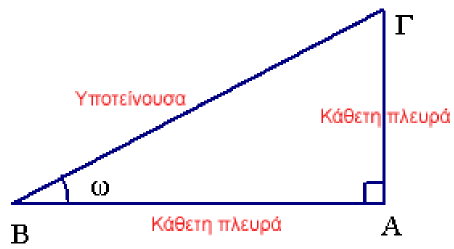
Σημειώσεις Μαθηματικών – 1

Επίπεδη Τριγωνομετρία

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

Κεφάλαιο 2 Τριγωνομετρία



2.1 Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών

Ορισμός 1

Σε κάθε οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου ορίζουμε 6 τριγωνομετρικούς αριθμούς ως εξής :

$$\boldsymbol{\eta\mu B} = \frac{\boldsymbol{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}}{\boldsymbol{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\boldsymbol{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}}{\boldsymbol{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi B} = \frac{\boldsymbol{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}}{\boldsymbol{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

$$\boldsymbol{\sigma\varphi B} = \frac{\boldsymbol{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

$$\boldsymbol{\tau\varepsilon\mu B} = \frac{\boldsymbol{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}}{\boldsymbol{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}} = \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\boldsymbol{\sigma\tau\varepsilon\mu B} = \frac{\boldsymbol{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}}{\boldsymbol{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{1}{\eta\mu B}$$

Από τους ορισμους των τριγωνομετρικών αριθμών σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^0$ ισχύει ότι :

ημΒ=συνΓ, συνΒ=ημΓ, εφΒ=σφΓ, σφΒ=εφΓ, τεμΒ=στεμΓ, στεμΒ=τεμΓ.

2.2 Μονάδες μέτρησης γωνιών

Οι γωνίες συνήθως εκφράζονται με μοίρες. Υποδιαιρέσεις της μοίρας είναι τα λεπτά και τα δεύτερα ιχύει ότι :

$$1^0 = 60' = 3600'', \quad 1' = 60''$$

‘Αλλη μια μονάδα μέτρησης είναι τα ακτίνια (rad) και ισχύει ότι :

$$1\,rad = \frac{180^0}{\pi}, \quad 1^0 = \frac{\pi}{180^0}$$

Πχ.

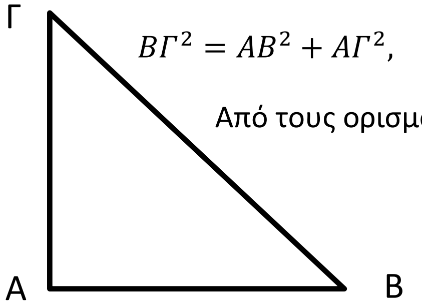
1. Να μετατραπεί σε δεκαδική μορφή η γωνία $8^0\ 12'\ 15''$

$$8^0\ 12'\ 15'' = 8^0 + 12' + 15'' = 8^0 + 12' + \frac{15'}{60} = 8^0 + 12' + 0{,}25' = 8^0 + 12{,}25'$$

$$= 8^0 + \frac{12{,}25^0}{60} = 8^0 + 0{,}204^0 = 8{,}204^0$$

2.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί $30^0, 45^0, 60^0$

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο θεωρούμε ΑΒ=ΑΓ=1, Α=90^0, Β=Γ=45^0. Με το Πυθ. Θεώρημα βρίσκουμε την ΒΓ :



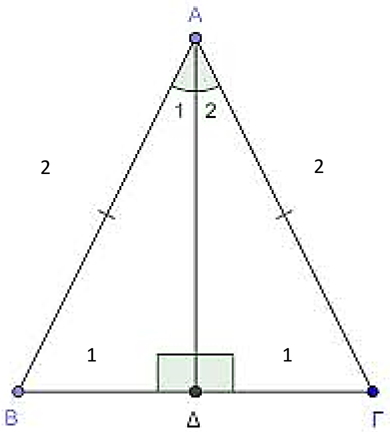
$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2, \quad B\Gamma^2 = 1 + 1 = 2, \quad B\Gamma = \sqrt{2}$$

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε :

$$\eta\mu 45^0 = \sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 45^0 = \sigma\varphi 45^0 = 1 \ , \ \tau\varepsilon\mu 45^0 = \sigma\tau\varepsilon\mu 45^0 = \sqrt{2}.$$

Σε ισόπλευρο τριγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ=2, ΑΔ το ύψος του (διάμεσος διχοτόμος). Β=Γ=60^0 και $A_1=A_2=30^0$. Από Πυθ. Θεώρημα στο ΑΒΔ βρίσκουμε την πλευρά ΑΔ:



$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2, \quad A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2,$$
$$A\Delta^2 = 4 - 1 = 3 \, , \quad A\Delta = \sqrt{3}$$

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε :

$$\eta\mu 30^0 = \sigma\upsilon\nu 60^0 = \tfrac{1}{2} \, , \quad \eta\mu 60^0 = \sigma\upsilon\nu 30^0 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 30^0 = \sigma\varphi 60^0 = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \, , \quad \varepsilon\varphi 60^0 = \sigma\varphi 30^0 = \sqrt{3}$$

$$\tau\varepsilon\mu 30^0 = \sigma\tau\varepsilon\mu 60^0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad , \qquad \tau\varepsilon\mu 60^0 = \sigma\tau\varepsilon\mu 30^0 = 2$$

10.2.3 Ένα αερόστατο βρίσκεται σε απόσταση 300 m από έναν επίγειο παρατηρητή (σχ. 10.2δ). Αφού το αερόστατο ανυψώθηκε για ένα χρονικό διάστημα, ο παρατηρητής υπολόγισε τη γωνία μεταξύ του εδάφους και της νοητής γραμμής θεάσεως του αερόστατου να είναι, κατά προσέγγιση, 30°. Να βρείτε πόσο ψηλά βρίσκεται το αερόστατο σε εκείνο το σημείο. (Υποθέτομε ότι η ταχύτητα αέρα είναι χαμηλή και ότι το μπαλόνι ανυψώθηκε κάθετα για τα πρώτα λεπτά.)

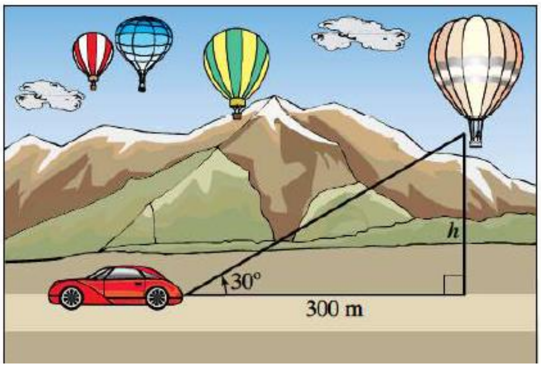
Λύση.

Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω τρίγωνο γνωρίζομε μια οξεία γωνία και το μέτρο της προσκείμενης σε αυτήν πλευράς και θέλομε να βρούμε το μήκος της απέναντι πλευράς της γωνίας. Για να υπολογίσομε την πλευρά αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσομε την εφαπτομένη ή τη συνεφαπτομένη της γωνίας 30°. Χρησιμοποιώντας την εφαπτόμενη της γωνίας 30° έχομε:

$$\varepsilon\varphi 30° = \frac{h}{300} \Leftrightarrow h = 300 \cdot \varepsilon\varphi 30°,$$

$$h = 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow h \simeq 173.21.$$

Άρα, το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 173,21 m.



Πχ.

1.(Βιβλίο 10.6.4)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

$$\varepsilon\varphi 20^0 = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \Rightarrow 0{,}364 = \frac{150}{A\Gamma} \Rightarrow 0{,}364 \cdot A\Gamma = 150 \Rightarrow A\Gamma = \frac{150}{0{,}364} = 412{,}09$$

2.(Βιβλίο 10.6.7)

Ας θεωρήσουμε ότι το ύψος ΒΓ=h και η απόσταση ΔΓ=x .

Στο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε :

$$\varepsilon\varphi 40^0 = \frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} \Rightarrow 0{,}84 = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 0{,}84 \cdot x \text{ ή } x = \frac{h}{0{,}84}$$

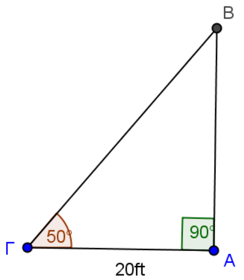
Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 20^0 = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \Rightarrow 0{,}364 = \frac{h}{x+75} \Rightarrow h = 0{,}364 \cdot (x + 75)$$

$$h = 0{,}364x + 27{,}3 \Rightarrow h = 0{,}364\frac{h}{0{,}84} + 27{,}3 \Rightarrow h = 0{,}43h + 27{,}3$$

$$0{,}57h = 27{,}3 \ \Rightarrow h = 47{,}9ft$$

3.(Βιβλίο 10.6.8)



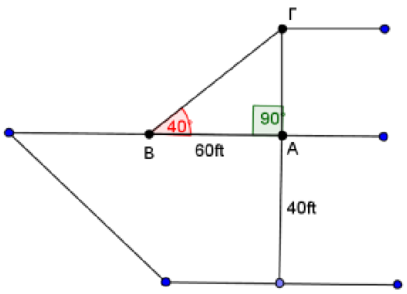
Απο το τρίγωνο ΑΒΓ θα υπολογίσουμε πρώτα την ΑΒ

$$\varepsilon\varphi 50^0 = \frac{AB}{20}, \quad 1{,}192 = \frac{AB}{20}, \quad AB = 1{,}192 \cdot 20 = 23{,}84$$

Το συνολικό ύψος του δέντρου όμως είναι η ΑΒ+ΒΓ. Θα βρούμε τη ΒΓ απο το Πυθ. Θεώρημα.

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2, \quad B\Gamma^2 = 400 + 568{,}35 = 968{,}35, \quad B\Gamma = \sqrt{968{,}35} = 31{,}12$. Άρα το ύψος του δέντρου είναι 23,84+31,12=54,96

4. (Βιβλίο 10.6.9)



Απο το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 40^0 = \frac{A\Gamma}{AB} \Rightarrow 0{,}839 = \frac{A\Gamma}{60} \Rightarrow A\Gamma = 0{,}839 \cdot 60$$

$$A\Gamma = 50{,}34$$

Αρα το συνολικό ύψος είναι 40+50,34=90,34ft.

2.4 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες – Μετασχηματισμοί

$\boldsymbol{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1}$	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sigma\varphi x}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\varepsilon\varphi x}}$
$\boldsymbol{1 + \sigma\varphi^2 x = \sigma\tau\varepsilon\mu^2 x}$	$\boldsymbol{1 + \varepsilon\varphi^2 x = \tau\varepsilon\mu^2 x}$	

Αντίθετες γωνίες (x, -x ή 2π-x)

$$\eta\mu(-x) = \eta\mu(2\pi - x) = -\eta\mu x, \ \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu x},$$
$$\varepsilon\varphi(-x) = \varepsilon\varphi(2\pi - x) = -\varepsilon\varphi x, \quad \sigma\varphi(-x) = \sigma\varphi(2\pi - x) = -\sigma\varphi x$$

Παραπληρωματικές γωνίες (x, π-x)

$$\boldsymbol{\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x}, \ \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x, \quad \varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x,$$
$$\sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi x$$

Γωνίες με άθροισμα 180^0 (x, π+x)

$$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x, \ \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x, \quad \boldsymbol{\varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x},$$
$$\boldsymbol{\sigma\varphi(\pi + x) = \sigma\varphi x}$$

Άθροισμα και Διαφορά γωνιών.

$$\eta\mu(\omega + \varphi) = \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(\omega + \varphi) = \eta\mu\omega\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\varepsilon\varphi(\omega + \varphi) = \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\varphi}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\varphi} \qquad \sigma\varphi(\omega + \varphi) = \frac{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\varphi}$$

$$\eta\mu(\omega - \varphi) = \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(\omega - \varphi) = \eta\mu\omega\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi$$

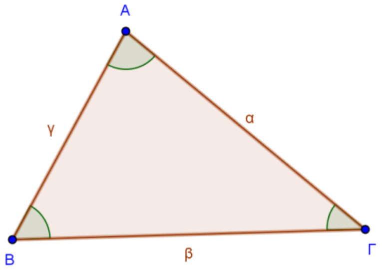
$$\varepsilon\varphi(\omega - \varphi) = \frac{\varepsilon\varphi\omega - \varepsilon\varphi\varphi}{1 + \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\varphi} \qquad \sigma\varphi(\omega - \varphi) = \frac{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\varphi + 1}{\sigma\varphi\varphi - \sigma\varphi\omega}$$

2.4 Επίλυση Τριγώνων

Επίλυση τριγώνου είναι η διαδικασία υπολογισμού των αγνώστων στοιχείων ενός τριγώνου (Γωνίες – Πλευρές) όταν γνωρίζουμε κάποια από αυτά.

Νόμος Ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι :



$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

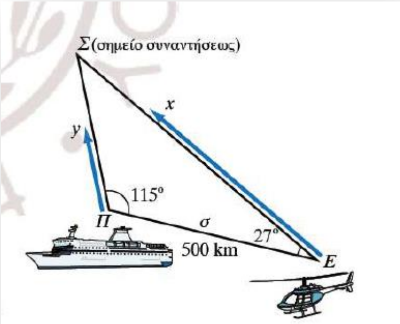
Τον νόμο των ημιτόνων τον χρησιμοποιούμε όταν είναι γνωστές δύο γωνίες και μία πλευρά ενός τριγώνου ή δύο πλευρές και μια απο τις μη περιεχόμενες γωνίες του(ΓΓΠ, ΓΠΓ,ΠΠΓ)

Π.χ.

1. Να επιλυθούν τα τρίγωνα

   α. ΑΒΓ με α=46, Β=35^0, Γ=75^0

   β. ΑΒΓ με α=47, β=50, Α=62^0



Σχ. 10.3δ.

10.3.2 Κατά τη διάρκεια μιας αποστολής διασώσεως, ο πιλότος ενός διασωστικού ελικοπτέρου λαμβάνει από ένα αεροπλάνο AWACS τα στοιχεία που αφορούν σε ένα άγνωστης ταυτότητας πλοίο που έχει εκπέμψει S.O.S. και καθοδηγείται, ώστε να μπορέσει να συναντήσει το πλοίο. Το σχήμα 10.3δ που παρουσιάζεται κατωτέρω εμφανίζεται στην οθόνη, αλλά προτού εμφανισθεί η απόσταση του σημείου συναντήσεως στην οθόνη, χάνονται οι επικοινωνίες. Ευτυχώς, ο πιλότος θυμάται το νόμο των ημιτόνων. Πόσο μακριά πρέπει ο πιλότος να πετάξει;

Λύση.

Το x αντιπροσωπεύει την απόσταση που ο πιλότος πρέπει να διανύσει, ώστε να συναντήσει το πλοίο και το Σ είναι το σημείο συναντήσεως. Η γωνία Σ είναι:

$$\Sigma = 180° - (115° + 27°) = 180° - 142° = 38°.$$

Επειδή αυτή η εφαρμογή περιλαμβάνει την περίπτωση ΓΠΓ, χρησιμοποιούμε τον νόμο των ημιτόνων για να υπολογισθεί το x:

$$\frac{x}{\eta\mu\Pi} = \frac{\sigma}{\eta\mu\Sigma} \Leftrightarrow \frac{x}{\eta\mu 115°} = \frac{500}{\eta\mu 38°} \Leftrightarrow x = \frac{500\,\eta\mu 115°}{\eta\mu 38°} \Leftrightarrow x \approx 736.$$

Κατά συνέπεια, ο πιλότος πρέπει να πετάξει περίπου 736 km, προκειμένου να συναντήσει το πλοίο.

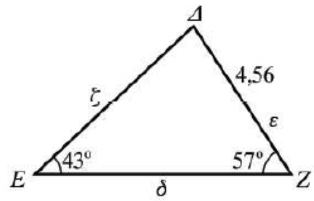
10.3.1 Στο τρίγωνο $\varDelta EZ$ (σχ. 10.3γ), έχομε ότι $\varepsilon = 4{,}56$, $E = 43^\circ$ και $Z = 57^\circ$. Να γίνει επίλυση του τριγώνου.

Λύση.

Αρχικά, σχεδιάζομε το σχήμα στο οποίο γνωρίζομε τα τρία από τα έξι ζητούμενα και βλέπομε ότι είμαστε στην περίπτωση ΓΓΠ. Αρχικά, θα βρούμε την γωνία $\varDelta$:

$$\varDelta = 180^\circ - (43^\circ + 57^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

Για να βρούμε τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου θα χρησιμοποιήσομε το νόμο των ημιτόνων.



Σχ. 10.3γ.

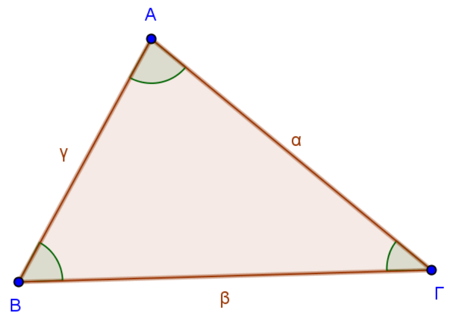
$$\frac{\delta}{\eta\mu\varDelta} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\eta\mu 80^\circ} = \frac{4{,}56}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \delta = \frac{4{,}56\,\eta\mu 80^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \delta \approx 6{,}58.$$

Και αντίστοιχα έχομε

$$\frac{\zeta}{\eta\mu Z} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} \Leftrightarrow \frac{\zeta}{\eta\mu 57^\circ} = \frac{4{,}56}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \zeta = \frac{4{,}56\,\eta\mu 57^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \zeta \approx 5{,}61.$$

Νόμος Συνημιτόνων

Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι



$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A}$$

$$\boldsymbol{\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B}$$

$$\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma}$$

Τον νόμο των ημιτόνων τον χρησιμοποιούμε όταν είναι γνωστές δύο πλευρές και μία περιεχόμενη γωνία ενός τριγώνου ή τρείς πλευρές του(ΠΓΠ, ΠΠΠ)

Πχ.

1. Να επιλυθούν τα τρίγωνα

   α. ΑΒΓ με α=24, β=30, γ=20

   β. ΑΒΓ με α=24, β=30, $Γ=42^0$

   Πχ. Βιβλίο

10.3.3 Στο παρακάτω τρίγωνο (σχ. 10.3στ), είναι γνωστές οι πλευρές $\alpha = 32$, $\gamma = 48$ και η γωνία $B = 125{,}2^\circ$. Να γίνει επίλυση του τριγώνου.

Λύση.

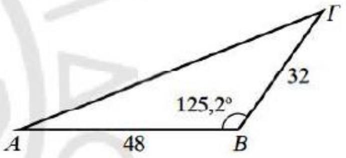
Αρχικά, θα βρούμε την τρίτη πλευρά β, χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων:

$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$

$\beta^2 = 32^2 + 48^2 - 2 \cdot 32 \cdot 48\, \sigma\upsilon\nu 125{,}2^\circ$

$\beta^2 = 1024 + 2304 - 3072\,(-0{,}576)$

$\beta^2 = 1024 + 2304 + 1769{,}472 = 5097{,}472 = 71{,}369 \simeq 71.$



Σχ. 10.3στ.

Έτσι, αφού βρήκαμε τις δύο πλευρές του τριγώνου, πρέπει να βρούμε τα μέτρα των δύο άλλων γωνιών. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους, είτε με το νόμο των ημιτόνων, είτε με το νόμο των συνημιτόνων. Το πλεονέκτημα από τη χρησιμοποίηση του νόμου των συνημιτόνων είναι ότι εάν βρούμε ότι το μέτρο της γωνίας είναι αρνητικό, τότε η γωνία θα είναι αμβλεία, ενώ αν το μέτρο είναι θετικό, τότε η γωνία είναι οξεία. Άρα από το νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να βρούμε μια δεύτερη γωνία, έστω την A.

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$

$32^2 = 71^2 + 48^2 - 2 \cdot 71 \cdot 48\, \sigma\upsilon\nu A$

$1024 = 5041 + 2304 - 6816\, \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow -6321 = -6816\, \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = 0{,}9273$

$\mathrm{A} = 21{,}97^\circ \simeq 22^\circ.$

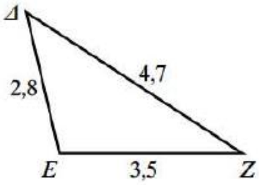
Επομένως, η τρίτη γωνία Γ είναι $\Gamma \simeq 180^\circ - (125{,}2^\circ + 22^\circ) \simeq 180^\circ - 147{,}2^\circ \simeq 32{,}8^\circ$.

10.3.4 Στο επόμενο τρίγωνο (σχ. 10.3ζ), είναι γνωστές οι πλευρές $\delta = 3{,}5$, $\varepsilon = 4{,}7$ και $\zeta = 2{,}8$. Να γίνει επίλυση του τριγώνου.

Λύση.

Όταν και οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου (ΠΠΠ) είναι γνωστές, ο νόμος των συνημιτόνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί το τρίγωνο.

Επειδή δεν ξέρομε το μέτρο καμίας γωνίας, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσομε το νόμο των ημιτόνων. Από το νόμο των συνημιτόνων, μπορούμε να βρούμε τη γωνία E.



Σχ. 10.3ζ.

Άρα $\varepsilon^2 = \delta^2 + \zeta^2 - 2\delta \cdot \zeta \cdot \sigma\upsilon\nu E$

$4{,}7^2 = 3{,}5^2 + 2{,}8^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}8\, \sigma\upsilon\nu E$

$22{,}09 = 12{,}25 + 7{,}84 - 19{,}6\, \sigma\upsilon\nu E \Leftrightarrow 2 = -19{,}6\, \sigma\upsilon\nu E$

$\sigma\upsilon\nu E = -0{,}10204 \Leftrightarrow E = 95{,}856654^\circ \Leftrightarrow E \simeq 95{,}86^\circ.$

Ομοίως, θα βρούμε την γωνία Δ:

$\delta^2 = \varepsilon^2 + \zeta^2 - 2\varepsilon \cdot \zeta \cdot \sigma\upsilon\nu\, \Delta$

$3{,}5^2 = 4{,}7^2 + 2{,}8^2 - 2 \cdot 4{,}7 \cdot 2{,}8\, \sigma\upsilon\nu\Delta$

$12{,}25 = 22{,}09 + 7{,}84 - 26{,}32\, \sigma\upsilon\nu\Delta \Leftrightarrow -17{,}18 = -26{,}32\, \sigma\upsilon\nu\Delta$

$\sigma\upsilon\nu\Delta = 0{,}652735 \Leftrightarrow \Delta = 49{,}25182951^\circ \Leftrightarrow \Delta \simeq 49{,}25^\circ.$

Τέλος, για τη γωνία Z έχομε:

$Z \simeq 180^\circ - (E + \Delta) \simeq 180^\circ - (95{,}86^\circ + 49{,}25^\circ) \simeq 180^\circ - 145{,}11^\circ.$

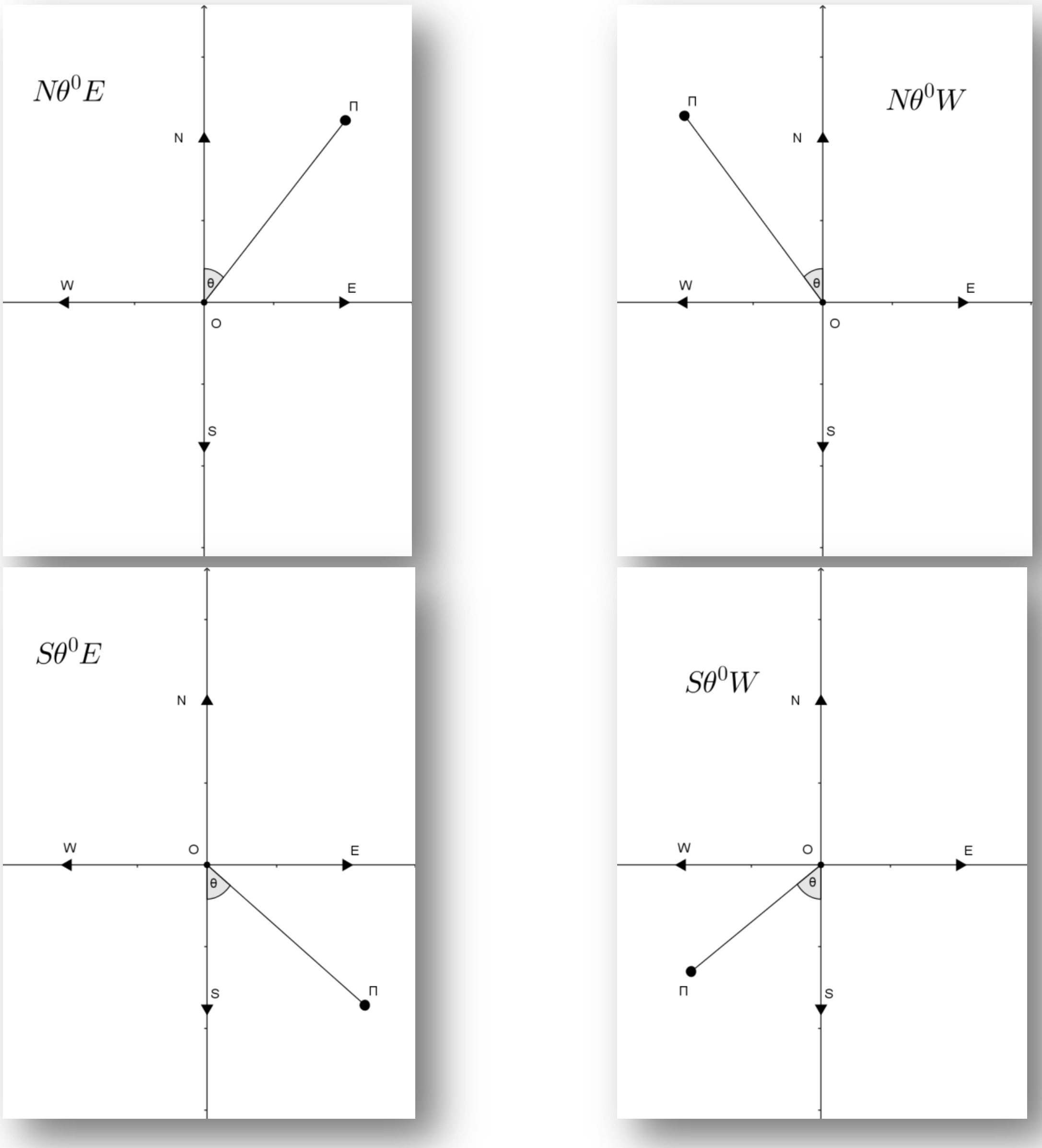
2.5 Εφαρμογές στη Ναυτιλία

Διόπτευση

α. Τεταρτοκυκλική Διόπτευση

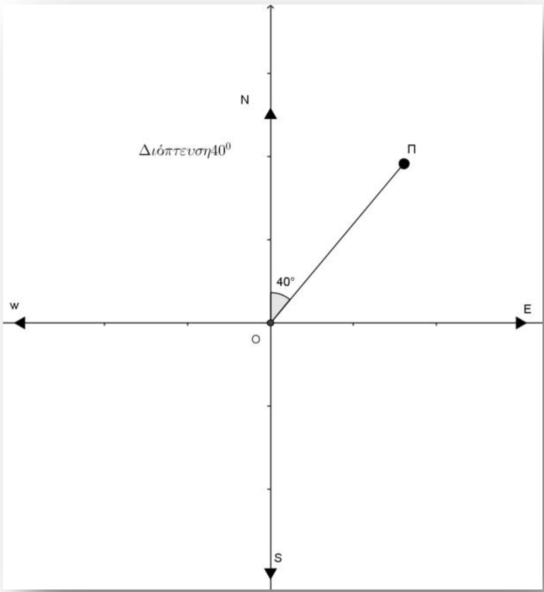
Είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία μεταξύ της θέσης μας με τον Βορά (N) ή τον Νότο (S) και της ευθείας μεταξύ της θέσης μας και του αντικειμένου παρατήρησης στην ανατολή (E) ή τη δύση (W). Οι τιμές της γωνίας είναι απο 0^0 έως 90^0.

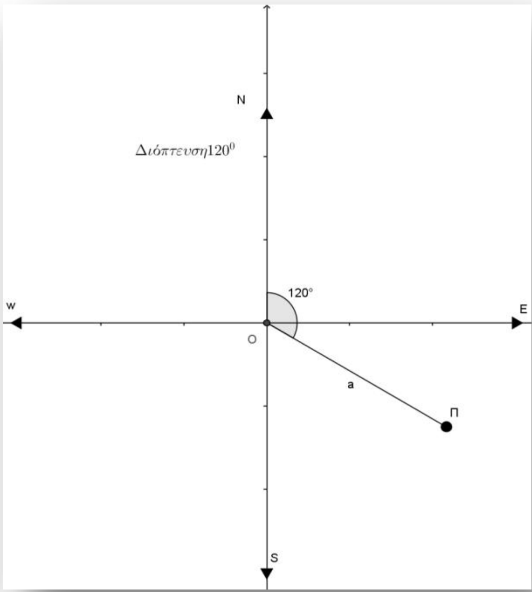
-Υπάρχουν 4 περιπτώσεις : (η θέση μας το σημείο Ο και το αντικείμενο παρατήρησης το Π)



β. Απόλυτη Διόπτευση

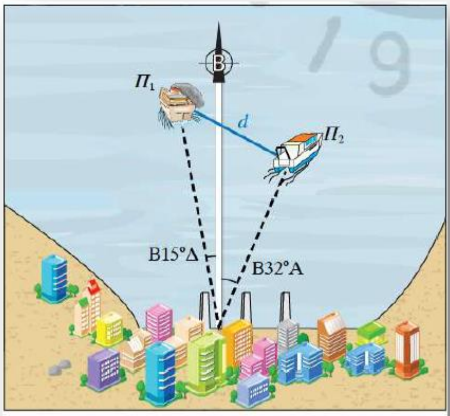
Είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία μεταξύ της θέσης μας με τον Βορά (N) και της ευθείας μεταξύ της θέσης μας και του αντικειμένου παρατήρησης με φορά των δεικτών του ρολογιού. Οι τιμές της γωνίας είναι απο 0^0 έως 360^0.



