Σημειώσεις Μαθηματικών – 2

Συναρτήσεις - 1

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

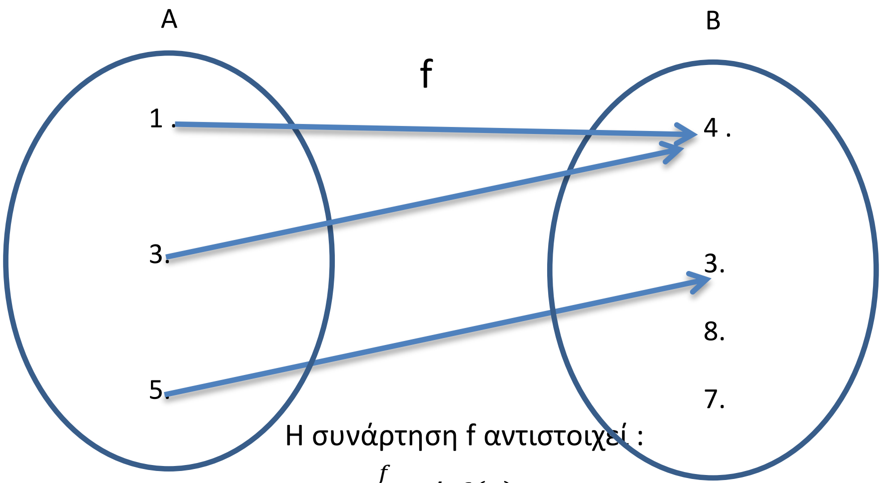
Κεφάλαιο 1 Συναρτήσεις

1.1 Έννοια συνάρτησης

Ορισμός 1

Έστω Α, Β δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Μια διαδικασία με το όνομα f ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση** αν σε κάθε στοιχείο $x\epsilon A$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $y\epsilon B$. Συμβολίζομαι $y = f(x)$.

Σχ. 1



Η συνάρτηση f αντιστοιχεί :

$$1 \xrightarrow{f} 4 \text{ ή } f(1) = 4$$

$$3 \xrightarrow{f} 4 \text{ ή } f(3) = 4$$

$$5 \xrightarrow{f} 3 \text{ ή } f(5) = 3$$

Ορισμός 2

1. Το σύνολο Α ονομάζεται **πεδίο ορισμού της f (συμβ. D(f))** και το Β σύνολο αφίξεως της f. (Συνήθως Β=$\mathbb{R}$)
2. Το σύνολο $f(A) = \{y/y = f(x) \;\; \gamma\iota\alpha \; x\epsilon A\}$. Ονομάζεται **σύνολο τιμών της f**.

Ορισμός 3

Τύπος μια συνάρτησης f ονομάζεται η ισότητα που δείχνει τον κανόνα με τον οποίο η f αντιστοιχεί την ανεξάρτητη μετάβλητη $x \in D(f)$ με την εξαρτημένη μεταβλητή $y = f(x) \in f(A)$.

Πχ. 1 (Βιβλίο σελ. 109)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.4.

Το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, σε €, δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=x^4-3x^2+100x+80.$$

α) Να υπολογιστεί το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος.
β) Να βρεθεί και να ερμηνευθεί το $f(0)$.

Λύση.

α) Το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος θα είναι η τιμή της συναρτήσεως f για $x=3$, δηλαδή $f(x)=3^4-3\cdot 3^2+100\cdot 3+80=434$€.

β) Αν θέσομε στον τύπο της συναρτήσεως $x=0$ παίρνομε

$$f(0)=0^4-3\cdot 0^2+100\cdot 0+80=80.$$

δηλαδή έχομε $f(0)=80$. Το ποσό αυτό μπορούμε να πούμε ότι θα αντιστοιχεί στα «πάγια» έξοδα της επιχειρήσεως, τα οποία γίνονται είτε παράγει μονάδες είτε όχι. Τέτοια έξοδα μπορεί να είναι για παράδειγμα το ενοίκιο, οι λογαριασμοί νερού, ρεύματος κ.λπ..

