ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

114

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019 ευρώ 3,5

20
20

$$
\begin{array}{r}
= (20+20)\cdot(20+20) \\
20\cdot 20 \\
+ \quad 20 \\
\hline
2020
\end{array}
$$

Καλή Χρονιά

Μέναιχμος ο δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου

Μεσογειάδα 2019

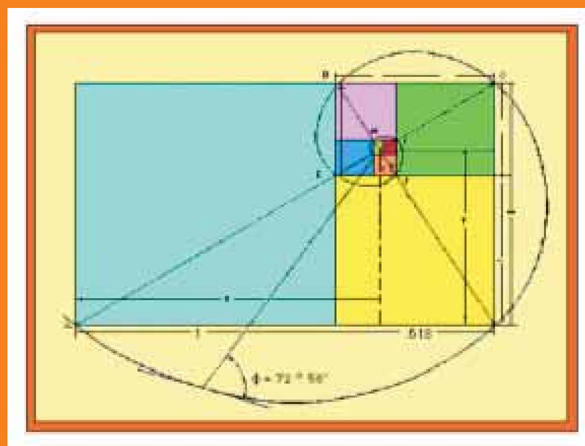
Θαλής 2019

Mundo Maya

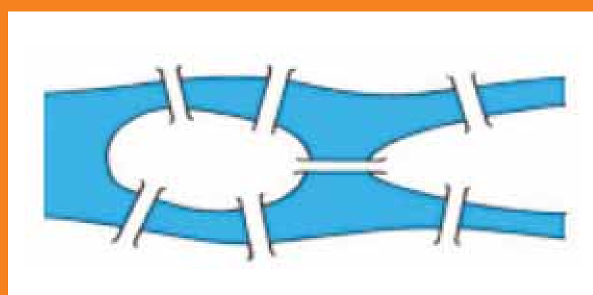
ετήσια Γ.Σ. της Ε.Μ.Ε.
8 Μάρτη 2020

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

... μια ιστορία για τα Μαθηματικά



... ένας κόσμος που ελπίζει



Οι επτά γέφυρες και τα γραφήματα

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 114 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2019 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Μέναιχμος ο Δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου 2
Οι ΕΠΤΑ Γέφυρες και τα Γραφήματα, ... 4
Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ... 9
Homo Mathematicus, ... 30

Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Ασκήσεις Άλγεβρας, ... 26
Γεωμετρία: Ασκήσεις με βοηθητική ευθεία, ... 30

Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Τριγωνομετρικές Εξισώσεις, ... 32
Γεωμετρία: Εμβαδά Ευθυγράμμων Σχημάτων, ... 38
Αναλυτική Γεωμετρία: Ευθεία Γραμμή, ... 43

Γ΄ Τάξη

Θέματα Διαφορικού Λογισμού για Επανάληψη, ... 46

Γενικά Θέματα

Το Βήμα του Ευκλείδη, ... 53
Αξιοσημείωτες τριγωνομετρικές ανισότητες 53
Διαφορικό και ο ρυθμός μεταβολής, ... 56
Χρήσιμες Επισημάνσεις Ασκήσεις, ... 63
Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικα, ... 66
Ο Ευκλείδης προτείνει..., ... 68
Τα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, ... 74
MUNDO MAYA, ... 77

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

πολλές ευχές για μια δημιουργική χρονιά

χαρούμενη,
αισιόδοξη,
και αποτελεσματική
σε κάθε προσπάθεια, φιλοδοξία, όνειρο ...

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄ Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄ Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄ Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Το 2020 να έχει χαρά
και ελπίδα για το καλύτερο ...

$$2020 = 40^2 + 4 \cdot 10^2 + 20$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	9 Νοεμβρίου	2019
Ευκλείδης:	18 Ιανουαρίου	2020
Αρχιμήδης:	22 Φεβρουαρίου	2020

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στην επικαιρότητα των Μαθηματικών

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Υπεύθυνοι για το Δ.Σ
Ζώτος Ευάγγελος
Κερασαρίδης Γιάννης

Επιτροπή Έκδοσης
Αντωνόπουλος Νίκος
Αργυράκης Δημήτριος
Βακαλόπουλος Κώστας
Λουριδάς Γιάννης
Λουρίδας Σωτήρης
Τσίτος Χρήστος
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Συντακτική Επιτροπή
Ανδρουλακάκης Νίκος
Αντωνόπουλος Νίκος
Απατσίδης Δημήτρης
Αργυράκης Δημήτριος
Βακαλόπουλος Κώστας
Βλάχος Σπύρος
Γαμβρέλλης Αργύρης
Γιώτης Γιάννης
Δρούτσας Παναγιώτης
Ζέρβας Νίκος
Ζώτος Ευάγγελος
Κακαβάς Απόστολος
Καμπούκος Κυριάκος
Καρκάνης Βασίλης
Κατσούλης Γιώργος
Καρδαμίτσης Σπύρος
Κερασαρίδης Γιάννης
Κονόμης Άρτι
Κουτσούρης Λέων
Κυβερνήτου Χρυσταλένια
Κυριακόπουλος Αντώνης
Κυριακοπούλου Κων/να
Λαζαρίδης Χρήστος
Λουριδάς Γιάννης
Λουρίδας Σωτήρης
Μαλαφέκας Θανάσης
Μανιατοπούλου Αμαλία
Μαυρογιαννάκης Λεωνίδας
Μήλιος Γεώργιος
Μπερσίμης Φραγκίσκος
Μπρίνος Παναγιώτης
Μπρούζος Στέλιος
Μώκος Χρήστος
Μωραΐτη Κατερίνα
Σίσκου Μαρία
Στεφανής Παναγιώτης
Στρατής Γιάννης
Ταπεινός Νικόλαος
Τουρναβίτης Στέργιος
Τριάντος Γεώργιος
Τσικαλουδάκης Γιώργος
Τσίτος Χρήστος
Τσιφάκης Χρήστος
Τσουλουχάς Χάρης
Τυρλής Ιωάννης
Χριστόπουλος Θανάσης
Χριστόπουλος Παναγιώτης
Ψύχας Βαγγέλης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται: (1). Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ. Γραφείο Αθήνα 54 Τ.Θ. 30044 (2). Στην ιστοσελίδα της Ε.Μ.Ε., όπου υπάρχει δυνατότητα τραπεζικής συναλλαγής με την τράπεζα EUROBANK (3). Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. (4). Με αντικαταβολή, σε εταιρεία ταχυμεταφορών στο χώρο σας, κατά την παραλαβή.

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε. ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2019

ΠΡΟΣΚΛΗΣΗ

Καλούνται όλα τα τακτικά και αντεπιστέλλοντα μέλη της Ε.Μ.Ε. σε τακτική Γενική Συνέλευση, την **Κυριακή** *23* **Φεβρουαρίου** *2019*, ώρα **10.00** το πρωί, **στην αίθουσα ΑΔ του 1ου ορόφου στο Κτίριο του Νέου Χημείου του Πανεπιστημίου Αθηνών (Ναυαρίνου 13α, Αθήνα)**.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Απολογισμός του Δ.Σ. για το έτος 2019
2. Ισολογισμός και απολογισμός της διαχείρισης για το 2019
3. Έκθεση της Εξελεγκτικής Επιτροπής
4. Έγκριση του ισολογισμού, απολογισμού και πεπραγμένων του Δ.Σ.
5. Έγκριση του προϋπολογισμού για το 2020
6. Ρύθμιση οφειλών μελών
7. Εξουσιοδότηση για την αγορά αποθηκευτικού χώρου ή γραφείου ή και πώληση αυτών
8. Προτάσεις μελών

Σε περίπτωση που **δεν** υπάρξει απαρτία (πρέπει να παρίσταται τουλάχιστον το 1/3 των μελών της Ε.Μ.Ε., που έχουν εκπληρώσει τις **ταμειακές** τους υποχρεώσεις τουλάχιστον και για το 2019 ή έχουν εγγραφεί στα μητρώα της ΕΜΕ το 2020), η Γενική Συνέλευση **θα γίνει** την

Κυριακή 8 ΜΑΡΤΙΟΥ 2020

στις 10 το πρωί στον ίδιο χώρο και με τα ίδια θέματα, οπότε, σύμφωνα με το καταστατικό, θεωρείται σε απαρτία με όσα μέλη κι αν παρίστανται.

Τα πλήρη στοιχεία του απολογισμού δράσης του Δ. Σ., ο ισολογισμός και απολογισμός της διαχείρισης 2019, ο προϋπολογισμός για το 2020 και η έκθεση της Εξελεγκτικής Επιστροπής θα ανακοινωθούν στο δικτυακό τόπο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, www.hms.gr.

Με συναδελφικούς χαιρετισμούς

Ο Πρόεδρος	Ο Γενικός Γραμματέας
Ανάργυρος Φελλούρης	Παναγιώτης Δρούτσας

Ο Δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου στα Μαθηματικά Μέναιχμος (375 – 300 π.Χ.)

Ευάγγελος Σπανδάγος

Έργο του γλύπτη **Δημήτρη Αρμακόλα** με τίτλο: "Μέγας Αλέξανδρος ΙΙ"

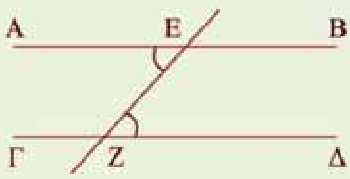
Ο **Μέγας Αλέξανδρος** (356 – 323 π.Χ.) κατά τα νηπιακά και παιδικά του χρόνια είχε ως δασκάλους τη μητέρα του **Ολυμπιάδα**, τον θείο του **Λεωνίδα τον Μολοσσό** και τον **Λυσίμαχο τον Ακαρνανέα.** Σύμφωνα με τους δασκάλους του είχε μεγάλη αντίληψη και γενικά μεγάλα πνευματικά προσόντα. Αναφέρεται από διάφορους ιστορικούς ένα πρόβλημα, το οποίο έλυσε σε ηλικία 6 ετών: "Ἀριθμὸν διψήφιον λα′ γράψον τὸ πλῆθος ἐξ ἕξ γ′ "Να γράψεις τον αριθμό 31 με 6 τριάρια.

Η απάντηση ήταν $31 = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 + \frac{3}{3}$.

Οι διάφορες διαπιστώσεις για τη μεγαλοφυΐα του **Αλέξανδρου** συνετέλεσαν, ώστε να αποφασίσει ο πατέρας του να του δώσει μια μόρφωση ανωτέρου επιπέδου με δασκάλους με μεγάλο επίπεδο μόρφωσης και με έντονη πνευματική δημιουργία. Το έτος λοιπόν 342 π.Χ., όταν ο **Αλέξανδρος** ήταν 13 ετών, ο **Φίλιππος ο Β′**, κάλεσε τον μεγάλο φιλόσοφο **Αριστοτέλη** (384 – 323 π.Χ.) να αναλάβει την εκπαίδευσή του. Ο **Αριστοτέλης** δέχτηκε την πρόσκληση και το ίδιο έτος ανέλαβε την εκπαίδευση του διαδόχου του Μακεδονικού θρόνου και 10 περίπου παιδικών φίλων του. Σύμφωνα με τον ιστορικό των Μαθηματικών και της Αστρονομίας **Εύδημο τον Ρόδιο** ($4^{ος}$ π.Χ. αιώνας), μετά τα πρώτα μαθήματα ο **Αριστοτέλης** εισηγήθηκε στον βασιλιά **Φίλιππο** να προσλάβει ως καθηγητή των Μαθηματικών και της Αστρονομίας τον διακεκριμένο μαθηματικό **Μέναιχμο** (375 – 300 π.Χ.), φίλο και συμφοιτητή του **Αριστοτέλους** στην Ακαδημία του **Πλάτωνος** και μετέπειτα καθηγητή σ' αυτή. Η αιτία ήταν ότι ο μεγάλος θετικός επιστήμων και φιλόσοφος δεν μπορούσε να ανταποκριθεί στις προχωρημένες μαθηματικές ερωτήσεις του **Αλεξάνδρου**, μια από τις οποίες ήταν: "Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε το κέντρο μιας σφαίρας;" Ο **Φίλιππος** δέχτηκε την υπόδειξη του **Αριστοτέλους** και έστειλε σχετική επιστολή στον **Μέναιχμο**, ο οποίος αποδέχθηκε την πρόσκληση. Σύμφωνα με τον **Εύδημο**, ο **Αλέξανδρος** υποδέχτηκε τον δάσκαλό του στα Μαθηματικά με τη φράση: "Καὶ τῶν σχημάτων κάλλιστον σφαῖρα εἶναι τῶν στερεῶν τῶν δ' ἐπιπέδων κύκλος." Ο **Μέναιχμος** άρχισε τη διδασκαλία του στην Επιπεδομετρία, την Στερεομετρία και την Αστρονομία σ' ένα κλίμα φιλικής αντιμετώπισης των μαθητών του.

Σύμφωνα με μαρτυρία του **Πλουτάρχου** ($1^{ος}$ – $2^{ος}$ μ.Χ. αιώνας), ο **Αλέξανδρος**, κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος, μετά από λίγη σκέψη, απέδειξε την επόμενη πρόταση που έδωσε ο **Μέναιχμος** στην τάξη του:

"Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλας ποιῇ παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλας αἱ εὐθεῖαι."



(Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη έτσι, ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, οι ευθείες είναι παράλληλες.)

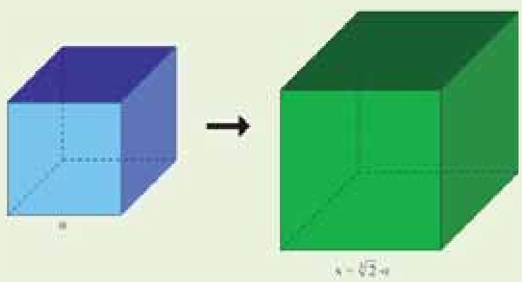
Μετά από τριετή ή τετραετή φοίτηση ο νεαρός **Αλέξανδρος**, ηλικίας 16 ή 17 ετών ζήτησε από τον πατέρα του να διακόψει τα μαθήματα για να ασχοληθεί με στρατιωτικά και διοικητικά θέματα, όπως κι έγινε. Ο **Μέναιχμος** αποχαιρέτησε τον **Φίλιππο**, τον **Αλέξανδρο** και τα άλλα παιδιά και αναχώρησε για τας Αθήνας, όπου άρχισε ξανά τη διδασκαλία στην Ακαδημία του **Πλάτωνος**.

Ο Αριστοτέλης παρέμεινε στην υπηρεσία της Μακεδονικής αυλής έως το 335 π.Χ., οπότε επέστρεψε στας Αθήνας και ίδρυσε τη φιλοσοφική του Σχολή, το "Λύκειο". Σύμφωνα με τον Ερατοσθένη (276 – 194 π.Χ.) η "αποχαιρετιστήρια άσκηση του Μεναίχμου προς τον Αλέξανδρο και τους συμμαθητές του ήταν η εξής: "Λαβὲ ἀριθμὸν τριψήφιον καὶ ἀντίστρεψον τῶν ψηφίων αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὸν δοθέντα ἀφαίρεσον. Εἰς τὸν λοιπὸν πρόσθεσον τὸν ἐξ ἀντιστροφῆς ἀυτοῦ. Ἄθροισμα ληπτέον πάντα απθ′ (= 1.089).

Παράδειγμα. Έστω ο αριθμός 925. Τον αντιστρέφουμε, οπότε προκύπτει ο αριθμός 529. Είναι $925-529=396$. Αντιστρέφουμε τα ψηφία του 396, οπότε προκύπτει 693. Έχουμε $396+693=1.089$

Ο **Μέναιχμος** γεννήθηκε στην Προκόννησο της Προποντίδας ή στην Αλωπεκόννησο της Θράκης. Θεωρείται δε ως ένας από τους μεγάλους μαθηματικούς της Αρχαίας Ελλάδος. Υπήρξε μαζί με τον επίσης μαθηματικό αδελφό του **Δεινόστρατο,** μαθητής του **Πλάτωνος** και του **Ευδόξου του Κνιδίου** στην Ακαδημία. Υπήρξε δε συμμαθητής του **Αριστοτέλους**. Αργότερα έγινε καθηγητής στην Ακαδημία. Οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί διέκριναν τρία είδη ορθών κώνων: τον οξυγώνιο, τον ορθογώνιο και τον αμβλυγώνιο.

Ο **Μέναιχμος** από καθένα από τα τρία αυτά είδη επινόησε τις τρεις κωνικές τομές από επίπεδο κάθετο προς τη βάση του κώνου, το οποίο διέρχεται από την κορυφή του κώνου. Τις κωνικές αυτές τομές ο **Μέναιχμος** τις ονόμασε "τομή οξυγωνίου κώνου" (έλλειψη), "τομή ορθού κώνου" (παραβολή) και "τομή αμβλυγωνίου κώνου" (υπερβολή). Οι καμπύλες ονομάσθηκαν "Μεναίχμιος τριάς".



Μια μεγάλη εργασία του **Μεναίχμου** ήταν η λύση του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου. Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει η εξής διευκρίνιση: Στην ιστορία των Μαθηματικών αναφέρονται τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της Γεωμετρίας. Αυτά είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου και η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας. Αυτά τα προβλήματα είναι **πράγματι άλυτα**, στα **πλαίσια** της **Ευκλείδειας Γεωμετρίας**, η οποία επιτρέπει μόνο τη χρήση του **κανόνα** (χάρακα) και του διαβήτη. Αν όμως παρακαμφθεί αυτός ο καταστατικός περιορισμός της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, τα προβλήματα αυτά επιλύονται. Σχετικά με την προέλευση του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου υπάρχουν δύο απόψεις: Η μία, η επικρατέστερη, έχει σχέση με την κατασκευή τετραγώνου διπλάσιου εμβαδού από ένα δοσμένο τετράγωνο, οπότε το πρόβλημα μεταφέρθηκε και στον χώρο, δηλαδή κατασκευή κύβου διπλάσιου όγκου από έναν δοσμένο κύβο. Η άλλη άποψη άπτεται του μύθου. Κάποτε στη νήσο Δήλο επικράτησε ένας λοιμός. Οι κάτοικοι έστειλαν αντιπροσωπεία στο Μαντείο των Δελφών με το ερώτημα τι έπρεπε να κάνουν για να σταματήσει το κακό. Η ιέρεια του Ναού του **Απόλλωνος** απάντησε ότι έπρεπε να διπλασιάσουν τον όγκο του βωμού του Ναού του **Απόλλωνος**, ο οποίος είχε σχήμα κύβου.

Το πρόβλημα το έλυσε ο **Μέναιχμος**, όπως μαρτυρεί ο **Ευτόκιος** (6^{ος} μ.Χ. αιώνας). Ο **Μέναιχμος** έδωσε λύση στο πρόβλημα με τη χρήση δύο μέσων αναλόγων x και ψ σε συνεχή αναλογία:

$\dfrac{2\alpha}{\psi}=\dfrac{\psi}{x}=\dfrac{x}{\alpha}$ (1), (α σταθερά). Η (1) δίνει $x^2=\alpha\psi$ (2) και $x\psi=2\alpha^2$ (3). Η (2) δίνει $\psi=\dfrac{x^2}{\alpha}$ (4).

Η (3) λόγω της (4) δίνει $x\dfrac{x^2}{\alpha}=2\alpha^2$ ή $\dfrac{x^3}{\alpha}=2\alpha^2$ ή $x^3=2\alpha^3$. Η τελευταία ισότητα δίνει τη λύση στο Δήλιο πρόβλημα, δηλαδή ο όγκος κύβου ακμής x είναι ίσος με τον διπλάσιο όγκο κύβου ακμής α.

Παρατήρηση: Φυσικά ο Μέναιχμος δεν χρησιμοποίησε τους συμβολισμούς αυτούς, αλλά ξεκίνησε από το πρόβλημα: "Έστω ότι δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Ζητάμε να βρούμε δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα, μέσα ανάλογα αυτών, σε συνεχή αναλογία." Για την εύρεση αυτή χρησιμοποίησε, αφού την απέδειξε, την **καμπύλη παραβολή**. Ο **Μέναιχμος** ήταν ο πρώτος στον Κόσμο μαθηματικός, ο οποίος μελέτησε τη γεωμετρική σημασία και τις ιδιότητες των καμπύλων αυτών, δηλαδή της έλλειψης, της υπερβολής και της παραβολής. Θεωρείται δε ως ο θεμελιωτής της Αναλυτικής Γεωμετρίας (δηλαδή της αλγεβροποιημένης Γεωμετρίας).

ΟΙ ΕΠΤΑ ΓΕΦΥΡΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Στις σημερινές πόλεις δεν θα μπορούσαμε να κυκλοφορήσουμε αν δεν υπήρχαν οι φωτεινοί σηματοδότες (φανάρια). Δεν θα μπορούσαμε να διασχίσουμε το δρόμο αν δεν υπήρχε το κόκκινο (Γρηγόρης) και το πράσινο (Σταμάτης), να εναλλάσσονται σε σωστό χρόνο και διάρκεια. Η εφαρμογή αυτή ανήκει στα «***διακριτά***» μαθηματικά.

Μια φορά και ένα καιρό σε μια πόλη της Ρωσίας με το όνομα **Königsberg** σημερινό **Kaliningrad** (Καλίνινγκραντ) υπήρχαν 7 γέφυρες. Η πόλη είναι δίπλα στον ποταμό Pregel (Πρέγκελ), όμως έχει και δυο νησιά που για να επικοινωνήσουν οι κάτοικοι μεταξύ τους είχαν δημιουργήσει 7 γέφυρες. Η μία γέφυρα συνδέει τα δύο νησιά μεταξύ τους, τα υπόλοιπα γεφύρια συνδέουν τις όχθες με τα νησιά.

Οι κάτοικοι του Königsberg συνήθιζαν να κάνουν τον περίπατο τους στις γέφυρες, αλλά όταν οι άνθρωποι είναι χαλαροί στον περίπατο έχουν δημιουργική φαντασία. Έτσι σκέφτηκαν κάποιοι: **Είναι δυνατό να κάνουμε τον περίπατο μας, να περάσουμε μόνο μια φορά και από τις 7 γέφυρες και να βρεθούμε πάλι στο σημείο από το οποίο ξεκινήσαμε;**

Γρίφος

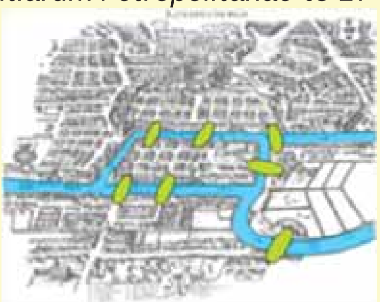
Το πρόβλημα αυτό τελικά έγινε ένας Γρίφος. Πολλοί ήταν εκείνοι που το μελέτησαν αλλά κανείς δεν κατάφερε να το λύσει. Μα πως να το λύσει ο καθένας αφού αυτό ήταν ένα δύσκολο πρόβλημα και ήθελε το δάσκαλό του, όπως λέμε.

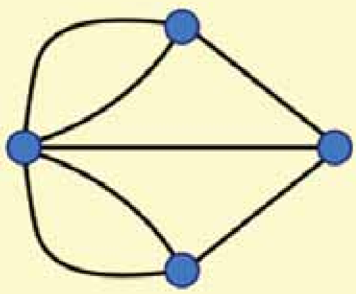
Αυτός δεν ήταν άλλος, από το μεγάλο Ελβετό μαθηματικό του $18^{ου}$ αιώνα, **Leonhard Euler (1707-1783).** Ο **Euler** (Όιλερ) τότε βρισκόταν στην Αγία Πετρούπολη στην υπηρεσία της Τσαρίνας Αικατερίνης της μεγάλης.

Το 1736 ο **Euler** πέρασε από το Königsberg άκουσε το πρόβλημα και έγραψε:

«Το πρόβλημα που, απ' όσο διαπιστώνω, πρέπει να είναι πολύ γνωστό, διατυπώνεται ως έξης: στην πόλη του Κένισμπεργκ, στην Πρωσία, υπάρχει ένα νησί το Κνάπχοφ, περιστοιχισμένο από τους παραποτάμους του Πρέγκελ. Επτά γέφυρες περνούν πάνω από το ποτάμι και τίθεται το ερώτημα αν υπάρχει διαδρομή η οποία διασχίζει κάθε μια από τις γέφυρες μια μόνο φορά. Πληροφορήθηκα ότι κάποιοι λένε πως δεν γίνεται και άλλοι διερωτώνται, κανένας δεν υποστηρίζει πραγματικά ότι υπάρχει αυτή η διαδρομή».

Ό **Euler** ασχολήθηκε με αυτό το Γρίφο και φυσικά έδωσε λύση. Απέδειξε ότι μια τέτοια διαδρομή δεν υπάρχει. Όμως η απόδειξη αυτή ήταν η αρχή και η αφορμή για τη δημιουργία ενός νέου κλάδου των μαθηματικών στα «*διακριτά μαθηματικά*» που ονομάζεται **θεωρία γράφων ή γραφημάτων**. Το έργο του Euler παρουσιάστηκε στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης στις 26 Αυγούστου 1735 και δημοσιεύθηκε στο περιοδικό *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* το 1741.

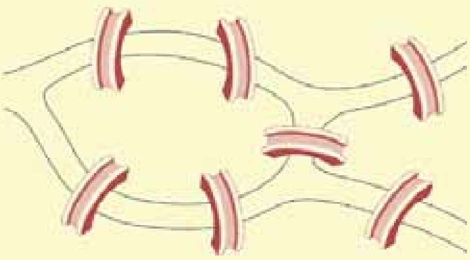


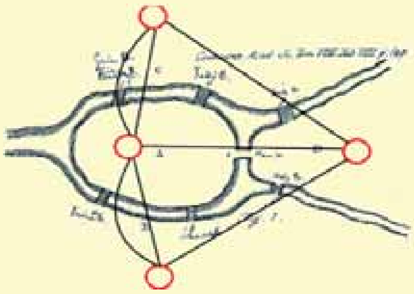


Ο Euler μοντελοποίησε το πρόβλημα-Γρίφο, έτσι το έλυσε. Ο Euler έκανε ένα σχέδιο, έφτιαξε μια απλοποιημένη αναπαράσταση στην όποια τα κομμάτια ξηράς τα αντικατέστησε με σημεία και τις γέφυρες τις απεικόνισε με γραμμές.

Στην συνέχεια, παρατήρησε ότι για να πετύχει κανείς αυτό το ταξίδι, να περάσει δηλαδή από κάθε γέφυρα μια μόνο φορά, έπρεπε κάθε σημείο να συνδέεται με άρτιο αριθμό γραμμών διότι, όταν ο περιπατητής περνά από ένα κομμάτι ξηράς, πρέπει να μπει από μια γέφυρα και να βγει από μια άλλη γέφυρα.

Υπάρχουν όμως μόνο δυο εξαιρέσεις σε αυτόν τον κανόνα: όταν ο περιπατητής αρχίζει ή τελειώνει το ταξίδι. Στην αρχή του ταξιδιού, ο περιπατητής αφήνει ένα κομμάτι ξηράς και χρειάζεται μια και μοναδική γέφυρα για να βγει, και στο τέλος ο περιπατητής φτάνει σε ένα κομμάτι ξηράς και χρειάζεται μόνο μια γέφυρα για να μπει. Αν το ταξίδι αρχίζει και τελειώνει σε διαφορετικές τοποθεσίες, τότε οι δυο αυτές εκτάσεις επιτρέπεται να έχουν περιττό αριθμό γεφυρών. Αν όμως το ταξίδι αρχίζει και τελειώνει στο ίδιο μέρος, τότε το σημείο αυτό, όπως και όλα τα αλλά σημεία, πρέπει να έχει άρτιο αριθμό γεφυρών. Έτσι ο **Euler** κατέληξε στο συμπέρασμα ότι για οποιοδήποτε δίκτυο γεφυρών, ένας περίπατος, διασχίζοντας κάθε γέφυρα μια μόνο φορά, είναι δυνατόν μόνο στην περίπτωση που όλες οι εκτάσεις ξηράς έχουν άρτιο αριθμό γεφυρών. Στην περίπτωση του Königsberg υπάρχουν συνολικά τέσσερις εκτάσεις ξηράς και όλες συνδέονται με περιττό αριθμό γεφυρών. Τρία σημεία έχουν από τρεις γέφυρες και ένα πέντε γέφυρες.





Στην απόδειξή του Euler πρωτεύοντα ρόλο είχε το δίκτυο των συνδέσεων ανάμεσα στα διαφορετικά τμήματα της πόλης και όχι η θέση τους ή οι αποστάσεις μεταξύ τους.

Η ιστορία των γεφυρών του Königsberg είναι μία ιστορία που κερδίζει το ενδιαφέρον των μαθηματικών, των μηχανικών, των αρχιτεκτόνων, είναι σημαντική γιατί γέννησε ένα νέο τρόπο προσέγγισης του χώρου και της γεωμετρίας. Αντί να ενδιαφερόμαστε για τις διαστάσεις, τις αποστάσεις και τις γωνίες μεταξύ γεωμετρικών οντοτήτων, αυτή η νέα προοπτική εστίαζε στο πως είναι συνδεδεμένες αυτές οι οντότητες. Αυτή ήταν η αρχή της **τοπολογίας**, ενός από τους πιο ισχυρούς κλάδους της μαθηματικής επιστήμης που αναπτύχθηκε τον 20$^{\text{ο}}$ αιώνα.

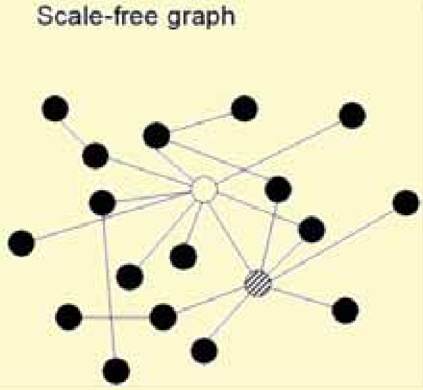
ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

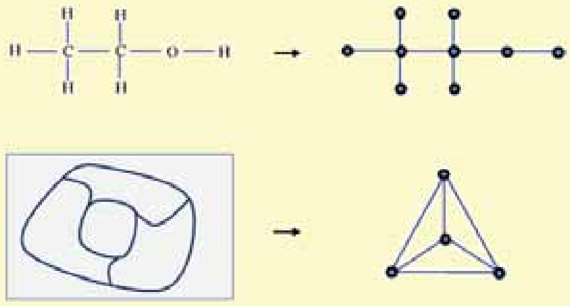
Η **θεωρία γράφων ή γραφημάτων** είναι ένα γνωστικό πεδίο στα διακριτά μαθηματικά, με εφαρμογές στην Πληροφορική, τη Χημεία, την Κοινωνιολογία, την Αρχαιολογία, τη Βιολογία, τους φωτεινούς σηματοδότες των δρόμων, στον έλεγχο της εναέριας κυκλοφορίας των αεροπλάνων, κ.ά..

Τι είναι γράφημα; Σε μία πρώτη προσέγγιση θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένα γράφημα **(graph)** είναι ένα μαθηματικό ή συνδυαστικό αντικείμενο που μπορεί απλά και εύκολα να αναπαρασταθεί με εικόνες ή, ισοδύναμα, που επιδέχεται μία απλή και εύκολη εικονογραφημένη αναπαράσταση. Η Θεωρία Γραφημάτων, ασχολείται με την απεικόνιση πολύπλοκων ή μη προβλημάτων μέσω της αναπαράστασής τους σε σχήματα.

Ένα γράφημα είναι ένα ζεύγος συνόλων (V,E), όπου V είναι ένα πεπερασμένο μη-κενό σύνολο n στοιχείων και E ένα πεπερασμένο σύνολο μη-διατεταγμένων ζευγών με m στοιχεία του συνόλου V.

Τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται **κόμβοι** (vertices) και το V σύνολο κόμβων (vertex set), ενώ τα στοιχεία του συνόλου E ονομάζονται **ακμές** (edges) και το E σύνολο ακμών (edge set). Επομένως, ένα γράφημα είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο που ορίζεται αυστηρά με δύο σύνολα: το σύνολο κόμβων και το σύνολο ακμών. Αν μέσα σε ένα γράφημα υπάρχει μια διαδρομή σαν αυτή των 7 γεφυρών λέγετε **περίπατος του Euler.**





Η αναπαράσταση του γραφήματος γίνεται: των κόμβων με σημεία (σχηματικά, με μικρούς κύκλους), ενώ οι ακμές με ευθείες ή τεθλασμένες γραμμές, στα κατευθυνόμενα ή προσανατολισμένα γραφήματα οι ακμές απεικονίζονται με διάνυσμα. Ο βαθμός ενός κόμβου είναι ο αριθμός των ακμών που τον αγγίζουν.

Η θεωρία γραφημάτων μπορούμε να πούμε ότι είναι η μελέτη των γραφημάτων και των σχέσεων τους. Με γραφήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν πολλά προβλήματα, χαρακτηριστικά είναι το πρόβλημα του **πλανόδιου πωλητή**, το πρόβλημα του **Κινέζου ταχυδρόμου**, (που είναι παρόμοια με τις 7 γέφυρες), **ο Χρωματισμός** (που διατυπώθηκε από τον Möbius το 1840 κι αφορά στη δυνατότητα χρωματισμού οποιουδήποτε χάρτη με τέσσερα μόνο χρώματα που λύθηκε το 1976), κ.ά., όπως π.χ. τα δίκτυα υπολογιστών, όπου το διάγραμμα ενός δικτύου μοντελοποιείται ως ένα απλό κατευθυνόμενο γράφημα. Οι κατηγορίες των προβλημάτων είναι: Προβλήματα ύπαρξης, προβλήματα απαρίθμησης, προβλήματα βελτιστοποίησης, προβλήματα κατασκευής.

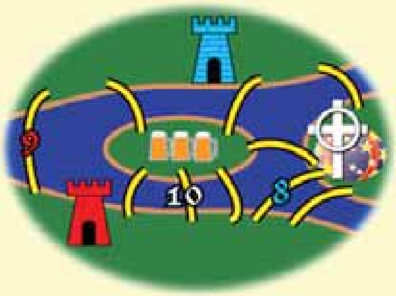
Οι μαθηματικοί υπολογισμοί επί των γραφημάτων γίνονται με συγκεκριμένους αλγόριθμους. Με τα γραφήματα ασχολήθηκαν πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο **Gauss, Hamilton**, κ.ά. καθώς και ο Έλληνας μαθηματικός **Μιχάλης Γιαννακάκης** καθηγητής πληροφορικής στο πανεπιστήμιο Coloumbia της Νέας Υόρκης και μέλος της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών των ΗΠΑ. Στις 4 Οκτωβρίου 2019 το τμήμα πληροφορικής και τηλεπικοινωνιών του ΕΚΠΑ ανακήρυξε επίτιμο διδάκτορα τον Μιχάλη Γιαννακάκη ο οποίος ασχολείται με την ανάλυση αλγορίθμων, θεωρία παιγνίων, κ.ά. Στη θεωρία γραφημάτων υπάρχει το θεώρημα **Tarjan-Yannakakis**.

Ο **W. Leibniz** σε επιστολή του το 1679 προς τον **C. Huygens** παρατήρησε ότι μας χρειάζεται ένα άλλο είδος Γεωμετρικής Ανάλυσης που να ασχολείται απευθείας με τη θέση, όπως την Άλγεβρα που ασχολείται με το μέγεθος.

Παραλλαγές στο γρίφο με τις 7 γέφυρες

Το αρχικό πρόβλημα με τις 7 γέφυρες χρησιμοποιεί κόμβους, που είναι όλοι όμοιοι (άγνωστοι), εκτός από τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται. Σε αυτό το πρόβλημα έχουν αναπτυχθεί παραλλαγές. Σε μια παραλλαγή οι κόμβοι **αναγνωρίζονται** - κάθε κόμβος έχει ένα μοναδικό όνομα ή χρώμα.

Η βόρεια όχθη του ποταμού καταλαμβάνεται από το κάστρο του **Μπλε Πρίγκιπα** , το νότιο από το κάστρο του **Κόκκινου Πρίγκιπα**. Στην ανατολική όχθη είναι η **εκκλησία** και στο μικρό νησί στο κέντρο είναι το **πανδοχείο**.



Η 8η Γέφυρα

Ο Μπλε Πρίγκιπας, μελέτησε τις γέφυρες της πόλης μέσω της θεωρίας των γραφημάτων και αποφασίζει να βρει ένα σχέδιο για να χτίσει μια όγδοη γέφυρα ώστε να μπορέσει να ξεκινήσει το βράδυ από το Μπλε κάστρο, να περπατήσει τις γέφυρες και να τελειώσει στο πανδοχείο για να νικήσει. Φυσικά, θέλει ο Κόκκινος Πρίγκιπας να αδυνατεί να επαναλάβει το θρίαμβο από το κόκκινο κάστρο. **Πού δημιούργησε ο μπλε πρίγκιπας την όγδοη γέφυρα;**

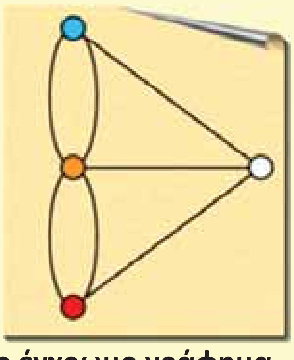
Η 9η Γέφυρα

Ο Κόκκινος Πρίγκιπας, εξοργισμένος από τη λύση του Μπλε στο πρόβλημα, θέλει να χτίσει μια ένατη γέφυρα, επιτρέποντάς του να ξεκινήσει από το κόκκινο κάστρο, να περπατήσει τις γέφυρες και να τελειώσει στο πανδοχείο. Έτσι θα πάρει εκδίκηση. Ο Μπλε δεν θα πρέπει πλέον να είναι σε θέση να περπατήσει τις γέφυρες ξεκινώντας από το κάστρο του και να τελειώνει στο πανδοχείο όπως και πριν. **Πού ο Κόκκινος Πρίγκιπας κατασκευάζει την ένατη γέφυρα;**

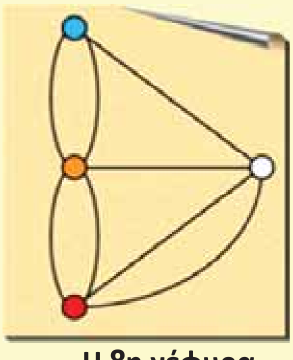
Η 10η Γέφυρα

Ο Μητροπολίτης παρακολουθούσε με έκπληξη αυτή τη μανία τους με τις γέφυρες. Θέλει να χτίσει μια δέκατη γέφυρα που να επιτρέπει σε όλους τους κατοίκους να περπατούν τις γέφυρες, να πηγαίνουν στην εκκλησία, και να επιστρέφουν στα σπίτια τους. **Πού ο Επίσκοπος θα κατασκευάσει τη δέκατη γέφυρα;**

Λύσεις



Το έγχρωμο γράφημα

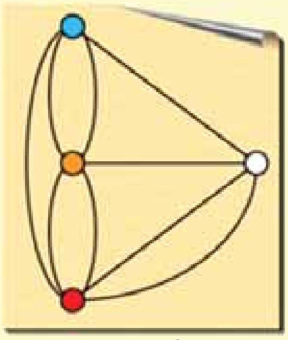


Η 8η γέφυρα

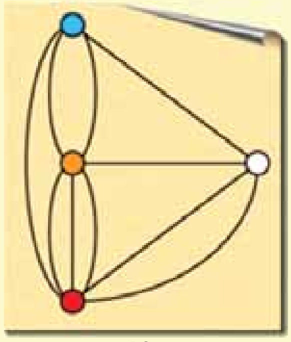
Δημιουργούμε ένα γράφημα χρωματίζουμε κάθε κόμβο και οι τέσσερις κόμβοι έχουν περιττό αριθμό ακμών.

Γέφυρα 8: Ένας περίπατος του **Euler** είναι δυνατός εάν ακριβώς ένας μηδενικός ή δύο κόμβοι έχουν έναν περιττό αριθμό ακμών. Εάν έχουμε 2 κόμβους με περίεργο αριθμό ακμών, ο περίπατος πρέπει να ξεκινά από έναν τέτοιο κόμβο και να τελειώνει στον άλλο. Δεδομένου ότι υπάρχουν μόνο 4 κόμβοι στο παζλ, η λύση είναι απλή. Η επιθυμητή βόλτα πρέπει να ξεκινά από τον μπλε κόμβο και να τελειώνει στον πορτοκαλί κόμβο. Έτσι, γίνεται μια νέα άκρη μεταξύ των άλλων δύο κόμβων. Δεδομένου ότι ο καθένας είχε προηγουμένως έναν περίεργο αριθμό ακμών, πρέπει τώρα να έχει ένα ζυγό αριθμό ακμών, ικανοποιώντας τις προϋποθέσεις.

Γέφυρα 9: Η 9η γέφυρα είναι εύκολη μόλις δούμε που έγινε η 8^{η}. Η επιθυμία είναι να ενεργοποιηθεί το κόκκινο κάστρο και να απαγορευτεί το μπλε κάστρο ως σημείο εκκίνησης. Ο πορτοκαλί κόμβος παραμένει το τέλος της διαδρομής και ο λευκός κόμβος δεν επηρεάζεται. Για να αλλάξετε την ισοτιμία τόσο των κόκκινων όσο και των μπλε κόμβων, σχεδιάστε μια νέα ακμή μεταξύ τους.



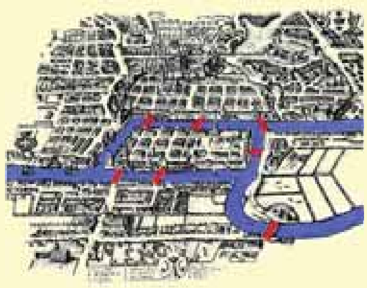
Η 9^{η}



Η 10η

Γέφυρα 10: Η 10η γέφυρα μας οδηγεί σε μια διαφορετική κατεύθυνση. Ο Επίσκοπος επιθυμεί κάθε πολίτης να επιστρέψει στην αφετηρία του. Αυτό είναι ένα κύκλωμα **Euler** και απαιτεί όλοι οι κόμβοι να είναι ομοιόμορφου μεγέθους. Μετά τη λύση της 9ης γέφυρας, οι κόκκινοι και οι πορτοκαλί κόμβοι έχουν περίεργο βαθμό, οπότε η ισοτιμία τους πρέπει να αλλάξει προσθέτοντας ένα νέο άκρο μεταξύ τους.

Αυτός είναι ο σημερινός χάρτης **του Καλίνινγκραντ**, εάν το επισκεφτείτε δεν θα δείτε τις 7 γέφυρες. Η πόλη του Königsberg **έχει σημαντική θέση** στη **Βαλτική**. Στη διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου ήταν ένα στρατηγικό σημείο για το Γερμανικό στόλο, για το λόγο αυτό υπέστη πολύ ισχυρούς βομβαρδισμούς από τους συμμάχους.Μεγάλο μέρος της πόλης ισοπεδώθηκε, μαζί και το ξακουστό πανεπιστήμιο στο οποίο ήταν ο Kant και ο Hilbert. Τρείς από τις παλιές γέφυρες σώθηκαν και είναι ακόμα εκεί: η «*ξύλινη*» γέφυρα (Holzbrücke), η «*μελί*» γέφυρα (Honigbrücke) και η «*ψηλή*» γέφυρα High (Hohebrücke). Δύο γέφυρες έχουν εξαφανιστεί εντελώς: η γέφυρα «*σφαγίων*» (Köttelbrücke) και η γέφυρα του «*σιδερά*» (Schmiedebrücke). Οι υπόλοιπες δύο γέφυρες, η πράσινη γέφυρα (Grünebrücke) και η γέφυρα του «*εμπόρου*» (Krämerbrücke) μετά τον πόλεμο ξαναχτίστηκαν για να δημιουργηθεί η λεωφόρος που διασχίζει την πόλη. Στο χάρτη οι θέσεις των γεφυρών που κατεστράφησαν και δεν υπάρχουν σήμερα επισημαίνονται **με κόκκινο χρώμα**.



80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

9 **Νοεμβρίου** 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α,β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε $10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta$ και $\alpha+\beta=7$.

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

Λύση

Από την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ και τις σχέσεις $10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta$ και $\alpha+\beta=7$.

παίρνουμε ότι: $$10\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]=29\alpha\beta \Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2-20\alpha\beta=29\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2=49\alpha\beta \overset{\alpha+\beta=7}{\Rightarrow} \alpha\beta=\frac{10(\alpha+\beta)^2}{49}=\frac{10\cdot 7^2}{49}\Rightarrow \alpha\beta=10.$$

Έτσι έχουμε: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{10}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2-\frac{2}{\alpha\beta}=\left(\frac{7}{10}\right)^2-\frac{2}{10}=\frac{49}{100}-\frac{2}{10}=\frac{29}{100}$.

Διαφορετικά, αφού πρώτα βρούμε ότι $\alpha\beta=10$ μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής: Από την εξίσωση $\alpha+\beta=7$ έχουμε ότι $\beta=7-\alpha$, οπότε με αντικατάσταση του β στην εξίσωση $\alpha\beta=10$ έχουμε:

$$\alpha(7-\alpha)=10 \Leftrightarrow 7\alpha-\alpha^2=10 \Leftrightarrow \alpha^2-7\alpha+10=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες $\alpha=\frac{7\pm 3}{2}\Leftrightarrow \alpha=5$ ή $\alpha=2$,

οπότε έχουμε: $(\alpha,\beta)=(5,2)$ ή $(\alpha,\beta)=(2,5)$. Με αντικατάσταση, λόγω συμμετρίας, βρίσκουμε άμεσα και από τα δύο ζεύγη: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{7}{10}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{29}{100}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020},\frac{3020}{3021},\frac{3021}{3022},\frac{4019}{4020},\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Λύση

Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο παρονομαστής τους είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής $\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{\nu+1-1}{\nu+1}=1-\frac{1}{\nu+1}$,

οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu}{\mu+1},\frac{\nu}{\nu+1}$ έχουμε:

$$\frac{\mu}{\mu+1} > \frac{\nu}{\nu+1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\mu+1} > 1-\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu+1} > -\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu+1} < \frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \mu > \nu .$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή, δηλαδή το $\frac{4021}{4022}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο αριθμητή, , δηλαδή το $\frac{3019}{3020}$.

