Σημειώσεις Μαθηματικών – 2

Συναρτήσεις - 3

Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

Κεφάλαιο 3 Συνέχεια Συναρτήσεων

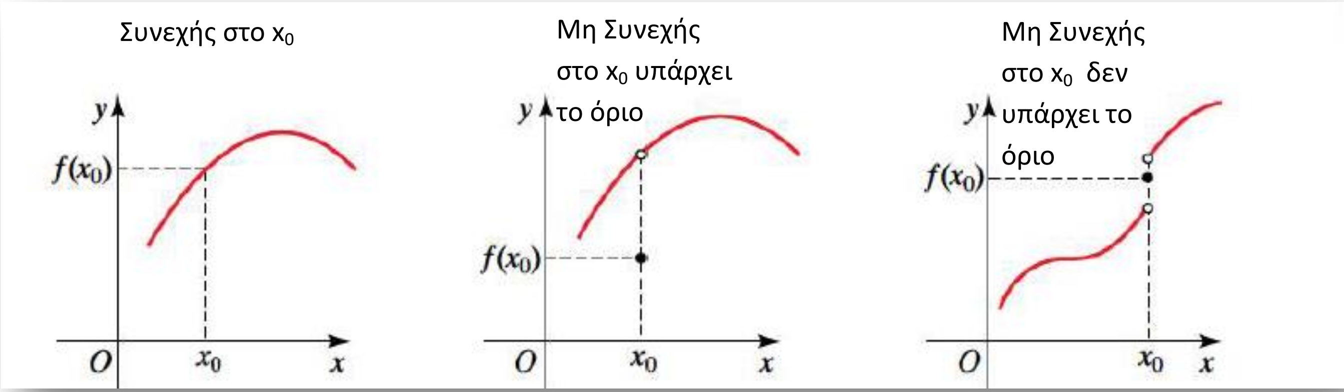
3.1 Όρισμός Συνεχούς Συνάρτησης

Ορισμός

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** στο $x_0 \in Df$ αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$, είναι πραγματικός αριθμός και

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Γραφικά μια συνάρτηση είναι συνεχής όταν δεν διακόπτεται η γραφική της παράσταση :



Αποδεινύεται ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους

Πολυωνυμικές – Ρητές – Τριγωνομετρικές – Εκθετικές – Λογαριθμικές .

Ισχύει επίσης :

Αν f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο x_0 τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι παρακάτω πράξεις τους:

$$1.\ f+g \quad 2.\ f-g \quad 3.\ f\cdot g \quad 4.\ \frac{f}{g} \quad 5.\ c\cdot f \quad 6.\ \sqrt{f} \quad 7.\ |f| \quad 8.\ f\circ g$$

Π.χ.

1. Βιβλίο 3.7.2 β)

$$f(x) = \begin{cases} 1-x \quad , \ x<1 \\ 0 \quad , \quad x=1 \\ x^2-2x+1 \ , \ x>1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής για x<1 ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής για x>1 ως πολυωνυμική

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο x_0=1 βρίσκοντας αρχικά τα πλευρικά όρια και το f(0) :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1-x) = 1-1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2-2x+1) = 1-2+1 = 0$$

f(1)=0

Αφού

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

Η f είναι συνεχής στο x_0=1 άρα είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

2. Βιβλίο 3.7.3 γ)

$$f(x) = \begin{cases} lnx \quad , & x \geq e \\ -2x+2 \quad , & x < e \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής για x<e ώς πολυωνυμική.

Η f είναι συνεχής για x>e ως λογαριθμική.

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο x_0 :

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^-} (-2x+2) = -2e+2$$

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = \lim_{x \to e^+} (lnx) = lne = 1$$

f(e)=lne=1

Η f δεν είναι συνεχής στο e αφού:

$$\lim_{x \to e^-} f(x) \neq \lim_{x \to e^+} f(x)$$

και άρα δεν υπάρχει το όριο.

3. Βιβλίο 3.7.4 β)

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{10} - 1 \quad , & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} \quad , & x < 1 \end{cases}$$

Αφού f είναι συνεχής στο x_0=1 πρέπει :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \quad (1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\alpha x^{10} - 1) = \alpha \cdot 1 - 1 = \alpha - 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

f(1)=α-1

Από την (1) προκύπτει :

$$\alpha - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

4. Να βρεθούν τα α, β αν η f είναι συνεχής στο x_0=2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \quad , & x > 2 \\ \alpha \quad , & x = 2 \\ x^2 + \beta \quad , & x < 2 \end{cases}$$

Αφού f είναι συνεχής στο x_0=2 πρέπει :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \quad (1)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + \beta) \quad = 4 + \beta$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$

f(2)=α

Απο την (1) προκύπτει :

$$4 + \beta = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \beta = -\frac{10}{3}$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

3.2 Θεώρημα Bolzano Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Ορισμός

Μιά συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ αν :

1. Είναι συνεχής για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
2. $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$

Θεώρημα Bolzano (Τσεχία 1781-1848)

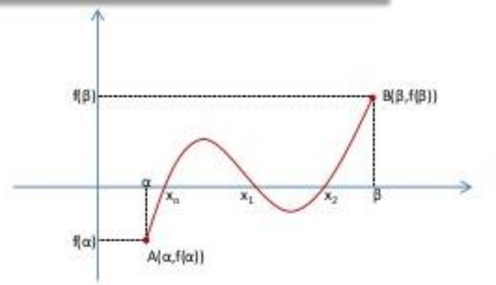
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ αν :

1. Η f είναι **Συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$
2. $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε f(ξ)=0. Δηλαδή η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β).

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Αν f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [α, β] και τα σημεία Α(α,f(α)), Β(β,f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x , τότε η γραφική παράσταση της f έχει με τον άξονα x΄x ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο (α, β).



Το Θεώρημα Bolzano μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα. **Δεν μας δίνει το πλήθος των ριζών σε ένα διάστημα ούτε ποιες είναι οι ρίζες της συνάρτησης.**

Πρόσημο Συνάρτησης

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει άμεσα ότι μια συνεχής συνάρτηση αν δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.
Άρα αν βρούμε τις ρίζες μιας συνεχούς συνάρτησης μπορούμε να βρούμε το προσημό της βρίσκοντας τυχαίες τιμές της.

Π.χ.

1. Βιβλίο 3.81 δ)

$$f(x) = 4^x - 3^x + 2^x - 2 \quad \Delta = [0,1]$$

Εφαρμόζω το θεώρημα Bolzano στο διάστημα Δ

- Η f είναι συνεχής στο [0,1] ώς αθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(0) = 4^0 - 3^0 + 2^0 - 2 = 1 - 1 + 1 - 2 = -1 < 0$
  $f(1) = 4^1 - 3^1 + 2^1 - 2 = 4 - 3 + 2 - 2 = 1 > 0$

Άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$ οπότε ισχύει το Θεωρ. Bolzano δηλαδή η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

3. Βιβλίο 3.8.3 γ)

$$\frac{\sqrt{|x|+2}}{x+2}+\frac{x^3+1}{x-2}=0 \quad (-2,2)$$

Δεν μπορούμε να αντικαταστασήσουμε το 2 και το -2 στην εξίσωση άρα θα βρούμε μια ισοδύναμη της :

$$\cancel{(x+2)}(x-2)\frac{\sqrt{|x|+2}}{\cancel{x+2}}+(x+2)\cancel{(x-2)}\frac{x^3+1}{\cancel{x-2}}=0$$

$$(x-2)(\sqrt{|x|+2})+(x+2)(x^3+1)=0$$

Θέτουμε $f(x)=(x-2)(\sqrt{|x|+2})+(x+2)(x^3+1)$ και εφαρμόζω θεώρημα Bolzano στο [-2,2]

- Η f συνεχής στο[-2,2] ώς πράξεις συνεχών.
- $f(-2)=(-2-2)(\sqrt{|-2|+2}+(-2+2)(-8+1)=-8<0$
- $f(2)=(2-2)(\sqrt{|2|+2}+(2+2)(8+1)=36>0$

Άρα f(-2)·f(2)<0 οπότε ισχύει το Θεωρ. Bolzano δηλαδή η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-2,2).

3. Βιβλίο 3.8.4 γ)

$$f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(x^4-16)$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $x\geq 0$ άρα Df=[0,+∞)

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού ως πράξη συνεχών.

Θα βρούμε τις ρίζες της f:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(x^4-16)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(x^2-4)\cdot(x^2+4)=0$$

$$\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$$

$$x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2\Leftrightarrow\begin{cases}2\\-2 \quad Απορίπτεται\end{cases}$$

$$x^2+4=0 \quad Αδύνατη$$

Άρα οι ρίζες της f είναι $x_1=1$, $x_2=2$.

Από τον ακόλουθο πίνακα και με τυχαίες δοκιμές βρίσκουμε το πρόσημο της f

	1 $\frac{3}{2}$ 2	2 4 +∞
f(α)	$f\left(\frac{3}{2}\right)=-2{,}4<0$	$f(4)=48>0$
Πρόσημο	−	+

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο [α,β] αν :

1. Η f είναι συνεχής στο [α,β]
2. $f(\alpha) \neq f\beta)$

Τότε για κάθε αριθμό λ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχεί ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\lambda$.

Απόδειξη

Έστω f(α)<λ<f(β). Θεωρούμε τη συνάρτηση g(x)=f(x)-λ. Ισχύει ότι :

- g συνεχής στο [α,β] ως διαφορά συνεχών
- g(α)=f(α)-λ<0 και g(β)=f(β)-λ>0 οπότε g(α)g(β)<0

Άρα ισχύει το θεώρημα του Bolzano δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \lambda = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \lambda$$

Από το Θ.Ε.Τ. συμπεραίνουμε ότι η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα που το συμβολίζουμε με f(Δ).

Άρα γνωρίζοντας την μονοτονία μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα μπορούμε να βρούμε την εικόνα του ως εξής :

$$f \nearrow \quad f([a,\beta]) = [f(a), f(\beta)]$$
$$f \searrow \quad f([a,\beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$$
$$f \nearrow \quad f\big((a,\beta)\big) = \left(\lim_{x\to a^+} f(x)\,,\, \lim_{x\to\beta^-} f(x)\right)$$
$$f \searrow \quad f\big((a,\beta)\big) = \left(\lim_{x\to\beta^-} f(x)\,,\, \lim_{x\to a^+} f(x)\right)$$

΄Π.χ.

1. Βιβλίο 3.8.6 γ)

$$f(x) = 2lnx + 1 \quad , \quad [1, e^2]$$

Η f είναι συνεχής ώς λογαριθμική και Γνησιως Αύξουσα στο $[1, e^2]$ άρα

$$f([1, e^2]) = [f(1), f(e^2)] = [1,5]$$

2. Βιβλίο 3.8.6 ε)

$$f(x) = e^x + 1 \quad , \quad (-\infty, 0)$$

Η f είναι συνεχής ώς εκθετική και Γνησιως Αύξουσα στο $(-\infty, 0)$. Βρίσκουμε πρώτα τα όρια στο -∞ και στο 0.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x + 1) = 1 + 1 = 2$$
$$f((-\infty, 0)) = [\lim_{x\to-\infty} f(x)\,,\, \lim_{x\to 0^-} f(x)] = (1,2)$$