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε πολλές οικονομικές εφαρμογές, όπως η παρούσα, η ανεξάρτητη μεταβλητή x λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές. Είναι όμως αρκετά συνηθισμένο, σ' αυτές τις περιπτώσεις, να θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της συναρτήσεως που χρησιμοποιούμε, ένα διάστημα ή μία ένωση διαστημάτων A (στην οποία φυσικά να περιέχονται οι ακέραιες τιμές που μας ενδιαφέρουν) και να τη μελετούμε σε ολόκληρο το A. Έτσι, ενώ στο συγκεκριμένο παράδειγμα το x μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0, 1, 2,... (αφού παριστάνει αριθμό μονάδων ενός προϊόντος) ως πεδίο ορισμού της f χρησιμοποιούμε το $A=[(0,+\infty)$.

Πχ. 2 (Βιβλίο σελ. 108)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.

Ένας εργάτης τοποθετεί βίδες σε συσκευασίες (κουτιά). Το πλήθος των βιδών, σε εκατοντάδες, που τοποθετεί σε x ώρες δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+30x$.

α) Πόσες βίδες θα τοποθετήσει σε συσκευασίες ο εργάτης ως τη 1 μ.μ., αν ξεκίνησε την εργασία του στις 7 π.μ.;
β) Πόσες βίδες θα έχει τοποθετήσει σε συσκευασίες μεταξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ.;

Λύση.

α) Στις 7 το πρωί είναι $x=0$ και το πλήθος των βιδών που θα έχει τοποθετήσει ο εργάτης είναι ίσος με $f(0)=0$ (το οποίο συμφωνεί με ό,τι θα αναμέναμε, αφού τότε ξεκινά να τοποθετεί βίδες).

Μέχρι τη 1 μ.μ θα έχει εργασθεί $13-7=6$ ώρες, οπότε θα έχει τοποθετήσει

$$f(6)=\frac{1}{9}6^3-6^2+30\cdot 6=168$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 16.800 βίδες).

β) Μεταξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ. θα έχει τοποθετήσει $f(6)-f(3)$ βίδες αφού έως τις 10:00 έχει εργαστεί 3 ώρες και έως τη 1 έχει εργαστεί 6 ώρες.

Άρα

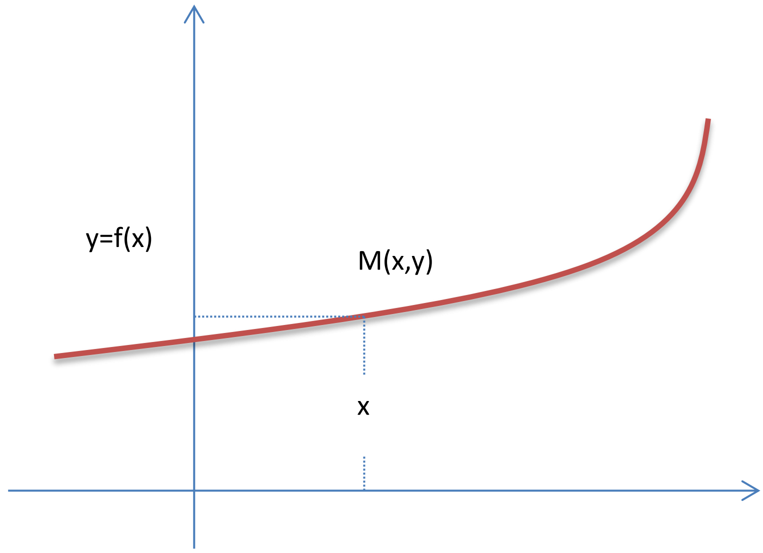
$$f(6)-f(3)=[\frac{1}{9}6^3-6^2+30\cdot 6]-[\frac{1}{9}3^3-3^2+30\cdot 3]=168-90=78$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 7.800 βίδες).

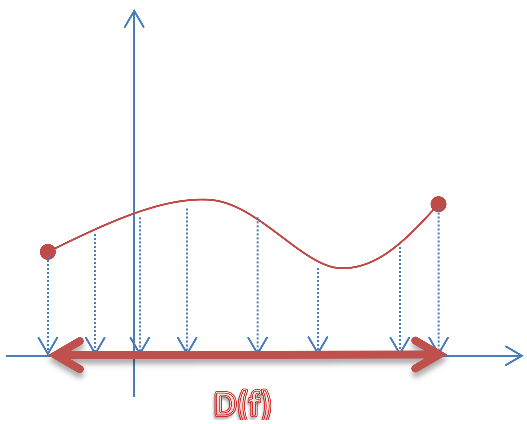
1.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Ορισμός 1

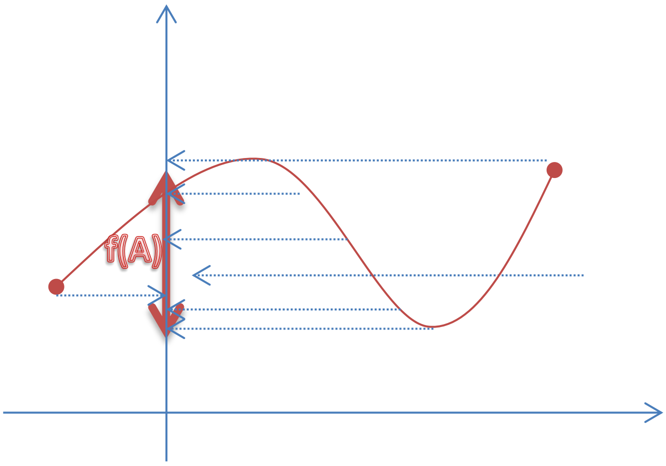
Έστω f μια συνάρτηση. Το σύνολο των σημείων M(x,y) τέτοια ώστε y=f(x) ή διαφορετικά η καμπύλη του επιπέδου που κάθε σημείο της και μονο αυτό επαληθεύεται απο την f για κάθε $x \in D(f)$ ονομάζεται **γραφική παράσταση της f**.



Εύρεση πεδίου ορισμού της f από τη γραφική της παράσταση.
Προβολή στον x'x



Εύρεση συνόλου τιμών της f από τη γραφική της παραστάση.
Προβολή στον y’y



Πχ.1 (Βιβλίο 3.1.6 σελ. 113)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\beta, \gamma, \in \mathbf{R}$.
α) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ έτσι ώστε το σημείο (1, 2) να ανήκει στην C_f;
β) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ έτσι ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, 3);
γ) Να βρεθεί ο τύπος της συναρτήσεως f αν ισχύουν και οι δύο συνθήκες που ζητήθηκαν στα ερωτήματα (α) και (β).

Λύση.

α) Για να ανήκει το σημείο (1, 2) στη γραφική παράσταση της f, με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, θα πρέπει να ισχύει $f(1)=2$, οπότε θα έχομε $1+\beta+\gamma=2 \Leftrightarrow \beta+\gamma=1$.

β) Για να τέμνει η C_f τον άξονα y'y στο σημείο (0, 3) θα πρέπει να ισχύει $f(0)=3$, οπότε θα έχομε $\gamma = 3$.

γ) Τώρα ζητάμε να ισχύουν και οι δύο σχέσεις που βρήκαμε προηγουμένως, οπότε παίρνομε

$$\left.\begin{matrix}\beta+\gamma=1\\ \gamma=3\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\beta=-2\\ \gamma=3\end{matrix}\right\}$$

και η f γίνεται $f(x)=x^2-2x+3$.

1.3 Εύρεση πεδίου ορισμού

Ανάλογα με τον τύπο της συνάρτησης έχουμε κάποιους περιορισμούς για να βρούμε το πεδίο ορισμού. Οι ποιό σημαντικες είναι :

Συνάρτηση	**Περιορισμός**	**Πέδιο Ορισμού**
Πολυωνυμική $f(x)=\boldsymbol{a_\nu x^\nu + \cdots \alpha_0}$	Κανένας	$\mathbb{R}$
Ρητή $\boldsymbol{f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$Q(x) \neq o$	D(f)={x∈ $\mathbb{R}/Q(x) \neq o$}
Άρρητη	$Q(x) \geq 0$	D(f)={x∈ $\mathbb{R}/Q(x) \geq o$}

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}}$		
Εκθετική $\boldsymbol{f(x) = a^x}$	Κανένας	$\mathbb{R}$
Λογαριθμική $\boldsymbol{f(x) = \log(Q(x))}$	$Q(x) > 0$	D(f)={x∈ $\mathbb{R}/Q(x) > o$}
Τριγωνομετρικές 1 $\boldsymbol{f(x) = \eta\mu P(x)}$ $\boldsymbol{f(x) = \sigma\upsilon\nu P(x)}$	Κανένας	$\mathbb{R}$
Τριγωνομετρικές 2 $\boldsymbol{f(x) = \varepsilon\varphi P(x)}$	$P(x) \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$	D(f)={x∈R/ $P(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$}
Τριγωνομετρικές 3 $\boldsymbol{f(x) = \sigma\varphi P(x)}$	$P(x) \neq \kappa\pi$	D(f)={x∈R/ $P(x) \neq \kappa\pi$}

Πχ. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού στις παρακάτω συναρτήσεις

1. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2}$

   Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0$
   Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα και τις ρίζες του τριωνύμου.
   $$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$
   Άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες
   $$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} =$$
   $$x_1 = 2 \;\kappa\alpha\iota\; x_2 = 1$$
   Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι
   $$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1,2\} = (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$$

2. $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$

   Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$
   Όμως $x^2 \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
   Άρα δεν υπάρχουν περιορισμοί και η f έχει πεδίο ορισμού
   $$D(f) = \mathbb{R}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 4}$

   Πρέπει να ισχύει :
   $$x \neq 0 \;\; \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \;\; x - 1 \neq 0 \;\; \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \;\; x^2 - 4 \neq 0$$
   Άρα
   $$x \neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \neq 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x^2 \neq 4$$
   $$x \neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \neq 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \neq \pm\sqrt{4}$$
   $$x \neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \neq 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \neq \pm 2$$

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι :

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0,1,2,-2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$$

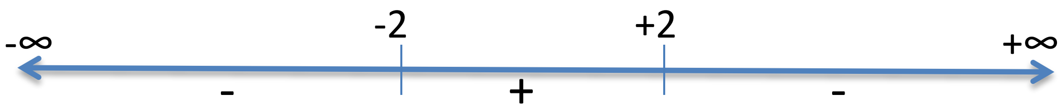
4. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

   Πρέπει $2x - 1 \geq 0$ δηλαδή $2x \geq 1$ ή $x \geq \frac{1}{2}$

   Άρα το πεδίο ορισμού είναι $D(f) = [\frac{1}{2}, +\infty)$

5. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

   Πρέπει $4 - x^2 \geq 0$ δηλαδή :
   Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $4 - x^2 = 0$ ή $x = \pm 2$
   Κάνουμε τον πίνακα προσήμου.



   Άρα η ανίσωση επαληθεύεται για $-2 \leq x \leq 2$ δηλαδή

$$D(f) = [-2,2]$$

6. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$

   Πρέπει :

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ **και** } x - 2 \neq 0$$

   Δηλαδή :
   Αρχικά $x \neq 2$.
   Για την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ βρίσκουμε τις ρίζες και κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

   $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 8 = 1$, $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $x_1 = 2$, $x_2 = 1$

   Άρα η ανίσωση έχει λύση $x \leq 1$, $x \geq 2$.
   Απο την λύση της ανίσωσης πρέπει να εξαιρέσουμε το 2 άρα τελικά $x \leq 1$, $x > 2$ οπότε $D(f) = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$.

Ασκήσεις

Βιβλίο σελ. 113-114

3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.8

1.4 Ισότητα, πράξεις και είδη συναρτήσεων

Ορισμός 1

Δύο συναρτήσεις f,g είναι ίσες αν ισχύουν :

α. D(f)=D(g)

β. f(x)=g(x)

Ορισμός 2

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με D(f)=D(g)=A. Ορίζουμε τις εξής πράξεις για $x \in A$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(cf)(x) = cf(x) \quad c \in \mathbb{R}$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

Ορισμός 3

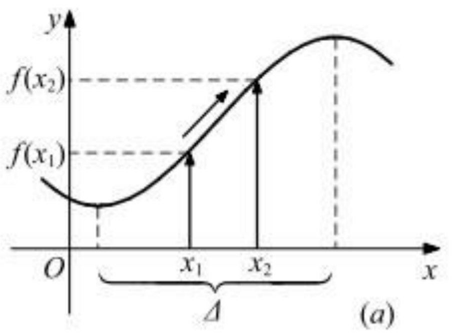
α. Η συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ αν για κάθε $x_1,\ x_2 \epsilon \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

β. Η συνάρτηση f ονομάζεται **αύξουσα** στο διάστημα Δ αν για κάθε $x_1,\ x_2 \epsilon \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$.

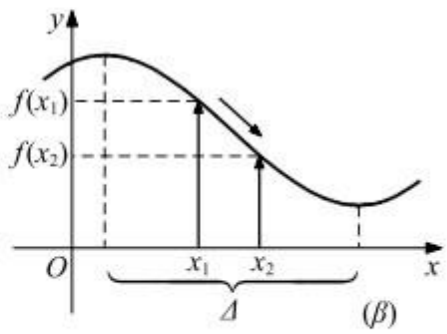
γ. Η συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ αν για κάθεx_1, $x_2 \epsilon \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

Δ. Η συνάρτηση f ονομάζεται **φθίνουσα** στο διάστημα Δ αν για κάθε $x_1,\ x_2 \epsilon \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αυξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ τότε λέγεται γνησίως **μονότονη** στο Δ.



Γνησίως Αύξουσα στο Δ



Γνησίως Φθίνουσα στο Δ

Ορισμός 4

Μια συνάρτηση f λέγεται **αμφιμονοσήμαντη ή 1-1** όταν

για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \epsilon D(f)$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει ότι ι $f(x_1) \neq f(x_2)$

ή ισοδύναμα

για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \epsilon D(f)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει ότι$x_1 = x_2$

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τοτε είναι και 1-1

Πχ. (Βιβλίο σελ 122)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.3.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες.

α) $f(x) = (x-1)\,(x-3)$ β) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ γ) $f(x) =$ ημx.

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(3)=0$, ενώ $1\neq 3$. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbf{R}-\{-1\}$. Αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$, θα έχομε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1+1}=\frac{x_2+2}{x_2+1} \Leftrightarrow (x_1+2)(x_2+1)=(x_2+2)(x_1+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2+x_1+2x_2+2=x_2x_1+x_2+2x_1+2 \Leftrightarrow x_2=x_1 .$$

γ) Γνωρίζομε ότι ημ$(x+2\pi)=$ ημx για κάθε x. Αφού λοιπόν, για παράδειγμα $f(0)=f(2\pi)=0$, ενώ $0\neq 2\pi$, η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

Ασκηση

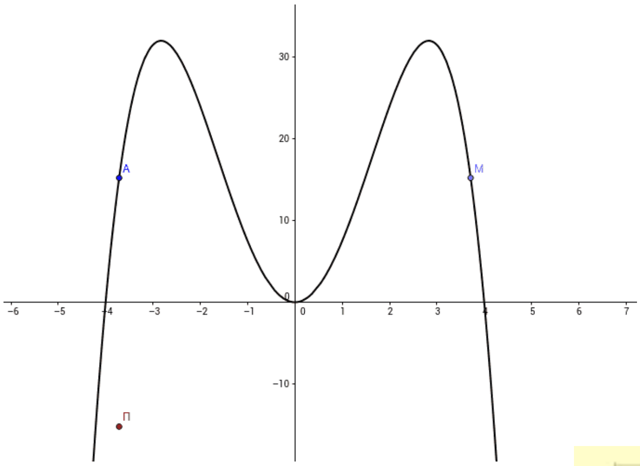
Βιβλίο σελ 126 3.2.7

Ορισμός 5

α. Μια συνάρτηση f λέγεται **άρτια** αν

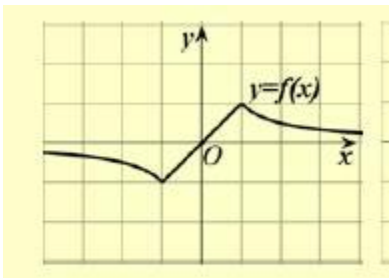
1. Για κάθε $x \in D(f)$ και το $-x \in D(f)$
2. Ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον ψ΄ψ.



β. Μια συνάρτηση f λέγεται **περιττή** αν

1. Για κάθε $x \in D(f)$ και το $-x \in D(f)$
2. Ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$



Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0).

γ. Μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική με περίοδο τον θετικό Τ αν για κάθε $x \in D(f)$ και $x+T \in D(f)$ και ισχύει ότι f(x+T)=f(x).

Πχ. Βιβλίο σελ 124

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.5.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

α) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ β) $f(x) = \frac{1}{x} + 3x$ γ) $f(x) = x^2 + 2x$.

Λύση.

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 + 2 = x^4 + 3x^2 + 2 = f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} + 3(-x) = -\left(\frac{1}{x} + 3x\right) = -f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχομε $-x \in A$. Όμως:

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x \ , \quad -f(x) = -(x^2 + 2x) = -x^2 - 2x$$

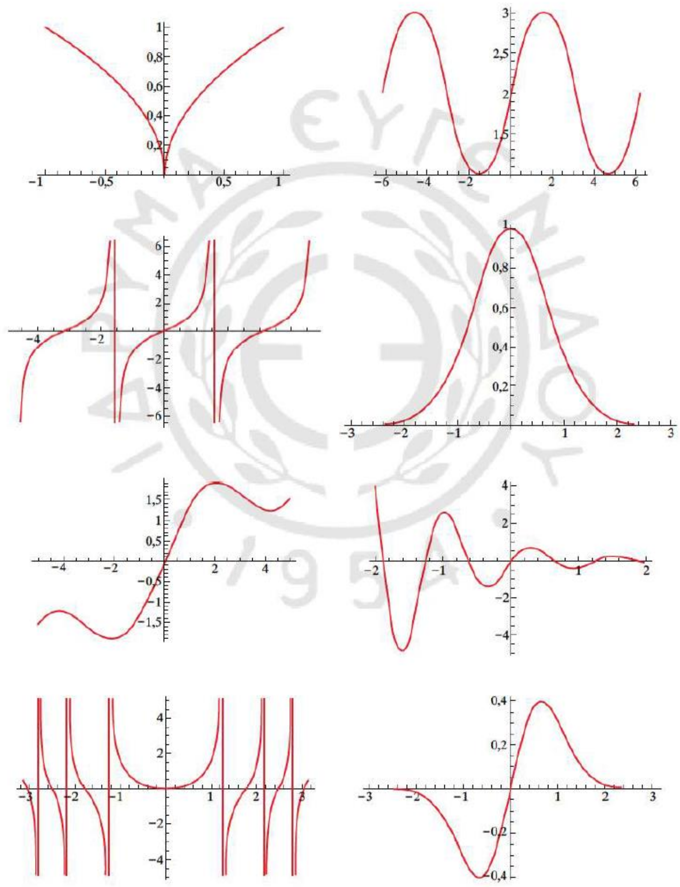
και δεν μπορεί να ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε x (π.χ. έχομε $f(-1) = -1 \neq 3 = f(1)$), ούτε να ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x (π.χ. έχομε $f(-1) = -1 \neq -3 = -f(1)$).

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Άσκηση

Βιβλίο σελ 127 3.2.10

Ποιες από τις γραφικές παραστάσεις (σχ. 3.2κδ) αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που είναι άρτι περιττές και ποιες σε τίποτε από τα δύο; Ποιες από τις συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές;



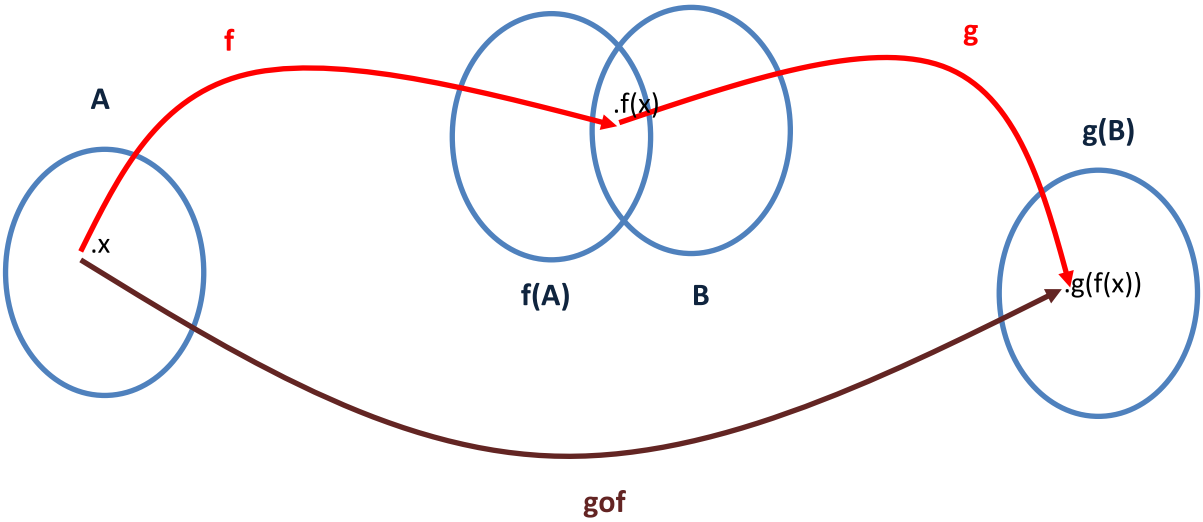
1.5 Σύνθεση Συναρτήσεων – Αντίστροφη Συνάρτηση

Ορισμός 1

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με $D(f) = A, D(g) = B$. Τότε για κάθε $x \in A\, , f(x) \in B$ ορίζεται μια συνάρτηση που συμβολίζεται $g \circ f$ και ονομάζεται σύνθεση της f με την g με τύπο :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Σχηματικά αν η f αντιστοιχεί τα $x \epsilon A$ στα $f(x) \epsilon f(A)$ και η g τα $f(x) \in f(A)$ στα $g(f(x)) \in g(A)$



Πχ.

Να βρείτε την $f \circ g$ και την $g \circ f$ στις παρακάτω συναρτήσεις :

α. $f(x) = x + 1,\ g(x) = x^2 + 1$

Τα πεδία ορισμού των 2 συναρτήσεων είναι το $\mathbb{R}$ άρα τα πεδία ορισμών των $f \circ g,\ g \circ f$ είναι το $\mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1 + 1 = x^2 + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

β. $f(x) = \sqrt{x - 2},\ g(x) = x^2 + 2$

$D(f) = [2, +\infty), D(g) = \mathbb{R}$ άρα

$$D(f \circ g) = \{x \epsilon \mathbb{R} : g(x) \epsilon [2, +\infty)\} = \{x \epsilon \mathbb{R} : x^2 + 2\ \epsilon [2, +\infty)\} = \mathbb{R}$$

$$D(g \circ f) = \{x \epsilon [2, +\infty) : f(x) \epsilon \mathbb{R}\} = [2, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 2} = \sqrt{x^2 + 2 - 2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 + 2 = \left(\sqrt{x - 2}\right)^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

Ασκήσεις

Βιβλίο σελ. 142

3.4.3 – 3.4.4 – 3.4.5 – 3.4.6 – 3.4.8

Ορισμός 2

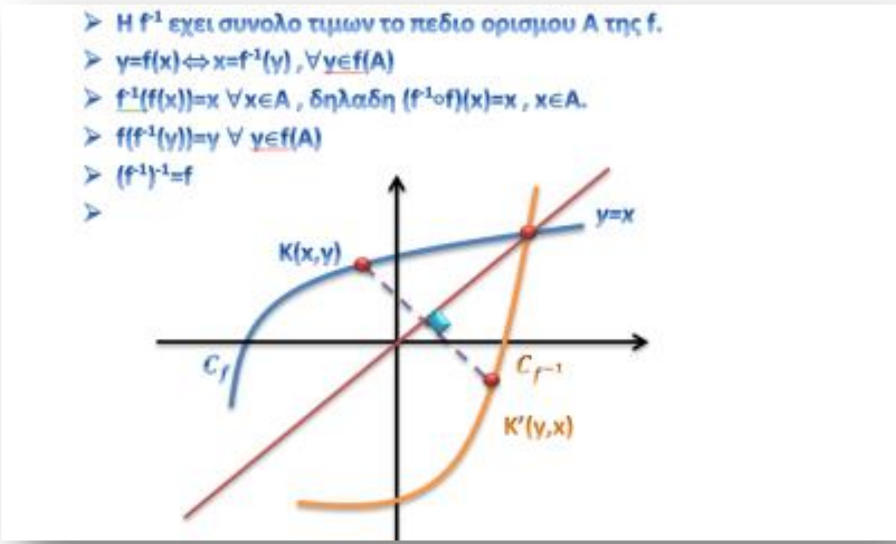
Έστω f μια αμφιμονοσήμαντη (1-1) συνάρτηση με D(f)=A. Ορίζουμε την **αντίστροφη συνάρτηση** και συμβολίζουμε f^{-1} την συνάρτηση με πεδίο ορισμού $D(f^{-1})=f(A)$ για την οποία για κάθε $y=f(x)\epsilon f(A)$ ισχύει :

$$f^{-1}(y)=f^{-1}\big(f(x)\big)=x$$

Ισχύει ότι :

$$f^{-1}\big(f(x)\big)=f\big(f^{-1}(x)\big)=x$$

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων f,f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων y=x.



Πχ.

Δίνεται την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2x-1}$

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της

β. Δείξτε ότι είναι 1-1

γ. Βρείτε την αντιστροφή της

α. Πρέπει $2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$. Άρα $D(f)=[\frac{1}{2},+\infty)$.

β. $x_1\neq x_2 \Rightarrow. 2x_1\neq 2x_2 \Rightarrow. 2x_1-1\neq 2x_2-1 \Rightarrow \sqrt{2x_1-1}\neq\sqrt{2x_2-1} \Rightarrow$ $f(x_1)\neq f(x_2)$ άρα f 1-1.

γ. Θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ώς προς x έχουμε :

$$y=f(x)\Rightarrow y=\sqrt{2x-1}\overset{y\geq 0}{\Longrightarrow} y^2=\sqrt{2x-1}^2\Rightarrow y^2=2x-1\Rightarrow x=\frac{y^2+1}{2}$$

Η αντίστροφη συνάρτηση έχει τύπο :

$$f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}\quad x\epsilon[0,+\infty)$$

Άσκησεις

Βιβλίο σελ 142

3.4.11 – 3.4.13