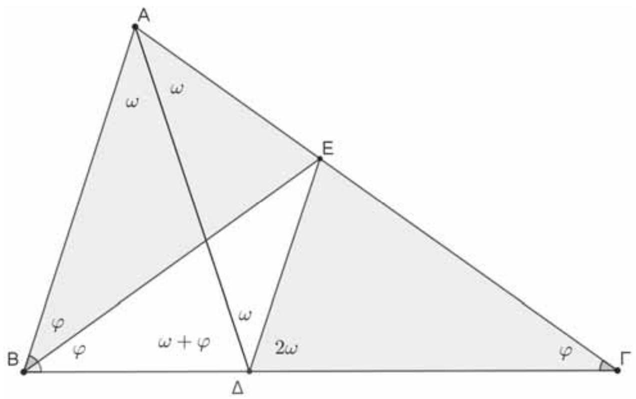
Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $A\hat{B}\Gamma = 2\cdot B\hat{\Gamma}A$. Η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $AB = \Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.**

(β) **Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$.**

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι $\hat{A} = B\hat{A}\Gamma = 2\omega$, $\hat{\Gamma} = B\hat{\Gamma}A = \varphi$, οπότε θα είναι $\hat{B} = A\hat{B}\Gamma = 2\varphi$.

(α) Από την υπόθεση έχουμε $E\hat{B}\Gamma = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} = B\hat{\Gamma}E$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με $BE = E\Gamma$.

Επιπλέον $A\hat{B}E = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} = B\hat{\Gamma}E$ και από την υπόθεση $AB = \Delta\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες.

(β) Από το ερώτημα (α) προκύπτουν τα εξής:

- $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}E = \hat{A} = 2\omega$
- $AE = E\Delta \Rightarrow$ το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές $\Rightarrow A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{A}}{2} = \omega = B\hat{A}\Delta$.

Επομένως οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από την ΑΔ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως θα έχουν και $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Delta \Rightarrow 2\omega = 2\varphi \Rightarrow \omega = \varphi$,

οπότε έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + \varphi = 180^0 \Rightarrow 5\omega = 180^0 \Rightarrow \omega = 36^0$. Άρα είναι $B\hat{A}\Gamma = 2\omega = 72^0$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $A = \frac{(\alpha^2-1)^3}{(\alpha-1)^4}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Για $\alpha \neq 1$, έχουμε: $A = \frac{(\alpha^2-1)^3}{(\alpha-1)^4} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+1)^3}{(\alpha-1)^4} = \frac{(\alpha+1)^3}{\alpha-1}$.

Αν τώρα θέσουμε $\alpha - 1 = x$, τότε έχουμε $\alpha + 1 = x + 2$ και

$$A=\frac{(x+2)^3}{x}=\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x}=x^2+6x+12+\frac{8}{x}.$$

Επομένως, ο ρητός αριθμός A είναι ακέραιος, αν και μόνον αν,

$\frac{8}{x}=\frac{8}{\alpha-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(\alpha-1)$ είναι διαιρέτης του $8\Leftrightarrow\alpha-1\in\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}\Leftrightarrow\alpha\in\{2,3,5,9.0,-1,-3,-7\}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε $\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta$ και $\alpha^3+\beta^3=90\alpha\beta$.

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha+\beta$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

Λύση

Από τις ταυτότητες $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ και $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

και τις σχέσεις $\alpha^3+\beta^3=90\alpha\beta$ και $\alpha^2+\beta^2=15\alpha\beta$ παίρνουμε ότι:

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=90\alpha\beta\overset{\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta}{\Rightarrow}(\alpha+\beta)(16\alpha\beta-\alpha\beta)=90\alpha\beta\Rightarrow(\alpha+\beta)\cdot15\alpha\beta=90\alpha\beta\overset{\alpha\beta\neq0}{\Rightarrow}\alpha+\beta=6.$$

Επιπλέον, έχουμε $\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16\alpha\beta\Rightarrow18\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2\Rightarrow\alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2}{18}=\frac{6^2}{18}=2$,

οπότε θα είναι: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{2}=3$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{matrix}xy^3=-8\\(x+y)y=2\end{matrix}\right\}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Πρέπει $xy\neq0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{matrix}xy^3=-8\\(x+y)y=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}xy\cdot y^2=-8\\xy+y^2=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}(2-y^2)\cdot y^2=-8\\xy=2-y^2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y^4-2y^2-8=0\\x=\frac{2-y^2}{y}\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y^2=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}\\x=\frac{2-y^2}{y}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y^2=\frac{2\pm6}{2}\\x=\frac{2-y^2}{y}\end{matrix}\right\}\overset{y^2\geq0}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{matrix}y^2=4\\x=\frac{2-y^2}{y}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y=2\\x=-1\end{matrix}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{matrix}y=-2\\x=1\end{matrix}\right\}.$$

2ος τρόπος

Πρέπει $xy\neq0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{matrix}xy^3=-8\\(x+y)y=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}xy\cdot y^2=-8\\xy+y^2=2\end{matrix}\right\}.$$

Αν θέσουμε: $xy=\varphi,\ y^2=\omega>0$, τότε με αγνώστους φ και ω προκύπτει το σύστημα:

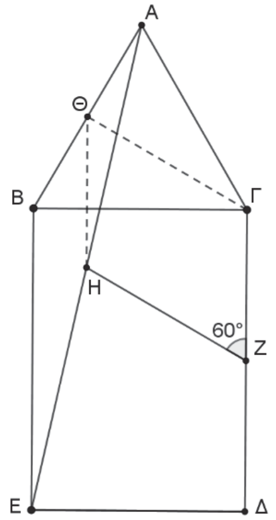
$$\left\{\begin{matrix}\varphi\omega=-8\\\varphi+\omega=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi\omega=-8\\\omega=2-\varphi\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi(2-\varphi)=-8\\\omega=2-\varphi\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi^2-2\varphi-8=0\\\omega=2-\varphi\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}\\\omega=2-\varphi\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi=\frac{2\pm6}{2}\\\omega=2-\varphi\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi=4\text{ ή }\varphi=-2\\\omega=2-\varphi\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}(\varphi,\omega)=(4,-2)\\\text{ή}\\(\varphi,\omega)=(-2,4)\end{matrix}\right\}.$$

Επειδή πρέπει $\omega = y^2 > 0$, δεκτή είναι μόνο η λύση $(\varphi,\omega) = (-2,4)$, οπότε οι τιμές των x, y θα βρεθούν από το σύστημα: $\begin{Bmatrix} xy=-2 \\ y^2=4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} xy=-2 \\ y=2 \text{ ή } y=-2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (x,y)=(-1,\,2) \text{ ή } (x,y)=(1,-2).$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.



Σχήμα 4

Λύση

Έστω Θ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΘΗ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΕ και ίση με το μισό της, δηλαδή $\Theta H = \frac{BE}{2}$. Επειδή το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο, έχει ίσες τις απέναντι πλευρές του, οπότε $BE = \Gamma\Delta$. Επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΗ και ΓΖ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΓΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε θα είναι και $ZH \parallel \Gamma\Theta$. Όμως η ΓΘ είναι κάθετη προς την ΑΒ (ως διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος), οπότε θα είναι και $ZH \perp AB$.

Επιπλέον οι γωνίες $\Gamma\hat{Z}H$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι οξείες και έχουν πλευρές ανά δύο κάθετες, οπότε είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma\hat{Z}H = A\hat{B}\Gamma = 60^0$. Διαφορετικά, στο παραλληλόγραμμο ΓΖΗΘ έχουμε $\Theta\hat{\Gamma}Z = \Theta\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}Z = 30^0 + 90^0 = 120^0$, οπότε θα είναι:

$$\Gamma\hat{Z}H = 180^0 - 120^0 = 60^0.$$

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda-3)x^2 + (\lambda^2+1)x - (11\lambda-18) = 0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Λύση

Αν β, γ είναι οι ρίζες της εξίσωσης , τότε πρέπει: $\beta^2+\gamma^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$. (1)

Με τον περιορισμό $\lambda \neq 3$, οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν τους τύπους Vieta:

$$\beta+\gamma = -\frac{\lambda^2+1}{\lambda-3},\quad \beta\gamma = -\frac{11\lambda-18}{\lambda-3} \qquad (2)$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\beta^2+\gamma^2 = 17 \Leftrightarrow (\beta+\gamma)^2 - 2\beta\gamma = 17 \Leftrightarrow \frac{(\lambda^2+1)^2}{(\lambda-3)^2} + \frac{2(11\lambda-18)}{\lambda-3} - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2+1)^2 + 2(11\lambda-18)(\lambda-3) - 17(\lambda-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + 7\lambda^2 - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{-7+\sqrt{225}}{2} = 4 \text{ (η άλλη ρίζα είναι αρνητική και απορρίπτεται)} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται: $-x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$, ενώ για $\lambda=-2$ η εξίσωση γίνεται: $-5x^2+5x+40=0 \Leftrightarrow x^2-x-8=0$ με ρίζες ετερόσημες, οπότε δεν μπορεί η μία από αυτές να είναι το μήκος πλευράς τριγώνου. Επομένως η μόνη αποδεκτή τιμή για την παράμετρο λ είναι το 2.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$108(x-2)^4+(4-x^2)^3=0.$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$108(x-2)^4+(4-x^2)^3=0 \Leftrightarrow 108(x-2)^4+(2-x)^3(2+x)^3=0$$

$$\Leftrightarrow 108(x-2)^4-(x-2)^3(2+x)^3=0 \Leftrightarrow (x-2)^3\left[108(x-2)-(x+2)^3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3(108x-216-x^3-6x^2-12x-8)=0 \Leftrightarrow (x-2)^3(-x^3-6x^2+96x-224)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3(x^3+6x^2-96x+224)=0 \Leftrightarrow (x-2)^3=0 \text{ ή } x^3+6x^2-96x+224=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x^3+6x^2-96x+224=0.$$

Η εξίσωση $x^3+6x^2-96x+224=0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες, όλους τους διαιρέτες του 224. Με το σχήμα Horner διαπιστώνουμε εύκολα ότι μία ακέραια ρίζα της είναι το 4 με παραγοντοποίηση:

$$x^3+6x^2-96x+224=(x-4)(x^2+10x-56)=(x-4)^2(x+14).$$

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: 2 (τριπλή), 4 (διπλή) και -14.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της ΔΕ προς το μέρος του Ε παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΔ. Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΒΕ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

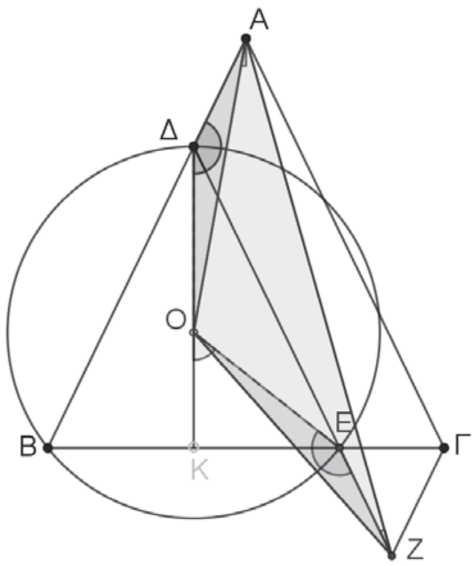
Λύση

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές, αφού από την παραλληλία $\Delta E \parallel A\Gamma$ έπεται ότι $\Delta\hat{E}B = A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$. Επομένως η ευθεία ΟΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΕ και διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}E$, οπότε $O\hat{\Delta}E = O\hat{\Delta}B$.
Παρατηρούμε τώρα ότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ έχουν από τις υποθέσεις δύο πλευρές τους ίσες, ΑΔ = ΕΖ και ΟΔ = ΟΕ. Επιπλέον, αφού ΟΔΕ ισοσκελές τρίγωνο, έχουμε:

$$O\hat{E}Z = 180^0 - O\hat{E}\Delta = 180^0 - O\hat{\Delta}E =$$

$$=180^0 - \frac{B\hat{\Delta}E}{2} = 180^0 - O\hat{\Delta}B = O\hat{\Delta}A$$

Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{A}O = O\hat{Z}E = O\hat{Z}\Delta$, δηλαδή οι κορυφές Α και Ζ του τετραπλεύρου ΟΖΑΔ βλέπουν την πλευρά ΑΟ υπό ίσες γωνίες, οπότε τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.



Σχήμα 5

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{ \begin{array}{c} xy^3=-108 \\ (x+y)y=-3 \end{array} \right\}.$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Πρέπει $xy \neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3=-108 \\ (x+y)y=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy\cdot y^2=-108 \\ xy+y^2=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (-3-y^2)\cdot y^2=-108 \\ xy=-3-y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^4+3y^2-108=0 \\ x=\dfrac{-3-y^2}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2=\dfrac{-3\pm\sqrt{441}}{2} \\ x=-\dfrac{3+y^2}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2=\dfrac{-3\pm 21}{2} \\ x=-\dfrac{3+y^2}{y} \end{array}\right\} \overset{y^2\geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} y^2=9 \\ x=-\dfrac{3+y^2}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=3 \\ x=-4 \end{array}\right\} \text{ή} \left\{\begin{array}{c} y=-3 \\ x=4 \end{array}\right\}.$$

2^{ος} τρόπος

Πρέπει $xy \neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3=-108 \\ (x+y)y=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy\cdot y^2=-108 \\ xy+y^2=-3 \end{array}\right\}.$$

Αν θέσουμε: $xy=\varphi,\ y^2=\omega>0$, τότε με αγνώστους φ και ω προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi\omega=-108 \\ \varphi+\omega=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi\omega=-108 \\ \omega=-3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi(-3-\varphi)=-108 \\ \omega=-3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi^2+3\varphi-108=0 \\ \omega=-3-\varphi \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=\dfrac{-3\pm\sqrt{441}}{2} \\ \omega=-3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=\dfrac{-3\pm 21}{2} \\ \omega=-3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=9 \text{ ή } \varphi=-12 \\ \omega=-3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\varphi,\omega)=(9,-12) \\ \text{ή} \\ (\varphi,\omega)=(-12,9) \end{array}\right\}.$$

Επειδή πρέπει $\omega=y^2>0,$ δεκτή είναι μόνο η λύση $(\varphi,\omega)=(-12,9)$, οπότε οι τιμές των x, y θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} xy=-12 \\ y^2=9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy=-12 \\ y=3 \text{ ή } y=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-4,\,3) \text{ ή } (x,y)=(4,-3).$$

Πρόβλημα 4

Με κ διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς 2, 3, 4, …, 1024 έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του κ.

Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός της μορφής 2^κ είναι πολλαπλάσιο όλων των δυνάμεων του 2 με μικρότερο θετικό εκθέτη. Έτσι καθένας από τους αριθμούς

$$2,\ 4=2^2,\ 8=2^3,\ 16=2^4,\ 32=2^5,\ 64=2^6,\ 128=2^7,\ 256=2^8,\ 512=2^9,\ 1024=2^{10}$$

είναι πολλαπλάσιο όλων των προηγουμένων του, εκτός του πρώτου, οπότε όλοι πρέπει να έχουν διαφορετικά χρώματα. Επομένως ο αριθμός των χρωμάτων που θα χρειαστούμε είναι $\kappa\geq 10.$

Θα αποδείξουμε ότι με τα 10 χρώματα, έστω X_i, για τον αριθμό 2^i, $i=1,2,3,\ldots,10$ μπορούμε να χρωματίσουμε όλους τους υπόλοιπους έτσι ώστε να μην υπάρχει το ίδιο χρώμα μεταξύ ενός αριθμού και κάποιου πολλαπλασίου του. Πράγματι, αρκεί να κάνουμε την αντιστοίχιση:

$$X_i \to \left\{2^i, 2^i+1,\ldots,2^{i+1}-1\right\},\ i=1,2,\ldots,9 \text{ και } X_{10}\to 2^{10}=1024.$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή είναι $\kappa_{min}=10$.

$22^{ος}$ Μεσογειακός Μαθηματικός Διαγωνισμός 2019

31 Μαρτίου 2019

Πρόβλημα 1

Σε τρίγωνο ABC, με $\angle A = 60^o$, θεωρούμε σημείο $D \in (BC)$ έτσι ώστε AD είναι η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\angle A$. Έστω r_B, r_C και r, οι ακτίνες του εγγεγραμμένου κύκλου των τριγώνων ABD, ADC και ABC, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$,

όπου b και c είναι τα μήκη των πλευρών AC και AB του τριγώνου.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{bc\sqrt{3}}{b+c}$. Έστω $h = AM$ το μήκος του ύψους από την κορυφή A του τριγώνου ABC. Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου έχουμε ότι: $BD=\frac{ac}{b+c}, CD=\frac{ab}{b+c}$.

Έστω $p_{ABD}=\frac{BD+DA+AB}{2}$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABD. Αν είναι (ABD) το εμβαδόν του τριγώνου ABD και $p=\frac{a+b+c}{2}$, τότε θα έχουμε:

$$r_B=\frac{[ABD]}{p_{ABD}}=\frac{h\cdot BD}{2\cdot p_{ABD}}=\frac{h\cdot BD}{BD+AD+AB}=\frac{\frac{h\cdot ac}{b+c}}{\frac{ac}{b+c}+\frac{bc\sqrt{3}}{b+c}+c}=\frac{ah}{2p+\sqrt{3}\cdot b}.$$

Ομοίως, λαμβάνουμε και τη σχέση: $r_C=\frac{ah}{2p+\sqrt{3}\cdot c}$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=\frac{2p+b\sqrt{3}}{ah}+\frac{2p+c\sqrt{3}}{ah}=\frac{4p(b+c)\sqrt{3}}{2[ABC]}=\frac{2}{r}+\frac{(b+c)\sqrt{3}}{bc\sin\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Πρόβλημα 2

Έστω $m_1<m_2<\ldots<m_s$, $s\geq 2$, μία ακολουθία θετικών ακέραιων, κανένας από τους οποίους δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο ή περισσότερων διαφορετικών όρων της ακολουθίας. Για κάθε ακέραιο r με $1\leq r<s$, να αποδείξετε ότι: $rm_r+m_s\geq(r+1)(s-1)$.

Λύση

Για $k,\ell,\ 0\leq k\leq r,\ k+1\leq \ell\leq s$, γράφουμε $T(k,\ell):=m_\ell+\sum_{i=1}^{k}m_i$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2}(r+1)(2r-s)$ τιμές $T(k,\ell)$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $T(k,\ell)=T(u,v)$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας $k\leq u$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται $m_\ell=m_u+\sum_{i=k+1}^{u}m_i$.

Τότε όμως το m_ℓ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα άλλων διαφορετικών αριθμών της ακολουθίας, εκτός αν $\ell=v$ και $k=u$. Επομένως, οι τιμές $T(k,\ell)$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, όπως ισχυριστήκαμε. Επειδή υπάρχουν $\frac{1}{2}(r+1)(2r-s)$ διαφορετικές τιμές η μεγαλύτερη τιμή του $T(k,\ell)$ θα είναι τουλάχιστον ίση με $\frac{1}{2}(r+1)(2r-s)$, οπότε: $\frac{1}{2}(r+1)(2r-s)\leq T(r,s)=m_s+\sum_{i=1}^{r}m_i\leq m_s+\sum_{i=1}^{r}(m_r-r+i)$.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $m_i<m_r-r+i$, η οποία ισχύει επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα. Άρα

η παραπάνω ανισότητα γράφεται $rs+s-r\le rm_r+m_s$, από την οποία προκύπτει η σχέση που ζητάμε.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι ακέραιοι x,y,z για τους οποίους το άθροισμα των ψηφίων στη δεκαδική αναπαράσταση του $4x^4+y^4-z^2+4xyz$ είναι το πολύ 2.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$4x^4+y^4-z^2+4xyz=\left(4x^2+y^4+4x^2y^2\right)-\left(4x^2y^2+z^2-4xyz\right)$$
$$=\left(2x^2+y^2\right)^2-\left(2xy-z\right)^2=\left(2x^2+y^2-2xy+z\right)\left(2x^2+y^2+2xy-z\right).$$

Οι δύο παράγοντες $A=2x^2+y^2-2xy+z,\ B=2x^2+y^2+2xy-z$ έχουν άθροισμα $A+B=4x^2+2y^2$ και αν επιλέξουμε τις τιμές των x,y έτσι ώστε $A=4x^2=4\cdot5^{2n+2},\ B=2y^2=2\cdot2^{2n}$, τότε $AB=2\cdot10^{2n+2}$ με άθροισμα ψηφίων 2.

Επομένως, αν πάρουμε έναν ακέραιο $n\ge1$ και θέσουμε $x=5^{n+1},\ y=2^n$ η σχέση που θέλουμε $A=4x^2=4\cdot5^{2n+2}$, είναι ισοδύναμη με τη σχέση $2x^2+y^2-2xy+z=4x^2$, οπότε

$$z=2x^2-y^2+2xy=2\cdot5^{2n+2}+10^{n+1}-4^n,$$

όπου προφανώς ο z είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, έχουμε λύσει το πρόβλημα, αφού η παραπάνω επιλογή των x,y,z δίνει $4x^4+y^4-z^2+4xyz=2\cdot10^{2n+2}$.

Πρόβλημα 4

Έστω P ένα εσωτερικό σημείο ενός ισόπλευρου τριγώνου που έχει ύψος ίσο με 1. Αν x,y,z είναι οι αποστάσεις από το P προς τις πλευρές του τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{x^2+y^2+z^2\ge x^3+y^3+z^3+6xyz.}$$

Λύση

Είναι γνωστό και εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των αποστάσεων ενός εσωτερικού σημείου P ενός ισοπλεύρου τριγώνου από τις πλευρές του ισούται με το ύψος του. Αν x,y,z είναι οι αποστάσεις από το P προς τις πλευρές του τριγώνου, τότε $x+y+z=1,\ 0<x,y,z<1$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι: αν $x+y+z=1,\ 0<x,y,z<1$, τότε $x^2+y^2+z^2\ge x^3+y^3+z^3+6xyz$.

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου και την ισότητα $x+y+z=1$, έχουμε:

$$xy+yz+zx=\left(xy+yz+zx\right)\left(x+y+z\right)\ge3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}\cdot3\sqrt[3]{xyz}=9xyz$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx-3xyz\ge6xyz.$$

Όμως, ισχύει ότι

$$xy+yz+zx-3xyz=xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y)=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge6xyz,$$

οπότε, αν προσθέσουμε το $1=(x+y+z)^2$ και στα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας, έχουμε:

$$(x+y+z)^2+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge6xyz+1$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-6xyz\ge1$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy(x+y+z)+2yz(x+y+z)+2zx(x+y+z)+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-6xyz\ge1$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy(x+y)+2yz(y+z)+2zx(x+z)+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge1$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x)\ge1=(x+y+z)^3$$

Επειδή ισχύει ότι: $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x)+6xyz$,

από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι: $x^2+y^2+z^2\ge x^3+y^3+z^3+6xyz$.

Σημείωση: Η ισότητα ισχύει όταν $x=y=z=\dfrac{1}{3}$, δηλαδή όταν το σημείο P είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου.

Οι Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 113

A57. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Αν $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$, να αποδείξετε ότι:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

Λύση.

Επειδή $x_1, x_2, ..., x_n \in [0,1]$, έπεται ότι: $x_i \geq x_i^2$, $i = 1, 2, ..., n$, οπότε:

$$S := x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1 + x_2 + ... + x_n) \Leftrightarrow (S+1)^2 \geq 4S \Leftrightarrow (S-1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει.

A58. Ένας ακέραιος του Gauss (Gaussian integer) είναι ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος είναι ακέραιοι. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο n, έτσι ώστε να υπάρχει μία ακολουθία $z_1, z_2, ..., z_n$ ακέραιων του Gauss των οποίων τα μέτρα να είναι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι.

Λύση.

Αν ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, είναι ακέραιος του Gauss, τότε $x, y \in \mathbb{Z}$ και το μέτρο του $|z|^2 = x^2 + y^2$ είναι άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων. Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο ενός άρτιου ακέραιου διαιρούμενο με το 4 δίνει υπόλοιπο 0, ενώ το τετράγωνο ενός περιττού ακέραιου διαιρούμενο με το 4 δίνει υπόλοιπο 1. Επομένως το $|z|^2 = x^2 + y^2$ για έναν ακέραιο του Gauss, διαιρούμενο με το 4 μπορεί να δίνει υπόλοιπο 0, 1 ή 2.

Αν το n είναι μεγαλύτερο του 3, τότε μεταξύ τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων στην ακολουθία των μέτρων $|z_1|^2, |z_2|^2, ..., |z_n|^2$ ένας από αυτούς διαιρούμενος με το 4 θα δίνει υπόλοιπο 3, που είναι αδύνατο, Επομένως πρέπει $n \leq 3$. Παρατηρούμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $2+2i, 3$ και $1+3i$ έχουν τετράγωνα μέτρων τους 8, 9 και 10, αντίστοιχα, οπότε η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n είναι 3.

N43. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (p,q) πρώτων αριθμών για τους οποίους ο αριθμός $p^{q-1} + q^{p-1}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση.

Έστω n ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $p^{q-1} + q^{p-1} = n^2$. Θα ξεχωρίσουμε περιπτώσεις για τη λύση σχετικές με το αν οι πρώτοι p, q είναι άρτιοι ή περιττοί.

- Αν p, q άρτιοι, τότε $(p,q) = (2,2)$, που ικανοποιούν την εξίσωση $p^{q-1} + q^{p-1} = n^2$ για $n = 4$.
- Αν p, q είναι και οι δύο περιττοί, τότε οι $p-1, q-1$ είναι και οι δύο άρτιοι, οπότε οι p^{q-1}, q^{p-1} είναι τετράγωνα περιττών ακεραίων τα οποία διαιρούμενα με το 4 δίνουν υπόλοιπο 1. Επομένως το άθροισμα τους διαιρούμενο με το 4 θα δίνει υπόλοιπο 2. Όμως το n^2 διαιρούμενο με το 4 δίνει υπόλοιπο 0 ή 1, οπότε δεν μπορεί να αληθεύει η εξίσωση $p^{q-1} + q^{p-1} = n^2$.
- Αν $p = 2k+1$, όπου k θετικός ακέραιος και $q = 2$, τότε η εξίσωση $p^{q-1} + q^{p-1} = n^2$ γίνεται $p + 2^{2k} = n^2 \Leftrightarrow p = n^2 - 2^{2k} \Leftrightarrow p = (n+2^k)(n-2^k)$. Επειδή ο p είναι πρώτος και $n + 2^k > n - 2^k$ συμπεραίνουμε ότι:

$$n + 2^k = p,\ n - 2^k = 1 \Rightarrow p = 2^{k+1} + 1.$$

Όμως έχουμε πάρει $p = 2k+1$, όπου k θετικός ακέραιος, οπότε πρέπει

$2^{k+1}+1 = 2k+1 \Rightarrow 2^{k+1} = 2k \Rightarrow 2^k = k$, που είναι αδύνατο, γιατί από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε: $2^k = (1+1)^k \geq 1+k > k$.

Γ47. Έστω ΒΔ και ΓΕ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Ο κύκλος διαμέτρου ΑΓ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ζ, ενώ ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ τέμνει την ευθεία ΓΕ στα σημεία Η και Θ, όπου το Θ βρίσκεται μεταξύ των Γ και Ε. Αν $\Gamma\hat{H}Z = 12^0$, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\hat{\Theta}Z$.

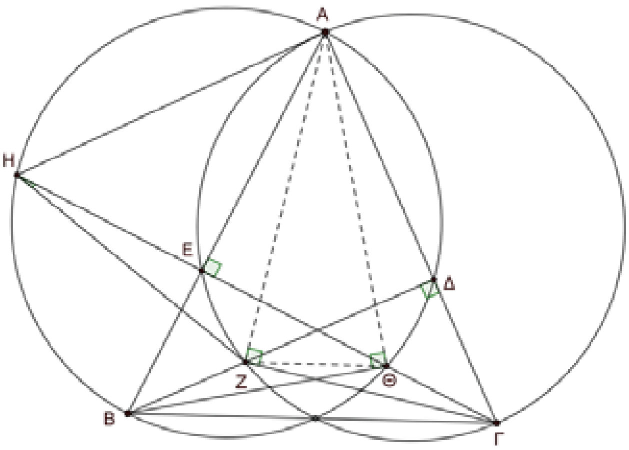
Λύση

Παρατηρούμε ότι στο κύκλο διαμέτρου ΑΒ η χορδή ΗΘ είναι κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, οπότε η ΑΒ είναι μεσοκάθετη της χορδής ΗΘ και $AH = A\Theta$. Επίσης το τρίγωνο ΑΘΒ είναι ορθογώνιο με ύψος από την κορυφή της ορθής γωνίας το ΘΕ, οπότε από το θεώρημα του Ευκλείδη έχουμε: $A\Theta^2 = AE \cdot AB$. (1)

Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ έχουμε:

$$AZ^2 = A\Delta \cdot A\Gamma . \qquad (2)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΕΔΓ $\left(B\hat{E}\Gamma = 90^0 = B\hat{\Delta}\Gamma\right)$ έχουμε: $AE \cdot AB = A\Delta \cdot A\Gamma$ (3)



Σχήμα 1

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $A\Theta = AZ$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $AH = A\Theta$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σημείο Α ισαπέχει από τις κορυφές Ζ, Η και Θ του τριγώνου ΖΗΘ, δηλαδή το Α είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΖΗΘ. Στον περιγεγραμμένο κύκλο συσχετίζοντας επίκεντρη και εγγεγραμμένη γωνία έχουμε: $Z\hat{A}\Theta = 2 \cdot Z\hat{H}\Theta = 2 \cdot 12^0 = 24^0$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΘΖ λαμβάνουμε:

$$A\hat{\Theta}Z = \frac{1}{2}\cdot\left(180^0 - Z\hat{A}\Theta\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(180^0 - 24^0\right) = 78^0.$$

Δ21. Δύο παίκτες Α και Β παίζουν ένα παιγνίδι ως εξής: Σχηματίζουν ένα αριθμό γράφοντας εναλλάξ από ένα ψηφίο από αριστερά προς τα δεξιά. Ένας παίκτης χάνει, αν μετά την κίνησή του, υπάρχει ακολουθία ψηφίων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τέτοια ώστε να υπάρχει θετικός ακέραιος κ για τον οποίο ο αριθμός $\overline{\alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 11. Αν ο Α αρχίζει να γράφει ψηφία πρώτος, να βρείτε ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης.

Λύση.

Θα αποδείξουμε ότι ο παίκτης Β που αρχίζει δεύτερος έχει τη δυνατότητα να κερδίσει το παιγνίδι, ανεξάρτητα από το πώς θα παίξει ο παίκτης Α.

Επειδή $10^r \equiv (-1)^r \pmod{11}$, ισχύει ότι: $\overline{\alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_\nu} \equiv \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} - \ldots + (-1)^{\nu-\kappa}\alpha_\kappa \pmod{11}$.

Σημειώνουμε με $\upsilon_\kappa, \kappa = 1,2,\ldots,\nu$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του ακεραίου $\overline{\alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_\nu}$ με το 11. Αν μέχρι τη ν-οστή κίνηση τα υπόλοιπα $\upsilon_\kappa, \kappa = 1,2,\ldots,\nu$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, τότε στην επόμενη κίνηση με την προσθήκη του αριθμού $\alpha_{\nu+1}$ θα έχουμε τα υπόλοιπα

$$\alpha_{\nu+1} - \upsilon_1, \ldots, \alpha_{\nu+1} - \upsilon_\nu, \alpha_{\nu+1} \pmod{11},$$

τα οποία θα είναι πάλι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, εφόσον $\alpha_{\nu+1} \neq 0$. Το τελευταίο θεωρούμε ότι ισχύει, γιατί κανείς από τους δύο παίκτες δεν θα γράψει το 0, αφού αυτό θα τον κάνει να χάσει παιγνίδι. Επίσης, συμπεραίνουμε ότι μετά την ολοκλήρωση κάθε βήματος του παιγνιδιού για $\nu \leq 10$, οι αριθμοί $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_\nu$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι δύο υπόλοιπα

$\upsilon_\kappa, \upsilon_\mu, 1 \le \kappa < \mu \le \nu$ είναι ίσα, τότε ο αριθμός $\overline{\alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_\nu} - \overline{\alpha_\mu \alpha_{\mu+1} \ldots \alpha_\nu} = \overline{\alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_{\mu-1}} \cdot 10^{\mu-\kappa}$, θα είναι πολλαπλάσιο του 11, δηλαδή ο αριθμός $\overline{\alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_{\mu-1}}$ θα είναι πολλαπλάσιο του 11, που είναι άτοπο γιατί αν ίσχυε το παιγνίδι θα είχε λήξει νωρίτερα.

Από τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι αριθμοί $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_\nu$ σε κάθε κίνηση, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν το πολύ $\nu+1$ ψηφία τα οποία, αν ο παίκτης τα γράψει, τότε θα χάσει το παιγνίδι. Ο δεύτερος παίκτης χάνει, αν και μόνον αν, μετά την ένατη κίνηση του το σύνολο $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_9\}$ είναι ίσο με το σύνολο $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, δηλαδή ο παίκτης Β θα κερδίσει το παιγνίδι, αν και μόνον αν, το 10 ανήκει στο σύνολο $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_9\}$.

Αν, μετά την όγδοη κίνηση , το σύνολο $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_8\}$ *δεν περιέχει δύο αριθμούς από το 1 μέχρι και το 10 που να είναι διαδοχικοί*, τότε ανεξάρτητα από την ένατη κίνηση του παίκτη Α , ένας από τους αριθμούς $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_9$ πρέπει να είναι το 10. Πράγματι, αν ο παίκτης Α επιλέξει τον αριθμό X, τότε από την όγδοη κίνηση θα υπάρχει αριθμός κ τέτοιος ώστε $\upsilon_\kappa = X+1$. Επομένως, μετά την ένατη κίνηση θα έχουμε $\upsilon_\kappa \equiv X-(X+1) \equiv -1 \equiv 10 (\bmod 11)$.

Θα αποδείξουμε ότι ο παίκτης Β μπορεί να εξασφαλίσει ότι μετά την όγδοη κίνηση, μεταξύ των αριθμών $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_8\}$ δεν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Σίγουρα ο παίκτης Β μπορεί να εξασφαλίσει ότι το παιγνίδι θα έχει τουλάχιστον 7 κινήσεις. Έστω ότι μετά την έβδομη κίνηση έχουμε $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_7\} = \{1,2,3,\ldots,10\} - \{X,Y,Z\}$. Αν μεταξύ των αριθμών X, Y και Z δεν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι, τότε ο παίκτης Β μπορεί να επιλέξει οποιονδήποτε από αυτούς. Αν είναι $Y = X+1$, τότε ο παίκτης Β μπορεί να γράψει έναν από τους αριθμούς X ή X+1, έτσι ώστε μετά την όγδοη κίνηση να μη λείπουν δύο διαδοχικοί από τους $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_8$. Αναλυτικότερα, αν Z = X – 1, τότε ο παίκτης Β επιλέγει τον αριθμό X, ενώ αν είναι $Z \neq X-1$, τότε ο παίκτης Β επιλέγει τον αριθμό $X+1$.

Ασκήσεις για λύση

Α59. Αν α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta+\gamma=2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha-1)^2}{\beta}+\frac{(\beta-1)^2}{\gamma}+\frac{(\gamma-1)^2}{\alpha} \ge \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}\right).$$

Δ22. Ο Γιώργος γράφει μία ακολουθία τριωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Σε κάθε βήμα θεωρεί το τριώνυμο που είχε γράψει στο προηγούμενο μήνυμα, έστω $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και προχωράει γράφοντας ένα από τα τριώνυμα $\gamma x^2+\beta x+\alpha$ και $\alpha(x+\delta)^2+\beta(x+\delta)+\gamma$, για κάποιο πραγματικό αριθμό δ. Αρχίζοντας από το τριώνυμο x^2-2x-1, να εξετάσετε αν είναι δυνατόν μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων να λάβει τα επόμενα τριώνυμα:

(α) $2x^2-1$, **(β)** $2x^2-x-1$.

Γ48. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Μ, ενώ η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ν. Αν O_1 και O_2 είναι τα περίκεντρα των τριγώνων ΑΒΝ και ΓΔΜ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ευθεία O_1O_2 διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ.

Ν44. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (m,n) θετικών ακεραίων που ικανοποιούν την εξίσωση: $2^m=7n^2+1$.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. τι είναι τα Μαθηματικά

μια προσιτή, απτή και αισθητική όψη των Μαθηματικών

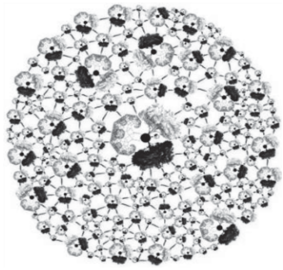
προλεγόμενα από τον έγκυρο ερευνητή και δημοσιολόγο Σταύρο Ξενικουδάκη, δανειστήκαμε το παρακάτω άρθρο:

«Τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται συχνά με έναν ψυχρό σεβασμό. Η επιστήμη αυτή βασίζεται σε λογικούς κανόνες και αρχές αδιατάρακτες, στωικές. Για παράδειγμα, δεν θα βρεθεί ποτέ πρώτος αριθμός, που θα είναι ο τελευταίος που υπάρχει (επειδή είναι άπειροι), ούτε και τελευταίο δεκαδικό ψηφίο της σταθεράς π (που επίσης έχει άπειρα ψηφία). Κάτω από αυτήν τη βεβαιότητα υπάρχει όμως και εξαιρετική ελκυστικότητα. Η λύση μιας εξίσωσης μπορεί να έχει ένα κομψό, αισθητικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, οι μαθηματικοί που μελετούν τη **θεωρία ομάδων** αναλύουν τους κανόνες που ελέγχουν τις περιστροφές και τους αντικατοπτρισμούς. Οπτικά αυτοί οι μετασχηματισμοί εμφανίζονται ως πολύ όμορφες συμμετρίες, όπως τα ακτινικά μοτίβα των νιφάδων του χιονιού. Μερικοί μαθηματικοί και καλλιτέχνες θεωρούν λαθεμένη την επιλογή ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Τέχνη. Κάνουν ερωτήσεις χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των αριθμών και της θεωρίας ομάδων και βρίσκουν τις απαντήσεις σε κατασκευάσματα από μέταλλο, πλαστικό και ξύλο ή στην οθόνη ενός υπολογιστή. Πολλοί απ' αυτούς ανταλλάσσουν ιδέες κάθε ένα ή δύο χρόνια σε διεθνείς διασκέψεις που γίνονται για τα Μαθηματικά και τις τέχνες. Μάλιστα, τα τελευταία χρόνια φαίνεται να αυξάνεται το ενδιαφέρον για τη μαθηματική τέχνη, όπως δείχνει ο αριθμός των εκθέσεων έργων, αλλά και οι σχετικές δημοσιεύσεις σε επιστημονικά περιοδικά. Οι ρίζες αυτού του ρεύματος βρίσκονται στο τέλος του προηγούμενου αιώνα, αλλά οι καλλιτέχνες σήμερα αξιοποιούν ένα ευρύτερο φάσμα μαθηματικών μουσών και χρησιμοποιούν πιο σύγχρονα εργαλεία. Σας δίνουμε δείγμα των έργων τους.

(εικόνα 01) Έμπνευση για το γλυπτό αυτό έδωσε

το νότιο σέλας (Aurora Australis). Η ελισσόμενη ταινία του μοιάζει με τους σχηματισμούς του σέλαος, αλλά αν προσέξει κανείς θα δει ότι δεν έχει αρχή και τέλος (τα άκρα της συνδέονται). Κι αν διατρέξει κανείς την επιφάνειά της με το δάχτυλό του, θα την ακουμπήσει όλη «πάνω» και «κάτω» και θα βρεθεί πάλι στο ίδιο σημείο χωρίς να το έχει σηκώσει καθόλου απ' αυτήν. Πρόκειται για μια **ταινία Möbius** (Μέμπιους), την απλούστερη επιφάνεια χωρίς δυνατότητα προσανατολισμού

(εικόνα 02) Η εικόνα αυτή είναι ένα αυτοόμοιο μοτίβο, που δημιουργείται από τρεις διαφορετικές μορφές δέντρων, που «μεγαλώνουν» πάνω σε ένα φράκταλ (μορφόκλασμα). Το ένα δέντρο έχει κανονική όψη, το άλλο είναι σαν ζωγραφισμένο και το τρίτο είναι ένα φράκταλ με μορφή δέντρου. Το μοτίβο παραμένει το ίδιο σε οποιαδήποτε κλίμακα μεγέθυνσης ή σμίκρυνσής του. Μοτίβα σαν αυτό εμφανίζονται στη φύση (π.χ. στα μπρόκολα και τις οροσειρές) και οι επιστήμονες τα έχουν χρησιμοποιήσει για να μελετήσουν διάφορα φαινόμενα»



(**εικόνα 03**) Οι τρεις εξωτερικοί δακτύλιοι του γλυπτού αυτού δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους, αλλά είναι αδιάρρηκτα συνδεδεμένοι. Αν αφαιρούνταν ένας από αυτούς, τότε οι άλλοι δύο θα ήταν αυτομάτως ασύνδετοι μεταξύ τους. Αυτό το αρχαίο μοτίβο πήρε το όνομα Βορρόμειοι δακτύλιοι, από το όνομα βενετσιάνικης οικογένειας, που τους χρησιμοποιούσε στον θυρεό της. *[Σταύρος ΞΕΝΙΚΟΥΔΑΚΗΣ **πηγή:** «Scientific American»]* Είναι μέλη μιας ομάδας μορφών στη μαθηματική θεωρία των κόμβων. Η επιφάνεια που ορίζουν οι δακτύλιοι ονομάζεται **επιφάνεια Seifert** (Σέιφερτ)

ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου

Από τον σημαντικό συνάδελφο Ανδρέα Χατζηπολάκη, λάβαμε (2019-12-06) ένα σύντομο αλλά περιεκτικό μήνυμα-"διαμαρτυρία"(;), με τίτλο "ΜΙΣΕΣ ΔΟΥΛΕΙΕΣ…". Συνυπογράφουμε τη "διαμαρτυρία" (;) και σας την κοινοποιούμε. Στο κέντρο του "Δίευρου", η φράση **"ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ"**, προστέθηκε από τον συνάδελφο.

«ΜΙΣΕΣ ΔΟΥΛΕΙΕΣ...»

*(…) Το 2013 η Ελλάδα κυκλοφόρησε ένα αναμνηστικό **δίευρο** για τα 2400 χρόνια από την ίδρυση της Ακαδημίας του Πλάτωνος. Αλλά είχε γίνει "μισή δουλειά". Δεν είχε μπει η επιγραφή που υπήρχε στην **είσοδο της Ακαδημίας** ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ» (…)*

ΙΙΙ. Αυτό το ξέρατε;

Ποιος είπε: "Ο άνθρωπος μοιάζει με κλάσμα όπου ο αριθμητής είναι ο πραγματικός εαυτός του και ο παρονομαστής η ιδέα που έχει για τον εαυτό του. Όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής, τόσο μικρότερη η αξία του κλάσματος. Και όσο ο παρανομαστής διογκώνεται προς το άπειρο, τόσο το κλάσμα τείνει προς το μηδέν".*[η απάντηση στο τέλος της στήλης]*

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1^ο^ Θέμα. ***"ένα ερώτημα ζητά απάντηση", του Αργύρη Καντεμίρη,***

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Αργύρης Καντεμίρης, από παλιά μας θέτει διάφορα ερωτήματα πάνω στη θεωρία των αριθμών, με ειδικότητα τους πρώτους αριθμούς. Ακριβώς, τέτοιο είναι το πρόβλημα που μας θέτει. Περιμένουμε τη βοήθειά σας...

«Ο **Christian Goldbach** (1690 – 1764) έστειλε μία επιστολή προς τον **Leonard Euler**, το 1742, στην οποία διατύπωνε την υπόθεση ότι:

- *κάθε άρτιος φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο "πρώτων" αριθμών*

και

- *κάθε περιττός φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τριών "πρώτων" αριθμών* ("**πρώτος**" αριθμός είναι εκείνος ο οποίος διαιρείται με το 1 και τον εαυτό του). Οι δύο αυτές υποθέσεις εισάγουν την *ιδέα* ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί ("**σύνθετοι**" και "**πρώτοι**") δημιουργούνται με δομικά υλικά τους πρώτους αριθμούς με την συνδρομή της αυξητικής πράξης της πρόσθεσης. Παραδείγματα: 5=3+2, 11=7+3+1, 12=7+5, 15=7+5+3, 16=11+5=13+3, 17=13+3+1, 527=3+37+487=…=167+179+181, σύνολο 427 τριάδες διαφορετικών πρώτων αριθμών.

Κάποια στιγμή της ιστορίας του ο άνθρωπος θέλησε να εκφράσει το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου με τον γραπτό λόγο. Ξεκίνησε από το σύνολο με ένα στοιχείο και το συμβόλισε με τον αριθμό "1", που είναι πρώτος αριθμός σύμφωνα με τον ορισμό πρώτων αριθμών. Στη συνέχεια δημιούργησε μία αυξητική πράξη την πρόσθεση. Επειδή είχε έναν αριθμό, τον πρόσθεσε στον εαυτό του και έτσι ξεκίνησε η πράξη της πρόσθεσης. Το αποτέλεσμα το συμβόλισε με τον αριθμό "2": 1+1=2. Ο νέος αριθμός, το 2 , είναι και αυτός πρώτος αριθμός. Στη συνέχεια προσθέτει τους δύο πρώτους αριθμούς και βρίσκει τον επόμενο φυσικό αριθμό το "3": 1+2=3. Και το "3" έχει το ίδιο DNA με τους γονείς του, είναι πρώτος αριθμός. Δηλαδή, το ξεκίνημα της μεγάλης δημιουργίας των φυσικών αριθμών έγινε με τους τρεις πρώτους αριθμούς. Η ακολουθία των πρώτων αριθμών 1,2,3, είναι μία οικογένεια από την οποία, (με την πράξη της πρόσθεσης), γεννιούνται όλοι οι μετέπειτα φυσικοί αριθμοί, *πρώτοι* και *σύνθετοι*. Αν προσθέσουμε τους 1,2,3, ανά δύο και ανά τρεις προκύπτουν οι νέοι φυσικοί αριθμοί 1+3=4, 3+2=5, 1+2+3=6. Με επισύναψη του νέου πρώτου αριθμού "5", στην οικογένεια των πρώτων αριθμών, έχουμε την ακολουθία πρώτων αριθμών 1,2,3,5. Με την πρόσθεση αυτών, ανά δύο, ανά τρεις και ανά τέσσερις κατασκευάζουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς μέχρι τον 1+2+3+5=11 στους οποίους υπάρχουν δύο νέοι πρώτοι οι 7 και 11. Με τους πρώτους αριθμούς της νέας ακολουθίας 1,2,3,5,7,11, και με την ίδια μεθοδολογία κατασκευάζουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς μέχρι τον 1+2+3+5+7+11=29 κ.ο.κ.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Όλοι οι φυσικοί αριθμοί, όπως είδαμε, έχουν κοινή καταγωγή, δημιουργούνται από τους πρώτους αριθμούς με γενεσιουργό πράξη την πρόσθεση. Στο πέρασμα του χρόνου διατυπώθηκε η άποψη ότι, οι σύνθετοι φυσικοί αριθμοί δημιουργούνται από ένα μοναδικό και προσωπικό τους γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για τους πρώτους αριθμούς, όμως, δεν λένε τίποτα. Πώς δημιουργούνται; Να υποτεθεί ότι είναι φυσικοί αριθμοί αυθύπαρκτοι; Η έκφραση ενός σύνθετου αριθμού ως γινόμενο πρώτων παραγόντων δεν είναι τίποτα άλλο από ένα άθροισμα ίσων προσθετέων πρώτων αριθμών.

Παραδείγματα:

2=1x2=2, 15=3x5=5+5+5,
42=2x3x7=(3x7)+(3x7)=
=(7+7+7)+(7+7+7)=7+7+7+7+7+7, …, με την προϋπόθεση ότι, οι πρώτοι αριθμοί με άγνωστο τρόπο, προ-υπάρχουν. Ο πολλαπλασιασμός δεν είναι αυτόνομη πράξη. Χρειάζεται και τη βοήθεια της πρόσθεσης για να δώσει το αποτέλεσμα. Είναι ένας αλγόριθμος με τον οποίο υπολογίζουμε πολύ εύκολα και γρήγορα ένα άθροισμα ίσων προσθετέων. Ας σκεφτούμε πόσο χρονοβόρο είναι να προστεθεί 9453 φορές ο αριθμός 8769, ενώ με τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού και τη βοήθεια της πρόσθεσης υπολογίζουμε το άθροισμα αυτό εύκολα και σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Συνεπώς, οι πρώτοι αριθμοί με την πράξη της πρόσθεσης δημιουργούν όλους τους φυσικούς αριθμούς, σύνθετους και πρώτους. Στα παραπάνω παραδείγματα έγινε χρήση του αριθμού **"1"** ως πρώτου αριθμού. Γι` αυτόν ισχύει και λειτουργεί απόλυτα, ο ορισμός των πρώτων αριθμών επειδή: Πρώτος αριθμός είναι εκείνος ο οποίος διαιρείται με το **1** και **τον εαυτό του**. Αν υπάρχει αντίθετη άποψη να τη δούμε και να τη συζητήσουμε»

2^o *Θέμα.* *Igor F. Sharygin, «Χρειάζεται άραγε στο σχολείο του 21ου αιώνα η Γεωμετρία;»*

προλεγόμενα Ένας καλός μας φίλος και επιστήμονας, ο Σωτήρης Η. Καραλής (λέκτορας στο ΠΑ.Δ.Α.), μας έστειλε μια εργασία του γνωστού Ρώσου μαθηματικού, ερευνητή και παιδαγωγού Igor F. Sharygin (1937-2004), με τίτλο «*Χρειάζεται άραγε στο σχολείο του 21ου αιώνα η Γεωμετρία;*» (σε μετάφραση Γιάννη Ζήβα). Ο πειρασμός μεγάλος, κι η επιθυμία μας να "πάρουμε" μια γεύση, μας οδήγησε στο να δημοσιεύσουμε ένα ελάχιστο δείγμα αυτής της εργασίας. Απολαύστε την. Σε μελλοντικό τεύχος, θα δημοσιεύσουμε ενδιαφέροντα τμήματα. Εμείς ευχαριστούμε τον Σωτ. Η. Καραλή.

«… Η Γεωμετρία είναι φαινόμενο της πανανθρώπινης κουλτούρας. Κάποια θεωρήματα της Γεωμετρίας αποτελούν μερικά από τα αρχαιότερα μνημεία του παγκόσμιου πολιτισμού. Ο άνθρωπος δεν μπορεί στην πραγματικότητα να εξελιχθεί πολιτιστικά και πνευματικά, εάν δεν έχει μάθει στο σχολείο γεωμετρία. Η Γεωμετρία εμφανίσθηκε όχι μόνο από τις πρακτικές, αλλά και από τις πνευματικές ανάγκες του ανθρώπου. (…)

Η Ιστορία της Γεωμετρίας δεν αντανακλά μόνο την ιστορία της εξέλιξης της ανθρώπινης σκέψης. Η Γεωμετρία, από παλιά, αποτελεί έναν από τους ισχυρούς κινητήρες, που κινούν αυτήν την σκέψη. Η Θεωρία των κωνικών τομών,που εμφανίστηκε μερικές χιλιετίες πριν, αφού συμπληρώθηκε με τους νόμους του Κέπλερ, έστρωσε τον δρόμο της ανθρωπότητας για το Διάστημα.(με την ευκαιρία κάνουμε λόγο περί της εφαρμοσμένης και πρακτικής σημασίας της Γεωμετρίας).

Η Γεωμετρία, αλλά και όλα τα Μαθηματικά, αντιπροσωπεύουν ένα πολύ δραστικό μέσο για την ηθική διαπαιδαγώγηση του ανθρώπου. Στο μυθιστόρημα «Πόλεμος και Ειρήνη», ο Λ.Ι. Τολστόϊ χαρακτηρίζοντας τον γέροντα πρίγκηπα Νικολάϊ Μπολκόνσκι, γράφει: « Έλεγε, ότι υπάρχουν μόνο δύο πηγές των ανθρώπινων ελαττωμάτων : η απραξία και η δεισιδαιμονία, και ότι επίσης υπάρχουν μόνο δύο αρετές : η δραστηριότητα και ο νους. Ο ίδιος ασχολιόταν με την διαπαιδαγώγηση της κόρης του και για να αναπτύξει σ’ αυτήν και τις δύο βασικές αρετές, παρέδιδε σ’ αυτήν μαθήματα Άλγεβρας και Γεωμετρίας και καθόρισε όλη της την ζωή με αδιάκοπα μαθήματα.» (…)

Για την ομαλή ανάπτυξη του παιδιού, είναι αναγκαία η πλήρης διατροφή. Για την φυσιολογική διανοητική ανάπτυξη είναι απαραίτητη μία ποικιλόμορφη διανοητική τροφή. Σήμερα τα μαθηματικά, ιδιαίτερα η γεωμετρία, αποτελεί ένα από τα λίγα οικολογικά καθαρά και άρτια προϊόντα, καταναλισκόμενα στο σύστημα εκπαίδευσης. Η Γεωμετρία μπορεί και πρέπει να γίνει ένα μάθημα, με την βοήθεια του οποίου μπορούμε να ισορροπήσουμε την λειτουργία του εγκεφάλου, να βελτιώσουμε την λειτουργική αλληλεπίδραση μεταξύ των ημισφαιρίων του εγκεφάλου. *Η Γεωμετρία είναι η βιταμίνη για το μυαλό*. (…)

Αλλά η Γεωμετρία είναι ένα «τρόφιμο» το οποίο πρέπει να μαγειρευτεί από ένα πολύ ικανό μάγειρα. Διαφορετικά μπορεί όχι μόνο να στερηθεί τις «διατροφικές» της ιδιότητες, αλλά και να επιφέρει βλάβη στον οργανισμό. (…)

(…) Η Γεωμετρία, που στέκεται στην κοιτίδα της ανθρώπινης λογικής, μπορεί να βοηθήσει σήμερα τον άνθρωπο να κάνει ακόμη ένα άλμα στην εξέλιξή του. Διανοητική, πνευματική και ηθική. Πρέπει να μην αφήσουμε να χαθεί αυτή η δυνατότητα…»

3ο Θέμα. *Μαθηματικά εργαλεία για την ερμηνεία των κυττάρων*

προλεγόμενα πώς λειτουργεί ο «εγκέφαλος» ενός ζωντανού κυττάρου, επιτρέποντας σ’ ένα οργανισμό να λειτουργεί και να ευδοκιμεί σε μεταβαλλόμενα και δυσμενή περιβάλλοντα;

«Η ερευνήτρια Dr Robyn Araujo από το Queensland University of Technology (QUT) ανέπτυξε **νέα μαθηματικά εργαλεία** για να λύσει ένα μυστήριο χρόνων, για το πώς τα απίστευτα περίπλοκα βιολογικά δίκτυα μέσα στα κύτταρα, μπορούν να προσαρμοστούν και να επαναρρυθμιστούν μετά την έκθεσή τους σε ένα νέο ερέθισμα.

Τα ευρήματά της, που δημοσιεύθηκαν στο Nature Communications, παρέχουν ένα νέο επίπεδο κατανόησης της κυτταρικής επικοινωνίας και της κυτταρικής «γνώσης» και έχουν πιθανή εφαρμογή σε ποικίλους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των νέων στοχευμένων θεραπειών καρκίνου.

Η Dr Araujo, λέκτορας εφαρμοσμένων και υπολογιστικών Μαθηματικών στη Σχολή Επιστημών και Τεχνολογίας του QUT, δήλωσε ότι ενώ γνωρίζουμε πολλά για τις αλληλουχίες γονιδίων, έχουμε πολύ περιορισμένη γνώση σχετικά με το πώς οι πρωτεΐνες που κωδικοποιούνται από αυτά τα γονίδια συνεργάζονται ως ολοκληρωμένο δίκτυο – μέχρι τώρα.

«Οι πρωτεΐνες σχηματίζουν σύνθετα δίκτυα χημικών αντιδράσεων που επιτρέπουν στα κύτταρα να επικοινωνούν και να «σκέπτονται» – δίνοντας ουσιαστικά στο κύτταρο μια «γνωστική» ικανότητα ή θα λέγαμε έναν "εγκέφαλο"», είπε. «Αποτελεί μακροχρόνιο μυστήριο για την επιστήμη το πώς λειτουργεί αυτός ο κυτταρικός "εγκέφαλος"»

«Δεν θα μπορούσαμε ποτέ να ελπίζουμε ότι θα καταφέρουμε να μετρήσουμε την πλήρη πολυπλοκότητα των κυψελοειδών δικτύων – τα δίκτυα είναι απλά πάρα πολύ μεγάλα και διασυνδεδεμένα και οι πρωτεΐνες των συστατικών τους είναι πολύ ευμετάβλητες»

«Όμως τα Μαθηματικά μας παρέχουν ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να διερευνήσουμε πώς αυτά τα δίκτυα θα μπορούσαν να κατασκευαστούν ώστε να λειτουργούν όπως λειτουργούν». «Η έρευνά μου, μας παρέχει έναν νέο τρόπο να εξετάσουμε την εξάπλωση της πολυπλοκότητας του δικτύου στη φύση»..

Το έργο της Dr Araujo επικεντρώθηκε στην ευρέως παρατηρημένη λειτουργία που ονομάζεται τέλεια προσαρμογή – η δυνατότητα ενός δικτύου να επαναρρυθμίζεται αφού έχει εκτεθεί σε ένα νέο ερέθισμα.

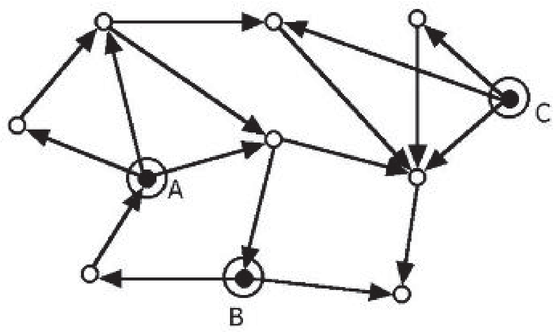
«Ένα παράδειγμα τέλειας προσαρμογής είναι η αίσθηση της όσφρησης», αναφέρει. «Όταν εκτιθέμεθα σε μια οσμή, θα τη μυρίσουμε αρχικά, ωστόσο μετά από λίγο φαίνεται ότι η οσμή έχει εξαφανιστεί, παρόλο που η χημική ουσία – το ερέθισμα – εξακολουθεί να υπάρχει. Η αίσθηση της οσμής μας, έχει επιδείξει τέλεια προσαρμογή, η οποία επιτρέπει σε αυτήν να παραμείνει ευαίσθητη σε περαιτέρω αλλαγές στο περιβάλλον μας, ώστε να ανιχνεύσουμε τόσο απαλές όσο και πολύ έντονες μυρωδιές»

«Τα κύτταρα εκτίθενται σε σήματα – ορμόνες, αυξητικούς παράγοντες και άλλα χημικά – και αρχικά οι πρωτεΐνες τους τείνουν να αντιδρούν και να ανταποκρίνονται, αλλά στη συνέχεια επανέρχονται στην κατάσταση που βρισκόταν πριν το ερέθισμα, παρόλο που το ερέθισμα εξακολουθεί να υπάρχει»

«Μελέτησα όλους τους πιθανούς τρόπους που μπορεί να κατασκευαστεί ένα δίκτυο και διαπιστώθηκε ότι για να είναι σε θέση να επιτύχει αυτή την τέλεια προσαρμογή με έναν εύρωστο τρόπο, ένα δίκτυο πρέπει να ικανοποιεί ένα εξαιρετικά άκαμπτο σύνολο μαθηματικών αρχών. Υπάρχει ένας εκπληκτικά περιορισμένος αριθμός τρόπων μέσω των οποίων, θα μπορούσε ένα δίκτυο να κατασκευαστεί για να κάνει τέλεια προσαρμογή»

Η Dr Araujo είπε ότι η δημοσιευμένη μελέτη ήταν το αποτέλεσμα περισσότερων από *«πέντε ετών συνεχούς υπερπροσπάθειας για την επίλυση αυτού του εξαιρετικά δύσκολου μαθηματικού προβλήματος».*

Ο έτερος συγγραφέας της μελέτης και μέντοράς της, καθηγητής Lance Liotta, δήλωσε ότι το «συναρπαστικό και εκπληκτικό» αποτέλεσμα της μελέτης της Dr. Araujo ισχύει για κάθε ζωντανό οργανισμό ή βιοχημικό δίκτυο οποιουδήποτε μεγέθους.



«Η μελέτη είναι ένα θαυμάσιο παράδειγμα του πώς τα Μαθηματικά μπορούν να έχουν βαθύ αντίκτυπο στην κοινωνία και τα αποτελέσματα της Dr. Araujo θα παράσχουν μια σειρά από εντελώς νέες προσεγγίσεις για τους επιστήμονες σε διάφορους τομείς», ανέφερε.

«Για παράδειγμα, στις στρατηγικές για την υπέρβαση της αντοχής του καρκίνου – γιατί οι όγκοι συχνά προσαρμόζονται και αναπτύσσονται ξανά μετά τη θεραπεία;»

«Θα μπορούσε επίσης να βοηθήσει στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο το ορμονικό μας σύστημα, η ανοσολογική μας άμυνα, προσαρμόζονται τέλεια σε συχνές προκλήσεις και μας κρατούν υγιείς».

πηγή: • phys.org –Math sheds light on how living cells 'think'
• sciencedaily.com – Math sheds light on how living cells 'think'

V. ειδήσεις – εδησούλες

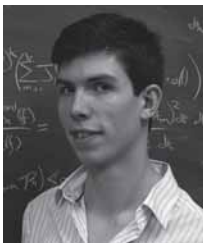
1. ***"έφυγε" ο Παύλος Γεωργίου.*** "Έφυγε" από κοντά μας ο ***Άνθρωπος***, επιστήμονας και φίλος, ο καθηγητής Παύλος Γεωργίου. Σημειώνουμε ότι με τον Παύλο, μας σύνδεε σχέση αμοιβαίας εκτίμησης και φιλίας. Η κηδεία του έγινε στις 27 Σεπτεμβρίου 2019 στο Πρώτο Νεκροταφείο Πατρών.

Το Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ δημοσίευσε την παρακάτω ανακοίνωση, για την πρόσφατη απώλεια του καθηγητή Παύλου Γεωργίου: «*Ο Παύλος Γεωργίου γεννήθηκε* ***στην Πάτρα το 1932****. Σπούδασε στο Μαθηματικό Τμήμα της Φυσικομαθηματικής Σχολής του ΕΚΠΑ όπου έλαβε το πτυχίο του το 1955. Ακολούθησε μεταπτυχιακές σπουδές στη Χαϊδελβέργη ως υπότροφος της Ελληνικής Κυβέρνησης μεταξύ των ετών 1961-1963 και τον Ιούνιο του ίδιου έτους αναγορεύθηκε διδάκτορας του Μαθηματικού Τμήματος της Σχολής Φυσικομαθηματικών Επιστημών του ΕΚΠΑ. Στη συνέχεια μετεκπαιδεύτηκε ως Forschungsstipendiat της A. V. Humboldt-Stiftung στην Erlangen (1966-1967) και στη Χαϊδελβέργη (1967-1968). Κατά τη διάρκεια της δικτατορίας απολύθηκε, συνελήφθη και εξορίστηκε στη Γυάρο. Το 1974 διορίστηκε Τακτικός Καθηγητής της Β΄ Τακτικής Έδρας της Μαθηματικής Ανάλυσης και αφυπηρέτησε το 1984*»

2. οι συνάδελφοι που, εκτός από τα Μαθηματικά, ασχολήθηκαν και με το Θέατρο και τη Λογοτεχνία πάντα τραβούν την προσοχή μας. Σας παρουσιάζουμε έναν απ' αυτούς είναι ο Ηλίας Κωνσταντόπουλος, μαθηματικός, πτυχιούχος του ΕΚΠΑ. Υπηρέτησε στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, όπου εκτός από το μάθημα στην τάξη, ασχολήθηκε και με διάφορες άλλες δραστηριότητες, που δε μας παίρνει ο χώρος για να αναπτύξουμε. Συγκεκριμένα έχει γράψει: ● Τα θεατρικά έργα «*Τα παιδιά του Ευκλείδη*» και «*Μια ημέρα στο σχολείο*», ● Τα βιβλία του Κ.Ε.Ε., σε συνεργασία με άλλους συναδέλφους, ● Δέκα βιβλία μαθηματικών για το Λύκειο, ● Την ποιητική συλλογή «*Τα ποιήματα ενός μαθηματικού*», ● Το μυθιστόρημα «*Άπειρος Έρωτας*», ● Το βιβλίο «Οι θεοειδείς», μια λογοτεχνική ιστορία των μαθηματικών.

3. για μας είναι είδηση αυτό που αλιεύσαμε, τυχαία, αφού αφορά ένα σημαντικό συνάδελφό μας, τον Κώστα Δόρτσιο από τα Γρεβενά. Σας δίνουμε τέσσερες περιεκτικές γραμμές, γραμμένες από τον ίδιο: «*Ήταν αρχές του 2006 όταν άρχισα να δημοσιεύω στην καθημερινή εφημερίδα «Γραμμή» της Κοζάνης τις μαθηματικές μου αναζητήσεις. Ήταν τότε που ως σχολικός σύμβουλος των Μαθηματικών είχα την ευκαιρία να συνεργαστώ με ένα πλήθος άξιων συναδέλφων μαθηματικών και όχι μόνο, από την όλη περιοχή της Δυτικής Μακεδονίας...*»

4. Το βραβείο **Cole Prize** για το 2020 απονέμεται στον John Maynard, καθηγητή στην Οξφόρδη και με πολλά άλλα βραβεία, ο οποίος μαζί με τον δικό μας, τον Δημήτρη Κουκουλόπουλο απόδειξαν την εικασία του **Duffin–Schaeffer** που διατυπώθηκε το 1941 και ήταν ένα από τα κεντρικά προβλήματα στον τομέα της μετρικής Διαφαντικής προσέγγισης. Το πρόβλημα είχε να κάνει με προσεγγίσεις αριθμών από κλάσματα και ανήκει στο τομέα της θεωρίας των αριθμών που λέγεται «*Διοφαντική προσέγγιση*» προς τιμήν του Διόφαντου της Αλεξάνδρειας που ήταν ένας από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς.



5. Από τον εκλεκτό φίλο της στήλης Σωτήρη Γκουντουβά, λάβαμε το πιο πρωτότυπο μήνυμα που έφτασε μέχρι εμάς. Σας δίνουμε το μήνυμα και αναμένουμε απάντηση.
«*Σε επίσκεψη μου σε οδοντίατρο αναφέρθηκε στη Γεωμετρία της οδοντοστοιχίας, η οποία είναι Γεωμετρία της συμμετρίας ως προς επίπεδο (κατοπτρική συμμετρία), με μόνο δύο εξαιρέσεις. Μπορείτε να τις βρείτε;*»
Ο αρχαιότερος (σε ηλικία) της Συντακτικής Επιτροπής της στήλης, δεν τα κατάφερε ν' απαντήσει, αφού στερείται ... φυσικής οδοντοστοιχίας. Οι νεώτεροι, έδωσαν διάφορες απαντήσεις.

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;"

Ο γνωστός Ρώσος συγγραφέας Lev Nikolayevich Tolstoy (9/9/1828-20/11/1910), που έγραψε (μεταξύ των άλλων) και το «*Πόλεμος και Ειρήνη*».

VII. Απαραίτητη διευκρίνηση

Στη σελίδα 34 του Ευκλείδη Β΄ του προηγούμενου τεύχους 113 και στο σημείο που αναφέρεται «*…Εκεί διαβάζουμε ότι συνάρτηση* $f(x)=x^2-4x+7$ *θα μπορούσε …* ***-να προστεθεί- …έχει την μορφή*** $f(\ )=(\ )^2-4(\ )+7$ ***…*** *… και ότι για να υπολογίσουμε το* $f(-2)$ *τοποθετούμε το* -2 *στις θέσεις που ορίζουν οι παρενθέσεις:*

$$f(-2)=(-2)^2-4(-2)+7=4+8+7=19»$$

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις Άλγεβρας

Χρήστος Λαζαρίδης

Κάθε άσκηση είναι μία μαθηματική πρόταση και ασφαλώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εφαρμογή σε επόμενα ερωτήματα. Συνήθως δίνονται «κατάλληλα» αρχικά ερωτήματα, που σκοπό έχουν να βοηθήσουν στην επίλυση των άλλων. Το σύντομο αυτό άρθρο χρησιμοποιεί ως προτάσεις ερωτήματα ασκήσεων και αναφέρεται στις ενότητες των **ταυτοτήτων, ανισοτήτων, απολύτων, ριζών, εξισώσεων και ανισώσεων** δηλαδή έως το κεφάλαιο **4** του σχολικού βιβλίου.

Άσκηση 1

α) Να αποδείξετε ότι:
$(\alpha+1)^3+(\alpha-1)^3=2\alpha(\alpha^2+3)$, **για κάθε** $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $(x^2+1)^3+(x^2-1)^3\le 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x+5)^3+(x+3)^3\le 0$.

Λύση

α) Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε $(\alpha+1)^3+(\alpha-1)^3=$
$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1+\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=$
$2\alpha^3+6\alpha=2\alpha(\alpha^2+3)$ που ισχύει.

β) Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Με εφαρμογή του α) για $\alpha=x^2$, είναι ισοδύναμη με την ανίσωση, $2x^2(x^2+3)^3\le 0$ (1). Στη συνέχεια $(1)\Leftrightarrow 2x^2(x^2+3)^3<0$ ή $2x^2(x^2+3)^3=0$.
Αλλά $x^2\ge 0$ και $x^2+3>0$, επομένως η πρώτη είναι αδύνατη και η δεύτερη δίνει $x=0$.

γ) Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.
$(x+5)^3+(x+3)^3\le 0\Leftrightarrow$
$[(x+4)+1]^3+[(x+4)-1]^3\le 0$ (1)
Ο τελευταίος μετασχηματισμός γίνεται για να χρησιμοποιηθεί το α) ερώτημα, για $\alpha=x+4$.
Πράγματι, $(1)\Leftrightarrow 2(x+4)[(x+4)^2+3]\le 0\Leftrightarrow x+4\le 0$
$\Leftrightarrow x\le -4$.

Σημείωση: Στο (β) χρησιμοποιήθηκε
$$\alpha\beta\le 0\Leftrightarrow(\alpha\beta<0 \text{ ή } \alpha\beta=0).$$

Άσκηση 2

α) Να αποδείξετε ότι:
$(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^3-2-2\alpha=\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)$, **για κάθε** $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση
$$(x+2)^2+(x+2)^3-2x-4=0.$$

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\ge 0$, **ισχύει:**
$(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}+1)^3\ge 2+2\sqrt{x}$.

Λύση

α) Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε, $(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^3-2-2\alpha=$
$(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^3-2(\alpha+1)=$
$(\alpha+1)[(\alpha+1)+(\alpha+1)^2-2]=$
$(\alpha+1)(\alpha+1+\alpha^2+2\alpha+1-2)=$
$(\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)$.

β) Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ισοδύναμη με την εξίσωση,
$[(x+1)+1]^2+[(x+1)+1]^3-2-2(x+1)=0$ (1).
Ο μετασχηματισμός γίνεται για να χρησιμοποιηθεί το α) ερώτημα για $\alpha=x+1$ οπότε έχουμε:
$(1)\Leftrightarrow(x+1)[(x+1)+1)][(x+1)+3)]=0\Leftrightarrow$
$(x+1=0$ ή $x+2=0$ ή $x+4=0)\Leftrightarrow$
$(x=-1$ ή $x=-2$ ή $x=-4)$.

γ) Για κάθε $x\ge 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}+1)^3-2-2\sqrt{x}\ge 0$.
Η τελευταία λόγω του (α), γίνεται,
$\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)\ge 0$, που προφανώς ισχύει.

Άσκηση 3

α) Να αποδείξετε ότι:
$\alpha+2\sqrt{\alpha}+2+\beta-2\sqrt{\beta}=(\sqrt{\alpha}+1)^2+(\sqrt{\beta}-1)^2$
για κάθε $\alpha,\beta\ge 0$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\gamma+2\sqrt{\gamma}+\delta-2\sqrt{\delta}\ge -2$, **για κάθε** $\gamma,\delta\ge 0$.

Λύση

α) Έστω $\alpha,\beta\ge 0$, $\alpha+2\sqrt{\alpha}+2+\beta-2\sqrt{\beta}=$
$(\sqrt{\alpha}^2+2\sqrt{\alpha}+1)+(\sqrt{\beta}^2-2\sqrt{\beta}+1)=$
$(\sqrt{\alpha}+1)^2+(\sqrt{\beta}-1)^2$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε:
$$\gamma+2\sqrt{\gamma}+\delta-2\sqrt{\delta}+2\ge 0 \ (1)$$
Αλλά από (α) ερώτημα για $\gamma=\alpha,\delta=\beta$ προκύπτει,
$$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{\gamma}+1)^2+(\sqrt{\delta}-1)^2\ge 0.$$

Η τελευταία ισχύει αφού $\sqrt{\gamma}+1\neq 0$.

Σημείωση: Στο (β) χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα,
$$\alpha^2+\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow (\alpha\neq 0 \text{ ή } \beta\neq 0).$$

Άσκηση 4

α) Να αποδείξετε ότι:
$|\alpha+\beta|<|\alpha-\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta<0,$ **για κάθε** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x^3+2x|<|x^3-2x|$.

Λύση

α) Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$|\alpha+\beta|<|\alpha-\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2<|\alpha-\beta|^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2<(\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2<\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow$

$4\alpha\beta<0 \Leftrightarrow \alpha\beta<0$.

β) Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.
Από το α) ερώτημα για $\alpha=x^3, \beta=2x$ έχουμε την ισοδύναμη ανίσωση $x^3\cdot 2x<0$, η οποία δίνει $2x^4<0$, που είναι Αδύνατη.

Άσκηση 5

α) Να αποδείξετε ότι: $|\alpha-3\beta|=|\beta-3\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta|$, **για κάθε** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση,
$$\left|\frac{x}{2019}-3\right|^5=\left|1-\frac{3x}{2019}\right|^5.$$

Λύση

α) Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$|\alpha-3\beta|=|\beta-3\alpha| \Leftrightarrow |\alpha-3\beta|^2=|\beta-3\alpha|^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha-3\beta)^2=(\beta-3\alpha)^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2=\beta^2-6\alpha\beta+9\alpha^2 \Leftrightarrow$

$8\beta^2=8\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2 \Leftrightarrow |\alpha|^2=|\beta|^2 \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta|$.

β) Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και επειδή ο αριθμός 5 είναι περιττός είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:
$\left|\frac{x}{2019}-3\right|=\left|1-\frac{3x}{2019}\right| \quad (2)$.

Από το (α) για $\alpha=\frac{x}{2019}$, $\beta=1$,

$(2) \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2019}\right|=1 \Leftrightarrow |x|=|2019| \Leftrightarrow$

$(1) \Leftrightarrow |x|=|2019| \Leftrightarrow (x=-2019 \text{ ή } x=2019)$.

Σημείωση: στο (β) χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα: Έστω ν περιττός, τότε: $\alpha^\nu=\beta^\nu \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Άσκηση 6

α) Να αποδείξετε ότι:
$|\alpha|\beta=\alpha|\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\geq 0,$ **για κάθε** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:
$$|x-1|(x-2)=(x-1)|x-2| \quad \textbf{(1)}.$$

Λύση

α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

- $\alpha\neq 0$

$$|\alpha|\beta=\alpha|\beta| \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{|\beta|}{|\alpha|} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \Leftrightarrow \alpha\beta\geq 0.$$

- $\alpha=0$

Η ισοδυναμία προφανώς ισχύει. Τελικά η ισοδυναμία ισχύει, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το (α) για $\alpha=x-1, \beta=x-2$:

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{array}{l} x-1\leq 0 \\ x-2\leq 0 \end{array} \Leftrightarrow x\leq 1 \text{ ή } x\geq 2.$$

Σημείωση: Η τελευταία ανίσωση λύνεται ευκολότερα και με τη χρήση του πρόσημου τριωνύμου.

Άσκηση 7

α) Να αποδείξετε ότι:
$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\geq 0,$ **για κάθε** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+100|=|x+1|+99$.

Λύση

α) Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2=(|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \Leftrightarrow$

$|\alpha\beta|=\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta\geq 0$.

β) Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ισοδύναμη με την εξίσωση, $|(x+1)+99|=|x+1|+99 \quad (1)$

Χρησιμοποιούμε το (α), για $\alpha=x+1, \beta=99$,

$(1) \Leftrightarrow (x+1)99\geq 0 \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Άσκηση 8

Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$

β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

γ) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq \alpha+\beta+\gamma$, **αν επιπλέον** $\alpha\beta\gamma=1$.

δ) Να εξετάσετε αν ισχύει:
$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq \alpha+\beta+\gamma.$$

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε:
$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0$ ή $(\alpha-\beta)^2\geq 0$.

Η τελευταία όμως ισχύει.

β) Από το (α) διαδοχικά προκύπτει:
$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta, \beta^2+\gamma^2\geq 2\beta\gamma, \gamma^2+\alpha^2\geq 2\gamma\alpha.$$
Προσθέτουμε κατά μέλη τις τρεις ανισότητες,
$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2\geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Rightarrow$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

γ) Εφαρμόζουμε το (β) θέτοντας όπου α,β,γ $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ αντίστοιχα οπότε:
$$\left(\alpha^2\right)^2+\left(\beta^2\right)^2+\left(\gamma^2\right)^2\geq \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \Rightarrow$$
$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2 \quad (1)$$
Εφαρμόζουμε το (β), για α,β,γ τα $\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\alpha$ αντίστοιχα, οπότε:
$$(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq \alpha\beta\beta\gamma+\beta\gamma\gamma\alpha+\gamma\alpha\alpha\beta \Rightarrow$$
$$(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq \alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta \Rightarrow$$
$$(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \overset{\alpha\beta\gamma=1}{\Rightarrow}$$
$$(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq (\alpha+\beta+\gamma)(2)$$
Από τις (1) ,(2) προκύπτει ότι
$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq \alpha+\beta+\gamma.$$

δ) Επιλέγουμε $\alpha=1,\beta=1,\gamma=\frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\frac{33}{16}, \alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2}$ και ασφαλώς **δεν ισχύει** για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$,
$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq \alpha+\beta+\gamma, \text{ διότι } \frac{33}{16}<\frac{5}{2}.$$

Σημείωση: Για την απόδειξη του (α) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του «αρκεί» ενώ οι αποδείξεις των (β), (γ) είναι ευθείες αποδείξεις. Για την απόδειξη του (γ) χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο του **«αντιπαραδείγματος»**.

Άσκηση 9

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$, για κάθε $\alpha<0$.

β) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\frac{1}{\alpha})(\alpha+\frac{1}{\alpha})(\gamma+\frac{1}{\gamma})\leq -8$, για κάθε $\alpha,\beta,\gamma<0$.

Λύση

α) Έστω $\alpha<0$. Αρκεί να αποδείξουμε:
$\alpha(\alpha+\frac{1}{\alpha})\geq \alpha(-2)$ ή $\alpha^2+1\geq -2\alpha$ ή
$\alpha^2+1+2\alpha\geq 0$ ή $(\alpha+1)^2\geq 0$, που ισχύει.

β) Έστω $\alpha,\beta,\gamma<0$, τότε με εφαρμογή του (α),
$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2, \beta+\frac{1}{\beta}\leq -2, \gamma+\frac{1}{\gamma}\leq -2.$$
Πολλαπλασιάζουμε και τις τρείς ανισότητες με -1 οπότε παίρνουμε,
$$-\alpha-\frac{1}{\alpha}\geq 2, -\beta-\frac{1}{\beta}\geq 2, -\gamma-\frac{1}{\gamma}\geq 2. \quad (*)$$
Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις τρεις ανισότητες, οι οποίες έχουν θετικά μέλη.
$(-\alpha-\frac{1}{\alpha})(-\beta-\frac{1}{\beta})(-\gamma-\frac{1}{\gamma})\geq 2\cdot 2\cdot 2$ και τελικά
$$-(\alpha+\frac{1}{\alpha})(\beta+\frac{1}{\beta})(\gamma+\frac{1}{\gamma})\geq 8 \Rightarrow (\alpha+\frac{1}{\alpha})(\beta+\frac{1}{\beta})(\gamma+\frac{1}{\gamma})\leq -8.$$

Σημείωση. Στο σημείο (*) αυτό, πολλαπλασιάσαμε με -1 για να μετατρέψουμε τα μέλη των ανισοτήτων σε θετικούς αριθμούς ώστε να μπορέσουμε στη συνέχεια να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

Άσκηση 10

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x+2=0$ (1).

β) Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ με $x\neq y$ τέτοιοι ώστε:
$$x^2-3xy+2y^2=0 \quad (2).$$

i) Να αποδείξετε ότι $y\neq 0$.

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{x}{y}$

iii) Να αποδείξετε ότι $\frac{x+y}{x-y}=3$.

Λύση

α) Βρίσκουμε την διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1.$$
Επειδή $\Delta>0$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.
$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm 1}{2}$. Συμπεραίνουμε ότι:
$(x=1$ ή $x=2)$

β) i) Έστω $y=0$ τότε:
$$(2)\Leftrightarrow x^2-3x\cdot 0+2\cdot 0^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0,$$
πράγμα άτοπο, αφού από υπόθεση $x\neq y$. Άρα, $y\neq 0$.

ii) Όπως αποδείξαμε στο (i), $y\neq 0$, επομένως είναι δυνατόν να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της (2) με το $y^2>0$ και να προκύψει ισοδύναμη σχέση.

Πράγματι: $(2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2}-\frac{3xy}{y^2}+\frac{2y^2}{y^2}=0 \Leftrightarrow$

$(\frac{x}{y})^2-3(\frac{x}{y})+2=0$. Από το α αν θεωρήσουμε όπου x το $\frac{x}{y}$ προκύπτει: ($\frac{x}{y}=1$ ή $\frac{x}{y}=2$).

Η τιμή $\frac{x}{y}=1$, δηλαδή $x=y$, απορρίπτεται, διότι $x \neq y$. Τελικά παίρνουμε $\frac{x}{y}=2$.

iii) Από το (ii) έχουμε ότι $x=2y$ οπότε,

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{2y+y}{2y-y}=\frac{3y}{y}=3.$$

Σημείωση Στο ερώτημα (βi) χρησιμοποιήσαμε την «**Μέθοδο της Απαγωγής σε Άτοπο**».

Άσκηση 11

α) Έστω η εξίσωση, $x^2-\kappa x+\lambda=0$ με $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει δύο άνισες ρίζες x_1,x_2.

Να αποδείξετε ότι, $\sqrt{x_1{}^2+\kappa x_2+\lambda}=|\kappa|$.

β) Αφού αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-2019x+2020=0$ έχει δύο άνισες ρίζες ρ_1,ρ_2, να αποδείξετε ότι,

$$\rho_1{}^2+2019\rho_2+2020=2019^2.$$

Λύση

α) Οι x_1,x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης επομένως από τις σχέσεις Vieta, $x_1+x_2=-\frac{-\kappa}{1}=\kappa$ (1). Ο x_1 είναι ρίζα της εξίσωσης επομένως θα την επαληθεύει δηλαδή, $x_1{}^2-\kappa x_1+\lambda=0$ (2).

Έχουμε, $x_1{}^2+\kappa x_2+\lambda \overset{(2)}{=} \kappa x_1-\lambda+\kappa x_2+\lambda=$
$\kappa(x_1+x_2)\overset{(1)}{=}\kappa\cdot\kappa=\kappa^2$.

Από την τελευταία προκύπτει,

$$\sqrt{x_1{}^2+\kappa x_2+\lambda}=\sqrt{\kappa^2} \Rightarrow \sqrt{x_1{}^2+\kappa x_2+\lambda}=|\kappa|.$$

β) Η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, αφού, $\Delta=(-2019)^2-4\cdot 2020>0$.

Εφαρμόζουμε το (α) για $\kappa=2019,\lambda=2020$, οπότε καταλήγουμε,

$$\rho_1{}^2+2019\rho_2+2020=2019^2.$$

Άσκηση 12

α) Να αποδείξετε ότι:

$\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$, για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $\alpha+\beta=1$ τότε να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\alpha\beta$ παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ και $\alpha\beta=\frac{1}{4}$.

γ) Αν $x,y,z \in \mathbb{R}, z \neq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$, τέτοιοι ώστε $x^\nu+y^\nu=z^\nu$ τότε να αποδείξετε ότι $\left(\frac{xy}{z}\right)^\nu<\frac{2}{5}$.

Λύση

α) Διευκολύνει να ξεκινήσουμε από το δεύτερο μέλος οπότε, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{4}-\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{4}=\frac{4\alpha\beta}{4}=\alpha\beta.$$

β) Από το (α) συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο γίνεται μέγιστο, όταν η παράσταση $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$ γίνεται ελάχιστη. Αλλά $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \geq 0$ επομένως η παράσταση γίνεται ελάχιστη όταν $\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ δηλαδή όταν $\alpha=\beta$. Για $\alpha=\beta$ η υπόθεση $\alpha+\beta=1$ γίνεται: $2\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$. Επίσης $\alpha\beta=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

γ) Από τη σχέση, $x^\nu+y^\nu=z^\nu$ και επειδή $z \neq 0$ παίρνουμε, $\frac{x^\nu}{z^\nu}+\frac{y^\nu}{z^\nu}=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^\nu+\left(\frac{y}{z}\right)^\nu=1$.

Θέτουμε $\left(\frac{x}{z}\right)^\nu=\alpha, \left(\frac{y}{z}\right)^\nu=\beta$ οπότε $\alpha+\beta=1$.

Από το β) προκύπτει ότι το γινόμενο $\alpha\beta$ παίρνει μέγιστη τιμή $\frac{1}{4}$, επομένως $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$. Αλλά $\frac{1}{4}<\frac{2}{5}$ οπότε $\alpha\beta<\frac{2}{5}$. Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^\nu\left(\frac{y}{z}\right)^\nu<\frac{2}{5} \Rightarrow \left(\frac{xy}{z}\right)^\nu<\frac{2}{5}.$$

Σημείωση: Η άσκηση γενικεύεται αν $\alpha+\beta=c, c \in \mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν την παρακάτω πρόταση: Αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι σταθερό τότε το γινόμενο τους γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί είναι ίσοι.

Τάξη: Α΄

Γεωμετρία

Γεώργιος Τσικαλουδάκης

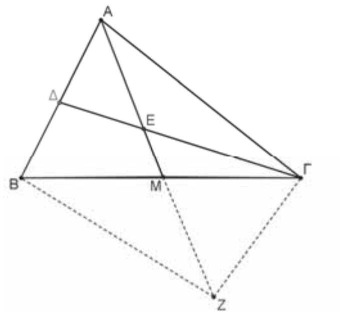
Η χρήση της βοηθητικής ευθείας.

*Στόχος του άρθρου αυτού δεν είναι η απλή παράθεση και λύση ασκήσεων, αλλά μέσα από τη **διαδικασία επίλυσης** μιας άσκησης **Γεωμετρίας** να αναδειχθεί η αξία της στην καλλιέργεια της σκέψης και **εφευρετικότητας** που κατά τη γνώμη μας καμιά άλλη ενέργεια του ανθρώπου δεν μπορεί να συγκριθεί με αυτή. Θα δούμε ασκήσεις των οποίων η λύση επιτυγχάνεται (πολλές φορές πολύ απλά) με την κατάλληλη **βοηθητική ευθεία.** Σε κάθε άσκηση δεν δίνουμε την πλήρη λύση, ούτε την κατευθείαν κατάλληλη βοηθητική ευθεία, αλλά προσπαθούμε με κάποια άλλη τυχαία βοηθητική ευθεία να βρούμε **το κλειδί της λύσης**, έως ότου ανακαλύψουμε τη **βέλτιστη** βοηθητική ευθεία. Προτείνουμε επίσης για λόγους **δημιουργικής πρωτοβουλίας**, σε κάθε άσκηση, να δοκιμάσει ο μαθητής και άλλους τρόπους επίλυσης.*

1. Έστω AM η διάμεσος τριγώνου $AB\Gamma$, και σημείο Δ της πλευράς AB. Αν E είναι το σημείο τομής των $AM, \Gamma\Delta$ και $A\Delta = \Delta E$, $AE = BM$, τότε να αποδείξετε ότι: $B\hat{M}A = 60^o$.

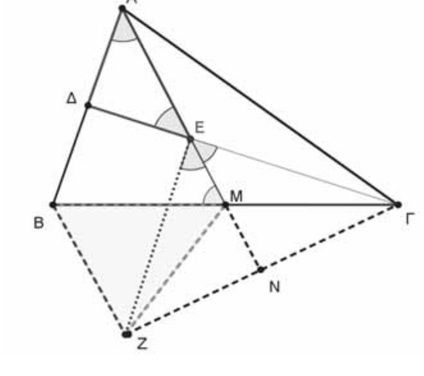
Λύση: Πρώτη απόπειρα:

Μια σκέψη είναι να μεταφέρουμε το τμήμα AE κοντά στο BM. Έτσι παίρνουμε στην προέκταση της AM τμήμα $MZ = AE$, οπότε στο τρίγωνο $BZ\Gamma$ έχουμε ότι $BM = M\Gamma = MZ$, άρα είναι ορθογώνιο στο Z. Έτσι μας μένει να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΓMZ είναι ισόπλευρο (πώς;)



Εγκαταλείπουμε αυτή την προσπάθεια και πάμε σε άλλη **βοηθητική ευθεία:**

Αρκεί να μεταφέρουμε το τμήμα AE κοντά στο BM προς την μεριά του σημείου B. Θεωρούμε τμήμα $BZ // = AE$.



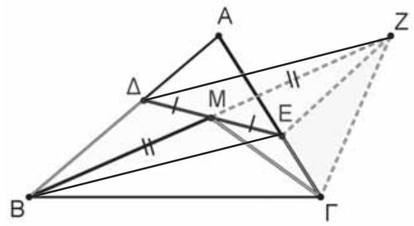
Αυτή η κίνηση μας δίνει και το κλειδί μιας άλλης λύσης. **Το** $ABZE$ **είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο**, οπότε έχουμε: $B\hat{A}E = B\hat{Z}E$, $B\hat{Z}E = Z\hat{E}M$ ως εντός εναλλάξ, $\Delta\hat{E}Z = M\hat{E}\Gamma$ ως κατακορυφήν άρα και $Z\hat{E}M = M\hat{E}\Gamma$. Στο τρίγωνο $B\Gamma Z$ έχουμε ότι $MN // BZ$ και το M μέσον της $B\Gamma$, άρα το N μέσον της $Z\Gamma$. Δηλαδή στο τρίγωνο $ZE\Gamma$ η EN είναι διχοτόμος και διάμεσος, άρα είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο $ZE\Gamma$ είναι ισοσκελές. Αφού $MN // BZ$ έχουμε ότι $B\hat{Z}\Gamma = 90^o$ και επομένως: $BZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα $M\hat{\Gamma}Z = 30^o$ και $N\hat{M}\Gamma = B\hat{M}A = 60^o$.

Σημείωση: Προσπαθείστε να δείτε και εσείς και άλλες λύσεις με δικές σας πρωτοβουλίες.

2. Έστω Δ, E σημεία των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα οξυγώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ και M το μέσο του $E\Delta$.

Να αποδείξετε ότι: $BM + M\Gamma \geq B\Delta + \Gamma E$

Λύση: Πρώτη λύση:

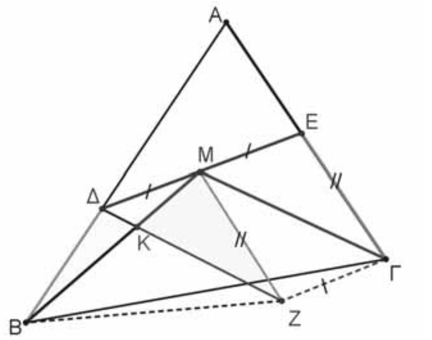


Προεκτείνουμε το BM κατά ίσο τμήμα $BM = MZ$, οπότε το $B\Delta ZE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε μεταφέραμε το $B\Delta$ στο EZ. Τότε θα έχουμε: $BM + M\Gamma \geq B\Delta + \Gamma E$, δηλαδή $BM + M\Gamma \geq EZ + \Gamma E$ δηλαδή $MZ + M\Gamma \geq EZ + \Gamma E$ που ως γνωστόν ισχύει από βασική πρόταση.

Δεύτερη λύση:

Θεωρούμε $\Gamma Z // = ME$, οπότε $MZ = E\Gamma$ και $M\Gamma = \Delta Z$. Στα τρίγωνα KMZ, $KB\Delta$ έχουμε: $KZ + KM \geq MZ$ και $K\Delta + KB \geq B\Delta$, οπότε:

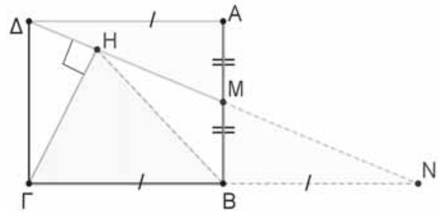
$(\mathrm{KB}+\mathrm{K\Delta})+(\mathrm{KZ}+\mathrm{KM})\geq \mathrm{B\Delta}+\mathrm{E\Gamma}$, δηλαδή: $\mathrm{BM}+\mathrm{M\Gamma}\geq \mathrm{B\Delta}+\mathrm{E\Gamma}$



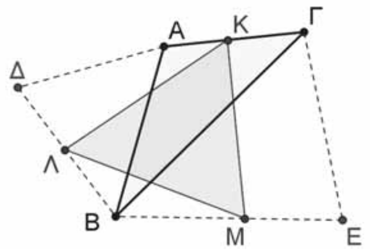
3. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ ορθογωνίου ΑΒΓΔ και $\Gamma H\perp \Delta M$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΗΒ είναι ισοσκελές.

Λύση:

Έστω Ν το σημείο τομής των $\Delta M, B\Gamma$. Είναι φανερό ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta M$, BNM είναι ίσα, **άρα** $B\Gamma=A\Delta=BN$ και αφού ΗΒ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΗΝ, θα έχουμε $HB=B\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΓΗΒ είναι ισοσκελές.



4. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ. Αν Κ,Λ,Μ είναι τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ, ΒΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.



Λύση:

Προεκτείνουμε το ΒΚ κατά ίσο τμήμα ΚΖ, οπότε το ΑΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

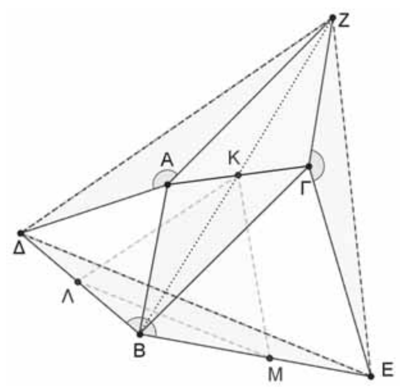
Εύκολα αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta Z$, $B\Delta E$, ΓZE είναι ίσα, αφού:

$\Delta\hat{B}E=120^o+\hat{B}$

$\Delta\hat{A}Z=360^o-60^o-B\hat{A}Z=$

$300^o-(180^o-\hat{B})=120^o+\hat{B}$ και

$\Gamma\hat{Z}E=360^o-60^o-(\hat{A}+\hat{\Gamma})=120^o+\hat{B}$

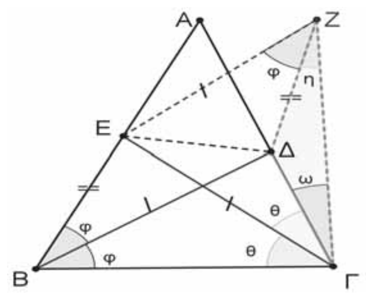


Άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο. Έτσι έχουμε ότι τα σημεία Κ, Λ τα Κ, Μ και Μ, Λ ενώνου μέσα πλευρών στα τρίγωνα $B\Delta Z$, BEZ και $B\Delta E$ αντίστοιχα, άρα $K\Lambda //= \frac{\Delta Z}{2}$, $\Lambda M //= \frac{\Delta E}{2}$, $KM //= \frac{ZE}{2}$ οπότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

5. Οι διχοτόμοι ΒΔ, ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση:

Μια πρώτη σκέψη είναι να μεταφέρουμε την μία διχοτόμο κοντά στην άλλη. Έτσι παίρνουμε τμήμα $EZ //= B\Delta$. Άρα το ΒΕΖΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΓΕΖ είναι ισοσκελές τρίγωνο. Έστω $\hat{\varphi}>\hat{\theta}$, τότε στο τρίγωνο ΓΕΖ θα έχουμε $\hat{\eta}<\hat{\omega}$ και στο τρίγωνο ΔΓΖ έχουμε ότι $\Delta\Gamma<\Delta Z$ δηλαδή $\Delta\Gamma<BE$.



Ακόμα τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ έχουν δύο πλευρές ίσες: (ΒΓ κοινή πλευρά), $B\Delta=\Gamma E$ και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες ($2\hat{\varphi}>2\hat{\theta}$) οπότε θα είναι $\Delta\Gamma>BE$, άτοπο (λόγω της (1)). Όμοια αν φ<θ καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα αναγκαστικά $BE=\Delta\Gamma$, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Βασίλης Μποζατζίδης – Γεώργιος Τσαβαρής – Χρήστος Π. Τσιφάκης

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικές εξισώσεις της μορφής

$\eta\mu g(x)=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu g(x)=\alpha$, $\varepsilon\varphi g(x)=\alpha$, $\sigma\varphi g(x)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Για την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων των μορφών:

$$\eta\mu g(x)=\alpha,\ \sigma\upsilon\nu g(x)=\alpha,$$
$$\varepsilon\varphi g(x)=\alpha,\ \sigma\varphi g(x)=\alpha$$

με $g(x)$ πρωτοβάθμια παράσταση του x, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

ΒΗΜΑ 1: Λύνουμε την εξίσωση ως προς τον τριγωνομετρικό αριθμό που εμφανίζεται.

ΒΗΜΑ 2: Τον πραγματικό αριθμό α που προέκυψε στο δεύτερο μέρος, τον αντικαθιστούμε με ισοδύναμο τριγωνομετρικό αριθμό (ίδιο με αυτόν που υπάρχει στην εξίσωσή μας).

Προσοχή! Αν έχουμε ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή συνάρτηση και $\alpha<-1$ ή $\alpha>1$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Ας θεωρήσουμε ότι $\alpha\in[-1,1]$.

Οπότε, προκύπτουν εξισώσεις των μορφών:

$$\eta\mu g(x)=\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu g(x)=\sigma\upsilon\nu\theta,$$
$$\varepsilon\varphi g(x)=\varepsilon\varphi\theta,\ \sigma\varphi g(x)=\sigma\varphi\theta$$

Σε περίπτωση που το $\alpha<0$ θα πρέπει να θυμόμαστε:

$-\eta\mu x=\eta\mu(-x)$, $-\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi(-x)$,

$-\sigma\varphi x=\sigma\varphi(-x)$, $-\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)$.

ΒΗΜΑ 3: Γράφουμε τις αντίστοιχες λύσεις των εξισώσεων.

ΒΗΜΑ 4: Λύνουμε ως προς x τις σχέσεις που προέκυψαν.

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-1=0$$

Λύση. Αρχικά λύνουμε ως προς $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$ και έχουμε:

$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-1=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

Απ' όπου τελικά έχουμε τις λύσεις:

$$\left.\begin{matrix}\frac{\pi}{6}-2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\\ \text{ή}\\ \frac{\pi}{6}-2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}-2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ -2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}-2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{12}\\ \text{ή}\\ -2x=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{12}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=-\kappa\pi-\frac{\pi}{24}\\ \text{ή}\\ x=-\kappa\pi+\frac{5\pi}{24}\end{matrix},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Άσκηση 2. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi x\cdot(\eta\mu4x+1)=0$$

Λύση Με $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$ έχουμε ότι

$\varepsilon\varphi x\cdot(\eta\mu4x+1)=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=0$ ή $\eta\mu4x+1=0$

Λύνοντας καθεμιά από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε: $\varepsilon\varphi x=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

ή

$$\eta\mu4x+1=0\Leftrightarrow\eta\mu4x=-1\Leftrightarrow\eta\mu4x=\eta\mu\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow$$
$$4x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\ \text{ή}\ 4x=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},\ \text{ή}\ x=\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Άσκηση 3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\eta\mu^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

Λύση. Ισχύει ότι:

$$\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}-x\right)=$$
$$\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

Οπότε, η εξίσωση γίνεται:

$$\left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow$$
$$2\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\\ \text{ή}\\ \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}\end{matrix}\right.$$

και οι λύσεις των εξισώσεων είναι:

$$\left\{\begin{array}{c} x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi\pm\frac{3\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi\pm\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\end{array}\right., \kappa\in\mathbb{Z}$$

Άσκηση 4. Να λυθεί η εξίσωση: $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi 4x=1$

Λύση

Θα πρέπει: $\left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu x\neq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \eta\mu 4x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota \\ x\neq\frac{\kappa\pi}{2},\ \ x\neq\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1$.

Οπότε, αντικαθιστώντας $\varepsilon\varphi x=\dfrac{1}{\sigma\varphi x}$ η εξίσωση γίνεται: $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi 4x=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sigma\varphi x}\cdot\sigma\varphi 4x=1\Leftrightarrow$

$\sigma\varphi 4x=\sigma\varphi x$ της οποίας οι λύσεις είναι:

$4x=\kappa\pi+x\Leftrightarrow 3x=\kappa\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\kappa\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται τριγωνομετρικές εξισώσεις των μορφών:

$$\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x+\gamma=0,$$
$$\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}$$
$$\alpha\varepsilon\varphi^2x+\beta\varepsilon\varphi x+\gamma=0,$$
$$\alpha\sigma\varphi^2x+\beta\sigma\varphi x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

αλλά και εξισώσεις που μπορούν να αναχθούν στις παραπάνω μορφές, όπως: $\alpha\eta\mu^2x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma=0$,

$$\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\eta\mu x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0\ \text{και}$$
$$\alpha\varepsilon\varphi x+\beta\sigma\varphi x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0\ \text{ή}\ \beta\neq 0$$

➢ Αν η εξίσωση έχει μία από τις πρώτες μορφές, τότε:

ΒΗΜΑ 1: Θέτουμε $\eta\mu x=\omega$ ή $\sigma\upsilon\nu x=\omega$, με $-1\leq\omega\leq 1$ ή αντίστοιχα $\varepsilon\varphi x=\omega$ ή $\sigma\varphi x=\omega,\ \omega\in\mathbb{R}$, και προκύπτει μία δευτεροβάθμια πολυωνυμική εξίσωση.

ΒΗΜΑ 2: Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση. Έστω ω_1,ω_2 οι λύσεις της.

ΒΗΜΑ 3: Οπότε προκύπτουν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις: $\eta\mu x=\omega_1,\ \eta\mu x=\omega_2$ ή $\sigma\upsilon\nu x=\omega_1,\ \sigma\upsilon\nu x=\omega_2$ (αντίστοιχα για $\varepsilon\varphi x,\ \sigma\varphi x$)

Από τις οποίες θα προκύψουν οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

➢ Αν η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\alpha\eta\mu^2x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0\ \text{ή}$$
$$\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\eta\mu x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0,\ \text{τότε:}$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$ και με κατάλληλη αντικατάσταση προκύπτει εξίσωση των μορφών

$$\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}$$
$$\text{ή}\ \alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Αν η εξίσωση έχει τη μορφή

$\alpha\varepsilon\varphi x+\beta\sigma\varphi x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, τότε:

Χρησιμοποιούμε τη ταυτότητα $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1$ και με κατάλληλη αντικατάσταση προκύπτει και πάλι εξίσωση της προηγούμενης κατηγορίας.

Άσκηση 5. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{2\sigma\upsilon\nu^2x+5\sigma\upsilon\nu x-3=0}$$

Λύση

Θέτοντας $\sigma\upsilon\nu x=\omega,\ \omega\in[-1,1]$, η εξίσωση γίνεται:

$$2\omega^2+5\omega-3=0\Leftrightarrow\omega=-3\ (\alpha\pi o\rho)\ \text{ή}\ \omega=\frac{1}{2}.$$

Οπότε, προκύπτει: $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 6. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\varphi x+3\varepsilon\varphi x=2\sqrt{3}$

Λύση. Με $x\neq\kappa\pi$ και $x\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$ έχουμε.

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1\Leftrightarrow\sigma\varphi x=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}$,

οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}+3\varepsilon\varphi x=2\sqrt{3}\Leftrightarrow 1+3\varepsilon\varphi^2x=2\sqrt{3}\varepsilon\varphi x\Leftrightarrow$

$3\varepsilon\varphi^2x-2\sqrt{3}\varepsilon\varphi x+1=0$

Θέτουμε $\varepsilon\varphi x=\omega$, με $\omega\in\mathbb{R}$, και η εξίσωση γίνεται: $3\omega^2-2\sqrt{3}\omega+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\omega-1\right)^2=0\Leftrightarrow$

$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Επομένως προκύπτει:

$\varepsilon\varphi x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$$\eta\mu f(x)=\sigma\upsilon\nu g(x)\ \ \text{ή}\ \ \varepsilon\varphi f(x)=\sigma\varphi g(x)$$

ΒΗΜΑ 1: Αντικαθιστούμε τον ένα από τους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς της εξίσωσης χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x,\quad\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x,$$
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi x,\quad\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$$

ΒΗΜΑ 2: Λύνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν.

Άσκηση 7. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Λύση

Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

οπότε η εξίσωση γίνεται: $\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

Της οποίας οι λύσεις είναι:

$$\begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}-x \\ \acute{\eta} \\ 2x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\pi \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$$\alpha\eta\mu f(x)=\beta\sigma\upsilon\nu f(x),\ \alpha,\beta\neq 0$$

ΒΗΜΑ 1: Διαιρούμε τα δύο μέλη με $\eta\mu f(x)$ ή $\sigma\upsilon\nu f(x)$, οπότε προκύπτει εξίσωση της μορφής $\varepsilon\varphi f(x)=\frac{\beta}{\alpha}$ ή $\sigma\varphi f(x)=\frac{\alpha}{\beta}$.

ΒΗΜΑ 2: Λύνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν.

Άσκηση 8. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu x+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0$

Λύση. Η εξίσωση γίνεται: $\eta\mu x=-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x$

Οι τιμές $x=2\kappa\pi+\theta$ και $x=2\kappa\pi+\pi-\theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ δεν αποτελούν λύσεις της εξίσωσης αφού θα πρέπει ταυτόχρονα $\eta\mu x=0$ και $\sigma\upsilon\nu x=0$, οπότε διαιρώντας τα δύο μέλη με ημx ($x\neq 2\kappa\pi+\theta$ και $x\neq 2\kappa\pi+\pi-\theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}$) έχουμε:

$$\eta\mu x=-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\varphi x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\varphi x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x=-\sigma\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

της οποίας οι λύσεις είναι:

$$x=\kappa\pi+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

ΒΗΜΑ 1: Ανάλογα με τη μορφή της λύνουμε την εξίσωση, ακολουθώντας την αντίστοιχη διαδικασία επίλυσης.

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι το διάστημα που δίνεται είναι το $\Delta=[\alpha,\beta]$. Οπότε ισχύει: $\alpha\leq x\leq\beta$.

Αντικαθιστούμε το x με τις λύσεις που έχουμε βρει στο ΒΗΜΑ 1.

ΒΗΜΑ 3: Λύνουμε ως προς $\kappa\in\mathbb{Z}$ τη διπλή ανίσωση που έχει προκύψει και αναζητούμε τους ακέραιους που βρίσκονται εντός των ορίων της. Οπότε έχουμε βρει τις επιθυμητές τιμές του $\kappa\in\mathbb{Z}$.

ΒΗΜΑ 4: Αντικαθιστούμε κάθε τιμή του κ στους τύπους των λύσεων και προκύπτουν οι λύσεις της εξίσωσης που βρίσκονται εντός του Δ.

Άσκηση 9. Να βρεθούν ποιες από τις λύσεις της εξίσωσης $2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\varphi x-3=0$ βρίσκονται μέσα στο διάστημα $\Delta=\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Λύση

Με $x\neq\kappa\pi,\ \kappa\in Z$ έχουμε:

$$2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\varphi x-3=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-3=0\Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2x-3\eta\mu x=0\Leftrightarrow 2\left(1-\eta\mu^2x\right)-3\eta\mu x=0\Leftrightarrow$$

$-2\eta\mu^2x-3\eta\mu x+2=0$. Θέτουμε $\eta\mu x=\omega$, με $\omega\in[-1,1]$, και η εξίσωση γίνεται: $-2\omega^2-3\omega+2=0\Leftrightarrow\omega=-2$ (απορρ.)

ή $\omega=\frac{1}{2}$. Οπότε έχουμε: $\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$ Στη συνέχεια θα βρούμε τις λύσεις που βρίσκονται στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\leq 2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\frac{1}{6}\leq\kappa\leq\frac{2}{3}$. Όμως θα πρέπει $\kappa\in\mathbb{Z}$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του κ εντός αυτών των ορίων και κατ' επέκταση καμία λύση της μορφής $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ δεν βρίσκεται στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για τις λύσεις της μορφής $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$.

$$\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\leq 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow-\frac{1}{6}\leq\kappa\leq\frac{1}{3}$ και αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 0$. Οπότε, η λύση που βρίσκεται εντός του διαστήματος Δ είναι αυτή που προκύπτει για $\kappa = 0$. Δηλαδή η $x = \frac{5\pi}{6}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 10. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\eta\mu^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x$$

Λύση. 1ος τρόπος: Η εξίσωση γίνεται:

$$\eta\mu^2 x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\left(\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ή } \eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1$$

$$\text{ή } \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3},\ \kappa \in Z.$$

2ος τρόπος: Εάν το $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε έχουμε ότι $\eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$, άτοπο. Άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ οπότε διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\sigma\upsilon\nu^2 x$ και έχουμε: $\varepsilon\varphi^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x + 1 = 0$

$$\text{ή } \varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \text{ ή } \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3},\ \kappa \in Z.$$

Άσκηση 11. Να λυθεί η εξίσωση:

$$1 + \varepsilon\varphi x = 2\eta\mu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση. Με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4},\ \kappa \in Z$$

$$\text{ή } \eta\mu x + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = 2\kappa\pi \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z.$$

Άρα $x = 2\kappa\pi$ ή $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4},\ \kappa \in Z$.

Άσκηση 12. Να λυθεί η εξίσωση:

$$1 + \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

Λύση

$$1 + \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu^2 x =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 1 + \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu^2 x =$$

$$= 1 + \sigma\upsilon\nu\left[2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$1 + \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu^2 x = 1 + \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot \left[\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\eta\mu x - 1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x\left[\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right]\left[\underbrace{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right) + 1}_{\Delta<0}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = 0 \text{ ή } \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in Z.$$

Άσκηση 13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\sigma\upsilon\nu\alpha - 3)x + 7\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{9}{4} = 0$ με $x \in R$ και $\alpha \in [0, 4\pi]$. Εάν η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, να βρεθεί το άθροισμα S των τιμών του α και να βάλετε σε κύκλο, την σωστή απάντηση:

i) $S = \frac{20\pi}{3}$ ii) $S = 15\pi$ iii) $S = 16\pi$ iv) $S = 17\pi$

Λύση. Αφού η εξίσωση έχει διπλή ρίζα έχουμε:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu\alpha - 3)^2 - 4\left(7\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{9}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$24\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 18 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Εάν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \overset{\alpha\in[0,4\pi]}{\Leftrightarrow}$

$$\alpha = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \overset{\alpha\in[0,4\pi]}{\Leftrightarrow} \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$$

Εάν $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\alpha = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6} \overset{\alpha\in[0,4\pi]}{\Leftrightarrow} \alpha \in \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right\}$$

Έτσι προκύπτει

$$S = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} + \frac{19\pi}{6} +$$

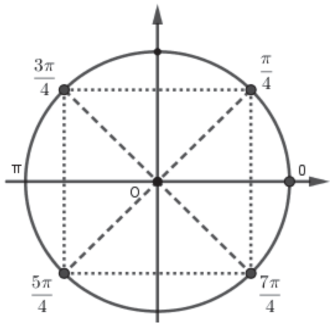
$+\frac{23\pi}{6} = 16\pi$. Άρα σωστή απάντηση είναι η iii).

Άσκηση 14. Δίνεται η εξίσωση

$$\eta\mu^{2018}x + \sigma\upsilon\nu^{2018}x = 2\left(\eta\mu^{2020}x + \sigma\upsilon\nu^{2020}x\right).$$

Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση: α) 3 β) 4 γ) 5 δ) 6

Λύση. $\eta\mu^{2018}x+\sigma\upsilon\nu^{2018}x=2\left(\eta\mu^{2020}x+\sigma\upsilon\nu^{2020}x\right)\Leftrightarrow$



$\eta\mu^{2018}x\left(1-2\eta\mu^2x\right)-\sigma\upsilon\nu^{2018}x\left(2\sigma\upsilon\nu^2x-1\right)=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu^{2018}x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu^{2018}x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\left(\eta\mu^{2018}x-\sigma\upsilon\nu^{2018}x\right)=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 2x=0$ ή $\eta\mu^{2018}x=\sigma\upsilon\nu^{2018}x\Leftrightarrow$

- $\sigma\upsilon\nu 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\kappa\in Z$
- $\eta\mu^{2018}x=\sigma\upsilon\nu^{2018}x\overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi^{2018}x=1\Leftrightarrow$

  $\varepsilon\varphi x=\pm 1\Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4},\kappa\in Z$.

Τελικά βρίσκουμε ότι υπάρχουν 4 τιμές στο διάστημα $\left[0,2\pi\right]$ και έτσι κυκλώνουμε το β).

Άσκηση 15. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\sigma\varphi x=2.$$

Λύση. Με $\left.\begin{array}{c}\sigma\upsilon\nu x\neq\pm 1\\ \eta\mu x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\neq\kappa\pi,\ \kappa\in Z$ έχουμε:

$\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=2\Leftrightarrow$

$\frac{\eta\mu x\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)+1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=2\Leftrightarrow$

$1+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=2\eta\mu^2x\Leftrightarrow$

$\left(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=0$ ή $1+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow$

- $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=0\overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi x=-1\Leftrightarrow$

  $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in Z$ ή
- $1+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow\eta\mu x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, (δεκτή λύση) $\kappa\in Z$ ή $x=2\kappa\pi+\pi,\kappa\in Z$, που απορρίπτεται από τον αρχικό περιορισμό. Άρα τελικές λύσεις: $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in Z$ και $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$.

Άσκηση 16. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\eta\mu^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\eta\mu x$$

Λύση. Εάν θέσουμε $x-\frac{\pi}{4}=\omega\Leftrightarrow x=\omega+\frac{\pi}{4}$ η εξίσωση γίνεται: $\eta\mu^3\omega=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$\eta\mu^3\omega=\sqrt{2}\cdot\left(\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\right)\Leftrightarrow$

$\eta\mu^3\omega=\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega\Leftrightarrow\eta\mu^3\omega=\left(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega\right)\cdot 1\Leftrightarrow$

$\eta\mu^3\omega=\left(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega\right)\cdot\left(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)\Leftrightarrow$

$\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^3\omega=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega\left(\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega\left(\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega=0$ ή $\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=-1\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega=0$ ή $2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=-2\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega=0$ ή $\eta\mu 2\omega=-2$, Αδύνατη.

$\sigma\upsilon\nu\omega=0\Leftrightarrow\omega=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z$.

Άρα $x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in Z$.

Άσκηση 17. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)=0$

Λύση. $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)=0\Leftrightarrow\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)=\eta\mu 0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=2\kappa\pi$ (1) ή $\sigma\upsilon\nu x=2\kappa\pi+\pi$ (2), $\kappa\in Z$

Αλλά $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$ οπότε η (1) γίνεται

$-1\leq 2\kappa\pi\leq 1,\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{-1}{2\pi}\leq\kappa\leq\frac{1}{2\pi},\kappa\in Z\Leftrightarrow$

$-1<\frac{-1}{2\pi}\leq\kappa\leq\frac{1}{2\pi}<1,\kappa\in Z\Rightarrow\kappa=0$.

Άρα $\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\lambda\pi+\frac{\pi}{2},\lambda\in\mathbb{Z}$

Όμοια η (2) γίνεται: $-1\leq 2\kappa\pi+\pi\leq 1,\kappa\in Z\Leftrightarrow$

$\frac{-1-\pi}{2\pi}\leq\kappa\leq\frac{1-\pi}{2\pi},\kappa\in Z\Leftrightarrow$

$-1<\frac{-1-\pi}{2\pi}\leq\kappa\leq\frac{1-\pi}{2\pi}<0,\kappa\in Z$, αδύνατη.

Άρα η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις της μορφής $x=\lambda\pi+\frac{\pi}{2}$ όπου $\lambda\in Z$.

Άσκηση 18. Να λυθεί η εξίσωση:

$$|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|+|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|=2$$

Λύση. $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|+|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|=2\Leftrightarrow$

$\left(|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|+|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|\right)^2=4\Leftrightarrow$

$|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|^2+2|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x||\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|+$
$+|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|^2=4\Leftrightarrow$
$2+2|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\cdot|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|=4\Leftrightarrow$
$|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x||\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|=1\Leftrightarrow$
$|\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x|=1\Leftrightarrow|2\eta\mu^2x-1|=1\Leftrightarrow\eta\mu^2x=1$
ή $\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=-1$ ή $\eta\mu x=0\Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $x=\kappa\pi$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 19. Αν γνωρίζετε ότι η οπτικοποίηση του υπέρηχου ενός ασθενούς δίνεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο: $f(x)=4\eta\mu^2x+4\eta\mu x-8$ με $x\in R$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

Λύση. Μετατρέπουμε τον τύπο της συνάρτησης και έχουμε: $f(x)=4\eta\mu^2x+4\eta\mu x-8=$

$4\eta\mu^2x+4\eta\mu x+1-9=(2\eta\mu x+1)^2-9$.

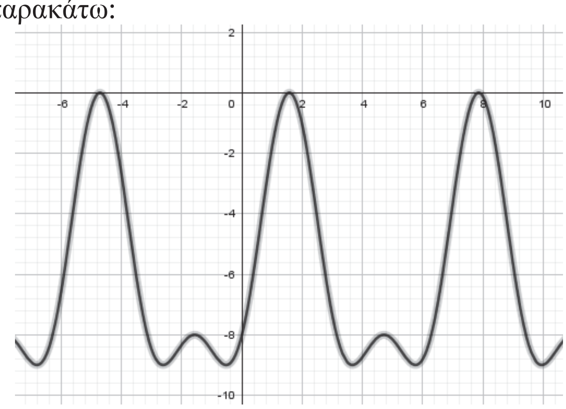
Αφού για κάθε $x\in R$ ισχύει $-1\le\eta\mu x\le1$ έχουμε
$-2\le2\eta\mu x\le2\Leftrightarrow-1\le2\eta\mu x+1\le3\Leftrightarrow$
$0\le(2\eta\mu x+1)^2\le9\Leftrightarrow-9\le(2\eta\mu x+1)^2-9\le0\Leftrightarrow$
$-9\le f(x)\le0$.

- Με $f(x_o)=0\Leftrightarrow x_o=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$
- Με $f(x_o)=-9\Leftrightarrow$

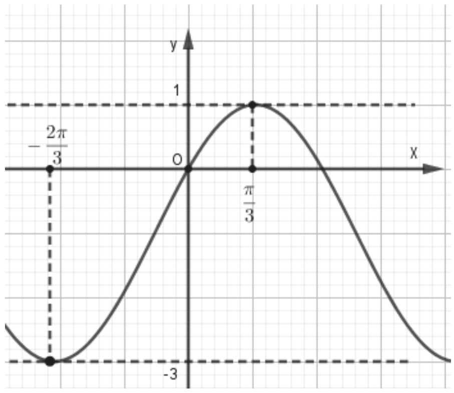
$$x_o=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \text{ ή } x_o=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\kappa\in Z$$

Άρα $f_{min}=-9$ και $f_{max}=0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η παρακάτω:



Άσκηση 20. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=A\cdot\eta\mu(x+\alpha)+B$ με $A,B,\alpha\in R$ κα $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Εάν $S=A+B+\frac{12\alpha}{\pi}$ να κυκλώσετε την σωστή απάντηση:
i) $S=1$ ii) $S=2$ iii) $S=3$ iv) $S=5$



Λύση. Παρατηρούμε ότι
$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-3$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

Άρα έχουμε: $\left.\begin{array}{l}A\cdot\eta\mu\left(-\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3\\ A\cdot\eta\mu(0+\alpha)+B=0\\ A\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+B=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll}A\cdot\eta\mu\left(-\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3 & (1)\\ A\cdot\eta\mu(\alpha)+B=0 & (2)\\ A\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+B=1 & (3)\end{array}\right\}$$

Εάν $A=0$, το Σύστημα είναι Αδύνατο. Άρα $A\neq0$ και τότε από $(3)\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1-B}{A}$ (4).

Από (1) προκύπτει $A\cdot\eta\mu\left(-\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3\Leftrightarrow$

$-A\cdot\eta\mu\left(\pi-\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3\Leftrightarrow$

$-A\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+B=-3\overset{(4)}{\Leftrightarrow}B=-1$.

Για $B=-1$ έχουμε:

$\left.\begin{array}{l}A\cdot\eta\mu\alpha=1\\ A\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\eta\mu\alpha\Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\alpha=2\eta\mu\alpha\Leftrightarrow$

$\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=3\eta\mu\alpha\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\overset{\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}\alpha=\frac{\pi}{6}$.

Για $\alpha=\frac{\pi}{6}$ προκύπτει ότι $A=2$. Τότε $S=A+B+\frac{12\alpha}{\pi}=3$. Επομένως σωστή απάντηση το iii).

Τάξη: Β΄ Εμβαδά Ευθυγράμμων Σχημάτων

Σπύρος Καρδαμίτσης

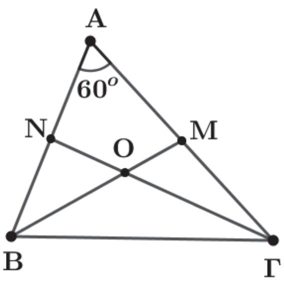
*Από την **αρχαιότητα** η έννοια του εμβαδού αποτελούσε αντικείμενο μελέτης και έρευνας. Πολλοί Έλληνες μαθηματικοί ανέπτυξαν σημαντικές θεωρίες και τεχνικές μεθόδους στην προσπάθεια τους να υπολογίσουν το εμβαδό ενός επιπέδου σχήματος. Στην προσπάθεια τους αυτή, αρχικά όρισαν τα αξιώματα που διέπουν τα εμβαδά και στην συνέχεια επινόησαν τα εργαλεία για τον υπολογισμό τους. Αλλά ως δαιμόνιοι δεν αρκέστηκαν μονάχα στον αριθμητικό υπολογισμό ενός εμβαδού, θεωρητικοποίησαν την έννοια του, δηλαδή στόχευσαν στην καρδιά της έννοιας θεωρώντας ότι ο υπολογισμός ενός εμβαδού δεν είναι κατ΄ ανάγκη αριθμητικός. Μπορεί να είναι και **αλγοριθμικός**. Με άλλα λόγια οι αρχαίοι Έλληνες θεώρησαν το εμβαδό ως θεωρητική έννοια. Για παράδειγμα το εμβαδό ενός τριγώνου δεν είναι κατ΄ ανάγκη ο τύπος ένα δεύτερο, βάση επί ύψος αλλά μια ολόκληρη διαδικασία, που μπορεί να συγκρίνει σχήματα κομματιάζοντάς τα και συγκρίνοντας τα κομμάτια αυτά.*

Άσκηση 1. **Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $ΑΒ=6$, $ΑΓ=8$ και γωνία $\hat{A}=60^\circ$. Αν οι διάμεσοι $ΒΜ, ΓΝ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ τέμνονται στο σημείο $Ο$, να αποδείξετε ότι:**

α) $(ΑΒΓ)=12\sqrt{3}$ **β)** $(ΒΓΜ)=(ΒΓΝ)=6\sqrt{3}$

γ) $(ΟΒΝ)=(ΟΓΝ)$

Λύση



α) Έχουμε

$$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημΑ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot ημ60^o=$$
$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

β) Επειδή η διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, είναι:

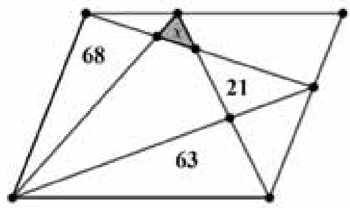
$$(ΒΓΜ)=\frac{(ΑΒΓ)}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

γ) Όμοια για το εμβαδό του τριγώνου $ΒΓΝ$ έχουμε: $(ΒΓΝ)=6\sqrt{3}$, άρα $(ΒΓΜ)=(ΒΓΝ)=6\sqrt{3}$

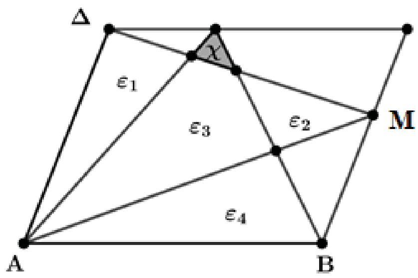
Άσκηση 2. **Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα παραλληλόγραμμο που χωρίζεται σε 8 τρίγωνα από τα οποία για τα τρία γνωρίζουμε το εμβαδό τους και είναι σημειωμένο στο σχήμα. Να βρεθεί το εμβαδό x του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.**

Λύση

Αν ονομάσουμε $ε_1, ε_2, ε_4$ τα δοσμένα εμβαδά των τριγώνων και $ε_3$ το εμβαδό που δεν γνωρίζουμε την τιμή του τότε έχουμε $ε_1+ε_2+ε_3=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ εφόσον το εμβαδό του τριγώνου $ΑΜΔ$ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου.



Ανάλογα προκύπτει ότι: $x+ε_3+ε_4=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.



Επομένως $ε_1+ε_2+ε_4=x+ε_3+ε_4$ ή

$$x=ε_1+ε_2-ε_4=48+21-63=6.$$

Άσκηση 3. **Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με γωνία $\hat{A}=120^\circ$ και $β=2γ$. Με πλευρές τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τετράγωνα $ΑΒΔΕ$ και $ΑΓΖΗ$.**

α) **Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $ΑΒΓ$ ως συνάρτηση της πλευράς του $γ$.**

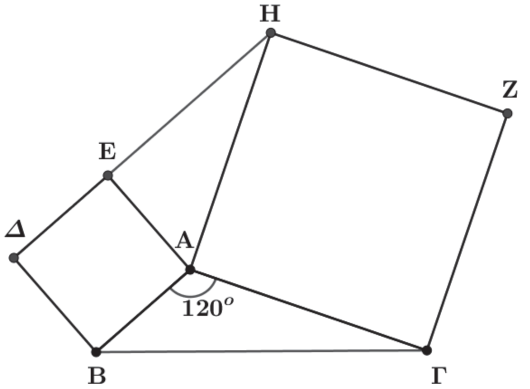
β) **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΑΗ$ είναι ισοδύναμα.**

γ) **Να υπολογίστε το εμβαδό του εξαγώνου $ΒΓΖΗΕΔ$ ως συνάρτηση της πλευράς του $γ$.**

Λύση

α) Είναι $(ΑΒΓ)=\dfrac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημΑ=\dfrac{1}{2}β\cdot γ\cdot ημ120^o=$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\gamma\cdot\gamma\cdot \eta\mu(180^o - 60^o) = \gamma^2 \eta\mu 60^o = \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{2}$$



β) Η γωνία $E\hat{A}H$ είναι ίση με

$$E\hat{A}H = 360^o - 120^o - 90^o - 90^o = 60^o$$

επομένως οι γωνίες $E\hat{A}H$ και $B\hat{A}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές, τότε ισχύει:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(EAH)} = \frac{AB\cdot A\Gamma}{EA\cdot AH} = \frac{\gamma\cdot\beta}{\gamma\cdot\beta} = 1$$

άρα $(AB\Gamma) = (EAH)$

γ) Τέλος για το εμβαδό του εξαγώνου έχουμε:

$$(B\Gamma ZHE\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma ZH) + (EAH) +$$

$$+(AB\Delta E) = \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{2} + \beta^2 + \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{2} + \gamma^2 =$$

$$2\frac{\gamma^2\sqrt{3}}{2} + 4\gamma^2 + \gamma^2 = \gamma^2\sqrt{3} + 5\gamma^2 = (\sqrt{3}+5)\gamma^2$$

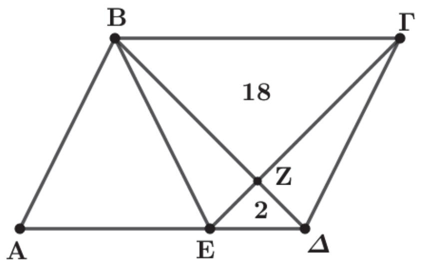
Άσκηση 4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο Z της διαγωνίου του $B\Delta$. Αν η ΓZ τέμνει την πλευρά $A\Delta$ στο σημείο E και τα τρίγωνα $BZ\Gamma$ και $EZ\Delta$ έχουν εμβαδά 18τμ και 2τμ αντίστοιχα, τότε να βρεθούν:

α) Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων $BZ\Gamma$ και $EZ\Delta$

β) Το εμβαδό του τριγώνου BEZ

γ) Το εμβαδό του τετραπλεύρου $ABZE$

Λύση



α) Ο λόγος των εμβαδών των όμοιων τριγώνων $BZ\Gamma$ και $EZ\Delta$ είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους, επομένως:

$$\frac{(BZ\Gamma)}{(ZE\Delta)} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{18}{2} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 3$$

β) Αφού ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων $BZ\Gamma$ και $EZ\Delta$ και είναι ίσος με 3 τότε $\frac{BZ}{Z\Delta} = 3$

Τα τρίγωνα BEZ και $EZ\Delta$, με βάσεις τις BZ και $Z\Delta$ αντίστοιχα έχουν το ίδιο ύψος υ, επομένως

$$\frac{(BEZ)}{(EZ\Delta)} = \frac{\frac{1}{2}BZ\cdot\upsilon}{\frac{1}{2}Z\Delta\cdot\upsilon} = \frac{BZ}{Z\Delta} = 3 \Rightarrow (BEZ) = 3(EZ\Delta),$$

άρα $(BEZ) = 3\cdot 2 = 6$τμ

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων $BZ\Gamma$ και $EZ\Delta$ έχουμε

$$\frac{B\Gamma}{E\Delta} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{A\Delta}{E\Delta} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{AE+E\Delta}{E\Delta} = \frac{3}{1} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{E\Delta} + 1 = 3 \Rightarrow \frac{AE}{E\Delta} = 2$$

Τα τρίγωνα ABE και $EB\Delta$ με βάσεις AE και $E\Delta$ έχουν το ίδιο ύψος υ_1, επομένως

$$\frac{(ABE)}{(EB\Delta)} = \frac{\frac{1}{2}AE\cdot\upsilon_1}{\frac{1}{2}E\Delta\cdot\upsilon_1} = \frac{AE}{E\Delta} = 2 \Rightarrow (ABE) = 2(EB\Delta)$$

άρα $(ABE) = 2[(BEZ)+(EZ\Delta)] = 2(6+2) = 16$ τ.μ.

τέλος το τετράπλευρο $ABZE$ έχει εμβαδό $(ABZE) = (ABE) + (BEZ) = 16 + 6 = 22$ τ.μ.

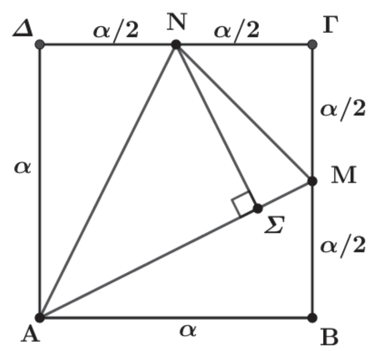
Άσκηση 5. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α και M,N τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma,\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν το σημείο N απέχει από την AM απόσταση ίση με 3, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων $AN\Delta, AMB$ και $N\Gamma M$ ως συνάρτηση της πλευράς του τετραγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου AMN ως συνάρτηση της πλευράς του τετραγώνου.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α.

Λύση



α) Αν ονομάσουμε με α την πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, τότε είναι

$$\Delta N = N\Gamma = \Gamma M = MB = \frac{\alpha}{2}$$

αφού τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου. Τα τρίγωνα $AN\Delta, AMB$ και $N\Gamma M$ έχουν εμβαδόν

$$(AN\Delta)=(AMB)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{4} \text{ και}$$

$$(N\Gamma M)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{8}$$

β) Με χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος στα τρίγωνα $AN\Delta, AMB$ και $N\Gamma M$ έχουμε:

$$AN=AM=\sqrt{\alpha^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \text{ και}$$

$$MN=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως η περίμετρος του τριγώνου AMN είναι:

$$AN+AM+MN=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}+\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=$$

$=\dfrac{\alpha(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2}$ και το εμβαδόν του είναι:

$$(AMN)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot 3=\frac{3\alpha\sqrt{5}}{4}$$

γ) Η σχέση των εμβαδών των τριγώνων $AMB, AN\Delta, N\Gamma M, AMN$ και του τετραγώνου είναι:

$$(AB\Gamma\Delta)=(AN\Delta)+(AMB)+(N\Gamma M)+(AMN)\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{8}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3\alpha\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow\alpha=2\sqrt{5}$$

Άσκηση 6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ από τα σημεία Δ και Z της πλευράς του AB φέρνουμε παράλληλες προς την πλευρά $B\Gamma$ που τέμνουν την $A\Gamma$ στα σημεία E και H αντίστοιχα. Αν $ZH=\sqrt{1}$, $\Delta E=\sqrt{2}$ και $B\Gamma=\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε:

α) $(AZH)=\dfrac{1}{3}(AB\Gamma)$ **β)** $(A\Delta E)=2(AZE)$

γ) $(AZH)=(ZHE\Delta)=(\Delta E\Gamma B)$

Λύση

α) Τα τρίγωνα AZH και $AB\Gamma$ είναι όμοια, επομένως ο λόγος ομοιότητας τους είναι

$\lambda=\dfrac{ZH}{B\Gamma}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$ τότε

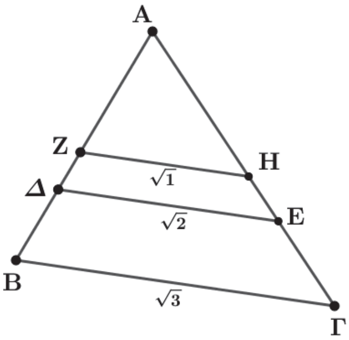
$$\frac{(AZH)}{(AB\Gamma)}=\lambda^2=\left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}\Rightarrow(AZH)=\frac{1}{3}(AB\Gamma)$$

β) Ανάλογα και τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας ίσο με $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, τότε

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\lambda^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}\Rightarrow(A\Delta E)=\frac{2}{3}(AB\Gamma)$$

$$\Rightarrow(A\Delta E)=2\cdot\frac{1}{3}(AB\Gamma)=2(AZH)$$

με βάση το πρώτο ερώτημα.



γ) Έχουμε: $(A\Delta E)=(AZH)+(ZHE\Delta)\Rightarrow$

$$2(AZH)=(AZH)+(ZHE\Delta)\Rightarrow$$

$$(AZH)=(ZHE\Delta)$$

επιπλέον είναι

$$\begin{aligned}(\Delta E\Gamma B)&=(AB\Gamma)-(ZHE\Delta)-(AZH)=\\&=(AB\Gamma)-(AZH)-(AZH)=\\&=(AB\Gamma)-2(AZH)=\\&=3(AZH)-2(AZH)=(AZH)\end{aligned}$$

και τελικά $(AZH)=(ZHE\Delta)=(\Delta E\Gamma B)$

Άσκηση 7. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma=\alpha$. Στις πλευρές του τριγώνου $AB, B\Gamma$ και ΓA παίρνουμε τα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα ,τέτοια ώστε:

$$A\Delta=\frac{1}{3}AB,\ BE=\frac{1}{3}B\Gamma \text{ και } \Gamma Z=\frac{1}{3}A\Gamma$$

Να δείξετε ότι: α) $B\Gamma=\alpha\sqrt{2}$

β) $(A\Delta Z)=(BE\Delta)=(\Gamma ZE)=\dfrac{\alpha^2}{9}$ **γ)** $\dfrac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\dfrac{1}{3}$

δ) $E=\pi(AB\Gamma)$ **όπου E το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.**

Λύση

α) Με εφαρμογή του πυθαγόρειο θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

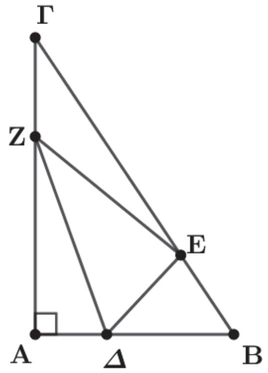
$$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=2\alpha^2\Leftrightarrow B\Gamma=\alpha\sqrt{2}$$

β) Με βάση τις δεδομένες ισότητες στις πλευρές του τριγώνου έχουμε:

$A\Delta=\dfrac{1}{3}AB=\dfrac{1}{3}\alpha$, άρα και $\Delta B=\dfrac{2}{3}\alpha$

$\Gamma Z=\dfrac{1}{3}A\Gamma=\dfrac{1}{3}\alpha$, άρα και $AZ=\dfrac{2}{3}\alpha$

$BE=\dfrac{1}{3}B\Gamma=\dfrac{1}{3}\alpha\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\alpha$, άρα και $\Gamma E=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\alpha$



Οπότε τα ζητούμενα εμβαδά είναι:

$$(\mathrm{A\Delta Z})=\frac{1}{2}\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AZ}=\frac{\alpha^2}{9}$$

$$(\mathrm{BE\Delta})=\frac{1}{2}\mathrm{\Delta B}\cdot\mathrm{BE}\cdot\eta\mu 45^{\circ}=\frac{\alpha^2}{9} \quad \text{και}$$

$$(\mathrm{\Gamma ZE})=\frac{1}{2}\mathrm{\Gamma Z}\cdot\mathrm{\Gamma E}\cdot\eta\mu 45^{\circ}=\frac{\alpha^2}{9}$$

γ) Είναι:

$$\frac{(\Delta\mathrm{EZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma})-(\mathrm{A\Delta Z})-(\mathrm{BE\Delta})-(\mathrm{\Gamma ZE})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\alpha^2-3\frac{\alpha^2}{9}}{\frac{1}{2}\alpha^2}=\frac{1}{3}$$

δ) Έχουμε $\dfrac{\mathrm{E}}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\dfrac{\pi R^2}{\frac{1}{2}\alpha^2}=\dfrac{\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\alpha^2}=\dfrac{\pi\frac{2\alpha^2}{4}}{\frac{1}{2}\alpha^2}=\pi$

αφού η υποτείνουσα του τριγώνου είναι διάμετρος του περιγγεγραμμένου κύκλου του, άρα είναι

$$\mathrm{E}=\pi\cdot(\mathrm{AB\Gamma})$$

Άσκηση 8. Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και σημεία K και Λ της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ τέτοια ώστε $\mathrm{BK}=\mathrm{K\Lambda}=\Lambda\Gamma$ και M τυχαίο σημείο της $\mathrm{K\Lambda}$. Αν οι $\mathrm{KZ}//\mathrm{AM}$ και $\Lambda\mathrm{H}//\mathrm{AM}$ τέμνουν τις $\mathrm{AB},\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία Z,H αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α) $(\mathrm{BMZ})=(\mathrm{ABK})$

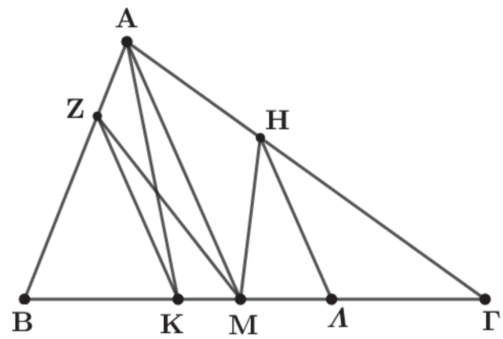
β) $(\mathrm{AB\Gamma})=3(\mathrm{BMZ})$

γ) $(\mathrm{AZMH})=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})$

Λύση

α) Τα τρίγωνα KMZ και AKZ έχουν την ίδια βάση KZ και ίσα ύψη, αφού είναι $\mathrm{AM}//\mathrm{KZ}$, επομένως $(\mathrm{MKZ})=(\mathrm{AKZ})\Rightarrow(\mathrm{MKZ})+(\mathrm{BKZ})=$ $=(\mathrm{AKZ})+(\mathrm{BKZ})\Rightarrow(\mathrm{BMZ})=(\mathrm{ABK})$

β) Τα τρίγωνα ABK και $\mathrm{AB\Gamma}$ έχουν κοινό ύψος υ, άρα $\dfrac{(\mathrm{ABK})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BK}\cdot\upsilon}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\upsilon}=\dfrac{\mathrm{BK}}{\mathrm{B\Gamma}}=\dfrac{1}{3}$, δηλαδή



$$(\mathrm{ABK})=(\mathrm{BMZ})=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})\ \text{ή}\ (\mathrm{AB\Gamma})=3(\mathrm{BMZ})$$

γ) Ανάλογα με το β ερώτημα προκύπτει ότι $(\Gamma\mathrm{MH})=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})$ επομένως έχουμε:

$$(\mathrm{AZMH})=(\mathrm{AB\Gamma})-(\mathrm{BMZ})-(\Gamma\mathrm{MH})=$$

$$=(\mathrm{AB\Gamma})-\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})-\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})$$

Άσκηση 9. Δίνεται τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και τα ζεύγη σημείων E,E', Z,Z', H,H' και Θ,Θ' που τριχοτομούν τις πλευρές $\mathrm{AB},\mathrm{B\Gamma},\Gamma\Delta$ και $\mathrm{A\Delta}$ του τετραπλεύρου. Τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{E'Z},\mathrm{Z'H},\mathrm{H'\Theta}$ και $\Theta'\mathrm{E}$ προεκτεινόμενα σχηματι- ζουννέο τετράπλευρο $\mathrm{K\Lambda MN}$. Να δείξετε ότι:

α) Το $\mathrm{K\Lambda MN}$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $9(\mathrm{K\Lambda MN})=8(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$

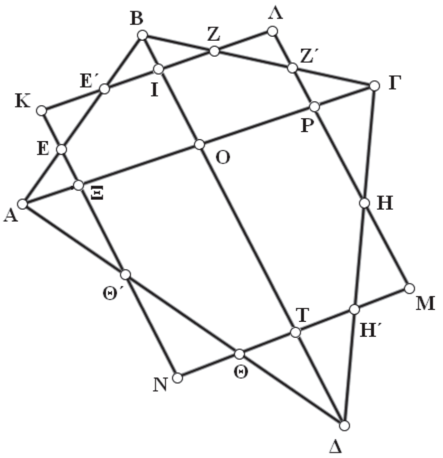
Λύση

α) Τα τρίγωνα $\mathrm{BE'Z}$ και $\mathrm{BA\Gamma}$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$, οπότε $\mathrm{E'Z}//\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{A'\Gamma}=3\mathrm{E'Z}$ συνεπώς είναι και $\mathrm{K\Lambda}//\mathrm{A\Gamma}$ (1).

Τα τρίγωνα $\Delta\Theta\mathrm{H}'$ και $\Delta\mathrm{A\Gamma}$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$, οπότε είναι $\mathrm{H'\Theta}//\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{A\Gamma}=3\mathrm{H'\Theta}$, από όπου έχουμε $\mathrm{MN}//\mathrm{A\Gamma}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathrm{K\Lambda}//\mathrm{MN}$. Με ανάλογο τρόπο προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathrm{AE\Theta}',\mathrm{AB\Delta}$ και $\Gamma\mathrm{HZ}',\mathrm{B\Gamma\Delta}$ προκύπτει ότι $\mathrm{KN}//\mathrm{M\Lambda}$, συνεπώς το τετράπλευρο $\mathrm{K\Lambda MN}$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $(\mathrm{K\Lambda MN})=(\mathrm{EE'ZZ'HH'\Theta\Theta'})+(\mathrm{KEE'})+$ $+(\Lambda\mathrm{ZZ'})+(\mathrm{MHH'})+(\mathrm{N\Theta\Theta'})$ και λόγω της ισότητας των τριγώνων του σχήματος έχουμε:



$$(\mathrm{ΕΕ΄ΖΖ΄ΗΗ΄ΘΘ΄})+(\mathrm{ΒΙΕ΄})+(\mathrm{ΒΙΖ})+(\mathrm{ΔΤΗ΄})+$$

$$+(\mathrm{ΔΤΘ})=(\mathrm{ΕΕ΄ΖΖ΄ΗΗ΄ΘΘ΄})+(\mathrm{ΒΕ΄Ζ΄})+(\mathrm{ΔΗ΄Θ})=$$

$$(\mathrm{ΑΒΓΔ})-(\mathrm{ΑΘ΄Ε})-(\mathrm{ΒΕ΄Ζ})-(\mathrm{ΓΖ΄Η})=$$

$$(\mathrm{ΘΗ΄Δ})+(\mathrm{ΒΕ΄Ζ})+(\mathrm{ΔΗ΄Θ})=$$

$$(\mathrm{ΑΒΓΔ})-(\mathrm{ΑΘ΄Ε})-(\mathrm{ΓΖΗ})=$$

$$(\mathrm{ΑΒΓΔ})-\frac{1}{9}(\mathrm{ΑΒΔ})-\frac{1}{9}(\mathrm{ΒΓΔ})=$$

$$(\mathrm{ΑΒΓΔ})-\frac{1}{9}(\mathrm{ΑΒΓΔ})=\frac{8}{9}(\mathrm{ΑΒΓΔ})$$

Άσκηση 10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $\mathrm{ΑΒΓΔ}$. Πάνω στις πλευρές του $\mathrm{ΑΒ},\mathrm{ΓΔ}$ παίρνουμε τα σημεία $\mathrm{Ε},\mathrm{Ζ}$ αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{ΑΕ}=\mathrm{ΓΖ}=\frac{1}{3}\mathrm{ΑΒ}$ και πάνω στις πλευρές του $\mathrm{ΑΔ},\mathrm{ΒΓ}$ τα σημεία $\mathrm{Η}$ και $\mathrm{Θ}$ τέτοια ώστε $\mathrm{ΒΘ}=\mathrm{ΔΗ}=\frac{1}{3}\mathrm{ΒΓ}$. Τα τμήματα $\mathrm{ΑΖ},\mathrm{ΒΗ},\mathrm{ΓΕ}$ και $\mathrm{ΔΘ}$ τεμνόμενα ανά δύο σχηματίζουν τετράπλευρο $\mathrm{ΜΝΡΚ}$.

α) Να δείξετε ότι τα τετράπλευρα $\mathrm{ΒΗΔΘ}$ και $\mathrm{ΜΝΡΚ}$ είναι παραλληλόγραμμα.

β) Να δείξετε ότι: $\dfrac{(\mathrm{ΜΝΡΚ})}{(\mathrm{ΒΗΔΘ})}=\dfrac{3}{13}$

γ) Να δείξετε ότι $(\mathrm{ΜΝΡΚ})=\dfrac{1}{13}(\mathrm{ΑΒΓΔ})$

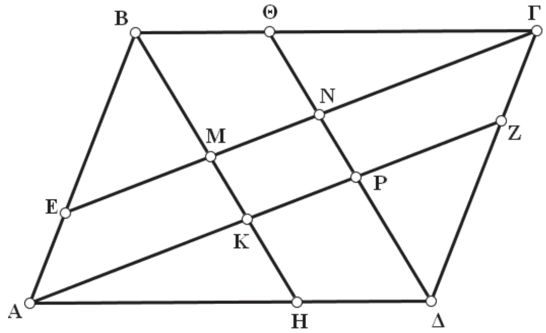
Λύση

α) Έχουμε $\mathrm{ΒΘ}=//\,\mathrm{ΔΗ}$

$$\text{και } \mathrm{ΒΘ}=\mathrm{ΔΗ}=\frac{1}{3}\mathrm{ΒΓ}=\frac{1}{3}\mathrm{ΑΔ}$$

επομένως το τετράπλευρο $\mathrm{ΒΗΔΘ}$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο προκύπτει ότι $\mathrm{ΜΚ}//\mathrm{ΡΝ}$.

Ανάλογα έχουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{ΑΕΓΖ}$ είναι παραλληλόγραμμο από όπου προκύπτει ότι $\mathrm{ΜΝ}//\mathrm{ΡΚ}$. Από τα ζεύγη των παραλλήλων που αποδείχτηκαν παίρνουμε ότι και το τετράπλευρο $\mathrm{ΜΝΡΚ}$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.



β) Από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathrm{ΑΚΗ}$ και $\mathrm{ΑΡΔ}$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\mathrm{ΚΗ}}{\mathrm{ΡΔ}}=\frac{\mathrm{ΑΗ}}{\mathrm{ΑΔ}}=\frac{2}{3}\Rightarrow \mathrm{ΚΗ}=\frac{2}{3}\mathrm{ΡΔ}$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathrm{ΔΡΖ}$ και $\mathrm{ΝΔΓ}$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\mathrm{ΝΡ}}{\mathrm{ΡΔ}}=\frac{\mathrm{ΓΖ}}{\mathrm{ΖΔ}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \mathrm{ΝΡ}=\frac{1}{2}\mathrm{ΡΔ}$$

Τέλος έχουμε:

$$\frac{\mathrm{ΔΘ}}{\mathrm{ΝΡ}}=\frac{\mathrm{ΘΝ}+\mathrm{ΝΡ}+\mathrm{ΡΔ}}{\mathrm{ΝΡ}}=\frac{\mathrm{ΚΗ}+\mathrm{ΝΡ}+\mathrm{ΡΔ}}{\mathrm{ΝΡ}}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\mathrm{ΡΔ}+\frac{1}{2}\mathrm{ΡΔ}+\mathrm{ΡΔ}}{\frac{1}{2}\mathrm{ΡΔ}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}}=\frac{13}{3}$$

Αν συμβολίσουμε με υ_1 το κοινό ύψος των παραλληλογράμμων $\mathrm{ΜΝΡΚ}$ και $\mathrm{ΒΗΔΘ}$ τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι:

$$\frac{(\mathrm{ΜΝΡΚ})}{(\mathrm{ΒΗΔΘ})}=\frac{\mathrm{ΝΡ}\cdot\upsilon_1}{\mathrm{ΔΘ}\cdot\upsilon_1}=\frac{\mathrm{ΝΡ}}{\mathrm{ΔΘ}}=\frac{3}{13}$$

γ) Αν συμβολίσουμε με υ το κοινό ύψος των παραλληλογράμμων $\mathrm{ΒΗΔΘ}$ και $\mathrm{ΑΒΓΔ}$ τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι:

$$\frac{(\mathrm{ΒΗΔΘ})}{(\mathrm{ΑΒΓΔ})}=\frac{\mathrm{ΔΗ}\cdot\upsilon}{\mathrm{ΔΑ}\cdot\upsilon}=\frac{\mathrm{ΔΗ}}{\mathrm{ΔΑ}}=\frac{1}{3}$$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την παραπάνω σχέση με την σχέση του β ερωτήματος έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{ΜΝΡΚ})}{(\mathrm{ΒΗΔΘ})}\cdot\frac{(\mathrm{ΒΗΔΘ})}{(\mathrm{ΑΒΓΔ})}=\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{13}$$

άρα είναι $(\mathrm{ΜΝΡΚ})=\dfrac{1}{13}(\mathrm{ΑΒΓΔ})$

Τάξη: Β΄

Ευθεία Γραμμή

Θανάσης Χριστόπουλος

Πρώτο αίτημα του Ευκλείδη:

Ηιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
Από οποιοδήποτε σημείο προς κάθε σημείο είναι δυνατόν να άγεται μια ευθεία γραμμή

Ευθεία γραμμή στην Αναλυτική Γεωμετρία

Ένα σημείο Μ(x,y) βρίσκεται στην ευθεία που ορίζουν δύο σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, όταν $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}$ με

$\overrightarrow{AM}=(x-x_1\ ,\ y-y_1)$, $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$

- Αν το $\overrightarrow{AB}$ έχει κλίση με συντελεστή διεύθυνσης λ, ($\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$) τότε και το $\overrightarrow{AM}$ έχει την ίδια κλίση δηλ. $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\lambda \Leftrightarrow y-y_1=\lambda(x-x_1)$
- Αν η $\overrightarrow{AB}$ είναι κατακόρυφη τότε και η $\overrightarrow{AM}$ κατακόρυφη, άρα $x-x_1=0 \Leftrightarrow x=x_1$

Επίσης όταν η $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}$ τότε αυτό ισοδυναμεί με det($\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$)=0. Από το οποίο προκύπτει η εξίσωση (ε) με μορφή Αx+Βy+Γ=0

Σχόλιο: Η μορφή αυτή είναι απαραίτητη όταν ζητάμε απόσταση ενός σημείου από αυτή την ευθεία. Επίσης έχει το πλεονέκτημα να καλύπτει όλες τις μορφές ευθειών δηλαδή, οριζόντιες, πλάγιες και κατακόρυφες.

Εύρεση εξίσωσης ευθείας

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση μιας ευθείας χρειαζόμαστε απαραίτητα δύο σημεία;

Είναι προτιμότερο να στηρίζουμε την εύρεση εξίσωσης μιας ευθείας, σε ένα σημείο και την κλίση της. Αν στις ασκήσεις δεν δίνεται το σημείο τότε μπορεί να προσδιορισθεί:

i) **Σαν σημείο τομής δύο ευθειών:** Το σημείο τομής των δυο ευθειών έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους.

ii) **Σαν σημείο με γνωστή ιδιότητα:** Για παράδειγμα, Μ μέσο του ευθ. τμήματος ΑΒ

Μέθοδοι προσδιορισμού του λ

Πολλές φορές στις ασκήσεις το **λ** δεν δίνεται, αλλά δίνονται άλλα δεδομένα από τα οποία μπορεί να βρεθεί. Παρακάτω αναφέρονται 5 τέτοιες κλασικές περιπτώσεις:

i) Αν δίνονται δύο σημεία της ευθείας $\mathbf{A(x_1,y_1)}$ και $\mathbf{B(x_2,y_2)}$ τότε $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_1\neq x_2$ αν $x_1=x_2$ τότε η ευθεία είναι κατακόρυφη με τύπο $x=x_1$.

ii) Αν η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι παράλληλη σε κάποια γνωστή ευθεία (δ) τότε $\boldsymbol{\lambda_\varepsilon=\lambda_\delta}$ ή είναι και οι δύο κατακόρυφες.

iii) Αν η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι κάθετη σε κάποια γνωστή ευθεία (δ) τότε $\boldsymbol{\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\delta=-1}$ **ή** αν δ είναι οριζόντια τότε η ε θα είναι κατακόρυφη

iv) Αν **ω** είναι η κυρτή γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x και $\omega\neq 90^0$ τότε **λ=εφω**

v) Αν δίνεται ότι η ζητούμενη ευθεία (ε) σχηματίζει γνωστή γωνία ω με κάποια γνωστή ευθεία (δ) τότε θεωρούμε διανύσματα $\vec{u}//\varepsilon$ και $\vec{v}//\delta$ με $\vec{u}=(1,\lambda_\varepsilon)$ και $\vec{v}=(1,\lambda_\delta)$ από όπου με το $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\sigma\upsilon\nu\omega$ προκύπτει η τιμή του λ_ε

Αν $P(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο, πόσες ευθείες διέρχονται από το Ρ;

- Άπειρες με κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$, και με εξίσωση:

$$\boxed{\mathbf{y-y_0=\lambda(x-x_0)}}$$

και μια κατακόρυφη με εξίσωση: $\mathbf{x=x_0}$

Α₁. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(2,3) και

i) Σχηματίζει γωνία 135^0 με τον x΄x
ii) Διέρχεται και από το σημείο Β(2,1)
iii) Διέρχεται και από το σημείο Β(–3,–4)
iv) Είναι παράλληλη στην ευθεία (δ): 6x–2y–17=0
v) Είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): x–2y+2020=0
vi) Σχηματίζει γωνία 45^0 με την ευθεία (η) y=2x–5
vii) Απέχει από την αρχή των αξόνων 2 μονάδες μήκους

Λύση

i. Είναι λ=εφω άρα $\lambda=\varepsilon\varphi 135^0=-\varepsilon\varphi 45^0$ επομένως λ=–1, οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι:
$$y-3=-1(x-2)\Leftrightarrow y=-x+5$$

ii. $x_1=x_2=2$, άρα δεν ορίζεται λ και η ευθεία είναι κατακόρυφη με τύπο **x=2**

iii. $\lambda=\dfrac{-4-3}{-3-2}=\dfrac{-7}{-5}=\dfrac{7}{5}$, οπότε
$$y-3=\frac{7}{5}(x-2)\Leftrightarrow 7x-5y+1=0$$

iv. $\lambda=\lambda_\delta$ αλλά $\lambda_\delta=-\dfrac{6}{-2}=3$, οπότε y=3x–3

v. $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\zeta=-1$ και αφού $\lambda_\zeta=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$ $\lambda_\varepsilon=-2$

vi. θεωρούμε διανύσματα $\vec{u}//\varepsilon$ και $\vec{v}//\eta$ με $\vec{u}=(1,\lambda_\varepsilon)$ και $\vec{v}=(1,\lambda_\eta)=(1,2)$ από $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\sigma\upsilon\nu\omega$ προκύπτει
$$\frac{(1,\lambda)(1,2)}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{2(1+2\lambda)=\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{4(1+4\lambda+4\lambda^2)=10(1+\lambda^2)}$$

$6\lambda^2+16\lambda-6=0 \Leftrightarrow 3\lambda^2+8\lambda-3=0$ οπότε

$\lambda=-3$ και $\lambda=\frac{1}{3}$ άρα υπάρχουν δύο ευθείες,

$\varepsilon_1: \ y-3=-3(x-2)$, $\varepsilon_2: \ y-3=\frac{1}{3}(x-2)$

vii. Θέλουμε, d(O,ε)=2

Για την κατακόρυφη ευθεία x=2 ισχύει το ζητούμενο, d(O,ε)=2 άρα είναι δεκτή. Αν τώρα η ζητούμενη ευθεία είναι πλάγια με κλίση λ, τότε θα έχει εξίσωση: $y-3=\lambda(x-2)$ $\Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda+3=0$. Και d(O,ε)=2 $\Leftrightarrow$

$$\frac{|-2\lambda+3|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=2 \Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda+9=4(1+\lambda^2) \Leftrightarrow \lambda=\frac{5}{12}$$

άρα ε: $y-3=\frac{5}{12}(x-2) \Leftrightarrow 5x-12y+26=0$.

A_2. Δίνονται οι εξισώσεις $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (1) και $y=3x$ (2) δυο πλευρών ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και η εξίσωση $4x-3y-5=0$ μιας διαγώνιου του. Να βρεθούν:

i) Οι συντεταγμένες των κορυφών του.

ii) Το Εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

Λύση

i) Παρατηρούμε ότι έχουν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και η λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο πλευρών είναι οι συντεταγμένες μιας κορυφής του– Έστω της Α.

$$\begin{cases} y=3x \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ 3x=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ 6x=x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$ άρα A(1,3). Παρατηρούμε ότι το A δεν ανήκει στην ευθεία της διαγωνίου $4x-3y-5=0$.

Επομένως τα σημεία τομής της διαγωνίου με τις δύο πλευρές θα δώσουν τις κορυφές Β και Δ

B: $\begin{cases} y=3x \\ 4x-3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ 4x-3(3x)=5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=-3 \\ x=-1 \end{cases}$ οπότε $B(-1,-3)$

Δ: $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ 4x-3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ 4x-3(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2})-5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=5 \\ x=5 \end{cases}$ οπότε Δ(5,5). Για να βρούμε την κορυφή Γ του παραλληλογράμμου σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω Κ μέσο της διαγωνίου ΒΔ, θα είναι $K\left(\frac{-1+5}{2},\frac{-3+5}{2}\right)$ άρα K(2,1) οπότε αυτό είναι και μέσον της ΑΓ, επομένως $\frac{x_\Gamma+1}{2}=2 \Leftrightarrow x_\Gamma=3$

και $\frac{y_\Gamma+3}{2}=1 \Leftrightarrow y_\Gamma=-1$ άρα Γ(3,–1)

ii) (ΑΒΓΔ)=2(ΑΒΔ)= $2\cdot\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta})|$

με $\overrightarrow{AB}=(-1-1,-3-3)=(-2,-6)$

με $\overrightarrow{A\Delta}=(5-1,5-3)=(4,2)$

Άρα (ΑΒΓΔ)= $2\cdot\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right|=|-4+24|=20$ τμ

A_3. Δίνεται η παραμετρική εξίσωση:

$\varepsilon_\lambda: (\kappa^2-9)x+(\kappa^2-3\kappa)y+\kappa^2-9\kappa+18=0$, $\kappa\in\mathbb{R}$

α. Για ποιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ η εξίσωση ε_λ παριστάνει ευθεία;

β. Για ποια τιμή του κ, η ευθεία σχηματίζει γωνία 45^0 με τον άξονα x΄x

γ. Να δειχτεί ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

δ. Για ποια τιμή του κ προκύπτει ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x

Λύση

α) Για να παριστάνει ευθεία πρέπει $A=\kappa^2-9\neq0$ ή $B=\kappa^2-3\kappa\neq0$ αλλά $A=0 \Leftrightarrow \kappa^2-9=0 \Leftrightarrow \kappa=3$ ή $\kappa=-3$ και $B=0 \Leftrightarrow \kappa^2-3\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=0$ ή κ=3 Επομένως για κ=3 έχουμε Α=Β=0 οπότε για αυτή την τιμή δεν παριστάνει ευθεία. Άρα έχουμε ευθεία για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}-\{3\}$

β) $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi45^0 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=1$ αλλά $\lambda_\varepsilon=-\frac{\kappa^2-9}{\kappa^2-3\kappa}=-\frac{\kappa+3}{\kappa}$

άρα $-\frac{\kappa+3}{\kappa}=1 \Leftrightarrow \kappa+3=-\kappa \Leftrightarrow \kappa=-\frac{3}{2}$

γ) **1ος τρόπος:** επιλέγουμε δύο από τις άπειρες αυτές ευθείες και βρίσκουμε το σημείο τομής τους.

Για κ=–3 $\Rightarrow$ $0x+18y+54=0 \Leftrightarrow y=-3$ και για κ=0 $\Rightarrow -9x+0y+18=0 \Leftrightarrow x=2$ οπότε το σημείο τομής τους είναι Α(2,–3) στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν όλες διέρχονται από αυτό.

Πράγματι ισχύει διότι: $(\kappa^2-9)\cdot2+(\kappa^2-3\kappa)\cdot(-3)+\kappa^2-9\kappa+18=0 \Leftrightarrow 2\kappa^2-18-3\kappa^2+9\kappa+\kappa^2-9\kappa+18=0 \Leftrightarrow 0=0$

2ος τρόπος: Δίνουμε μορφή πολυωνύμου ως προς κ και εξετάζουμε αν υπάρχουν τιμές του κ που μηδενίζουν όλους τους συντελεστές.

$\kappa^2x-9x+\kappa^2y-3\kappa y+\kappa^2-9\kappa+18=0 \Leftrightarrow$

$(x+y+1)\kappa^2+(-3y-9)\kappa+(-9x+18)=0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+1=0\\-3y-9=0\\-9x+18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$, οπότε προκύπτει πάλι Α(2,–3)

Α4. Να βρεθεί η ευθεία (ή οι ευθείες) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία Α(3,1) και Β(–5,0).

Λύση

Ζητάμε d(Α,ε)=d(Β,ε). Ο άξονας των y΄y (η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)) δεν έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Εξετάζουμε αν υπάρχει πλάγια ευθεία με κλίση λ και εξίσωση y=λx ⇔ λx–y=0 ώστε d(Α,ε)=d(Β,ε) ⇔

$\frac{|\lambda\cdot(-5)+0|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{|3\lambda-1|}{\sqrt{\lambda^2+1}}\Leftrightarrow|5\lambda|=|3\lambda-1|$ επομένως

5λ=3λ–1 ή 5λ=–3λ+1 άρα $\lambda=-\frac{1}{2}$ ή $\lambda=\frac{1}{8}$ οπότε

ε_1: $y=-\frac{1}{2}x$, ε_2: $y=\frac{1}{8}x$

Α5. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-y^2+4\lambda x+2\lambda y+3\lambda^2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να δειχτεί ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο ευθειών.

γ) Να βρεθεί η τιμή του λ αν γνωρίζουμε ότι οι 2 ευθείες αποκόπτουν από την ευθεία x=2 ευθύγραμμο τμήμα μήκους 6.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$(x^2+4\lambda x+4\lambda^2)-(y^2-2\lambda y+\lambda^2)=0$

$\Leftrightarrow(x+2\lambda)^2-(y-\lambda)^2=0\Leftrightarrow$

$[(x+2\lambda)-(y-\lambda)]\cdot[(x+2\lambda)+(y-\lambda)]=0$

$[(x-y+3\lambda)\cdot(x+y+\lambda)=0$ άρα

ε_1: $x-y+3\lambda=0$ ε_2: $x+y+\lambda=0$ και είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ οπότε $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Rightarrow\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$

β) το σημείο τομής Κ των δύο ευθειών δίνει το σύστημα $\begin{cases}x-y+3\lambda=0\\x+y+\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\lambda\\y=\lambda\end{cases}$ άρα

Κ(–2λ,λ), $\lambda\in\mathbb{R}$ και αφού $x=-2\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\frac{x}{2}$

οπότε από y=λ προκύπτει ότι ο γ.τ. είναι η ευθεία $y=-\frac{1}{2}x$

γ) Αν Α,Β τα σημεία τομής των ε_1,ε_2 με την x=2 τότε Α: $\begin{cases}x=2\\x-y+3\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2+3\lambda\end{cases}$

Άρα Α(2,2+3λ), επίσης

Β: $\begin{cases}x=2\\x+y+\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-2-\lambda\end{cases}$, Β(2,–2–λ)

Αφού (ΑΒ)=6 ⇔ |(2+3λ)–(–2–λ)|=6 ⇔|4+4λ|=6

άρα 4+4λ=6 ή 4+4λ=–6 οπότε $\lambda=\frac{1}{2}$ ή $\lambda=-\frac{5}{2}$

Α6. i) Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα Α(ημθ, συνθ) και Β(συνθ, ημθ), $\theta\in\mathbb{R}$.

ii) Για ποια τιμή του θ η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

iii) Αν $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ τότε το εμβαδόν που σχηματίζουν με τους άξονες είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{2}$.

Λύση

i) Είναι $\lambda_{AB}=\frac{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}=-1$.

Για $\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\neq0\Leftrightarrow\eta\mu\theta\neq\sigma\upsilon\nu\theta$ είναι

$\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\neq1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\theta\neq1\Leftrightarrow\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ οπότε

ε_{AB}: $y-\sigma\upsilon\nu\theta=-1(x-\eta\mu\theta)\Leftrightarrow y=-x+\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta$

Για $\theta=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ τότε δεν ορίζεται λ και η ευθεία είναι κατακόρυφη με τύπο $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ii) Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει: $\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta=0\Leftrightarrow\eta\mu\theta=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\theta=-1\Leftrightarrow\theta=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

iii) Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι: Α(ημθ+συνθ, 0), Β(0, ημθ+συνθ) οπότε θα είναι

$E=\frac{1}{2}|\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta|\cdot|\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta|\Leftrightarrow(\ldots)$

$=\frac{1}{2}(1+2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)=\frac{1}{2}+\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta>\frac{1}{2}$

Αφού για $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ είναι ημθ>0 και συνθ>0

Άσκηση για λύση

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,3) και τις ευθείες ε_1: x–3y=2, ε_2: 4x+3y=3 να είναι φορείς ενός ύψους και μιας διαμέσου του τριγώνου αντίστοιχα.

Α. Να βρεθούν οι κορυφές του τριγώνου.

Β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των παρακάτω ευθειών: α) του ύψους ΑΚ του τριγώνου β) της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΓ γ) της διαμέσου της ΒΜ.

Γ. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΓ.

Τάξη: Γ΄ Θέματα Διαφορικού Λογισμού για Επανάληψη

Θανάσης Δ. Ντρίζος, Τρίκαλα

*Τα θέματα αυτού του άρθρου έχουν επαναληπτικό χαρακτήρα και εκπονήθηκαν με **στόχο** να υποστηρίξουν τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου στην **προετοιμασία** τους για τις πανελλαδικές εξετάσεις. Με αυτή τη λογική φροντίσαμε ώστε τα θέματα του άρθρου να διατρέχουν το μεγαλύτερο, κατά το δυνατόν, μέρος του Διαφορικού Λογισμού και, παράλληλα, να αναδείξουμε στην πράξη τη λειτουργική διασύνδεση ορισμένων βασικών εννοιών και προτάσεων αυτού του κεφαλαίου.*

Θέμα 1

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha}{x^2} \text{ και } g(x)=\frac{\beta}{x}, \text{ όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

A) Να βρείτε τις τιμές των α,β για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=3$.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=9$ και $\beta=6$

B) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω κοινής εφαπτομένης τους.

Γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ) Ένα κινητό $M(x,y)$ κινείται στην εφαπτομένη του ερωτήματος (Β) έτσι, ώστε η τετμημένη του να ελαττώνεται με ρυθμό $3\text{cm}/\text{sec}$

Αν x_1 είναι η θέση του ακροτάτου της h, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του M από το σημείο $A(x_1,h(x_1))$ τη χρονική στιγμή t_0 που το M περνάει από το σημείο $B(0,4)$.

Λύση

A) Οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$.

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+\alpha}{x^2}\right)'=\left(1+\alpha x^{-2}\right)'=-2\alpha x^{-3}=-\frac{2\alpha}{x^3}$$

Είναι $f(3)=\frac{9+\alpha}{9}=1+\frac{\alpha}{9}$ και $f'(3)=-\frac{2\alpha}{27}$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με: $g'(x)=\left(\frac{\beta}{x}\right)'=-\frac{\beta}{x^2}$

Είναι: $g(3)=\frac{\beta}{3}$ και $g'(3)=-\frac{\beta}{9}$. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=3$ αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} f(3)=g(3) \\ f'(3)=g'(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9+\alpha}{9}=\frac{\beta}{3} \\ \frac{-2\alpha}{27}=\frac{-\beta}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+\alpha=3\beta \\ 2\alpha=3\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3\beta-9 \\ 2(3\beta-9)=3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3\beta-9 \\ 6\beta-18=3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3\beta-9 \\ \beta=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=9 \\ \beta=6 \end{cases}.$$

Άρα, όταν $\alpha=9$ και $\beta=6$ οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=3$.

B) Με $\alpha=9$ και $\beta=6$ βρίσκουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+9}{x^2}=1+\frac{9}{x^2} \text{ και } f'(x)=-\frac{18}{x^3}$$

$g(x)=\frac{6}{x}$ και $g'(x)=-\frac{6}{x^2}$. Η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση $(\varepsilon): y-f(3)=f'(3)(x-3)$.

Είναι: $f(3)=1+\frac{9}{3^2}=2$ και $f'(3)=-\frac{18}{27}=-\frac{2}{3}$,

οπότε: $(\varepsilon): y-2=-\frac{2}{3}(x-3) \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+4$

Γ) Είναι $h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}$ με πεδίο ορισμού $D_h=\mathbb{R}^*$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με: $h'(x)=\left(1+\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}\right)'=-\frac{18}{x^3}+\frac{6}{x^2}=$

$-\frac{6}{x^2}\left(\frac{3}{x}-1\right)=-\frac{6}{x^2}\cdot\frac{3-x}{x}$. Έχουμε:

- $h'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{6}{x^2}\cdot\frac{3-x}{x}=0\Leftrightarrow 3-x=0\Leftrightarrow x=3$
- $\begin{cases}h'(x)>0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{6}{x^2}\cdot\frac{3-x}{x}>0\\ x\neq 0\end{cases}\overset{(x^2>0)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\frac{x-3}{x}>0\\ x\neq 0\end{cases}$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-3)>0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$
- $\begin{cases}h'(x)<0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,3)$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:

- Η h είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $[3,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,3]$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
h΄(x)	+	−	0	+
h	↗	↘		↗

- Η h στο σημείο $x_1=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $h(3)=1+\frac{9}{3^2}-\frac{6}{3}=0$

Σχόλιο:

Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}\right)=1$

οπότε το τοπικό ελάχιστο είναι ολικό.

Δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του ερωτήματος (Β) είναι η $(\varepsilon): y=-\frac{2}{3}x+4$. Επειδή το σημείο $M(x,y)\in(\varepsilon)$ είναι της μορφής $M\left(x,-\frac{2}{3}x+4\right), x\in\mathbb{R}$. Για την απόσταση του σημείου $M\left(x,-\frac{2}{3}x+4\right)$ από το σημείο $A(3,0)$, έχουμε: $(AM)=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$

$=\sqrt{(x-3)^2+\left(-\frac{2}{3}x+4\right)^2}$. Όμως για την τετμημένη του σημείου Μ είναι $x=x(t)cm$ με $x'(t)=-3cm/sec$.

Οπότε, θέτοντας $(AM)=d=d(t)$ cm, έχουμε:

$d(t)=\sqrt{(x(t)-3)^2+\left(-\frac{2}{3}x(t)+4\right)^2}$, και

παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε:

$$d'(t)=\frac{2(x(t)-3)x'(t)+2\left(-\frac{2}{3}x(t)+4\right)\left(-\frac{2}{3}x'(t)\right)}{2\sqrt{(x(t)-3)^2+\left(-\frac{2}{3}x(t)+4\right)^2}}$$

$$=\frac{(x(t)-3)x'(t)-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}x(t)+4\right)x'(t)}{\sqrt{(x(t)-3)^2+\left(-\frac{2}{3}x(t)+4\right)^2}}\quad:(1)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο $B(0,4)$ είναι: $x(t_0)=0$ και $x'(t_0)=-3$. Οπότε, για $t=t_0$ από την (1) παίρνουμε:

$$d'(t_0)=\frac{(x(t_0)-3)x'(t_0)-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}x(t_0)+4\right)x'(t_0)}{\sqrt{(x(t_0)-3)^2+\left(-\frac{2}{3}x(t_0)+4\right)^2}}$$

$$=\frac{(0-3)\cdot(-3)-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\cdot0+4\right)\cdot(-3)}{\sqrt{(0-3)^2+\left(-\frac{2}{3}\cdot0+4\right)^2}}=\frac{9+8}{\sqrt{9+16}}=\frac{17}{5}\frac{cm}{sec}$$

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-12$, $x\in\mathbb{R}$ και σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, όπου $\alpha\in(0,+\infty)$.

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Μ.

Β) Αν η εφαπτομένη (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από τον τύπο:

$$E(\alpha)=\frac{(\alpha^2+12)^2}{4\alpha},\ \alpha\in(0,+\infty)$$

Γ) Να αποδείξετε ότι, αν το εμβαδόν Ε του προηγούμενου ερωτήματος γίνεται ελάχιστο τότε $\alpha=2$.

Δ) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\mu \in (0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $32\mu \cdot \alpha \le (\alpha^2+12)^2$ για κάθε $\alpha \in (0,+\infty)$.

Λύση

Α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (x^2-12)' = 2x$.

Η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 0$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$$
$$\Leftrightarrow y - (\alpha^2-12) = 2\alpha(x-\alpha)$$
$$\Leftrightarrow y = 2\alpha x - 2\alpha^2 + \alpha^2 - 12 \Leftrightarrow y = 2\alpha x - \alpha^2 - 12$$

Β) Για τα σημεία τομής της εφαπτομένης (ε) με τους άξονες έχουμε:

- Για $y=0$ είναι $x = \dfrac{\alpha^2+12}{2\alpha}$, οπότε η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\dfrac{\alpha^2+12}{2\alpha}, 0\right)$.
- Για $x=0$ είναι $y = -\alpha^2-12$, οπότε η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -\alpha^2-12)$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ, δίνεται από τον τύπο:

$$E(\alpha) = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{1}{2}\left|\frac{\alpha^2+12}{2\alpha}\right|\left|-\alpha^2-12\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{|\alpha^2+12|}{2|\alpha|}|\alpha^2+12| = \frac{1}{4}\frac{|\alpha^2+12|^2}{|\alpha|} \overset{(\alpha>0)}{=} \frac{(\alpha^2+12)^2}{4\alpha}$$

Γ) Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$E'(\alpha) = \left(\frac{(\alpha^2+12)^2}{4\alpha}\right)' = \left(\frac{\alpha^4+24\alpha^2+144}{4\alpha}\right)'$$
$$= \left(\frac{1}{4}\alpha^3 + 6\alpha + \frac{36}{\alpha}\right)' = \frac{3}{4}\alpha^2 + 6 - \frac{36}{\alpha^2}$$
$$= 3\left(\frac{\alpha^2}{4} + 2 - \frac{12}{\alpha^2}\right) = 3\frac{\alpha^4+8\alpha^2-48}{4\alpha^2}$$
$$= 3\frac{(\alpha^2+12)(\alpha^2-4)}{4\alpha^2} = \frac{3(\alpha^2+12)(\alpha+2)}{4\alpha^2}(\alpha-2)$$

Έχουμε:

- $\begin{cases} E'(\alpha)=0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(\alpha^2+12)(\alpha+2)}{4\alpha^2}(\alpha-2)=0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=2$

- $\begin{cases} E'(\alpha)>0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(\alpha^2+12)(\alpha+2)}{4\alpha^2}(\alpha-2)>0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-2>0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha>2$

- $\begin{cases} E'(\alpha)<0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(\alpha^2+12)(\alpha+2)}{4\alpha^2}(\alpha-2)<0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-2<0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<\alpha<2$

α	0	2	+∞
Ε΄(α)		− 0 +	
Ε		↘ 32 ↗	

Από το πρόσημο της E' που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$, γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $\alpha_0 = 2$, το $E(2) = 32$.

Δ) Η συνάρτηση Ε παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο σημείο 2, το $E(2)=32$, οπότε ισχύει $E(\alpha) \ge E(2) \Leftrightarrow E(\alpha) \ge 32$ για κάθε $\alpha > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha = 2$. Έχουμε,

$$32\mu\cdot\alpha \le (\alpha^2+12)^2 \Leftrightarrow \frac{(\alpha^2+12)^2}{4\alpha} \ge 8\mu \Leftrightarrow E(\alpha) \ge 8\mu$$

οπότε πρέπει και αρκεί να ισχύει $8\mu \le 32 \Leftrightarrow \mu \le 4$.

Επομένως η μεγαλύτερη τιμή του μ για την οποία ισχύει η σχέση $32\mu\cdot\alpha \le (\alpha^2+12)^2$ για κάθε $\alpha \in (0,+\infty)$ είναι η $\mu_{max} = 4$.

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4-x^2)$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια συνάρτηση.

Β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f

στα σημεία τομής της με τον άξονα x΄x τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y.

Γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\mu \in (0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $\mu \cdot \ln 4 \geq \ln(4-x^2)$ για κάθε $x \in (-2,2)$

Ε) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι στο χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x εγγράφεται μοναδικό τετράγωνο, οι δύο κορυφές του οποίου είναι σημεία της C_f συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y ενώ οι δύο άλλες κορυφές του είναι οι προβολές στον άξονα x΄x των κορυφών του τετραγώνου που ανήκουν στη C_f.

Λύση

Α) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $4-x^2>0$.

Έχουμε:

$$4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f=(-2,2)$.

Για κάθε $x\in(-2,2)$ ισχύουν:

- $-x\in(-2,2)$ και
- $f(-x)=\ln\left(4-(-x)^2\right)=\ln\left(4-x^2\right)=f(x)$

Οπότε η συνάρτηση f είναι άρτια.

Β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=0, x\in D_f.$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ x\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(4-x^2)=0 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=1 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ x\in(-2,2) \end{cases}$$

Συνεπώς η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $K\left(-\sqrt{3},0\right)$ και $\Lambda\left(\sqrt{3},0\right)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με:

$$f'(x)=\left(\ln\left(4-x^2\right)\right)'=\frac{\left(4-x^2\right)'}{4-x^2}=\frac{-2x}{4-x^2}.$$

Είναι: $f'\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-4}=-2\sqrt{3}$ και

$f'\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-4}=2\sqrt{3}$. Οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία τομής της K και Λ με τον άξονα $x'x$ έχουν εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1): y-f\left(\sqrt{3}\right)=f'\left(\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=-2\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow y=-2\sqrt{3}x+6$$

και $(\varepsilon_2): y-f\left(-\sqrt{3}\right)=f'\left(-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

$$\Leftrightarrow y=2\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow y=2\sqrt{3}x+6$$

Για το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) έχουμε:

$$\begin{cases} y=-2\sqrt{3}x+6 \\ y=2\sqrt{3}x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\sqrt{3}x+6 \\ -y=-2\sqrt{3}x-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\sqrt{3}x+6 \\ 0=-4\sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=0 \end{cases}$$

Επειδή το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) έχει τετμημένη μηδέν, έπεται ότι οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

Γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$. Έχουμε:

- $$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x}{4-x^2}=0 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x\in(-2,2) \end{cases}$$

- $$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x}{4-x^2}>0 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \overset{(4-x^2>0)}{\underset{(x\in(-2,2))}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} -2x>0 \\ x\in(-2,2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2<x<0 \quad \text{και} \quad \begin{cases} f'(x)<0 \\ x\in(-2,2) \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<2$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$\ln 4$	↘	

Η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-2,0]$ και
- γνησίως φθίνουσα στο $[0,2)$, οπότε
- παρουσιάζει στη θέση $x_0=0$ μέγιστο (ολικό) το $f(0)=\ln(4-0^2)=\ln 4=2\ln 2$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με:

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)'=\frac{(2x)'(x^2-4)-2x(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{2(x^2-4)-2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}=-\frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}<0$$

για κάθε $x\in(-2,2)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-2,2)$.

Δ) Επειδή η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ μέγιστο το $f(0)=\ln 4$ θα ισχύει: $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)\le \ln 4$ για κάθε $x\in(-2,2)$.

Για να είναι $\mu\cdot\ln 4\ge \ln(4-x^2)$ για κάθε $x\in(-2,2)$, πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\mu\cdot\ln 4\ge \max f(x)=\ln 4\Leftrightarrow \mu\cdot\ln 4\ge \ln 4\Leftrightarrow \mu\ge 1.$$

Άρα η μικρότερη τιμή του μ για την οποία ισχύει $\mu\cdot\ln 4\ge\ln(4-x^2)$ για κάθε $x\in(-2,2)$, είναι η $\mu_{min}=1$.

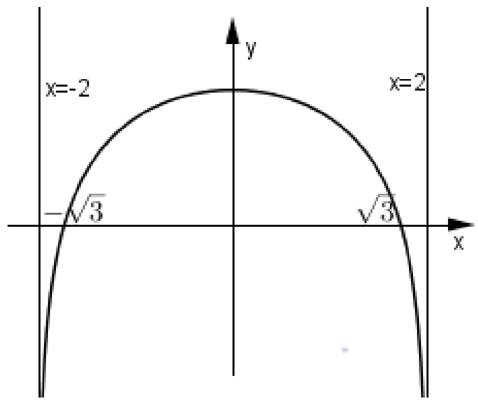
Ε) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (Γ) και παίρνοντας υπόψη ότι:

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\ln(4-x^2)\underset{\left(\lim\limits_{x\to -2^-}(4-x^2)=0\right)}{\overset{(t=4-x^2>0)}{=}}\lim\limits_{t\to 0^+}\ln t=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(4-x^2)\underset{\left(\lim\limits_{x\to 2^+}(4-x^2)=0\right)}{\overset{(t=4-x^2>0)}{=}}\lim\limits_{t\to 0^+}\ln t=-\infty$

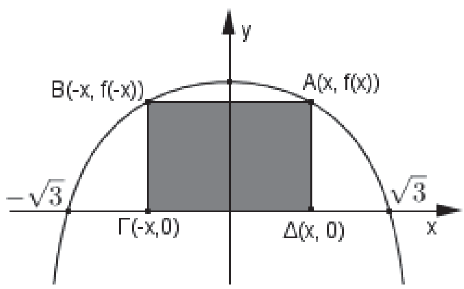
οπότε οι $x=-2$ και $x=2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f

- η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $K(-\sqrt{3},0)$ και $\Lambda(\sqrt{3},0)$, κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και ακολούθως κάνουμε τη γραφική της παράσταση.

x	-2		0		2
$f''(x)$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$-\infty$ 6	$\ln 4$	8 $-\infty$	



Στο επόμενο σχήμα θεωρούμε σημείο $A(x,f(x))$ της C_f με $x\in(0,\sqrt{3})$. Το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(-x,f(x))$ το οποίο ανήκει στη C_f, καθώς η f είναι άρτια συνάρτηση (ερώτημα Α). Παίρνουμε επίσης τις προβολές $\Delta(x,0)$ και $\Gamma(-x,0)$ των A και B αντίστοιχα πάνω στον άξονα $x'x$. Το $AB\Gamma\Delta$ (με τον τρόπο που το κατασκευάσαμε) είναι ορθογώνιο με διαστάσεις $(\Delta\Gamma)=|x-(-x)|=|2x|$, $(A\Delta)=|f(x)|$ και επειδή για κάθε $x\in(0,\sqrt{3})$ είναι $x>0$ και $f(x)>0$ προκύπτει $(\Delta\Gamma)=2x$ και $(A\Delta)=f(x)$.



Το ΑΒΓΔ θα είναι τετράγωνο, αν και μόνον αν υπάρχει κάποια τιμή του x που περιέχεται στο διάστημα $\left(0,\sqrt{3}\right)$ ώστε να ισχύει $(\Delta\Gamma)=(\mathrm{A}\Delta)$, δηλαδή αν και μόνον αν η εξίσωση $2x=f(x)$ έχει ρίζα στο διάστημα $\left(0,\sqrt{3}\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2x-f(x)$, $x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\sqrt{3}\right]$, αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Είναι:

$h(0)=2\cdot 0-\ln 4=-\ln 4<0$ και

$h\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-\ln\left(4-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=2\sqrt{3}>0$

οπότε $h(0)\cdot h\left(\sqrt{3}\right)<0$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[0,\sqrt{3}\right]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$, δηλαδή η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\sqrt{3}\right)$.

Απομένει να αποδείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $h(x)=2x-f(x)$ με

$h'(x)=\left(2x-f(x)\right)'=2-\left(\dfrac{-2x}{4-x^2}\right)=2+\dfrac{2x}{4-x^2}>0$,

$x\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, οπότε η συνάρτηση h, λόγω και της συνέχειάς της στο διάστημα $\left[0,\sqrt{3}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό.

Συνεπώς η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(0,\sqrt{3}\right)$, που ισοδύναμα σημαίνει ότι στο χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$ εγγράφεται ένα ακριβώς τετράγωνο, σύμφωνα με τις απαιτήσεις του ερωτήματος (Ε).

Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

Β) Να εξετάσετε την h ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα ξ, που περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0$.

Γ) Να εξετάσετε την h ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Α) Είναι $f'(x)=\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}, x\in\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) της C_f στο σημείο της $A(x_1,f(x_1))$ είναι:

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-e^{-x_1}=-e^{-x_1}(x-x_1)$

$\Leftrightarrow y=-e^{-x_1}x+(x_1+1)e^{-x_1}$

Άρα $(\varepsilon_1):\boxed{y=-e^{-x_1}x+(x_1+1)e^{-x_1}}$.

Είναι $g'(x)=\left(-x^2\right)'=-2x$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_2) της C_g στο σημείο της $B(x_2,g(x_2))$ είναι: $y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)$

$\Leftrightarrow y-\left(-x_2^2\right)=-2x_2(x-x_2)\Leftrightarrow y=-2x_2x+x_2^2$

Άρα $(\varepsilon_2):\boxed{y=-2x_2x+x_2^2}$.

Για να έχουν οι C_f και C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει και αρκεί οι πραγματικοί αριθμοί x_1,x_2 να είναι τέτοιοι ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να συμπίπτουν.

Έτσι: $\begin{cases}-e^{-x_1}=-2x_2\\(x_1+1)e^{-x_1}=x_2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}e^{-x_1}\\(x_1+1)e^{-x_1}=x_2^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}e^{-x_1}\\(x_1+1)e^{-x_1}=\left(\dfrac{1}{2}e^{-x_1}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}e^{-x_1}\\x_1+1=\dfrac{1}{4}e^{-x_1}\end{cases}$

Για να έχει λύση το σύστημα (Σ) πρέπει και αρκεί η εξίσωση $\frac{1}{4}e^{-x}-x-1=0$ να έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{1}{4}e^{-x}-x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο διάστημα $[-1,0]$. Είναι επίσης:

- $\varphi(-1)=\frac{1}{4}e^{-(-1)}-(-1)-1=\frac{e}{4}>0$ και
- $\varphi(0)=\frac{1}{4}e^{0}-0-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0$

  οπότε $\varphi(-1)\varphi(0)<0$

Παρατηρούμε ότι για την φ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο διάστημα $[-1,0]$. Επομένως η εξίσωση $\varphi(x)=0$, δηλαδή η εξίσωση $\frac{1}{4}e^{-x}-x-1=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(-1,0)$. Άρα το σύστημα (Σ) έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$, οπότε οι C_f και C_g έχουν μία τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\varphi'(x)=\left(\frac{1}{4}e^{-x}-x-1\right)'=-\frac{1}{4}e^{-x}-1<0,$$

οπότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0$

Επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι και «1-1»,άρα το σύστημα (Σ) ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} x_2=\frac{1}{2}e^{-x_1} \\ \varphi(x_1)=\varphi(x_0) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_2=\frac{1}{2}e^{-x_0} \\ x_1=x_0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2)=\left(x_0,\frac{1}{2}e^{-x_0}\right)$$

Επομένως η λύση του συστήματος (Σ) είναι μοναδική, οπότε οι C_f και C_g έχουν τελικά ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη.

Β) Έχουμε:
$h(x)=f(x)-g(x)=e^{-x}-(-x^2)=e^{-x}+x^2$, $x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $h'(x)=\left(e^{-x}+x^2\right)'=-e^{-x}+2x$ και

$h''(x)=\left(-e^{-x}+2x\right)'=e^{-x}+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση h είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση h' είναι συνεχής στο $[0,1]$, σύνθεση και πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $h'(0)=-e^{0}+2\cdot 0=-1<0$
- $h'(1)=-e^{-1}+2=2-\frac{1}{e}=\frac{2e-1}{e}>0$

οπότε είναι $h'(0)h'(1)<0$ και συνεπώς, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$.

Ακόμη, επειδή η συνάρτηση h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $h''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, προκύπτει ότι το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Γ) Έχουμε:

- $x>\xi \overset{(h'\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} h'(x)>h'(\xi)=0\Rightarrow h'(x)>0$
- $x<\xi \overset{(h'\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} h'(x)<h'(\xi)=0\Rightarrow h'(x)<0$

Από τα παραπάνω, σε συνδυασμό με την συνέχεια της h στο ξ, προκύπτει ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\xi]$, όπου το ξ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h'(x)=0$ που περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$.

Διορθωτικό σχόλιο:

Οι συναρτήσεις f που προκύπτουν στη λύση της άσκησης 3 του τεύχους 113, σελίδα 56-57, είναι με πεδίο ορισμού της $f\circ g$ υπερσύνολο του $[-2,2]$, λόγω του τύπου της $f\circ g$ από την εκφώνηση, και όχι το $[-2,2]$ που αναφέρεται στη λύση.

Αν το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι το $[-2,2]$, τότε αποδεικνύεται ότι οι άπειρες συναρτήσεις f έχουν τη μορφή:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{16+x}, & x\in[-16,0] \\ h(x), & x\in B\subseteq(0,+\infty) \end{cases},$$

με h οποιαδήποτε συνάρτηση που ορίζεται στο Β.

Κώστας Βακαλόπουλος

Το Βήμα του Ευκλείδη

Αξιοσημείωτες τριγωνομετρικές ανισότητες

Κωνσταντίνος Ανεστόπουλος

Οι τριγωνομετρικές ανισότητες και οι εφαρμογές τους καταλαμβάνουν τμήμα της ύλης της Β΄ και Γ΄ Λυκείου. Στην εργασία αυτή, έγινε προσπάθεια συγκέντρωσης και επίλυσης σημαντικών ανισοτήτων, που έχουν εφαρμογές στα όρια και τα ολοκληρώματα, με την πιο στοιχειώδη μέθοδο.

Πρόταση 1.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει: $\text{ημ}x<x<\text{εφ}x$.

Μία γεωμετρική απόδειξη της παραπάνω πρότασης υπάρχει στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου Προσανατολισμού (σελ. 52, Αθήνα 2018).

Πόρισμα 1.

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, ισχύει: $\text{εφ}x<x<\text{ημ}x$.

Απόδειξη: Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, έχουμε

$-\frac{\pi}{2}<x<0\Rightarrow 0<-x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ (από πρόταση1)

$\Rightarrow \text{ημ}(-x)<-x<\text{εφ}(-x)\Rightarrow -\text{ημ}x<-x<-\text{εφ}x\Rightarrow$

$\text{ημ}x>x>\text{εφ}x\Rightarrow \text{εφ}x<x<\text{ημ}x$.

Πρόταση 2.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει: $\text{ημ}x>x-\frac{x^3}{4}>0$.

Απόδειξη: Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow \text{εφ}\frac{x}{2}>\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{\text{ημ}\frac{x}{2}}{\text{συν}\frac{x}{2}}>\frac{x}{2}\Rightarrow$$

$$\text{ημ}\frac{x}{2}>\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2}\Rightarrow \text{ημ}\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2}>\frac{x}{2}\text{συν}^2\frac{x}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\text{ημ}\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2}>x\text{συν}^2\frac{x}{2}\Rightarrow \text{ημ}x>x\left(1-\text{ημ}^2\frac{x}{2}\right)$$

και $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow \text{ημ}\frac{x}{2}<\frac{x}{2}\Rightarrow \text{ημ}^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{4}$

$$\Rightarrow -\text{ημ}^2\frac{x}{2}>-\frac{x^2}{4}\Rightarrow 1-\text{ημ}^2\frac{x}{2}>1-\frac{x^2}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(1-\text{ημ}^2\frac{x}{2}\right)>x-\frac{x^3}{4}.$$

Άρα $\text{ημ}x>x-\frac{x^3}{4}$. Είναι $0<x<\frac{\pi}{2}<2$, οπότε $x-2<0$ και $x+2>0$, δηλαδή

$$x^2-4<0\overset{x>0}{\Rightarrow} x^3-4x<0\Rightarrow \frac{x^3}{4}-x<0\Rightarrow x-\frac{x^3}{4}>0.$$

Άρα $\text{ημ}x>x-\frac{x^3}{4}>0$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Μια άλλη απόδειξη της Πρότασης 2, μπορεί να γραφεί με τρόπο ανάλογο της Πρότασης 1.

Πόρισμα2.

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, ισχύει:

$$x-\frac{x^3}{4}>\text{ημ}x>x>\text{εφ}x.$$

Απόδειξη: Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, έχουμε

$-\frac{\pi}{2}<x<0\Rightarrow 0<-x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ (από πρόταση 2 και πόρισμα 1) $\Rightarrow -x-\frac{(-x)^3}{4}<\text{ημ}(-x)<-x<\text{εφ}(-x)\Rightarrow$

$$-x+\frac{x^3}{4}<-\text{ημ}x<-x<-\text{εφ}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\frac{x^3}{4}>\text{ημ}x>x>\text{εφ}x.$$

Πόρισμα3.

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει: $|x-\text{ημ}x|\le\frac{|x|^3}{4}$.

Απόδειξη: Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$x-\frac{x^3}{4}<\text{ημ}x<x\Rightarrow -\frac{x^3}{4}<\text{ημ}x-x<0<\frac{x^3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{|x|^3}{4}<\text{ημ}x-x<\frac{|x|^3}{4}\Rightarrow |x-\text{ημ}x|\le\frac{|x|^3}{4}.$$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, έχουμε:

$$x<\text{ημ}x<x-\frac{x^3}{4}\Rightarrow 0<\text{ημ}x-x<-\frac{x^3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{4} < 0 < \eta\mu x - x < \frac{(-x)^3}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{(-x)^3}{4} < \eta\mu x - x < \frac{(-x)^3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{|x|^3}{4} < \eta\mu x - x < \frac{|x|^3}{4} \Rightarrow |x - \eta\mu x| \le \frac{|x|^3}{4}.$$

Για $x = 0$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.

Πόρισμα4.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\eta\mu x| \le |x|$.

Μία γεωμετρική απόδειξη του παραπάνω πορίσματος υπάρχει στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου Προσανατολισμού (σελ. 52, Αθήνα 2018). Μια άλλη απόδειξη μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τα παραπάνω.

Πρόταση3.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = 1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} + 8\eta\mu^4\frac{x}{4}}.$$

Απόδειξη: Πράγματι $\sigma\upsilon\nu x = 1 - 2\eta\mu^2\frac{x}{2} =$

$$1 - 2\left(2\eta\mu\frac{x}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(4\eta\mu^2\frac{x}{4}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{4}\right) =$$

$$= 1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4}\left(1 - \eta\mu^2\frac{x}{4}\right) = 1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} + 8\eta\mu^4\frac{x}{4}.$$

Πρόταση4.

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει:

$$\boldsymbol{1 - \frac{x^2}{2} \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20}}.$$

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει:

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$, οπότε

$$0 < \eta\mu\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \eta\mu^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$-2\eta\mu^2\frac{x}{2} > -\frac{x^2}{2} \Rightarrow 1 - 2\eta\mu^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Για να αποδείξουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20}$, έχουμε

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{4} < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \eta\mu\frac{x}{4} > \frac{x}{4} - \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{4} > 0$$

(από πρόταση 2)

$$\Rightarrow \eta\mu\frac{x}{4} > \frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^4} > 0 \Rightarrow \eta\mu^2\frac{x}{4} > \left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^4}\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow -8\eta\mu^2\frac{x}{4} < -8\left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^4}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} < 1 - 8\left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^4}\right)^2 \qquad (1)$$

Ακόμη έχουμε:

$$0 < \frac{x}{4} < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \eta\mu\frac{x}{4} < \frac{x}{4} \Rightarrow \eta\mu^4\frac{x}{4} < \left(\frac{x}{4}\right)^4$$

$$\Rightarrow 8\eta\mu^4\frac{x}{4} < 8\frac{x^4}{4^4} \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} + 8\eta\mu^4\frac{x}{4} < 1 - 8\left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^4}\right)^2 + 8\frac{x^4}{4^4} \Rightarrow$$

$$1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} + 8\eta\mu^4\frac{x}{4} < 1 - 8\left(\frac{x^2}{16} - 2\frac{x^4}{4^5} + \frac{x^6}{4^8}\right) + 8\frac{x^4}{4^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} + 8\eta\mu^4\frac{x}{4} < 1 - \frac{x^2}{2} + 16\frac{x^4}{4^5} - 8\frac{x^6}{4^8} + 8\frac{x^4}{4^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} + 8\eta\mu^4\frac{x}{4} < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4^3} - 2\frac{x^6}{4^7} + 2\frac{x^4}{4^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 8\eta\mu^2\frac{x}{4} + 8\eta\mu^4\frac{x}{4} < 1 - \frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{4^3} - 2\frac{x^6}{4^7}. \quad (3)$$

Επιπλέον

$$1 - \frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{4^3} - 2\frac{x^6}{4^7} < 1 - \frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{4^3} < 1 - \frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{64} <$$

$$< 1 - \frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{60} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20} \qquad (4)$$

Από τις (3), (4), την πρόταση3 και τη μεταβατική ιδιότητα καταλήγουμε στη σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20}, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{(-x)^2}{2} < \sigma\upsilon\nu(-x) < 1 - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^4}{20}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} < \sigma\upsilon\nu x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20}.$$

Για $x = 0$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.

Άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20}.$$

Εφαρμογή1.

Αν $x \in (0,1)$, τότε: $\varepsilon\varphi x < x + x^3$.

Λύση: Για κάθε $0 < x < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x > 1 - \frac{x^2}{2}$

και $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1 \Rightarrow$

$\frac{x^2}{2} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} > 0$, συνεπώς $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} < \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}}$

και $0 < \eta\mu x < x$, για κάθε $x \in (0,1)$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες, έχουμε:

$\varepsilon\varphi x < \frac{x}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\frac{2 - x^2}{2}} = \frac{2x}{2 - x^2}$, για κάθε $x \in (0,1)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για κάθε $x \in (0,1)$:

$\frac{2x}{2 - x^2} < x + x^3$.

Πράγματι $\frac{2x}{2 - x^2} < x + x^3 \Leftrightarrow \frac{2}{2 - x^2} < 1 + x^2 \Leftrightarrow$

$2 < (1 + x^2)(2 - x^2) \Leftrightarrow 2 < 2 - x^2 + 2x^2 - x^4$

$\Leftrightarrow x^2 - x^4 > 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x^2) > 0$, που ισχύει.

Άσκηση1.

Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0,\pi)$ ισχύει:

$\ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) < \ln 2 - \frac{1}{4}x^2$.

Λύση: Έχουμε $\ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) < \ln 2 - \frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow$

$\ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \ln 2 + \frac{1}{4}x^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\ln\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{2} + \frac{1}{4}x^2 < 0 \Leftrightarrow \ln\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 < 0 \Leftrightarrow$

$2\ln\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 < 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = 2\ln\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2$.

Η f παραγωγίζεται στο $(0,\pi)$ και ισχύει

$$f'(x) = 2\frac{-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x = \frac{x}{2} - \varepsilon\varphi\frac{x}{2},$$

οπότε έχουμε:

$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} < \varepsilon\varphi\frac{x}{2} \Rightarrow$

$\frac{x}{2} - \varepsilon\varphi\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

και η f συνεχής στο $[0,\pi]$, συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$, άρα

$$f(x) < f(0) \Rightarrow \ln\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 < 0.$$

Άσκηση2.

Δείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu(2x) < \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Λύση: Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

έχουμε: $\varepsilon\varphi x > x > 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi^2 x > x^2 > 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x} < \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} < 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\frac{1}{\eta\mu^2 x} < \frac{x^2 + 1}{x^2} \Rightarrow \eta\mu^2 x > \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow$

$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2x)}{2} > \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu(2x) > \frac{2x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow$

$1 - \frac{2x^2}{x^2 + 1} > \sigma\upsilon\nu(2x) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(2x) < \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$.

Άσκηση3.

Δείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x < \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Λύση: Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$\varepsilon\varphi x > x > 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi^2 x > x^2 > 0 \Rightarrow 1 + \varepsilon\varphi^2 x > 1 + x^2 \Rightarrow$

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > x^2 + 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x < \frac{1}{x^2 + 1}$.

Άσκηση4.

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (0,\pi)$ ισχύει:

$$2\eta\mu x > x(1 + \sigma\upsilon\nu x).$$

Λύση: Για κάθε $x \in (0,\pi)$, έχουμε:

$\frac{\pi}{2} > \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{x}{2} > \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}} > \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow$

$\eta\mu\frac{x}{2} > \frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow 2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} > x\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \eta\mu x > x\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{2} \Rightarrow 2\eta\mu x > x(1 + \sigma\upsilon\nu x)$.

Διαφορικό και ο ρυθμός μεταβολής

Σωτήρης Ε. Λουρίδας, Χρήστος Π. Τσιφάκης

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Λίγο πριν τις ασκήσεις: Είναι γεγονός ότι εδώ και πολλά χρόνια ζούμε την εποχή των «Συμβολιστικών» Μαθηματικών. Για να κατανοήσουμε ένα Μαθηματικό Πρόβλημα είναι καθοριστικό να μπορούμε να «μεταφράζουμε» τον λόγο σε μαθηματικές αποδόσεις και αντίστροφα με βάση τους νόμους της Μαθηματικής Λογικής κύρια μέσω της αρχής του δυισμού, των λογικών συνδέσμων, των ποσοδεικτών, των κατηγορημάτων, της εναλλαγής των ποσοδεικτών κατά την άρνηση, των μεθόδων απόδειξης κτλ.

Για τη συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ είθισται να συμβολίζουμε $\Delta f=f(x)-f(x_0),\ \Delta x=x-x_0,\ x_0\in D$, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ (Παράγωγος της $f(x)$ στη θέση x_0). Αν η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι πεπερασμένος αριθμός, τότε, ορίζουμε ως ***διαφορικό*** της $f:D\to R$ με $y=f(x)$ στη θέση x_0 τη συνάρτηση μεταβλητής Δx με τιμές $f'(x_0)\Delta x,\ x_0+\Delta x\in D$. Συμβολίζουμε την συνάρτηση αυτή $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x,\ x_0+\Delta x\in D$ ή για την τυχούσα τιμή $x\in D$, συμβολίζουμε $df(x)=f'(x)\Delta x$ (1), $x+\Delta x\in D$. Για την συνάρτηση τώρα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ εύκολα έχουμε ότι $dx=\Delta x$. Άρα μπορούμε να γράψουμε $df(x)=f'(x)dx$ ή $dy=f'(x)dx$ και για $dx\neq 0$ προκύπτει ένας άλλος συμβολισμός της παραγώγου, ο $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ ή $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ ή απλά $\dfrac{dy}{dx}$ που είναι γνωστός ως ***συμβολισμός του Leibniz*** (1646 -1719). Η παράγωγος $f'(x_0)$ στο τυχόν $x_0\in D$ συμβολίζεται ως $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ ή $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ (αν και ο συμβολισμός $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ είναι καλύτερα να αποφεύγεται καθότι υπάρχει το ενδεχόμενο να δώσει την εντύπωση ότι πρόκειται για την παράγωγο ως προς x της $f(x_0)$ που είναι μηδέν). Ισχύουν οι επόμενοι συμβολισμοί:

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3},\dots,f^{(\nu)}(x)=\frac{d^\nu y}{dx^\nu}.$$

Εδώ αναφέρουμε ότι ο συμβολισμός των παραγώγων f',f'',f''' ή $f^{(3)}$ ή ... ή $f^{(\nu)}$ είναι ο ***συμβολισμός του Lagrange*** (1736 – 1813). Στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης έχουμε σημαντική εφαρμογή του συμβολισμού ***Leibniz***. Αν λοιπόν έχουμε δύο συναρτήσεις, την $g:D_g\to\mathbb{R},\ u=g(x)$, παραγωγίσιμη στο $D\subseteq D_g$ και την $f:D_f\to\mathbb{R},\ g(D)\subseteq D_f$ με την $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο $g(D)$, τότε για την $f\circ g$ με τύπο $y=f(u)$, και $u=g(x)$ δηλαδή με τύπο $y=f(g(x))$ ισχύει ο τύπος: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$, που μπορεί βέβαια να γραφεί $\dfrac{dy}{dx}=g'(x)\dfrac{dy}{du}$, αφού $u=g(x)\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=g'(x)$. Για παράδειγμα αν η μεταβλητή x εξαρτάται από μία μεταβλητή t, οπότε μπορούμε να γράψουμε $x=x(t)$, τότε για αυτό το x, και για τη παράγωγο της $y=x^2$ στο σύνολο που αυτή ορίζεται, έχουμε $\dfrac{dy}{dx}=2x\dfrac{dx}{dt}$. Αναφέρουμε εδώ ότι ο τύπος $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$, ονομάζεται ***κανόνας της αλυσίδας*** για σύνθεση δύο συναρτήσεων.

Ο τύπος αυτός γενικεύεται και για σύνθεση πάνω από δύο συναρτήσεων. Δηλαδή αν ορίζεται η σύνθεση $f\circ g\circ h$, τότε ο τύπος της είναι $y=f(u(v))$, με $v=h(x),\ u=g(h(x))=g(v)$ και για την εύρεση της παραγώγου της γράφουμε $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$. Στο ίδιο πνεύμα υπολογίζουμε παράγωγο για συνάρτηση $f_1\circ f_2\circ\dots\circ f_\nu$.

Τονίζουμε ότι ο συμβολισμός $\dfrac{dy}{dx}$ ***δεν*** είναι πηλίκο, αλλά απλά αναφέρουμε ότι στον κανόνα της αλυσίδας συμπεριφέρεται ως πηλίκο και αυτό το επισημαίνουμε για ***ευκολότερη απομνημόνευση*** του κανόνα αλυσίδας. Κατά «παράβαση καθήκοντος» ας αναφέρουμε εδώ κάτι που είναι από την Ανάλυση του πρώτου έτους των Θετικών τμημάτων των Πανεπιστημίων και μας δίνει την παράγωγο της αντίστροφης μίας συνάρτησης συνεχούς και αυστηρά μονότονης επί ενός διαστήματος Ι. Ισχύει ο τύπος απομνημόνευσης $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ (δηλαδή **σαν** να προήλθε από την ισότητα $\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=1$ με «κλασική» διαίρεση) και που μας οδηγεί βέβαια στο να θυμηθούμε τελικά εύκολα τον τύπο της παραγώγου της αντίστροφης που είναι ο $\frac{d f^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{d f(x)}{dx}}$. Ο συμβολισμός του ***Leibniz***, χρησιμοποιείται ευρέως και σήμερα και μάλιστα υπάρχουν και περιπτώσεις που είναι καταλληλότερος του συμβολισμού ***Lagrange*** (Ολικά διαφορικά, Διαφορικές εξισώσεις, δηλαδή εξισώσεις που περιέχουν παραγώγους, παράγωγοι συναρτήσεων με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, κτλ.). Επειδή θεωρούμε ότι η εμπέδωση της θεωρίας γίνεται μέσω της επίλυσης Ασκήσεων, θα ακολουθήσουν Ασκήσεις που θα επιλυθούν και με τους δύο τρόπους, για λόγους **ουσιαστικού μαθηματικού πλουραλισμού**. Αρκεί βέβαια να έχουμε γνώση της θεωρίας του σχολικού βιβλίου κάτω από τον τίτλο ***ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ***. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με τύπο $y=f(x)$ ο συμβολισμός $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της $y'=\frac{dy}{dx}$ στη θέση x_0 κτλ. **Οι συμβολισμοί *Leibniz* και *Lagrange* δεν είναι «συγκρουόμενοι» συμβολισμοί, αντιθέτως μάλιστα αναφέρονται στην ίδια ακριβώς θεωρία χωρίς να αλλοιώνουν το παραμικρό τόσο κατά την μελέτη της, όσο και κατά την επίλυση των αντίστοιχων ασκήσεων και προβλημάτων και ως εκ τούτου μπορούν και να συνυπάρχουν στο ίδιο πεδίο μελέτης.** Ο λόγος που αποφασίστηκε η συγκεκριμένη παρουσίαση είναι επειδή ο συμβολισμός ***Leibniz*** μπορεί να διδαχθεί και να χρησιμοποιηθεί στην Γ΄ Λυκείου αλλά κύρια επειδή όσο «ανεβαίνουμε» από το πρώτο έτος του Πανεπιστημίου είναι αυτός που κυριαρχεί περισσότερο. Για παράδειγμα αν μας δώσουν τη παράγωγο μίας συνάρτησης και μας ζητήσουν να υπολογίσουμε την αρχική της συνάρτηση ή την παράγουσα της ή το αόριστο ολοκλήρωμα της, αυτό γίνεται μέσω του συμβόλου $\int$ που ακολουθείται από το διαφορικό της (δηλαδή γράφουμε $\int f(x)dx$) οπότε με τύπους και ιδιότητες θα αποκρυπτογραφηθεί για να μας δώσει τη συνάρτηση που η παράγωγος της θα μας οδηγήσει στην $f(x)$.

Άσκηση 1. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $y=e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}$

Λύση. Με τον συμβολισμό Leibniz: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και είναι σύνθεση των συναρτήσεων $z=\sqrt{x^2+1}, u=\sigma\upsilon\nu z, v=\eta\mu u, y=e^v$ με αυτήν ακριβώς τη σειρά. Άρα παίρνουμε $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$, με

$$\frac{dy}{dv}=e^v,\ \frac{dv}{du}=\sigma\upsilon\nu u,\ \frac{du}{dz}=-\eta\mu z,\ \frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Επομένως αν εκφραστούν όλα ως προς x η ζητούμενη παράγωγος είναι

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(x\eta\mu\sqrt{x^2+1}\right)\left[\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2+1}\right)\right]e^{\eta\mu\left[\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Με τον συμβολισμό Lagrange:

$$f(x)=e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση παραγωγισίμων με $f'(x)=\left(e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}\right)'=$

$$\left(\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)'\cdot e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}=$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)'\cdot e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}=$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\cdot\left(-\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\cdot e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}=$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\cdot\left(-\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}=$$

$$-\frac{x\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\left(\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)e^{\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Άσκηση 2. Βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*_+$, με $y=f(x), y'=\ell n y^y$ αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0,e)$.

Λύση. Με τον συμβολισμό Leibniz: Η $y'=\ell n y^y$ γράφεται $\frac{dy}{dx}=\ell n y^y$. Αν θεωρήσουμε $u=\ell n y\Leftrightarrow y=e^u$ έχουμε $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=e^u\frac{du}{dx}$, οπότε οδηγούμαστε στην εξίσωση $\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}=1$ ή $(\ell n u)'\cdot\frac{du}{dx}=(x+c)'$, ή $\ell n u=x+c=\ell n e^{x+c}$, ή $u=e^{x+c}$, ή $\ell n y=ke^x$, ή $y=e^{ke^x}$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $(0,e)$ τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $y=e^{e^x}$.

Με τον συμβολισμό Lagrange: Για κάθε $x\in R$

$$f'(x)=\ln\left(f(x)\right)^{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)=f(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)\Leftrightarrow$$

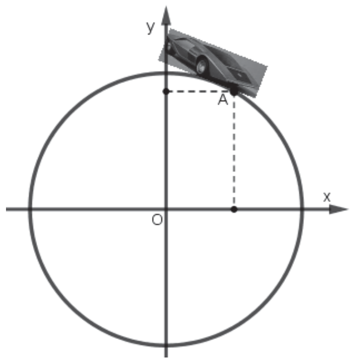
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(f(x)\right)\Leftrightarrow\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'=\ln\left(f(x)\right)\Leftrightarrow$$

$\ln\left(f(x)\right)=c\cdot e^x$. Αφού η C_f διέρχεται από το ση-

μείο $(0,e)$ έχουμε: $\ln\left(f(0)\right)=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow \ln e=c\Leftrightarrow c=1$.
Άρα $\ln\left(f(x)\right)=e^{x}\Leftrightarrow f(x)=e^{e^{x}}, x\in R$.

Άσκηση 3η. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2+y^2=r^2, r>0$. Κατά τη στιγμή που περνάει από το σημείο $A\left(\frac{r}{2},\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$ του 1[ου] τεταρτημορίου, η τεταγμένη του y ελαττώνεται με ρυθμό a μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x κατά τη χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το σημείο Α.

Λύση. Με τον συμβολισμό Leibniz: Αντιλαμβανόμαστε από την εκφώνηση ότι τα μεγέθη x, y δεν είναι ανεξάρτητες μεταβλητές αλλά είναι συναρτήσεις του t.



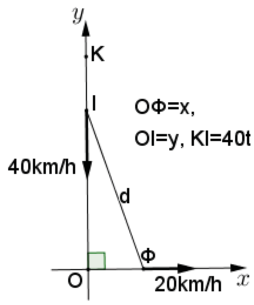
Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας $x^2+y^2=r^2, r>0$, ως προς t παίρνουμε: $2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\Leftrightarrow x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$ (1). Επειδή η τεταγμένη y ***ελαττώνεται*** με ρυθμό a μονάδες το δευτερόλεπτο έχουμε $\frac{dy}{dt}=-a$. Ζητάμε τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dx}{dt}$ της τετμημένης x, όταν το κινητό διέρχεται από το σημείο Α δηλαδή όταν $x=\frac{r}{2}$ και $y=\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε $\frac{r}{2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{r\sqrt{3}}{2}\cdot(-a)=0\Leftrightarrow$
$\frac{r}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{ra\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{dx}{dt}=a\sqrt{3}$.

Με τον συμβολισμό Lagrange: Αφού οι συντεταγμένες κίνησης εξαρτώνται από τον χρόνο t έχουμε: $x^2(t)+y^2(t)=r^2$. Ο ρυθμός μεταβολής είναι $2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0\Leftrightarrow x'(t)=-\frac{y(t)\cdot y'(t)}{x(t)}$.
Την χρονική στιγμή t_o έχουμε ότι το κινητό βρίσκεται στην θέση $A\left(\frac{r}{2},\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$, άρα $x(t_o)=\frac{r}{2}$, $y(t_o)=\frac{r\sqrt{3}}{2}$ και $y'(t_o)=-a\frac{\text{μον}}{\text{sec}}$

Άρα $x'(t_o)=-\frac{y(t_o)\cdot y'(t_o)}{x(t_o)}=-\frac{(-a)\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2}}=a\sqrt{3}\frac{\text{μον}}{\text{sec}}$

Άσκηση 4. Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 Km βόρεια ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με ταχύτητα $40\frac{Km}{h}$ και το φορτηγό ανατολικά με ταχύτητα $20\frac{Km}{h}$. Αν η ορατότητα είναι 20 km, θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

Λύση. Με τον συμβολισμό Leibniz: Ως γνωστόν η απόσταση d δίνεται από τον τύπο $d=\sqrt{x^2+y^2}$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$. Αρκεί λοιπόν να προσδιορίσουμε το ελάχιστο της $h(t)=d^2=x^2+y^2$.



Παρατηρούμε ότι το y μειώνεται ενώ το x αυξάνεται. Έτσι λοιπόν παίρνουμε: $\frac{dh}{dt}=2x\frac{dx}{dt}-2y\frac{dy}{dt}$ ή $\frac{dh}{dt}=40x-80y=40(x-2y)$.
Αν $x<2y$, τότε, $\frac{dh}{dt}<0$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα, αν $x>2y$, τότε, $\frac{dh}{dt}>0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα και αν, $x=2y$ δηλαδή όταν $20t=2(20-40t)$ ή $t=\frac{2}{5}$, οπότε $x=20\cdot\frac{2}{5}=8$ και $y=20-40\cdot\frac{2}{5}=4$, θα έχουμε $\frac{dh}{dt}=0$. Συνεπώς το ελάχιστο της h είναι το $h\left(\frac{2}{5}\right)=80$, άρα τότε η ελάχιστη απόσταση των δύο πλοίων θα είναι η $d=\sqrt{80}$ δηλαδή μικρότερη του 10, οπότε σε κάποια στιγμή θα υπάρχει οπτική επαφή.

Με τον συμβολισμό Lagrange: Η αρχική θέση του ιστιοφόρου είναι στο σημείο Κ και του φορτηγού στο Ο. Μετά από t ώρες οι θέσεις των δύο πλοίων θα είναι $OI=20-40t$ και $O\Phi=20t$ και η μεταξύ τους απόσταση

$d=\sqrt{(20-40t)^2+(20t)^2}=\sqrt{20^2\left[(1-2t)^2+t^2\right]}=$ $=20\sqrt{5t^2-4t+1}$. Για να γίνει η απόσταση ελάχιστη, αρκεί το υπόρριζο $f(t)=5t^2-4t+1, t>0$ να πάρει την ελάχιστη τιμή του. Έτσι έχουμε: $f'(t)=10t-4$ και $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{5}$ και $f'(t)<0$ για $t<\frac{2}{5}$ ενώ $f'(t)>0$ για $t>\frac{2}{5}$. Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών.

t	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$

Έτσι η ελάχιστη απόσταση είναι:

$d_{min}=20\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{80}<10$, οπότε σε κάποια στιγμή θα υπάρχει οπτική επαφή.

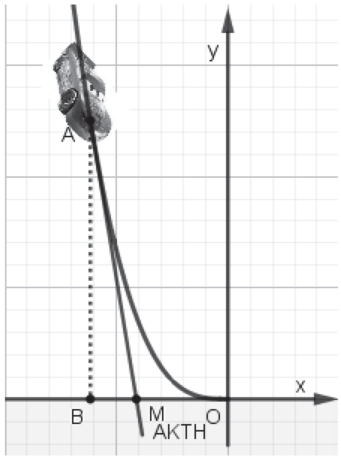
Παρατήρηση: Αφού η $f(t)=5t^2-4t+1, t>0$ έχει $\alpha=5>0$ το τριώνυμο παρουσιάζει ελάχιστο για $t=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-2}{5}=\frac{2}{5}$ το $f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$.

Άσκηση 5. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3$, $x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα, την χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

Λύση. Ο προβολέας του περιπολικού όταν αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης, φωτίζει κατά την διεύθυνση της ευθείας της εφαπτομένης της C_f.

Με τον συμβολισμό Leibniz: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$ είναι:

$y+\frac{\alpha^3}{3}=-\alpha^2(x-\alpha)$. Για $y=0$ παίρνουμε $\alpha=0$ ή $x=\frac{2\alpha}{3}\neq 0$. Επειδή ζητούμε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης για $\alpha=-3\neq 0$, έχουμε $x=\frac{2\alpha}{3}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$ με $\frac{d\alpha}{dt}=-\alpha$. Για $\alpha=-3$ παίρνουμε $\frac{dx}{dt}=2$, για κάποια χρονική στιγμή t_0.



Με τον συμβολισμό Lagrange: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$

$y+\frac{\alpha^3}{3}=-\alpha^2(x-\alpha)$. Η εφαπτομένη τέμνει τον $x'x$ στο $M\left(\frac{2\alpha}{3},0\right)$. Επειδή μεταβάλλεται με βάση τον χρόνο t έχουμε ότι: $x(t)=\frac{2}{3}\alpha(t)$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι:

$$x'(t)=\frac{2}{3}\alpha'(t)=-\frac{2}{3}\alpha(t).$$

Την χρονική στιγμή t_o έχουμε:

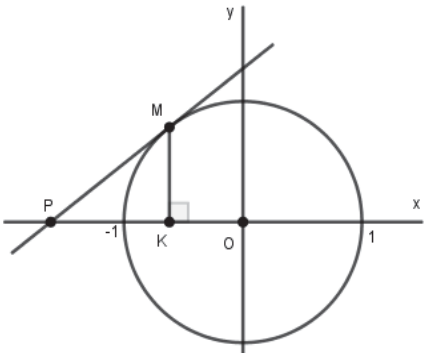
$$x'(t_o)=-\frac{2}{3}\alpha(t_o)=-\frac{2}{3}(-3)\frac{\text{μον. μήκους}}{\text{μον. χρόνου}}=2\frac{\text{μ. μ.}}{\text{μ. χ.}}$$

Άσκηση 6. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $C: x^2+y^2=1$. Θεωρούμε μεταβλητό σημείο $M(x_o,y_o)$ του κύκλου με $-1<x_o<0$ και $0<y_o<1$ και την εφαπτομένη του στο Μ. Αν το σημείο Κ είναι η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$ και η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Ρ, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

α) Της απόστασης ΡΚ.

β) Του εμβαδού του τριγώνου ΜΚΡ, καθώς το Κ πλησιάζει το $O(0,0)$ την χρονική στιγμή t_o που είναι $\frac{dx_o}{dt}=0,2\frac{cm}{sec}$ και $x_o=-0,25$.

Λύση. Με τον συμβολισμό Leibniz: Αφού είναι $-1<x_o<0$ και $0<y_o<1$ το σημείο $M(x_o,y_o)$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.



$$M\in C\Leftrightarrow x_o{}^2+y_o{}^2=1\Leftrightarrow y_o=\sqrt{1-x_o{}^2}$$

Η εφαπτομένη στο M είναι

$$(\varepsilon): x\cdot x_o+y\cdot y_o=1\Leftrightarrow x\cdot x_o+y\cdot\sqrt{1-x_o^2}=1$$

και τα σημεία K,P έχουν συντεταγμένες $K(x_o,0)$ και $P\left(\dfrac{1}{x_o},0\right)$.

α) Αφού είναι $-1<x_o<0$, η απόσταση

$$s=\left|\overrightarrow{KP}\right|=\left|x_o-\frac{1}{x_o}\right|=x_o-\frac{1}{x_o}\ \text{(γιατί;)}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης PK είναι: $\dfrac{ds(x_o)}{dt}=\dfrac{ds(x_o)}{dx_o}\cdot\dfrac{dx_o}{dt}=\left(1+\dfrac{1}{x_o^2}\right)\cdot 0,2$.

Την χρονική στιγμή t_o που είναι $x_o=-0,25$ έχουμε: $\left.\dfrac{ds(x_o)}{dt}\right|_{x_o=-0,25}=(1+16)\cdot 0,2=3,4\dfrac{cm}{sec}$.

β) Το τρίγωνο MKP έχει εμβαδό:

$$E=(MKP)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PK}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MK}\right|=\frac{1}{2}\left(x_o-\frac{1}{x_o}\right)\cdot\sqrt{1-x_o^2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$$\frac{dE(x_o)}{dt}=\frac{dE(x_o)}{dx_o}\cdot\frac{dx_o}{dt}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{x_o^2}\right)\cdot\sqrt{1-x_o^2}+\left(x_o-\frac{1}{x_o}\right)\cdot\frac{-x_o}{\sqrt{1-x_o^2}}\right]\cdot\frac{dx_o}{dt}=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x_o^2}\left(2+\frac{1}{x_o^2}\right)\cdot\frac{dx_o}{dt}.$$

Την χρονική στιγμή t_o που είναι $x_o=-0,25$ έχουμε: $\left.\dfrac{dE(x_o)}{dt}\right|_{x_o=-0,25}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{4}}\cdot 9\cdot 0,2=\dfrac{9\sqrt{15}}{20}\dfrac{cm^2}{sec}$.

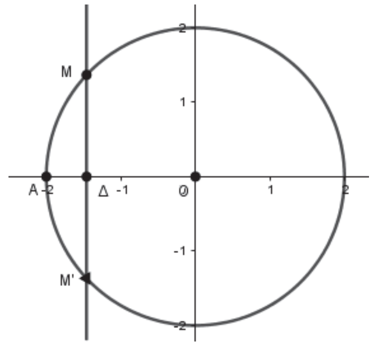
Άσκηση 7. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $C: x^2+y^2=4$. Μία ευθεία (ε) παράλληλη στον $y'y$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(x,0)$ και κινείται από το σημείο $A(-2,0)$ προς το $O(0,0)$ με ταχύτητα $\dfrac{1\ cm}{2\ sec}$. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία M και M', να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

α) Της απόστασης AM.

β) Του εμβαδού του τριγώνου OAM.

γ) Του εμβαδού του κυκλικού τμήματος $MAM'M$. την χρονική στιγμή t_o που το Δ είναι το μέσο του OA.

Λύση. α) Έστω $M(x,y)$ τότε η απόσταση



$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=s(x)=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}\overset{x^2+y^2=4}{=}2\sqrt{x+2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της είναι:

$$\frac{ds(x)}{dt}=\frac{ds(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=2\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

την χρονική στιγμή t_o που το Δ είναι το μέσο του OA έχουμε ότι $x_o=-1$, άρα

$$\left.\frac{ds(x)}{dt}\right|_{x=-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1+2}}=\frac{1}{2}\frac{cm}{sec}$$

β) Το τρίγωνο OAM έχει εμβαδό:

$$(OAM)=E(x)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{M\Delta}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-x^2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$$\frac{dE(x)}{dt}=\frac{dE(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

την χρονική στιγμή t_o έχουμε ότι $x_o=-1$, άρα

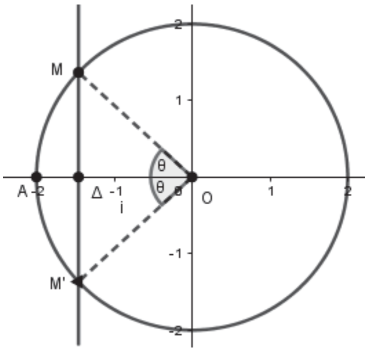
$$\left.\frac{dE(x)}{dt}\right|_{x_o=-1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{cm^2}{sec}=\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{cm^2}{sec}.$$

γ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι:

$$T(x)=(MAM'M)=\left(O,\widehat{MAM'}\right)-\left(M\overset{\triangle}{O}M'\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MM'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{O\Delta}\right|=$$

$$=4\theta-\frac{1}{2}2|x|\sqrt{4-x^2}\overset{x<0}{=}4\theta+x\sqrt{4-x^2}$$



Έτσι έχουμε

$\dfrac{dT(x)}{dt}=4\dfrac{d\theta}{dt}+\left[\sqrt{4-x^2}+x\cdot\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}\right]\dfrac{dx}{dt}=$

$=4\dfrac{d\theta}{dt}+\dfrac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$. Από το β) ερώτημα έχουμε:

$\left.\dfrac{dE(x)}{dt}\right|_{x_0=-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{cm^2}{sec}$.

Όμως $E(x)=\dfrac{1}{2}|\overline{OA}|\cdot|\overline{OM}|\cdot\eta\mu\theta=2\eta\mu\theta$

Άρα $\dfrac{dE(x)}{dt}=2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dt}$.

την χρονική στιγμή t_o έχουμε ότι $x_o=-1$, άρα $|\overline{\Delta M}|=\sqrt{3}$, οπότε $\varepsilon\varphi\theta=\sqrt{3}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

Έτσι έχουμε: $2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\cdot\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{t_o}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\Leftrightarrow\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{t_o}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{rad}{sec}$.

Οπότε $\left.\dfrac{dT(x)}{dt}\right|_{x_0=-1}=4\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{cm^2}{sec}=\sqrt{3}\dfrac{cm^2}{sec}$.

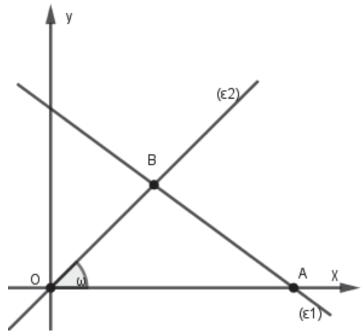
Άσκηση 8. **Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1):x+y=\kappa$, $\kappa>0$ και $(\varepsilon_2):y=\varepsilon\varphi\omega\cdot x$, $0^o<\omega<90^o$. Αν η γωνία ω αυξάνει με ρυθμό $\alpha\dfrac{rad}{sec}$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB, όπου $O(0,0)$, $A(\kappa,0)$ και B το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ την χρονική στιγμή που η $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.**

Λύση. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$\left.\begin{array}{l}y=\varepsilon\varphi\omega\cdot x\\x+y=\kappa\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=\varepsilon\varphi\omega\cdot x\\x+\varepsilon\varphi\omega\cdot x=\kappa\end{array}\right\}\overset{1+\varepsilon\varphi\omega\neq0}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{\varepsilon\varphi\omega\cdot\kappa}{1+\varepsilon\varphi\omega}\\x=\dfrac{\kappa}{1+\varepsilon\varphi\omega}\end{array}\right\}.$$

Άρα το σημείο $B\left(\dfrac{\kappa}{1+\varepsilon\varphi\omega},\dfrac{\varepsilon\varphi\omega\cdot\kappa}{1+\varepsilon\varphi\omega}\right)$.

Το εμβαδό του τριγώνου OAB είναι;



$(OAB)=E(x)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overline{OA},\overline{OB}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\kappa^2\cdot\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}$.

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$\dfrac{dE(\omega)}{dt}=\dfrac{dE(\omega)}{d\omega}\cdot\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\kappa^2\cdot\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}\right)'\cdot\dfrac{d\omega}{dt}=$

$=\dfrac{\alpha\cdot\kappa^2}{2\sigma\upsilon\nu^2\omega\cdot(1+\varepsilon\varphi\omega)^2}$. Την χρονική στιγμή t_o είναι $\omega=\dfrac{\pi}{3}$, άρα έχουμε: $\left.\dfrac{dE(\omega)}{dt}\right|_{\omega=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\alpha\cdot\kappa^2}{2+\sqrt{3}}\dfrac{\mu o\nu^2}{sec}$.

Άσκηση 9. **Σε ένα δοχείο πραγματοποιείται η χημική αντίδραση: $2A(\alpha q)+B(\alpha q)\rightarrow3\Gamma(\alpha q)$. Η ουσία A είναι έγχρωμη (κόκκινο). Η ένταση του χρώματος I δίνεται από την εξίσωση $I([A])=[A_o]\left(1+[A]^{\frac{1}{2}}\right)$ όπου $[A]$ η συγκέντρωση της ουσίας A και $[A_o]=0{,}4M$ η αρχική συγκέντρωση. Αν η συγκέντρωση της ουσίας A μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση $[A]=e^{-5t}$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του χρώματος καθώς και ποια χρονική στιγμή το διάλυμα αποχρωματίζεται. (Σημείωση: Δεν φαίνεται το κόκκινο αν ($[A]\leq10^{-4}M$).**

Λύση. Η ένταση του χρώματος είναι συνάρτηση του χρόνου t με τύπο $I(t)=0{,}4\cdot\left(1+\sqrt{e^{-5t}}\right)$

Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του χρώματος είναι: $I'(t)=0{,}4\cdot\left(1+\sqrt{e^{-5t}}\right)'=0{,}4\cdot\dfrac{-5\cdot e^{-5t}}{2\sqrt{e^{-5t}}}=$

$=-\dfrac{e^{-5t}}{\sqrt{e^{-5t}}}=-\sqrt{e^{-5t}}$. Για να αποχρωματιστεί πρέπει:

$[A]\leq10^{-4}M\Leftrightarrow e^{-5t}\leq10^{-4}\Leftrightarrow-5t\leq\ln\left(10^{-4}\right)\Leftrightarrow$

$-5t\leq-4\ln(10)\Leftrightarrow t\geq\dfrac{4}{5}\ln10$.

Άσκηση 10. **Σε μια Απλή Αρμονική Ταλάντωση η απομάκρυνση δίνεται από την σχέση $x(t)=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$. Να βρείτε:**

i) Τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας.
ii) Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας και τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας. Δίνεται ότι $E_{κιν}=\frac{1}{2}m\cdot υ^2$, $E_{ΔΥΝ}=\frac{1}{2}D\cdot x^2$ όπου $D=m\cdot ω^2$.

Λύση. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης της απομάκρυνσης. $υ(t)=x'(t)=A\cdot ω\cdot συν(ωt+φ_o)$

$$υ'(t)=x''(t)=-A\cdot ω^2\cdot ημ(ωt+φ_o).$$

Με συμβολισμό Leibniz έχουμε:

$$x'(t)=\frac{dx}{dt},\ x''(t)=\frac{d^2x}{dt^2})$$

ii) $E_{κιν}=\frac{1}{2}mυ^2=\frac{1}{2}mA^2ω^2συν^2(ωt+φ_o)$

$$E_{κιν}'(t)=-mA^2ω^2συν(ωt+φ_o)ημ(ωt+φ_o)ω=$$
$$=-DωA^2συν(ωt+φ_o)ημ(ωt+φ_o)=-D\cdot x(t)x'(t)$$
$$E_{δυν}'(t)=\left(\frac{1}{2}D\cdot x^2(t)\right)'=D\cdot x(t)x'(t)$$

Με μετασχηματισμό Leibniz παίρνουμε:

$$E=E(t)\Rightarrow E_{δυν}'(t)=\frac{dE}{dt}).$$

Παρατηρούμε ότι οι ρυθμοί μεταβολής είναι αντίθετοι, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της Μηχανικής ενέργειας του συστήματος ισούται με μηδέν. Άρα η Μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Άσκηση 11. Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης $p(x)$ της μονάδας του προϊόντος λέγεται συνάρτηση ζήτησης. Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x)=x\cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται συνάρτηση εσόδων και η παράγωγος R' λέγεται οριακή συνάρτηση εσόδων. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x)=R(x)-C(x)$, όπου C η συνάρτηση κόστους. Η συνάρτηση P καλείται συνάρτηση κέρδους και η παράγωγος P' καλείται οριακή συνάρτηση κέρδους.
α) Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.
β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(x)=3800+5x-0,001\cdot x^2$ και η συνάρτηση ζήτησης $p(x)=50-0,01\cdot x$;

Λύση. α) Έχουμε ότι η συνάρτηση κέρδους είναι $P(x)=R(x)-C(x)$ και $P'(x)=R'(x)-C'(x)$.
Αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο έχουμε

$$P'(x)=0\Leftrightarrow R'(x)-C'(x)=0\Leftrightarrow R'(x)=C'(x).$$

β) $R(x)=x\cdot p(x)=x\cdot(50-0,01x)=50x-0,01x^2$ και $R'(x)=50-0,02x$.

Όμοια $C(x)=3800+5x-0,001\cdot x^2$ και $C'(x)=5-0,002\cdot x$. Άρα $P'(x)=0\Leftrightarrow$ $50-0,02x=5-0,002x\Leftrightarrow x=2500$.

Για $x<2500$ έχουμε $P'(x)>0$, δηλαδή η P είναι γνησίως αύξουσα και για $x>2500$ έχουμε $P'(x)<0$, άρα η P γνησίως φθίνουσα. Το πρόσημο και η μονοτονία της δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	2500	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$
$P(x)$	↗		↘

Συνεπώς, το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της, είναι $x=2500$.

Άσκηση 12. Μια εταιρεία παράγει ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Το πλήθος των πωλήσεών τους, σε δεκάδες χιλιάδες κομμάτια, δίνεται από τη συνάρτηση $P(t)=\frac{400t}{t^2+25}$, όπου το t εκφράζει σε μήνες, το χρόνο κυκλοφορίας ενός μοντέλου. Αν η πρώτη κυκλοφορία είναι τον Αύγουστο του 2019, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων καθώς και ο μήνας κατά τον οποίο αυτές παίρνουν τη μέγιστη τιμή.

Λύση. Ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων είναι:

$$P'(t)=\frac{400(t^2+25)-800t^2}{(t^2+25)^2}=\frac{400(25-t^2)}{(t^2+25)^2}$$

$$P'(t)=0\Leftrightarrow 25-t^2=0\Leftrightarrow t=5.$$

Για $t<5$ έχουμε $P'(t)>0$, άρα η P είναι γνησίως αύξουσα και για $t>5$ έχουμε $P'(t)<0$, άρα η P είναι γνησίως φθίνουσα. Το πρόσημο και η μονοτονία της δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

t	0	5	$+\infty$
$P'(t)$	$+$	0	$-$
$P(t)$	↗		↘

Συνεπώς οι πωλήσεις γίνονται μέγιστες 5 μήνες μετά την πρώτη κυκλοφορία, δηλαδή τον Δεκέμβριο του 2019.

Βιβλιογραφία:

1. Περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β' ΕΜΕ,
2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
3. Λ. ΝΤΟΚΑ: Κλασική Ανάλυση,
4. Δ. ΣΤΡΑΤΗΓΟΠΟΥΛΟΥ: Ανώτερα Μαθηματικά
5. A. KENETH ROSS: Elementary Analysis, Springer
6. H JEROME KEISLER: Elementary Calculus
7. Περιοδικό ΥΠΟΨΗΦΙΟΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αντώνης Κυριακόπουλος

Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε ότι στα Μαθηματικά όταν λέμε:

1) Μια πρόταση p είναι **ικανή συνθήκη** για μια πρόταση q, εννοούμε ότι: «αν p, τότε q », συμβολικά: « $p \Rightarrow q$ ».

2) Μια πρόταση p είναι **αναγκαία συνθήκη** για μια πρόταση q, εννοούμε ότι: «αν q, τότε p», συμβολικά: « $q \Rightarrow p$ ».

3) Μια πρόταση p είναι **ικανή και αναγκαία** συνθήκη για μια πρόταση q, εννοούμε ότι: «p ισοδυναμεί q» («αν p, τότε q» και «αν q, τότε p»), συμβολικά « $p \Leftrightarrow q$ **»**.

• Επίσης :

4) **«p πρέπει q»** σημαίνει : **«** $p \Rightarrow q$ **»**.

5) **«p αρκεί q»** σημαίνει : **«** $q \Rightarrow p$ ».

6) **«p πρέπει και αρκεί q»** σημαίνει: « $p \Leftrightarrow q$ ».

7) **«p αν, και μόνο αν, q»** σημαίνει: « $p \Leftrightarrow q$ **»**.

8) **« p τότε, και μόνον τότε, q»** σημαίνει: « $p \Leftrightarrow q$ **»**.

Υπενθυμίζουμε ακόμα μερικούς από τους σπουδαιότερους νόμους της Μαθηματικής Λογικής, τους οποιους πρέπει να έχουμε συνεχώς στο μυαλό μας, όταν ασχολούμαστε με τα Μαθηματικά, για να μην κάνουμε λάθη.

—**Από τον προτασιακό λογισμό** (το $\wedge$ συμβολίζει τον σύνδεσμο «και», το $\vee$ τον σύνδεσμο «ή» και το $\bar{p}$ (= όχι p) την άρνηση της πρότασης p):

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (επιμεριστικοί νόμοι)

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$, $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$, $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q}$ (νόμοι αρνήσεως).

—**Από τον κατηγορικό λογισμό** (το $\forall$ συμβολίζει τον ποσοδείκτη «για κάθε» και το $\exists$ τον ποσοδείκτη «υπάρχει»:

• Η άρνηση του « $\forall$ » είναι « $\exists$ » και η άρνηση του « $\exists$ » είναι « $\forall$ ».

• Έστω ότι p(x) και q(x) είναι δύο προτασιακοί τύποι ορισμένοι επί ενός συνόλου Ω. Οι παρακάτω προτάσεις **είναι αληθείς** (νόμοι ποσοδεικτών):

1) $\forall x, [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x, p(x)] \wedge [\forall x, q(x)]$

2) $\exists x, [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x, p(x)] \vee [\exists x, q(x)]$

3) $[\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)] \Rightarrow \forall x, [p(x) \vee q(x)]$

4) $\exists x, [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x, p(x)] \wedge [\exists x, q(x)]$

Προσοχή: Οι παρακάτω προτάσεις **δεν είναι πάντοτε αληθείς:**

$$\forall x, [p(x) \vee q(x)] \Rightarrow [\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)]$$

$$[\exists x, p(x)] \wedge [\exists x, q(x)] \Rightarrow \exists x, [p(x) \wedge q(x)]$$

— Για παράδειγμα, αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, [f(x) = 0 \text{ ή } g(x) = 0] \ (1)$$

(Μέχρι εδώ. Θα ήταν λάθος να συνεχίσουμε και να γράψουμε:

$$(1) \Leftrightarrow [\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0] \text{ ή } [\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0].$$

Σημείωση. Προσοχή στους νόμους των ποσοδεικτών: « για κάθε» και «υπάρχει». Εάν κάποιος χρησιμοποιεί τα σύμβολα τους ($\forall$ και $\exists$) ή όχι δεν έχει καμία σημασία. Το λέω αυτό, διότι μερικοί λένε ότι οι ποσοδείκτες έχουν καταργηθεί!!!, αλλά χωρίς τις έννοιες « για κάθε» και «υπάρχει», καθώς και τους νόμους που διέπουν τις έννοιες αυτές στα Μαθηματικά, δεν μπορούμε να κάνουμε Μαθηματικά, καταργούνται και τα Μαθηματικά!!!. Θέλουν να πουν, λοιπόν, ότι δεν χρησιμοποιούν τα σύμβολά τους. Και εγώ αποφεύγω να τα χρησιμοποιώ. Αλλά για να μάθει ένας τους νόμους των ποσοδεικτών χωρίς τα σύμβολα τους είναι σχεδόν αδύνατον! Και αν ένας δεν γνωρίζει τους νόμους αυτούς (οι οποίοι δεν προκύπτουν πάντοτε από την κοινή λογική) θα κάνει λάθος χωρίς να το καταλάβει!!!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των πραγματικών αριθμών α και β, έτσι ώστε να ισχύει: $|\alpha x+\beta| \le |\beta x+\alpha|$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$|\alpha x+\beta| \le |\beta x+\alpha| \Leftrightarrow |\alpha x+\beta|^2 \le |\beta x+\alpha|^2 \Leftrightarrow (\alpha x+\beta)^2 \le (\beta x+\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2 \le \beta^2x^2+2\alpha\beta x+\alpha^2 \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)x^2 \le \alpha^2-\beta^2 \ (1).$$

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στο να βρούμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των πραγματικών αριθμών α και β, για τις οποίες ισχύει η σχέση (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Αναγκαίες συνθήκες. Έστω ότι η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $\alpha^2-\beta^2>0$, θα είχαμε $x^2 \le 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άτοπο και αν $\alpha^2-\beta^2<0$, θα είχαμε $x^2 \ge 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άτοπο. Άρα, τότε: $\alpha^2-\beta^2=0$ και συνεπώς $|\alpha| = |\beta|$.

β) Ικανές συνθήκες. Έστω ότι $|\alpha|=|\beta|$. Τότε: $\alpha^2-\beta^2=0$ οπότε η σχέση (1) προφανώς ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Άρα, η ζητούμενη αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι: $|\alpha|=|\beta|$.

2) Να λυθεί η εξίσωση: $\big|2x-|2x-1|\big|=-\lambda^2x$ (1) με άγνωστο το $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση. α) Έστω ότι: $\lambda=0$. Τότε: $(1) \Leftrightarrow \big|2x-|2x-1|\big|=0 \Leftrightarrow 2x-|2x-1|=0 \Leftrightarrow |2x-1|=2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (2x-1)^2=(2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x=1/4 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

β) Έστω ότι: $\lambda \ne 0$. Τότε: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ \big|2x-|2x-1|\big|=-\lambda^2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ |2x+2x-1|=-\lambda^2x \end{cases}$ (αφού: $2x-1<0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ |4x-1|=-\lambda^2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ -4x+1=-\lambda^2x \end{cases} \text{(αφού: } 4x-1<0 \text{)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ (\lambda^2-4)x=-1 \end{cases} \ (2).$$

Με $\lambda=\pm 2$ το σύστημα (2) προφανώς είναι αδύνατο. Έστω ότι: $\lambda \ne \pm 2$. Τότε:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x=\dfrac{-1}{\lambda^2-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{\lambda^2-4} \le 0 \\ x=\dfrac{-1}{\lambda^2-4} \end{cases} \ (3)$$

Έχουμε (με $\lambda \ne \pm 2$): $\dfrac{-1}{\lambda^2-4} \le 0 \Leftrightarrow \lambda^2-4>0 \Leftrightarrow \lambda^2>4 \Leftrightarrow (\lambda>2 \text{ ή } \lambda<-2)$. Έτσι, το σύστημα (3) με $\lambda>2$ ή $\lambda<-2$ έχει τη λύση: $x=\dfrac{-1}{\lambda^2-4}$, ενώ για τις άλλες τιμές του λ είναι αδύνατο.

Συνοπτικά:

- $\lambda=0: x=\dfrac{1}{4}$
- $\lambda<-2$ ή $\lambda>2: x=\dfrac{-1}{\lambda^2-4}$
- $-2 \le \lambda \le 2, \lambda \ne 0$: Αδύνατη .

3) Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι: $f(x) \ge 2$, για κάθε $x<-2$ και $f(x) \ge 3$, για κάθε $x>3$. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.

Λύση. Η f στο διάστημα $[-2,3]$ είναι συνεχής και επομένως στο διάστημα αυτό έχει ελάχιστη τιμή. Άρα, υπάρχει $x_0 \in [-2,3]$ με $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in [-2,3]$. Έτσι με $x = 0$, έχουμε $f(0) \geq f(x_0)$ και επειδή $f(0) = 1$, έχουμε $1 \geq f(x_0)$.

Για κάθε $x < -2$, έχουμε: $f(x) \geq 2 > 1 \geq f(x_0)$ και άρα $f(x) > f(x_0)$

Για κάθε $x > 3$, έχουμε: $f(x) \geq 3 > 1 \geq f(x_0)$ και άρα $f(x) > f(x_0)$

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $f(x) \geq f(x_0)$.

Συνεπώς, η f έχει ελάχιστη τιμή (στο x_0).

4) Να βρείτε τις συναρτήσεις f, οι οποίες είναι ορισμένες και δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$ και έτσι ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$\left(f'(x)\right)^2 - f^2(x) = 1. \qquad (1)$$

Λύση. Έστω ότι μια συνάρτηση f πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Από την (1), παραγωγίζοντας, έχουμε:

$$2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x)\left[f''(x) - f(x)\right] = 0 \ (2).$$

Έστω ότι για έναν αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(\alpha) = 0$. Τότε, από την (1) με $x = \alpha$ θα έχουμε: $f^2(\alpha) = -1$, άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι: $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι, από την (2), έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x) \Rightarrow \left(f'(x) + f(x)\right)' = f'(x) + f(x) \ (3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = f'(x) + f(x)$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και λόγω της (3), έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = h(x) \Rightarrow e^{-x}h'(x) + \left(e^{-x}\right)' h(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{-x}h(x)\right)' = 0 \Rightarrow e^{-x}h(x) = c (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = ce^x. \qquad (4)$$

Από την (1) με $x = 0$ και επειδή $f'(0) = 1$, βρίσκουμε ότι $f(0) = 0$. Έχουμε λοιπόν: $h(0) = f'(0) + f(0) = 1$. Από την (4) με $x = 0$, βρίσκουμε: $h(0) = c$ και άρα $c = 1$. Έτσι, από την (4), έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = e^x \Rightarrow f'(x) + f(x) = e^x \Rightarrow e^x f'(x) + \left(e^x\right)' f(x) = e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^x f(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \Rightarrow e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c' \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^x + c'e^{-x}. \qquad (5)$$

Από την (5) με $x = 0$ και επειδή $f(0) = 0$ βρίσκουμε ότι: $c' = -\frac{1}{2}$. Έτσι, από την (5) έχουμε:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα η συνάρτηση αυτή πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Ρούλα Σπανδάγου

Στο παρόν τεύχος δημοσιεύονται δύο προτάσεις. Η πρώτη είναι από το περίφημο έργο του μεγάλου μαθηματικού, πατέρα της Γεωμετρίας, **Ευκλείδου** ($4^{ος}$ – $3^{ος}$ π.Χ. αιώνας), "Στοιχεῖα", ένα έργο το οποίο αποτελεί ένα κομψό, αρμονικό σύνολο και είναι διατυπωμένο κατά τρόπο άψογα παιδαγωγικό. Μετά την επινόηση της τυπογραφίας τα "Στοιχεῖα" του **Ευκλείδου** έχουν κάνει τις περισσότερες εκδόσεις μετά την Αγία Γραφή.

Η δεύτερη πρόταση είναι από το έργο του σπουδαίου Έλληνα μαθηματικού, πατέρα του κλάδου των Μαθηματικών "Λογισμός μεταβολών" **Ζηνοδώρου του Παιανιέως** ($2^{ος}$ π.Χ. αιώνας) "Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων". Το έργο αυτό έχει χαθεί. Σώζονται μόνο μερικές προτάσεις από τρεις διαφορετικές πηγές.

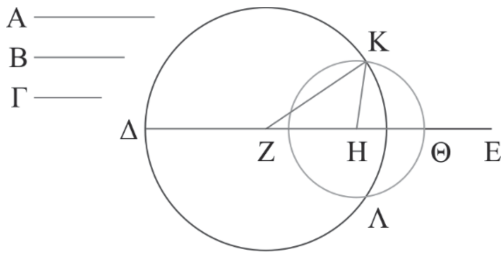
Η πρόταση κβ′ του α′ βιβλίου των "Στοιχείων" του Ευκλείδου

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].

Ποίησις

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Απόδοση στη Νεοελληνική

Από τρία ευθύγραμμα τμήματα που είναι ίσα με τρία δοσμένα [ευθύγραμμα τμήματα] να κατασκευαστεί τρίγωνο. Πρέπει δε τα δύο ευθύγραμμα τμήματα να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του τρίτου, με όποιον τρόπο κι αν ληφθούν [αφού σε κάθε τρίγωνο οι δύο πλευρές έχουν άθροισμα μεγαλύτερο της τρίτης, με όποιον τρόπο κι αν ληφθούν].

Κατασκευή

Έστω τα τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα Α, Β, Γ από τα οποία τα δύο έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του τρίτου με όποιον τρόπο κι αν ληφθούν, δηλαδή $Α+Β>Γ$, $Α+Γ>Β$ και ακόμα $B+\Gamma > A$. Πρέπει λοιπόν με ευθύγραμμα τμήματα ίσα προς τα Α, Β, Γ να κατασκευαστεί τρίγωνο.

Θεωρούμε την ημιευθεία ΔΕ με αρχή το Δ που προεκτείνεται επ' άπειρο προς το Ε και παίρνουμε σ' αυτή τα τμήματα $\Delta Z = A$, $ZH = B$ και $H\Theta = \Gamma$. Με κέντρο μεν το Ζ, ακτίνα δε την ΖΔ γράφουμε τον κύκλο ΔΚΛ. Πάλι με κέντρο μεν το Η, ακτίνα δε την ΗΘ γράφουμε τον κύκλο ΚΛΘ και φέρνουμε τις ΚΖ, ΚΗ. Λέω ότι από τρία ευθύγραμμα τμήματα (τα ΔΖ, ΖΗ, ΗΘ) ίσα με τα Α, Β, Γ κατασκευάζεται το τρίγωνο ΚΖΗ.

Διότι, επειδή το σημείο Ζ είναι κέντρο του κύκλου ΔΚΛ, είναι $Z\Delta = ZK$. Αλλά $Z\Delta = A$. Επομένως $KZ = A$. Πάλι, επειδή το σημείο Η είναι κέντρο του κύκλου ΛΚΘ, είναι $H\Theta = HK$. Αλλά $H\Theta = \Gamma$. Άρα $KH = \Gamma$. Είναι δε και $ZH = B$. Οπότε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ είναι ίσα με τα τρία τμήματα Α, Β, Γ.

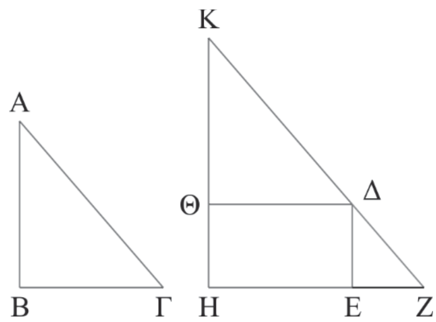
Άρα από τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, που είναι ίσα με τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, τα Α, Β, Γ (αντίστοιχα), κατασκευάζεται το τρίγωνο ΚΖΗ· πράγμα το οποίο έπρεπε να κάνουμε[1].

Η πρόταση 6 του έργου "Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων" του Ζηνοδώρου

Πάλιν ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅμοια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΓ ΔΖ ὡς μιᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΒΓ ΕΖ ὡς μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ ΔΕ ὡς μιᾶς.

Δεῖξις

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Η, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΕΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η παράλληλος τῇ ΔΕ ἀχθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΔΖ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ, διὰ δὲ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΖΗ ἡ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΘ τῇ ΗΕ ἐν παραλληλογράμμῳ, τουτέστιν τῇ ΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΚΔΘ γωνία τῇ Ζ ἴση, τουτέστιν τῇ Γ, καὶ ὀρθὴ ἡ Θ τῇ Β, καὶ λοιπὴ ἡ Κ τῇ Α, ἰσογώνια ἄρα τὰ ΚΘΔ ΑΒΓ τρίγωνα καὶ ἴσα· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΖ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΚΗΖ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΓ ΔΖ ὡς μιᾶς τῷ τε ἀπὸ ΑΒ ΔΕ ὡς μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ ΒΓ ΕΖ ὡς μιᾶς.



Απόδοση στη νεοελληνική

Πάλι έστω ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα τα οποία έχουν ίσες τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{Z}$. Λέω ότι $(A\Gamma+\Delta Z)^2 = (B\Gamma+EZ)^2 + (AB+\Delta E)^2$.

Απόδειξη

Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ μέχρι το σημείο Η και παίρνουμε (στην προέκταση) το τμήμα $EH = B\Gamma$. Από το σημείο Η φέρνουμε παράλληλη προς την ΔΕ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΖ στο Κ και από το Δ την $\Delta\Theta // ZH$. Επειδή λοιπόν $\Delta\Theta = HE$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, δηλαδή $\Delta\Theta = B\Gamma$, $K\hat{\Delta}\Theta = \hat{Z} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Theta} = \hat{B} = 1^{\llcorner}$, οπότε και η τρίτη γωνία η $\hat{K} = \hat{A}$, έπεται ότι τα τρίγωνα ΚΘΔ και ΑΒΓ είναι ισογώνια και ίσα. Άρα $KZ^2 = KH^2 + HZ^2$. Επομένως:

$$(A\Gamma+\Delta Z)^2 = (AB+\Delta E)^2 + (B\Gamma+EZ)^2.$$

---

[1] Ο **Ευκλείδης** δεν αναφέρει ότι οι δύο κύκλοι ΔΚΛ και ΚΛΘ τέμνονται, διότι αυτό προκύπτει από την ίδια την κατασκευή.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των Μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **Αντωνόπουλος Νίκος –Λουριδάς Γιάννης – Τριάντος Γιώργος**

ΑΣΚΗΣΗ 321. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Αν Α είναι σημείο της C_f με $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ και Β σημείο της C_g με $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+3$, τότε να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση (ΑΒ).

(Γιάννης Ηλιόπουλος – Καλαμάτα).

ΛΥΣΗ (Γιάννης Ηλιόπουλος – Καλαμάτα)

Αν $A(x_1, f(x_1))$ σημείο της C_f, τότε η εφαπτομένη της στο Α έχει εξίσωση

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$$

και η εξίσωση της κάθετης είναι η

$$y-f(x_1)=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1)\Rightarrow y-\frac{x_1^2}{4}=-\frac{2}{x_1}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{2}{x_1}x+2-\frac{x_1^2}{4}$$

Αν $B(x_2, f(x_2))$ σημείο της C_g, τότε η κάθετη στην εφαπτομένη της στο Β έχει εξίσωση

$$y-g(x_2)=-\frac{1}{g'(x_2)}(x-x_2)\Rightarrow y-\frac{x_2^2}{2}-3=-\frac{1}{x_2}(x-x_2)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{x_2}x+4+\frac{x_2^2}{2}$$

Το ζητούμενο ελάχιστο προκύπτει όταν οι δυο κάθετες ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν:

$$-\frac{2}{x_1}=-\frac{1}{x_2} \quad \text{και} \quad 2-\frac{x_1^2}{4}=4+\frac{x_2^2}{2}$$

δηλαδή μόνο όταν $x_1=x_2$ και

$$-\frac{4x_2^2}{4}=2+\frac{x_2^2}{2}\Leftrightarrow \frac{x_2^2}{2}=2\Leftrightarrow x_2^2=4\Leftrightarrow x_2=\pm 2$$

οπότε τα σημεία με θετικές τετμημένες είναι τα $A(4, 4)$ και $B(2, 5)$.

Η ελάχιστη απόσταση είναι ίση με

$$(AB)=\sqrt{(4-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{5}\,.$$

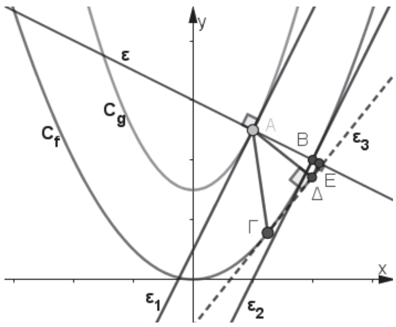
Το ίδιο ελάχιστο προκύπτει και για τα σημεία με αρνητικές τετμημένες που είναι τα $A'(-4, 4)$ και $B'(-2, 5)$

Σημείωση Σύνταξης

Στο παρακάτω σχήμα ε_2 είναι η εφαπτομένη της C_f στο Β και ε_3 η εφαπτομένη της C_f στο Γ.

Ισχύει $\quad (A\Gamma)\geq(A\Delta)\geq(AE)\geq(AB)$

όπου $A\Delta\perp\varepsilon_3$, $\Delta E\perp\varepsilon$ δηλαδή $(A\Gamma)\geq(AB)$



Το ίσο ισχύει μόνο όταν το Γ ταυτιστεί με το Β, δηλαδή η ευθεία ΑΓ ταυτιστεί με την ευθεία ΑΒ που είναι η κοινή κάθετος των εφαπτομένων των C_g, C_f στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

Λύσεις έστειλαν επίσης οι:

Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Θ. Χωματάς- Αθήνα, Σπύρος Βασιλόπουλος – Πύργος, Γιώργος Δεληστάθης – Κ. Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 322. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Αν $\alpha,\beta>0$ να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης: $\dfrac{|2\alpha-\beta+2\alpha(\beta-\alpha)|+|\beta+2\alpha-\alpha(\beta+4\alpha)|}{\sqrt{4\alpha^2+\beta^2}}$

(Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

ΛΥΣΗ (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

Θεωρούμε το σημείο $A(1, 1)$ και τις ευθείες

$$\varepsilon_1: 2\alpha x-\beta y+2\alpha(\beta-\alpha)=0 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: \beta x+2\alpha y-\alpha(\beta+4\alpha)=0$$

Η παράσταση εκφράζει το άθροισμα d_1+d_2, όπου d_1, d_2 οι αποστάσεις του σημείου $A(1, 1)$ από τις ευθείες ε_1, ε_2 αντίστοιχα.

Αρκεί, επομένως να βρούμε το ελάχιστο του d_1+d_2

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους και τέμνονται στο σημείο $B(\alpha, 2\alpha)$. Έστω φ η γωνία μεταξύ των ευθειών ΑΒ και ε_2. Τότε $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και

$$d_1 + d_2 = (AB)(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi) = \sqrt{2}(AB)\eta\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \geq (AB), (1)$$

Είναι:

$$(AB) = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 6\alpha + 2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\alpha = \frac{3}{5}$.

Όταν επιπλέον είναι και $\beta = \frac{3}{5}$, τότε η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση

$$x + 2y - 3 = 0$$

και διέρχεται από το Α. Τότε όμως η γωνία φ είναι η μηδενική οπότε η (1) καθίσταται ισότητα.

Τελικά, η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}}{5}$ και επιτυγχάνεται όταν $\alpha = \beta = \frac{3}{5}$

ΑΣΚΗΣΗ 323. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\left(\frac{R}{E}\right)^2 \geq 2\frac{\rho}{\upsilon_\alpha}\left(\frac{1}{\upsilon_\beta^2} + \frac{1}{\upsilon_\gamma^2}\right)$$

όπου $R, E, \rho, \upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, το εμβαδόν , η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και τα τρία ύψη του τριγώνου αντιστοίχως.

(Γιώργος Νικητάκης – Σητεία).

ΛΥΣΗ (Γιώργος Νικητάκης – Σητεία)

Είναι:

$$\left(\frac{R}{E}\right)^2 \geq 2\frac{\rho}{\upsilon_\alpha}\left(\frac{1}{\upsilon_\beta^2} + \frac{1}{\upsilon_\gamma^2}\right) \Leftrightarrow \frac{R^2}{E^2} \geq 2\frac{\rho}{\upsilon_\alpha}\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{4E^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow R^2 \geq \frac{\rho}{\upsilon_\alpha}\frac{\beta^2+\gamma^2}{2} \Leftrightarrow R \geq \frac{\rho(\beta^2+\gamma^2)}{2R\upsilon_\alpha} \Leftrightarrow \frac{R}{\rho} \geq \frac{\beta^2+\gamma^2}{2R\upsilon_\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{\rho} \geq \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{R}{\rho} \geq \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}, \ (1)$$

αφού $\frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{\alpha\upsilon_\alpha}{2} \Rightarrow 2R\upsilon_\alpha = \beta\gamma$

Είναι γνωστό ότι αν οι αριθμοί α, β, γ παριστάνουν μήκη πλευρών τριγώνου, τότε υπάρχουν θετικοί αριθμοί x, y, z ώστε $\alpha = x+y, \beta = y+z, \gamma = z+x$

Τότε $$\frac{R}{\rho} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz}$$

οπότε η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz} \geq \frac{x+z}{x+y} + \frac{x+y}{x+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{4xyz} \geq \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2}, \quad (2)$$

Η (2) όμως ισχύει, αφού από την προφανή $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \leq \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} = \frac{y+z}{4xyz}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = y = z$ δηλαδή μόνο όταν $\alpha = \beta = \gamma$

Σημείωση Σύνταξης:

Αποδεικνύεται ότι αν οι αριθμοί α, β, γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, τότε υπάρχουν θετικοί αριθμοί x, y, z ώστε να ισχύουν

$$\alpha = y+z, \beta = z+x, \gamma = x+y$$

(δυϊκος μετασχηματισμός) και αντιστρόφως.

(Δ. Κοντογιάννη: ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ)

Μέσω του μετασχηματισμού αυτού, που στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως Ravi Substitution παίρνουμε:

$$\tau = x+y+z, \ \tau-\alpha = x, \ \tau-\beta = y, \ \tau-\gamma = z$$

Επίσης, ο τύπος του Ήρωνα γράφεται

$$E = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Τέλος,

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \quad \text{και} \quad R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

Οπότε $$\frac{R}{\rho} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz}$$

Λύσεις έστειλαν επίσης οι: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος , Δήμος Παπαδόπουλος – Άγρα, Έδεσσα

ΑΣΚΗΣΗ 324. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Να λυθεί το σύστημα: $(\Sigma)\begin{cases} x^2+y^2+z^2-xz=0 \\ yz = 2\sqrt{3} \end{cases}$

(Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

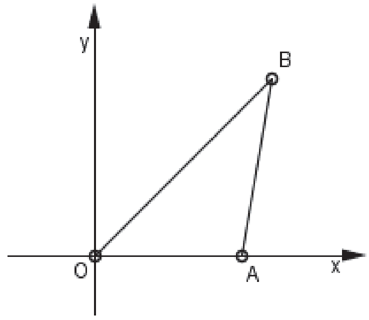
ΛΥΣΗ (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

Είναι φανερό ότι οι αριθμοί y, z είναι ομόσημοι.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε τα σημεία $A(z, 0)$ και $B(x, y)$.

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται ισοδύναμα:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xz=12$$
$$\Leftrightarrow z^2+x^2+y^2+(x-z)^2+y^2=12$$
$$\Leftrightarrow (OA)^2+(OB)^2+(AB)^2=12$$



Η δεύτερη εξίσωση σημαίνει ότι για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ ισχύει $(AOB)=\sqrt{3}$

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ όμως αποδεικνύεται ότι ισχύει $\quad (AB\Gamma)\leq\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{12\sqrt{3}}$, (1)

Επιπλέον, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $(\alpha+\beta+\gamma)^2\leq 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

Από την (1) έχουμε:

$$\sqrt{3}=(AOB)\leq\frac{((OA)+(OB)+(AB))^2}{12\sqrt{3}}\leq\frac{3[(OA)^2+(OB)^2+(AB)^2]}{12\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Επομένως, όλες οι παραπάνω ανισοϊσότητες ισχύουν ως ισότητες, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο. Έχουμε λοιπόν:

$$(OA)=(OB)=(AB) \text{ ή } (OA)^2=(OB)^2=(AB)^2$$

Άρα, $x^2=x^2+y^2=(x-z)^2+y^2$

απ' όπου προκύπτει ότι $x=\dfrac{z}{2}$ και $y=\dfrac{\sqrt{3}z}{2}$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι

$$(x, y, z)=(1, \sqrt{3}, 2) \text{ ή } (x, y, z)=(-1, -\sqrt{3}, -2)$$

Σημείωση σύνταξης

Από την ανισότητα Αριθμητικού – Γεωμετρικού μέσου προκύπτει ότι σε οποιοδήποτε τρίγωνο, έχουμε

$$\left(\frac{\tau}{3}\right)^3\geq\left(\frac{\tau-\alpha+\tau-\beta+\tau-\gamma}{3}\right)^3\geq(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$$

$$\Rightarrow \tau\left(\frac{\tau}{3}\right)^2\geq\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$$

και σε συνδυασμό με τον τύπο του Ήρωνα

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\tau^2\geq 3\sqrt{3}E\Rightarrow E\leq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{12\sqrt{3}}$$

Λύση έστειλε επίσης:

Γιώργος Δεληστάθης – Κ. Πατήσια

ΑΣΚΗΣΗ 325. (ΤΕΥΧΟΣ 109)

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $3\leq\dfrac{\mu_\alpha}{\upsilon_\alpha}+\dfrac{\mu_\beta}{\upsilon_\beta}+\dfrac{\mu_\gamma}{\upsilon_\gamma}\leq\dfrac{4R+\rho}{3\rho}$

όπου $\mu_\alpha,\mu_\beta,\mu_\gamma$ οι διάμεσοι , $\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma$ τα ύψη , R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(Γιώργος Νικητάκης – Σητεία)

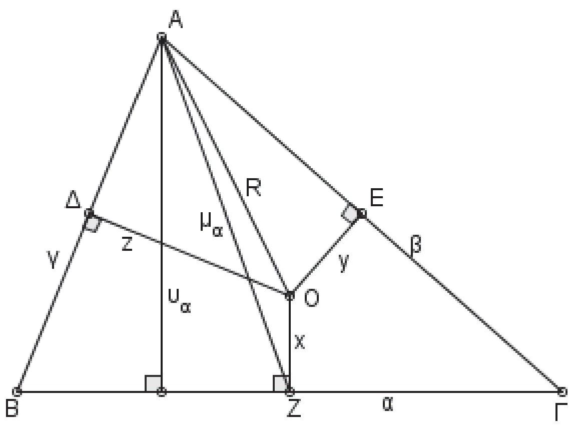
ΛΥΣΗ (Γιώργος Αποστολόπουλος - Μεσολόγγι)

Η αριστερή ανισότητα προκύπτει άμεσα, αφού σε οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\mu_\alpha\geq\upsilon_\alpha,\ \mu_\beta\geq\upsilon_\beta \text{ και } \mu_\beta\geq\upsilon_\beta$$

Για την δεξιά ανισότητα, έστω Ο το περίκεντρο του τριγώνου και x, y, z οι αποστάσεις του από τις πλευρές α, β, γ αντίστοιχα.

Τότε έχουμε: $\mu_\alpha\leq R+x$, $\mu_\beta\leq R+y$ και $\mu_\gamma\leq R+z$



οπότε

$$\frac{\mu_\alpha}{\upsilon_\alpha}+\frac{\mu_\beta}{\upsilon_\beta}+\frac{\mu_\gamma}{\upsilon_\gamma}\leq R\left(\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}\right)+\frac{x}{\upsilon_\alpha}+\frac{y}{\upsilon_\beta}+\frac{z}{\upsilon_\gamma}$$

$$=R\left(\frac{\alpha}{2E}+\frac{\beta}{2E}+\frac{\gamma}{2E}\right)+\frac{\frac{\alpha x}{2}}{\frac{\alpha\upsilon_\alpha}{2}}+\frac{\frac{\beta y}{2}}{\frac{\beta\upsilon_\beta}{2}}+\frac{\frac{\gamma z}{2}}{\frac{\gamma\upsilon_\gamma}{2}}$$

$$=R\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2E}+\frac{\frac{\alpha x}{2}+\frac{\beta y}{2}+\frac{\gamma z}{2}}{E}=R\frac{\tau}{E}+\frac{E}{E}$$

$$=R\frac{\tau}{\tau\rho}+1=\frac{R}{\rho}+1$$

όπου E το εμβαδόν του τριγώνου και

$$2\tau=\alpha+\beta+\gamma$$

η περίμετρός του.

Αλλά, από την ανισότητα του Euler ισχύει

$$R\geq 2\rho\Rightarrow 4R-3R\geq 3\rho-\rho\Rightarrow 4R+\rho\geq 3R+3\rho$$

δηλαδή $\qquad \dfrac{R}{\rho}+1\leq\dfrac{4R+\rho}{3\rho}$

Επομένως, $\qquad \dfrac{\mu_\alpha}{\upsilon_\alpha}+\dfrac{\mu_\beta}{\upsilon_\beta}+\dfrac{\mu_\gamma}{\upsilon_\gamma}\leq\dfrac{4R+\rho}{3\rho}$

που είναι το ζητούμενο.

Η ισότητα και στις δυο ανισοϊσότητες ισχύει μόνο όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Λύσεις έστειλαν επίσης οι:

Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι, Ιωάννης Ανδρής- Αθήνα , Δήμος Παπαδόπουλος – Άγρα, Έδεσσα, Γιώργος Δεληστάθης – Κ. Πατήσια, Γιάνναρος Διονύσης- Πύργος.

ΑΣΚΗΣΗ 326. (ΤΕΥΧΟΣ 109)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν είναι $B\hat{A}M=\hat{\Gamma}$ και $M\hat{A}\Gamma=\dfrac{\pi}{12}$ τότε να δειχθεί ότι: $\hat{B}-\hat{\Gamma}\geq\dfrac{5\pi}{12}$.

(Γιώργος Αποστολόπουλος - Μεσολόγγι).

ΛΥΣΗ (Δήμος Παπαδόπουλος – Άγρα, Έδεσσα)

Στην προέκταση της διαμέσου ΑΜ παίρνουμε τμήμα

$M\Delta=AM$ και φέρνουμε το τμήμα ΓΔ. Τότε, από την προφανή ισότητα των τριγώνων ΑΜΒ και ΔΓΜ έχουμε $\hat{A}_1=\hat{\Delta}_1$ και επειδή $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΓΔ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{AM}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma}{A\Delta}\Rightarrow\frac{\mu_\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{2\mu_\alpha}\Rightarrow\beta^2=2\mu_\alpha^2,\quad(1)$$

Θεωρούμε τμήμα ΜΕ κάθετο και ίσο στο ΑΜ και φέρνουμε τα ΑΕ, ΓΕ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΕ έχουμε:

$$AE^2=AM^2+ME^2\Rightarrow AE^2=2\mu_\alpha^2,\ (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\beta^2=AE^2\Rightarrow\beta=AE$$

Αλλά,

$$E\hat{A}\Gamma=E\hat{A}M+M\hat{A}\Gamma=45^o+15^o=60^o$$

οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο.

Τα τρίγωνα ΑΜΓ, ΕΜΓ έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, συνεπώς είναι ίσα.

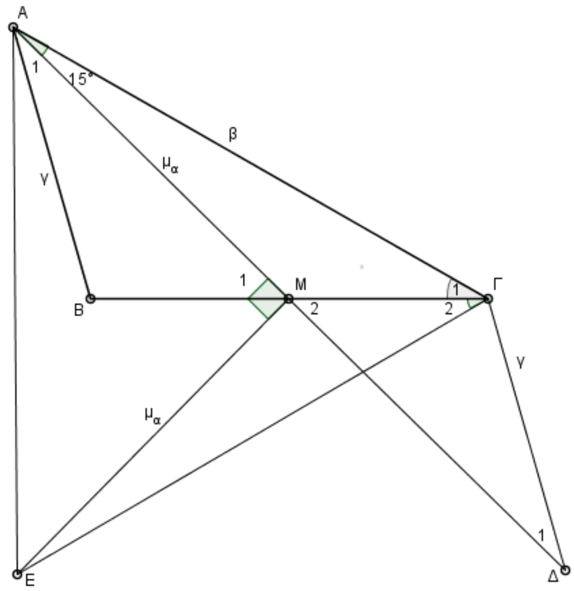
Έχουμε λοιπόν: $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ και επειδή $\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2=60^o$ βρίσκουμε ότι $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2=15^o$.

Επομένως, στο τρίγωνο ΑΒΓ έχει

$\hat{\Gamma}=30^o$, $\hat{A}=\hat{A}_1+15^o=\hat{\Gamma}_1+15^o=30^o+15^o=45^o$

και $\hat{B}=180^o-(\hat{A}+\hat{\Gamma})=105^o$, οπότε

$$\hat{B}-\hat{\Gamma}=105^o-30^o=75^o$$



Σημείωση Σύνταξης

Στην παραπάνω λύση, για λόγους ευκολίας ο λύτης έχει μετατρέψει τα ακτίνια στις αντίστοιχες μοίρες.

Επίσης, ενώ ο συνάδελφος που είχε προτείνει το θέμα είχε καταλήξει σε ένα πιο «χαλαρό» συμπέρασμα (ανισοϊσότητα) μέσω της (τριγωνομετρικής) λύσης που είχε παραθέσει, τελικά στο συμπέρασμα προκύπτει ισότητα.

Μια τριγωνομετρική λύση που οδηγεί στο παραπάνω συμπέρασμα είναι η ακόλουθη:

Αν ονομάσουμε ω καθεμιά από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{M}_1$ τότε, από την προφανή ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒΜ έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{BM}{AB}\Rightarrow AB^2=2BM^2\Rightarrow AB=\sqrt{2}BM$$

οπότε από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΜ, αν συμβολίσουμε με R την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου, έχουμε:

$$2R\eta\mu(\omega+15^o)=2\sqrt{2}R\eta\mu\omega$$

$$\Rightarrow \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu15^o+\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu15^o=\sqrt{2}\eta\mu\omega$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu15^o+\sigma\varphi\omega\eta\mu15^o=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sigma\varphi\omega=\frac{\sqrt{2}-\sigma\upsilon\nu15^o}{\eta\mu15^o}\ ,\ (1)$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu15^o=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad \text{και}\quad \eta\mu15^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$\sigma\varphi\omega=\frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\sqrt{3}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\omega=30^o$. Άρα για τις γωνίες του τριγώνου έχουμε:

$$\hat{\Gamma}=30^o,\ \hat{A}=30^o+15^o=45^o\ \text{και}\ \hat{B}=105^o$$

οπότε

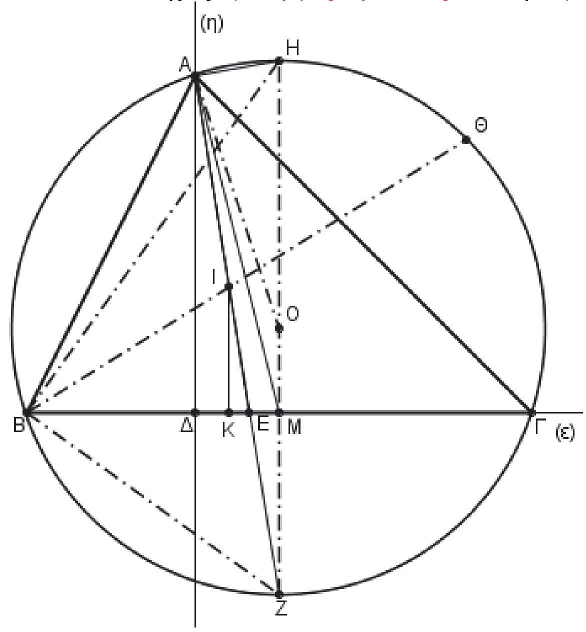
$$\hat{B}-\hat{\Gamma}=105^o-30^o=75^o$$

Τέλος, σε τρίγωνο ισογώνιο με το ΑΒΓ θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η διάμεσος ΑΜ χωρίζει τη γωνία Α σε δυο άλλες, από τις οποίες η μια είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση έστειλε επίσης ο Γιάνναρος Διονύσης-Πύργος.

ΑΣΚΗΣΗ 327. (ΤΕΥΧΟΣ 109)

Σε ευθεία (ε) δίνονται τρία σημεία Δ,Ε,Ζ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων των εγγεγραμμένων στα τρίγωνα ΑΒΓ στα οποία η πλευρά ΒΓ ανήκει στην ευθεία (ε) και τα ίχνη των υψών, των διχοτόμων και των διαμέσων που άγονται από την κορυφή Α συμπίπτουν με τα σημεία Δ,Ε,Ζ αντιστοίχως. (Γιώργος Τριάντος – Αθήνα)



ΛΥΣΗ (Δήμος Παπαδόπουλος – Άγρα, Έδεσσα)

Έστω ΑΔ το ύψος, ΑΕ η διχοτόμος ΑΜ η διάμεσος και Ι, Ο το έγκεντρο και το περίκεντρο του τριγώνου.

Η ΟΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία Η, Ζ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε) που περιέχει την πλευρά ΒΓ. Επιπλέον τα σημεία Ζ, Θ είναι τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{B\Gamma}, \overset{\frown}{\Gamma A}$ αντίστοιχα.

Το τρίγωνο ΖΒΙ είναι ισοσκελές, αφού

$$I\hat{B}Z=\frac{\overset{\frown}{Z\Theta}}{2}=\frac{\overset{\frown}{Z\Gamma}+\overset{\frown}{\Gamma\Theta}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ZB}+\overset{\frown}{\Theta A}}{2}=B\hat{I}Z$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΗ έχουμε:

$$ZB^2=ZM\cdot ZH\overset{ZB=ZI}{\Rightarrow}ZI^2=ZM\cdot ZH\ ,\quad (1)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΗΜΕ έχουμε:

$$ZE\cdot ZA=ZM\cdot ZH\ ,\quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$ZI^2=ZE\cdot ZA\ ,\quad (3)$$

Αν $IK\perp(\varepsilon)$ τότε από το Θ. Θαλή έχουμε:

$$\frac{ZI}{KM}=\frac{ZE}{EM}=\frac{ZA}{\Delta M}=\lambda$$

οπότε η (3) γίνεται:

οπότε

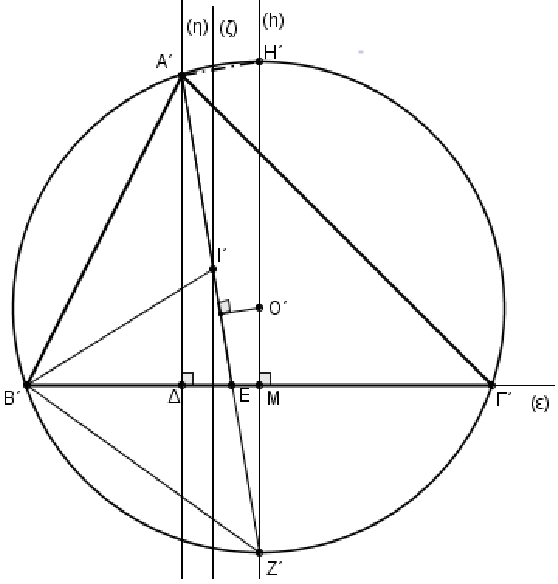
$$ZI=\lambda\cdot KM,\ ZE=\lambda\cdot EM,\ ZA=\lambda\cdot \Delta M$$

Έτσι, η (3) γράφεται

$$\lambda^2\cdot KM^2=\lambda\cdot EM\cdot\lambda\cdot\Delta M\Rightarrow KM^2=EM\cdot\Delta M$$

οπότε το τμήμα ΚΜ είναι γνωστό, ως μέσο ανάλογο των γνωστών τμημάτων ΕΜ και ΔΜ. Συνεπώς το Κ είναι γνωστό σημείο.
Επομένως το Ι ανήκει στη γνωστή ευθεία (ζ), που είναι κάθετη στην (ε) στο σταθερό σημείο Κ.

Αντίστροφο



Έστω τώρα τυχαίο σημείο $Ι' \in (ζ)$. Φέρνουμε την ευθεία ΕΙ΄ που τέμνει την (η) στο Α΄ και την κάθετη ευθεία (h) στην (ε) στο Μ, έστω Ζ΄. Η μεσοκάθετη του Α΄Ζ΄ τέμνει την (η) στο Ο΄. Με κέντρο Ο΄ και ακτίνα ΟΆ΄ γράφουμε κύκλο (C) που τέμνει την (ε) στα σημεία Β΄, Γ΄ και την (h) στο Η΄. Θα αποδείξουμε ότι το Ι΄ είναι το έγκεντρο του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄. Για το Κ ισχύει:

$$ΚΜ^2 = ΕΜ \cdot ΔΜ$$

Αυτή με τη βοήθεια του Θ. Θαλή γίνεται

$$Ζ'Ι'^2 = Ζ'Ε \cdot Ζ'Α', \quad (4)$$

Αλλά, $Ζ'Β'^2 = Ζ'Μ \cdot ΖΗ' = Ζ'Ε \cdot Ζ'Α', \quad (5)$

Από τις (4) και (5) έχουμε:

$$Ζ'Ι^2 = Ζ'Β'^2 \Rightarrow Ζ'Ι' = Ζ'Β'$$

οπότε το τρίγωνο Ζ΄Β΄Ι΄ είναι ισοσκελές. Επομένως, το Ι΄ είναι το έγκεντρο του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄.

Συμπέρασμα: Ο ζητούμενος γ. τ. είναι η ευθεία (ζ)

Λύσεις έστειλαν επίσης οι: Γιώργος Αποστολόπουλος - Μεσολόγγι

Προτεινόμενα Θέματα

341. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{(β+γ)^2}{4βγ} \le \frac{τ^2}{3ρ(4R+ρ)}$$

όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου , ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο)

342. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(Γ = 90^o)$ με $\hat{Β} = 30^o$. Ένα σημείο Ρ εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ έχει την ιδιότητα

$$ΡΑ = \sqrt{3},\ ΡΒ = 5 \text{ και } ΡΓ = 2$$

Να υπολογίσετε τις πλευρές του ΑΒΓ.

(Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι)

343. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και δυο σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ} = \frac{μ}{ν}$$

όπου μ, ν θετικοί ακέραιοι. ΑΝ Μ είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ για το οποίο ισχύει $\frac{ΔΜ}{ΔΕ} = \frac{ν}{μ}$, να αποδείξετε ότι $(ΜΒΓ) = 2(ΑΔΕ)$

(Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη)

344. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{α}{α+γ} + \frac{β}{γ+α} + \frac{γ}{α+β} \le \frac{1}{2} + \left(\frac{R}{2ρ}\right)^2$$

όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου , ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου

(Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι)

345. Έστω α, β, γ, δ ακέραιοι αριθμοί με $αδ > 0$. Αν οι εξισώσεις

$$αx^2 + βx + γ = 0,\ αx^2 + βx + (γ+δ) = 0 \text{ και}$$
$$αx^2 + βx + (γ+2δ) = 0$$

έχουν ρητές ρίζες, να αποδείξετε ότι υπάρχει πυθαγόρειο τρίγωνο (ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές ακέραιους αριθμούς) για το εμβαδόν Ε του οποίου ισχύει $Ε = αδ$.

(Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον)

Τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ μας ΔΙΑΣΚΕΔΑΖΟΥΝ

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Αριθμητικό Ανέκδοτο

Σε μια εκδρομή του σχολείου βλέπει ο δάσκαλος να πετούν πολλά πουλιά.
Ρωτάει τους μαθητές του μήπως κάποιος μπορεί να τα μετρήσει;
Ο μικρός Κωστάκης, που πάντα παίρνει το λόγο, αμέσως σηκώνει το χέρι του, κύριε, κύριε.

- Μπα … τα μέτρησες κιόλας;
- Ναι κύριε, είναι 504.
- 504!!! Πως τα μέτρησες;
- Να κύριε … 4 πηγαίνουν μπροστά και καμιά πεντακοσαριά ακολουθούν…


Το Λύκειο του Αριστοτέλη, στην οδό Ρηγίλλης


Η Ακαδημία του Πλάτωνα στον Κολωνό

Η Μαθηματική Επιστήμη είναι μαγεία, δεν ισχύει το αντίστροφο.

«Ενόσω η ανθρωπότητα εξελίσσεται,
ο Ηράκλειτος θα είναι πάντα επίκαιρος»
Νίτσε

Από τον Αριστοτέλη στον Ηράκλειτο και από τους δυαδικούς υπολογιστές στους κβαντικούς.

Η επιρροή των δύο αυτών φιλοσόφων υπήρξε καταλυτική ως προς τις εξελίξεις στον τομέα των επιστημών και της ψηφιακής τεχνολογίας. Είναι γενικά παραδεκτό ότι τα **υπολογιστικά μαθηματικά** και οι δυαδικοί υπολογιστές βασίστηκαν στη λογική του Αριστοτέλη, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της αρχαίας Ελληνικής γλώσσας. Σήμερα όμως μας εκπλήσσει η διορατική και ανατρεπτική σκέψη του **Ηράκλειτου,** που επιβεβαιώνεται, από την κβαντική θεωρία, τα σύγχρονα μαθηματικά και από τις διαφαινόμενες, επαναστατικές εξελίξεις στον τομέα των κβαντικών υπολογιστών.

«Το σώμα μας έχει τη δυνατότητα να αυτοθεραπεύεται.
Ύψιστη σημασία έχουν: Η διατροφή, η κίνηση, το περιβάλλον,
ο τρόπος ζωής, και ο τρόπος σκέψης»

Ιπποκράτης

Οι ημέρες των αριθμών

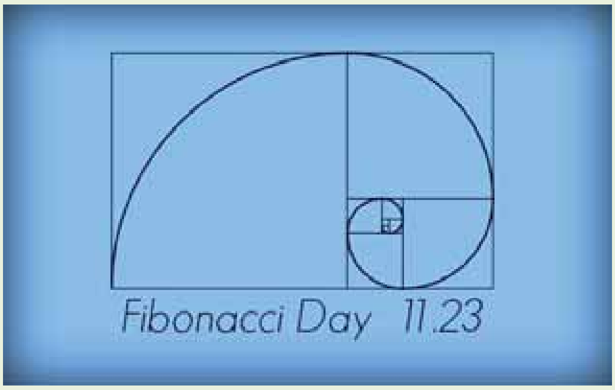
Όλοι γνωρίζουμε ότι μέσα στο χρόνο έχουν καθιερωθεί διάφορες γιορτές αλλά και ημέρες αφιερωμένες στο περιβάλλον, τη γυναίκα, τη μητέρα, τον πατέρα, κλπ .

Οι μαθηματικοί έχουν ορίσει και για τους αριθμούς τέτοιες ημέρες.

- **Ημέρα και ώρα του αριθμού π=3,14159 …,** είναι η 14 Μάρτη - 14/3, δηλαδή σε αντίστροφη ανάγνωση, ενώ διεθνώς διαβάζεται 3/14 και ώρα 1:59΄, την ίδια μέρα γεννήθηκε και ο Αϊνστάιν.
- **Ημέρα προσεγγίσεως του π** είναι στις 22 Ιουλίου (π~22/7) την προσέγγιση αυτή την έδωσε ο Αρχιμήδης.

Η πρώτη εορταστική εκδήλωση έγινε το 1988. Οργανωτής της ήταν ο Αμερικανός φυσικός και καλλιτέχνης **Λάρυ Σω** και έγινε στο μουσείο **Exploratorium** του Σαν Φρανσίσκο, όπου εργαζόταν. Στον εορτασμό εκείνο έγινε παρέλαση του προσωπικού και των επισκεπτών του μουσείου γύρω από έναν κυκλικό χώρο στη συνέχεια έγιναν ομιλίες και τέλος κατανάλωσαν στρογγυλές φρουτόπιτες (η λέξη pie = πίτα είναι στην αγγλική ομόηχη του pi = π).

- Η **23 Νοεμβρίου** είναι ημέρα των αριθμών Fibonacci (11, 23)



Ο **Fibonacci** ήταν ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Μεσαίωνα. Γεννήθηκε στην Πίζα τη δεκαετία του 1170 και το πραγματικό του όνομα ήταν Leonardo Pisano, όμως ο ίδιος αποκαλούσε τον εαυτό του Fibonacci, σύντμηση του Filius Bonacci (υιός του Bonacci), από το όνομα του πατέρα του. Είναι γνωστός για τη συμβολή του στον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό και για τους αριθμούς του.

Το πρόβλημα που μελετούσε και τον οδήγησε μάλλον τυχαία στους αριθμούς του (στον ορισμό της ακολουθίας του), αφορούσε την αναπαραγωγή κουνελιών. Το έθεσε στο ιστορικό βιβλίο του **Liber Abaci** (βιβλίο των υπολογισμών που δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά το 1202).

Οι αριθμοί Fibonacci είναι: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,….. κάθε αριθμός προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων του.

- Ο **χρυσός λόγος** ή αριθμός φ=0,618, που ακόμα δεν έχει οριστεί χαρακτηριστική εορταστική ημέρα, προκύπτει αν διαιρέσουμε έναν αριθμό της ακολουθίας με τον επόμενό του. Ο αριθμός **φ** δεν ήταν άγνωστος στους αρχαίους Έλληνες. Ο Πυθαγόρας είχε πρώτος παρατηρήσει ότι τα φυτά και τα ζώα δεν μεγαλώνουν τυχαία , αλλά με ακριβείς μαθηματικούς κανόνες. Ο **φ** χρησιμοποιήθηκε στην αρχιτεκτονική (Παρθενώνας), στη ζωγραφική (Μόνα Λίζα) με τα γνωστά τέλεια αποτελέσματα και τον συναντάμε σχεδόν παντού στη φύση.

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το σκαλοπάτι

Ο Χρίστος ανεβαίνει πάνω σε ένα σκαλοπάτι ενώ ο Παύλος στέκεται κάτω από αυτό και ο Χρίστος είναι 38 εκ. πιο ψηλά. Όταν ανέβει ο Παύλος στο σκαλοπάτι και ο Χρίστος σταθεί κάτω από αυτό θα είναι 10 εκ. πιο χαμηλά από τον Παύλο. Τι ύψος έχει το σκαλοπάτι;

Τα γενέθλια

Τον Φεβρουάριο του 2016 ρώτησαν οι μαθητές τον καθηγητή των μαθηματικών τι ηλικία έχει και τους απάντησε: «Την 5η Δευτέρα αυτού του μήνα είναι τα γενέθλιά μου, όταν γεννήθηκα ήταν η 5η Δευτέρα του μήνα και από τότε άλλη μια φορά είχα γενέθλια την 5η Δευτέρα του μήνα». Ένας μαθητής βρήκε μετά από λίγο την ηλικία του καθηγητή του, εσείς μπορείτε;

Η μπύρα

Δύο φίλοι ο Κώστας και ο Τάκης πηγαίνουν για μια μπύρα. Ο Τάκης πρότεινε και τελικά συμφώνησαν να παίξουν όλα τα κέρματα που έχουν στην τσέπη τους κορώνα γράμματα και όποιος φέρει τις λιγότερες κορώνες θα κεράσει. Ο Τάκης έχει 4 κέρματα και ο Κώστας 5. Ο Κώστας σκέφτηκε λίγο αλλά τελικά δέχτηκε. *Έκανε λάθος που δέχτηκε ή όχι;*

Το κέρασμα

Ο Μιχάλης στις διακοπές κέρασε τους φίλους του 4 φορές και σημείωσε τα ποτά και τα χρήματα που έδωσε. Επειδή δεν γνωρίζει την αξία κάθε προϊόντος τα τοποθέτησε σε ένα πίνακα όπως φαίνεται πιο κάτω. (Αναψυκτικό, Τσάι, Καφέ, Παγωτό).

Μπορείτε να βρείτε την αξία κάθε προϊόντος;

1η φορά	**Α**	**Τ**	**Π**	**Κ**	**9€**
2η φορά	**Κ**	**Κ**	**Τ**	**Κ**	**9€**
3η φορά	**Κ**	**Κ**	**Τ**	**Τ**	**8€**
4η φορά	**Π**	**Κ**	**Τ**	**Π**	**10€**

Τα εγγόνια

Την πρωτοχρονιά επισκέφτηκαν την κυρία Νίκη τα εγγόνια της. Πάνω στο τραπέζι είχε ένα δίσκο με κουραμπιέδες και μελομακάρονα. Η κυρία Νίκη πρόσφερε σε κάθε παιδί τον ίδιο αριθμό γλυκών, είτε κουραμπιέδες είτε μελομακάρονα είτε και από τα δύο είδη. Ο μικρότερος εγγονός πήρε το 1/8 των κουραμπιέδων και το 1/10 των μελομακάρονων, πόσα εγγόνια έχει η κυρία Νίκη;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 113

Το νησί: Αφού ο πρώτος βάδισε ν ημέρες με 8 χιλ/ημέρα τα 2/3 του περιμετρικού δρόμου που βάδισε είναι 8ν χιλιόμετρα. Ο δεύτερος βάδισε 1+2+3+…+ν χιλ. συνολικά 1/2(ν+1)ν που είναι το 1/3 της διαδρομής. Άρα τα 2/3 της διαδρομής είναι (ν+1)ν=8ν ή ν+1=8 ή ν=7 ημέρες συναντήθηκαν. Τα 2/3 της διαδρομής είναι 7.8=56 και 56:2/3=84 χιλ. είναι όλος ο περιμετρικός δρόμος.

Η παρέα μας: Αν από τους 54 αφαιρέσουμε το Μανώλη, το Νίκο και το Γιώργο οι υπόλοιποι (οι φίλοι με τις μισές γυναίκες τους) ήταν 51 άτομα. Αν χωρίσουμε το 51 σε 3 ομάδες έχουμε 17. Άρα η παρέα του Μανώλη ήταν ο Νίκος, ο Γιώργος και οι 34 φίλοι τους.

Το Ρακόμελο: Στο μεγάλο δοχείο το μείγμα είναι 3+5+7=15 λίτρα. Το μέλι είναι το 3/15=1/5, το ρακί το 5/15=1/3 και το νερό 7/15. Έτσι όταν ξαναγεμίζουμε τα δοχεία το πρώτο έχει 3.1/5=3/5=0,6 λίτρα μέλι, 3.1/3=1 λίτρο ρακί και 3.7/15=21/15=7/5=1,4 λίτρα νερό. Ομοίως υπολογίζουμε και τα άλλα.

Οι αγγελιοφόροι: Αν ο δεύτερος αγγελιοφόρος συναντήσει τον πρώτο σε ν ημέρες τότε ο πρώτος θα έχει κάνει 24ν χιλιόμετρα και ο δεύτερος 36(ν–3) δηλαδή το 24ν=36(ν–3) ή ν=9 όμως 24·9=216 μικρότερο από 220 άρα θα τον προλάβει λίγο έξω από την Σπάρτη.

Το μυρμήγκι: Ναι γιατί την 7η ώρα θα μπει στη φωλιά του.

Τα σύκα: Όλα τα σύκα που είχε μαζέψει η Άννα στο καλάθι της ήταν 80.

Ο Μιχάλης: Τώρα είναι είκοσι ετών. Σε δέκα χρόνια θα είναι 30 τριπλάσια δηλαδή από αυτήν που είχε πριν δέκα χρόνια.

Η φασολιά: Αφού κάθε μέρα το ύψος του διπλασιάζεται και στις 24 μέρες φτάνει στο πάνω μέρος του πασάλου στο μέσο του θα είναι την 23η μέρα.

Ο Θαλής και ο Περικλής: Αν τα πάρει ο Περικλής θα έχουν ίδιο ποσό, αυτό σημαίνει ότι τα χρήματα του Θαλή είναι 20€ περισσότερα από του Περικλή. Αλλά αφού με είκοσι ευρώ ακόμα τα χρήματα του Θαλή γίνονται διπλάσια του Περικλή, σημαίνει ότι ο Περικλής έχει 2·20=40 ευρώ και άρα ο Θαλής θα έχει 60€.

Mundo Maya

Ηλίας Κωνσταντόπουλος

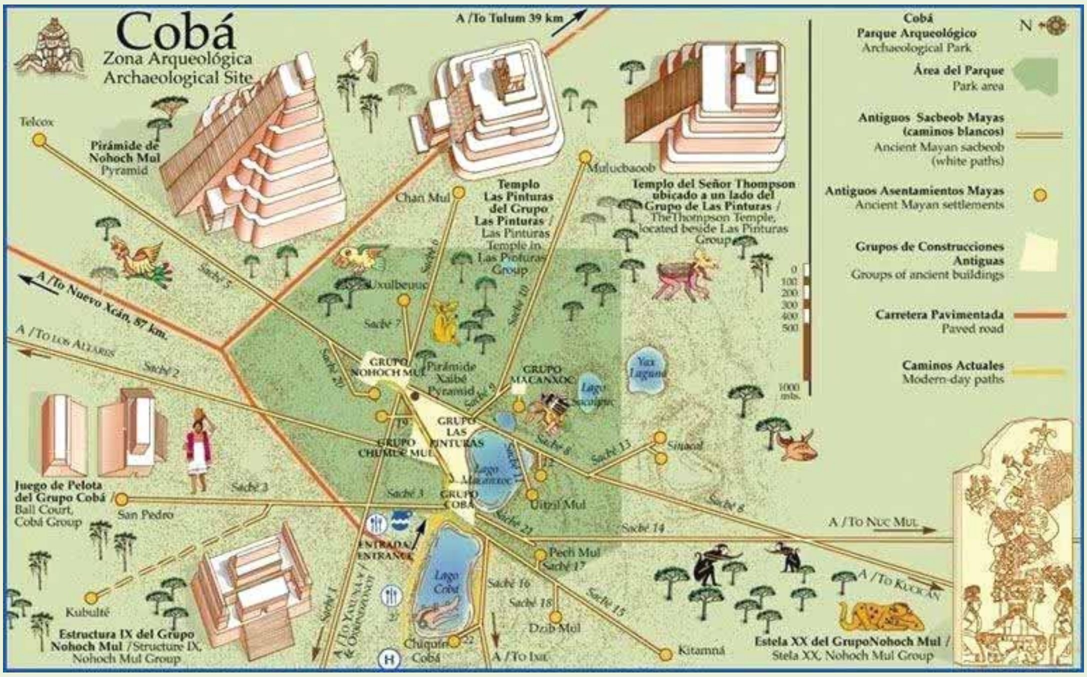
Όσο πλησίαζε η **21η Δεκεμβρίου του 2012**, σε ολόκληρη τη Δύση είχε δημιουργηθεί ένας πανικός από ειδικούς και μη ειδικούς, εξαιτίας της υποτιθέμενης προφητείας **των Μάγιας** περί ολοσχερούς καταστροφής του κόσμου την συγκεκριμένη ημερομηνία.

Σκέφτηκα ότι, αν συνέβαινε στ' αλήθεια κάτι τέτοιο δεν επρόκειτο να γλυτώσω, όπου και αν βρισκόμουν, οπότε τι καλύτερο από να χανόμουν κοντά σε αυτούς που είχαν προβλέψει την καταστροφή;

Ξεκίνησα λοιπόν με προορισμό την Αυτοκρατορία των Μάγιας που στην ακμή της περιελάμβανε το νότιο Μεξικό, την Γουατεμάλα, την Ονδούρα, το Ελ Σαλβαδόρ και το Μπελίς. Διάλεξα την επιβλητική **πρωτεύουσα Τικάλ**, στο βόρειο τμήμα της Γουατεμάλας.

Ποιος γνωρίζει το Τικάλ; Τι είναι και που βρίσκεται;

Από την πόλη Φλόρες, πήρα ένα παμπάλαιο ταξί το πρωί και κατά το μεσημεράκι έφτασα στην είσοδο του χώρου, μετά από μια πολύωρη, αλλά πανέμορφη διαδρομή μέσα σε πυκνή ζούγκλα. Η ζέστη είχε αρχίσει ήδη, έπρεπε να βιαστώ, γιατί είχα μεγάλη διαδρομή να κάνω μέσα στον τεράστιο αρχαιολογικό χώρο, ο οποίος είχε μεν μονοπάτια, αλλά εύκολα μπορούσε κάποιος να χαθεί και να πέσει θύμα κάποιου Ιαγουάρου, όπως με είχε



προειδοποιήσει ο ταξιτζής. Πολλοί μικρόσωμοι πίθηκοι πηδούσαν από δέντρο σε δέντρο και με απειλούσαν με τις φωνές τους.

Λίγο μετά την είσοδο συνάντησα μια τεράστια **Σεϊμπα**, ένα μεγαλειώδες σε ύψος και διάμετρο κορμού δένδρο, το ιερό δέντρο των Μάγιας. Ένοιωσα δέος και μικρός καθώς προσπάθησα να δω την κορυφή της. Βάζω μια φωτογραφία του δένδρου αυτού, με μέτρο σύγκρισης το σώμα μου, για να γίνει κατανοητό το υπέροχο μέγεθός του.

Περπατούσα αρκετές ώρες μέσα στο χώρο. Η πυκνή βλάστηση με τα τεράστια δένδρα συνεχιζόταν. Αρκετά συχνά συναντούσα παράξενες ογκώδεις πυραμίδες. Διάλεξα να ανέβω στην κορυφή μιας εξ' αυτών, μάλλον την πιο ψιλή, όπως εκτίμησα, καθότι είχε εκατοντάδες σκαλοπάτια. Ήταν αρκετά κουραστικό, αλλά άξιζε τον κόπο. Από την κορυφή της η θέα ήταν ανεμπόδιστη. Βέβαια το μόνο που έβλεπα ήταν απέραντο δάσος και κάποιες κορυφές πυραμίδων που ήταν πιο ψιλές από τα δέντρα. Ποιος ξέρει πόσες άλλες δεν φαίνονταν ή είχαν εξαφανιστεί από τη δύναμη της φύσης.

Τέλος κατάφερα, με τη βοήθεια ενός χάρτη να φτάσω στην κεντρική πλατεία της τεράστιας παλιάς πόλης. Ήταν **21^{η} Δεκεμβρίου του 2012**, απόγευμα, **ημέρα του Χειμερινού Ηλιοστασίου** για εμάς. Κάποιο περιηγητές περπατούσαν στην πλατεία, άλλοι ανέβαιναν στις πυραμίδες. Δεν ήταν πάρα πολλοί, έτσι δε με ενοχλούσαν οι φωνές τους. Κάθισα στα σκαλιά της πιο μεγάλης πυραμίδας για να ξεκουραστώ. Η ζέστη και η υγρασία ήταν έντονη, ο αέρας μύριζε βροχή. Πράγματι σύννεφα άρχισαν να μαζεύονται γρήγορα πάνω στον ουρανό, ένας αέρας άρχισε να ταράζει την απάθεια των δέντρων, οι πίθηκοι άρχισαν να ουρλιάζουν και εξαφανίστηκαν. Οι λιγοστοί τουρίστες άρχισα να τρέχουν και αυτοί προς την έξοδο, αλλά μάλλον δε θα πρόφτασαν.

Η καταιγίδα ξέσπασε σα γυαλί που σπάει. Άνοιξαν οι ουρανοί. Βροχή, χαλάζι, δυνατός αέρας , αστραπές, βροντές όλα τα είχε. Δοκίμασα να βάλω το αδιάβροχο που είχα στον σακίδιό μου, αλλά ο αέρας το πήρε από τα χέρια μου και το σκάλωσε σε ένα δέντρο. Δεν ήθελα να φύγω. Πού να πήγαινα άλλωστε; Είχα ήδη μουσκέψει. Έτσι άφησα τη βροχή να με λούζει, έκλεισα τα μάτια να μη με τυφλώνουν οι αστραπές και εγκαταλείφτηκα στις δυνάμεις της φύσης. Είχα πλέον πειστεί ότι η **προφητεία των Μάγιας**, εκπληρωνόταν εκείνη τη στιγμή. Δεν είχα όμως κανένα φόβο. Αν είναι να φύγεις και γνωρίζεις ότι δε θα μείνει κανένας πίσω, προς τι ο φόβος;

Ξεχάστηκα, χάθηκα μέσα στην καταιγίδα. Κουκούβισα στα σκαλιά της πυραμίδας και άφησα το χρόνο να κυλάει, χωρίς καν να σκέφτομαι. Τι νόημα έχουν οι σκέψεις τέτοιες στιγμές;

Πέρασαν έτσι κάποιες ώρες. Ξαφνικά ένα ελαφρό σκούντημα με έκανε να τιναχθώ και να ανοίξω τα μάτια μου. Ήταν ήδη μισοσκόταδο, όμως μπόρεσα να διακρίνω μια φιγούρα που στεκόταν μπροστά μου, σοβαρή μεν, αλλά καλοσυνάτη. Σχεδόν μου χαμογελούσε. Μου έκανε νόημα να τον ακολουθήσω. Πήγε στο πίσω μέρος της πυραμίδας, άγγιξε με τα δύο του χέρια μια πλάκα στην πλευρά της και τότε μια μικρή πόρτα άνοιξε. Μπήκαμε μέσα σε ένα μικρό δωμάτιο, όπου έκαιγαν μερικά κεριά, Υπήρχαν μόνο μερικά σκαμνιά. Με έβαλε να καθίσω σε ένα από αυτά, μου πρόσφερε μια κούπα με ένα ζεστό υγρό και κάθισε απέναντί μου.

Μπόρεσα τότε να τον παρατηρήσω καλύτερα. Ήταν σχετικά μικρόσωμος, με πλακουτσωτό κεφάλι, χωρίς γένια στο πρόσωπό του, με κρίκους στα αυτιά και στα ρουθούνια. Εξακολουθούσε να χαμογελά αδιόρατα. Μου συστήθηκε:

– Είμαι ο αρχιερέας των Μάγια, καλώς όρισες στην πόλη μας!

Έμεινα άναυδος, σχεδόν με ανοιχτό το στόμα.

– Εξαφανίστηκε τελικά η πλάση, εκπληρώθηκε η προφητεία σας; Έχουμε μείνει οι δυο μας πάνω στη Γη;

Με κοίταξε ξαφνιασμένος, σχεδόν ενοχλημένος.

– Για ποια προφητεία μου μιλάς; Γιατί να εξαφανιστεί η ζωή; Μια συνηθισμένη καταιγίδα ήταν. Η φυλή μου έχει εξαφανιστεί, αλλά αυτό έγινε εδώ και πολύ καιρό. Χάρη στη δική σου φυλή.

Έσκυψα το κεφάλι ντροπιασμένος. Δεν είχα επιχειρήματα να τον αντικρούσω. Γι' αυτό αγνόησα την παρατήρησή του αυτή και επικεντρώθηκα σε αυτό που με ενδιέφερε.

– Εσείς δεν είχατε προβλέψει ότι σήμερα θα συνέβαινε μια ολοκληρωτική καταστροφή του πλανήτη μας;
– Όχι βέβαια! Αυτές είναι δοξασίες της Δύσης! Δεν ξέρω γιατί τις επινοήσατε και σε ένα βαθμό τις επιβάλατε στους αφελείς κατοίκους των χωρών σας.
– Δηλαδή δεν έγινε τίποτε εκεί έξω; Τέτοια καταιγίδα…
– Μια συνηθισμένη ατμοσφαιρική διαταραχή. Τα πλάσματα της φύσης είναι καλά. Μούσκεψαν μόνο από την πολύ βροχή, όπως και εσύ. Βγάλε τα ρούχα σου να στεγνώσεις.

Ανάσανα με ανακούφιση. Θα έβλεπα την ανατολή και άλλες φορές.

– Ώστε δεν υπήρχε τέτοια δική σας πρόβλεψη. Πώς λοιπόν δημιουργήθηκε αυτός ο μύθος; Τι σήμαινε για εσάς η σημερινή ημέρα.
– Σήμανε το τέλος ενός **κύκλου και την αρχή ενός άλλου**. Σήμερα είναι το τέλος του **13ου Μπακτούν και η αρχή του 14ου.** Σήμερα αλλάζει απλώς η δική μας «χιλιετία».

– Τι είναι αυτό το «Μπακτούν»; Προφανώς **χρονική μονάδα** αλλά πόσο διαρκεί;
– Αν θέλεις πραγματικά να καταλάβεις, θα πρέπει να τα πάρουμε με τη σειρά.
– Θα ήθελα πολύ να με διαφωτίσεις…

– Ωραία λοιπόν, ας ξεκινήσουμε. Το δικό μας έτος διαρκεί μόνο 260 η μέρες. Το ονομάζουμε «Τσολκίν».
– Μόνο 260 ημέρες; Γιατί αυτό; Πώς προέκυψε;
– Αν με διακόπτεις συνέχεια, θα αργήσουμε, είσαι και βρεγμένος…

Οι **260 ημέρες** είναι ο χρόνος **που κυοφορεί μια γυναίκα**. Θα μου πεις ότι η κυοφορία κρατάει 9 μήνες, δηλαδή 40 εβδομάδες ήτοι 280 ημέρες περίπου. Εμείς όμως μετρούσαμε την **κυοφορία** από τη στιγμή που **γυναίκα** σταματούσε να έχει **περίοδο**. Αυτό συνέβαινε δύο εβδομάδες μετά τη σύλληψη. Ξέραμε ακριβώς πότε θα γεννήσει μια γυναίκα. Έτσι εξηγείται η διαφορά των 20 ημερών μεταξύ των δικών σας και των δικών μας υπολογισμών.

Ένας δεύτερος λόγος είναι ότι **260 ημέρες** είναι ο χρόνος που χρειάζεται για τη **σοδειά του καλαμποκιού**. Από τη σπορά μέχρι τον θερισμό. Αν σκεφτείς ότι το καλαμπόκι ήταν η βασική τροφή μας, καταλαβαίνεις πόσο σημαντικό ήταν το ακριβές μέτρημα των ημερών, για να αρχίσουμε την συγκομιδή.

Ένας τρίτος λόγος είναι ο **πλανήτης Αφροδίτη**, ο σύντροφος του Ήλιου. Γνωρίζαμε ότι εμφανίζεται στον ουράνιο θόλο, ως Αυγερινός και ως Αποσπερίτης και **το έτος** της διαρκεί **224,694** περίπου γήινες ημέρες. Παρατηρήσαμε ότι εμφανίζεται στο ίδιο σημείο του ουρανού κάθε 8 «γήινα» ή 13 «Αφροδίτεια» χρόνια.

– Γνωρίζω ότι οι αστρονομικές σας γνώσεις ήταν πολύ προχωρημένες. Εξακολουθώ όμως να μην καταλαβαίνω ποιες αστρονομικές παρατηρήσεις σας οδήγησαν στην καθιέρωση του έτους των 260 ημερών.

– Παρακολουθώντας για πάρα πολλά χρόνια και καταγράφοντας τις θέσεις της Αφροδίτης στον ουρανό, είδαμε, με τρόμο, ότι η αρμονία που περιμέναμε δεν υπάρχει.
– Γιατί με τρόμο;
– Η Αφροδίτη είναι πολύ σημαντική για εμάς. Στη θρησκεία μας, στη ζωή μας, στους πολέμους μας. Δε γινόταν να κάνουμε λάθη στον υπολογισμό της θέσης της. Παρατηρήσαμε ότι **κάθε 8 χρόνια**, «έχανε» 21 ώρες περίπου. Καθιερώνοντας έτος 260 ημερών **διορθώσαμε αυτή την μετατόπιση**. Ξέραμε έτσι ότι κάθε χρόνο η Αφροδίτη θα βρισκόταν μπροστά κατά 1 ώρα και 15 λεπτά περίπου.
– Καταλαβαίνω τώρα τι λες. Καμιά **ουράνια μέτρηση** δεν είναι **ακέραια**! Φαίνεται ότι και στους θεούς ή στο θεό αρέσει να παίζει με τους ασύμμετρους!

– Δεν ξέρω τι είναι αυτοί οι ασύμμετροι που λες. Συνεχίζω, για να σου εξηγήσω τι είναι το Μπακτούν: Είχαμε καθιερώσει **20 ημέρες = 1 Ουϊνάζ**

20Χ18=360 ημέρες = 1 Τουν
(Ηλιακό έτος)
20Χ360=7200 ημέρες = 1 Κατούν
20Χ7200=144000 ημέρες = 1 Μπακτούν

– Είχατε, όμως εμείς, κάποια αρχική χρονολογία, ως βάση μέτρησης;

– Ναι, την **11η Αυγούστου** του **έτους 3114**, πριν από δικό σας 0. Είναι πολύ παλιά χρονολογία για να ξέρω τι συνέβη τότε και καθιερώθηκε από τους προγόνους μας , ως αρχή μέτρησης. Έτσι για παράδειγμα η ημερομηνία 8 12 14 8 15 σημαίνει 8 Μπακτούν, 12 Κατούν, 14 Τουν, 8 Ουϊνάζ και 15 ημέρες, δηλαδή **3407 έτη** από το έτος 3114 π.Χ.

– Δηλαδή το έτος 293 μ.Χ. ,αν έκανα καλά τους υπολογισμούς μου. Ωραία! Τι ακριβώς είχατε προβλέψει για το έτος 2012, αν όχι την καταστροφή του κόσμου;

– Όπως σου είπα στην αρχή της κουβέντας μας, στις 21 Δεκεμβρίου του έτους 2012 είναι το τέλος του 13ου Μπακτούν.

– Πώς προκύπτει αυτό;

Με απλούς υπολογισμούς: Τα 13 Μπακτούν μας κάνουν 1872000 ημέρες. Αν προσθέσουμε τις ημέρες αυτές στην 11η Αυγούστου του –3114, προκύπτει η 21η Δεκεμβρίου του 2012. Είναι μια πολύ σημαντική ημερομηνία για εμάς διότι τότε αλλάζει το «μεγάλο» μας έτος, το Μπακτούν.

– Πώς κάνατε τόσες και τέτοιας ακρίβειας αστρονομικές παρατηρήσεις Τι είδους όργανα διαθέτατε;

– Αν πρόσεξες στην πλατεία έξω, υπάρχουν γύρω –γύρω **πυραμίδες**. Αυτές ήταν τα **παρατήριά μας**.

Από αυτές καταγράφαμε την ακριβή θέση όλων των αστερισμών και ειδικά της αγαπημένης μας **Αφροδίτης.**

– Όλα καλά λοιπόν. Ούτε έγινε, ούτε πρόκειται να γίνει κάποια μεγάλη καταστροφή.

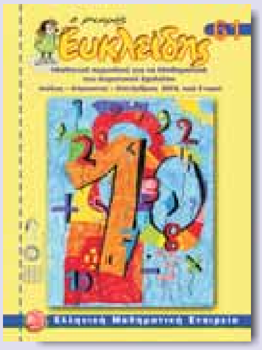
– Σίγουρα όχι σήμερα. Στο απώτερο μέλλον κανείς δεν γνωρίζει. Οπότε ηρέμησε, στέγνωσε, ξεκουράσου και κοιμήσου εδώ. Αύριο, με τη θέληση της Αφροδίτης πηγαίνεις όπου θέλεις. Εμένα θα μου επιτρέψεις να αποσυρθώ.

Ήθελα να ρωτήσω «που θα πας», αλλά η φωνή μου δεν έβγαινε. Η κούραση και οι συγκινήσεις με απόκαμαν. Ένας ύπνος βαθύς και ήρθε και με πήρε στην αγκαλιά του. Ήταν τόσο λυτρωτικός που δεν ήθελα να ξαναγυρίσω στα εγκόσμια και στις ανθρώπινες αγωνίες. Προτίμησα να μείνω συντροφιά με την Αφροδίτη.

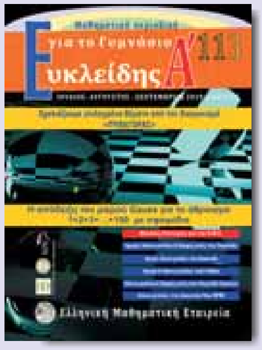
Σημείωση: Οι φωτογραφίες είναι προσωπικές και το ταξίδι στο Τικάλ πραγματικό.
Οι πληροφορίες για το ημερολόγιο μας δόθηκαν από τον τοπικό ξεναγό.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



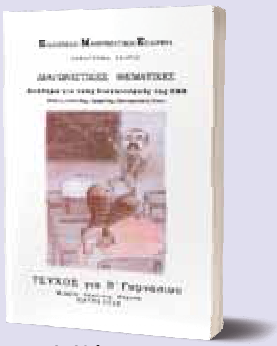
Τιμή τεύχους: 3€



Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3,5€

Διαγωνισμοί

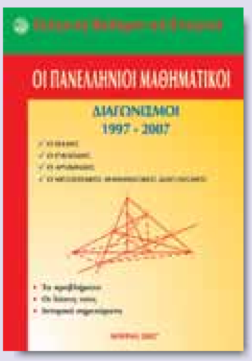


Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



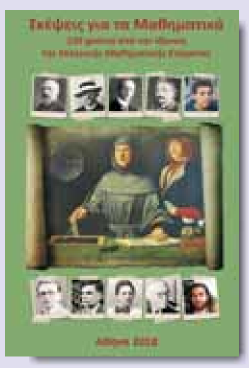
Τιμή βιβλίου: 30€

Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr