέ, Μωϋσιάδη, Νάκο και Αδάμ που είχαν να κάνουν κυρίως, με την αξιοπιστία βέλτιστων μοντέλων πρόβλεψης, των προσωπικών ερμηνειών, της αμεσότητας λειτουργίας της κοινωνικής αποδοχής των μέτρων, της διεπιστημονικότητας και της διαφορετικότητας στην αντιμετώπιση μεταξύ των χωρών.

Είναι φανερό πιά, ότι έχουμε περάσει σε νέες μορφές της πραγματικότητας, όπου τα μαθηματικά μοντέλα, ο ψηφιακός κόσμος, η υγεία, η αλληλεπίδραση των χωρών στο παγκόσμιο γίγνεσθαι και η επιστήμη δημιουργούν νέα δεδομένα κανονικότητας.

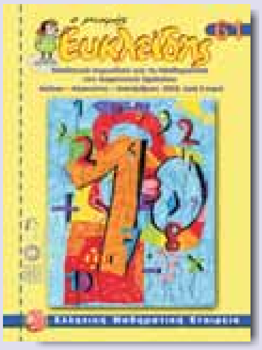
Η εκδήλωση που πραγματοποιήθηκε εκείνη την ημέρα, είναι διαθέσιμη σε video, στο κανάλι:

https://www.youtube.com/user/HellenicMathematical

Την όλη διοργάνωση της εκδήλωσης, που έγινε στην **Αθήνα**, την είχε η ΕΜΕ με συντονιστές: τον **Ανάργυρο Φελλούρη** ομότιμο Καθηγητή ΕΜΠ, πρόεδρο της ΕΜΕ και τον **Ιωάννη Εμμανουήλ** Κοσμήτορα της Σχολής Θετικών Επιστημών, ΕΚΠΑ, μέλος του Δ.Σ της ΕΜΕ.

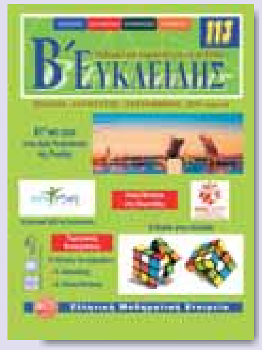
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€



Τιμή τεύχους: 3,5€

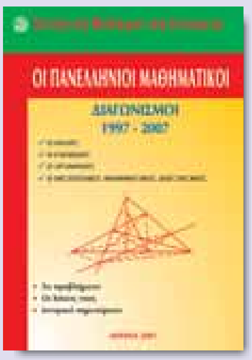
Διαγωνισμοί

Τιμή βιβλίου: 12€

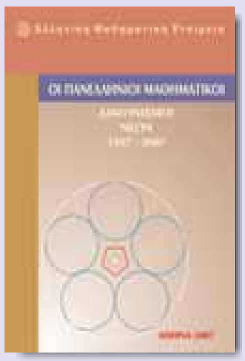
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

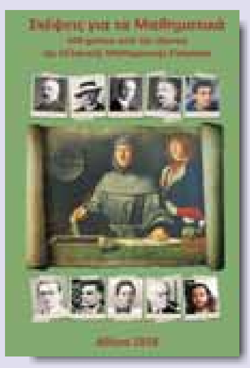


Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr