Σημειώσεις Μαθηματικών – 3

Σφαιρική Τριγωνομετρία

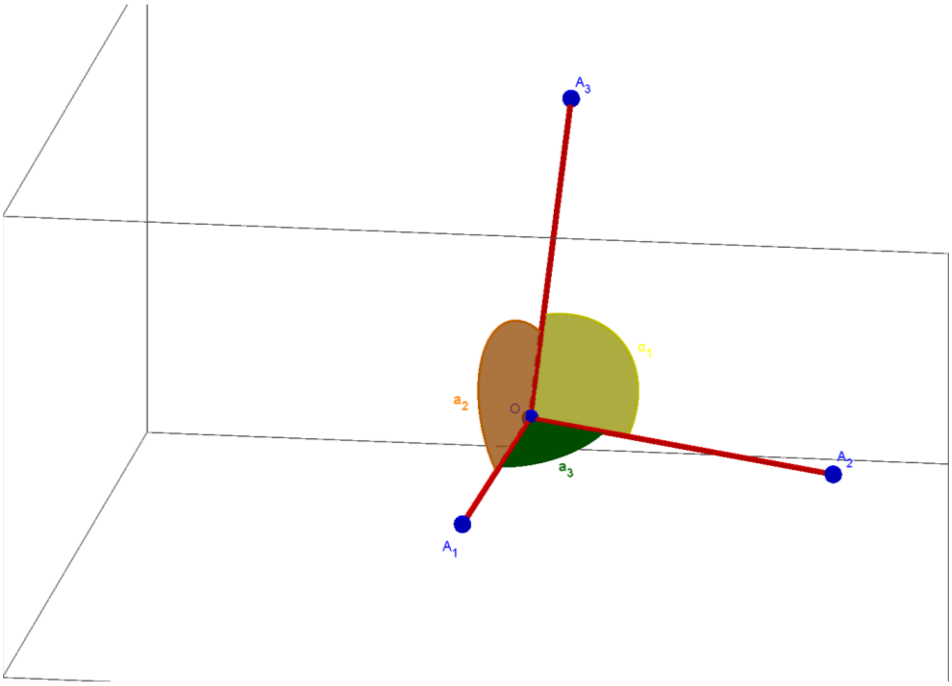
Ραφαήλ Φάνης Μαθηματικός

Κεφάλαιο 1 Στερεομετρία

1.1 Γωνία στο χώρο

Ορισμός 1.

Τρίεδρη ονομάζεται η στερεά γωνία που έχει ακριβώς τρείς ακμές, σχηματίζεται δηλαδή από τρία τεμνόμενα επίπεδα στον χώρο.



Η Τρίεδρη γωνία ονομάζεται Ο.$A_1A_2A_3$ όπου

1. Ο η **κορυφή** της
2. ΟA_1, ΟA_2, ΟA_3 οι **ακμές** της .

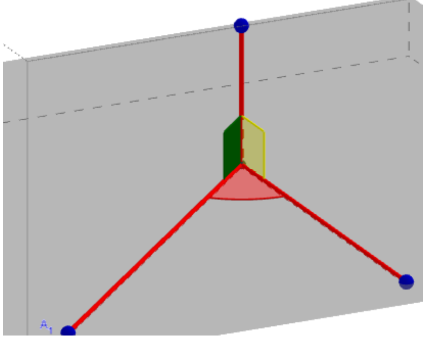
Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ακμές μιας τρίεδρης γωνίας ονομάζονται **έδρες** της γωνίας δηλαδή :

$$\widehat{A_1OA_2} = \hat{\alpha}_3 \,, \widehat{A_2OA_3} = \hat{\alpha}_1 \,, \widehat{A_1OA_3} = \hat{\alpha}_2$$

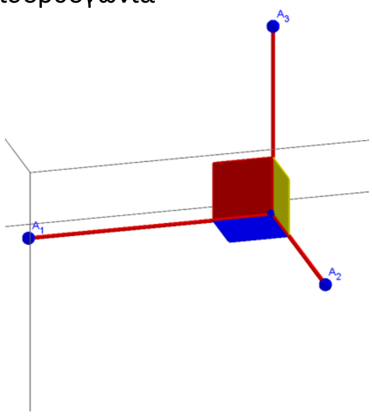
Ορισμός 2

1. Μια τρίεδρη γωνία λέγεται **Ισοσκελής** όταν έχει δύο έδρες ίσες.
2. Μια τρίεδρη γωνία είναι **Ισοεδρική** όταν όλες οι έδρες της είναι ίσες.
3. Μια τρίεδρη γωνία λέγεται **Δισορθογώνια** όταν δύο έδρες της είναι ορθές.
4. Μια τρίεδρη γωνία λέγεται **Τρισορθογώνια** όταν και οι τρείς έδρες της είναι ορθές.

Δισορθογώνια



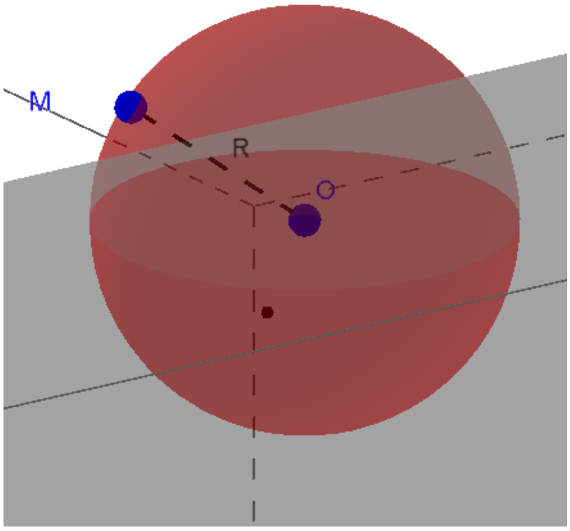
Τρισορθογώνια



1.2 Σφαίρα – Σφαιρικές Γωνίες

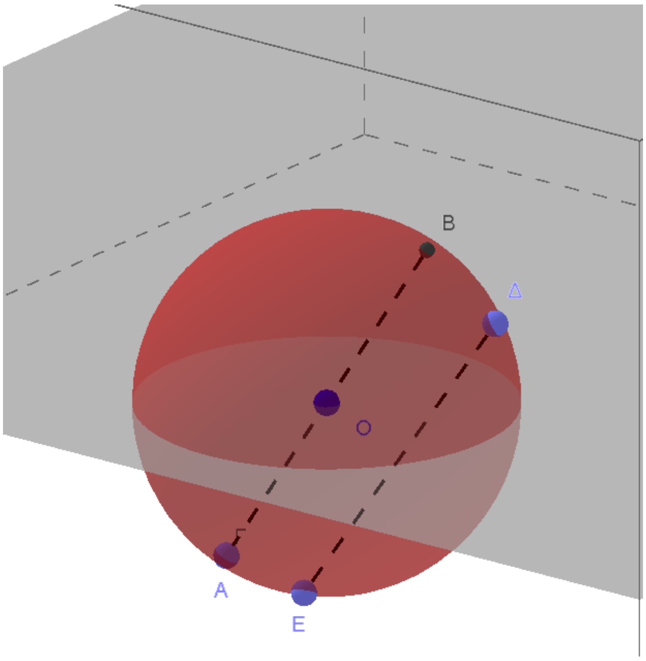
Ορισμός 1

Σφαίρα ονομάζεται το σύνολο των σημείων του χώρου πουα απέχουν απο το κέντρο της Ο σταθερή απόσταση ίση με την ακτίνα R.



Ορισμός 2

Χορδή μιας σφαίρας ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία της. Αν μια χορδή περνα από το κέντρο της σφαίρας τότε ονομέζεται **Διάμετρος=δ.**
Ισχύει ότι δ=2R. Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή της σφαίρας. Τα ακρα μιας διαμέτρου ονομάζονται **Αντιδιαμετρικά Σημεία.**



Ορισμός 3

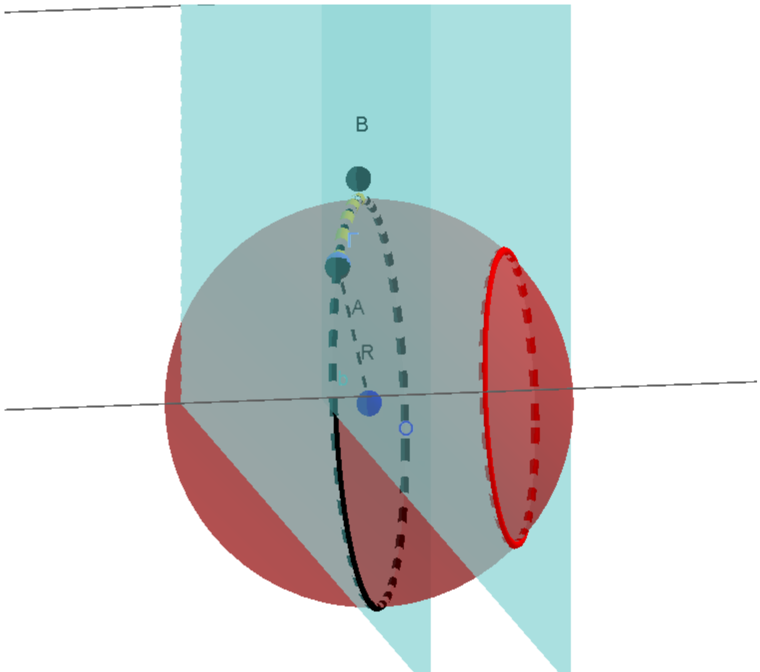
Κάθε κύκλος που προκύπτει από την τομή μιας σφαίρας με ένα επίπεδο που διέρχεται απο το κέντρο της ονομάζεται **Μέγιστος κύκλος.**
Δύο μέγιστοι κύκλοι είναι πάντα ίσοι και τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία. Από δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία διέρχεται μοναδικός μέγιστος κύκλος.

Ορισμός 4

Απόσταση δύο σημείων μιας σφαίρας ονομάζουμε το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου που διέρχεται απο αυτά.

Ορισμός 5

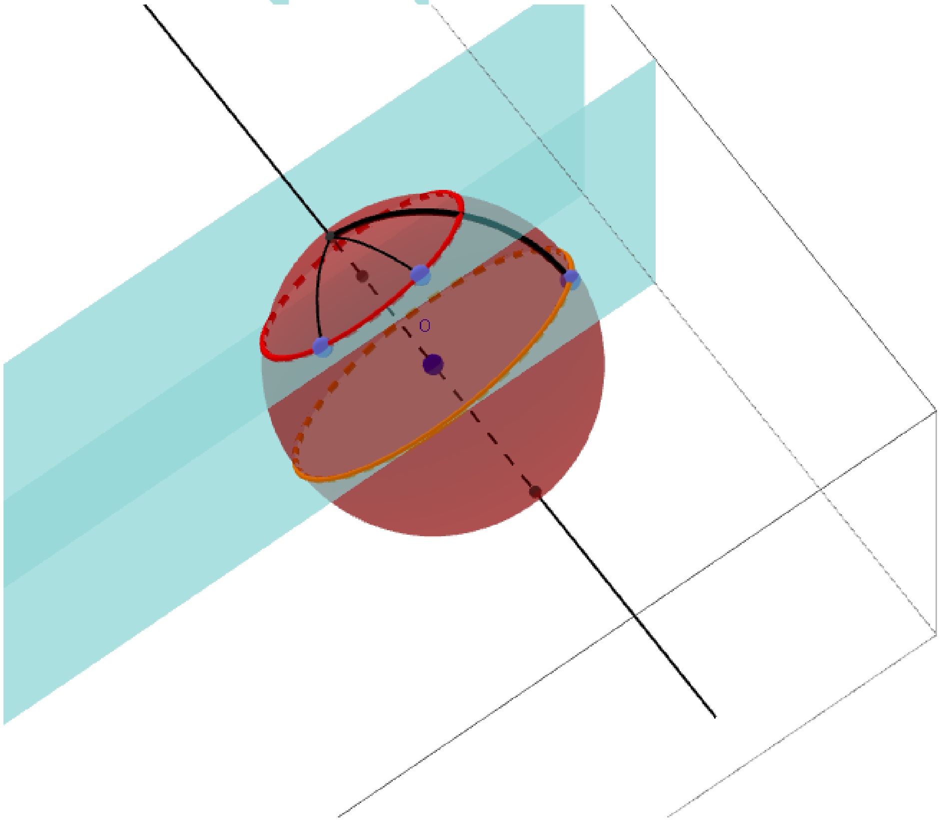
Κάθε κύκλος που προκύπτει από την τομή μιας σφαίρας με ένα επίπεδο που δεν διέρχεται απο το κέντρο της ονομάζεται **Μικρός κύκλος.** Δύο μικροί κύκλοι είναι ίσοι όταν ισαπέχουν από το κέντρο της και άνισοι όταν οι αποστάσεις είναι αντίστροφα άνισες.



Δύο κύκλοι ονομάζονται **παράλληλοι** όταν τα επίπεδα τους είναι παράλληλα.

Ορισμός 6

Η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο ενός κύκλου και είναι κάθετη στο επιπεδό του καλείται **άξονας** του κύκλου. Τα σημεία που ο άξονας τέμνει τη σφαίρα

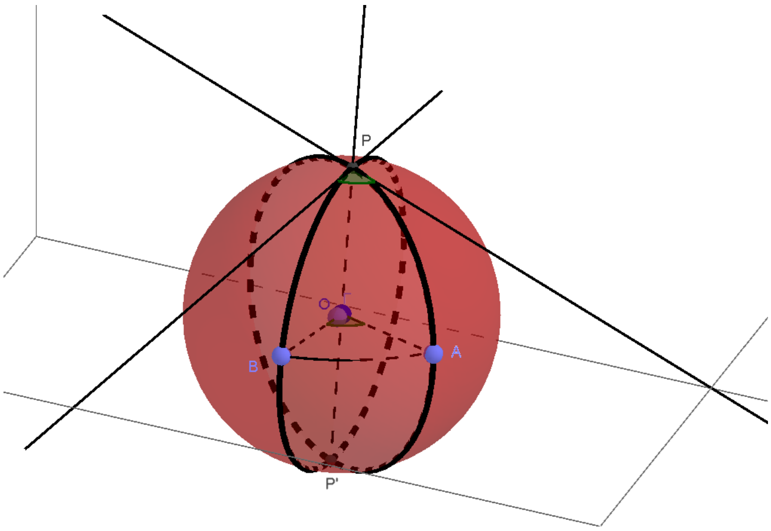


ονομάζονται **Πόλοι** του κύκλου.
Κάθε σημείο ενός κύκλου ισαπέχει από τους πόλους του. Το τόξο που συνδεέι σημείο κύκλου με τον κοντινότερο πόλο του ονομάζεται **σφαιρική ακτίνα του κύκλου. Η σφαρική ακτίνα μεγίστου κύκλου είναι 90^0.**

Ορισμός 7

Το μέρος της σφαίρας μεταξύ δύο τεμνόμενων τόξων μεγίστων κύκλων ονομάζεται **σφαιρική γωνία.** Τα τόξα αυτά ονομάζονται πλευρές της γωνίας και το σημείο τομής κορυφή της. Κάθε σφαιρική γωνία με κορυφή P έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της γωνίας $x\widehat{P}y$ όπου Px και Py οι εφαπτομένες της σφαίρας στοP.

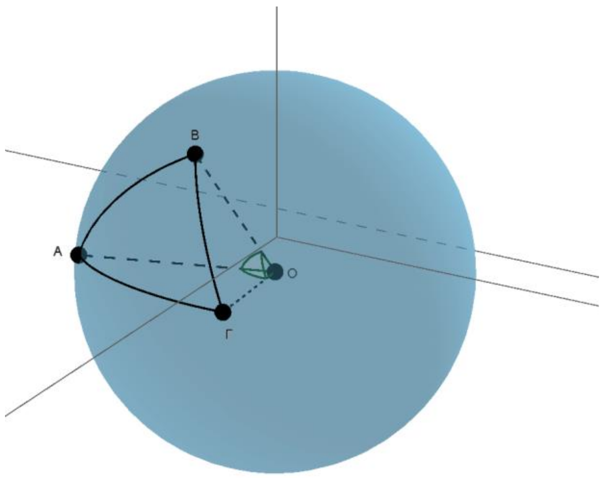
$$\hat{\theta} = x\widehat{P}y = \widehat{AOB}$$



1.3 Σφαιρικά τρίγωνα

Ορισμός 1

Σφαιρικό Τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ τριων τεμνόμενων αν δύο, τόξων μεγίστων κύκλων. Κάθε σφαιρικό τρίγωνο αντιστοιχεί στην Τριεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ
Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ τα τρία τόξα ονομάζονται πλευρές του τριγώνου και είναι ισα με τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους :
$AB = \gamma = \widehat{AOB}, A\Gamma = \beta = \widehat{AO\Gamma}, B\Gamma = \alpha = \widehat{BO\Gamma}$
Κάθε πλευρά ενός τριγώνου ίση με α rad εχει μήκος :



$$S = \alpha \cdot R$$

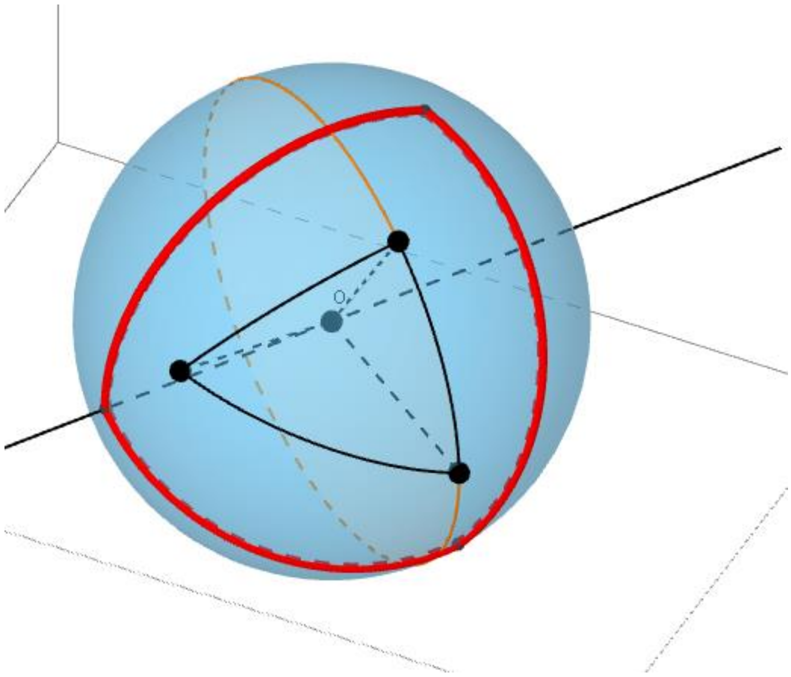
Οι σφαιρικές γωνίες Α, Β ,Γ κάθε σφαιρικού τριγώνου ονομάζονται γωνίες του τριγώνου.

Είδη σφαιρικών τριγώνων.

Ορθογώνιο	Αν μια σφαιρική γωνία του είναι ίση με μια ορθή γωνία (90°).
Δισορθογώνιο	Αν δύο σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90°.
Τρισορθογώνιο	Αν και οι τρεις σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90°.
Ισόπλευρο	Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.
Ισοσκελές	Αν δύο πλευρές του είναι ίσες.
Σκαληνό	Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
Ορθόπλευρο	Αν μια πλευρά του έχει μέτρο ίσο με 90°.
Δισορθόπλευρο	Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90°.
Τρισορθόπλευρο	Αν τρεις πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90°.
Τυχόν (ή πλάγιο ή κοινό)	Αν δεν έχει αναγκαστικά μια πλευρά ή μια γωνία μέτρου 90°.

Ορισμός 2

Πολικό τρίγωνο Α'Β'Γ' σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο που έχει κορυφές τους πόλους των μεγίστων κύκλων των τόξων των πλευρών του ΑΒΓ με Α' ο πόλος του ΒΓ που βρίσκεται στο ίδιο ημισφαίριο με το Α.



Ισχύει ότι :

1. Αν το Α΄Β΄Γ΄ πολικό του ΑΒΓ τότε και το ΑΒΓ πολικό του Α΄Β΄Γ΄.
2. Κάθε πλευρά α=ΒΓ είναι παραπληρωματική της Σφαιρικής γωνίας Α' του πολικού δηλαδή :

   α+Α'=β+Β'=γ+Γ'=180^0

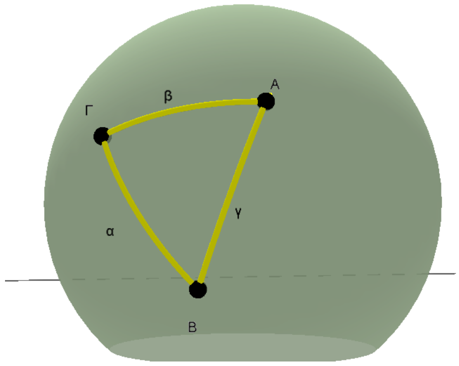
   Α+α'=Β+β'=Γ+γ'=180^0
3. Αν Α, Β, Γ οι γωνίες σφαιρικού τριγώνου σε μέρη ορθής, R η ακτίνα της σφαίρας και (ΑΒΓ) το εμβαδό του τότε η διαφορά Α+Β+Γ-2=2S ονομάζεται σφαιρική υπεροχή και:

$$(ΑΒΓ) = 2S \cdot \frac{1}{8} \cdot E$$

όπου Ε το εμβαδό επιφάνειας σφαίρας με $E = 4\pi R^2$.

1.4 Επίλυση Σφαιρικών Τριγώνων

Επίλυση σφαιρικού τριγώνου ονομάζουμε τη διαδικασία εύρεσης όλων των στοιχείων του (Πλευρές – Γωνίες) όταν μας δίνονται 3 στοιχεία του. Για τη διαδικασία αυτή χρησιμοποιούμε κάποιους τριγωνομετρικούς τύπους καθώς και τους πίνακες του Norie's.



<u>1. Τύποι Συνημιτόνων (1ος Θεμελιώδης)</u>

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A}$$
$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B}$$
$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma}$$

Με τους τύπους αυτούς βρίσκουμε τη πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία **(ΠΓΠ)**.

<u>2. Τύποι Ημιτόνων (2ος Θεμελιώδης)</u>

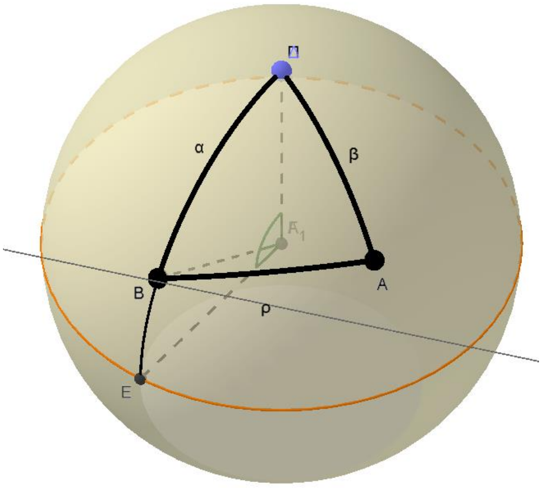
Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\boldsymbol{\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}}$$

Με τους τύπους αυτούς επιλύουμε σφαιρικό τρίγωνο όταν μας δίνουν μια πλευρά και την απέναντι γωνία και ένα ακόμα στοιχείο **(ΠΠΓ, ΓΓΠ)**

Πχ1.

Σε τρίγωνο ΠΑΒ, Π ο Βόρειος Πόλος και Α, Β δύο σημεία της σφαίρας με $A=68^0$, $AB=\rho=60^0 30'$, $\Pi=80^0 16'$. Να βρεθεί το πλάτος του Β. (Β σημείο του βόρειου ημισφαιρίου)



Το πλάτος το Β είναι ίσο με το τόξο ΕΒ στο σχήμα. Θα επιλύσουμε το τρίγωνο ΠΒΑ για να βρούμε τη πλευρά ΠΒ=α χρησιμοποιώντας το νόμο ημιτόνων έχουμε :

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu\rho}{\eta\mu\Pi} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu\rho \cdot \eta\mu A \cdot \frac{1}{\eta\mu\Pi} \overset{\frac{1}{\eta\mu\Pi}=\sigma\tau\varepsilon\mu\Pi}{\Leftrightarrow}$$

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu\rho \cdot \eta\mu A \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu\Pi \quad (1)$$

Λογαριθμίζουμε την (1) και έχουμε :

$$log\eta\mu\alpha = log\eta\mu\rho + log\eta\mu A + log\sigma\tau\varepsilon\mu\Pi$$

Από τους πίνακες βρίσκουμε :

$$log\eta\mu\alpha = (+)\begin{cases} log\eta\mu\rho = log\eta\mu(60^0 30') = 9{,}93970 \\ log\eta\mu A = log\eta\mu(68^0) = 9{,}96717 \\ log\sigma\tau\epsilon\mu\Pi = log\sigma\tau\epsilon\mu(80^0 16') = 0{,}00630 \end{cases} \Leftrightarrow log\eta\mu\alpha = \cancel{1}9{,}91317$$

Από τους πίνακες διαπιστώνουμε ότι :

α=54^0 58′ ή α=125^0 02′

Όμως το Β ανήκει στο Βόρειο ημισφαίριο άρα α=54^0 58′. Το πλάτος του Β είναι :

$$EB = 90^0 - \alpha = 90^0 - 54^0 58' = 35^0 02'$$

<u>3. Πολικοί Τύποι Θεμελιωδών</u>

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma - \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma}$$
$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu A \cdot \eta\mu\Gamma - \sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma}$$
$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B \cdot \eta\mu A - \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu A}$$

<u>4. Τύποι μισών Γωνιών</u>

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ορίζουμε :

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \kappa = \sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau}}$$

τότε ισχύει :

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{\kappa}{\eta\mu(\tau-\alpha)}}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{\kappa}{\eta\mu(\tau-\beta)}}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\kappa}{\eta\mu(\tau-\gamma)}}$$

<u>5. Τύποι μισών πλευρών</u>

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ορίζουμε :

$$T = \frac{A + B + \Gamma}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad K = \sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu(T-A)\cdot\sigma\upsilon\nu(T-B)\cdot\sigma\upsilon\nu(T-\Gamma)}{-\sigma\upsilon\nu T}}$$

τότε ισχύει :

$$\boldsymbol{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{K}{\sigma\upsilon\nu(T-A)}}$$
$$\boldsymbol{\sigma\varphi\frac{\beta}{2} = \frac{K}{\sigma\upsilon\nu(T-B)}}$$
$$\boldsymbol{\sigma\varphi\frac{\gamma}{2} = \frac{K}{\sigma\upsilon\nu(T-\Gamma)}}$$

<u>6. Τύποι Gauss</u>

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

$$\boldsymbol{\frac{\eta\mu\frac{A+B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\eta\mu\frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} = \frac{\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu\frac{\gamma}{2}}}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}}{\eta\mu\frac{\gamma}{2}}$$

7. Τύποι Napier

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\varepsilon\varphi\frac{\alpha-\beta}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{A-B}{2}}{\eta\mu\frac{A+B}{2}}$$

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}{\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}$$

Τους παραπάνω τύπους τους χρησιμοποιούμε όταν γνωρίζουμε 2 πλευρές και την περιεχόμενη γωνία (ΠΓΠ) ή 2 γωνίες και την προσκείμενη πλευρά (ΓΠΓ).

8. Τύποι των 4 συνεχών στοιχείων

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

$$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi A+\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi B$$
$$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi A+\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma$$
$$\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi B+\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma$$
$$\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu A=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi B+\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi A$$
$$\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu A=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi A$$
$$\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi B$$

Οι παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται στην επίλυση του τριγώνου θέσεως.

1.5 Παρημίτονα – Ημιπαρημίτονα

Ορισμός

Παρημίτονο μιας γωνίας ω **(Versine)** ονομάζουμε τη διαφορά :

$$ver\omega=\pi\rho\mu\omega=1-\sigma\upsilon\nu\omega$$

Ημιπαρημίτονο μιας γωνίας ω **(Haversine)** ονομάζουμε τη διαφορά :

$$hav\omega=\eta\mu\pi\rho\omega=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}$$

Ισχύει ότι : ημπρω>0.

Τύποι ημιπαρημιτόνων

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

α) Γωνιών :

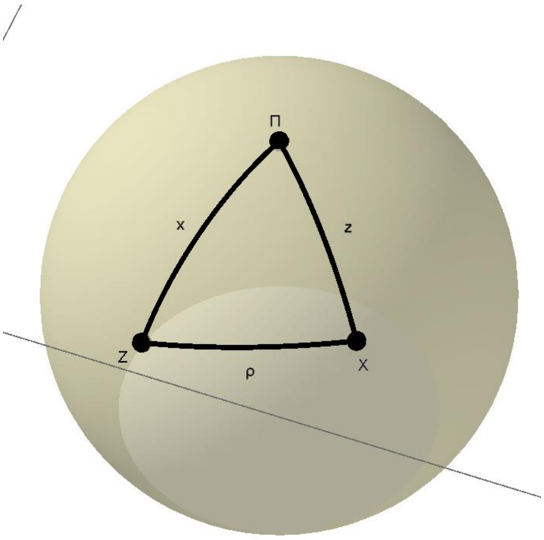
$$\eta\mu\pi\rho A=\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$$
$$\eta\mu\pi\rho B=\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$$
$$\eta\mu\pi\rho\Gamma=\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha$$

β) Πλευρών :

$$\eta\mu\pi\rho\alpha=\eta\mu\pi\rho(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\pi\rho A$$
$$\eta\mu\pi\rho\beta=\eta\mu\pi\rho(\alpha-\gamma)+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\pi\rho B$$
$$\eta\mu\pi\rho\gamma=\eta\mu\pi\rho(\beta-\alpha)+\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\pi\rho\Gamma$$

Πχ2.

Σε τρίγωνο ΠΖΧ δίνονται Π=50^0, x=$62^0 10'$, z=$70^0 45'$. Να υπολογισθεί η πλευρά ρ και η γωνία Ζ.



Για την πλευρά ρ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο ημιπαρημιτόνου για την πλευρά ρ δηλαδή:

$$\eta\mu\pi\rho\rho = \eta\mu\pi\rho(z - x) + \eta\mu z \cdot \eta\mu x \cdot \eta\mu\pi\rho\Pi$$

Για ευκολία στους υπολογισμούς θέτουμε :

$$\eta\mu\pi\rho\kappa = \eta\mu z \cdot \eta\mu x \cdot \eta\mu\pi\rho\Pi$$

Λογαριθμίζοντας έχουμε :

$$log\eta\mu\pi\rho\kappa = log\eta\mu z + log\eta\mu x + log\eta\mu\pi\rho\Pi$$

Από τους πίνακες έχουμε :

$$log\eta\mu\pi\rho\kappa = (+)\begin{cases} log\eta\mu z = log\eta\mu(70^0 45') = 9{,}97501 \\ log\eta\mu x = log\eta\mu(62^0 10') = 9{,}94660 \\ log\eta\mu\pi\rho\Pi = log\eta\mu\pi\rho(50^0) = 9{,}25190 \end{cases} \Leftrightarrow log\eta\mu\pi\rho\kappa = \cancel{2}9{,}17351$$

Άρα $\eta\mu\pi\rho\kappa = 0{,}14911 \quad \kappa\alpha\iota \quad \eta\mu\pi\rho(z - x) = \eta\mu\pi\rho(8^0 35') = 0{,}00560$

Οπότε $\eta\mu\pi\rho\rho = 0{,}14911 + 0{,}00560 = 0{,}15471$ άρα ρ=$46^0 19{,}5'$.

Για την γωνία Ζ έχουμε τον τύπο Γωνιών ημιπαρημιτόνων δηλαδή :

$$\eta\mu\pi\rho Z = \eta\mu(\tau - x) \cdot \eta\mu(\tau - \rho) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu x \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\rho$$

$$\tau = \frac{x + z + \rho}{2} = 89^0 37{,}25'$$

και $\tau - x = 27^0 27{,}25'$, $\tau - \rho = 43^0 17{,}75'$ οπότε λογαριθμίζοντας έχουμε :

$$log\eta\mu\pi\rho Z = log\eta\mu(\tau - x) + log\eta\mu(\tau - \rho) + log\sigma\tau\epsilon\mu x + log\sigma\tau\epsilon\mu\rho$$

Από τους πίνακες έχουμε :

$$log\eta\mu\pi\rho Z = \begin{cases} log\eta\mu(\tau - x) = log\eta\mu 27^0 27{,}25' = 9{,}66374 \\ log\eta\mu(\tau - \rho) = log\eta\mu 43^0 17{,}75' = 9{,}83618 \\ log\sigma\tau\epsilon\mu x = log\sigma\tau\epsilon\mu 62^0 10' = 0{,}05340 \\ log\sigma\tau\epsilon\mu\rho = log\sigma\tau\epsilon\mu 46^0 19{,}5' = 0{,}14070 \end{cases} \Leftrightarrow log\eta\mu\pi\rho Z = \cancel{1}9{,}69402$$

Από τους πίνακες έχουμε Ζ=89^0 21,23'.

Ασκηση

Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ αν α=$103^0 30'$, β=$42^0 40'$, Γ=$48^0 20'$.

1.6 Επίλυση Ορθογωνίων και Ορθόπλευρων Σφαιρικών Τριγώνων

Για την επίλυση των **ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων**, χρησιμοποιούμε τον **Μνημονικό κανόνα του Napier** και τα 2 **Θεωρήματα των Τεταρτημορίων** .

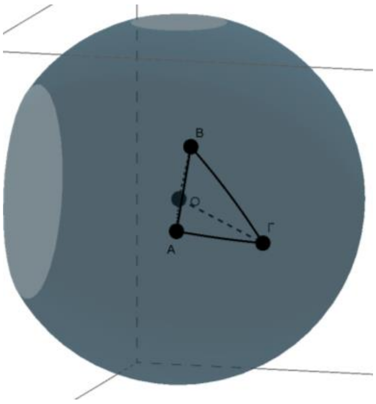
Θεωρήματα των Τεταρτημορίων

1^o Θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο μια γωνία (εκτός της ορθής) και η απέναντι πλευρά της ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο. Δηλαδή είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες.

2^o Θεώρημα

α) Αν η υποτείνουσα ενος ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο **πρώτο** τεταρτημόριο (**οξεία**) τότε οι δύο άλλες πλευρές και οι δύο γωνίες (εκτός της ορθής) ανήκούν στο ίδιο τεταρτημόριο (και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες).



$\mathbf{B\Gamma<90^0} \Leftrightarrow A\Gamma, AB, B, \Gamma<90^0$

ή

$\mathbf{B\Gamma<90^0} \Leftrightarrow A\Gamma, AB, B, \Gamma>90^0$

β) Αν η υποτείνουσα ενος ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο **δεύτερο** τεταρτημόριο (**αμβλεία**) τότε οι δύο άλλες πλευρές και οι δύο γωνίες (εκτός της ορθής) ανήκούν σε διαφορετικά τεταρτημόρια (μια οξεία η άλλη αμβλεία).

$\mathbf{B\Gamma>90^0} \Leftrightarrow A\Gamma, B<90^0$ και $AB, \Gamma>90^0$

ή

$\mathbf{B\Gamma>90^0} \Leftrightarrow A\Gamma, B>90^0$ και $AB, \Gamma<90^0$

Τα δύο αυτά θεωρήματα μας βοηθούν να επιλέξουμε τη σωστή γωνία από τους πίνακες όταν ξέρουμε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό της.

Τύποι και Μνημονικός Κανόνας Napier

Τύποι Napier

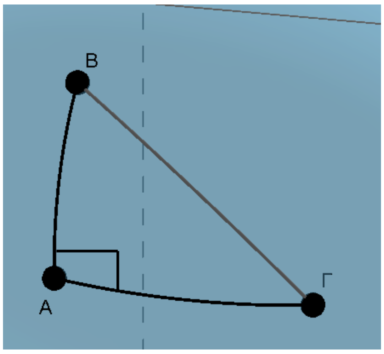
Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^0$ ισχύει :

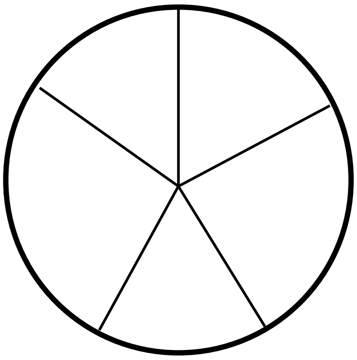
1. $\boldsymbol{\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B}$	**6.** $\boldsymbol{\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma}$
2. $\boldsymbol{\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma}$	**7.** $\boldsymbol{\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi B}$
3. $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma}$	**8.** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma}$
4. $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B}$	**9.** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha}$
5. $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma}$	**10.** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha}$

Μνημονικός Κανόνας Napier

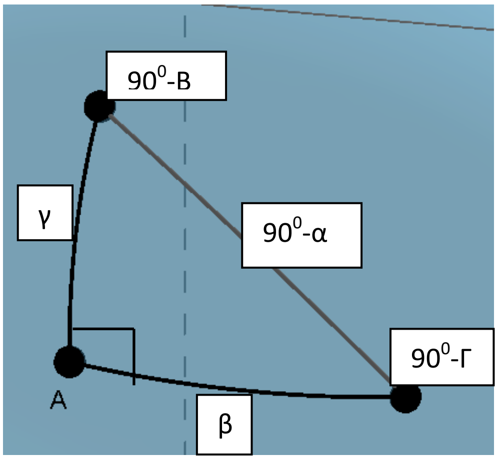
Ο Napier διατύπωσε δύο μνημονικούς κανόνες με τη βοήθεια των οποίων βρίσκουμε όποιον τύπο απο τους παραπάνω δέκα χρειαζόμαστε.

Για να τους χρησιμοποιήσουμε αρχικά κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90^0 και έναν κυκλικό δίσκο χωρισμένο σε πέντε κυκλικούς τομείς.

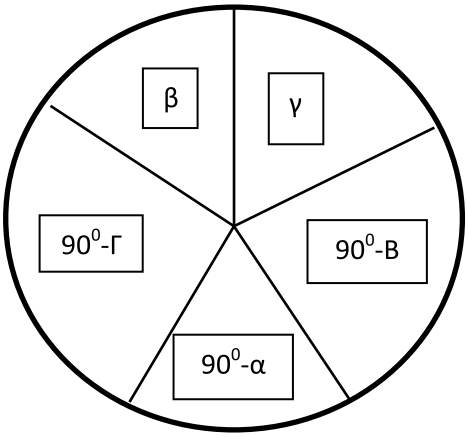




Στη συνέχεια ονομάζουμε τα στοιχεία του σφαιρικού τριγώνου αλλάζοντας την πλευρά α σε 90^0-α και τις γωνίες Β, Γ σε 90^0-Β και 90^0-Γ αντίστοιχα.



Ξεκινώντας από ένα κυκλικό τομέα στον κύκλο μεταφέρουμε τα στοιχεία από το τρίγωνο στον κυκλικό δίσκο κυκλικά και αριστερόστροφα εκτός της ορθής Α :



Κάθε στοιχείο στον κυκλικό δίσκο έχει δύο γειτονικά ή **προσκείμενα στοιχεία**. Πχ. το 90^0-α έχει προσκείμενα τα 90^0-Γ και 90^0-Β.

Κάθε στοιχείο στον κυκλικό δίσκο έχει δύο **απέναντι στοιχεία** . Πχ. το 90^0-α έχει απέναντι τα β, γ.

$1^{ος}$ Μνημονικός Κανόνας

Το ημίτονο κάθε στοιχείου στον κυκλικό δίσκο είναι ίσο με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκείμενων στοιχείων του.

Π.χ

$$\eta\mu(90^0 - B) = \varepsilon\varphi(90^0 - \alpha) \cdot \varepsilon\varphi\gamma$$

Όμως ημ(90^0-Β)=συνΒ και εφ(90^0-α)=σφα άρα τελικά έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu B = \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\gamma$$

Δηλαδή προέκυψε ο τύπος 10 στον πίνακα.

$2^{ος}$ Μνημονικός Κανόνας

Το ημίτονο κάθε στοιχείου στον κυκλικό δίσκο είναι ίσο με το γινόμενο των συνιμητόνων των απέναντι στοιχείων του .

Πχ.

$$\eta\mu(90^0 - B) = \sigma\upsilon\nu(90^0 - \Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$$

Οπότε :

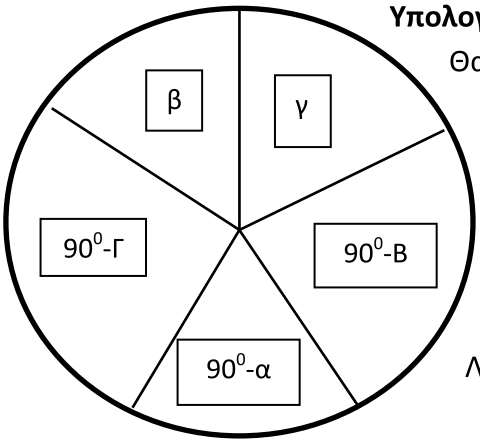
$$\sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$$

Δηλαδή προέκυψε ο τύπος 5 στον πίνακα.

Για να επιλύσουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο διαλέγουμε 3 από τους 10 τύπους με τη βοήθεια του κυκλικού δίσκου, έτσι ώστε να περιέχεται ένα άγνωστο και δύο γνωστά στοιχεία. Δεν χρησιμοποιούμε στοιχείο που βρήκαμε για τον υπολογισμό ενός άλλου στοιχείου. Χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα των τεταρτημορίων για να διαλέξουμε σωστή γωνία από τους πίνακες. Τέλος επιλέγουμε έναν τύπο που συνδυάζει τα τρία στοιχεία που βρήκαμε και κάνουμε επαλήθευση (Τύπος επαλήθευσης)

Πχ3.

Να επιλυθεί το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90^0 με α=96^0 και β=97^0.



Υπολογισμός της Β

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την β, 90^0-α και 90^0-Β. Η β έχει απέναντι τις 90^0-α και 90^0-Β άρα :

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^0 - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^0 - B)$$

ή

$$\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow \eta\mu B = \eta\mu\beta \cdot \frac{1}{\eta\mu\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu B = \eta\mu\beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu\alpha$$

Λογαριθμίζοντας έχουμε :

$$log\eta\mu B = log\eta\mu 97^0 + log\sigma\tau\varepsilon\mu 96^0 \Leftrightarrow$$

$$log\eta\mu B = log\eta\mu 83^0 + log\sigma\tau\varepsilon\mu 84^0 \Leftrightarrow$$

$$log\eta\mu B = 9{,}99675 + 0{,}00239 = 9{,}99914$$

Από τους πίνακες Β=$86^0 24'$ ή Β=$93^0 36'$. Όμως αφού η β αμβλεία και η Β αμβλεία άρα τελικά **Β=$93^0 36'$**.

Υπολογισμός της γ

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την γ, 90^0-α και β. Η 90^0-α έχει απέναντι τις γ, β άρα :

$$\eta\mu(90^0 - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\beta} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \tau\varepsilon\mu\beta$$

$$log\sigma\upsilon\nu\gamma = log\sigma\upsilon\nu\alpha + log\tau\varepsilon\mu\beta$$

$$log\sigma\upsilon\nu\gamma = log\sigma\upsilon\nu 84^0 + log\tau\varepsilon\mu 83^0 = 9{,}01924 + 0{,}91411 = 9{,}93335$$

Από τους πίνακες γ=$30^0 55'$ ή γ=$149^0\ 05'$. Η υποτείνουσα α είναι αμβλεία άρα αφού β αμβλεία η γ οξεία οπότε **γ=$30^0 55'$**.

Υπολογισμός της Γ

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την 90^0-Γ, 90^0-α και β. Η 90^0-Γ έχει προσκείμενες τις 90^0-α, β άρα :

$$\eta\mu(90^0 - \Gamma) = \varepsilon\varphi(90^0 - \alpha) \cdot \varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta$$

$$log\sigma\upsilon\nu\Gamma = log\sigma\varphi 84^0 + log\varepsilon\varphi 83^0 = 9{,}02162 + 0{,}91086 = 9{,}93248$$

Άρα Γ=$31^0 08'$ ή Γ=$148^0 52'$ όμως γ οξεία άρα **Γ=$31^0 08'$**.

Τύπος επαλήθευσης

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την 90^0-Γ, γ και 90^0-Β. Η 90^0-Γ έχει απέναντι τις 90^0-Β, γ άρα :

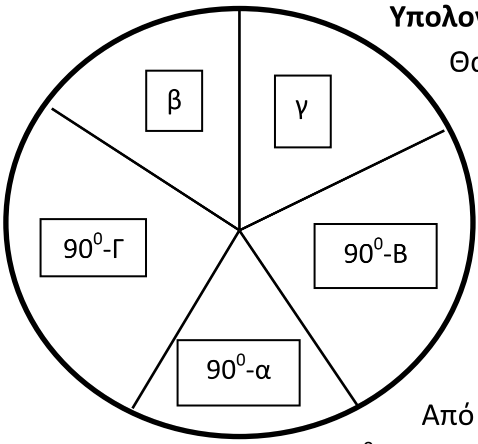
$$\eta\mu(90^0 - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(90^0 - B) \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu B \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$$

$$log\sigma\upsilon\nu(31^0 08') = log\eta\mu(93^0 36') + log\sigma\upsilon\nu(30^0 55') \Leftrightarrow$$

$$9{,}9325 = 9{,}99914 + 9{,}93337 \xRightarrow{\mu\varepsilon\ \sigma\tau\rho o\gamma\gamma\upsilon\lambda o\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \chi\iota\lambda\iota o\sigma\tau\acute{o}} 9{,}932 = 9{,}932 \quad A\lambda\eta\theta\acute{\eta}\varsigma$$

Πχ4.

Να επιλυθεί το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90^0 , Β=65^0 και Γ=118^0.



Υπολογισμός της α

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την 90^0-Γ, 90^0-α και 90^0-Β. Η 90^0-α έχει προσκείμενες τις 90^0-Γ και 90^0-Β άρα :

$$\eta\mu(90^0 - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^0 - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi(90^0 - B)$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma$$

Λογαριθμίζοντας έχουμε :

$$log\sigma\upsilon\nu\alpha = log\sigma\varphi 65^0 + log\sigma\varphi 118^0 \Leftrightarrow$$

$$log\sigma\upsilon\nu\alpha = 9{,}66867 + 9{,}72567 = \cancel{1}9{,}39434$$

Από τους πίνακες α=$75^0 49'$ ή α=$104^0\ 21'$. Όμως αφού η Γ αμβλεία και η Β οξεία η α>90^0 άρα τελικά **α=$104^0 21'$**.

Υπολογισμός της γ

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την γ, 90^0-Β και 90^0-Γ. Η 90^0-Γ έχει απέναντι τις γ, 90^0-Β άρα :

$$\eta\mu(90^0 - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(90^0 - B) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\Gamma \cdot \frac{1}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\Gamma \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B$$

$$log\sigma\upsilon\nu\gamma = log\sigma\upsilon\nu\Gamma + log\sigma\tau\varepsilon\mu B$$

$$log\sigma\upsilon\nu\gamma = log\sigma\upsilon\nu 118^0 + log\sigma\tau\varepsilon\mu 65^0 = 9{,}67161 + 0{,}04272 = 9{,}71433$$

Από τους πίνακες γ=$58^0 48'$ ή γ=$121^0\ 12'$. Η Γ>90^0 άρα **γ=$121^0 12'$**.

Υπολογισμός της β

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την β, 90^0-Γ, 90^0-Β και. Η 90^0-Β έχει απέναντι τις 90^0-Γ, β άρα :

$$\eta\mu(90^0 - B) = \sigma\upsilon\nu(90^0 - \Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma$$

$$log\sigma\upsilon\nu\beta = log\sigma\upsilon\nu 65^0 + log\sigma\tau\varepsilon\mu 118^0 = 9{,}62595 + 0{,}0{,}05407 = 9{,}68002$$

Άρα β=$61^0 24'$ ή β=$118^0 36'$ όμως Β οξεία άρα **β=$61^0 24'$**.

Τύπος επαλήθευσης

Θα πρέπει να συνδυάσουμε την 90^0-α, γ και β. Η 90^0-α έχει απέναντι τις β, γ άρα :

$$\eta\mu(90^0-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$$

$$log\sigma\upsilon\nu(104^0 21')=log\sigma\upsilon\nu(61^0 24')+log\sigma\upsilon\nu(121^0 12') \Leftrightarrow$$

$$9{,}39418=9{,}68006+9{,}71435 \xRightarrow{\mu\varepsilon\ \sigma\tau\rho o\gamma\gamma\upsilon\lambda o\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \chi\iota\lambda\iota o\sigma\tau\acute{o}} 9{,}394=9{,}394\quad A\lambda\eta\theta\acute{\eta}\varsigma$$

Για να επίλυσουμε ένα **ορθόπλευρο** τρίγωνο βρίσκουμε πρώτα τα στοιχεία του **πολικού** του με τους τύπους **α+Α'=β+Β'=γ+Γ'=180^0, Α+α'=Β+β'=Γ+γ'=180^0** . Το πολικό είναι ορθογώνιο άρα επιλύοντάς το μπορούμε με τους ίδιους τύπους να βρούμε τα στοιχεία του ορθόπλευρου.

Πχ5.

Να επιλυθεί το ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με α=90^0, β=115^0, και γ=62^0

Βρίσκουμε τα στοιχεία του πολικού του Α'Β'Γ' δηλαδή :

β+Β'=180^0⇔Β'=65^0 και γ+Γ'=180^0⇔Γ'=118^0

Επιλύουμε το Α'Β'Γ' που είναι ορθογώνιο με Α'=90^0, Β'=65^0, Γ'=118^0.

Απο το Πχ4. όμως **α'=$104^0 21'$, β'=$61^0 24'$, γ'=$121^0 12'$** άρα

Α+α'=180^0⇔Α=$75^0 39'$

Β+β'=180^0⇔Β=$118^0 36'$

Γ+γ'=180^0⇔Γ=$58^0 48'$

Ασκήσεις

Να επιλυθούν τα παρακάτω σφαιρικά τρίγωνα

α. ΑΒΓ με Α=90^0, Β=$36^0 14'$, γ=115^0

β. ΑΒΓ με Α=90^0, Β=$156^0 17'$, α=72^0 12'

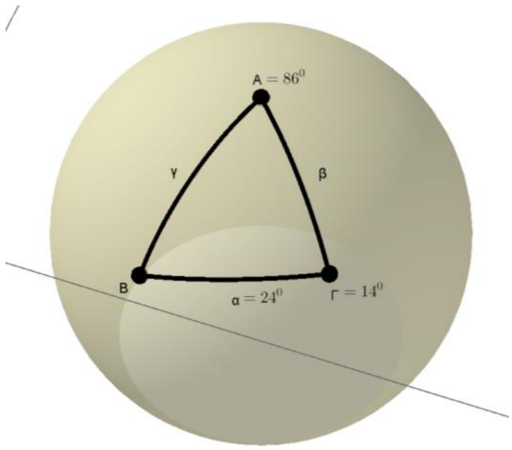
γ. ΑΒΓ με α=90^0, β=$115^0 24'$, γ=$60^0 18'$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	*ΔΕΔΟΜΕΝΑ*	*ΤΥΠΟΙ*	*ΕΛΕΓΧΟΣ*
1.	3 Πλευρές (ΠΠΠ)	Μισών Γωνιών ή Ημιπαρημιτόνων	Νόμος Ημιτόνων
2.	3 Γωνίες (ΓΓΓ)	Μισών Πλευρών ή Ημιπαρημιτόνων στο πολικό	Νόμος Ημιτόνων
3.	2 Πλευρές και η Περιεχόμενη Γωνία τους (ΠΓΠ)	Napier ή Ημιπαρημιτόνων ή Gauss	Νόμος Ημιτόνων
4.	2 Γωνίες και η Προσκείμενη Πλευρά (ΓΠΓ)	Napier ή 4 Συνεχών Στοιχείων ή Gauss	Νόμος Ημιτόνων
5.	2 Πλευρές και μια Απέναντι Γωνία (ΓΠΠ)	Νομος Ημιτόνων και Napier	Νόμος Ημιτόνων
6.	2 Γωνίες και μια Απέναντι Πλευρά (ΠΓΓ)	Napier	Νόμος Ημιτόνων

Πχ. 6

Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $A=86^0$, $\Gamma=14^0$, $\alpha=24^0$.



Είναι η Περίπτωση 6 (ΓΓΠ)

Υπολογισμός γ

Νόμος Ημιτόνων

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\gamma=\eta\mu\alpha\cdot\frac{1}{\eta\mu A}\cdot\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\gamma=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\tau\epsilon\mu A\cdot\eta\mu\Gamma$$

Λογαριθμίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} log\eta\mu\gamma &= log\eta\mu 24^0+log\sigma\tau\epsilon\mu 86^0+log\eta\mu 14^0 \\ &= 9{,}60931+0{,}00106+9{,}38368 \\ &= \cancel{1}8{,}99405 \end{aligned}$$

Από τους πίνακες έχουμε $\gamma=5^0 39{,}6'$ ή $\gamma=174^0 20{,}4'$. Αφού όμως $\Gamma<A$ θα είναι και $\gamma<\alpha$ άρα τελικά $\gamma=5^0 39{,}6'$.

Υπολογισμός β

Napier

$$\frac{\epsilon\varphi\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\epsilon\varphi\frac{\beta}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\sigma\tau\epsilon\mu\frac{A-\Gamma}{2}\cdot\epsilon\varphi\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$log\epsilon\varphi\frac{\beta}{2}=log\sigma\tau\epsilon\mu\frac{A-\Gamma}{2}+log\epsilon\varphi\frac{\alpha-\gamma}{2}+log\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}$$

$$log\epsilon\varphi\frac{\beta}{2}=0{,}23078+9{,}20798+9{,}88425=\cancel{1}9{,}32301$$

Από τους πίνακες $\frac{\beta}{2}=11^0 52{,}8' \Leftrightarrow \beta=23^0 45{,}6'$

Υπολογισμός Β

Napier

$$\frac{\epsilon\varphi\frac{A-\Gamma}{2}}{\sigma\varphi\frac{B}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}} \Leftrightarrow \sigma\varphi\frac{B}{2}=\sigma\tau\epsilon\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\epsilon\varphi\frac{A-\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$log\epsilon\varphi\frac{B}{2}=log\sigma\tau\epsilon\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}+log\epsilon\varphi\frac{A-\Gamma}{2}+log\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$log\epsilon\varphi\frac{B}{2}=0{,}79761+9{,}86125+9{,}40816=\cancel{2}0{,}06703$$

Από τους πίνακες $\frac{B}{2}=81^0 11{,}6' \Leftrightarrow \beta=23^0 45{,}6'$