Σημειώσεις Μαθηματικών –1

Διανύσματα

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

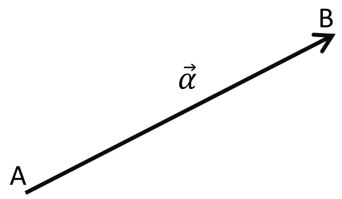
Κεφάλαιο 3 Διανύσματα

3.1 Έννοια διανύσματος

Ορισμός 1

Ονομάζουμε **Διάνυσμα** $\overrightarrow{AB}$ ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με αρχή το Α και πέρας το Β. Συμβολίζουμε :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$$

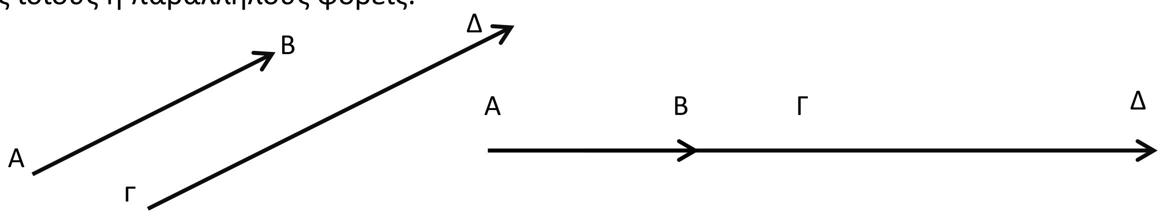


Το διάνυσμα με αρχή και πέρας το ίδιο σημείο ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζεται $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Η ευθεία ε που ορίζεται απο τα σημεία Α,Β ονομάζεται φορέας του $\overrightarrow{AB}$.

Ορισμός 2

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όταν έχουν τους ίδιους ή παράλληλους φορείς.



Δύο <u>παράλληλα</u> διανύσματα με την ίδια φορά ονομάζονται **ομόρροπα** $\overrightarrow{AB} \nearrow\nearrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ενώ **αντίρροπα** όταν έχουν αντίθετη φορά $\overrightarrow{AB} \nearrow\swarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

1η Συνθήκη παραλληλίας

Ισχύει ότι :

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Ορισμός 3

Μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και συμβολίζουμε : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

Ονομάζουμε **μοναδιαίο** κάθε διάνυσμα με μέτρο 1 : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 1$.

Ορισμός 4

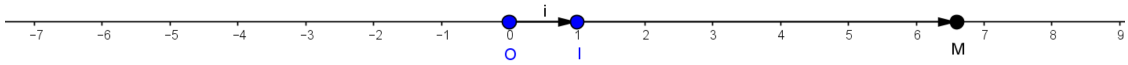
Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι **ίσα** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}}$ αν :

1. $\overrightarrow{AB} \nearrow\nearrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$
2. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|$.

3.2 Συστήματα συντεταγμένων

α. Άξονας τεταγμένων

Σέ μία ευθεία x'x ορίζουμε ως σημείο αναφοράς ένα σημείο της O, και I ένα σημείο του Ox τέτοιο ώστε : $\left|\overrightarrow{OI}\right| = |\vec{\imath}| = 1$. Τότε για κάθε σημείο M της x'x υπάρχει **μοναδικός** πραγματικός $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε : $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} = x \cdot \vec{\imath}$.
Ο αριθμός x ονομάζεται τετμημένη του σημείου M και του **διανύσματος θέσης** του M το $\overrightarrow{OM}$.

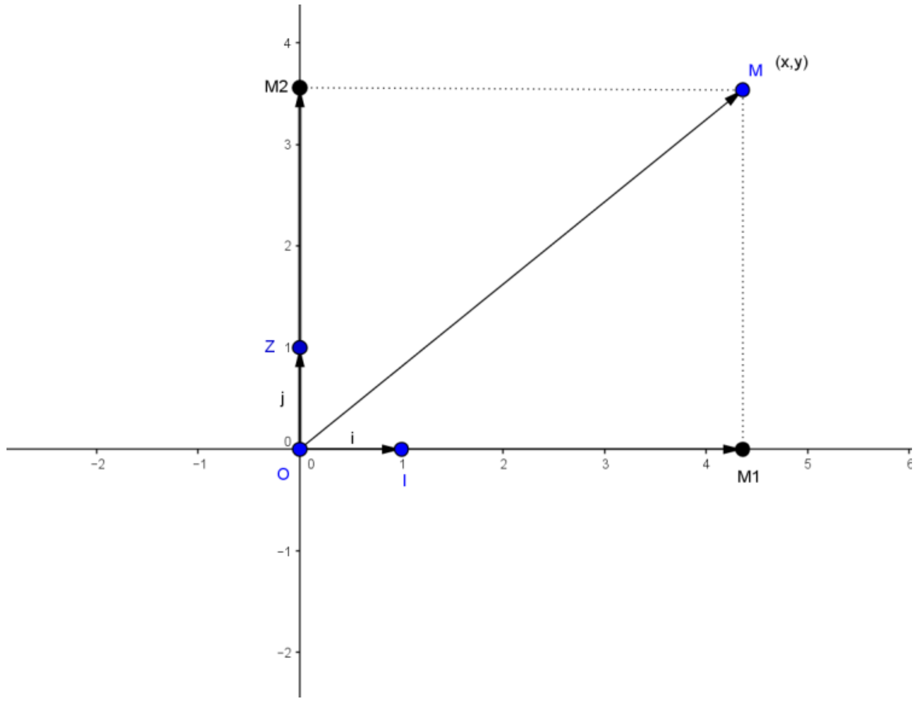


β. Άξονες συντεταγμένων στο επίπεδο ($\mathbb{R}^2$)

Σε δύο ευθείες x'x και y'y που τέμνονται κάθετα στο σημείο αναφοράς O, ορίζουμε διανύσματα $\left|\overrightarrow{OI}\right| = |\vec{\imath}| = 1$ και $\left|\overrightarrow{OZ}\right| = |\vec{\jmath}| = 1$ αντίστοιχα. Για κάθε σημείο του επιπέδου M υπάρχουν **μοναδικοί** πραγματικοί αριθμοί (x,y) τέτοιοι ώστε :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OZ} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} = (x, y)$$

Οι αριθμοί αυτοι ονομάζονται συντεταγμένες του M και του $\overrightarrow{OM}$ ειδικότερα το x ονομάζεται **τετμημένη** και το y **τεταγμένη**.

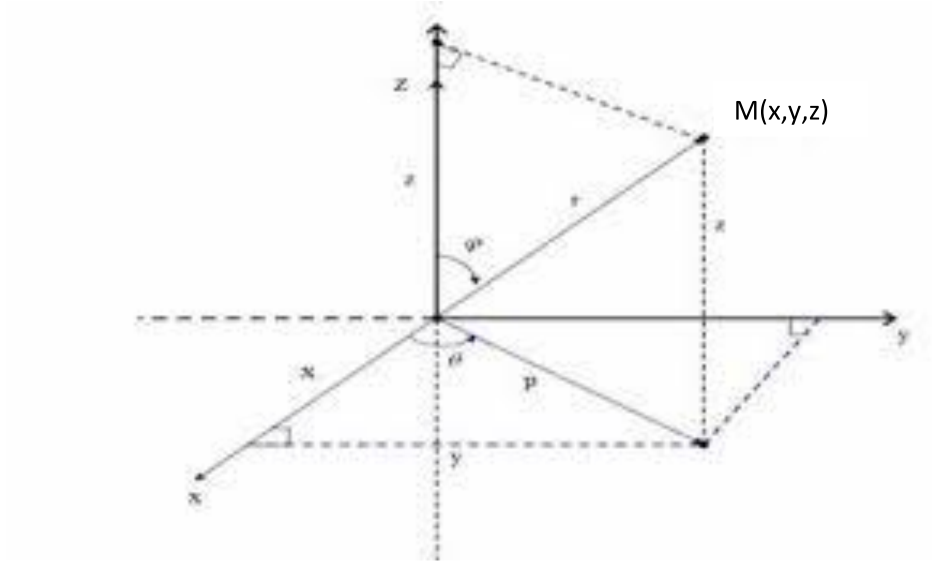


γ. Άξονες συντεταγμένων στο χώρο ($\mathbb{R}^3$)

Σε τρείς ευθείες x'x , y'y, ζ'ζ που τέμνονται κάθετα ανα δύο στο σημείο αναφοράς O, ορίζουμε διανύσματα $\left|\overrightarrow{OI}\right| = |\vec{\imath}| = 1$, $\left|\overrightarrow{OZ}\right| = |\vec{\jmath}| = 1$, $\left|\overrightarrow{OK}\right| = |\vec{\kappa}| = 1$ αντίστοιχα. Για κάθε σημείο του χώρου M υπάρχουν **μοναδικοί** πραγματικοί αριθμοί (x,y,z) τέτοιοι ώστε :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OZ} + z \cdot \overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k} = (x, y, z)$$

Οι αριθμοί αυτοι ονομάζονται συντεταγμένες του M και του $\overrightarrow{OM}$ ειδικότερα το x ονομάζεται **τετμημένη** το y **τεταγμένη** και το z **κατηγμένη.**



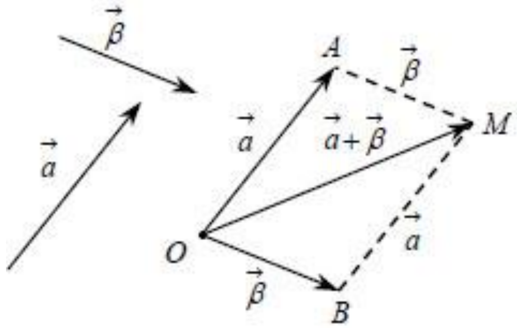
Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ στο επίπεδο ή $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ στο χώρο. **Το διάνυσμα με άκρα αυτά τα σημεία έχει συντεταγμένες** :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ ή } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

3.3 Πράξεις Διανυσμάτων - Μέτρο διανύσματος – Συντεταγμένες Μέσου

<u>α. Πρόσθεση</u>

Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με κοινή αρχή. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των δύο διανυσμάτων το διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με φορέα τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου ΟΑΜΒ δηλαδή :



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$$

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε :

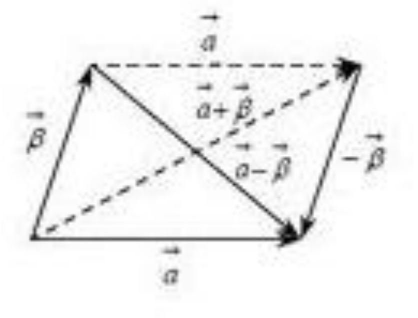
$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ή στο $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

β. Αφαίρεση

Έστω $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με κοινή αρχή. Ορίζουμε ως **διαφορά** των δύο διανυσμάτων το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$:



$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε :

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2)$$

ή στο $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$$

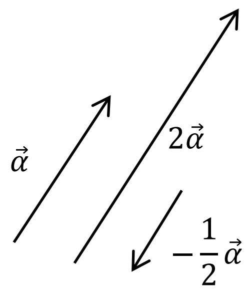
γ. Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό

Έστω λ≠0 πραγματικός αριθμός και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα μη μηδενικό. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$** και συμβολίζουμε $\lambda\cdot\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο :

Είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ αν λ>ο και αντίρροπο αν λ<0

$$|\lambda\cdot\vec{\alpha}|=|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|$$

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και λ∈ $\mathbb{R}$ τότε : $\lambda\cdot\vec{\alpha}=\lambda\cdot(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$



$$0\cdot\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

Π.χ. Αν $\vec{\alpha}=(-2{,}1)$, $\vec{\beta}=(3{,}1)$ να βρεθεί το $\vec{u}$ ώστε :

$$2\vec{\alpha}-\vec{u}=\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{u}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{u}=2(-2{,}1)-(3{,}1)\Leftrightarrow\vec{u}=(-2{,}2)-(3{,}1)\Leftrightarrow\vec{u}=(-2-3{,}2-1)=(-5{,}1)$$

δ. Εσωτερικό Γινόμενο

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του επιπέδου (αντιστοιχα στο $\mathbb{R}^3$). Ορίζουμε ώς **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και συμβολίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό που δίνεται απο τον τύπο :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

ή στο $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Π.χ. Αν $\vec{\alpha} = (-2,1)$, $\vec{\beta} = (3,1)$ τότε : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -2 + 1 = -1$

ε. Μέτρο Διανύσματος - Απόσταση Σημείων

Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα διάνυσμα τότε ισχύει :

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ στο επίπεδο ή $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ στο χώρο.

1. Η **απόσταση μεταξύ των δύο σημείων** είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος :

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ οπότε :

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

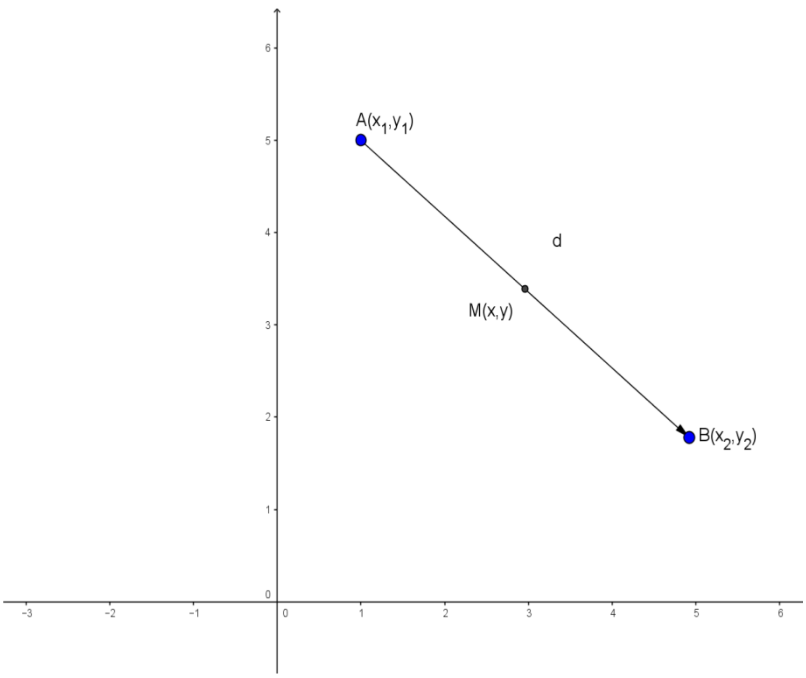
ή

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. Οι **συντεταγμένες του μέσου** M(x,y) του AB δίνονται απο τον τύπο :

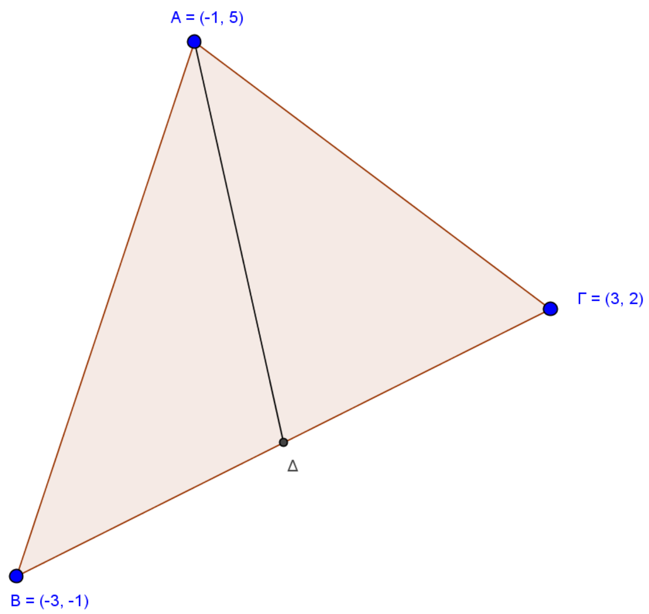
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Ιδιότητες Πράξεων		
	Πρόσθεση	Εσωτερικό Γινόμενο
Μεταθετική	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
Προσεταιριστική	$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ $=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$	**Δεν ισχύει**
Επιμεριστική	$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\pm\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$	
$\vec{\alpha}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=\lvert\vec{\alpha}\rvert^2=x^2+y^2$		

Π.χ.



Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι η διάμεσος του τριγώνου. Να βρείτε

α. Τα μήκη των πλευρών του

β. Το σημείο Δ

γ. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$

α. Θα βρούμε πρώτα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{B\Gamma}$ και στη συνέχεια τα μέτρα τους

$\overrightarrow{AB}=(-3+1,-1-5)=(-2,-6)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(3+1,2-5)=(4,-3)$

$\overrightarrow{B\Gamma}=(3+3,2+1)=(6,3)$

Άρα :

α=$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}$

β=$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

γ=$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{40}$

β. Το Δ είναι μέσο της ΒΓ άρα απο τις συντεταγμένες μέσου αν Δ(x,y) τότε

$$x=\frac{-3+3}{2}=0 \quad και \quad y=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα Δ$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

γ. Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο χρειαζόμαστε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$:

$$\overrightarrow{A\Delta}=\left(0+1,\frac{1}{2}-5\right)=\left(1,-\frac{9}{2}\right) \quad και \quad \overrightarrow{B\Gamma}=(3+3,2+1)=(6,3)$$

$$Άρα \quad \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=1\cdot 6+\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot 3=6-\frac{27}{2}=-\frac{15}{2}$$

3.4 Παραλληλία διανυσμάτων – Γωνία διανυσμάτων

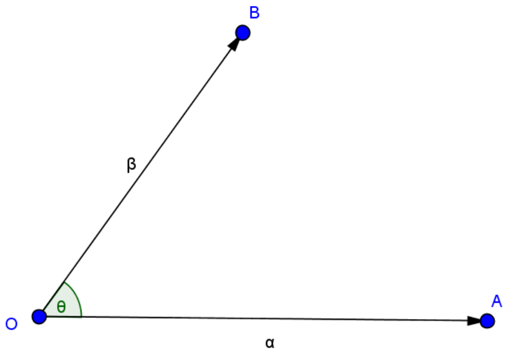
2η Συνθήκη παραλληλίας

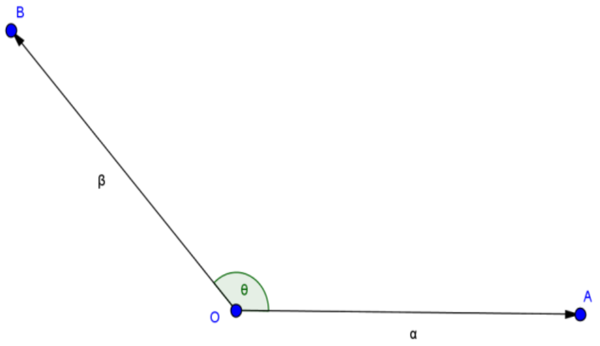
Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε :

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1\cdot y_2-x_2\cdot y_1=0$$

Ορισμός

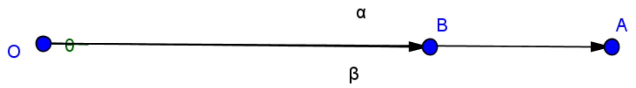
Γωνία θ δύο διανυσμάτων, ονομάζουμε τη γωνία ($0^0 \leq \theta \leq 180^0$) που σχηματίζουν οι φορείς δυο διανυσμάτων με κοινή αρχή.



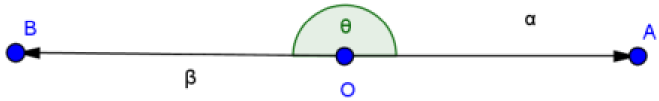


Ισχύουν τα εξής :

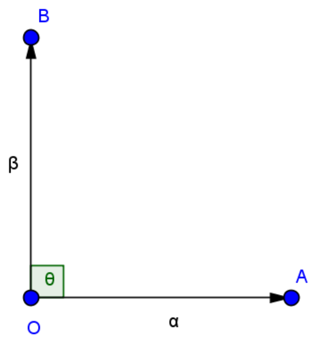
α. Αν $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$ τότε $\theta = 0^0$



β. Αν $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$ τότε $\theta = 180^0$



γ. Αν $\theta = 90^0$ τότε τα διανύσματα λέγονται κάθετα και συμβολίζουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$



Για να βρούμε το συνθ της γωνίας δυο διανυσμάτων έχουμε τον τύπο :

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

Από τον τύπο αυτό προκύπτει και η **συνθήκη καθετότητας** δυο διανυσμάτων αφού συν90^0=0 έχουμε :

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$$

Ασκήσεις

11.1.3 - 11.1.4 – 11.1.5 – 11.1.8 – 11.1.9 – 11.1.10 Λυμένες στο βιβλίο.

11.5.1 – 11.5.3 – 11.5.5 -11.5.11 – 11.5.12 – 11.5.15 – 11.5.19 – 11.5.24