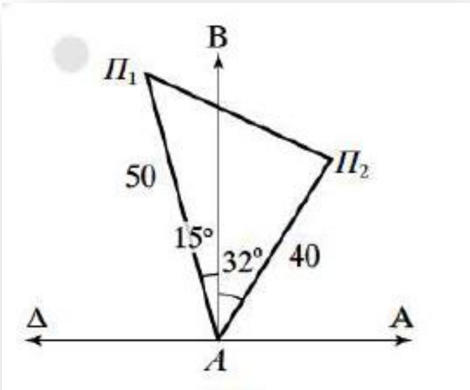


Πχ. (Βιβλίο)

10.4.1 Δύο πλοία αναχωρούν από ένα λιμάνι συγχρόνως (σχ. 10.4δ). Το πρώτο πλοίο κινείται με 25 κόμβους (ένας κόμβος είναι ένα ναυτικό μίλι ανά ώρα), N15°W. Το δεύτερο πλοίο κινείται με 20 κόμβους N32°E. Μετά από 2 ώρες, ποια θα είναι η απόσταση d μεταξύ των δύο πλοίων;



Σχ. 10.4δ.

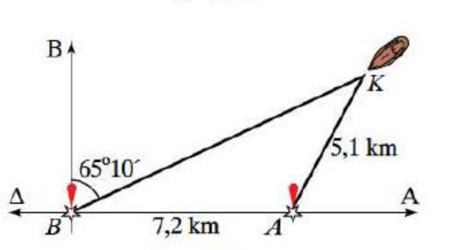


Σχ. 10.4ε.

Μετά από 2h το πλοίο $Π_1$ έχει διανύσει $ΑΠ_1=50$ νμ και το $Π_2$, $ΑΠ_2=40$ νμ. Εφαρμόζω τον νόμο των συνημιτόνων στο $ΑΠ_1Π_2$ για την $Π_1Π_2=d$ έχουμε :

$$d^2 = 50^2 + 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot συν47^0 \Rightarrow d^2 = 2500 + 1600 - 4000 \cdot 0{,}682 \Rightarrow d^2 = 1272 \Rightarrow$$
$$d = \sqrt{1272} = 35{,}67.$$

10.4.2 Μια βάρκα Κ φαίνεται από τον φάρο Α σε απόσταση 5,1 km (σχ. 10.4στ). Ταυτόχρονα διακρίνεται από το φάρο Β, ο οποίος βρίσκεται 7,2 km δυτικά του Α. Η διόπτευση της βάρκας από το φάρο Β είναι N65°10′E. Πόσο μακριά είναι η βάρκα από το φάρο Β, αν ξέρομε ότι η γωνία που σχηματίζει η βάρκα με τους δύο φάρους είναι οξεία γωνία;



Σχ. 10.4στ.

Η γωνία $ABK = 90^0 - 65^0 10' = 24^0 50'$

Εφαρμόζω τον νόμο των ημιτόνων :

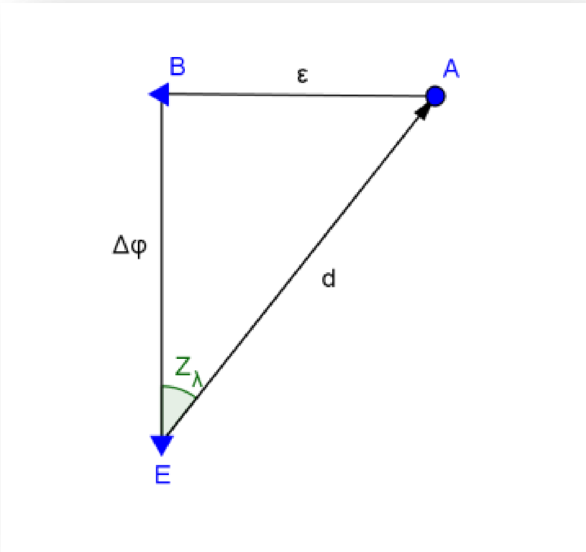
$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\eta\mu B}} = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\eta\mu K}} \Rightarrow \frac{5{,}1}{\eta\mu 24^0 50'} = \frac{7{,}2}{\eta\mu K}$$
$$\Rightarrow \quad \eta\mu K = 0{,}593$$

Άρα Κ=$36^0 21'$ ή $143^0 39'$ όμως Κ οξεία γωνία άρα Κ=$36^0 21'$. Οπότε Α=$180^0 - 24^0 50' - 36^0 21' = 118^0 49'$. Εφαρμόζουμε ξανά τον νομο των ημιτόνων και έχουμε :

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\eta\mu A}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\eta\mu B}} = \frac{\kappa}{\eta\mu K} \Rightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 118^0 49'} = \frac{5{,}2}{\eta\mu 36^0 21'} \Rightarrow \alpha = 10{,}64\ Km$$

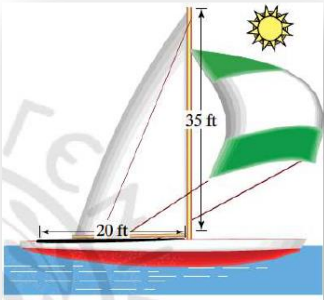
γ. Τρίγωνο Πλεύσεως

Είναι το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΑ που έχει κορυφές : Ε το σημείο αναχώρησης, Α το σημείο αφίξεως, Β το σημείο του Βορρά ιδιου μήκους με το Α. Η πλευρά ΒΕ=Δφ ονμάζεται **διαφορά πλάτους** (Από βορρά προς νότο)**,** η ΕΑ=d **δίαρμα** και ΒΑ=ε **αποχώρηση** (Από ανατολή προς δύση). Η γωνία ΒΕΑ=Z_λ ονομάζεται **αληθής πορεία**.



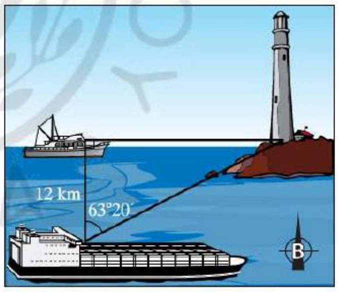
Ασκήσεις (Βιβλίο σελ. 431-433)

10.6.10 Ποια είναι η γωνία ανυψώσεως του ήλιου όταν ένα κατάρτι 35 ft σχηματίζει σκιά 20 ft (σχ. 10.6δ);



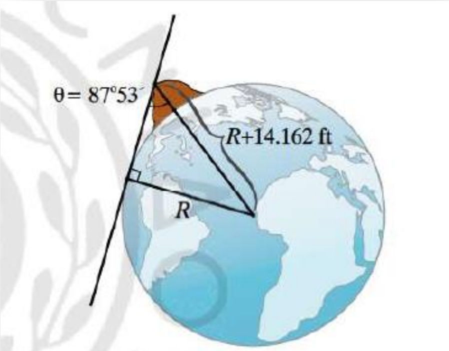
Σχ. 10.6δ.

10.6.11 Ένα καΐκι βρίσκεται δυτικά ενός φάρου και μια φορτηγίδα είναι 12 km νότια του καϊκιού. Από τη φορτηγίδα, η διόπτευση του φάρου είναι N63° 20′E. Πόσο μακριά βρίσκεται το καΐκι από το φάρο (σχ. 10.6ε);



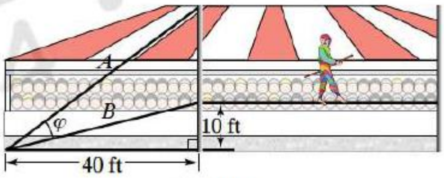
Σχ. 10.6ε.

10.6.13 Ένας τρόπος να μετρηθεί η ακτίνα της γης είναι να αναρριχηθεί κάποιος στην κορυφή ενός βουνού, το ύψος του οποίου επάνω από τη στάθμη θάλασσας είναι γνωστό, και να μετρήσει τη γωνία μεταξύ μιας κατακόρυφης γραμμής στο κέντρο της γης από την κορυφή του βουνού και μιας γραμμής που προέρχεται από την κορυφή του βουνού και φτάνει στον ορίζοντα, όπως φαίνεται στην εικόνα. Το ύψος του όρους Shasta στην Καλιφόρνια είναι 14.162 ft. Από την κορυφή του όρους, κάποιος μπορεί να δει τον ορίζοντα στον Ειρηνικό ωκεανό. Η γωνία που διαμορφώνεται μεταξύ μιας γραμμής στον ορίζοντα και της κατακόρυφου είναι 87°53′. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, μπορεί να υπολογίσει την ακτίνα της γης, σε ft (σχ. 10.6ζ);



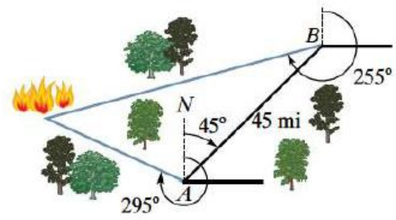
Σχ. 10.6ζ.

10.6.18 Ένας δασοφύλακας βρίσκεται σε ένα δάσος στο σημείο Α, από το οποίο εντοπίζει φωτιά σε κατεύθυνση 295° από αυτόν. Την ίδια φωτιά εντοπίζει και ένας άλλος δασοφύλακας, ο όποιος βρίσκεται στην θέση Β, απέχει απόσταση 45 μίλια από τη θέση Α και έχει κατεύθυνση 045°. Ο δεύτερος δασοφύλακας βλέπει τη φωτιά σε κατεύθυνση 255°. Πόσο μακριά από τη θέση Α είναι η πυρκαγιά και πόσο από τη θέση Β (σχ. 10.6θ);



Σχ. 10.6η.

10.6.19 Δύο αεροπλάνα απογειώνονται από έναν αερολιμένα συγχρόνως. Το πρώτο πετά με ταχύτητα 150 km/h σε μια κατεύθυνση 320°. Το δεύτερο πετά με ταχύτητα 200 km/h σε μια κατεύθυνση 200°. Μετά από 3 ώρες πόσο μακριά θα είναι τα δύο αεροπλάνα;



Σχ. 10.6θ.

10.6.20 Η πιο μεγάλη βάση ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι 14 ft, οι μη παράλληλες πλευρές 10 ft και οι παρά τη βάσει γωνίες είναι 80°. Να βρείτε: α) Το μήκος μιας διαγωνίου. Περίπου 16ft και β) το εμβαδό του.