

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Αντικείμενο της Αντοχής των Υλικών

Η **Αντοχή Υλικών** είναι ο κλάδος της **Τεχνικής Μηχανικής**, που εξετάζει την επίδραση **εξωτερικών φορτίων** (δυνάμεων και ροπών) **στα υλικά** των στερεών σωμάτων, που απαρτίζουν μια κατασκευή, θεωρώντας ότι **αυτή βρίσκεται σε στατική ισορροπία** (είναι ακίνητη, ή εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση).

Τις μεταβολές στην κινητική κατάσταση της κατασκευής εξετάζουν η **Δυναμική** και η **Κινηματική**, θεωρώντας ότι τα σώματα δεν υφίστανται παραμορφώσεις υπό την επίδραση των εξωτερικών φορτίων (**Τεχνική Μηχανική** του απόλυτα στερεού σώματος).

Σημείωση : Με τον όρο **παραμόρφωση** εννοούμε γενικά τη μεταβολή του σχήματος ή κάποιων διαστάσεων ενός στερεού σώματος.

Πιο συγκεκριμένα η Αντοχή Υλικών έχει σαν αντικείμενο :

- α.** Τον προσδιορισμό των **ορίων αντοχής** των διαφόρων υλικών, δηλαδή το όριο μέχρι το οποίο μπορούμε να φορτίσουμε ένα σώμα από το συγκεκριμένο υλικό, ώστε αυτό να μην αντιμετωπίσει πρόβλημα καταστροφής και να ανταποκρίνεται με ασφάλεια στις απαιτήσεις της λειτουργίας του.
- β.** Τον προσδιορισμό των **παραμορφώσεων** που υφίσταται ένα σώμα λόγω της επίδρασης των εξωτερικών φορτίων και την σχέση που τους συνδέει με αυτά.
- γ.** Με συνδυασμό των δύο παραπάνω:
 - τον καθορισμό των επιτρεπομένων φορτίων όταν είναι γνωστές οι διαστάσεις του σώματος ή της κατασκευής (**μελέτη ικανότητας φόρτισης**) ή
 - τον υπολογισμό των απαιτούμενων διαστάσεών τους, προκειμένου να μπορούν να ανταποκριθούν με ασφάλεια στις συνθήκες και τις απαιτήσεις λειτουργίας τους (**μελέτη διαστασιολόγησης**).

2. Παραδοχές της Αντοχής Υλικών

Στην Αντοχή Υλικών οι διάφορες μελέτες γίνονται με κάποιες παραδοχές, οι οποίες απλοποιούν και διευκολύνουν σημαντικά τους διάφορους υπολογισμούς.

Οι πιο βασικές είναι :

- α.** Τα υλικά των σωμάτων είναι **ισότροπα, ομογενή και συνεχή**
- β.** Τα ασκούμενα φορτία μεταβάλλονται με πολύ αργό ρυθμό, ώστε να μπορούν με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση να θεωρηθούν **στατικά**.
- γ.** Κατά την έναρξη της φόρτισης δεν προϋπάρχουν εσωτερικές τάσεις ή παραμορφώσεις μέσα στο υλικό του σώματος.
- δ.** Οι προκαλούμενες παραμορφώσεις ενός σώματος είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του σώματος.
- ε.** Τα στατικά ισοδύναμα συστήματα προκαλούν τις ίδιες τάσεις και επιφέρουν τις ίδιες παραμορφώσεις σε ικανοποιητική απόσταση από την περιοχή εφαρμογής τους.
Η παραδοχή αυτή είναι γνωστή σαν «**Αρχή του Saint Venant**»

Όταν δεν ικανοποιούνται κάποιες από τις παραπάνω παραδοχές π.χ. η **α** (υλικά ανισότροπα ή ανομοιογενή ή ασυνεχή) ή η **β** (φορτία δυναμικά ή απότομα ή πληκτικά) ή η **γ** (προϋπάρχουσες τάσεις ή παραμορφώσεις), η μελέτη γίνεται αρχικά σύμφωνα με τις παραδοχές και στη συνέχεια γίνονται κάποιες διορθώσεις στα αποτελέσματα, οι οποίες στηρίζονται κυρίως σε πειραματικά ή εμπειρικά δεδομένα.

3. Είδη φορέων

Φορέα ονομάζουμε κάθε σώμα ή κατασκευή που μπορεί να δέχεται εξωτερικά φορτία.

Για τους θεωρητικούς υπολογισμούς έχουμε διαμορφώσει κάποιους απλοποιημένους τύπους φορέων, που λέγονται **βασικοί ή απλοί φορείς**. Κάθε πραγματικός φορέας προσεγγίζεται με έναν βασικό, ανάλογα με το σχήμα του, τις διαστάσεις του ή τον τρόπο φόρτισης.

Οι βασικοί φορείς είναι το νήμα, η ράβδος, η δοκός, η πλάκα και το κέλυφος (σχ.1).

Νήμα χαρακτηρίζεται ένα ευθύγραμμο σώμα που το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες διαστάσεις του, έχει διαμήκη άξονα συμμετρίας, είναι εύκαμπτο και μπορεί να δεχθεί εξωτερική δύναμη μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονά του (**αξονική φόρτιση**), και μόνο κατά μία φορά. (Το νήμα μόνο «τραβάει», δεν μπορεί να «σπρώξει») (σχ. 1α).

Παραδείγματα νημάτων: ο κάβος ενός πλοίου, το συρματόσχοινο ανύψωσης ενός γερανού, το καλώδιο ανάρτησης ενός ανελκυστήρα, η αλυσίδα της άγκυρας ενός πλοίου.

Ράβδος χαρακτηρίζεται ένα ευθύγραμμο σώμα που το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες διαστάσεις του, έχει διαμήκη άξονα συμμετρίας, είναι δύσκαμπτο και μπορεί να δεχθεί εξωτερική δύναμη μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονά του (**αξονική φόρτιση**), αλλά και κατά τις δύο φορές. (Η ράβδος και «τραβάει» και «σπρώχνει») (σχ. 1β).

Παραδείγματα ράβδων: ένας σωλήνας νερού, μια μεταλλική ράβδος σε ένα δικτύωμα.

Δοκός χαρακτηρίζεται ένα ευθύγραμμο σώμα που το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες διαστάσεις, έχει διαμήκη άξονα συμμετρίας, αλλά μπορεί να δεχθεί εξωτερικές δυνάμεις οποιασδήποτε διεύθυνσης, και κατά τη διεύθυνση του άξονά του (**αξονική φόρτιση**) και κατά τις δύο φορές, αλλά και σε διεύθυνση κάθετη στον άξονά του (**εγκάρσια φόρτιση**). Ακόμη η δοκός μπορεί να δεχθεί και ροπές είτε **αξονικές** (που το διάνυσμά τους έχει φορέα τον άξονα της δοκού) είτε και **εγκάρσιες** (που το διάνυσμά τους είναι κάθετο στον άξονα) (σχ. 1γ).

Παραδείγματα δοκών : ένα δοκάρι (ξύλινο ή μεταλλικό) σε μια οροφή, ο άξονας μιας μηχανής, ο ελικοφόρος άξονας ενός πλοίου, η κολώνα μεταξύ δύο καταστρωμάτων ενός πλοίου (κίονας), το υποσύλωμα μιας μεταλλικής εξέδρας.

Μια δοκός που έχει καμπύλο άξονα ονομάζεται **τοξωτή δοκός** ή απλά **τόξο**.

Πλάκα χαρακτηρίζεται ένα επίπεδο σώμα που το πάχος του είναι σταθερό, αλλά πολύ μικρότερο από τις άλλες διαστάσεις του και μπορεί να δεχθεί εξωτερικές δυνάμεις οποιασδήποτε διεύθυνσης.(σχ. 1δ).

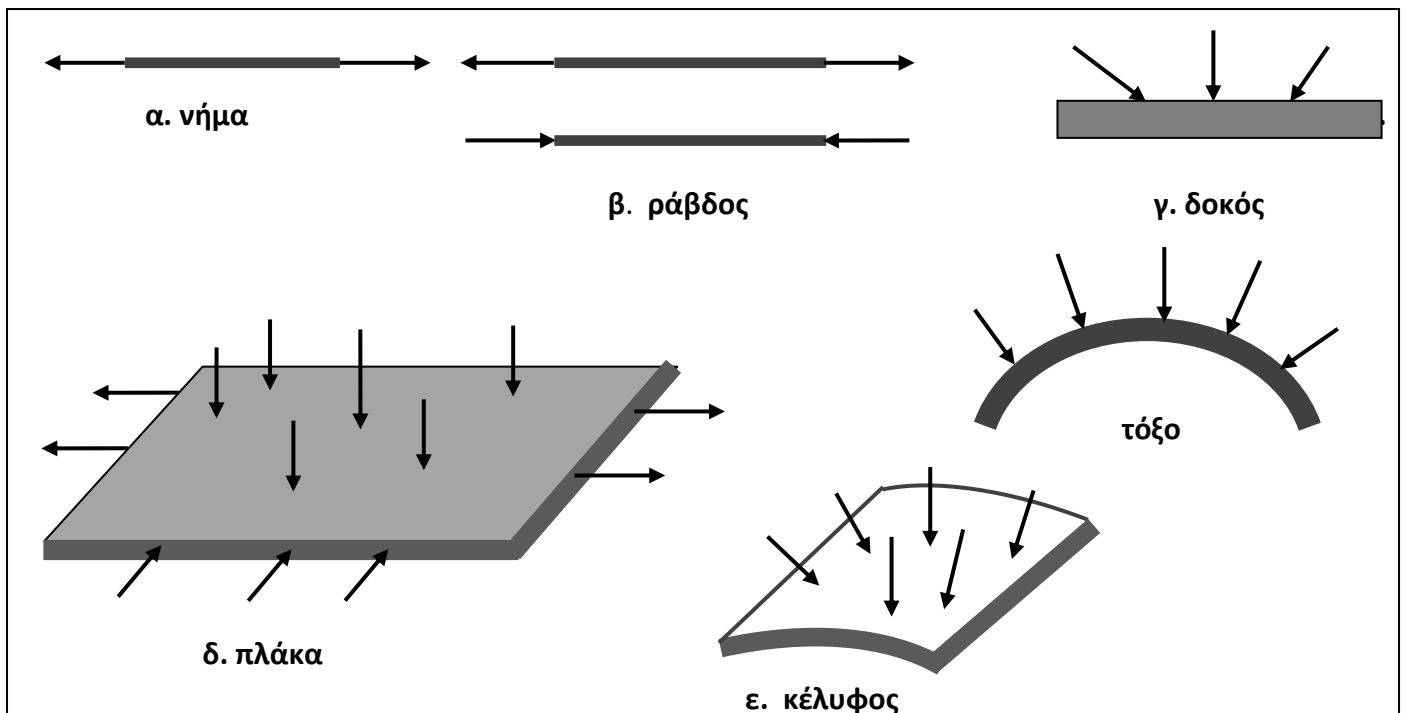
Παραδείγματα πλακών : Το έλασμα του νομέα ενός πλοίου, η τσιμεντένια πλάκα μιας οικοδομής.

Μια πλάκα που μπορεί να δεχθεί εξωτερικές δυνάμεις μόνο κατά τη διεύθυνση του επιπέδου της και όχι κάθετες σ' αυτό ονομάζεται **δίσκος**.

Κέλυφος χαρακτηρίζεται ένα σώμα που το πάχος του είναι σταθερό, πολύ μικρότερο από τις άλλες διαστάσεις, αλλά η επιφάνειά του είναι καμπύλη και όχι επίπεδη και μπορεί να δεχθεί εξωτερικές δυνάμεις οποιασδήποτε διεύθυνσης. (σχ. 1ε)

Παραδείγματα κελυφών : Το έλασμα της γάστρας ενός πλοίου, το έλασμα της κυλινδρικής επιφάνειας ενός λέβητα.

Το νήμα, η ράβδος και η δοκός ονομάζονται **γραμμικοί φορείς**, ενώ η πλάκα και ο δίσκος **επίπεδοι φορείς**



Σχήμα 1. Είδη φορέων

4. Είδη φορτίων - Κατηγορίες φόρτισης

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα φορέα κατατάσσονται σε ορισμένες κατηγορίες σύμφωνα με διάφορα κριτήρια.

Ανάλογα με τον **τρόπο κατανομής** της και το **μέγεθος της περιοχής της δράσης της** μια ονομάζεται:

α. Σημειακό ή συγκεντρωμένο φορτίο, όταν η περιοχή του σώματος στην οποία ακείται είναι τόσο μικρή, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί σημείο (σχ.2α).

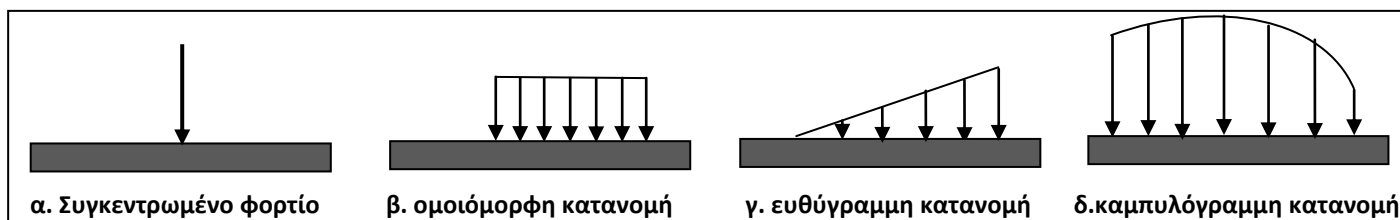
Παράδειγμα συγκεντρωμένου φορτίου μπορεί να θεωρηθεί η δύναμη που ασκεί ένα νήμα ή μια στήριξη σε κάποιο σώμα, το βάρος ενός σώματος μικρού σε διαστάσεις σε σχέση με το σώμα στο οποίο βρίσκεται το μικρό σώμα, όπως το βάρος ενός κιβωτίου πάνω σε ένα πλοίο.

β. Κατανεμημένο φορτίο, όταν η περιοχή του σώματος στην οποία ασκείται είναι σχετικά μεγάλη σε σχέση με τις διαστάσεις του σώματος.

Παράδειγμα κατανεμημένου φορτίου μπορεί να θεωρηθεί η άντωση που δέχεται ένα πλοίο, η δύναμη που ασκεί ένα υγρό στα τοιχώματα του δοχείου στο οποίο βρίσκεται, η αντίσταση του νερού στην βρεχόμενη επιφάνεια ενός πλοίου. (σχ. 2β,γ,δ)

Ανάλογα με την **μορφή της περιοχής της κατανομής του φορτίου** διακρίνουμε τα **γραμμικά κατανεμημένα φορτία**, όταν η περιοχή κατανομής έχει πολύ μεγάλο μήκος σε σχέση με το πλάτος της όπως π.χ. η δύναμη που ασκείται σε κάποιον άξονα ή δοκάρη, και τα **επιφανειακά κατανεμημένα φορτία** όταν η περιοχή της κατανομής του φορτίου έχει παραπλήσιου μεγέθους διαστάσεις με την επιφάνεια στην οποία ασκείται, όπως π.χ. η δύναμη που ασκεί υγρό στον πυθμένα του δοχείου του ή η δύναμη που ασκεί ο αέρας στο ιστίο (πανί) ενός ιστιοφόρου.

Ανάλογα με τον **τρόπο κατανομής ενός κατανεμημένου φορτίου** η κατανομή διακρίνεται στην **ομοιόμορφη ή σταθερή κατανομή** (σχ.2β), όταν σε κάθε μονάδα μήκους ή επιφάνειας της περιοχής που ασκείται το φορτίο, το μέγεθος της δύναμης είναι το ίδιο όπως π.χ. το βάρος μιας ομογενούς δοκού (γραμμική ομοιόμορφη κατανομή), το βάρος ενός ισοπαχούς μεταλλικού ελάσματος (επιφανειακή ομοιόμορφη κατανομή) και στην **ανομοιόμορφη ή μεταβαλλόμενη κατανομή**, όταν το μέγεθος της δύναμης μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη θέση. Έτσι έχουμε την **ευθύγραμμη κατανομή** (σχ.2γ), όταν το μέτρο της δύναμης είναι γραμμική συνάρτηση της θέσης, την **καμπυλόγραμμη κατανομή** (σχ.2δ), όταν το μέτρο της δύναμης είναι συνάρτηση της θέσης ανωτέρου βαθμού της θέσης (κυκλική, παραβολική, υπερβολική, ελλειπτική κ.λ.π.).



Σχήμα 2. Είδη φορτίου

Ανάλογα με την μεταβολή του εξωτερικού φορτίου σε συνάρτηση με το χρόνο, η φόρτιση ονομάζεται:

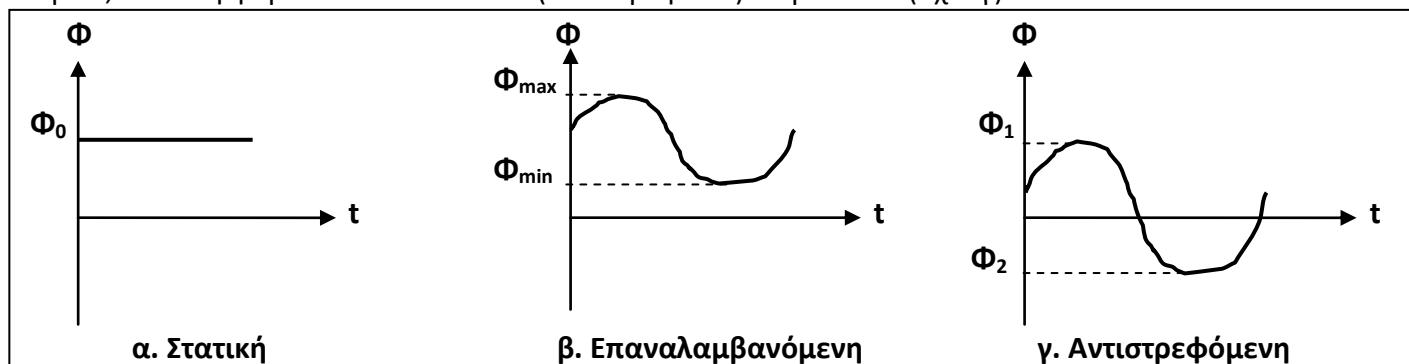
α. Στατική, όταν το φορτίο παραμένει σταθερό για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. (σχ. 3α)

β. Δυναμική, όταν το φορτίο μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο.

Ειδικότερα η δυναμική φόρτιση διακρίνεται σε:

επαναλαμβανόμενη, όταν το φορτίο μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής, αλλά η κατεύθυνσή του παραμένει σταθερή (σχ. 3β) και

εναλλασσόμενη ή αντιστρεφόμενη, όταν το φορτίο μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ δύο αντιρρόπων τιμών, οπότε η φορά του εναλλάσσεται (αντιστρέφεται) περιοδικά. (σχ. 3γ)



Σχήμα 3. Είδη φόρτισης

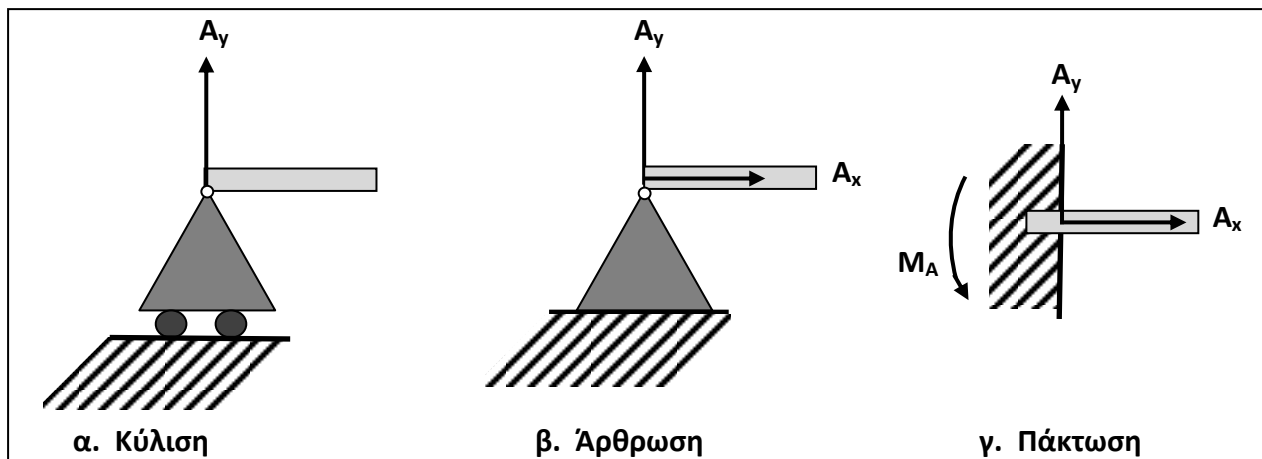
5. Είδη στήριξης

Ανάλογα με τις ελευθερίες που έχει το σημείο στήριξης ενός σώματος, υπάρχουν τρία είδη στήριξης :

α. Κύλιση ή απλή έδραση: Το σώμα δεν μπορεί να μετακινηθεί σε διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο στήριξης, μπορεί όμως να μετακινηθεί παράλληλα με αυτό ή να περιστραφεί γύρω από το σημείο στήριξης. Η αντίδραση που ασκεί η κύλιση στο σώμα είναι **κάθετη** επίπεδο στήριξης. Άρα στην κύλιση, στο σημείο στήριξης έχουμε **μία άγνωστη** δύναμη (σχ.4α).

β. Άρθρωση : Το σώμα δεν έχει καμία ελευθερία κίνησης στο σημείο στήριξης, μπορεί όμως να περιστραφεί γύρω από αυτό. Η αντίδραση που ασκεί η άρθρωση στο σώμα μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση, οπότε μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια κάθετη στο επίπεδο στήριξης και μία παράλληλη με αυτό. Άρα στην άρθρωση, στο σημείο στήριξης έχουμε **δύο άγνωστες** δυνάμεις (σχ.4β) .

γ. Πάκτωση : Το σώμα δεν έχει καμία ελευθερία ούτε μετακίνησης ούτε περιστροφής στο σημείο στήριξης. Η πάκτωση ασκεί στο σώμα δύο δυνάμεις, μία κάθετη και μία παράλληλη με το επίπεδο στήριξης και μία ροπή. Άρα στην πάκτωση, στο σημείο στήριξης έχουμε **τρεις άγνωστες** αντιδράσεις (δύο δυνάμεις και μία ροπή) (σχ.4γ).



Σχήμα 4. Είδη στήριξης

6. Καταπονήσεις

Καταπόνηση ονομάζεται η επιβολή εξωτερικών φορτίων (δυνάμεων ή ροπών) σε ένα σώμα που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά του υλικού του σώματος σε μία καταπόνηση, ορίζουμε τις απλές καταπονήσεις, που είναι κάποιες απλοποιημένες καταστάσεις φόρτισης προτύπων φορέων με πολλές παραδοχές και απλουστεύσεις, ώστε να είναι δυνατή η **θεωρητική** μελέτη της καταπόνησης. Βέβαια οι απλές καταπονήσεις είναι εξιδανικευμένες καταστάσεις και σπάνια τις συναντάμε στην πράξη, όπου η καταπόνηση ενός σώματος είναι κατά κανόνα **σύνθετη**.

Για να μελετήσουμε μια πραγματική καταπόνηση στηριζόμαστε στην **αρχή της επαλληλίας**:

«Το αποτέλεσμα της δράσης περισσότερων του ενός φορτίων που ενεργούν ταυτόχρονα σε ένα σώμα μπορεί να υπολογιστεί από τα αποτελέσματα που προκαλεί κάθε φορτίο ξεχωριστά».

Έτσι λοιπόν, μια πραγματική καταπόνηση τη θεωρούμε σύνθεση απλών καταπονήσεων, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα κάθε απλής καταπόνησης ξεχωριστά, σαν να μην υπήρχαν οι άλλες, και στη συνέχεια, με κατάλληλη διαδικασία κάθε φορά, συνθέτουμε τα αποτελέσματα αυτά και υπολογίζουμε το αποτέλεσμα της πραγματικής σύνθετης καταπόνησης.

Οι **απλές καταπονήσεις** είναι:

α. Μονοαξονική κεντρική καταπόνηση (εφελκυσμός ή θλίψη) (σχ. 5α).

Τέτοια καταπόνηση έχουμε όταν σε μία δοκό (ή ράβδο) ασκούνται δυνάμεις που έχουν **φορέα τον άξονα της δοκού (ή της ράβδου)** και έχουν συνισταμένη μηδέν. Η πιο απλή περίπτωση μονοαξονικής κεντρικής καταπόνησης είναι όταν ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις F_1 και F_2 .

β. Απλή Διάτμηση (σχ. 5β).

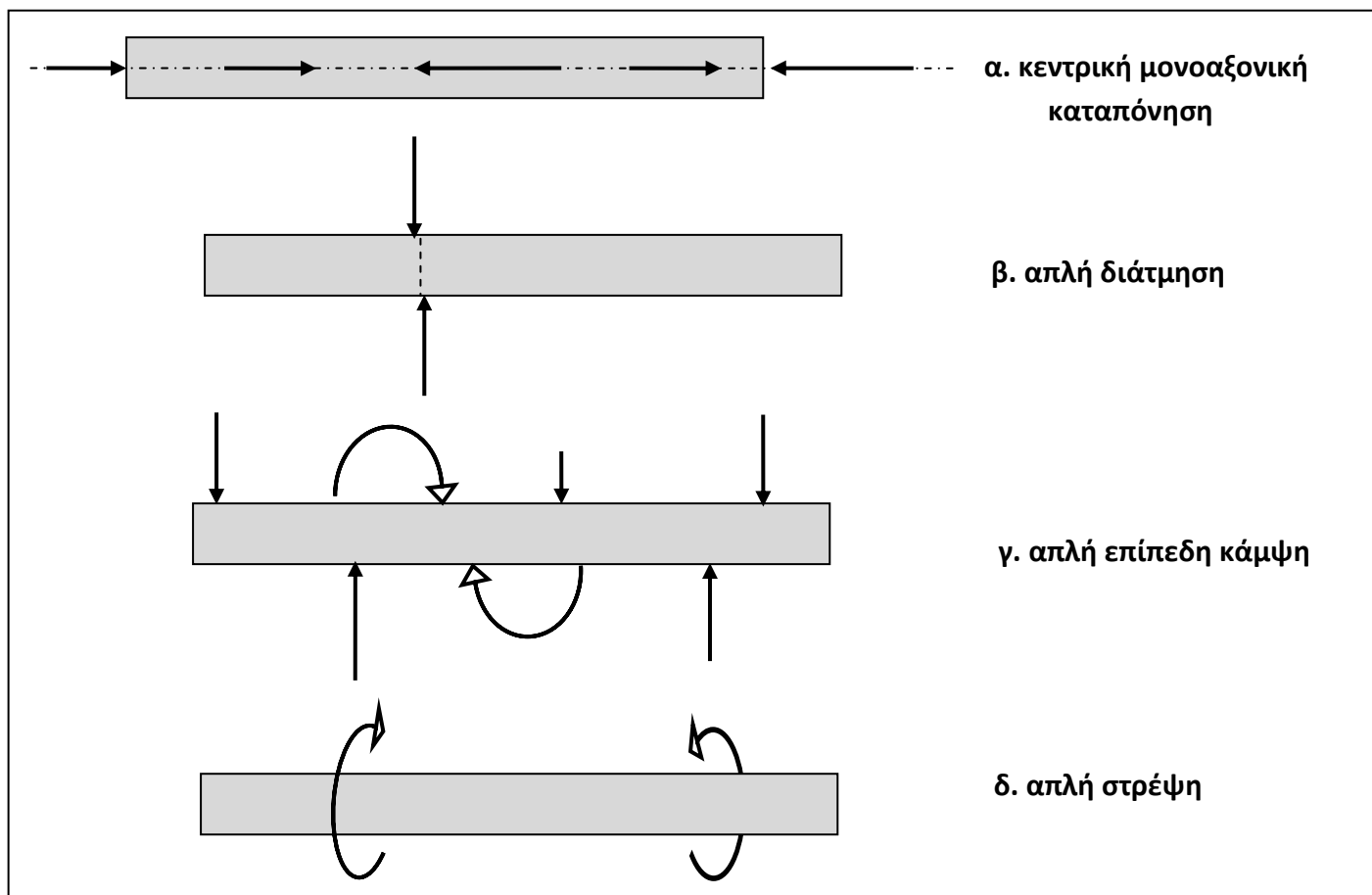
Τέτοια καταπόνηση έχουμε όταν σε μία δοκό ασκούνται δύο **αντίθετες** δυνάμεις **κάθετα στον άξονα** της δοκού και οι φορείς τους είναι μεν διαφορετικοί, αλλά η απόστασή τους είναι τόσο μικρή, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε **αμελητέα** τη ροπή του ζεύγους που δημιουργούν, ανίκανη να προκαλέσει περιστροφή του σώματος, και έτσι να θεωρούμε ότι η δοκός ισορροπεί κάτω από την επίδρασή τους.

γ. Απλή επίπεδη κάμψη (σχ.5γ).

Τέτοια καταπόνηση έχουμε όταν σε μία δοκό ασκούνται **συνεπίπεδες** δυνάμεις **κάθετες στον άξονά της** και ροπές που τα διανύσματά τους είναι **κάθετα στο επίπεδο των δυνάμεων** (σχ. 5γ).

δ. Απλή στρέψη (σχ. 5δ).

Τέτοια καταπόνηση έχουμε όταν σε μία δοκό ασκούνται δύο **αντίθετες** ροπές M_1 και M_2 , που τα διανύσματά τους είναι **παράλληλα με τον άξονα της δοκού**.



Σχήμα 5. Απλές καταπονήσεις

B. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

7. Ορθή δύναμη – ορθή τάση

Θεωρούμε ένα δοκάρι και δύο εξωτερικές δυνάμεις F_1 και F_2 αντίθετες με φορέα τον άξονά του. (σχ.6).

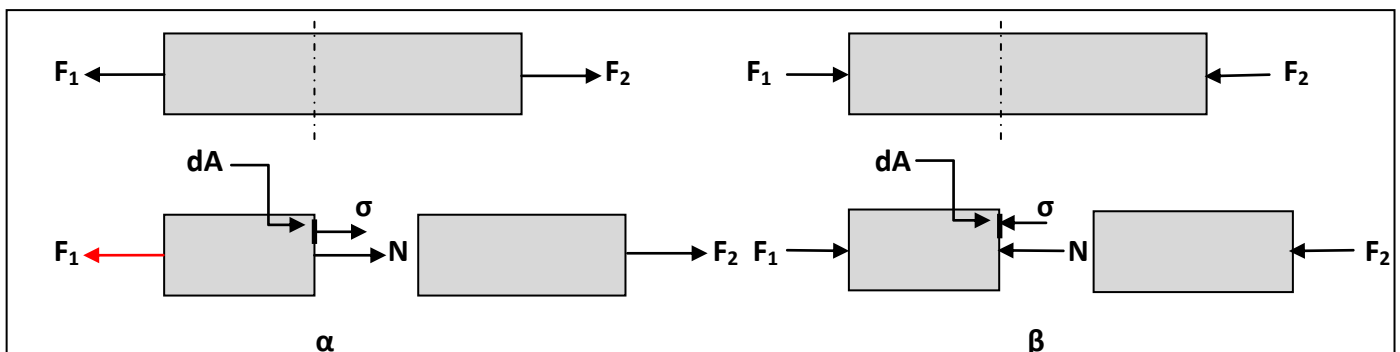
Προφανώς το δοκάρι ισορροπεί.

Φέρνουμε μια νοητή τομή κάθετη στον άξονα του δοκαριού και θεωρούμε ότι το δοκάρι αποτελείται από δύο τμήματα και εξετάζουμε την ισορροπία του αριστερού τμήματος. Στο τμήμα αυτό η μοναδική δύναμη που ασκείται είναι η F_1 . Το τμήμα αυτό όμως ισορροπεί.

Για να ισορροπεί όμως σαν ανεξάρτητο σώμα πρέπει, σύμφωνα με την συνθήκη ισορροπίας (αρχή της αδράνειας), η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα αυτό να είναι μηδέν. Άρα στο τμήμα αυτό πρέπει να ασκείται άλλη μία δύναμη N αντίθετη της F_1 .

Το μοναδικό όμως σώμα που είναι σε επαφή με το αριστερό τμήμα είναι το δεξιό τμήμα του δοκαριού. Δεν μπορούμε λοιπόν παρά να δεχθούμε ότι το δεξιό τμήμα του δοκαριού ασκεί στο αριστερό τη δύναμη αυτή. Η δύναμη αυτή για το δοκάρι είναι **εσωτερική** δύναμη, ονομάζεται **ορθή δύναμη**, συμβολίζεται με N και οφείλεται στις δυνάμεις συνοχής που υπάρχουν μεταξύ των δομικών λίθων (μορίων, ατόμων, συμπλεγμάτων ατόμων) του υλικού. Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι οι δυνάμεις αυτές μεταξύ των δομικών λίθων είναι **ελαστικές**, δηλαδή εμφανίζονται, όταν δύο δομικοί λίθοι τείνουν να μετακινηθούν ο ένας σε σχέση με τον άλλο, και έχουν στόχο να τους επαναφέρουν στις αρχικές τους θέσεις. Έτσι όταν δύο δομικοί λίθοι τείνουν να απομακρυνθούν ο ένας από τον άλλο, οι μοριακές δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι **ελκτικές** (σχ. 6α), ενώ όταν οι δομικοί λίθοι τείνουν να πλησιάσουν οι μοριακές δυνάμεις είναι **απωστικές** (σχ. 6β).

Η εσωτερική δύναμη N που αναφέραμε παραπάνω και η οποία ισορροπεί την F_1 , είναι η συνισταμένη των δυνάμεων συνοχής που ασκούν οι δομικοί λίθοι της διατομής του δεξιού τμήματος του δοκαριού στους δομικούς λίθους της διατομής του αριστερού τμήματος.



Σχήμα 6. Ορθή Δύναμη – ορθή τάση

Θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA της διατομής του αριστερού τμήματος και έστω dN η στοιχειώδης ορθή δύναμη που ασκείται σ' αυτήν από τους δομικούς λίθους της διατομής του δεξιού τμήματος του δοκαριού. Ορίζουμε σαν **ορθή τάση** σ το μέγεθος που δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma = \frac{dN}{dA} \quad (1)$$

Η ορθή τάση σ είναι **διανυσματικό** μέγεθος, έχει την κατεύθυνση της ορθής δύναμης \mathbf{N} και μονάδα στο Διεθνές Σύστημα μονάδων το 1N/m^2 . Συνήθως όμως στην Αντοχή Υλικών χρησιμοποιούνται πιο εύχρηστες μονάδες όπως : N/mm^2 , DN/mm^2 , KN/mm^2 , KN/cm^2 . Από τη σχέση (1) έχουμε :

$$dN = \sigma \cdot dA \Rightarrow N = \int_A \sigma \cdot dA$$

Αν θεωρήσουμε (με ορισμένες προϋποθέσεις) ότι η τάση σ είναι **σταθερή** σε όλη την επιφάνεια \mathbf{A} , τότε :

$$N = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A \quad \text{άρα} \quad \boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \quad (2)$$

Η ορθή δύναμη και η ορθή τάση που αναπτύσσεται στη διατομή ενός υλικού όταν αυτή τείνει να **απομακρυνθεί** από τις γειτονικές της σε διεύθυνση κάθετη στο επίπεδό της, ονομάζεται **εφελκυστική** (σχ. 6α), ενώ όταν τείνει να **πλησιάσει** τις γειτονικές της, ονομάζεται **θλιπτική** (σχ. 6β).

Στην περίπτωση της μονοαξονικής κεντρικής καταπόνησης, λέμε ότι μια περιοχή της δοκού καταπονείται σε **εφελκυσμό** όταν σ' αυτήν αναπτύσσονται **εφελκυστικές** τάσεις, ενώ μια περιοχή της δοκού καταπονείται σε **θλίψη** όταν σ' αυτήν αναπτύσσονται **θλιπτικές** τάσεις.

8. Τέμνουσα Δύναμη - Διατμητική τάση

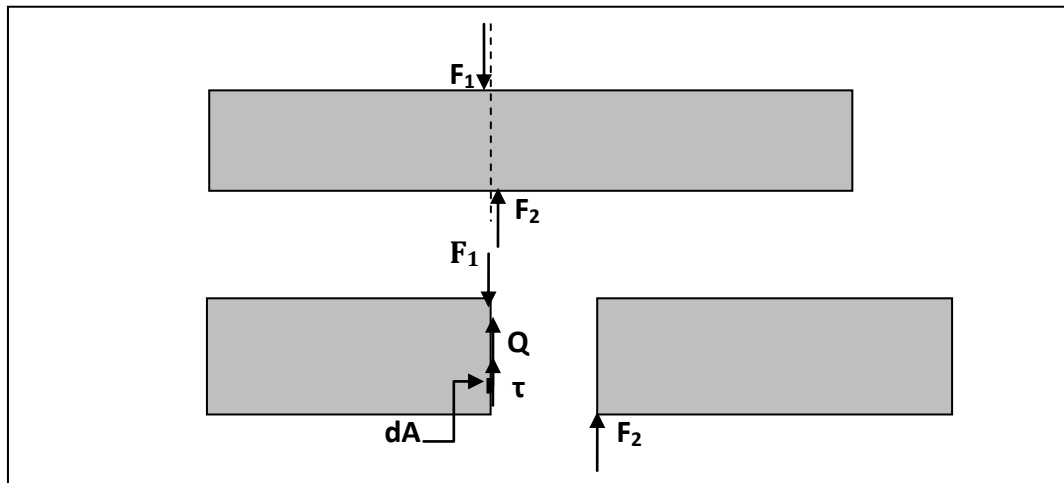
Θεωρούμε ένα δοκάρι σε κάποια διατομή του οποίου ασκούνται δύο **αντίθετες** δυνάμεις \mathbf{F}_1 και \mathbf{F}_2 (σχ. 7). Προφανώς η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών είναι μηδέν. Αν θεωρήσουμε ότι οι φορείς τους βρίσκονται σε **αμελητέα** (σχεδόν μηδενική) απόσταση, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ροπή του ζεύγους που δημιουργείται είναι επίσης **αμελητέα**, (σχεδόν μηδέν), πρακτικά ανίκανο να προκαλέσει περιστροφή του δοκαριού. Άρα πρακτικά το δοκάρι ισορροπεί.

Αν θεωρήσουμε μια νοητή τομή του δοκαριού ανάμεσα στους φορείς των δύο δυνάμεων, μπορούμε να δεχθούμε ότι η \mathbf{F}_1 ασκείται στη διατομή του αριστερού τμήματος, ενώ η \mathbf{F}_2 στη διατομή του δεξιού τμήματος του δοκαριού. Έτσι το αριστερό τμήμα θέλει να κινηθεί κατά τη φορά της \mathbf{F}_1 , ολισθαίνοντας παράλληλα με το επίπεδο της διατομής του. Επειδή όμως με την ολίσθηση αυτή οι δομικοί λίθοι της διατομής του αριστερού τμήματος τείνουν να απομακρυνθούν από τους δομικούς λίθους της διατομής του δεξιού τμήματος, δέχονται από αυτούς δυνάμεις συνοχής. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων συνοχής είναι μια δύναμη \mathbf{Q} αντίθετη της \mathbf{F}_1 , πάνω στο επίπεδο της διατομής του αριστερού τμήματος, που ισορροπεί την \mathbf{F}_1 και δικαιολογείται έτσι η ισορροπία του αριστερού τμήματος.

Η δύναμη αυτή \mathbf{Q} είναι εσωτερική του δοκαριού και ονομάζεται **τέμνουσα δύναμη**.

Θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια $d\mathbf{A}$ της διατομής \mathbf{A} του αριστερού τμήματος και έστω $d\mathbf{Q}$ η στοιχειώδης τέμνουσα δύναμη που ασκείται σ' αυτήν από τους δομικούς λίθους της διατομής του δεξιού τμήματος του δοκαριού. Ορίζουμε σαν **διατμητική τάση** τ το μέγεθος που δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{\tau = \frac{dQ}{dA}} \quad (3)$$



Σχήμα 7. Τέμνουσα δύναμη – διατμητική τάση

Η διατμητική τάση τ είναι **διανυσματικό** μέγεθος, έχει την κατεύθυνση της τέμνουσας δύναμης Q και μονάδες αυτές της ορθής τάσης.

Με αντίστοιχο τρόπο, όπως και για την ορθή τάση, αποδεικνύεται ότι αν η διατμητική τάση τ θεωρηθεί σταθερή πάνω στην επιφάνεια A , υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (4)$$

9. Γραμμική παραμόρφωση

Στο δοκάρι του σχήματος 8α κάθε διατομή **απομακρύνεται** από τις γειτονικές κατά τη διεύθυνση του άξονα του δοκαριού (άρα κάθετη στο επίπεδό της), με αποτέλεσμα την **αύξηση** του μήκους του δοκαριού (σχ. 8α).

Αντίθετα, στο δοκάρι του σχήματος 8β κάθε διατομή **πλησιάζει** τις γειτονικές της κατά τη διεύθυνση του άξονα του δοκαριού (άρα κάθετη στο επίπεδό της), με αποτέλεσμα την **μείωση** του μήκους του δοκαριού (σχ. 8β).

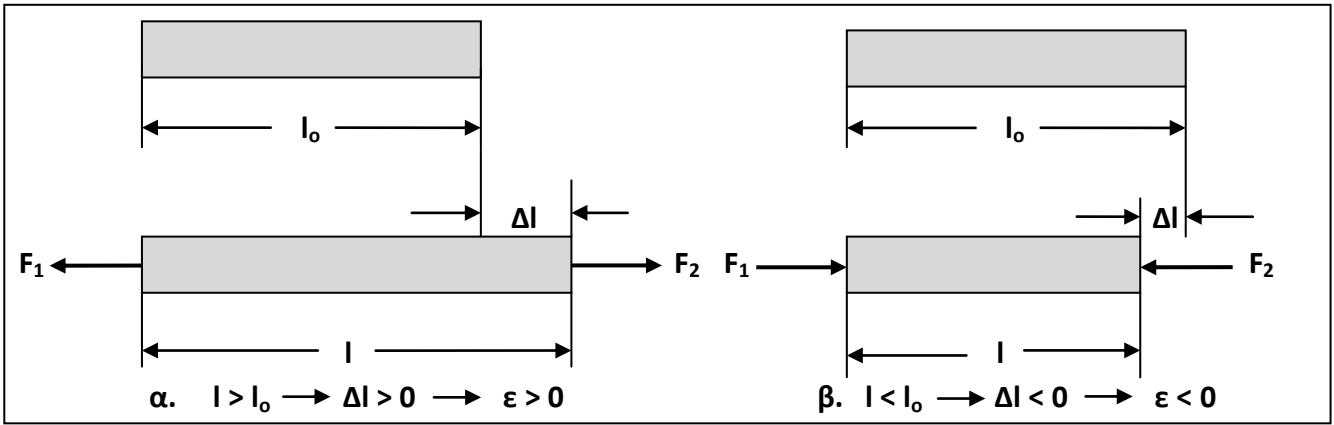
Γενικά, αν ονομάσουμε l_0 το αρχικό μέτρο μιας διάστασης ενός σώματος, l το τελικό μέτρο και $\Delta l = l - l_0$ τη μεταβολή του μέτρου της διάστασης αυτής, ορίζουμε **γραμμική παραμόρφωση** ε το μέγεθος που ορίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (5)$$

Η γραμμική παραμόρφωση, όπως προκύπτει από τη σχέση (5), είναι **αδιάστατο** μέγεθος.

Όταν η διάσταση **αυξάνεται**, $l > l_0$, άρα $\Delta l > 0$, άρα και $\varepsilon > 0$ (σχ. 8α).

Όταν η διάσταση **μειώνεται**, $l < l_0$, άρα $\Delta l < 0$, άρα και $\varepsilon < 0$ (σχ. 8β).



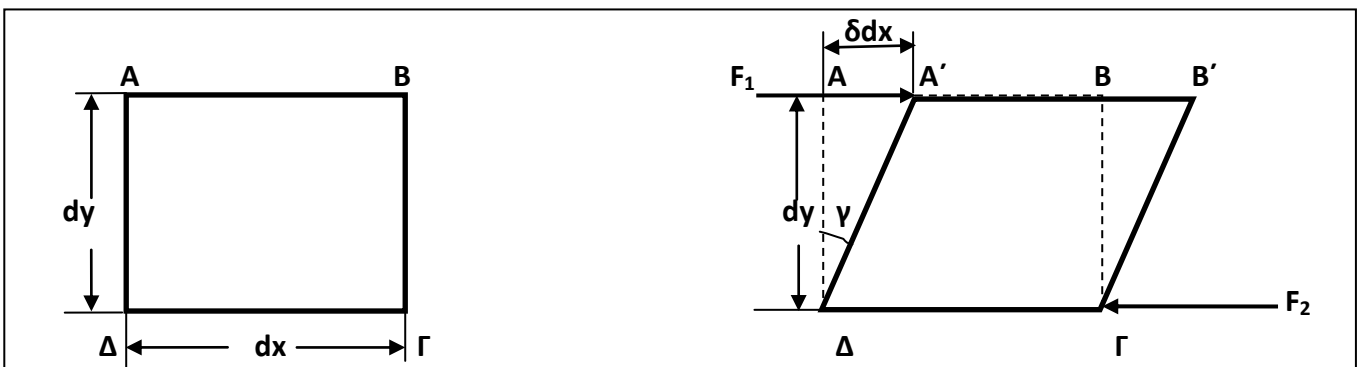
Σχήμα 8. Γραμμική παραμόρφωση

10. Γωνιακή παραμόρφωση

Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ διαστάσεων $dx \times dy$, στο οποίο ασκείται μια δύναμη F_1 κατά μήκος της πλευράς AB και μια δύναμη F_2 αντίθετη της F_1 κατά μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$ (σχ. 9). Λόγω των δύο αυτών δυνάμεων η πλευρά AB μετακινείται, σε σχέση με την πλευρά $\Gamma\Delta$, κατά τη φορά της F_1 και έρχεται στη θέση $A'B'$ παραμένοντας ευθύγραμμη και παράλληλη με την $\Gamma\Delta$.

Έτσι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ καταλήγει στο πλάγιο παραλληλόγραμμο $A'B'\Gamma\Delta$, οπότε η ορθή γωνία $(\Delta A, \Delta \Gamma)$ καταλήγει στην οξεία γωνία $(\Delta A', \Delta \Gamma)$. Αν ονομάσουμε δdx την μετακίνηση AA' της πλευράς AB και γ την γωνία $(\Delta A, \Delta A')$, από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A A'$ έχουμε :

$$\gamma \cong \epsilon \phi \gamma = \frac{\delta dx}{dy} \quad (6)$$



Σχήμα 9. Γωνιακή παραμόρφωση

Η εφαπτομένη της γωνίας γ (και η γωνία γ σε **rad**, δεδομένου ότι είναι πολύ μικρή) ονομάζεται **γωνιακή παραμόρφωση**. Η γωνιακή παραμόρφωση, όπως προκύπτει από τη σχέση (6) είναι **αδιάστατο** μέγεθος.

11. Σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων

11.1. Νόμος του Hooke

Η φόρτιση ενός σώματος με εξωτερικά φορτία δημιουργεί μέσα στο υλικό του σώματος τάσεις, οι οποίες προκαλούν τις παραμορφώσεις του σώματος. Στην προσπάθεια αναζήτησης σχέσεων που να συνδέουν τα **αίτια** (τάσεις) με τα **αποτελέσματα** (παραμορφώσεις) αντίστοιχες με τον **θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής του Νεύτωνα ($F=ma$)**, πραγματοποιούμε κάποια πειράματα για διάφορα υλικά από τα αποτελέσματα των οποίων εξάγουμε συμπεράσματα για τις επιζητούμενες σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων.

Σε γενικές γραμμές τα πειράματα αυτά συνίστανται στη φόρτιση προτύπων δοκιμίων όπου για κάθε τιμή του εξωτερικού φορτίου, υπολογίζουμε τα αναπτυσσόμενα εσωτερικά φορτία μέσα στο υλικό του δοκιμίου και εν συνεχεία τις τάσεις που προκαλούν αυτά. Ταυτόχρονα μετράμε την παραμόρφωση που προκαλείται στο σώμα. Τα ζεύγη τιμών τάσης - παραμόρφωσης που προκύπτουν τα μεταφέρουμε σε ένα σύστημα αντίστοιχων αξόνων, ενώνουμε τα σημεία που προκύπτουν και σχηματίζουμε την **καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης**, από τη μελέτη της οποίας εξάγουμε ορισμένα συμπεράσματα για τη σχέση που συνδέει την τάση με την προκαλούμενη παραμόρφωση αλλά και πολλά άλλα στοιχεία σχετικά με την συμπεριφορά του υλικού απέναντι στη φόρτιση.

Το συμπέρασμα από τα πειράματα αυτά, για κάθε υλικό και μέχρι μια ορισμένη τιμή της τάσης, είναι: **«Η παραμόρφωση ενός σώματος είναι ανάλογη της τάσης που την προκαλεί».**

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό σαν **«νόμος του Hooke»** και θα μπορούσε να θεωρηθεί ο **θεμελιώδης νόμος της Αντοχής των Υλικών**, αντίστοιχος του θεμελιώδους νόμου της Μηχανικής του Νεύτωνα.

Στον νόμο αυτό στηρίζεται η **θεωρία της ελαστικότητας**, όπως την ονόμασε ο **Hooke**, στην οποία στήριξαν στη συνέχεια τις θεωρίες τους πολλοί επιστήμονες.

Από τους ορισμούς των τάσεων και των παραμορφώσεων προκύπτει ότι:

οι **ορθές τάσεις** προκαλούν **γραμμικές παραμορφώσεις** και

οι **διατμητικές τάσεις** προκαλούν **γωνιακές παραμορφώσεις**.

Κατόπιν αυτών η μαθηματική αποτύπωση του νόμου του **Hooke** είναι:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (7)$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (8)$$

Το μέγεθος **E** ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας** του υλικού.

Το μέγεθος **G** ονομάζεται **μέτρο ολίσθησης** του υλικού.

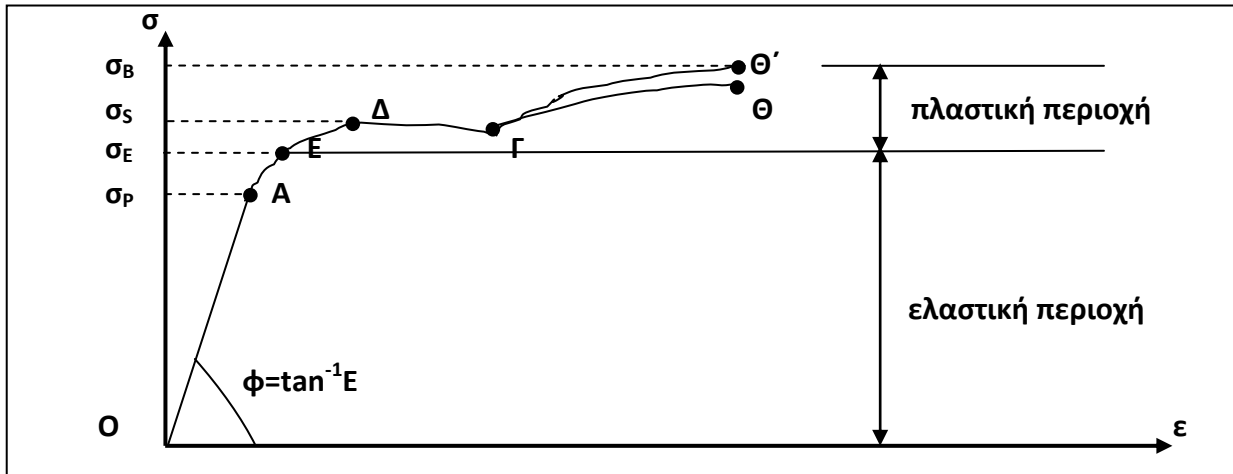
Τα παραπάνω μέτρα υπολογίζονται **πειραματικά** και εξαρτάται το ένα από το άλλο.

Από τις σχέσεις (7) και (8), δεδομένου ότι και η γραμμική και η γωνιακή παραμόρφωση είναι αδιάστατα μεγέθη, προκύπτει ότι τα μέτρα ελαστικότητας και ολίσθησης έχουν μονάδες τάσης, από τις οποίες συνήθως χρησιμοποιούνται οι **KN/mm²(GPa), KN/cm²**.

Ο πίνακας (1) δίνει τιμές για τα μέτρα **E** και **G** για τα πιο συνηθισμένα υλικά.

11.2. Το πείραμα εφελκυσμού

Το πιο χαρακτηριστικό πείραμα, από το οποίο εξάγουμε πολλά και σημαντικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά ενός υλικού όταν φορτίζεται, είναι το **πρότυπο πείραμα εφελκυσμού** το οποίο αρχικά πραγματοποιήθηκε για χάλυβα.



Σχήμα 10. Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης σε εφελκυσμό για χάλυβα

Δοκίμιο, καθορισμένου αρχικού μήκους l_0 κυκλικής διατομής με αρχική διάμετρο d_0 και εμβαδόν $A_0 = \pi d_0^2 / 4$, τοποθετείται σε κατάλληλη συσκευή και υποβάλλεται σε **κεντρικό μονοαξονικό εφελκυσμό** με αυξανόμενη εφελκυστική δύναμη F , την οποία μετράμε με τη βοήθεια δυναμομέτρου και από αυτήν υπολογίζουμε την αναπτυσσόμενη τάση σ από τη σχέση: $\sigma = N / A_0$, δεδομένου ότι $N = F$. Για κάθε τιμή της δύναμης F μετράμε με ακρίβεια την επιμήκυνση Δl του δοκιμίου και υπολογίζουμε την γραμμική παραμόρφωση ϵ από τη σχέση: $\epsilon = \Delta l / l_0$. Έτσι για κάθε τιμή της δύναμης F βρίσκουμε με μετρήσεις ένα ζεύγος τιμών (σ, ϵ) . Τα ζεύγη αυτά τα μεταφέρουμε σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων σ, ϵ και ενώνουμε τα σημεία που απεικονίζουν. Έτσι προκύπτει η καμπύλη **τάσης – γραμμικής παραμόρφωσης** για το συγκεκριμένο υλικό. (σχ. 10)

Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Μέχρι το σημείο **A** η καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης είναι ευθεία γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι η παραμόρφωση του δοκιμίου είναι ανάλογη με την επιβαλλόμενη τάση.
Δηλαδή ισχύει ο νόμος του **Hooke**.
Η τιμή της τάσης σ_p , μέχρι την οποία ισχύει ο νόμος του Hooke, ονομάζεται **όριο αναλογίας**.
Η περιοχή από το σημείο **O** μέχρι το σημείο **A** ονομάζεται **περιοχή αναλογίας**.
2. Μετά το σημείο **A** και μέχρι το σημείο **E** δεν ισχύει ο νόμος του **Hooke**, το δοκίμιο όμως επανέρχεται στο αρχικό του μήκος όταν αποφορτισθεί, δηλαδή η φόρτιση δεν του προκαλεί μόνιμη παραμόρφωση.
Η τιμή της τάσης σ_E , μέχρι την οποία το υλικό δεν αποκτά μόνιμη παραμόρφωση, δηλαδή διατηρεί πλήρως την ελαστικότητά του, ονομάζεται **όριο ελαστικότητας**.
Η περιοχή από το σημείο **O** μέχρι το σημείο **E** ονομάζεται **περιοχή ελαστικότητας**.
3. Μετά το σημείο **E** στο δοκίμιο παρατηρείται μόνιμη παραμόρφωση μετά την αποφόρτισή του. Αυτό σημαίνει ότι το υλικό αρχίζει να χάνει την ελαστικότητά του και να περνά στην ονομαζόμενη **πλαστική περιοχή**. Αυτό οφείλεται στην καταστροφή του μεταλλικού πλέγματος, η οποία αρχίζει στο σημείο **E** και ολοκληρώνεται στο σημείο **\Delta**, οπότε το υλικό έχει πλέον πλαστικοποιηθεί πλήρως. Η τιμή της τάσης σ_s , στην οποία ολοκληρώνεται η πλαστικοποίηση του υλικού, ονομάζεται **όριο διαρροής**.

4. Μετα το σημείο Δ παρατηρείται έντονη αύξηση της παραμόρφωσης χωρίς πρακτικά αύξηση της τάσης μέχρι το σημείο Γ. Από το σημείο Γ και μέχρι το σημείο Θ, που επέρχεται η θραύση, παρατηρείται μια αύξηση της παραμόρφωσης για πολύ μικρή αύξηση της τάσης. Το υλικό ανακτά μέρος της αντοχής του και για αυτό η περιοχή από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Θ ονομάζεται **περιοχή κράτυνσης**.

Η τιμή της τάσης σ_B , στην οποία επέρχεται η θραύση του δοκιμίου, ονομάζεται **όριο θραύσης**.

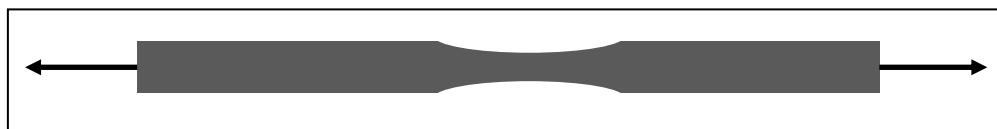
Η περιοχή από το σημείο Ε μέχρι το σημείο Θ ονομάζεται **πλαστική περιοχή**.

Τα παραπάνω όρια είναι χαρακτηριστικά για κάθε υλικό και υπολογίζονται πειραματικά με το πείραμα εφελκυσμού. Ενδεικτικές τιμές για κάποια όρια για ορισμένα υλικά δίνονται στον πίνακα (1).

5. Στο πείραμα εφελκυσμού του χάλυβα, παρατηρείται μια στένωση του δοκιμίου στην περιοχή που θα γίνει η θραύση. (σχ. 11)

Αν l_B είναι το άθροισμα των μηκών των δύο τμημάτων του δοκιμίου μετά την θραύση, ο λόγος της **μήκυνσης θραύσης** ($l_B - l_0$) προς το αρχικό μήκος l_0 του δοκιμίου ονομάζεται **ανηγμένη μήκυνση θραύσης**:

$$\varepsilon_B = \frac{l_B - l_0}{l_0} \quad (9)$$



Σχήμα 11. Στένωση πριν τη θραύση

11.3. Πείραμα θλίψης

Αντίστοιχο προς το πείραμα εφελκυσμού είναι και το πείραμα θλίψης, το οποίο πραγμα τοποιείται στην ίδια συσκευή και με τις ίδιες συνθήκες, μόνο που το δοκίμιο καταπονείται **σε κεντρική μονοαξονική θλίψη**.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του αντίστοιχου διαγράμματος τάσης-παραμόρφωσης είναι παρόμοια με αυτά του εφελκυσμού.

Ο νόμος του **Hooke**, δηλαδή η σχέση (7) ισχύει και για τη θλίψη.

Δεδομένου ότι η γραμμική παραμόρφωση ε είναι αλγεβρικός αριθμός (θετικός ή αρνητικός), και προκειμένου το μέτρο ελαστικότητας E του υλικού να έχει πάντα θετικό πρόσημο, ορίζουμε κατά σύμβαση η ορθή τάση σ να έχει θετικό πρόσημο όταν προκαλεί θετική παραμόρφωση και αρνητικό πρόσημο όταν προκαλεί αρνητική παραμόρφωση.

Έτσι: Οι **εφελκυστικές** τάσεις είναι **θετικές**, ενώ οι **θλιπτικές** τάσεις **αρνητικές**.

11.4. Όλκιμα – ψαθυρά υλικά

Παρατηρώντας την συμπεριφορά των διαφόρων υλικών στα πειράματα εφελκυσμού και θλίψης καταλήγουμε στην κατάταξη των υλικών σε δύο κατηγορίες: στα **όλκιμα** και στα **ψαθυρά** υλικά.

α. Τα **όλκιμα** υλικά παρουσιάζουν έντονη στένωση πριν τη θραύση, και μεγάλη σχετικά ανηγμένη μήκυνση θραύσης, ενώ τα **ψαθυρά** όχι.

β. Τα **όλκιμα** υλικά εμφανίζουν μεγάλη πλαστική περιοχή, ενώ τα **ψαθυρά** πολύ μικρή, έως καθόλου.

γ. Τα **όλκιμα** υλικά έχουν τα ίδια όρια τάσεων και στον εφελκυσμό και στη θλίψη, ενώ τα **ψαθυρά** πα-

ρουσιάζουν μεγάλες διαφορές και κατά κανόνα παρουσιάζουν μεγαλύτερες τιμές των ορίων αυτών στη θλίψη. Δηλαδή τα ψαθυρά υλικά έχουν «μεγαλύτερη» αντοχή σε θλίψη απ' ό,τι σε εφελκυσμό.

δ. Τα **όλκιμα** υλικά στο πείραμα της θλίψης δεν θραύονται, όπως στον εφελκυσμό, αλλά πλαστικοποιούνται συνεχώς, σαν να είναι από πλαστικό, ενώ τα **ψαθυρά** θραύονται με εμφάνιση ρωγμών που συνοδεύονται από κρότους, χωρίς να πλαστικοποιούνται ή πλαστικοποιούνται ελάχιστα.

ε. Τα **όλκιμα** υλικά μπορούν να γίνουν λεπτά ελάσματα (ελατά) και σύρματα (όλκιμα, εξ ου και η ονομασία τους), ενώ τα **ψαθυρά** όχι.

Όλκιμα υλικά είναι τα καθαρά μέταλλα, όπως ο σίδηρος, ο χαλκός, το αλουμίνιο, και ορισμένα κράματά τους, όπως ο χάλυβας, ο ορείχαλκος κ.α.

Ψαθυρά υλικά είναι ορισμένα κράματα μετάλλων με αμέταλλα, όπως ο χυτοσίδηρος, οι λίθοι, το σκυρόδεμα (μπετόν) κ. α.

12. Εγκάρσια παραμόρφωση

Κατά τον εφελκυσμό του δοκιμίου στο πείραμα εφελκυσμού, παρατηρείται μικρή μείωση της διαμέτρου του που αυξάνει όσο αυξάνει η επιμήκυνση του δοκιμίου. Αντίστοιχα, όταν το δοκίμιο καταπονείται σε θλίψη, παρατηρείται αύξηση της διαμέτρου του.

Η μεταβολή των εγκαρσίων διαστάσεων ενός σώματος που καταπονείται σε κεντρικό μονοαξονικό εφελκυσμό ή θλίψη ονομάζεται **εγκάρσια συστολή** ή **διαστολή** αντίστοιχα.

Με τον όρο «εγκάρσια διάσταση» εννοούμε κάθε διάσταση του σώματος κάθετη στη διεύθυνση της δύναμης που καταπονεί το σώμα σε εφελκυσμό ή θλίψη.

Προσοχή : Δεν πρέπει να συγχέουμε την εγκάρσια συστολή – διαστολή με τη θερμική συστολή – διαστολή. Η εγκάρσια συστολή – διαστολή είναι καθαρά μηχανικό φαινόμενο, ενώ η θερμική συστολή – διαστολή οφείλονται σε θερμοκρασιακές μεταβολές.

Ο λόγος της μεταβολής μιας εγκαρσίου διάστασης ως προς την αρχική τιμή της διάστασης αυτής ονομάζεται **εγκάρσια παραμόρφωση**.

Αν ονομάσουμε d_0 την αρχική τιμή μιας διάστασης και d την τελική της τιμή, η εγκάρσια παραμόρφωση ε_q είναι:

$$\varepsilon_q = \frac{d - d_0}{d_0} \quad (10)$$

Στον εφελκυσμό έχουμε : $l > l_0 \Rightarrow l - l_0 > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$

$$d < d_0 \Rightarrow d - d_0 < 0 \Rightarrow \varepsilon_q < 0$$

Στη θλίψη έχουμε : $l < l_0 \Rightarrow l - l_0 < 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$

$$d > d_0 \Rightarrow d - d_0 > 0 \Rightarrow \varepsilon_q > 0$$

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι $\varepsilon \cdot \varepsilon_q < 0$ δηλαδή

η γραμμική και η εγκάρσια παραμόρφωση είναι ετερόσημες.

Το φαινόμενο της εγκάρσιας συστολής – διαστολής μελέτησε ο Γάλλος μηχανικός **Poisson**, ο οποίος διαπίστωσε πειραματικά ότι ο λόγος της εγκάρσιας παραμόρφωσης προς τη γραμμική παραμόρφωση για ένα υλικό είναι σταθερός, ανεξάρτητος του φορτίου, με την προϋπόθεση ότι το υλικό βρίσκεται στην περιοχή της αναλογίας.

Λόγος Poisson ονομάζεται η απόλυτη τιμή του λόγου της εγκάρσιας προς τη γραμμική παραμόρφωση:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \right| \quad (11)$$

Για τα μέταλλα βρέθηκε πειραματικά $\mu = 0,25 - 0,35$, ενώ για τους χάλυβες $\mu = 0,3$ (Πίνακας 1)

Ο αντίστροφος του λόγου Poisson $m = \frac{1}{\mu}$ ονομάζεται **συντελεστής Poisson**

Αποδεικνύεται θεωρητικά ότι τα μέτρα **ελαστικότητας E**, **ολίσθησης G** και ο λόγος **Poisson μ** για τα μέταλλα και τα κράματά τους συνδέονται με τη σχέση:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (12)$$

Παρατήρηση: Λόγω της εγκάρσιας συστολής κατά το πείραμα του εφελκυσμού οι πραγματικές τάσεις είναι μεγαλύτερες από τις θεωρητικά υπολογιζόμενες, διότι μειώνεται η διατομή του δοκιμίου. Έτσι στο σχήμα (10) η παραγματική καμπύλη είναι η **GΘ'** και όχι η **GΘ**.

13. Επίδραση θερμοκρασίας στην αντοχή των υλικών

Τα όρια των τάσεων για τα διάφορα υλικά υπολογίζονται πειραματικά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος και οι μεταβολές τους για τις θερμοκρασιακές μεταβολές του περιβάλλοντος είναι πρακτικά ασήμαντες. Σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες όμως τα όρια των τάσεων των υλικών μειώνονται αισθητά, ιδιαίτερα μετά από μια οριακή τιμή θερμοκρασίας, που εξαρτάται από το υλικό, με αποτέλεσμα τη μείωση των χαρακτηριστικών ορίων της αντοχής τους.

Γ' αυτό, όταν πρόκειται για μηχανές, συσκευές και εξαρτήματα που εργάζονται σε υψηλές θερμοκρασίες (ατμολέβητες, μηχανές εσωτερικής καύσης, ατμοστρόβιλοι) πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν η μείωση αυτή των ορίων αντοχής των υλικών τους.

14. Ερπυσμός

Η επιβολή ενός φορτίου σε ένα σώμα για μεγάλο χρονικό διάστημα, έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση των ορίων αντοχής του υλικού του, ασήμαντη σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος, που όμως αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία.

Ο **ερπυσμός** είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο παρατηρείται αύξηση της παραμόρφωσης ενός σώματος υπό την επίδραση σταθερού φορτίου το οποίο όμως ασκείται στο σώμα για μεγάλο χρονικό διάστημα. (Το υλικό μοιάζει σαν να «έρπει»).

Το φαινόμενο του ερπυσμού είναι ασήμαντο σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος για τα περισσότερα από

τα συνήθη υλικά, όχι όμως για όλα. Για παράδειγμα το σκυρόδεμα παρουσιάζει έντονο ερπυσμό και σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

Σε υψηλές θερμοκρασίες το φαινόμενο του ερπυσμού είναι πιο έντονο και εντείνεται με την πάροδο του χρόνου με αποτέλεσμα σε ορισμένες περιπτώσεις να επέρχεται θραύση κάποιου σώματος λόγω υπέρμετρης αύξησης της παραμόρφωσής του, έστω και αν η τάση που ασκείται σ' αυτό είναι μικρότερη από το όριο θραύσης του υλικού του.

Πείραμα ερπυσμού

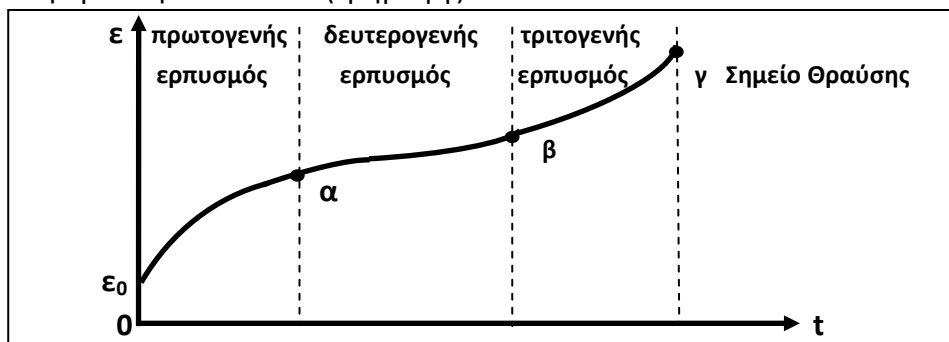
Το πείραμα του ερπυσμού πραγματοποιείται στην ίδια συσκευή του πειράματος εφελκυσμού.

Δοκίμιο με τυποποιημένες διαστάσεις υποβάλλεται σε κεντρικό μονοαξονικό εφελκυσμό σε υψηλή και σταθερή θερμοκρασία. Η εφελκυστική τάση διατηρείται σε μια σταθερή τιμή μικρότερη από το όριο διαρροής του υλικού, για μεγάλο χρονικό διάστημα που διαρκεί από μερικές ώρες μέχρι και χρόνια και μετρείται η παραμόρφωση του δοκιμίου κατά τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ. ανά μία ώρα) και με τις μετρήσεις αυτές κατασκευάζεται διάγραμμα παραμόρφωσης – χρόνου (σχ. 12).

Προφανώς τη χρονική στιγμή $t=0$ η παραμόρφωση ϵ_0 είναι αυτή που μετρείται στο πείραμα του εφελκυσμού για τη συγκεκριμένη τιμή της τάσης.

Η καμπύλη που προκύπτει ονομάζεται **καμπύλη ερπυσμού**, η οποία παρουσιάζει τρία χρονικά στάδια, ανάλογα με το **ρυθμό μεταβολής της παραμόρφωσης**, η οποία ονομάζεται **ταχύτητα ερπυσμού**. (σχ. 12):

- α. Στάδιο πρωτογενούς ερπυσμού** στην οποία η ταχύτητα ερπυσμού μειώνεται με την πάροδο του χρόνου (τμήμα Οα).
- β. Στάδιο δευτερογενούς ερπυσμού**, στην οποία η ταχύτητα ερπυσμού παραμένει πρακτικά σταθερή με την πάροδο του χρόνου (τμήμα αβ).
- γ. Στάδιο τριτογενούς ερπυσμού**, στην οποία η ταχύτητα ερπυσμού αυξάνεται με την πάροδο χρόνου μέχρι να επέλθει η θραύση του υλικού (τμήμα βγ).



Σχήμα 12. Καμπύλη και στάδια ερπυσμού

Σκοπός του πειράματος ερπυσμού είναι ο προσδιορισμός της αντοχής του υλικού σε υψηλές θερμοκρασίες, δηλαδή στον προσδιορισμό:

- α.** κάποιων τιμών τάσης ($\sigma_{\alpha,\theta,t}$) που προκαλούν παραμόρφωση **α%** στο δοκίμιο, αν εφαρμοστεί σταθερά για χρονικό διάστημα **t ωρών** σε θερμοκρασία **θ °C**. Έτσι:
 $\sigma_{1,300,10\ 000}$ είναι η τάση που προκαλεί στο δοκίμιο παραμόρφωση **1%** αν εφαρμοστεί σταθερά σε θερμοκρασία **300 °C** για χρονικό διάστημα **10 000 ωρών**.
- β.** κάποιων τιμών τάσης ($\sigma_{\beta,\theta,t}$) που προκαλούν θραύση στο δοκίμιο αν εφαρμοστούν σταθερά για χρονικό διάστημα **t ωρών** σε θερμοκρασία **θ °C**. Έτσι:
 $\sigma_{\beta,500,100\ 000}$ είναι η τάση που προκαλεί **θραύση** στο δοκίμιο αν εφαρμοστεί για χρονικό διάστημα

100 000 ωρών σε θερμοκρασία **500 °C**.

Οι τιμές αυτές της τάσης ονομάζονται **όρια παρατεταμένης αντοχής εν θερμώ**.

Είναι προφανές ότι $\sigma_{1,\theta,10\ 000} > \sigma_{1,\theta,100\ 000}$ και $\sigma_{B,\theta,10\ 000} > \sigma_{B,\theta,100\ 000}$

Η συμπεριφορά ενός υλικού σε ερπυσμό εξαρτάται από:

α. Το σημείο τήξης του. Η θερμοκρασία στην οποία εμφανίζεται το φαινόμενο του ερπυσμού στα μέταλλα είναι περίπου ίση με το 1/3 της θερμοκρασίας τήξης τους. Έτσι, μέταλλα με υψηλό σημείο τήξης εμφανίζουν χαμηλότερο ερπυσμό σε υψηλή θερμοκρασία από εκείνα με χαμηλότερο σημείο τήξης.

β. Την καθαρότητά του. Τα κράματα των μετάλλων εμφανίζουν χαμηλότερο ερπυσμό από τα καθαρά μέταλλα.

γ. Το μέγεθος των κόκκων τους. Υλικά που έχουν χονδρούς κόκκους εμφανίζουν χαμηλότερο ερπυσμό από εκείνα που έχουν λεπτούς κόκκους.

Για τους λόγους αυτούς, σε κατασκευές που εργάζονται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες προτιμώνται κράματα και όχι καθαρά μέταλλα, με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο σημείο τήξης και όσο το δυνατόν πιο χονδρόκοκκα.

15. Κόπωση

Κόπωση ενός υλικού ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο παρατηρείται μείωση της τάσης διαρροής ή θραύσης του υλικού, που καταπονείται σε **δυναμική** φόρτιση, μετά από κάποιον αριθμό επαναλήψεων της φόρτισης, αν και η μέγιστη επιβαλλόμενη τάση είναι μικρότερη από το όριο θραύσης του υλικού σε στατική φόρτιση.

Η μελέτη του φαινομένου της κόπωσης γίνεται με τη βοήθεια σχετικού πειράματος, στο οποίο εφαρμόζεται μια δυναμική φόρτιση (επαναλαμβανόμενη ή αντιστρεφόμενη) στο δοκίμιο, της οποίας η μέγιστη τιμή της τάσης είναι μικρότερη από το στατικό όριο θραύσης του υλικού, όπως αυτό υπολογίστηκε με το πείραμα εφελκυσμού, και η οποία επαναλαμβάνεται πολλές φορές στο δοκίμιο, και μετράμε τον αριθμό των επαναλήψεων μέχρι να επέλθει η θραύση του δοκιμίου. Το πείραμα γίνεται για πολλά ίδια δοκίμια από το υλικό σε κάθε ένα από τα οποία διαφέρει η μέση τάση σ_m και το πλάτος της τάσης σ_a (που ονομάζεται **τάση απόκλισης**) όπου:

$$\text{μέση τιμή τάσης } \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad \text{και} \quad \text{τάση απόκλισης } \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

όπου σ_{\max} και σ_{\min} η μέγιστη και ελάχιστη (αλγεβρικά) τιμή της τάσης.

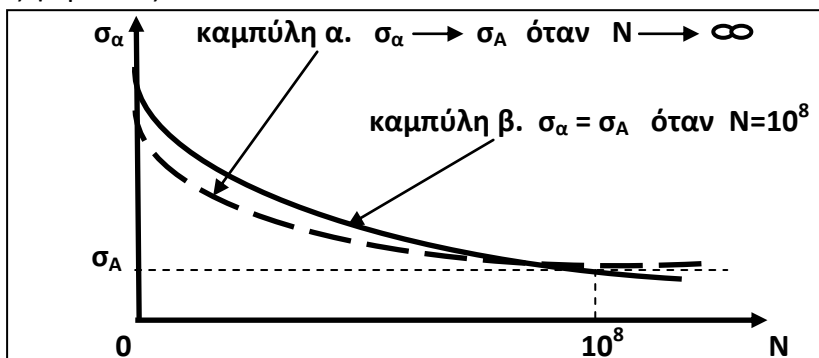
Τα αποτελέσματα του πειράματος αποτυπώνονται με σε ένα διάγραμμα **τάσης απόκλισης (σ_a) – αριθμού επαναλήψεων (N)**, που ονομάζεται **διάγραμμα κόπωσης** ή δε καμπύλη σ_a - N που προκύπτει ονομάζεται **καμπύλη Wohler** (σχ. 13).

Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται η τάση απόκλισης αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων μέχρι να επέλθει θραύση.

Υπάρχει όμως μια ελάχιστη τιμή σ_A της τάσης απόκλισης σ_a για την οποία θεωρητικά απαιτείται άπειρος αριθμός επαναλήψεων N για να επέλθει η θραύση του δοκιμίου, που σημαίνει πρακτικά ότι το δοκίμιο δεν θραύεται όσες επαναλήψεις φόρτισης και αν υποστεί. Αυτή η ελάχιστη τιμή της τάσης απόκλισης σ_A προς την οποία τείνει ασυμπτωτικά η καμπύλη **Wohler** στο διάγραμμα κόπωσης όταν ο αριθμός των επαναλήψεων N τείνει στο άπειρο, ονομάζεται **δυναμική αντοχή του υλικού**.

Για κάποια υλικά (χάλυβας, αλουμίνιο), η καμπύλη **Wohler** συνεχώς κινείται προς τα κάτω, χωρίς να γίνεται οριζόντια, όσο και αν αυξηθεί ο αριθμός των επαναλήψεων **N**. Για τα υλικά αυτά η δυναμική αντοχή σ_A ορίζεται **συμβατικά** ως η τιμή της τάσης απόκλισης σ_α για την οποία η θραύση του δοκιμίου επέρχεται μετά από **$N=10^8$** επαναλήψεις.

Ο λόγος σ_A/σ_B της δυναμικής αντοχής προς το στατικό όριο θραύσης εξαρτάται από τη φύση του υλικού. Ο πίνακας (1) δίνει ενδεικτικές τιμές του λόγου αυτού για κάποια υλικά. Παρατηρούμε ότι ο λόγος αυτός κυμαίνεται από **0,30** έως **0,50**, γεγονός που δείχνει πόσο μειώνεται η αντοχή των υλικών όταν καταπονούνται σε δυναμικές φορτίσεις.



Σχήμα 13. Καμπύλη Wohler

Η κόπωση ενός υλικού εξαρτάται κυρίως από: **α.** τις υπάρχουσες εγκοπές στο υλικό, **β.** την τραχύτητα των επιφανειών του υλικού, **γ.** τις κατεργασίες που έχει υποστεί το υλικό.

Πίνακας 1. Μηχανικές ιδιότητες διαφόρων υλικών

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E KN/mm ²	Μέτρο Ολίσθησης G KN/mm ²	Λόγος Poisson μ ---	Όριο Διαρροής σε εφελκυσμό (θλίψη) σ_S N/mm ²	Όριο Θραύσης σε εφελκυσμό (θλίψη) σ_B N/mm ²	Όριο διαρροής σε διάτμηση τ_S N/mm ²	Όριο Θραύσης σε διάτμηση τ_B N/mm ²	Λόγος σ_A/σ_B ---	Συντελεστής θερμικής διαστολής α x 10⁻⁶ grad ⁻¹
Χάλυβας δομικός	206	83	0,30	250	400	145	...	0,50	11,7
Χάλυβες υψηλής Αντοχής	206	83	0,30	345	480	210	...	0,45	11,7
Αλουμίνιο 99%	70	26	0,34	95	110	55	70	0,50	23,6
Κράματα αλουμινίου 44% - Cu	72	27	0,34	410	480	220	290	0,35	23
Χαλκός	119	42	0,35	266	385	161	...	0,50	16,7
Χυτοσίδηρος ASTM – 48	70	28	170 (650)	...	240	0,50 (0,35)	12,1
Χυτοσίδηρος ASTM – 47	165	64	0,25	230	340 (620)	...	330	0,50 (0,35)	12,1
Ορείχαλκος	105	39	0,38	105	540	65	300	0,35	20
Φωσφορούχος Ορείχλος	110	41	...	520	560	275	...	0,35	17,8
Σκυρόδεμα B225	25	...	0,20	...	(22,5)	0,50	10
Σκυρόδεμα B450	30	(45)	0,50	10
Ξυλεία	12,5	56 (50)	7,5	3,5
Κράμα τιτανίου (6% AL – 4%V)	114	825	900	9,5

Οι τιμές του πίνακα είναι μέσες ενδεικτικές τιμές

16. Συγκέντρωση τάσεων

Συγκέντρωση τάσεων ονομάζεται η αύξηση της τάσης σε σύγκριση με την θεωρητικά υπολογιζόμενη, σε μια περιοχή του υλικού, λόγω ύπαρξης κάποιας γεωμετρικής ασυνέχειας.

Η αύξηση της τάσης μπορεί να είναι τόσο μεγάλη, που να υπερβαίνει αυτή το όριο θραύσης του υλικού και να προκαλέσει τη θραύση του.

Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης k ονομάζεται ο λόγος της μέγιστης τιμής της τάσης σ_{\max} προς τη θεω-

ρητικά υπολογιζόμενη τάση σ :

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \quad (13)$$

Ο συντελεστής συγκέντρωσης k εξαρτάται από το σχήμα και όχι από τις διαστάσεις της γεωμετρικής ασυνέχειας, αλλά η κατανομή των τάσεων μπορεί να απεικονιστεί με σύγχρονες πειραματικές μεθόδους όπως η **φωτοελαστική ανάλυση** και η **ραδιομετρική θερμοελαστική ανάλυση** των τάσεων.

17. Μηχανικές ιδιότητες των υλικών

Οι ιδιότητες των στερεών υλικών που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές διακρίνονται σε:

- α. Φυσικές** όπως η πυκνότητα, το σημείο τήξης, ο συντελεστής θερμικής διαστολής-συστολής, η θερμική αγωγιμότητα, η ηλεκτρική αγωγιμότητα κ.α.
- β. Μηχανικές** όπως η ελαστικότητα, η σκληρότητα, η δυσθραυστότητα κ.α.
- γ. Τεχνολογικές** όπως ολκιμότητα, ελατότητα, δυνατότητα χύτευσης, συγκολλητικότητα κ.α.

17.1. Ελαστικότητα

Η ελαστικότητα εκφράζει την ευκολία αλλαγής σχήματος υπό την επίδραση ισχυρών φορτίων χωρίς να επέρχεται θραύση. Μέτρο της ελαστικότητας ενός υλικού είναι το μέτρο ελαστικότητας E (που στην πραγματικότητα είναι μέτρο της «ανελαστικότητας») και το μέτρο ολίσθησης G .

17.2. Δυσθραυστότητα

Η δυσθραυστότητα εκφράζει την αντοχή σε υψηλά φορτία, χωρίς να επέρχεται θραύση. Μέτρο της δυσθραυστότητας ενός υλικού είναι το όριο θραύσης σε εφελκυσμό ή θλίψη σ_B , η δυναμική αντοχή σε εφελκυσμό (ή θλίψη) σ_A και το όριο θραύσης σε διάτμηση τ_B .

17.3. Σκληρότητα

Η σκληρότητα ενός υλικού εκφράζει την αντίσταση του υλικού στην προσπάθεια διείσδυσης σ' αυτό κάποιου άλλου σώματος (**διεισδυτής**), **σκληρότερου** από το προς σκληρομέτρηση υλικό, **κάθετα** προς την επιφάνειά του. Παράλληλα η σκληρότητα εκφράζει και την αντοχή σε φθορά της επιφάνειας του υλικού όταν ολισθαίνει πάνω της ένα άλλο σώμα ασκώντας μια δύναμη κάθετη σ' αυτήν. Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι μέτρησης της σκληρότητας, που διασκρίνονται σε **στατικές**, **δυναμικές** και με **αναπήδηση**.

A. Στατικές μέθοδοι σκληρομέτρησης

Στις **στατικές** μεθόδους ο διεισδυτής ασκεί μια σταθερή δύναμη, κάθετα προς την επιφάνεια του προς μέτρηση υλικού. Ο λόγος του μέτρου της δύναμης αυτής προς κάποιο χαρακτηριστικό γεωμετρικό

μέγεθος του αποτυπώματος που αφήνει ο διεισδυτής στην επιφάνεια του υλικού, καθορίζει το μέτρο της σκληρότητας του υλικού.

Υπάρχουν τρεις μέθοδοι μέτρησης της σκληρότητας, που διαφέρουν στο υλικό ή το σχήμα της κατατομής του διεισδυτή, και η κάθε μέθοδος ορίζει μια **σκληρομετρική κλίμακα**. Αυτές είναι:

α. Η μέθοδος Brinell

Ο διεισδυτής είναι από **σκληρό χάλυβα**, έχει σχήμα **σφαιρικό**, συγκεκριμένης διαμέτρου και ασκεί στην επιφάνεια του υλικού κάθετη δύναμη σταθερή για **10 έως 30 sec**.

Για να είναι αξιόπιστα στα αποτελέσματα των μετρήσεων πρέπει να πληρούνται οι εξής προϋποθέσεις:

1. Η επιφάνεια του προς σκληρομέτρηση υλικού πρέπει να είναι επίπεδη και λεία.
2. Το πάχος του δοκιμίου από το προς σκληρομέτρηση υλικό, πρέπει να έχει δεκαπλάσιο τουλάχιστον πάχος από το βάθος του αποτυπώματος.
3. Η διάμετρος του αποτυπώματος πρέπει να είναι παραπλήσια με τη διάμετρο του διεισδυτή.
4. Η φόρτιση πρέπει να γίνεται με αργό ρυθμό.
5. Η αποφόρτιση πρέπει να γίνεται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα και όχι αμέσως.

Ως **σκληρότητα κατά Brinell** ορίζεται ο λόγος:

$$HB = \frac{F}{A} \quad (14)$$

όπου: **F** το μέτρο της ασκούμενης δύναμης και **A** το εμβαδόν του αποτυπώματος.

Μονάδα σκληρότητας κατά **Brinell** είναι το **1 N/m²** (συνήθως χρησιμοποιούνται **1 N/cm²** και **1 N/mm²**).

Αποδεικνύεται πειραματικά ότι μεταξύ σκληρότητας κατά Brinell και ορίου θραύσης ισχύει η σχέση:

$$\sigma_B = k \cdot HB \quad (15)$$

Τιμές του συντελεστή **k** προσδιορίζονται πειραματικά. Η σχέση (14) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ορίου θραύσης σ_B όταν είναι γνωστή η σκληρότητα **HB** και ο συντελεστής **k**.

β. Μέθοδος Vickers

Η μέθοδος **Vickers** χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της σκληρότητας όλων των μετάλλων, ιδιαίτερα των πολύ σκληρών. Ο διεισδυτής είναι από **διαμάντι**, έχει σχήμα **κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας**, οι απέναντι έδρες της οποίας σχηματίζουν γωνία **136°**, και ασκεί στην επιφάνεια του υλικού κάθετη δύναμη για χρονικό διάστημα από **10 έως 30 sec**, το μέτρο της οποίας εξαρτάται από το πάχος του δοκιμίου.

Για να είναι αξιόπιστα τα αποτελέσματα των μετρήσεων πρέπει να πληρούνται οι εξής προϋποθέσεις:

1. Η επιφάνεια του προς σκληρομέτρηση υλικού πρέπει να είναι επίπεδη και λεία.
2. Το πάχος του δοκιμίου από το προς σκληρομέτρηση υλικό να είναι τουλάχιστον **1,5** φορά μεγαλύτερο από τη διαγώνιο του αποτυπώματος.
3. Η φόρτιση πρέπει να γίνεται με αργό ρυθμό.
4. Ο διεισδυτής πρέπει να προφυλάσσεται από κτυπήματα και να λειαίνεται συχνά.

Ως σκληρότητα κατά **Vickers** ορίζεται ο λόγος:

$$HV = \frac{F}{A} \quad (15)$$

όπου: **F** το μέτρο της ασκούμενης δύναμης και **A** το εμβαδόν του αποτυπώματος.

Ως τελική τιμή της σκληρότητας λαμβάνεται ο μέσος όρος **τριών** μετρήσεων.

γ. Μέθοδος Rockwell

Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούνται διεισδυτές από διάφορο υλικό και διαφορετικού σχήματος ανάλογα με το προς σκληρομέτρηση υλικό. Έτσι για σκληρά μέταλλα ο διεισδυτής είναι από διαμάντι και έχει

έχει σχήμα κώνου με γωνία κορυφής **120°** (σκληρότητα **HRC**). Αντίθετα για μαλακά μέταλλα ο διεισδυτής είναι από χάλυβα και έχει σφαιρικό σχήμα διαμέτρου **0,2 mm** (σκληρότητα **HRB**).

Ως σκληρότητα κατά **Rockwell** ορίζεται το βάθος του αποτυπώματος του διεισδυτή. Ως μονάδα μέτρησης λαμβάνονται τα **2μm**. Η μέτρηση στη μέθοδο **Rockwell** γίνεται σε δύο στάδια:

- 1. Στάδιο προφόρτισης:** Ο διεισδυτής ασκεί δύναμη με μέτρο περίπου **100 N** οπότε στην επιφάνεια του υλικού δημιουργείται μικρό αποτύπωμα, που αποσκοπεί στην ισοπέδωση τυχόν τοπικών ανωμαλιών, ώστε να μην απαιτείται προλείανση της επιφάνειας.
- 2. Στάδιο φόρτισης:** Στο στάδιο αυτό εφαρμόζεται πρόσθετη δύναμη με μέτρο περίπου **1400 N** για την περίπτωση του αδαμάντινου κώνου ή **900 N** για την περίπτωση της χαλύβδινης σφαίρας. Το πρόσθετο αυτό φορτίο αφαιρείται μετά από μερικά δευτερόλεπτα ενώ συνεχίζει να ασκείται το αρχικό φορτίο των **100 N**, οπότε το βάθος του αποτυπώματος μεγαλώνει κατά **z** σε σχέση με το αρχικό βάθος του στάδιο προφόρτισης.

Η σκληρότητα κατά **Rockwell HRC** δίνεται από τη σχέση:

$$HRC = 130 - \frac{z}{0,002} \quad (16)$$

Η σκληρότητα κατά **Rockwell HRB** δίνεται από τη σχέση:

$$HRB = 100 - \frac{z}{0,002} \quad (17)$$

Και στις δύο περιπτώσεις ως τελική τιμή της σκληρότητας λαμβάνεται ο μέσος όρος **δύο** μετρήσεων.

B. Δυναμικές μέθοδοι σκληρομέτρησης

Στις δυναμικές μεθόδους σκληρομέτρησης ο διεισδυτής ο οποίος είναι σε επαφή με την επιφάνεια του προς σκληρομέτρηση υλικού, δέχεται ισχυρή κρουστική δύναμη, με αποτέλεσμα να διειδύσει στο υλικό.

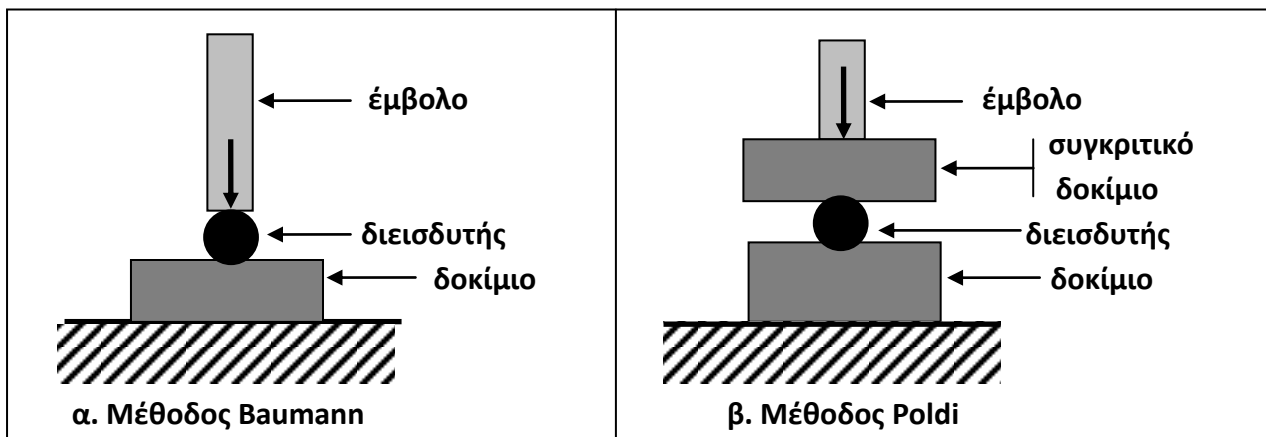
Η τιμή της σκληρότητας του υλικού προσδιορίζεται με βάση το μέτρο της κρουστικής δύναμης και το μέγεθος του αποτυπώματος. Οι μέθοδοι αυτοί έχουν το πλεονέκτημα να εφαρμόζονται επί τόπου, ειδικά όταν πρόκειται για σκληρομέτρηση αντικειμένων μεγάλων διαστάσεων, από τα οποία δεν είναι εφικτή η κατασκευή δοκιμίου. Εκτός αυτού τα όργανα μέτρησης είναι εύκολα στο χειρισμό τους και μεταφέρονται εύκολα λόγω του μικρού μεγέθους τους. Οι μέθοδοι αυτές είναι:

α. Μέθοδος Baumann

Ο διεισδυτής στη μέθοδο αυτή είναι μικρή σφαίρα από σκληρό χάλυβα, η οποία είναι σε επαφή με την επιφάνεια του προς σκληρομέτρηση υλικού. Αυτός δέχεται απότομη κρουστική δύναμη από ένα έμβολο που πέφτει πάνω του με μεγάλη ταχύτητα. Από το μέτρο της δύναμης και το βάθος του αποτυπώματος προσδιορίζεται η σκληρότητα του υλικού (σχ.14α).

β. Μέθοδος Poldi

Στη μέθοδο αυτή ο διεισδυτής είναι μικρή χαλύβδινη σφαίρα, που βρίσκεται ανάμεσα στο προς σκληρομέτρηση υλικό και ενός δοκιμίου από υλικό με γνωστή σκληρότητα, που ονομάζεται **συγκριτικό δοκίμιο**, το οποίο δέχεται ισχυρή κρουστική δύναμη από έμβολο. Αποτέλεσμα της κρούσης είναι η διείσδυση του διεισδυτή και στο προς σκληρομέτρηση υλικό και στο συγκριτικό δοκίμιο. Από τη σύγκριση του βάθους των δύο αποτυπωμάτων, συμπεραίνουμε το μέτρο της σκληρότητας του προς σκληρομέτρηση υλικού. (σχ.14β)



Σχήμα 14. Δυναμικές μέθοδοι σκληρομέτρησης

Γ. Μέθοδοι σκληρομέτρησης με αναπήδηση

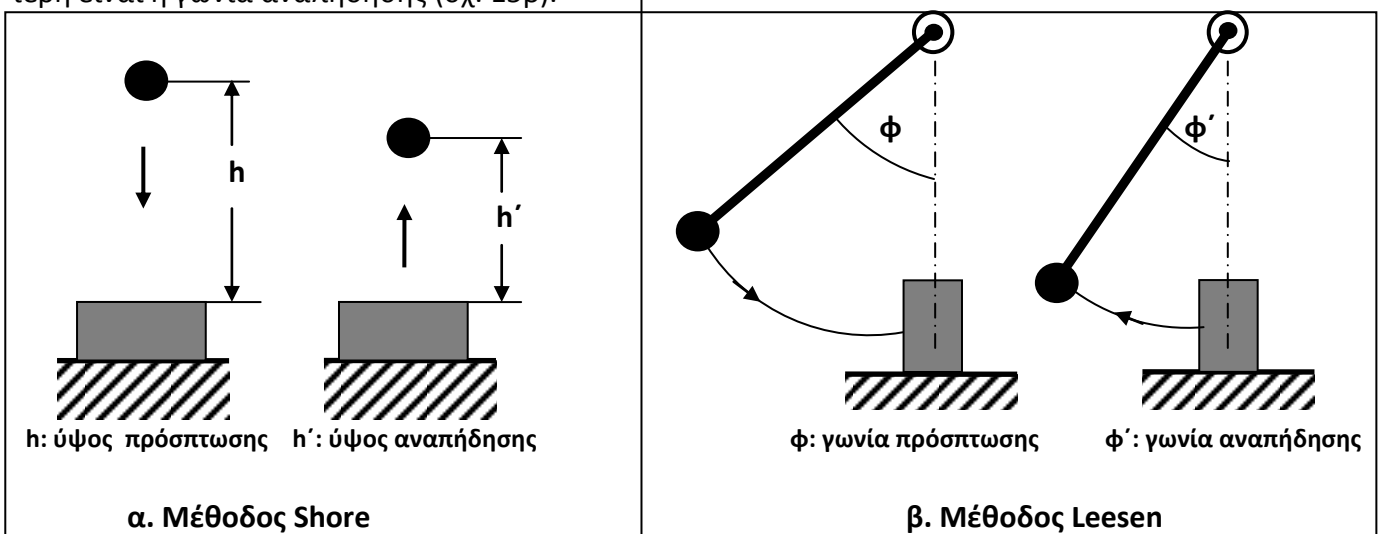
Στις μεθόδους αυτές ο διεισδυτής είναι μικρή χαλύβδινη σφαίρα, η οποία προσπίπτει με ταχύτητα στην προς σκληρομέτρηση επιφάνεια και αναπηδά. Η τιμή της σκληρότητας του υλικού προσδιορίζεται από το μέγεθος της αναπήδησης. Και αυτές οι μέθοδοι προσφέρονται για επιτόπια σκληρομέτρηση μεγάλων διαστάσεων και βάρους αντικειμένων, λόγω της εύκολης χρήσης και μεταφοράς των οργάνων μέτρησης. Οι μέθοδοι αυτές είναι:

α. Μέθοδος Shore

Στη μέθοδο αυτή η σφαίρα προσπίπτει στην επιφάνεια του προς σκληρομέτρηση υλικού από ορισμένο ύψος και μετράμε το ύψος της αναπήδησης. Η τιμή της σκληρότητας του υλικού προσδιορίζεται από τη σύγκριση του ύψους αναπήδησης με το αρχικό ύψος, δεδομένου ότι όσο πιο σκληρό είναι το υλικό, τόσο μεγαλύτερο είναι το ύψος αναπήδησης (σχ. 15α).

β. Μέθοδος Leesen

Στη μέθοδο αυτή ο διεισδυτής είναι μικρή χαλύβδινη σφαίρα, δεμένη στο άκρο εκκρεμούς με ορισμένο μήκος. Το εκκρεμές μαζί με τη σφαίρα εκτρέπεται από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του κατά ορισμένη γωνία και αφήνεται να προσπέσει στην κατακόρυφη επιφάνεια του προς σκληρομέτρηση υλικού. Η σφαίρα μετά την κρούση αναπηδά και το εκκρεμές φτάνει σε μια γωνία προφανώς μικρότερη από την αρχική γωνία εκτροπής του. Η τιμή της σκληρότητας του υλικού προσδιορίζεται από τη σύγκριση της αρχικής γωνίας εκτροπής με τη γωνία αναπήδησης, δεδομένου ότι πιο σκληρό είναι το υλικό, τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνία αναπήδησης (σχ. 15β).



Σχήμα 15. Μέθοδοι σκληρομέτρησης με αναπήδηση

Η σκληρότητα ενός μεταλλικού υλικού μπορεί να αυξηθεί με κατάλληλες **θερμικές κατεργασίες**.

Η **βαφή** π.χ. συνίστανται στη θέρμανση του υλικού σε κατάλληλη θερμοκρασία ανάλογα με το υλικό και στη συνέχεια στην **απότομη** ψύξη του μέχρι τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Ανάλογα με τη θερμοκρασία της θέρμανσης μπορούμε να επιτύχουμε την επιθυμητή αύξηση της σκληρότητας του υλικού. Επειδή όμως η αύξηση της σκληρότητας έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ελαστικότητας και της δυσθραυστότητας, συνήθως ακολουθούν συμπληρωματικές θερμικές κατεργασίες (**ανόπτηση, επανάταξη**), που αποσκοπούν στην ανάκτηση μέρους της ελαστικότητας και της δυσθραυστότητας του υλικού, χωρίς αξιόλογη μείωση της σκληρότητάς του.

18. Πίεση επιφάνειας

Όταν δύο σώματα βρίσκονται σε επαφή και ασκεί το ένα στο άλλο μια δύναμη F , ορίζεται σαν **πίεση επιφάνειας** το μονόμετρο μέγεθος, που έχει μέτρο:

$$p = \frac{dF}{dA_\varepsilon} \quad (18) \quad \text{όπου:}$$

dF το μέτρο της στοιχειώδους δύναμης που ασκείται **κάθετα** στην στοιχειώδη επιφάνεια επαφής dA_ε . Αν η επιφάνεια επαφής A_ε είναι επίπεδη και η δύναμη F ασκείται **ομοιόμορφα** στην επιφάνεια επαφής A_ε , τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πίεση επιφάνειας p είναι σταθερή στην επιφάνεια A_ε , οπότε από

τη σχέση (18) προκύπτει: $dF = p \cdot dA_\varepsilon \Rightarrow F = \int_{A_\varepsilon} p \cdot dA_\varepsilon = p \cdot \int_{A_\varepsilon} dA_\varepsilon = p \cdot A_\varepsilon \Rightarrow$

$$p = \frac{F}{A_\varepsilon} \quad (19)$$

Βασική μονάδα της πίεσης επιφάνειας στο διεθνές σύστημα (SI) είναι το $\text{Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

Πρακτικά όμως χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια αυτής όπως: 1 N/mm^2 , 1 N/cm^2 , 1 kN/cm^2 κ.α.

Σύνθλιψη άντυγας οπής

Δύο ελάσματα συνδέονται με έναν ή περισσότερους ήλους (ή πείρους ή κοχλίες). (σχ. 16). Στα ελάσματα ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις, μια στο κάθε έλασμα, που τείνουν να ολισθήσουν το ένα πάνω στο άλλο. Έτσι η εσωτερική επιφάνεια της οπής του ελάσματος πιέζει και πιέζεται στην εξωτερική επιφάνεια του ήλου μια δύναμη F , η οποία προκαλεί μια πίεση επιφάνειας p , που δίνεται από τη σχέση:

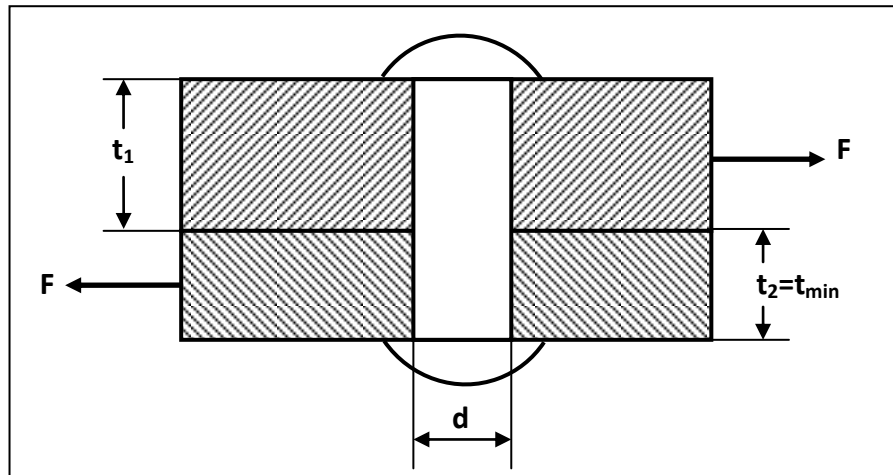
$$p = \frac{F}{d \cdot t_{\min}} \quad (20)$$

όπου: d η διάμετρος της οπής και του ήλου και t_{\min} το μικρότερο από τα πάχη των ελασμάτων

Η **συνθήκη αντοχής** σε πίεση επιφάνειας είναι: $p \leq p_{\varepsilon\pi}$ (21)

όπου $p_{επ}$ η επιτρεπόμενη πίεση επιφάνειας του ασθενέστερου υλικού.

Η επιτρεπόμενη πίεση επιφάνειας ενός υλικού είναι άμεση συνάρτηση της σκληρότητάς του.



Σχήμα 16. Σύνθλιψη άντυγας οπής

Πίνακας 2. Επιτρεπόμενη πίεση επιφάνειας για τα πιο συνηθισμένα στη Μηχανολογία υλικά

Υλικό	Χυτοσίδηρος	Χάλυβας	Ορείχαλκος	Φωσφορούχος ορείχαλκος	συνθετικά υλικά
$p_{επ}$ (N/mm ²)	5 – 10	8	10 – 20	25 N/mm ²	2 – 8

19. Επιτρεπόμενες τάσεις – Συντελεστές ασφάλειας.

Επιτρεπόμενη τάση ονομάζεται η τιμή της τάσης την οποία δεν πρέπει να υπερβούν οι τάσεις που αναπτύσσονται σ' ένα υλικό, όταν αυτό καταπονείται, ώστε αυτό να εργάζεται με ασφάλεια, χωρίς να κινδυνεύει σε αστοχία και να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις της λειτουργίας της κατασκευής στην οποία ανήκει.

Έτσι, αν η λειτουργία της κατασκευής απαιτεί να υπάρχει σχέση αναλογίας μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης (π.χ. δυναμόμετρο), οι τάσεις στο υλικό δεν πρέπει να υπερβαίνουν το όριο αναλογίας του.

Αν η λειτουργία της κατασκευής απαιτεί πλήρη διατήρηση της ελαστικότητας του υλικού (π.χ. ελατήρια βαλβίδων σε μια Μ.Ε.Κ.), οι τάσεις στο υλικό δεν πρέπει να υπερβαίνουν το όριο ελαστικότητάς του.

Αν η λειτουργία της κατασκευής δεν έχει κάποια από τις παραπάνω απαιτήσεις, τότε μπορούν οι τάσεις να υπερβούν λίγο το όριο ελαστικότητας, σε καμιά περίπτωση όμως το όριο διαρροής, διότι στην περίπτωση αυτή το υλικό είναι άχρηστο.

Τα παραπάνω όρια όμως έχουν προκύψει από εργαστηριακά πειράματα για ιδανικά υλικά και υπό ιδανικές συνθήκες. Στην πραγματικότητα όμως ούτε τα υλικά που χρησιμοποιούνται και σε μια κατασκευή είναι τέλεια, ούτε οι συνθήκες λειτουργίας και φόρτισης ιδανικές, οι τιμές των παραπάνω ορίων διαφέρουν από τις εργαστηριακά υπολογιζόμενες, και είναι κατά κανόνα μικρότερες.

Για το λόγο αυτό αλλά και για να λάβουμε υπ' όψιν και διάφορους παράγοντες, ακόμα και αστάθμητους, που υπάρχουν μεν στην πραγματικότητα αλλά όχι στο εργαστήριο και οι οποίοι προκαλούν μείωση στις τιμές των ορίων αντοχής, σαν επιτρεπόμενη τιμή για μια τάση λαμβάνεται το κλάσμα κάποιου ορίου, κατά περίπτωση, δηλαδή το πηλίκο του ορίου προς έναν αριθμό μεγαλύτερο της μονάδας. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **συντελεστής ασφάλειας** και διαμορφώνεται, εκτός των τεχνικών, και από άλλους

παράγοντες, οικονομικούς, κοινωνικούς, πολιτικούς κ.α. (διενείς οργανισμοί πιστοποίησης, Νηογνώμονες, διεθνείς συμβάσεις, κρατικοί κανονισμοί).

Είναι προφανές ότι αύξηση του συντελεστή ασφάλειας οδηγεί σε μείωση της επιτρεπόμενης τάσης, που σημαίνει μεγαλύτερη ασφάλεια μεν για την κατασκευή, αλλά και μεγαλύτερο κόστος. Αντίθετα μικρός συντελεστής ασφάλειας μειώνει μεν το κόστος αλλά και την ασφάλεια της κατασκευής. Έτσι έχουμε:

Για καταπονήσεις στις οποίες αναπτύσσονται μόνον ορθές τάσεις:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_S}{S} \quad (22) \quad \text{ή} \quad \sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_B}{S} \quad (23)$$

Αν η καταπόνηση είναι δυναμική, ορίζεται και η επιτρεπόμενη τάση απόκλισης κατ' αντίστοιχο τρόπο:

$$\sigma_{\alpha,\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_A}{S} \quad (24)$$

Για καταπονήσεις στις οποίες αναπτύσσονται μόνο διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{\tau_s}{S} \quad (25) \quad \text{ή} \quad \tau_{\varepsilon\pi} = \frac{\tau_B}{S} \quad (26)$$

όπου: τ_s και τ_B τα όρια διαρροής και θραύσης του υλικού αντίστοιχα σε διάτμηση.

Οι τύποι (22),(25) χρησιμοποιούνται κατά κανόνα για όλκιμα υλικά, ενώ οι τύποι (23),(26) για ψαθυρά.

Πίνακας 3. Συντελεστές ασφάλειας

Υλικό	Χάλυβες	Ξύλα
Συντελεστής ασφάλειας S	1,5 – 1,7 έναντι διαρροής, 2 – 3 έναντι θραύσης	3 – 4,5 έναντι θραύσης

20. Προβλήματα Αντοχής Υλικών

Τα προβλήματα στη μελέτη αντοχής μιας κατασκευής κατατάσσονται στις παρακάτω κατηγορίες:

α. Προβλήματα ελέγχου: Δίνονται τα φορτία, οι διαστάσεις και τα υλικά των στοιχείων της κατασκευής και ζητείται να ελεγχθεί αν ικανοποιούνται οι συνθήκες αντοχής ή τυχόν περιορισμοί για τις παραμορφώσεις.

β. Προβλήματα επιλογής υλικών: Δίνονται τα φορτία και οι διαστάσεις των στοιχείων της κατασκευής και ζητούνται τα κατάλληλα υλικά ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες αντοχής και τυχόν περιορισμοί για τις παραμορφώσεις.

γ. Προβλήματα ικανότητας φόρτισης: Δίνονται τα υλικά και οι διαστάσεις της κατασκευής και ζητούνται οι μέγιστες τιμές των φορτίων ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες αντοχής και τυχόν περιορισμοί για τις παραμορφώσεις.

δ. Προβλήματα διαστασιολόγησης: Δίνονται τα υλικά και τα φορτία της κατασκευής και ζητούνται οι απαραίτητες διαστάσεις ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες αντοχής και τυχόν περιορισμοί για τις παραμορφώσεις.

Γ. ΑΠΛΕΣ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΕΙΣ

21. Κεντρική μονοαξονική καταπόνηση

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.6, στην κεντρική μονοαξονική κεντρική καταπόνηση, οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα γραμμικό φορέα (ράβδος ή δοκό), έχουν φορέα τον γεωμετρικό του άξονα (σχ.5α). Θεωρούμε μια νοητή εγκάρσια τομή στο φορέα και εξετάζουμε την ισορροπία του ενός από τα δύο τμήματα. Στην διατομή του υπό εξέταση τμήματος ασκείται μια εσωτερική ορθή δύναμη **N** από τη διατομή του άλλου τμήματος, λόγω των δυνάμεων συνοχής μεταξύ των δομικών λίθων των δύο διατομών, η οποία ισορροπεί τις εξωτερικές δυνάμεις, που ασκούνται στο τμήμα αυτό και η οποία προκύπτει από την εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα του φορέα.

Η δύναμη αυτή θα είναι εφελκυστική, αν η διατομή του υπό εξέταση τμήματος έλκεται από την διατομή του άλλου τμήματος και θλιπτική, αν απωθείται. Αν ορίσουμε ως θετική φορά για τις δυνάμεις τη φορά του άξονα από τη διατομή του υπό εξέταση τμήματος προς τη διατομή του άλλου, προκύπτει ότι αν η ορθή δύναμη **N** είναι **εφελκυστική**, θα έχει **θετική** φορά, ενώ αν είναι **θλιπτική**, θα έχει **αρνητική** φορά. Με τον τρόπο αυτό αντικαθιστούμε τη φορά της ορθής δύναμης με πρόσημο και τις χρησιμοποιούμε σαν αλγεβρικούς προσημασμένους αριθμούς, αντί για διανύσματα, απλουστεύοντας το λογισμό τους. Η ορθή δύναμη ορίζει σύμφωνα με τη σχέση (2) και την αντίστοιχη ορθή τάση για την οποία εφαρμόζεται ο ίδιος κανόνας όσον αφορά τα πρόσημα.

21.1. Συνθήκη αντοχής

Για να είναι ασφαλές το υλικό, πρέπει το **μέτρο** της μέγιστης κατά μέτρο τάσης να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad (27)$$

όπου $\sigma_{\varepsilon\pi}$ η επιτρεπόμενη τιμή για την ορθή τάση του υλικού.

Η σχέση (27) αποτελεί τη **συνθήκη αντοχής** για την κεντρική μονοαξονική καταπόνηση.

Παρατήρηση: Αν το υλικό έχει διαφορετική επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό απ' ό τι σε θλίψη, η σχέση (27) πρέπει να ισχύει και για τη μέγιστη εφελκυστική και για τη μέγιστη θλιπτική τάση χρησιμοποιώντας την επιτρεπόμενη τάση σε κάθε περίπτωση.

21.2. Παραμορφώσεις

Με την προϋπόθεση ότι η ορθή τάση που αναπτύσσεται είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού, εφαρμόζοντας το νόμο του **Hooke** για μια περιοχή του φορέα που έχει μήκος l_0 , σταθερή διατομή **A** και στην οποία η ορθή δύναμη **N** είναι σταθερή, έχουμε:

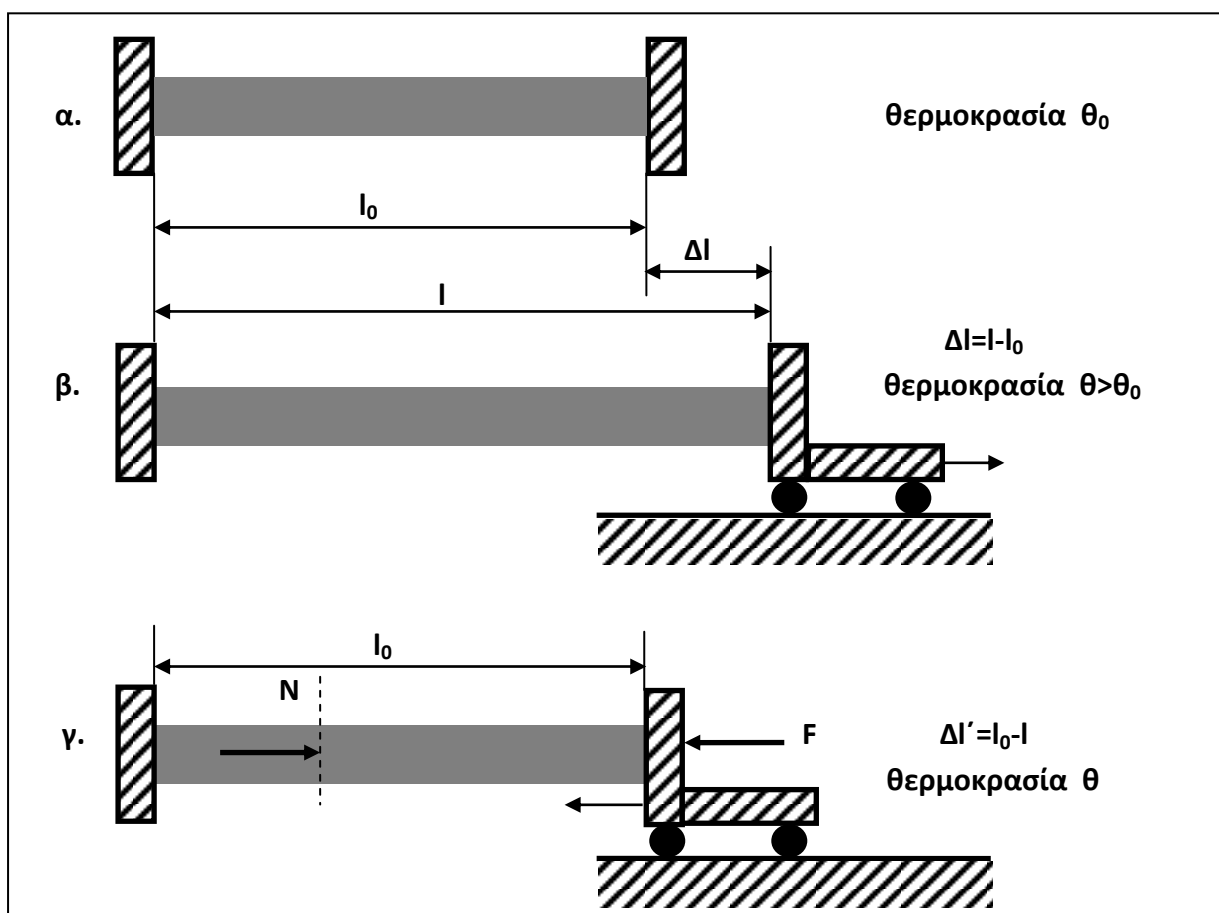
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l_0}{A \cdot E} \quad (28)$$

όπου Δl η μεταβολή του μήκους l_0 της περιοχής αυτής.

Στη σχέση (28), αν η ορθή δύναμη N είναι θετική (=εφελκυστική), τότε και η μεταβολή Δl προκύπτει θετική, δηλαδή αυξάνεται το μήκος της περιοχής. Τότε λέμε ότι η περιοχή αυτή **καταπονείται σε εφελκυσμό**. Αντίθετα, αν η ορθή δύναμη N είναι αρνητική (=θλιπτική), τότε και η μεταβολή Δl προκύπτει αρνητική, δηλαδή μειώνεται το μήκος της περιοχής. Τότε λέμε ότι η περιοχή αυτή **καταπονείται σε θλίψη**.

21.3. Τάσεις από παρεμποδισμό θερμικής διαστολής - συστολής

Έστω δοκός μήκους l_0 στερεωμένη στα δύο της άκρα σε δύο ακλόνητα στηρίγματα σε θερμοκρασία θ_0 (σχ.17α). Θερμαίνουμε τη δοκό σε θερμοκρασία θ . Η δοκός «θέλει» να διασταλεί λόγω της θέρμανσης, πλην όμως τα δύο ακλόνητα στηρίγματα εμποδίζουν την κατά μήκος διαστολή της. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η δοκός να ασκεί στα στηρίγματά της δύο δυνάμεις που τείνουν να τα απομακρύνουν. Από αντίδραση τα στηρίγματα ασκούν στη δοκό δύο αντίθετες με αυτές δυνάμεις, οι οποίες καταπονούν τη δοκό σε θλίψη.



Σχήμα 17. Τάσεις λόγω παρεμποδισμού θερμικής διαστολής

Για τον υπολογισμό της θλιπτικής τάσης που αναπτύσσεται στο υλικό της δοκού αντικαθιστούμε την πραγματική κατάσταση με την παρακάτω υποθετική:

Θεωρούμε το ένα από τα δύο στηρίγματα ελεύθερο να κινηθεί κατά μήκος της δοκού και θερμαίνουμε τη δοκό σε θερμοκρασία θ , οπότε η δοκός διαστέλλεται ελεύθερα κατά $\Delta l = l - l_0$, όπου l το νέο μήκος της δοκού μετά τη θερμική διαστολή της (σχ. 17β). Σύμφωνα με το νόμο της θερμικής διαστολής θα είναι:

$$\Delta l = l_0 \cdot a \cdot \Delta \theta \quad (29)$$

όπου: a ο συντελεστής γραμμικής διαστολής-συστολής του υλικού σε grad^{-1} και

$\Delta\theta = \theta - \theta_0$ η μεταβολή της θερμοκρασίας

Στη συνέχεια, διατηρώντας τη θερμοκρασία σταθερή, ασκούμε θλιπτική δύναμη F στη δοκό τόση ώστε να επανέλθει στο αρχικό της μήκος l_0 (σχ.17γ). Η ορθή εσωτερική δύναμη N που αναπτύσσεται μεταξύ δύο γειτονικών διατομών, θα είναι θλιπτική και ίση σε μέτρο με την F . Με την προϋπόθεση ότι η αναπτυσσόμενη θλιπτική τάση είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού της δοκού, θα ισχύει ο νόμος του **Hooke**, οπότε θα έχουμε:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l'}{l} = E \cdot \frac{l_0 - l}{l} = -E \cdot \frac{l - l_0}{l} \cong -E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = -E \cdot \frac{l_0 \cdot a \cdot \Delta\theta}{l_0} = -E \cdot a \cdot \Delta\theta$$

όπου τέθηκε: $\Delta l' = l_0 - l = -(l - l_0) = -\Delta l$ και

$l_0 \cong l$ δεδομένου ότι η μεταβολή του μήκους Δl είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος l_0

άρα τελικά:

$$\boxed{\sigma = -E \cdot a \cdot \Delta\theta} \quad (30)$$

Με ακριβώς την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι η σχέση (30) ισχύει και στην περίπτωση της μείωσης της θερμοκρασίας της δοκού.

Το πρόσημο (-) στη σχέση (30) δηλώνει ότι:

όταν έχουμε αύξηση της θερμοκρασίας ($\Delta\theta > 0$) η τάση που αναπτύσσεται είναι θλιπτική ($\sigma < 0$), ενώ όταν έχουμε μείωση της θερμοκρασίας ($\Delta\theta < 0$), η τάση που αναπτύσσεται είναι εφελκυστική ($\sigma > 0$).

21.4. Δοχεία πίεσεως

Δοχείο πίεσεως ονομάζεται κάθε δοχείο στο εσωτερικό του οποίου επικρατεί πίεση μεγαλύτερη από την εξωτερική. Η διαφορά της εσωτερικής πίεσης μείον την εξωτερική ονομάζεται **υπερπίεση**.

Παραδείγματα δοχείων πίεσεως:

- φιάλες αποθήκευσης αερίων υπό πίεση (φιάλες οξυγόνου, ασετυλίνης, υγραερίου κ.α.)
- δεξαμενές υγρών, κλειστές ή ανοικτές
- αγωγοί ροής ρευστών (σωλήνες ατμού, νερού, πετρελαίου κ.α.)
- μπάλλες, μπαλόνια, αερόστατα κ.α.

Δοχεία αποθήκευσης αερίων υπό πίεση

Λόγω της υπερπίεσης του αερίου τα τοιχώματα του δοχείου δέχονται δυνάμεις, οι οποίες προκαλούν στο υλικό των τοιχωμάτων εφελκυστικές τάσεις. Αυτές υπολογίζονται ως εξής:

Έστω ένα **κυλινδρικό** δοχείο με εσωτερική διαμέτρου d και μήκους l στο εσωτερικό του οποίου ασκείται υπερπίεση p από έλασμα πάχους t πολύ μικρού σε σχέση με τις διαστάσεις του δοχείου (λεπτότοιχο).

Θεωρούμε μια εγκάρσια τομή και εξετάζουμε την ισορροπία του αριστερού τμήματος (σχ. 18).

Η κυκλική βάση του δοχείου λόγω της υπερπίεσης, δέχεται μια δύναμη F_a που έχει τη διεύθυνση του άξονα του δοχείου και της οποίας το μέτρο είναι:

$$\boxed{F_a = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \quad (31)$$

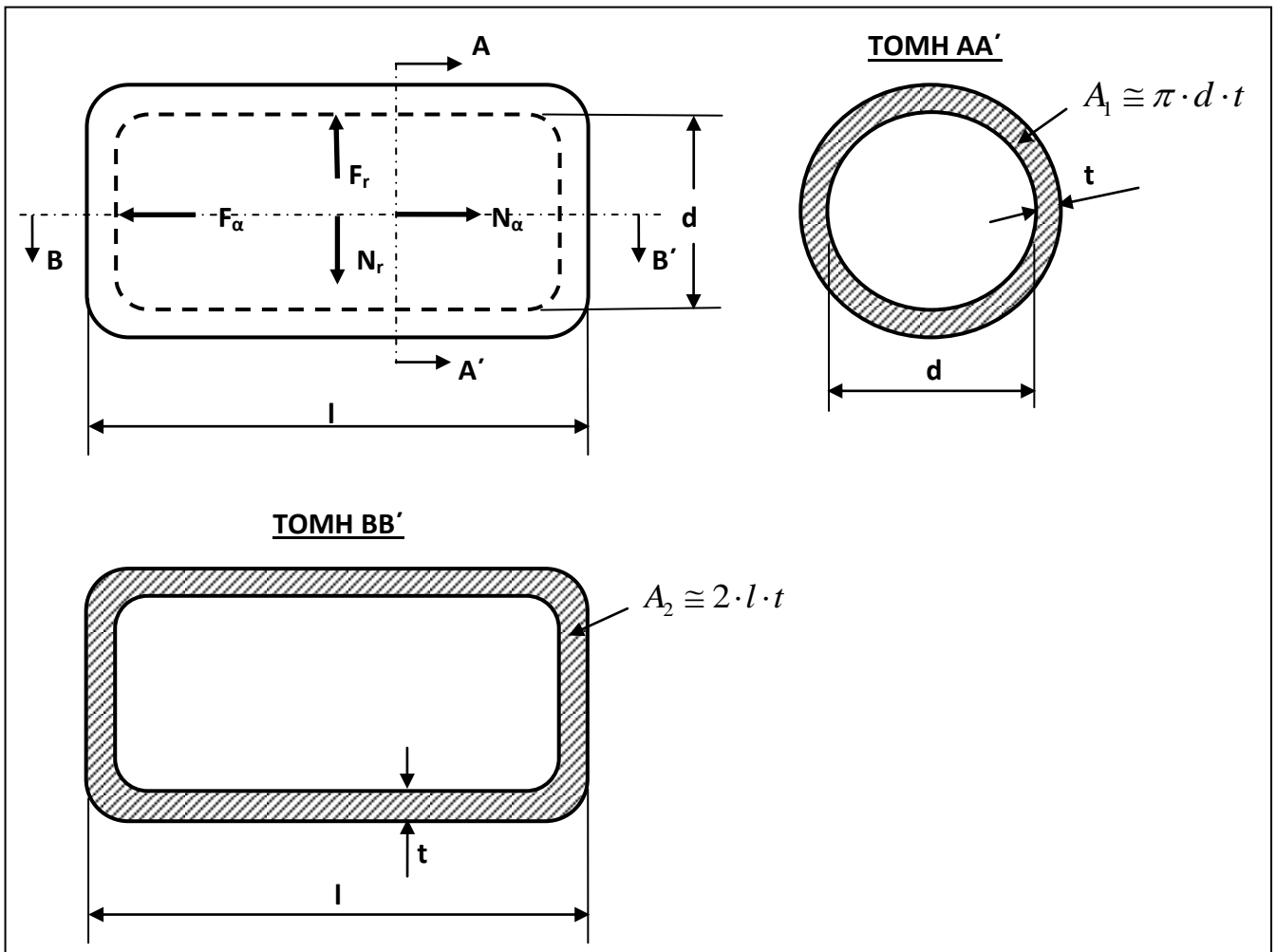
Η δύναμη αυτή εξισορροπείται από την εσωτερική ορθή δύναμη N_a ίση σε μέτρο με την F_a , που ασκεί η διατομή του δεξιού τμήματος στη διατομή του αριστερού, η οποία λόγω συμμετρίας της διατομής, έχει

φορέα τον άξονα του δοχείου και προκαλεί στην διατομή του αριστερού τμήματος μια ορθή τάση σ_a που ονομάζεται **αξονική** και είναι (σχ.18 τομή AA'):

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_1} = \frac{F_a}{\pi \cdot d \cdot t} = \frac{p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}{\pi \cdot d \cdot t}$$

και μετά τις απλοποιήσεις προκύπτει:

$$\sigma_a = \frac{p \cdot d}{4 \cdot t} \quad (32)$$



Σχήμα 18. Τάσεις σε δοχείο πίεσεως

Θεωρούμε μια οριζόντια διαμήκη τομή του δοχείου που να περιέχει τον άξονά του και εξετάζουμε την ισορροπία του πάνω τμήματος (σχ. 18 τομή BB'). Στο εσωτερικό της ημικυλινδρικής επιφάνειας του τμήματος αυτού θα ασκείται λόγω της υπερπίεσης μια κατακόρυφη δύναμη F_r κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του δοχείου της οποίας το μέτρο αποδεικνύεται ότι είναι:

$$F_r = p \cdot l \cdot d \quad (33)$$

Η δύναμη αυτή ισορροπείται από μια εσωτερική ορθή δύναμη N_r ίση σε μέτρο με την F_r , που ασκεί η διατομή του κάτω τμήματος στη διατομή του πάνω και προκαλεί στο υλικό μια ορθή εφελκυστική τάση σ_r που ονομάζεται **ακτινική** και είναι (σχ.17 τομή BB'):

$$\sigma_r = \frac{N_r}{A_2} = \frac{F_r}{2 \cdot l \cdot t} = \frac{p \cdot l \cdot d}{2 \cdot l \cdot t}$$

και μετά από απλοποιήσεις γίνεται:

$$\sigma_r = \frac{p \cdot d}{2 \cdot t} \quad (34)$$

Από τις σχέσεις (32) και (34) προκύπτει ότι:

$$\sigma_r = 2 \cdot \sigma_\alpha \quad (35)$$

Άρα για την αντοχή ενός κυλινδρικού δοχείου πίεσεως διαμέτρου d , μικρού πάχους t στο εσωτερικό του οποίου επικρατεί υπερπίεση p , πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$\frac{p \cdot d}{2 \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad (36)$$

Παρατηρήσεις:

1. Από τη σχέση (36) προκύπτει η διάμετρος του δοχείου και το πάχος του ελάσματος είναι ανάλογα, που σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος του κυλινδρικού δοχείου, τόσο μεγαλύτερο πρέπει να είναι το πάχος του τοιχώματος ώστε το μέτρο της τάσης να διατηρείται μικρότερο από την επιτρεπόμενη τάση του υλικού. Για το λόγο αυτό οι φιάλες αποθήκευσης αερίων υπό πίεση έχουν μικρή διάμετρο, ώστε να έχουν μικρό πάχος ελάσματος. Η μείωση της διαμέτρου, προκειμένου να έχουν την επιθυμητή χωρητικότητα, αντισταθμίζεται από αύξηση του ύψους. Έτσι οι φιάλες αυτές έχουν μικρή διάμετρο και μεγάλο ύψος (οβίδες).
2. Για δοχεία πίεσεως άλλου, εκτός του κυλινδρικού, σχήματος ισχύουν αντίστοιχες σχέσεις με την σχέση (36), που προκύπτουν με την ίδια διαδικασία, αρκεί στον υπολογισμό των δυνάμεων F_α και F_r καθώς και των διατομών A_1 και A_2 να ληφθεί υπ' όψιν το σχήμα του δοχείου.

Κυλινδρικές δεξαμενές υγρών

Μία δεξαμενή υγρού μπορεί να θεωρηθεί δοχείο πίεσης. Η υπερπίεση p αυτές είναι η υδροστατική πίεση την οποία ασκεί τουργό στα τοιχώματα του δοχείου και δίνεται από τη σχέση:

$$p = \gamma \cdot h \quad (37)$$

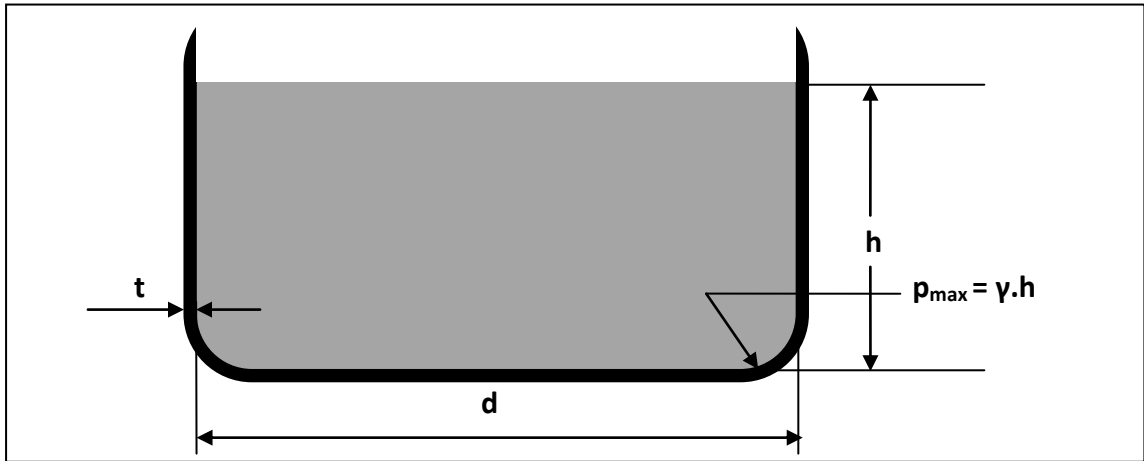
όπου: γ το ειδικό βάρος του υγρού και

h το βάθος (=απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού) του σημείου για το οποίο υπολογίζεται η υδροστατική πίεση

Για κυλινδρική δεξαμενή με εσωτερική διάμετρο d , αν στη σχέση (36) αντικαταστήσουμε την πίεση p από τη σχέση (37) έχουμε:

$$\frac{\gamma \cdot h \cdot d}{2 \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad (38)$$

Προφανώς η μέγιστη τάση που ασκείται στο τοίχωμα εμφανίζεται στα σημεία που βρίσκονται στον πυθμένα του δοχείου, διότι αυτά έχουν το μέγιστο βάθος (σχ.19).



Σχήμα 19. Κυλινδρική δεξαμενή υγρού

Έστω κυλινδρική δεξαμενή υγρού **σταθερής χωρητικότητας V**, διαμέτρου **d** και ύψους **h** από έλασμα πάχους **t**. Προφανώς ισχύει:

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \Rightarrow h = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} \quad \text{Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του } h \text{ στη σχέση (38) έχουμε:}$$

$$\frac{\gamma \cdot \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} \cdot d}{2 \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad \text{και μετά από πράξεις έχουμε:} \quad \boxed{\frac{2 \cdot \gamma \cdot V}{\pi \cdot d \cdot t} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}} \quad (39)$$

Από τη σχέση (39) προκύπτει ότι η διάμετρος **d** της δεξαμενής και το πάχος του ελάσματος **t** είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα αν θέλουμε το έλασμα να έχει μικρό πάχος **t**, για να διατηρηθεί η τάση σταθερή, πρέπει η δεξαμενή να έχει μεγάλη διάμετρο **d** (και προφανώς μικρό ύψος **h**).

Γι αυτό οι δεξαμενές υγρών κατασκευάζονται με μεγάλη διάμετρο **d** και μικρό ύψος **h**.

Σωλήνες ροής ρευστών υπό πίεση

Για τους σωλήνες ροής ρευστών ισχύει η σχέση (36) όπου **d** είναι η εσωτερική διάμετρος του σωλήνα, **t** το πάχος του σωλήνα και **p** η στατική πίεση του ρευστού.

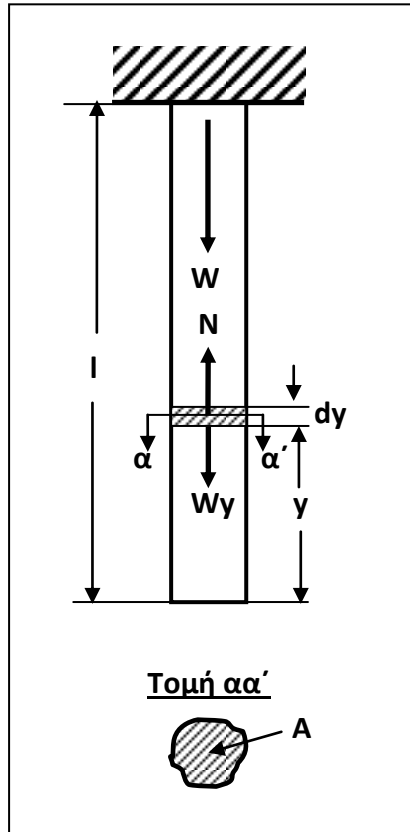
21.5. Τάσεις και παραμορφώσεις δοκού λόγω του βάρους της

Έστω **ομογενής** δοκός μήκους **l**, **σταθερής** διατομής με εμβαδόν **A** και βάρους **W**, η οποία κρέμεται κατακόρυφα από το ένα άκρο της (σχ.20). Θα υπολογίσουμε την ορθή τάση **σ** που αναπτύσσεται στο υλικό της και την επιμήκυνση **Δl** της δοκού, που οφείλονται στο βάρος της.

Θεωρούμε μία «λωρίδα» της δοκού με διατομή εμβαδού **A** και **στοιχειώδους** ύψους **dy**, που απέχει από το κάτω άκρο της δοκού απόσταση **y**. Η λωρίδα αυτή εφελκύεται από το βάρος **Wy** του τμήματος της δοκού που βρίσκεται κάτω από τη λωρίδα, το οποίο είναι:

$$W_y = \gamma \cdot A \cdot y = \gamma \cdot A \cdot \frac{l}{l} \cdot y = \gamma \cdot A \cdot l \cdot \frac{y}{l} \Rightarrow \boxed{W_y = W \cdot \frac{y}{l}} \quad (40)$$

όπου: **γ** το ειδικό βάρος του υλικού της δοκού και **W=γ·A·l** το βάρος της δοκού



Σχήμα 20. Παραμόρφωση δοκού λόγω του βάρους της

Η εσωτερική ορθή εφελκυστική δύναμη που αναπτύσσεται στο εσωτερικό της λωρίδας θα είναι ίση με το βάρος W_y το οποίο δρα σαν εξωτερική δύναμη για το φορτίο. Προφανώς $N=W_y$. Επομένως η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε μια διατομή της λωρίδας είναι:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{W_y}{A} = \frac{W \cdot y}{A \cdot l} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{W}{A} \cdot \frac{y}{l}} \quad (41)$$

Από τη σχέση (41) προκύπτει ότι η ορθή τάση σ σε μια διατομή της δοκού, είναι ανάλογη με την απόσταση της διατομής y από το ελεύθερο άκρο της δοκού. Επομένως η μέγιστη τιμή της τάσης εμφανίζεται στο άκρο της δοκού από το οποίο κρέμεται η δοκός και προκύπτει από τη σχέση (41) αντικαθιστώντας $y=l$.

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{W}{A}} \quad (42)$$

Με την προϋπόθεση ότι το υλικό της δοκού βρίσκεται στην περιοχή της αναλογίας, θα ισχύει ο νόμος του **Hooke**, οπότε η επιμήκυνση δdy του ύψους της dy της λωρίδας θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta dy = \frac{N \cdot dy}{A \cdot E} = \frac{W_y \cdot dy}{A \cdot E} = \frac{W \cdot \frac{y}{l} \cdot dy}{A \cdot E} \Rightarrow \delta dy = \frac{W \cdot y \cdot dy}{l \cdot A \cdot E}$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της δοκού.

Η συνολική επιμήκυνση της δοκού θα είναι:

$$\Delta l = \int_0^l \delta dy = \int_0^l \frac{W \cdot y \cdot dy}{l \cdot A \cdot E} = \frac{W}{l \cdot A \cdot E} \cdot \int_0^l y \cdot dy = \frac{W}{l \cdot A \cdot E} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^l = \frac{W}{l \cdot A \cdot E} \cdot \left(\frac{l^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{W \cdot l^2}{2 \cdot l \cdot A \cdot E} \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{W \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} \quad (43)$$

Οι σχέσεις (41), (42) και (43) ισχύουν και στην περίπτωση που η δοκός καταπονείται σε **θλίψη** από το βάρος της.

21.6. Υπερστατικά προβλήματα μονοαξονικής κεντρικής καταπόνησης

Στην μονοαξονική κεντρική καταπόνηση ενός γραμμικού φορέα, όλες οι εξωτερικές δυνάμεις, που ασκούνται σ' αυτόν, έχουν φορέα τον γεωμετρικό άξονα του φορέα. Η στατική ισορροπία του φορέα διέπεται από μια εξίσωση στατιστικής ισορροπίας. Επομένως, αν σ' ένα πρόβλημα υπάρχουν δύο ή περισσότερες άγνωστες δυνάμεις, το πρόβλημα είναι υπερστατικό (ή ο φορέας ονομάζεται υπερστατικός) και μπορεί να επιλυθεί μόνον εάν χρησιμοποιήσουμε και εξισώσεις από την Αντοχή των Υλικών.

Μια περίπτωση τέτοιου υπερστατικού φορέα είναι το σύστημα δύο δοκαριών, που είναι ενωμένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μη μπορεί κανένα να κινηθεί ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

Έστω λοιπόν ένα δοκάρι το οποίο βρίσκεται σταθερά στερεωμένο μέσα σε ένα άλλο με κοίλη διατομή (**καλώδιο**)(σχ.21). Το εσωτερικό δοκάρι (**1**) ονομάζεται **πυρήνας** ενώ το εξωτερικό δοκάρι (**2**) ονομάζεται περίβλημα. Το σύστημα των δύο δοκαριών εφλκύεται (ή θλίβεται) από ένα σύστημα δύο αντίθετων **δυνάμεων**. Με την προϋπόθεση ότι τα υλικά και των δύο δοκαριών βρίσκονται στην περιοχή της αναλογίας, θα υπολογίσουμε την τάση σε κάθε δοκάρι και την **κοινή** επιμήκυνσή (ή επιβράχυνσή) τους. Θεωρούμε μια εγκάρσια τομή **AA'** στο καλώδιο και εξετάζουμε την ισορροπία του αριστερού τμήματος. Το τμήμα αυτό ισορροπεί υπό την επίδραση της εξωτερικής δύναμης **F₁** και των δύο εσωτερικών ορθών δυνάμεων **N₁** και **N₂** που ασκούνται στη διατομή του αριστερού τμήματος κάθε δοκαριού από τη διατομή του αντίστοιχου δεξιού τμήματος. Η σχέση ισορροπίας για το αριστερό τμήμα, θεωρώντας θετική φορά για τις δυνάμεις τη φορά από το αριστερό προς το δεξιό τμήμα, είναι:

$$-F_1 + N_1 + N_2 = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = F_1 \quad (\alpha)$$

Η μοναδική αυτή εξίσωση στατικής ισορροπίας έχει δύο αγνώστους: τις δυνάμεις **N₁** και **N₂**, και δεν μπορεί να επιλυθεί, γι αυτό χρησιμοποιούμε μια ακόμη εξίσωση από την Αντοχή των Υλικών.

Αν **Δl₁** και **Δl₂** οι επιμηκύνσεις των δύο δοκαριών προφανώς:

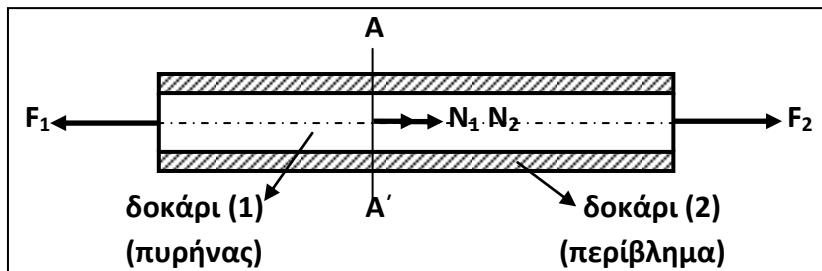
$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \Rightarrow \frac{N_1 \cdot l}{A_1 \cdot E_1} = \frac{N_2 \cdot l}{A_2 \cdot E_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1 \cdot E_1}{A_2 \cdot E_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = k \quad (\beta) \quad \text{θέτοντας: } \frac{A_1 \cdot E_1}{A_2 \cdot E_2} = k$$

όπου: **A₁**, **A₂** οι διατομές και **E₁**, **E₂** τα μέτρα ελαστικότητας των υλικών των δύο δοκαριών.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (α) και (β) βρίσκουμε μετά από πράξεις:

$$\boxed{N_1 = \frac{k \cdot F_1}{k + 1} \quad \text{και} \quad N_2 = \frac{F_1}{k + 1}}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τις τάσεις **σ₁** και **σ₂** σε κάθε υλικό σύμφωνα με τη σχέση (2) και την κοινή παραμόρφωση **Δl₁=Δl₂** σύμφωνα με τη σχέση (28).



Σχήμα 21. Υπερστατικός φορέας σε εφελκυσμό

Αν το παραπάνω σύστημα καταπονείται σε θλίψη, οι τάσεις και η επιβράχυνση υπολογίζονται από τις ίδιες σχέσεις.

21.7. Ασκήσεις

1. Δοκάρι από ορείχαλκο, μήκους **2 m**, με διατομή κυκλικού δακτυλίου με εξωτερική διάμετρο **50 mm** και εσωτερική **40 mm** καταπονείται σε εφελκυσμό από δύο αντίθετες δυνάμεις με μέτρο **40 kN**. Να ελεγχθεί η αντοχή του δοκαριού και να υπολογιστεί η επιμήκυνσή του.
Για το υλικό του δοκαριού δίνονται: $\sigma_{\text{επ}} = 60 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 90 \text{ N/mm}^2$, $E = 105 \text{ kN/mm}^2$.
2. Εξέδρα βάρους **400 kN** στηρίζεται σε τέσσερα υποστηλώματα από σκυρόδεμα (μπετόν) **B225** τετραγωνικής διατομής πλευράς **40 cm**.
Να υπολογιστεί το μέγιστο βάρος που μπορεί να σηκώσει με ασφάλεια η εξέδρα.
Για το σκυρόδεμα **B225** δίνονται:
 $\sigma_{\text{B}} = 22,5 \text{ N/mm}^2$ συντελεστής ασφάλειας έναντι θραύσης $S = 3,5$.
3. Να υπολογιστεί η απαιτούμενη διάμετρος ράβδου από χάλυβα, μήκους **4,5 m**, κυκλικής διατομής, που εφελκύεται από δύο δυνάμεις μέτρου **80 kN**, αν η επιμήκυνσή της δεν πρέπει να υπερβαίνει τα **2,5 mm**. Για το υλικό της ράβδου δίνονται: $\sigma_{\text{επ}} = 130 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 210 \text{ N/mm}^2$, $E = 206 \text{ kN/mm}^2$.
4. Συρματόσχοινο αποτελείται από **4000** συρματίδια που κάθε ένα έχει διάμετρο **0,5 mm**. Πόσα συρματόσχοινα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την ανύψωση φορτίου **300 kN** και πόση θα είναι η επιμήκυνση ανά μέτρο μήκους κάθε συρματόσχοινο. Για το υλικό των συρματιδίων δίνονται το μέτρο ελαστικότητας $E = 206 \text{ kN/mm}^2$ και η επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό $\sigma_{\text{επ}} = 100 \text{ N/mm}^2$.
5. Σωλήνας νερού από χαλκό στερεώνεται σταθερά στα άκρα του όταν η θερμοκρασία είναι **20 °C**. Μέχρι ποια τιμή μπορεί να φτάσει η θερμοκρασία του νερού, ώστε να μην αντιμετωπίσει πρόβλημα αντοχής ο σωλήνας;
Για το χαλκό δίνονται: $\sigma_{\text{επ}} = 120 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 200 \text{ N/mm}^2$, $E = 119 \text{ kN/mm}^2$, $\alpha = 16,7 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.
6. Φιάλη αποθήκευσης οξυγόνου (οβίδα) έχει διάμετρο **25 cm**. Το έλασμα από το οποίο είναι κατασκευασμένη είναι από χάλυβα και έχει πάχος **5 mm**. Πόση είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη πίεση που μπορεί να έχει το αποθηκευμένο αέριο, ώστε η φιάλη να μην αντιμετωπίσει πρόβλημα αντοχής;
Για τον χάλυβα δίνονται: $\sigma_{\text{επ}} = 95 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 190 \text{ N/mm}^2$, $E = 206 \text{ N/mm}^2$.

7. Δεξαμενή πετρελαίου ειδικού βάρους 9025 N/m^3 , έχει διάμετρο 10 m και ύψος 8 m . Πόσο πάχος πρέπει να έχει το χαλύβδινο έλασμα από το οποίο θα κατασκευαστεί η κυλινδρική επιφάνεια της δεξαμενής;

Για τον χάλυβα δίνονται: $\sigma_{\text{επ}} = 105 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 205 \text{ N/mm}^2$, $E = 206 \text{ N/mm}^2$.

8. Ο χαλύβδινος σωλήνας υπέρθερμου ατμού που οδηγεί τον υπέρθερμο ατμό από τον ατμολέβητα στον ατμοστρόβιλο μιας ατμοστροβιλοεγκατάστασης, έχει εσωτερική διάμετρο 15 cm .

Ο υπέρθερμος ατμός έχει πίεση 90 bar και θερμοκρασία $600 \text{ }^\circ\text{C}$. Να υπολογιστεί το απαιτούμενο πάχος του σωλήνα. ($1 \text{ bar} = 0,1 \text{ N/mm}^2$). Τα τυποποιημένα πάχη των σωλήνων σε mm είναι: $5 - 5,5 - 6 - 6,5 - 7$

Για το χάλυβα δίνονται: $\sigma_{\text{επ}} = 110 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 190 \text{ N/mm}^2$, $E = 206 \text{ N/mm}^2$.

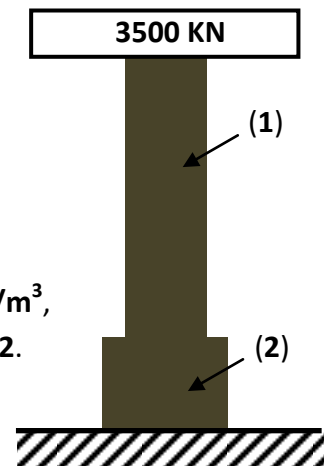
9. Το υποστύλωμα του σχήματος αποτελείται από δύο κολώνες από σκυρόδεμα **B225** και σηκώνει φορτίο 3500 KN .

Η κολώνα (1) έχει κυκλική διατομή με διάμετρο 80 cm και ύψος 3 m .

Η κολώνα (2) έχει τετραγωνική διατομή πλευράς 1 m και ύψος 1 m .

Να ελεγχθεί η αντοχή του και να υπολογιστεί η καθίζηση που θα υποστεί.

Για το σκυρόδεμα **B225** δίνονται: $\sigma_{\text{B}} = 22,5 \text{ N/mm}^2$, $E = 25 \text{ KN/mm}^2$, $\gamma = 22760 \text{ N/m}^3$, συντελεστής ασφάλειας έναντι θραύσης $S = 2,2$.



10. Χαλύβδινο υποστύλωμα έχει διατομή κυκλικού δακτυλίου με εξωτερική διάμετρο 70 cm και πάχος 1 cm γεμίζεται με σκυρόδεμα **B450**. Να υπολογιστεί το μέγιστο βάρος που μπορεί να σηκώσει με ασφάλεια.

Για τον χάλυβα δίνονται: $\sigma_{\text{επ}} = 130 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 200 \text{ N/mm}^2$, $E = 206 \text{ KN/mm}^2$.

Για το σκυρόδεμα **B450** δίνονται: συντελεστής ασφάλειας έναντι θραύσης $S = 4$, $\sigma_{\text{B}} = 45 \text{ N/mm}^2$, $E = 30 \text{ KN/mm}^2$.

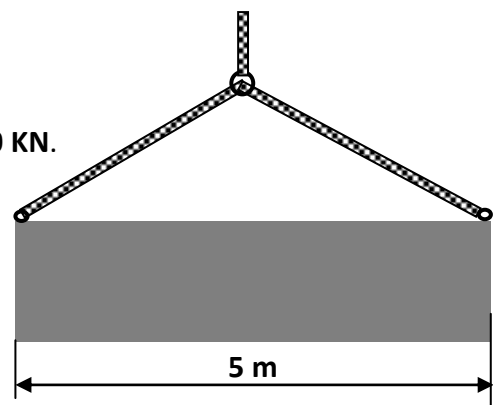
11. Να βρεθεί η απαιτούμενη διάμετρος και να υπολογιστεί η επιμήκυνσή των τριών συρματόσχοινων του σχήματος, αν το καθένα έχει μήκος 3 m . Το βάρος του κιβωτίου είναι 50 KN .

Για το υλικό των συρματόσχοινων δίνονται:

$\sigma_{\text{επ}} = 105 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{p}} = 190 \text{ N/mm}^2$, $E = 206 \text{ N/mm}^2$.

Τυποποιημένα πάχη συρματόσχοινων του εμπορίου:

$10, 12, 15, 20, 25, 30, 35 \text{ mm}$



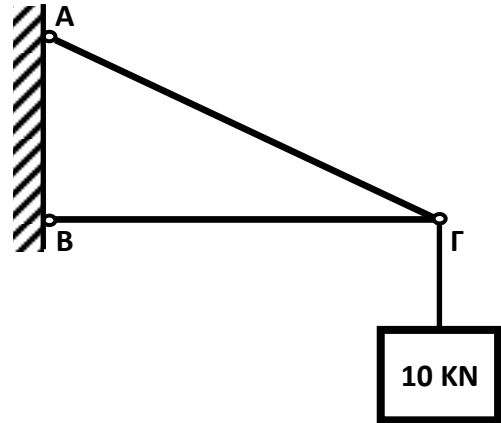
12. Να ελεγχθεί η αντοχή των ράβδων του σχήματος και να υπολογιστεί η μεταβολή του μήκους τους.

Η ράβδος ΑΓ έχει μήκος 2 m και διάμετρο 15 mm ενώ η ράβδος ΒΓ έχει μήκος 1,5 m και διάμετρο 12 mm.

Η διάμετρος των ράβδων είναι 20 mm.

Για το υλικό των ράβδων δίνονται:

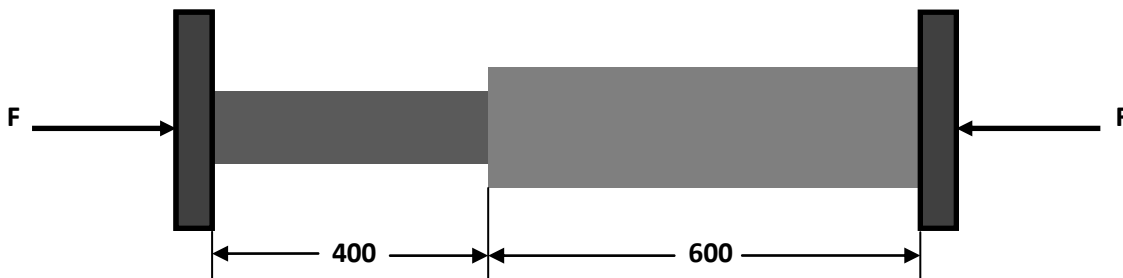
$$\sigma_{\text{επ}} = 110 \text{ N/mm}^2, \sigma_{\text{P}} = 200 \text{ N/mm}^2, E = 206 \text{ N/mm}^2.$$



13. Να γίνει έλεγχος αντοχής σε θλίψη και σε πίεση επιφάνειας των δύο δοκαριών όταν αυτά καταπονούνται σε θλίψη από τις σιαγόνες μιας πρέσσας, όπως φαίνεται στο σχήμα, από δύναμη 400 kN και η μείωση του μήκους καθενός. Το αριστερό δοκάρει έχει κυκλική διατομή με διάμετρο 100 mm ενώ το δεξιό δοκάρει έχει διατομή τετραγωνικού πλαισίου με εξωτερική πλευρά 120 mm και πάχος 30 mm.

Για το υλικό του αριστερού δοκαριού δίνονται το μέτρο ελαστικότητας $E_1 = 206 \text{ kN/mm}^2$, η επιτρεπόμενη τάση σε θλίψη $\sigma_{\text{επ1}} = 110 \text{ N/mm}^2$ και η επιτρεπόμενη πίεση επιφάνειας $p_{\text{επ1}} = 8 \text{ N/mm}^2$.

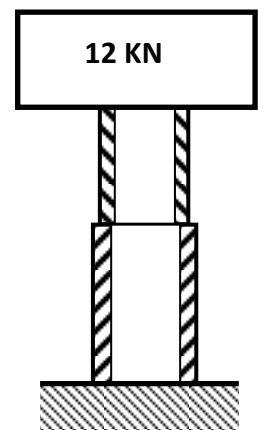
Για το υλικό του δεξιού δοκαριού δίνονται το μέτρο ελαστικότητας $E_2 = 180 \text{ kN/mm}^2$, η επιτρεπόμενη τάση σε θλίψη $\sigma_{\text{επ2}} = 100 \text{ N/mm}^2$ και η επιτρεπόμενη πίεση επιφάνειας $p_{\text{επ2}} = 9 \text{ N/mm}^2$.



14. Να ελεγχθεί η αντοχή σε πίεση επιφάνειας των δύο σωλήνων του σχήματος που φέρουν βάρους 12 kN.

Ο σωλήνας (1) έχει εξωτερική διάμετρο 80 mm και εσωτερική 60 mm και είναι από χάλυβα με $p_{\text{επ}} = 8 \text{ N/mm}^2$.

Ο σωλήνας (2) έχει εξωτερική διάμετρο 75 mm και εσωτερική 55 mm και είναι από ορείχαλκο με $p_{\text{επ}} = 10 \text{ N/mm}^2$.

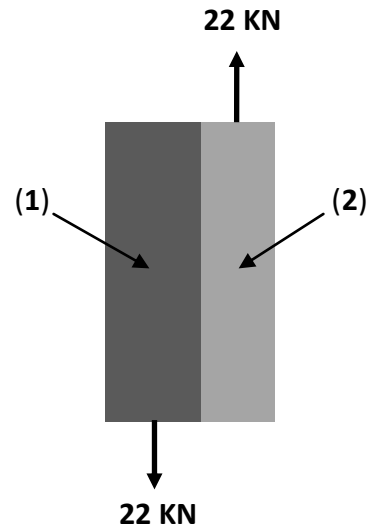


15. Δύο ελάσματα συνδέονται με χαλύβδινους ήλους διαμέτρου **12 mm** και δέχονται μια δύναμη **22 kN** που τείνει να ολισθήσει το ένα πάνω στο άλλο, όπως στο σχήμα.

Το έλασμα (1) έχει πάχος **30 mm** και είναι από χάλυβα με $\rho_{\text{επ}} = 8 \text{ N/mm}^2$.

Το έλασμα (2) έχει πάχος **25 mm** και είναι από ορείχαλκο με $\rho_{\text{επ}} = 10 \text{ N/mm}^2$.

Πόσοι ήλοι απαιτούνται για τη σύνδεση των δύο ελασμάτων; (Θεωρούμε ότι η δύναμη ισοκατανέμεται στους ήλους).



16. Υποστύλωμα από χάλυβα έχει ύψος **2 m** και διατομή τετραγωνικού πλαισίου (κοιλοδοκός) με εξωτερική πλευρά **40 cm** και πάχος **5 cm**. Για να αυξήσουμε το ύψος του υποστυλώματος τοποθετούμε πάνω σ' αυτό άλλο υποστύλωμα που από το ίδιο υλικό, που έχει ύψος **1 m** και διατομή κυκλικού δακτυλίου (σωλήνας) με εξωτερική διάμετρο **40 cm** και πάχος **5 cm**.

Να ελεγχθεί αν το υποστύλωμα μπορεί να σηκώσει βάρος **300 kN**.

Για τον χάλυβα δίνονται: επιτρεπόμενη θλιπτική τάση $\sigma_{\text{επ}} = 90 \text{ N/mm}^2$, επιτρεπόμενη πίεση επιφάνειας $\rho_{\text{επ}} = 8 \text{ N/mm}^2$.

22. Απλή διάτμηση

22.1. Τάσεις – παραμορφώσεις – συνθήκη αντοχής

Η απλή διάτμηση ορίστηκε στην παράγραφο 1.6 (σχ. 5δ), και είναι η πιο απλή περίπτωση διάτμησης. Η συνθήκη αντοχής για την διάτμηση γενικά είναι:

$$\tau \leq \tau_{\text{επ}} \Rightarrow \frac{Q}{A} \leq \tau_{\text{επ}} \quad (44)$$

όπου: **Q** η τέμνουσα δύναμη, που ασκείται σε μια διατομή και η οποία υπολογίζεται από τις εξωτερικές δυνάμεις, που ασκούνται στη δοκό

A το εμβαδόν της διατομής και

$\tau_{\text{επ}}$ η επιτρεπόμενη διατμητική τάση για το υλικό που υπολογίζεται από τις σχέσεις (25) ή (26)

Η παραμόρφωση στη διάτμηση δίνεται από τη σχέση (8).

22.2 Ασκήσεις

1. Χαλύβδινος πείρος τοποθετείται για να εμποδίσει την ολίσθηση δύο ελασμάτων. Η δύναμη που τείνει να ολισθήσει το ένα έλασμα πάνω στο άλλο είναι **20 kN**.

Να υπολογιστεί η απαιτούμενη διάμετρος του πείρου και η γωνία παραμόρφωσης της διατομής του.

Για τον χάλυβα δίνονται: $\tau_{\text{επ}} = 75 \text{ N/mm}^2 < \tau_p$, $G = 83 \text{ kN/mm}^2$.

23. Απλή επίπεδη κάμψη

23.1. Είδη κάμψης

Η **απλή επίπεδη κάμψη** ορίστηκε στην παράγραφο 6 (σχ. 5γ).

Όταν οι εξωτερικές δυνάμεις και οι ροπές που ασκούνται στη δοκό είναι κάθετες στον άξονα της δοκού χωρίς όμως να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, η κάμψη ονομάζεται **σύνθετη**.

Στην περίπτωση της σύνθετης κάμψης ορίζουμε ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων **Oxyz**, (όπου **Oz** είναι ο άξονας της δοκού) και αναλύουμε όλες τις δυνάμεις και τις ροπές σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των αξόνων **Ox** και **Oy**. Έτσι προκύπτουν δύο συστήματα δυνάμεων και ροπών, ένα σύστημα που έχει τη διεύθυνση του άξονα **Ox** και ένα που έχει τη διεύθυνση του άξονα **Oy**. Έτσι η σύνθετη κάμψη ανάγεται στη μελέτη δύο απλών επίπεδων κάμψεων, μια στο επίπεδο **xOz** και μια στο επίπεδο **yOz**.

Όταν οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν τυχαίες διευθύνσεις, αλλά τέμνουν τον άξονα της δοκού, και οι ροπές έχουν διεύθυνση κάθετη στον άξονα της δοκού, η κάμψη ονομάζεται **γενική**.

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων όπως προηγουμένως και αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε τρεις συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των τριών αξόνων, και τις ροπές σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των αξόνων **Ox** και **Oy**, οπότε προκύπτουν τρία συστήματα δυνάμεων και ροπών. Οι δυνάμεις που έχουν τη διεύθυνση του άξονα **Ox** και οι ροπές που έχουν τη διεύθυνση του άξονα **Oy**, συνιστούν μια απλή επίπεδη κάμψη στο επίπεδο **xOz**.

Οι δυνάμεις που έχουν τη διεύθυνση του άξονα **Oy** και οι ροπές που έχουν τη διεύθυνση του άξονα **Ox**, συνιστούν μια απλή επίπεδη κάμψη στο επίπεδο **yOz**.

Οι δυνάμεις που έχουν τη διεύθυνση του άξονα **Oz**, συνιστούν κεντρική μονοαξονική καταπόνηση. Άρα η γενική κάμψη μπορεί να θεωρηθεί σύνθεση δύο απλών επίπεδων κάμψεων, μιας κεντρικής μονοαξονικής καταπόνησης.

23.2. Στατική μελέτη της δοκού – Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών

Με τον όρο στατική μελέτη της δοκού, εννοούμε τη διαδικασία υπολογισμού των εσωτερικών δυνάμεων και ροπών που αναπτύσσονται μέσα στο υλικό μιας δοκού που καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη.

Έστω μια δοκός που καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη. Ορίζουμε ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων **Oxyz**, όπου **Oz** ο άξονας της δοκού και ο άξονας **Oy** είναι παράλληλος με τις ασκούμενες δυνάμεις (σχ.22).

Θεωρούμε μια εγκάρσια τομή της δοκού σε μια τυχαία θέση και εξετάζουμε την ισορροπία του αριστερού τμήματος.

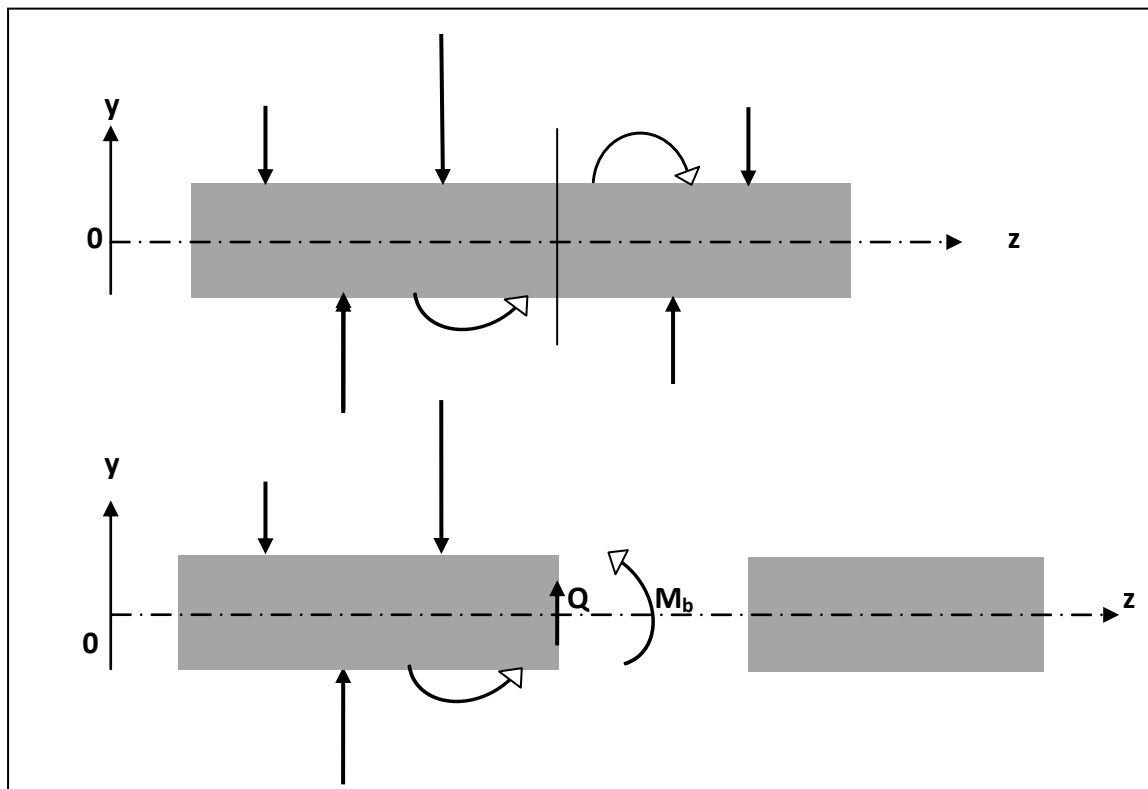
Αυτό ισορροπεί κάτω από την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων και ροπών που ασκούνται στο τμήμα αυτό και μιας εσωτερικής δύναμης **Q** που έχει τη διεύθυνση του άξονα **Oy** και επομένως ανήκει στο επίπεδο της διατομής, άρα είναι **τέμνουσα δύναμη**, και μιας εσωτερικής ροπής **M_b**, που έχει τη διεύθυνση του άξονα **Ox** και ονομάζεται **καμπτική ροπή**.

Η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή ασκούνται στην επιφάνεια της διατομής του αριστερού τμήματος από την επιφάνεια της διατομής του δεξιού τμήματος λόγω των δυνάμεων συνοχής και υπολογίζονται από τις σχέσεις στατικής ισορροπίας για το αριστερό τμήμα:

$$\sum F_{yi} + Q = 0 \quad (45)$$

$$\sum M_i + M_b = 0 \quad (46)$$

Στη σχέση (46) οι ροπές των δυνάμεων υπολογίζονται ως προς το κέντρο της διατομής του αριστερού τμήματος.



Σχήμα 22. Τέμνουσα δύναμη – Καμπτική ροπή

Με την παραπάνω διαδικασία υπολογίζουμε την τέμνουσα δύναμη Q και την καμπτική ροπή M_b για κάθε διατομή, που δίνονται ως συναρτήσεις της απόστασης z της διατομής από την αρχή των αξόνων, δηλαδή: $Q=Q(z)$ και $M=M(z)$. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών ονομάζονται αντίστοιχα **Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ)** και **Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ)**.

Εκτός από την κατασκευή των Διαγραμμάτων, ως γραφικές παραστάσεις αλγεβρικών συναρτήσεων (**μέθοδος γενικευμένων συναρτήσεων**), υπάρχουν και **γραφικές** μέθοδοι κατασκευής των Διαγραμμάτων, πλην όμως δεν καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις, ειδικά τις πιο σύνθετες.

Σχέση τέμνουσας δύναμης – καμπτικής ροπής

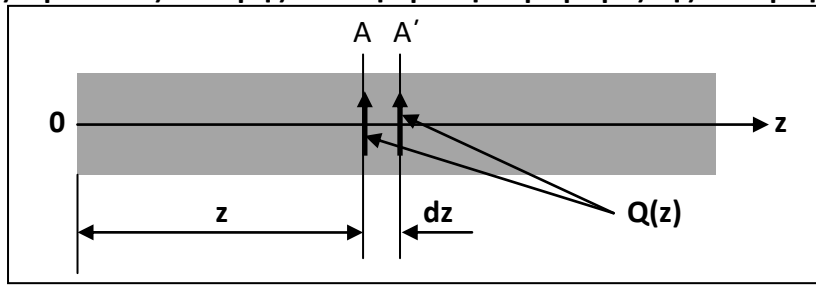
Έστω μια δοκός, η οποία καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη, και $Q(z)$ και $M_b(z)$ η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή που ασκούνται σε μια τυχαία διατομή A της δοκού, που απέχει απόσταση z από την αρχή του άξονα Oz . Αν θεωρήσουμε μια «γειτονική» διατομή A' , που απέχει στοιχειώδη απόσταση dz από τη διατομή A (σχ. 23). Λόγω της στοιχειώδους απόστασης των δύο διατομών, θεωρούμε ότι μεταξύ των δύο διατομών δεν παρεμβάλλεται άλλη εξωτερική δύναμη, επομένως η τέμνουσα δύναμη $Q(z)$ που ασκείται στη διατομή A' διατηρείται σταθερή, όση και στην A .

Αν θεωρήσουμε αμελητέα τη μεταβολή των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το κέντρο της διατομής A' , η μεταβολή $dM_b(z)$ της καμπτικής κατά που ασκείται στη διατομή A' , από το δεξιό τμήμα της δοκού, θα είναι ίση με τη ροπή της τέμνουσας δύναμης $Q(z)$ που ασκείται στη διατομή A ως προς το κέν-

τρο της διατομής A' . Άρα:

$$dM_b(z) = Q(z) \cdot dz \Rightarrow Q(z) = \frac{dM_b(z)}{dz} \quad (47) \text{ Δηλαδή:}$$

Η συνάρτηση της τέμνουσας δύναμης είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης της καμπτικής ροπής.



Σχήμα 23. Μεταβολή καμπτικής ροπής

Μεθοδολογία κατασκευής διαγραμμάτων τέμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός αντιδράσεων

- Ορίζουμε στο επίπεδο των δυνάμεων τη θετική φορά για τις δυνάμεις και για τις ροπές. Δεδομένου ότι οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν όλες την ίδια διεύθυνση, άρα και οι αντιδράσεις θα έχουν τη διεύθυνση αυτή. Αντικαθιστούμε λοιπόν τη φορά κάθε δύναμης με ένα πρόσημο: (+) για όσες δυνάμεις έχουν την θετική φορά, όπως την ορίσαμε, (-) για όσες δυνάμεις έχουν την αρνητική φορά.
- Σχεδιάζουμε τις αντιδράσεις που σκούνται στη δοκό στα σημεία στήριξης, θεωρώντας αυθαίρετα ότι αυτές έχουν θετική φορά (ισχύει και για δυνάμεις και για ροπές).
- Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας για τη δοκό και υπολογίζουμε τις αντιδράσεις.

Παρατηρήσεις:

1. Αν για το θεώρημα των ροπών χρησιμοποιήσουμε το **αριστερότερο** σημείο του σχήματος, τότε τα πρόσημα των ροπών συμπίπτουν με τα πρόσημα των δυνάμεων που τις προκαλούν.
2. Σε περίπτωση που για κάποια από αυτές προκύψει αρνητικό πρόσημο, σημαίνει ότι ήταν λάθος η αρχική επιλογή της φοράς της και στα επόμενα σχήματα σχεδιάζεται με την ορθή φορά.

Βήμα 2^ο : Κατασκευή πίνακα συναρτήσεων τέμνουσας δυνάμεων $Q(z)$ και καμπτικής ροπής $M_b(z)$.

Για την απλοποίηση των υπολογισμών, σχεδιάζουμε τον άξονα της δοκού z , με αρχή το το αριστερότερο σημείο του σχήματος, αντικαθιστώντας στο σχήμα τα διαφορα χαρακτηριστικά σημεία (σημεία εφαρμογής δυνάμεων ή ροπών, στηρίγματα κ.α.) με τις συντεταγμένες τους στον άξονα z (δηλαδή τις αποστάσεις τους από το αριστερότερο σημείο) και σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις με την ορθή τους φορά, αναγράφοντας μόνο το μέτρο τους (σχ.24).

Η δοκός, με βάση τα διάφορα χαρακτηριστικά σημεία, χωρίζεται σε ορισμένες περιοχές.

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα με τις περιοχές αυτές.

Θεωρούμε, σε κάθε περιοχή, μια **τυχαία** διατομή, της οποίας η απόσταση από την αρχή του άξονα είναι z .

Υπολογίζουμε την τέμνουσα δύναμη $Q(z)$ σύμφωνα με τη σχέση (45), και έχουμε: $Q(z) = -\sum F_{iy}$

Για λόγους υπολογιστικούς, θετική φορά για την τέμνουσα δύναμη $Q(z)$ ορίζουμε κατά σύμβαση την **αντίθετη** από αυτήν που ορίσαμε για τις εξωτερικές δυνάμεις.

Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$Q(z) = \sum F_{iy} \quad (48)$$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση της καμπτικής ροπής $M_b(z)$ σύμφωνα με τη σχέση (46) και έχουμε :

$$M_b(z) = -\sum M_i \quad (49)$$

Παρατήρηση: Μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα τη συνάρτηση της καμπτικής ροπής $M_b(z)$ και στη συνέχεια τη συνάρτηση της τέμνουσας δύναμης, $Q(z)$, σαν πρώτη παράγωγο της $M_b(z)$, σύμφωνα με τη σχέση (47).

Βήμα 3^ο: Κατασκευή Διαγραμμάτων τεμνουσών δυνάμεων $Q(z)$ και καμπτικών ροπών $M_b(z)$

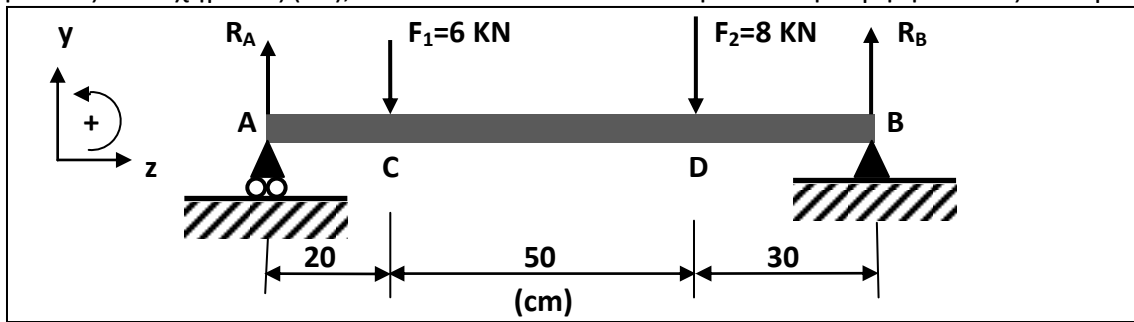
Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$, που υπολογίσαμε στο 2^ο βήμα, και υπολογίζουμε τη θέση και το μέτρο της μέγιστης καμπτικής ροπής M_{bmax} , σύμφωνα με τους κανόνες της ανάλυσης.

Παρατήρηση: Γραφικά, στη θέση που εμφανίζεται η μέγιστη καμπτική ροπή, η γραφική παράσταση της τέμνουσας δύναμης τέμνει τον άξονα z , δεδομένου ότι, στη θέση που η συνάρτηση $M_b(z)$ έχει ακρότατο, η παράγωγός της, δηλαδή συνάρτηση $Q(z)$, μηδενίζεται.

Ακολουθεί η μεθοδολογία κατασκευής των διαγραμμάτων τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών δοκών, που καταπονούνται σε απλή επίπεδη κάμψη με χαρακτηριστικές απλές περιπτώσεις φόρτισης με τη χρησιμοποίηση αριθμητικών παραδειγμάτων για καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας.

Παράδειγμα 1. Δοκός με συγκεντρωμένα φορτία

Έστω η δοκός του σχήματος (24), που καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη από τις δυνάμεις F_1 και F_2 .



Σχήμα 24. Δοκός με συγκεντρωμένα φορτία

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός των αντιδράσεων

Τα βέλη αριστερά στο σχήμα δηλώνουν τη θετική φορά για τις δυνάμεις και για τις ροπές.

Έστω R_A και R_B , οι αντιδράσεις στα στηρίγματα **A** και **B** αντίστοιχα, που έχουν τη διεύθυνση των εξωτερικών δυνάμεων, δηλαδή τη διεύθυνση του άξονα y . Δεδομένου ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν τη διεύθυνση του άξονα y , δεν μπορεί να υπάρχει στην άρθρωση **B** δύναμη άλλης διεύθυνσης, πλην της R_B .

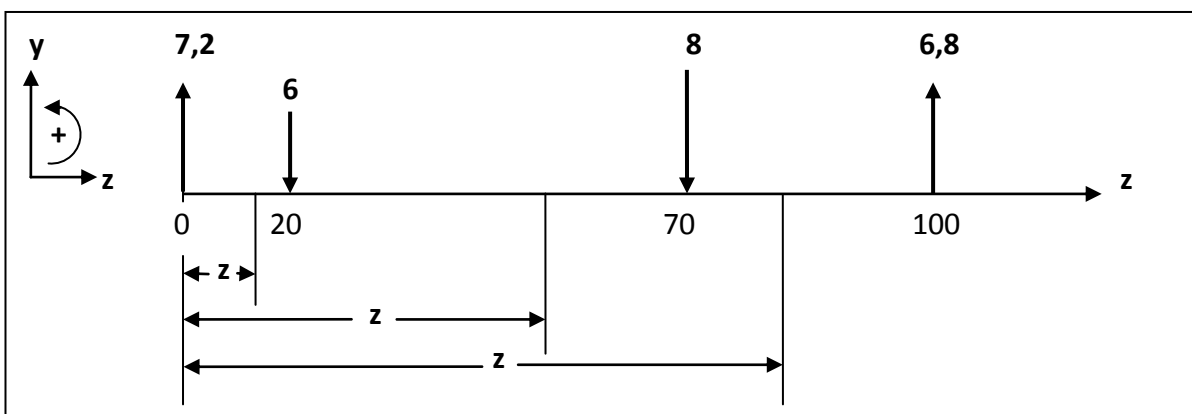
Σύμφωνα με τις σχέσεις ισορροπίας για παράλληλες δυνάμεις έχουμε:

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0 \Rightarrow R_A - 6 - 8 + R_B = 0 \Rightarrow \boxed{R_A + R_B = 14} \quad (\alpha)$$

$$\sum M_i^A = 0 \Rightarrow -F_1 \cdot (AC) - F_2 \cdot (AD) + R_B \cdot (AB) = 0 \Rightarrow -6 \cdot 20 - 8 \cdot 70 + R_B \cdot 100 = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = 6,8 \text{ kN}}$$

οπότε οπότε από τη σχέση (α) προκύπτει: $\boxed{R_A = 7,2 \text{ kN}}$

Βήμα 2^ο: Κατασκευή πίνακα των συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$



Σχήμα 25. Υπολογισμός συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$

Η δοκός, με βάση τις δυνάμεις, χωρίζεται σε τρεις περιοχές: **0-20**, **20-70**, **70-100**.

Θεωρούμε, σε κάθε περιοχή, μια **τυχαία** διατομή, της οποίας η απόσταση από το **A** είναι z .

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση της καμπτικής ροπής $M_b(z)$, σύμφωνα με τη σχέση (49).

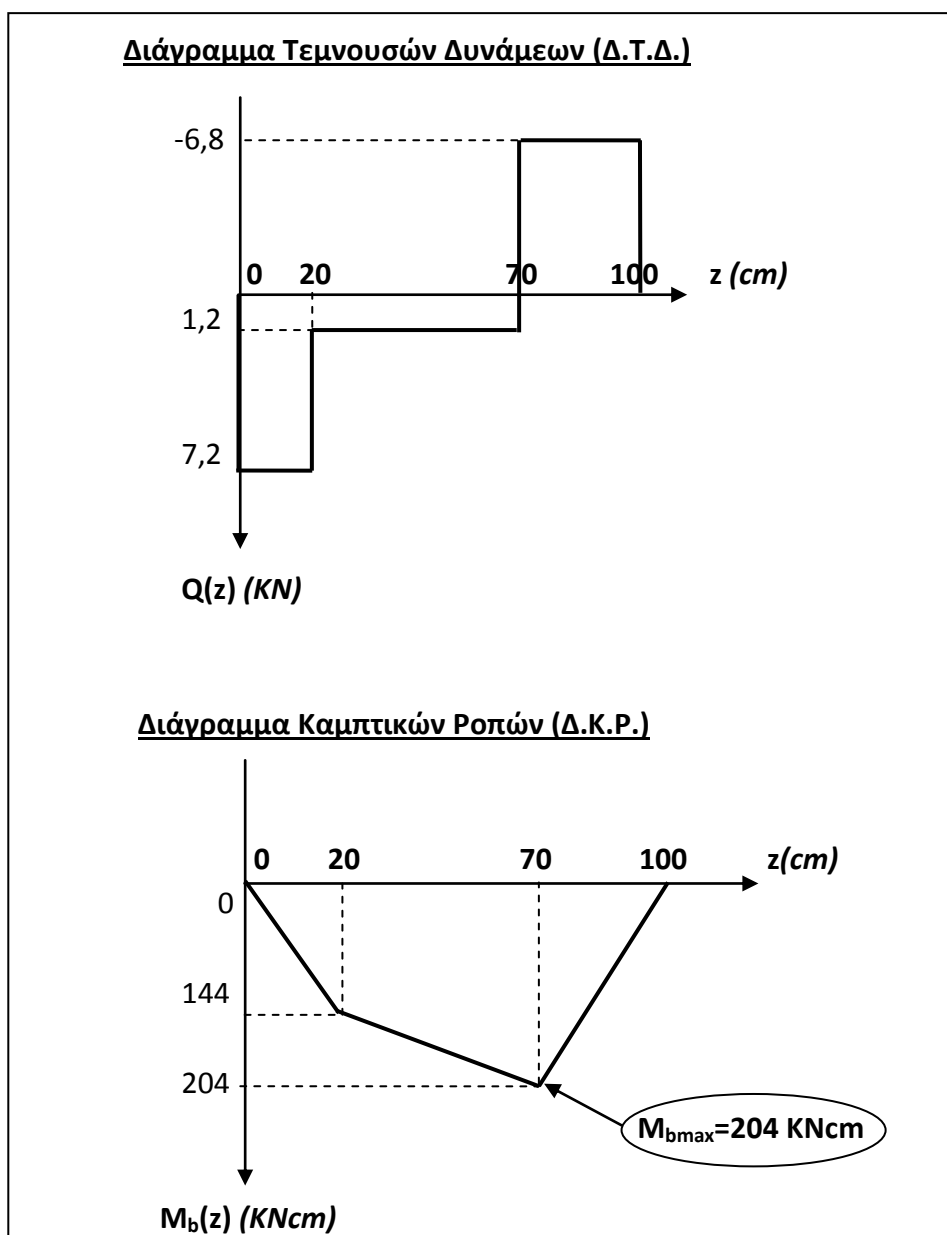
Υπολογίζουμε τη συνάρτηση της τέμνουσας δύναμης $Q(z)$, σύμφωνα με τη σχέση (47)

Μεταφέρουμε τα αποτελέσματα στον πίνακα που ακολουθεί. Όπως αναφέραμε στη μεθοδολογία, θετική φορά για την τέμνουσα δύναμη Q ορίζεται η προς τα κάτω.

Πίνακας συναρτήσεων τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής

Περιοχή z	Καμπτική ροπή $M_b(z)$	Τέμνουσα δύναμη $Q(z) = \frac{dM_b(z)}{dz}$
0 – 20	$M_b(z) = 7,2 \cdot z$	$Q(z) = 7,2$
20 – 70	$M_b(z) = 7,2 \cdot z - 6 \cdot (z - 20) \Rightarrow M_b(z) = 1,2 \cdot z + 120$	$Q(z) = 1,2$
70 – 100	$M_b(z) = 7,2 \cdot z - 6 \cdot (z - 20) - 8 \cdot (z - 70) \Rightarrow M_b(z) = -6,8 \cdot z + 680$	$Q(z) = -6,8$

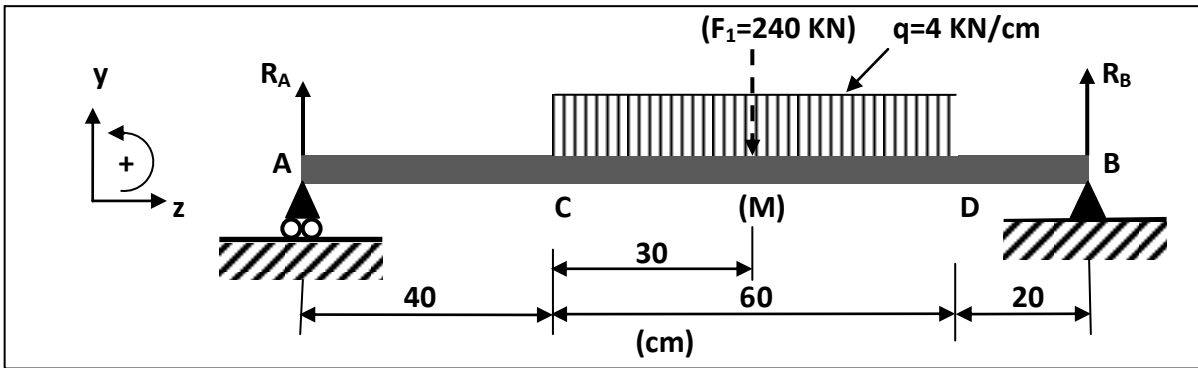
Βήμα 3^ο: Κατασκευή Διαγραμμάτων τέμνουσών δυνάμεων $Q(z)$ και καμπτικών ροπών $M_b(z)$



Σχήμα 26. Διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών

Παράδειγμα 2. Δοκός με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο (ορθογωνική κατανομή)

Έστω η δοκός του σχήματος 27, που καταπονείται από ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο



Σχήμα 27. Δοκός με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός των αντιδράσεων

Για τον υπολογισμό των αντιδράσεων μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ομοιόμορφη κατανομή q με το ισοδύναμο της συγκεντρωμένο φορτίο F_1 (δηλαδή με τη συνισταμένη του). Θα είναι:

$$F_1 = q \cdot CD = 4 \cdot 60 \Rightarrow F_1 = 240 \text{ KN}$$

Το ισοδύναμο αυτό φορτίο F_1 θα ασκείται στο μέσον (M) του μήκους CD της κατανομής.

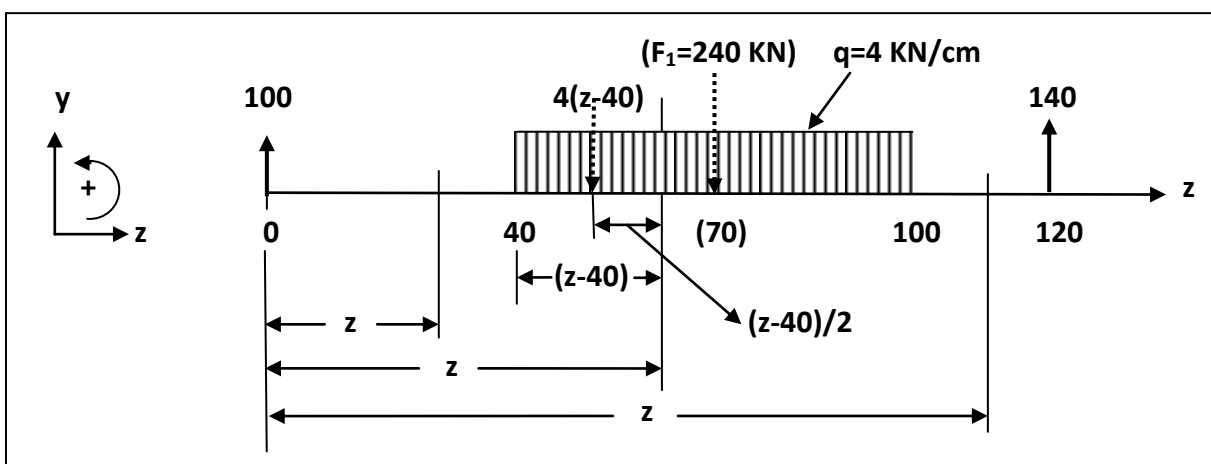
Αν R_A και R_B οι αντιδράσεις στα στηρίγματα A και B αντίστοιχα, από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας για τη δοκό έχουμε:

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - F_1 + R_B = 0 \Rightarrow R_A - 240 + R_B = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 240 \quad (\alpha)$$

$$\sum M_i^A = 0 \Rightarrow -F_1 \cdot (AM) + R_B \cdot (AB) = 0 \Rightarrow -240 \cdot 70 + R_B \cdot 120 = 0 \Rightarrow R_B = 140 \text{ KN} \quad (\beta)$$

οπότε από τη σχέση (α) προκύπτει: $R_A = 100 \text{ KN}$

Βήμα 2^ο: Κατασκευή πίνακα των συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$

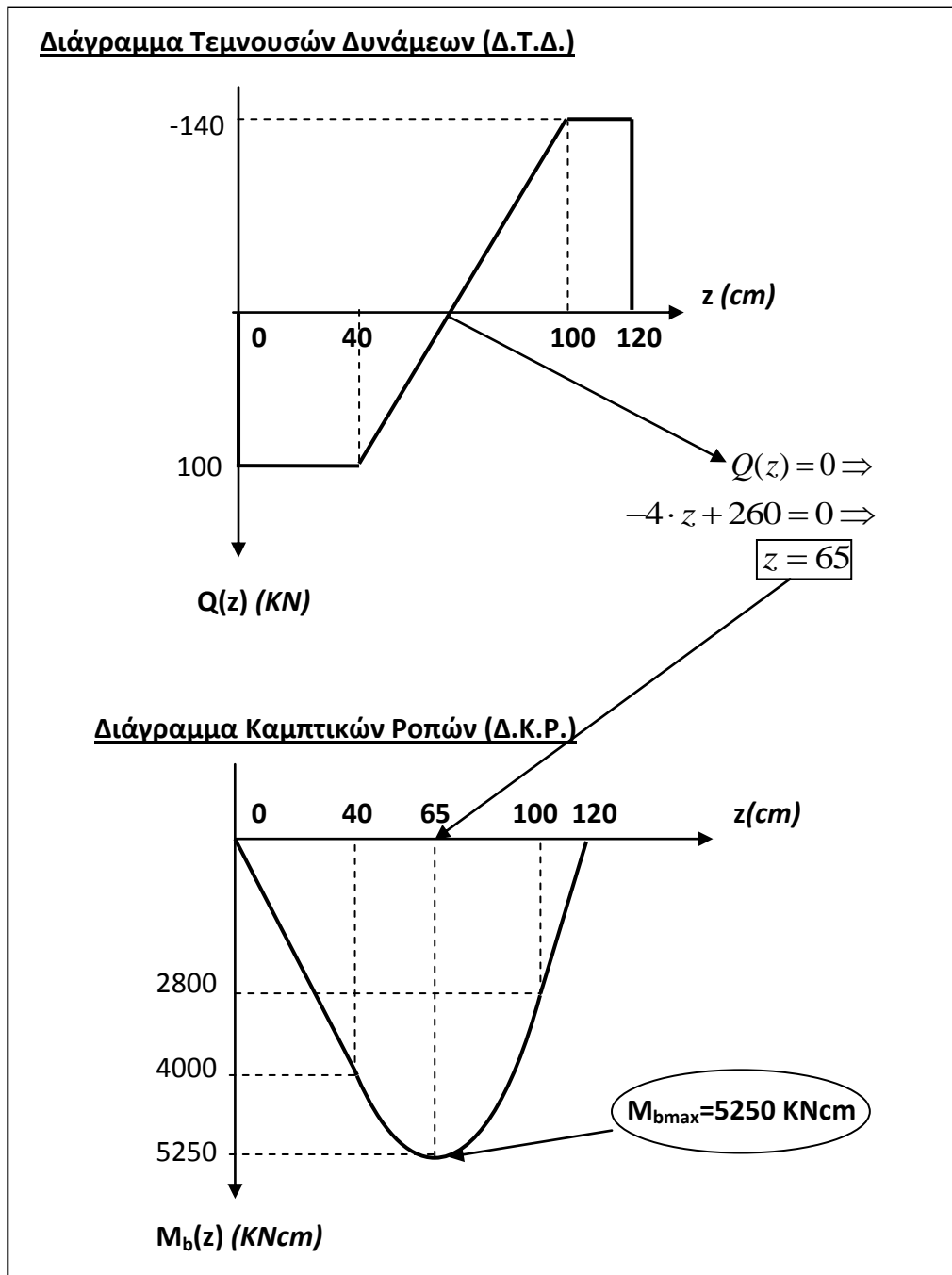


Σχήμα 28. Υπολογισμός συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$

Πίνακας συναρτήσεων τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής

Περιοχή z	Καμπτική ροπή $M_b(z)$	Τέμνουσα δύναμη $Q(z) = \frac{dM_b(z)}{dz}$
0 – 40	$M_b(z) = 100 \cdot z$	$Q(z) = 100$
40 – 100	$M_b(z) = 100 \cdot z - 4 \cdot (z-40) \cdot \frac{(z-40)}{2} \Rightarrow M_b(z) = 100 \cdot z - 2 \cdot (z-40)^2$	$Q(z) = 100 - 2 \cdot 2 \cdot (z-40) \Rightarrow Q(z) = -4 \cdot z + 260$
100-120	$M_b(z) = 100 \cdot z - 240 \cdot (z-70) \Rightarrow M_b(z) = -140 \cdot z + 16800$	$Q(z) = -140$

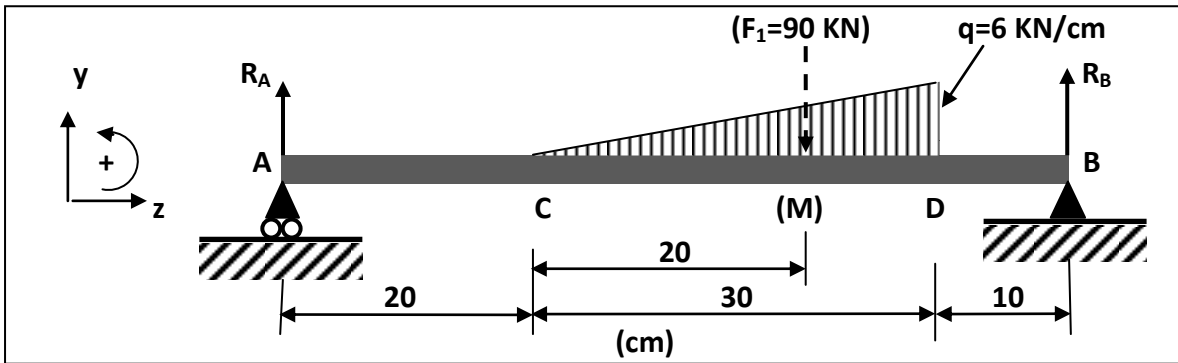
Βήμα 3^ο: Κατασκευή Διαγραμμάτων τέμνουσών δυνάμεων Q(z) και καμπτικών ροπών M_b(z)



Σχήμα 29. Διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών

Παράδειγμα 3. Δοκός με γραμμικά κατανεμημένο φορτίο (Τριγωνική κατανομή)

Έστω η δοκός του σχήματος 30, που καταπονείται από ένα γραμμικά κατανεμημένο φορτίο, το οποίο ξεκινά από την τιμή μηδέν και αυξάνει γραμμικά μέχρι τη μέγιστη τιμή του $q=6 \text{ KN/cm}$.



Σχήμα 30. Δοκός γραμμικά κατανεμημένο φορτίο

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός των αντιδράσεων

Για τον υπολογισμό των αντιδράσεων μπορούμε να αντικαταστήσουμε την γραμμική κατανομή με το ισοδύναμο της συγκεντρωμένο φορτίο F_1 (δηλαδή με τη συνισταμένη του). Θα είναι:

$$F_1 = \frac{q \cdot CD}{2} = \frac{6 \cdot 30}{2} \Rightarrow F_1 = 90 \text{ KN} . \text{ Το ισοδύναμο αυτό φορτίο } F_1 \text{ θα ασκείται στο σημείο } (M), \text{ που}$$

$$\text{απέχει από το αριστερό άκρο C της κατανομής απόσταση } CM = \frac{2}{3} \cdot CD = \frac{2}{3} \cdot 30 \Rightarrow CM = 20 \text{ cm}$$

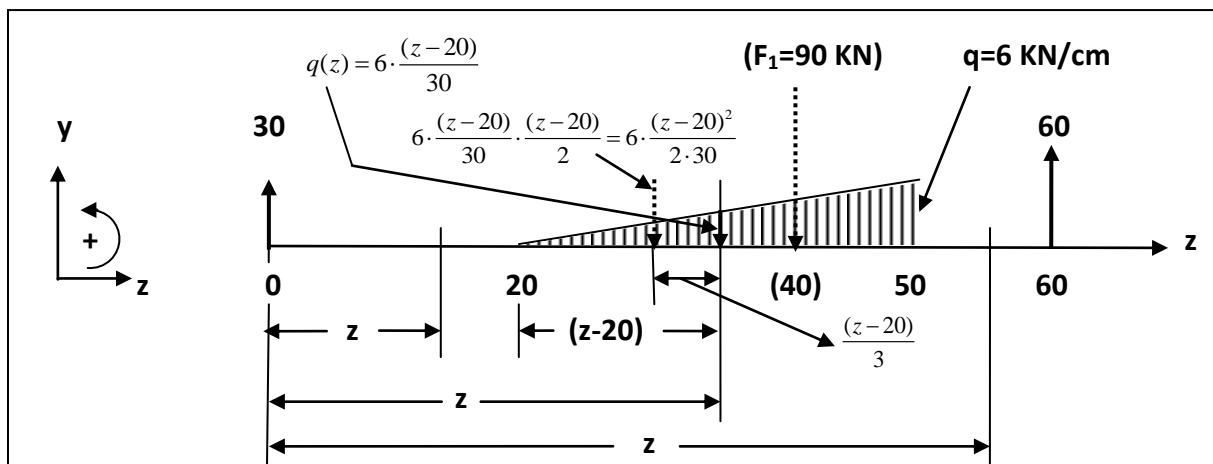
Αν R_A και R_B οι αντιδράσεις στα στηρίγματα A και B αντίστοιχα, από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας για τη δοκό έχουμε:

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - F_1 + R_B = 0 \Rightarrow R_A - 90 + R_B = 0 \Rightarrow \boxed{R_A + R_B = 90} \quad (\alpha)$$

$$\sum M_i^A = 0 \Rightarrow -F_1 \cdot (AM) + R_B \cdot (AB) = 0 \Rightarrow -90 \cdot 40 + R_B \cdot 60 = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = 60 \text{ KN}} \quad (\beta)$$

οπότε από τη σχέση (α) προκύπτει: $\boxed{R_A = 30 \text{ KN}}$

Βήμα 2^ο: Κατασκευή πίνακα των συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$

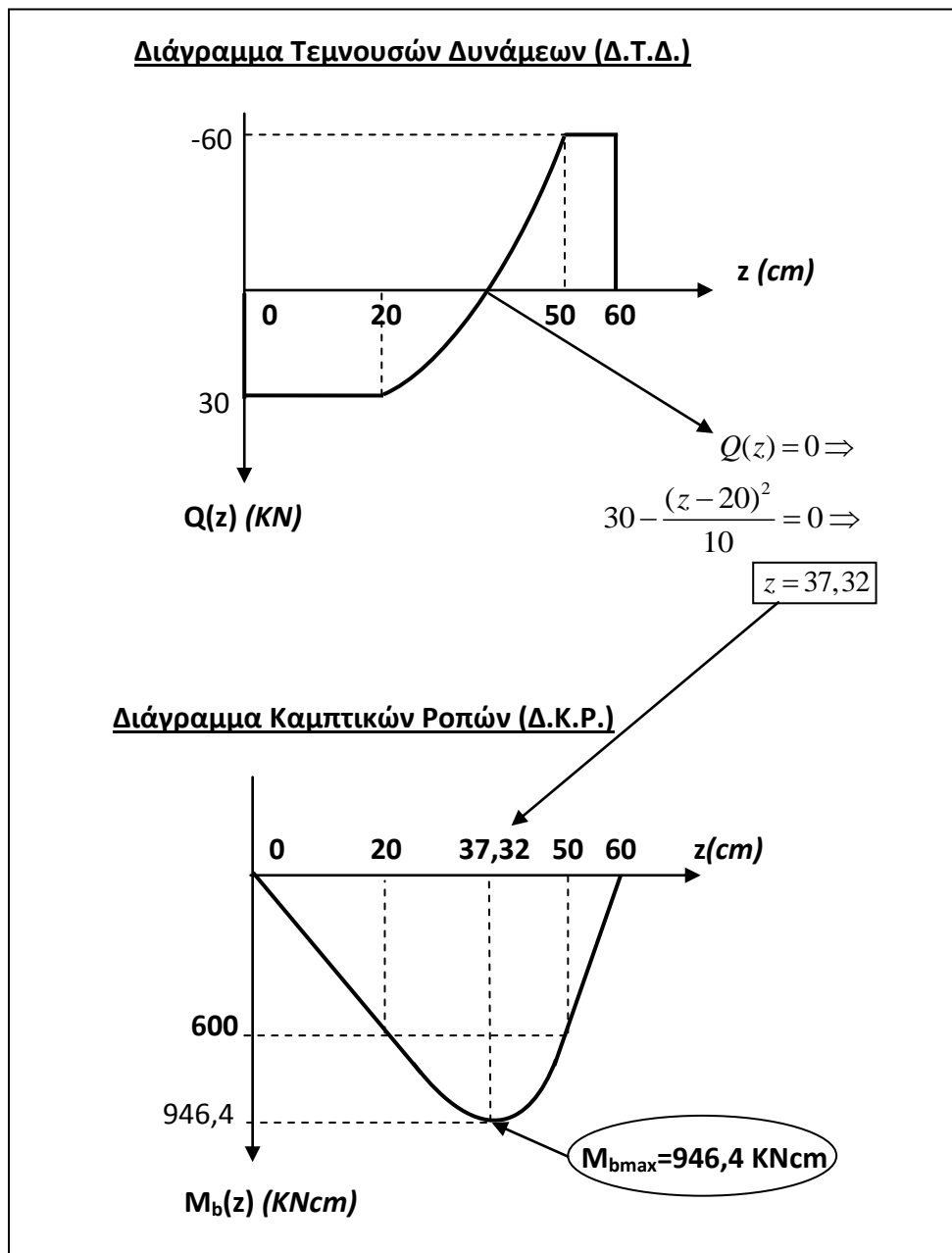


Σχήμα 31. Υπολογισμός συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$

Πίνακας συναρτήσεων τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής

Περιοχή z	Καμπτική ροπή $M_b(z)$	Τέμνουσα δύναμη $Q(z) = \frac{dM_b(z)}{dz}$
0 – 20	$M_b(z) = 30 \cdot z$	$Q(z) = 30$
20 – 50	$M_b(z) = 30 \cdot z - 6 \cdot \frac{(z-20)^3}{6 \cdot 30} \Rightarrow M_b(z) = 30 \cdot z - \frac{(z-20)^3}{30}$	$Q(z) = 30 - \frac{3 \cdot (z-20)^2}{30} \Rightarrow Q(z) = 30 - \frac{(z-20)^2}{10}$
50 – 60	$M_b(z) = 30 \cdot z - 90 \cdot (z-40) \Rightarrow M_b(z) = -60 \cdot z + 3600$	$Q(z) = -60$

Βήμα 3^ο: Κατασκευή Διαγραμμάτων τέμνουσών δυνάμεων Q(z) και καμπτικών ροπών M_b(z)

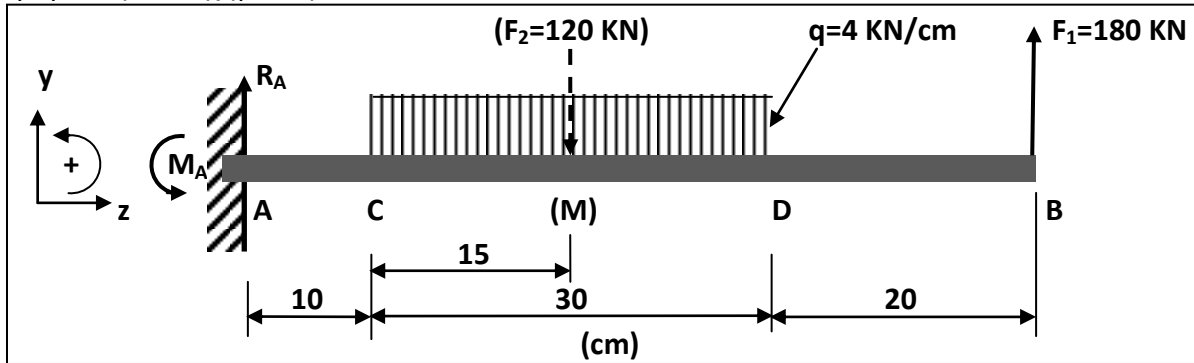


Σχήμα 32. Διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών

Παράδειγμα 4^ο: Πρόβολος

Μία δοκός, πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο, ονομάζεται **πρόβολος**.

Έστω ο πρόβολος του σχήματος 33.



Σχήμα 33. Δοκός με ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός των αντιδράσεων

Για τον υπολογισμό των αντιδράσεων μπορούμε να αντικαταστήσουμε την γραμμική κατανομή με το ισοδύναμό της συγκεντρωμένο φορτίο F_2 (δηλαδή με τη συνισταμένη του). Θα είναι:

$$F_2 = q \cdot CD = 4 \cdot 30 \Rightarrow F_2 = 120 \text{ kN}$$

Το ισοδύναμο αυτό φορτίο F_2 θα ασκείται στο μέσο (M) του μήκους CD της κατανομής. Θα είναι:

$$CM = \frac{CD}{2} = \frac{30}{2} \Rightarrow CM = 15 \text{ cm}$$

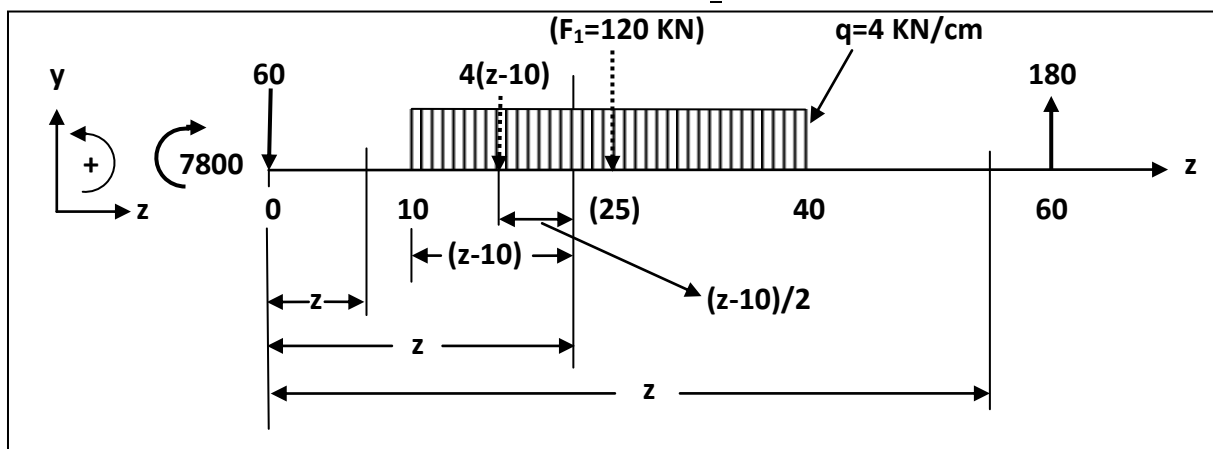
Αν R_A και M_A οι αντιδράσεις στην πάκτωση A, από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας για τη δοκό έχουμε:

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - F_2 + F_1 = 0 \Rightarrow R_A - 120 + 180 = 0 \Rightarrow R_A = -60 \text{ kN}$$

$$\sum M_i^A = 0 \Rightarrow M_A - F_2 \cdot (AM) + F_1 \cdot (AB) = 0 \Rightarrow M_A - 120 \cdot 25 + 180 \cdot 60 = 0 \Rightarrow M_A = -7800 \text{ kNcm}$$

(Το πρόσημο (-) στις αντιδράσεις δηλώνει ότι η φορά τους είναι αντίθετη από αυτήν που επιλέξαμε αυθαίρετα στο σχήμα).

Βήμα 2^ο: Κατασκευή πίνακα των συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$

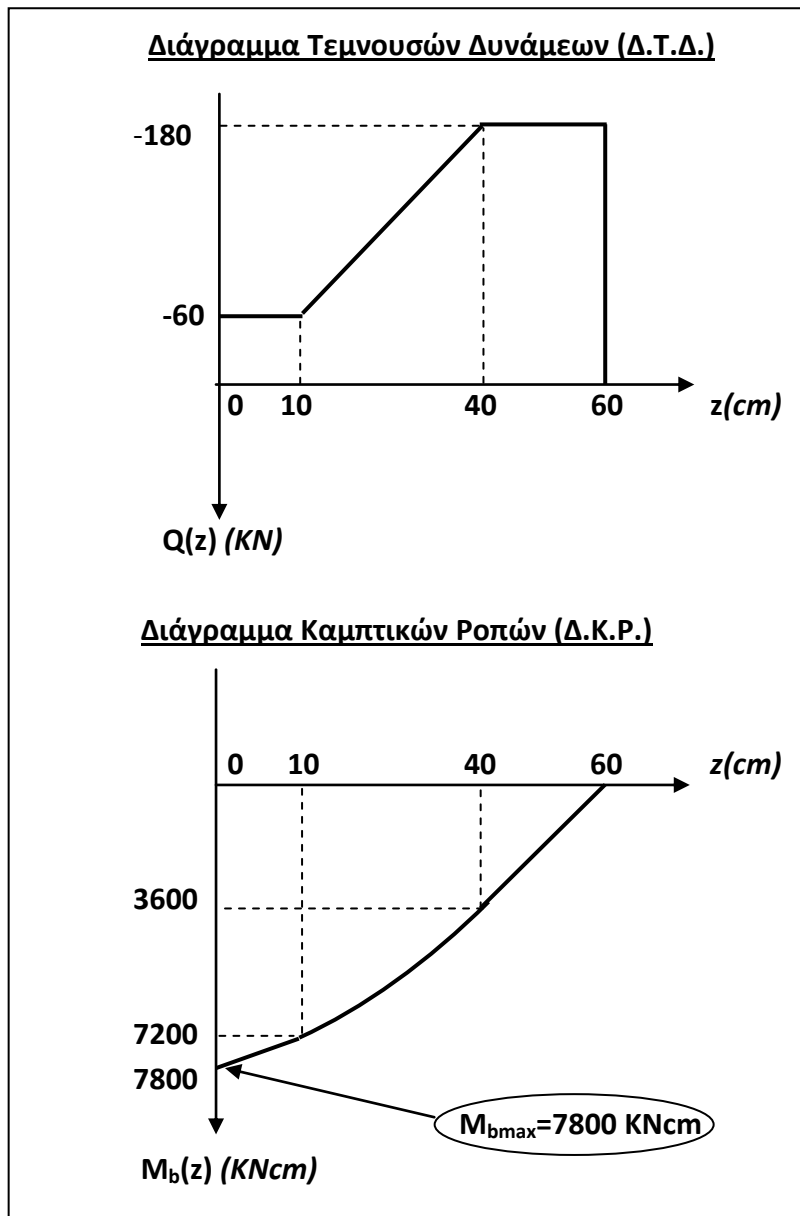


Σχήμα 34. Υπολογισμός συναρτήσεων $Q(z)$ και $M_b(z)$

Πίνακας συναρτήσεων τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής

Περιοχή z	Καμπτική ροπή $M_b(z)$	Τέμνουσα δύναμη $Q(z) = \frac{dM_b(z)}{dz}$
0 – 10	$M_b(z) = -60 \cdot z + 7800$	$Q(z) = -60$
10 – 40	$M_b(z) = -60 \cdot z - 4 \cdot \frac{(z-10)^2}{2} + 7800 \Rightarrow M_b(z) = -60 \cdot z - 2(z-10)^2 + 7800$	$Q(z) = -60 - 4 \cdot (z-10) \Rightarrow Q(z) = -4 \cdot z - 20$
40 – 60	$M_b(z) = -60 \cdot z - 120 \cdot (z-25) + 7800 \Rightarrow M_b(z) = -180 \cdot z + 10800$	$Q(z) = -180$

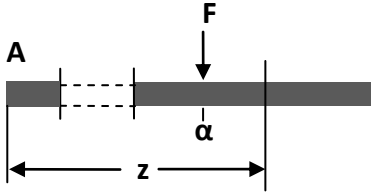
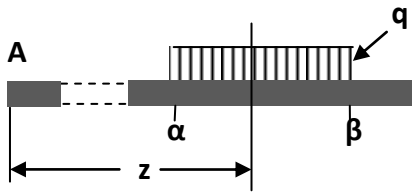
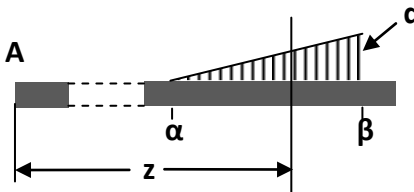
Βήμα 3^ο: Κατασκευή Διαγραμμάτων τέμνουσών δυνάμεων Q(z) και καμπτικών ροπών M_b(z)



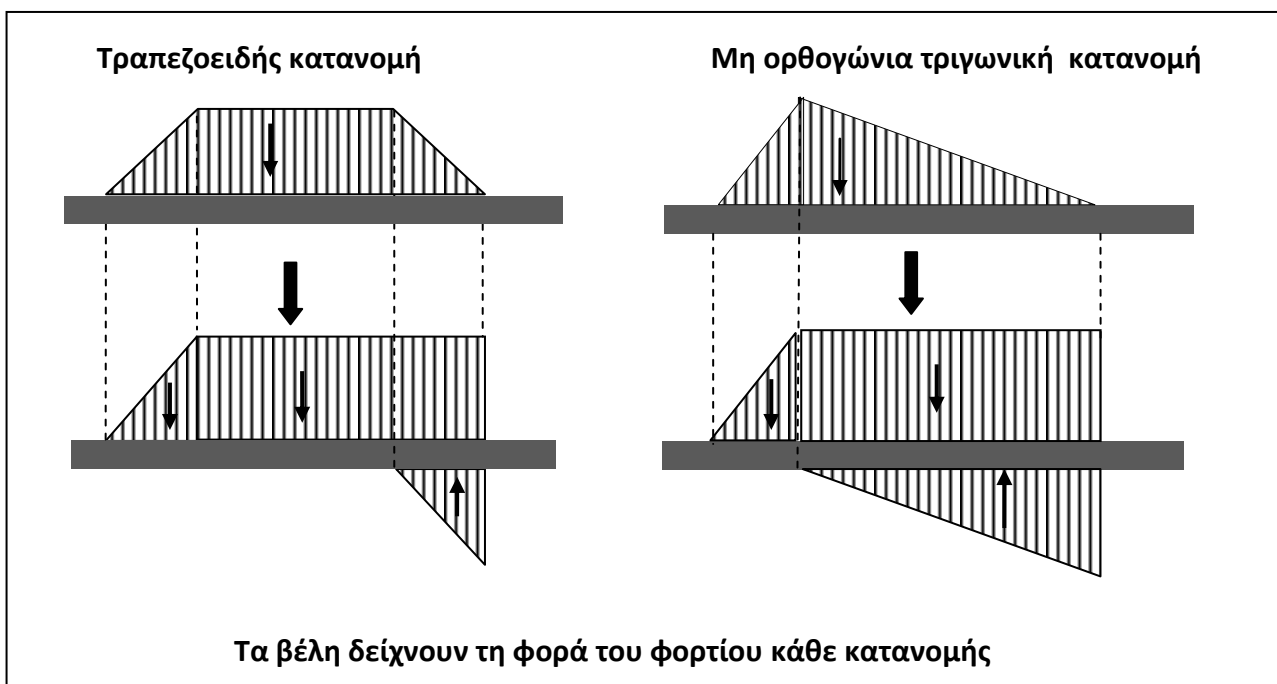
Σχήμα 35. Διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών

Ο πίνακας 4 που ακολουθεί μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε σύντομα την καμπτική ροπή $M_b(z)$, που ασκείται σε μια διατομή που απέχει απόσταση z από το αριστερότερο άκρο της δοκού και βρίσκεται δεξιότερα ενός συγκεντρωμένου φορτίου, ή μέσα στην περιοχή μιας κατανομής, ή δεξιότερα από αυτήν, με την προϋπόθεση ότι εξετάζουμε πάντοτε το **αριστερό** τμήμα από τα δύο που χωρίζει τη δοκό η διατομή.

Πίνακας 4. Τυπολόγιο υπολογισμού συνάρτησης καμπτικής ροπής

Συγκεντρωμένο φορτίο	Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο (ορθογωνική κατανομή)	Γραμμικά κατανεμημένο φορτίο (τριγωνική κατανομή)
		
$M_b(z) = \dots \pm F \cdot (z - a)$	$M_b(z) = \dots \pm q \cdot \frac{(z - a)^2}{2}$	$M_b(z) = \dots \pm q \cdot \frac{(z - a)^3}{6 \cdot (\beta - \alpha)}$
	Για διατομή δεξιότερα του β , αντικαθιστούμε την κατανομή με το ισοδύναμό της φορτίο και εφαρμόζουμε τον τύπο για το συγκεντρωμένο φορτίο	Για διατομή δεξιότερα του β , αντικαθιστούμε την κατανομή με το ισοδύναμό της φορτίο και εφαρμόζουμε τον τύπο για το συγκεντρωμένο φορτίο

Παρατήρηση: Όταν έχουμε μια οποιαδήποτε ευθύγραμμη κατανομή, τη θεωρούμε σύνθεση (άθροισμα ή διαφορά) των κατανομών που περιγράψαμε (ομοιόμορφης και γραμμικής) και εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους τύπους για κάθε περίπτωση. Στο σχήμα 36 φαίνονται δύο παραδείγματα.



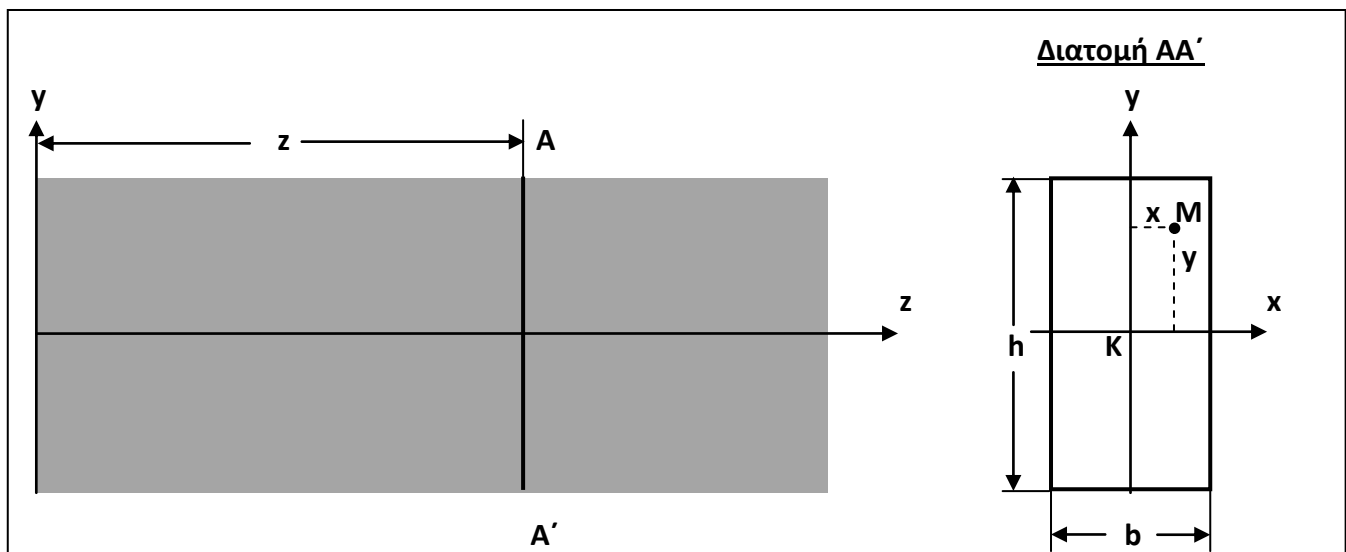
Σχήμα 36. Σύνθετες ευθύγραμμες κατανομές

23.3. Τάσεις στην απλή επίπεδη κάμψη

Για τον υπολογισμό των τάσεων, που αναπτύσσονται στο υλικό μιας δοκού που καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη κάνουμε τις παρακάτω απλοποιητικές παραδοχές:

1. Οι διαστάσεις της διατομής της δοκού είναι πολύ μικρές σε σχέση με το μήκος της.
2. Τα εγκάρσια φορτία, που προκαλούν την κάμψη της δοκού έχουν τη διεύθυνση ενός κεντροβαρικού άξονα συμμετρίας της διατομής της δοκού.
3. Κάθε διατομή επίπεδη και κάθετη στον άξονα της δοκού πριν την παραμόρφωση λόγω κάμψης, παραμένει επίπεδη και μετά απ' αυτήν (υπόθεση **Bernoulli-Navier**).
4. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μικρότερες από το όριο αναλογίας του υλικού, ώστε να ισχύει ο νόμος του **Hooke**.

Έστω λοιπόν δοκός ορθογωνικής διατομής, για την οποία ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις και η οποία καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη (σχ.37).



Σχήμα 37. Τάσεις κάμψης σε δοκό ορθογωνικής διατομής

Έστω μια διατομή **AA'** της δοκού, που απέχει απόσταση **z** από το αριστερό άκρο της δοκού και έχει διαστάσεις **b** και **h**. Αν **K** είναι το κέντρο και **Kx** και **Ky** είναι οι κύριοι κεντροβαρικοί άξονες αδράνειας της διατομής, οι δυνάμεις, που καταπονούν τη δοκό σε κάμψη, έχουν τη διεύθυνση του άξονα **Ky**.

Στη διατομή αναπτύσσεται μια τέμνουσα δύναμη **Q(z)** και μια καμπτική ροπή **M_b(z)**.

Η τέμνουσα δύναμη **Q(z)** προκαλεί μια διατμητική τάση, που έχει την κατεύθυνσή της.

Η καμπτική ροπή **M_b(z)** προκαλεί μια ορθή τάση **σ_b** που ονομάζεται **καμπτική τάση**.

Αποδεικνύεται ότι η καμπτική τάση σε ένα τυχαίο σημείο **M**, που έχει συντεταγμένες **x** και **y** ως προς τους άξονες **Kx** και **Ky** αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση:

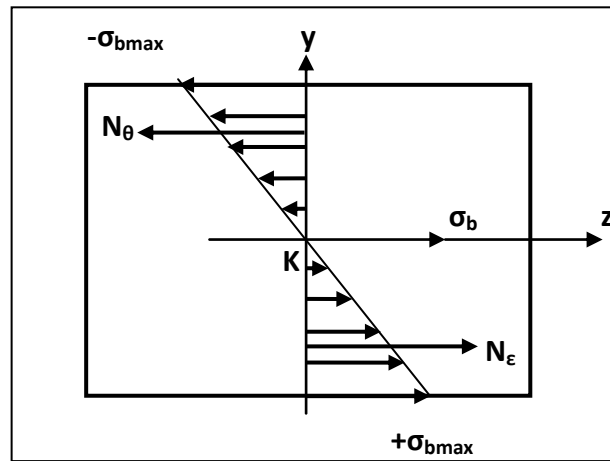
$$\sigma_b(y) = -\frac{M_b(z)}{J_x} \cdot y \quad (50)$$

όπου: **M_b(z)** η καμπτική τάση που ασκείται στη διατομή

J_x η ροπή αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα **Kx**

y η τεταγμένη του σημείου **M** ως προς το σύστημα αξόνων **xKy**.

Από τη γραφική παράσταση της καμπτικής τάσης **σ_b** κατά μήκος του άξονα **Ky** (σχ. 38), και από τη σχέση (50) προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:



Σχήμα 38. Κατανομή καμπτικών τάσεων

α. Σε σημεία που έχουν θετική τεταγμένη y , η καμπτική τάση έχει αρνητικό πρόσημο, δηλαδή είναι **θλιπτική**, ενώ σε σημεία που έχουν αρνητική τεταγμένη y , η καμπτική τάση έχει θετικό πρόσημο, δηλαδή είναι **εφελκυστική**.

β. Το μέτρο της καμπτικής τάσης, είναι ανάλογο με την τεταγμένη y , ενώ δεν εξαρτάται από την τετμημένη x του σημείου M .

Έτσι στα σημεία του άξονα Kx , τα οποία έχουν τεταγμένη $y=0$, η ορθή τάση είναι **μηδέν**. Για το λόγο αυτό ο άξονας Kx ονομάζεται **ουδέτερος άξονας** της διατομής. Το επίπεδο που περιέχει τους ουδέτερους άξονες των διατομών, και φυσικά είναι κάθετο στον άξονα Ky , ονομάζεται **ουδέτερο**.

Οι θλιπτικές τάσεις, που ασκούνται στο πάνω ήμισυ της διατομής δίνουν μία συνισταμένη δύναμη N_θ , που έχει την διεύθυνση του άξονα Kx και αρνητική φορά. Οι εφελκυστικές τάσεις που ασκούνται στο κάτω ήμισυ της διατομής δίνουν μια συνισταμένη δύναμη N_ϵ , που έχει τη διεύθυνση του άξονα Kx και θετική φορά. Λόγω συμμετρίας της διατομής οι δύο αυτές δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα και ισαπέχουν από τον άξονα Kx , δηλαδή δημιουργούν ένα ζεύγος δυνάμεων, η ροπή του οποίου τείνει να περιστρέψει τη διατομή γύρω από τον άξονα Kx . Η φορά της περιστροφής αυτής της διατομής είναι θετική όπως φαίνεται στο σχήμα 38.

Αυτή όμως η περιστροφή της διατομής γύρω από τον άξονα Kx έχει τα εξής αποτελέσματα:

Οι διατομές πάνω από τον άξονα Kx , τείνουν να πλησιάσουν η μια την άλλη και γι' αυτό το υλικό της δοκού πάνω από τον άξονα Kx καταπονείται σε θλίψη (**θλιβόμενη περιοχή**).

Αντίθετα, οι διατομές κάτω από τον άξονα τείνουν να απομακρυνθούν η μια από την άλλη κάτω από τον άξονα Kx και γι' αυτό το υλικό της δοκού κάτω από τον άξονα Kx καταπονείται σε εφελκυσμό (**εφελκυσμένη περιοχή**).

Σύμφωνα με τη σχέση (50), το μέτρο της ορθής τάσης (τόσο της θλιπτικής όσο και της εφελκυστικής) γίνεται μέγιστο σε σημεία που έχουν τη μέγιστη τεταγμένη y και είναι:

$$\sigma_{b\max} = \frac{M_b(z)}{J_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_b(z)}{\frac{J_x}{y_{\max}}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{b\max} = \frac{M_b(z)}{W_x}} \quad (51)$$

όπου $\boxed{W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}}$ (52) η **αξονική ροπή αντίστασης** της διατομής ως προς τον άξονα Kx .

Αντίστοιχα με την W_x ορίζεται και η **αξονική ροπή αντίστασης** της διατομής ως προς τον άξονα Ky :

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} \quad (53)$$

Δηλαδή:

Αξονική ροπή αντίστασης μιας διατομής ως προς έναν κεντροβαρικό άξονα της διατομής ονομάζεται ο λόγος της αξονικής ροπής αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα αυτόν, προς την απόσταση του πιο απομακρυσμένου σημείου της διατομής από τον άξονα αυτόν».

Ο άξονας γύρω από τον οποία τείνουν να περιστραφούν οι διατομές, ονομάζεται άξονας **κάμψης της διατομής**. (για παράδειγμα, στο σχήμα 37 άξονας κάμψης είναι ο άξονας Kx).

Η αξονική ροπή αντίστασης της διατομής ως προς τον άξονα κάμψης είναι ένα μέγεθος που χρησιμοποιείται μόνο στην κάμψη και γι' αυτό ονομάζεται και **ροπή αντίστασης σε κάμψη** και συμβολίζεται W_b .

Έτσι η σχέση (51) μπορεί να πάρει τη γενική μορφή:

$$\sigma_{b\max} = \frac{M_b(z)}{W_b} \quad (54)$$

όπου W_b η ροπή αντίστασης της διατομής σε κάμψη, ως προς τον άξονα κάμψης (δηλαδή η αξονική ροπή αντίστασης της διατομής ως προς τον άξονα κάμψης κατά περίπτωση).

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται και η **πολική ροπή αντίστασης μιας διατομής ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της διατομής στο κέντρο βάρους της διατομής, ως ο λόγος της πολικής ροπής αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα αυτόν, προς την ακτίνα του μέγιστου εγγεγραμμένου κύκλου στην διατομή**

$$W_P = \frac{J_P}{\rho_{\max}} \quad (55)$$

Για παράδειγμα, στην ορθογωνική διατομή του σχήματος 37, οι ροπές αντίστασης της διατομής αυτής ως προς τους δύο κεντροβαρικούς άξονες Kx και Ky θα είναι αντίστοιχα:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3}{\frac{12}{h} \cdot \frac{h}{2}} \Rightarrow \boxed{W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}} \quad (56) \quad \text{και}$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{h \cdot b^3}{\frac{12}{b} \cdot \frac{b}{2}} \Rightarrow \boxed{W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}} \quad (57)$$

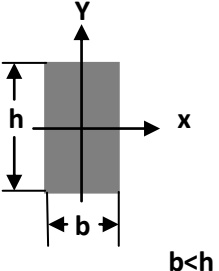
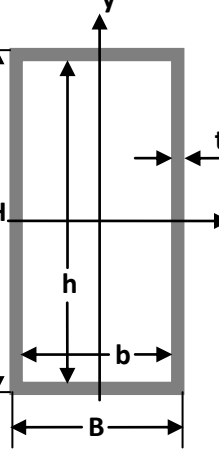
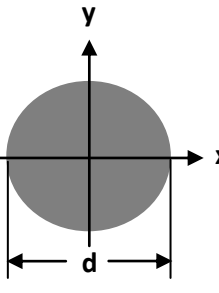
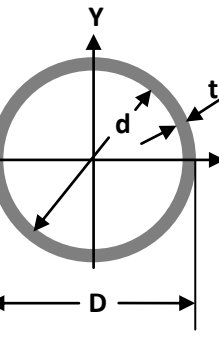
$$W_P = \frac{J_P}{\rho_{\max}} = \frac{J_x + J_y}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h \cdot b^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b \cdot h^3 + h \cdot b^3}{\frac{12}{2}} = \frac{b \cdot h \cdot (h^2 + b^2)}{6 \cdot b} \Rightarrow$$

$$W_P = \frac{h \cdot (h^2 + b^2)}{6} \quad (58)$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις αξονικές ροπές και την πολική ροπή αντίστασης και για άλλες επίπεδες γεωμετρικές διατομές (ορθογώνιο πλαίσιο, κύκλο, κυκλικό δακτύλιο, κ.α.).

Ο πίνακας 5 δίνει όλα τα γεωμετρικά στοιχεία των βασικότερων διατομών γραμμικών φορέων.

Πίνακας 5. Γεωμετρικά στοιχεία βασικότερων διατομών γραμμικών φορέων

Σχήμα	Εμβαδόν	Ροπές αδράνειας	Ακτίνες αδράνειας	Ροπές αντίστασης
 <p>$b < h$</p>	$A = b \cdot h$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ $J_p = \frac{b \cdot h \cdot (b^2 + h^2)}{12}$	$i_x \cong 0,289 \cdot h$ $i_y \cong 0,289 \cdot b$ $i_p \cong 0,289 \cdot \sqrt{b^2 + h^2}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$ $W_p = \frac{h \cdot (b^2 + h^2)}{6}$
 <p>$B < H$ $b < h$ $B = b + 2t$ $H = h + 2t$</p>	$A = B \cdot H - b \cdot h$ $\cong 2 \cdot (B + H) \cdot t$ $\cong 2 \cdot (b + h) \cdot t$	$J_x = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$ $\cong \frac{H \cdot (3 \cdot B \cdot H + H^2) \cdot t}{6}$ $\cong \frac{h \cdot (3 \cdot b \cdot h + h^2) \cdot t}{6}$ $J_y = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{12}$ $\cong \frac{B \cdot (3 \cdot H \cdot B + B^2) \cdot t}{6}$ $\cong \frac{b \cdot (3 \cdot h \cdot b + b^2) \cdot t}{6}$ $J_p = \frac{B \cdot H \cdot (B^2 + H^2) - b \cdot h \cdot (b^2 + h^2)}{12}$ $\cong \frac{(B + H)^3 \cdot t}{6} \cong \frac{(b + h)^3 \cdot t}{6}$	$i_x = 0,289 \cdot \sqrt{\frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{B \cdot H - b \cdot h}}$ $\cong 0,289 \cdot H \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot B + H}{B + H}}$ $\cong 0,289 \cdot h \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot b + h}{b + h}}$ $i_y = 0,289 \cdot \sqrt{\frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{B \cdot H - b \cdot h}}$ $\cong 0,289 \cdot B \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot B + H}{B + H}}$ $\cong 0,289 \cdot b \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot h + b}{h + b}}$ $i_p = 0,289 \cdot \sqrt{\frac{B \cdot H \cdot (B^2 + H^2) - b \cdot h \cdot (b^2 + h^2)}{B \cdot H - b \cdot h}}$ $\cong 0,289 \cdot (B + H) \cong 0,289 \cdot (b + h)$	$W_x = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$ $\cong \frac{(3 \cdot B + H) \cdot H \cdot t}{3}$ $\cong \frac{(3 \cdot b + h) \cdot h \cdot t}{3}$ $W_y = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{6 \cdot B}$ $\cong \frac{(3 \cdot H + B) \cdot B \cdot t}{3}$ $\cong \frac{(3 \cdot h + b) \cdot b \cdot t}{3}$ $W_p = \frac{B \cdot H \cdot (B^2 + H^2) - b \cdot h \cdot (b^2 + h^2)}{6 \cdot B}$ $\cong \frac{(B + H)^3 \cdot t}{3 \cdot B} \cong \frac{(b + h)^3 \cdot t}{3 \cdot b}$
	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ $\cong 0,05 \cdot d^4$ $J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ $\cong 0,1 \cdot d^4$	$i_x = i_y = 0,25 \cdot d$ $i_p = 0,354 \cdot d$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ $\cong 0,1 \cdot d^3$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ $\cong 0,2 \cdot d^3$
 <p>$D = d + 2t$</p>	$A = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$ $\cong \pi \cdot D \cdot t$ $\cong \pi \cdot d \cdot t$	$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$ $\cong 0,05 \cdot (D^4 - d^4)$ $\cong \frac{\pi \cdot D^3 \cdot t}{8} \cong \frac{\pi \cdot d^3 \cdot t}{8}$ $J_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$ $\cong 0,1 \cdot (D^4 - d^4)$ $\cong \frac{\pi \cdot D^3 \cdot t}{4} \cong \frac{\pi \cdot d^3 \cdot t}{4}$	$i_x = i_y = 0,25 \cdot \sqrt{D^2 + d^2}$ $\cong 0,354 \cdot D \cong 0,354 \cdot d$ $i_p = 0,354 \cdot \sqrt{D^2 + d^2}$ $\cong 0,5 \cdot D \cong 0,5 \cdot d$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D}$ $\cong 0,1 \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$ $\cong \frac{\pi \cdot D^2 \cdot t}{4} \cong \frac{\pi \cdot d^2 \cdot t}{4}$ $W_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$ $\cong 0,2 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$ $\cong \frac{\pi \cdot D^2 \cdot t}{2} \cong \frac{\pi \cdot d^2 \cdot t}{2}$

Παρατήρηση: Όσοι τύποι περιέχουν το πάχος t είναι προσεγγιστικοί και, όσο μικρότερο είναι το πάχος t σε σχέση με τις διαστάσεις της επιφάνειας, τόσο πιο ικανοποιητική προσέγγιση έχουν.

23.4. Συνθήκη αντοχής στην απλή επίπεδη κάμψη

Όπως είδαμε στην παράγραφο 23.3., σε κάθε διατομή μιας δοκού, που καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη, αναπτύσσεται μία ορθή τάση (καμπτική τάση) σ_b , που οφείλεται στην καμπτική ροπή που ασκείται στη διατομή, και μια διατμητική τάση τ_Δ , που οφείλεται στην τέμνουσα δύναμη, που ασκείται στη διατομή. Επειδή όμως στις περισσότερες περιπτώσεις οι διατμητικές τάσεις είναι πολύ μικρότερες από τις ορθές, η αντοχή του υλικού καθορίζεται μόνο από τις ορθές τάσεις. Ακόμη έχει αποδειχθεί ότι η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή ακολουθούν αντίστροφη πορεία αύξησης, με αποτέλεσμα στη διατομή που μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη, η καμπτική ροπή παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Το ίδιο συμβαίνει και με τους αντίστοιχες τάσεις, δεδομένου ότι οι τάσεις αυτές είναι ανάλογες προς τα εσωτερικά φορτία, που τις προκαλούν

Είναι προφανές από τη σχέση (54) ότι η το μέτρο της μέγιστης καμπτικής τάσης μιας διατομής, θα έχει τη μέγιστη τιμή του στη διατομή που ασκείται η μέγιστη καμπτική ροπή.

Επομένως:

$$\sigma_{b \max} = \frac{M_{b \max}}{W_b} \quad (59)$$

Στη διατομή όμως αυτή μηδενίζονται και η τέμνουσα δύναμη και η προκαλούμενη διατμητική τάση. Αποδεικνύεται ότι η μέγιστη αυτή καμπτική τάση έχει μεγαλύτερο μέτρο από την ισοδύναμη τάση, που αναπτύσσεται σε οποιαδήποτε άλλη διατομή, λόγω και καμπτικής και διατμητικής τάσης.

Γι αυτό το λόγο ο έλεγχος της αντοχής της δοκού γίνεται στη διατομή, που εμφανίζεται η μέγιστη καμπτική τάση. Για να μην αντιμετωπίσει λοιπόν πρόβλημα αντοχής η δοκός πρέπει:

$$\sigma_{b \max} \leq \sigma_{b \epsilon \pi} \Rightarrow \frac{M_{b \max}}{W_b} \leq \sigma_{b \epsilon \pi} \quad (60)$$

όπου: $\sigma_{\epsilon \pi}$ η επιτρεπόμενη καμπτική τάση και

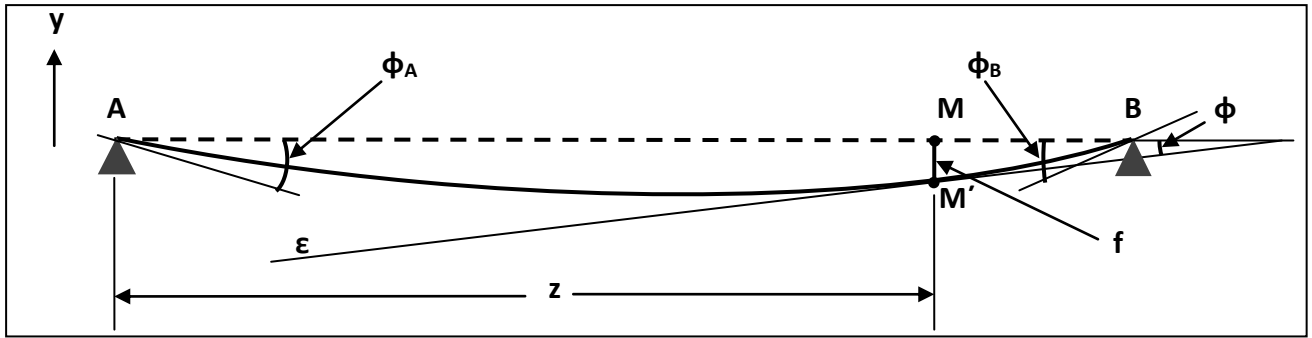
Η σχέση (60) και αποτελούν τη **συνθήκη αντοχής** στην απλή επίπεδη κάμψη δοκού με ορθογωνική διατομή. Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για άλλες διατομές.

Παρατηρήσεις

1. Από τη στατική μελέτη της δοκού, δεδομένου ότι η συνάρτηση της τέμνουσας δύναμης είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης της καμπτικής ροπής (σχέση 47), προκύπτει ότι τα μέτρα της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής ακολουθούν μια αντίστροφη πορεία μεταβολής κατά μήκος της δοκού, δηλαδή όσο αυξάνει της μιας, μειώνεται της άλλης. Το ίδιο ισχύει και για την διατμητική και την καμπτική τάση. Έτσι στη διατομή που μηδενίζεται η διατμητική τάση εμφανίζεται η μέγιστη καμπτική τάση.
2. Η ροπή αντίστασης W_b της διατομής μιας δοκού, που καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη, ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα, που είναι κάθετος στη διεύθυνση των δυνάμεων, αποτελεί **κριτήριο αντοχής** της δοκού σε κάμψη ως προς τον άξονα αυτόν.

23.5. Παραμορφώσεις στην απλή επίπεδη κάμψη

Στην απλή επίπεδη κάμψη, κάθε σημείο M του γεωμετρικού άξονα της δοκού, που απέχει απόσταση z από το άκρο A της δοκού, μετακινείται κατά μια απόσταση $f=MM'$ κάθετα στον άξονα z κατά τη διεύθυνση του άξονα y , ο οποίος έχει τη διεύθυνση των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στη δοκό (σχ. 39).



Σχήμα 39. Βέλος κάμψης και γωνία κλίσης

Έτσι ο αρχικά ευθύγραμμος άξονας της δοκού λόγω της μετακίνησης αυτής των σημείων του, υφίσταται μια καμπύλωση. Το σχήμα και το μέγεθος της καμπύλης αυτής εξαρτάται από το είδος, την κατανομή και το μέγεθος των φορτίων που ασκούνται στη δοκό. Η μετακίνηση αυτή κάθε σημείου ονομάζεται **βέλος κάμψης** της δοκού στο συγκεκριμένο σημείο και εξαρτάται προφανώς από τη θέση του σημείου, δηλαδή είναι συνάρτηση της τετμημένης z του σημείου. Έτσι έχουμε: $MM' = f(z)$ (61)

Η εφαπτομένη ϵ της καμπύλης αυτής στο σημείο M' σχηματίζει με την αρχική ευθύγραμμη θέση του άξονα μια γωνία ϕ , η εφαπτομένη της οποίας εκφράζει την κλίση του άξονα στο σημείο M . Η γωνία ϕ ονομάζεται **κλίση** του άξονα στο σημείο M . Και η γωνία ϕ είναι προφανώς συνάρτηση της τετμημένης z του σημείου M . Δηλαδή: $\epsilon\phi\phi = \epsilon\phi\phi(z)$ (62)

Η συνάρτηση $y(z)$ ονομάζεται **συνάρτηση του βέλους κάμψης** και προκύπτει σαν λύση της διαφορικής

εξίσωσης:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = -\frac{M_b(z)}{E \cdot J_x} \quad (63)$$

η οποία ονομάζεται **διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής**.

Η συνάρτηση $\epsilon\phi\phi(z)$ ταυτίζεται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης του βέλους κάμψης $y(z)$, οπότε:

$$\epsilon\phi\phi(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (64)$$

Από τη μαθηματική μελέτη της συνάρτησης του βέλους κάμψης $f(z)$ προκύπτουν η θέση και το μέτρο του **μέγιστου βέλους κάμψης** f_{\max} της δοκού, η γνώση του οποίου σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητη για την εξασφάλιση της ομαλής λειτουργίας της κατασκευής.

Ομοίως από την συνάρτηση της κλίσης $\epsilon\phi\phi(z)$ του άξονα υπολογίζουμε τις γωνίες κλίσης σε διάφορα σημεία της δοκού. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι γωνίες κλίσης ϕ_A και ϕ_B του άξονα στα σημεία στήριξης της δοκού, διότι, στις περισσότερες περιπτώσεις, επηρεάζουν την ομαλή λειτουργία των εδράνων στήριξης, ιδιαίτερα όταν έχουν μεγάλες τιμές.

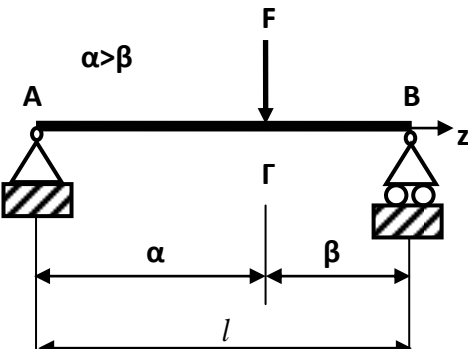
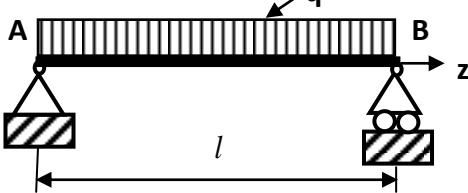
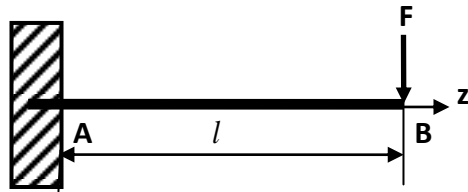
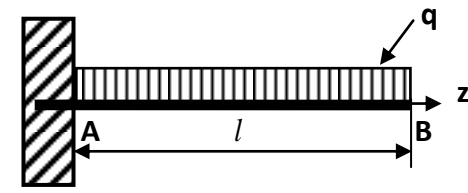
Η αναλυτική μέθοδος υπολογισμού της συνάρτησης της ελαστικής γραμμής μιας δοκού σαν λύση της διαφορικής εξίσωσης (63) (με διπλή ολοκλήρωση), ενδείκνυται σε περιπτώσεις που η φόρτιση της δοκού είναι συνεχής, δηλαδή η συνάρτηση $M_b(z)$ είναι ενιαία για όλο το μήκος της δοκού. Αν όμως η φόρτιση της είναι ασυνεχής ή σύνθετη, τότε η παραπάνω μέθοδος είναι επίπονη. Στις περιπτώσεις αυτές προτιμώνται άλλες μέθοδοι, πιο σύντομες, όπως η **μέθοδος των γενικευμένων συναρτήσεων**, η **μέθοδος της επαλληλίας**, η **μέθοδος της συζυγούς δοκού (Mohr)** και η **μέθοδος των διαγραμμάτων ροπών κάμψης**.

Ο πίνακας 6 δίνει το βέλος κάμψης σε χαρακτηριστικά σημεία της δοκού, το μέγιστο βέλος κάμψης και τις γωνίες κλίσης του άξονα στα σημεία στήριξης και σε κάποια χαρακτηριστικά σημεία της δοκού για μερικές απλές, αλλά βασικές περιπτώσεις φόρτισης δοκών.

Το μέγεθος EJ_x ονομάζεται «μέτρο δυσκαμψίας της δοκού ως προς τον άξονα x». Αντίστοιχα:

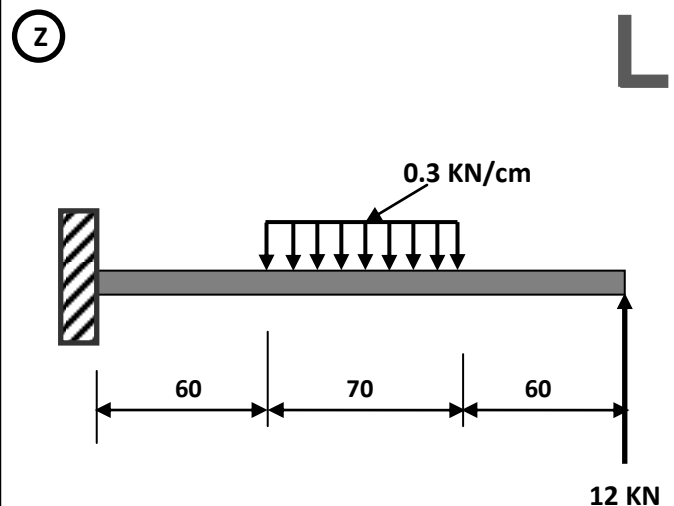
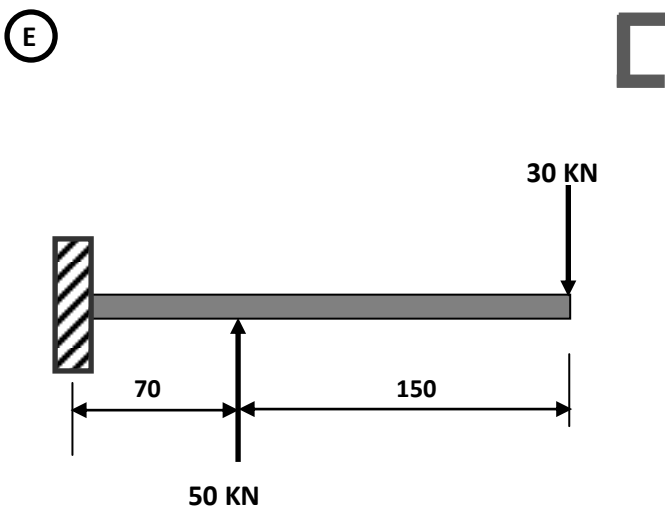
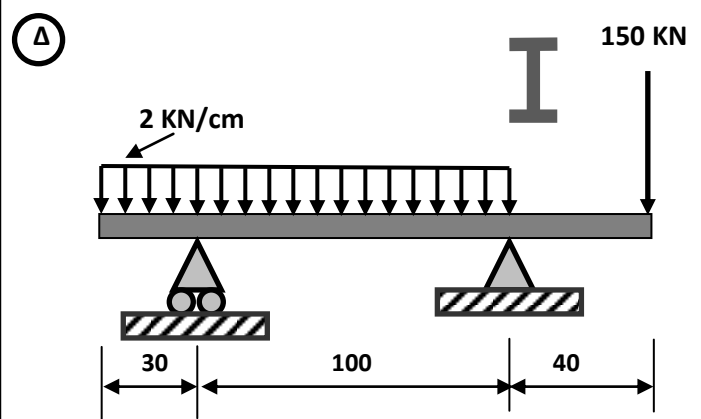
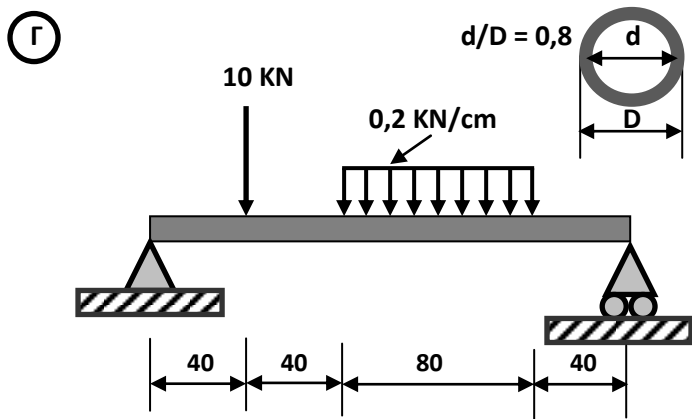
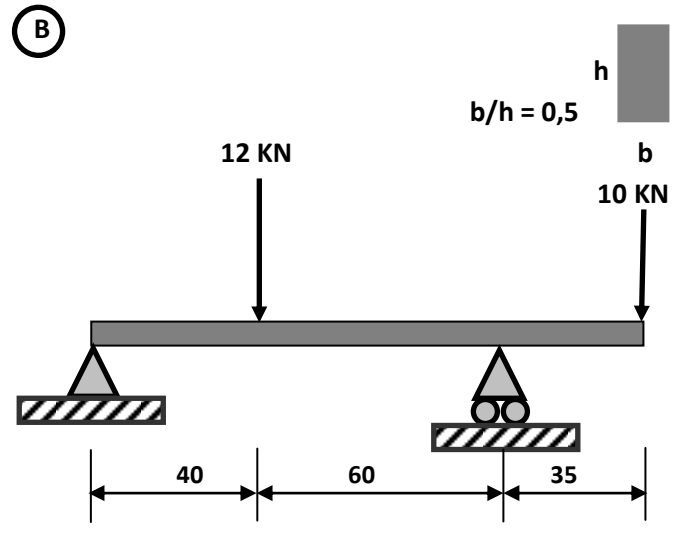
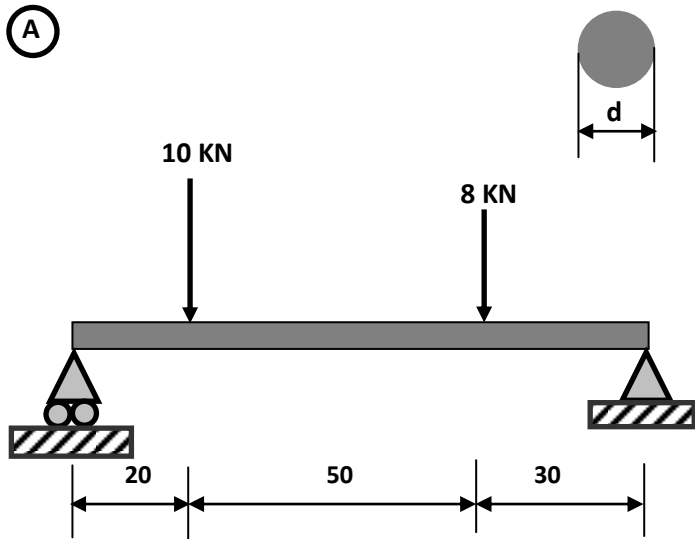
Το μέγεθος EJ_y ονομάζεται «μέτρο δυσκαμψίας της δοκού ως προς τον άξονα y».

Πίνακας 6. Κλίσεις και βέλη κάμψης για τις βασικότερες περιπτώσεις φόρτισης

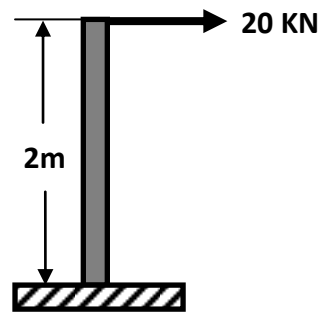
ΕΙΔΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ	ΡΟΠΗ ΚΑΜΨΗΣ	ΚΛΙΣΕΙΣ	ΒΕΛΗ ΚΑΜΨΗΣ
<p><u>Αμφιέριστη δοκός με συγκεντρωμένο φορτίο</u></p> 	$M_{b,max} = \frac{F \cdot a \cdot \beta}{l}$ <p>για $z = a$</p>	$\varphi_A = \frac{F \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (l + \beta)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J_b}$ $\varphi_B = \frac{F \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (l + a)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J_b}$ $\varphi_\Gamma = \frac{F \cdot a \cdot \beta \cdot (\alpha - \beta)}{3 \cdot l \cdot E \cdot J_b}$	$f_\Gamma = \frac{F \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2}{3 \cdot l \cdot E \cdot J_b}$ $f_{max} = \frac{F \cdot \beta \cdot (l^2 - \beta^2)^{3/2}}{15,6 \cdot l \cdot E \cdot J_b}$ <p>για $z = \sqrt{\frac{l^2 - \beta^2}{3}}$</p>
<p><u>Αμφιέριστη δοκός με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το μήκος της</u></p> 	$M_{b,max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$ <p>για $z = \frac{l}{2}$</p>	$\varphi_A = \varphi_B = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot J_b}$	$f_{max} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J_b}$ <p>για $z = \frac{l}{2}$</p>
<p><u>Πρόβολος με συγκεντρωμένο φορτίο στο ελεύθερο άκρο του</u></p> 	$M_{b,max} = F \cdot l$ <p>για $z = 0$</p>	$\varphi_A = 0$ $\varphi_B = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J_b}$	$f_{max} = f_B = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_b}$
<p><u>Πρόβολος με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το μήκος του</u></p> 	$M_{b,max} = \frac{q \cdot l^2}{2}$ <p>για $z = 0$</p>	$\varphi_A = 0$ $\varphi_B = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_b}$	$f_{max} = f_B = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J_b}$

23.7. Ασκήσεις

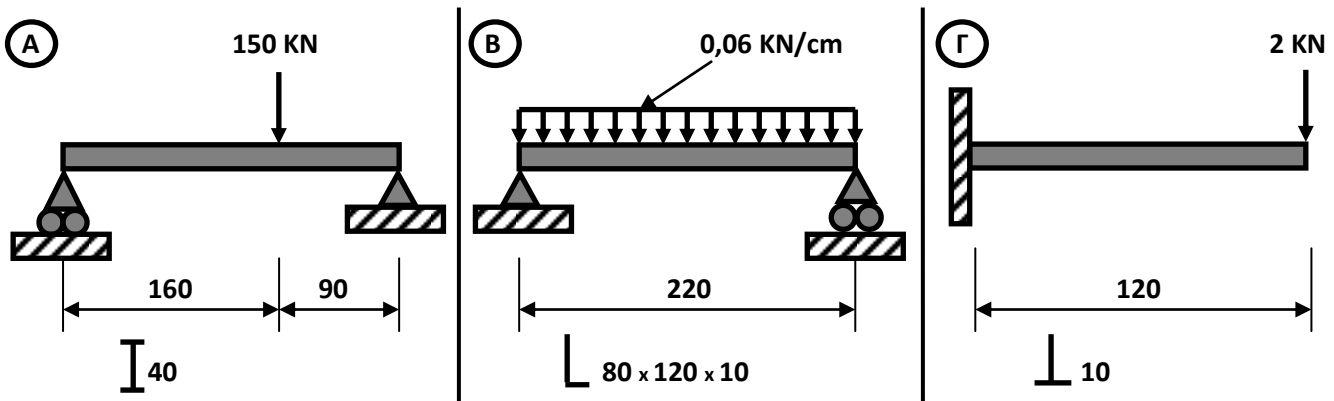
1. Για τα δοκάρια που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα ζητείται να σχεδιαστούν τα Διαγράμματα Τεμνουσών Δυνάμεων (ΔΤΔ) και Καμπτικών Ροπών (ΔΚΡ) και να υπολογιστεί το απαιτούμενο μέγεθος της διατομής καθενός. Το σχήμα και η τοποθέτηση της διατομής κάθε δοκαριού σε σχέση με τα φορτία φαίνονται δίπλα σε κάθε σχήμα σε μεγέθυνση. Για το υλικό των δοκαριών δίνεται η επιτρεπόμενη τάση σε κάμψη $\sigma_{\text{βεπ}} = 12 \text{ KN/cm}^2$. (οι αποστάσεις στα σχήματα δίνονται σε **cm**).



2. Να υπολογιστεί η πλευρά της τετραγωνικής διατομής του ξύλινου στύλου του σχήματος και το βέλος κάμψης στο πάνω άκρο του. Το κάτω άκρο του στύλου είναι πακτωμένο. Για το ξύλο δίνονται το μέτρο ελαστικότητας $E = 1250 \text{ KN/cm}^2$ και η επιτρεπόμενη τάση σε κάμψη $\sigma_{\text{επ}} = 3,5 \text{ KN/cm}^2$.



3. Να υπολογιστεί το μέγιστο βέλος κάμψης και οι γωνίες κλίσης στα στηρίγματα των δοκαριών των παρακάτω σχημάτων. Οι διατομές των δοκαριών δίνονται στο κάθε σχήμα. (οι αποστάσεις σε cm). Για το υλικό των δοκαριών δίνεται το μέτρο ελαστικότητας $E = 20600 \text{ KN/cm}^2$.



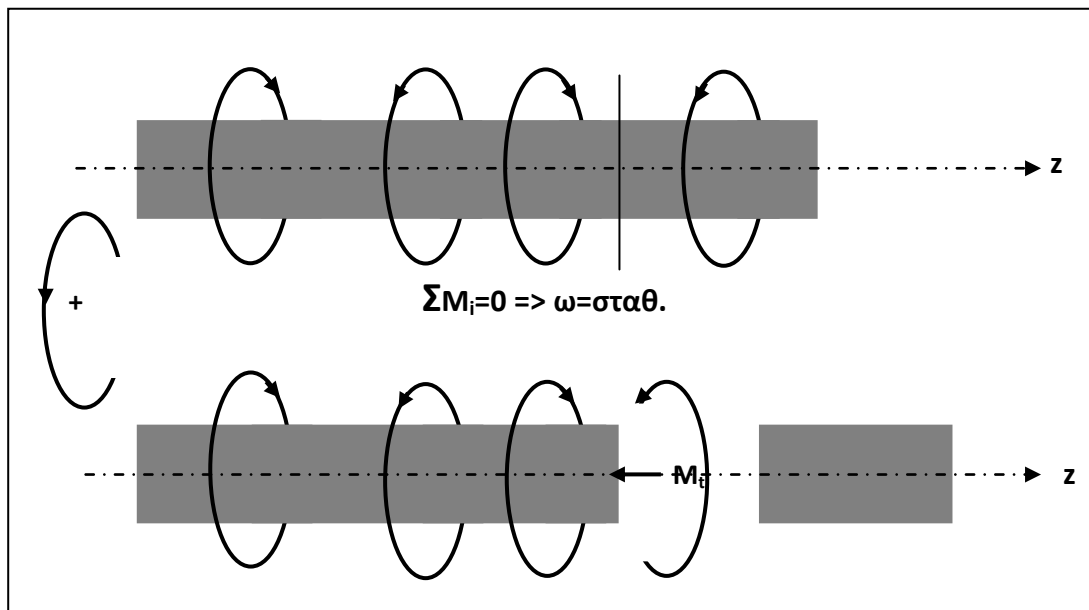
4. Δοκάρι ορθογωνικής διατομής με λόγο πλευρών $b/h = 0,6$ καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη. Η μέγιστη καμπτική τάση που αναπτύσσεται στο δοκάρι όταν αυτό τοποθετηθεί με την μεγάλη διάσταση της διατομής παράλληλη με τα φορτία είναι 85 N/mm^2 . Να ελεγχθεί η αντοχή του δοκαριού, αν τοποθετηθεί με τη μεγάλη διάσταση κάθετα στα φορτία. Να συγκριθούν τα βέλη κάμψης των δύο περιπτώσεων. Δίνεται η επιτρεπόμενη τάση σε κάμψη του υλικού του δοκαριού $\sigma_{\text{επ}} = 105 \text{ N/mm}^2$.
5. Θέλουμε να αντικαταστήσουμε τον συμπαγή άξονα ενός μηχανήματος με έναν κοίλο άξονα, της ίδιας αντοχής, από το ίδιο υλικό και με λόγο διαμέτρων (εσωτερική / εξωτερική) = $0,9$. Να υπολογιστεί η οικονομία βάρους του δεύτερου άξονα σε σχέση με τον πρώτο και ο λόγος των βελών κάμψης των δύο αξόνων.
6. Δοκάρι από χάλυβα καταπονείται σε απλή επίπεδη κάμψη. Από το διάγραμμα καμπτικών ροπών προέκυψε ότι η μέγιστη καμπτική ροπή που ασκείται στο δοκάρι είναι $8,5 \text{ KNm}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο τύπους δοκαριών. Ένα με διατομή I (διπλό ταυ) και ένα με διατομή C . Ποιο από τα δύο δοκάρια είναι συμφερότερο από άποψη βάρους και ποιο από άποψη βέλους κάμψης; Για το υλικό των δοκαριών δίνεται η επιτρεπόμενη τάση σε κάμψη $\sigma_{\text{επ}} = 11 \text{ KN/cm}^2$.
7. Δοκάρι τετραγωνικής διατομής καταπονείται σε επίπεδη απλή κάμψη. Αν αντικαταστήσουμε το δοκάρι με ένα άλλο κυκλικής διατομής, ίδιας αντοχής, ίσου μήκους και από το ίδιο υλικό πόσο τοις εκατό μεταβάλλεται το βάρος και το μέτρο δυσκαμψίας του;

24. Απλή στρέψη

24.1. Στρεπτική ροπή

Η απλή στρέψη ορίστηκε στην παράγραφο 6. (σχ. 5δ).

Απλή στρέψη έχουμε και στην περίπτωση που στη δοκό ασκούνται περισσότερες από δύο εξωτερικές ροπές, που έχουν τη διεύθυνση του άξονα της δοκού, κάθε μια από τις οποίες τείνει να περιστρέψει τη δοκό γύρω από τον άξονά της κατά τη φορά της και οι οποίες έχουν συνισταμένη μηδέν, οπότε η δοκός βρίσκεται σε στατική ισορροπία, που σημαίνει ότι παραμένει ακίνητη ή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (σχ. 40).



Σχήμα 40. Απλή στρέψη

Θεωρούμε μια τυχαία διατομή της δοκού. Το αριστερό τμήμα της δοκού ισορροπεί κάτω από την επίδραση των εξωτερικών ροπών που ασκούνται σ' αυτό και μιας εσωτερικής ροπής M_t την οποία ασκεί προφανώς το δεξιό τμήμα της δοκού, η οποία ονομάζεται **στρεπτική ροπή** και έχει και αυτή προφανώς τη διεύθυνση του άξονα της δοκού.

Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\sum M_i + M_t = 0 \quad (65)$$

από την οποία υπολογίζεται η στρεπτική ροπή M_t αν είναι γνωστές οι εξωτερικές ροπές.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι οι ροπές είναι διανυσματικά μεγέθη, η σχέση (65) είναι κανονικά διανυσματική. Πλην όμως, τα διανύσματα όλων αυτών των ροπών έχουν την ίδια διεύθυνση, αυτήν του άξονα της δοκού. Αν λοιπόν ορίσουμε ως θετική φορά για τις ροπές την φορά που έχουν όσες τείνουν να περιστρέψουν την δοκό κατά φορά αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το διάνυσμα κάθε ροπής με έναν προσημασμένο αριθμό, που έχει μέτρο το μέτρο του διανύσματος και πρόσημο το πρόσημο της φοράς του. Έτσι η σχέση (65), από διανυσματική, μετατρέπεται καταχρηστικά σε αλγεβρική.

24.2. Ροπή στρέψης περιστρεφόμενης ατράκτου

Άξονες ονομάζονται δοκοί με διατομή κατά κανόνα κύκλο ή κυκλικό δακτύλιο, που χρησιμοποιούνται για την έδραση περιστρεφόμενων στοιχείων (τροχών, τροχαλιών κ.λ.π.).

Οι άξονες που χρησιμοποιούνται μόνο για την έδραση ενός τέτοιου στοιχείου, άλλοτε είναι σταθερά συνδεδεμένοι με το περιστρεφόμενο στοιχείο (σφηνωμένοι ή ολόσωμοι μ' αυτό) και περιστρέφονται μαζί του (περιστρεφόμενοι άξονες) και άλλοτε παραμένουν ακίνητοι (ακίνητοι άξονες) και περιστρέφεται μόνο το περιστρεφόμενο στοιχείο που εδράζεται στον άξονα σε κάποιο έδρανο (κυλίσεως ή ολισθήσεως). Στις περιπτώσεις αυτές οι άξονες καταπονούνται κυρίως σε κάμψη κάποιες φορές και σε αξονική καταπόνηση, λόγω των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτούς από τα περιστρεφόμενα στοιχεία.

Παραδείγματα αξόνων:

ο άξονας του μπροστινού τροχού ενός ποδηλάτου ή μοτοποδηλάτου,

ο άξονας του τροχού ενός οικοδομικού καροτσιού,

ο άξονας μιας υπήλατης άμαξας

ο άξονας μιας σταθερής τροχαλίας (μακαράς) κ.ά.

Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις, εκτός από την έδραση, οι άξονες χρησιμοποιούνται και για την παραλαβή από την κινητήρια μηχανή της κινητικής ενέργειας που απαιτείται για την περιστροφή του περιστρεφόμενου στοιχείου, και την μετάδοσή της στο περιστρεφόμενο στοιχείο. Στις περιπτώσεις αυτές οι άξονες ονομάζονται **άτρακτοι** και καταπονούνται εκτός από κάμψη ή και αξονική καταπόνηση και σε στρέψη.

Μια άτρακτος μπορεί να προσομοιωθεί με **«αγωγό ενέργειας (ή ισχύος)»**, που έχει ένα ή περισσότερα σημεία εισόδου και ένα ή περισσότερα σημεία εξόδου της ενέργειας, όπως σε έναν αγωγό ρευστού.

Και γι αυτό χρησιμοποιείται συχνά ο όρος **«ροή ενέργειας (ή ισχύος)»**

Παραδείγματα ατράκτων:

Η άτρακτος του πίσω άξονα ενός ποδηλάτου, που παίρνει κινητική ενέργεια από την πενταλιέρα μέσω της αλυσίδας και τη μεταδίδει στον τροχό.

Η ελικοφόρος άτρακτος ενός πλοίου, που παίρνει κινητική ενέργεια από την κύρια μηχανή του πλοίου και τη μεταδίδει στην έλικα.

Η στροφαλοφόρος άτρακτος του κινητήρα ενός αυτοκινήτου, που παίρνει κινητική ενέργεια από τα έμβολα μέσω των στροφάλων και τη μεταδίδει στους κινητήριους τροχούς του αυτοκινήτου

Παρατήρηση: Η διάκριση αυτή στην ονομασία (άξονας-άτρακτος) δεν τηρείται με αυστηρότητα πάντοτε και πολλές φορές χρησιμοποιείται η ονομασία άξονας αντί της ονομασίας άτρακτος.

Έτσι λέμε ελικοφόρος άξονας αντί του ορθού ελικοφόρος άτρακτος, στροφαλοφόρος άξονας αντί του ορθού στροφαλοφόρος άτρακτος κ.ά.

Επίσης αντί του όρου κινητική ενέργεια (ή ισχύς) χρησιμοποιείται ο όρος **«κίνηση»**.

Έτσι λέμε ότι «ο ελικοφόρος άξονας μεταδίδει κίνηση στην έλικα» αντί να λέμε ότι

«η ελικοφόρος άτρακτος μεταδίδει κινητική ενέργεια (ή ισχύ) στην έλικα»

Η στρεπτική ροπή M_t που καταπονεί σε στρέψη μια άτρακτο, η οποία στρέφεται σταθερό αριθμό στροφών ανά λεπτό n μεταφέροντας κινητική ισχύ P υπολογίζεται ως εξής:

Αν: ν η συχνότητα περιστροφής σε **rps** (στροφές ανά δευτερόλεπτο)

ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής σε **rad/s** (ακτίνια ανά δευτερόλεπτο) και

M_t η στρεπτική ροπή που είναι ίση σε μέτρο με την εξωτερική ροπή M , που προκαλεί την περιστροφή της ατράκτου, σε **Nm**,

ισχύουν: $\omega = 2\pi \cdot \nu$ και $\nu = \frac{n}{60}$, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία της Κινηματικής ισχύει:

$$P = M \cdot \omega = M_t \cdot 2\pi \cdot \nu = M_t \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{60} \Rightarrow M_t = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{P}{n} \quad (\alpha)$$

Στη σχέση αυτή όλα τα μεγέθη έχουν μονάδες του διεθνούς συστήματος μονάδων (SI). Αν την ισχύ **P** τη μετράμε σε **KW** αντί **W**, δεδομένου ότι $1KW = 10^3 W$, η σχέση (α), μετά από τις αριθμητικές πράξεις,

γίνεται:

$$M_t = 9550 \cdot \frac{P}{n} \quad (66) \quad (P \text{ σε KW, } M_t \text{ σε Nm, } n \text{ σε rpm})$$

Επειδή στη Μηχανολογία χρησιμοποιείται ένα εμπειρικό μικτό σύστημα μονάδων, στο οποίο την ισχύ **P** τη μετράμε σε **HP**, τον αριθμό στροφών **n** σε **rpm** και τη στρεπτική ροπή **M_t** σε **Krpm**, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι: $1HP = 0,745KW$ και $1Kp = 9,81N$, μετά από αριθμητικές πράξεις,

η σχέση (66) γίνεται:

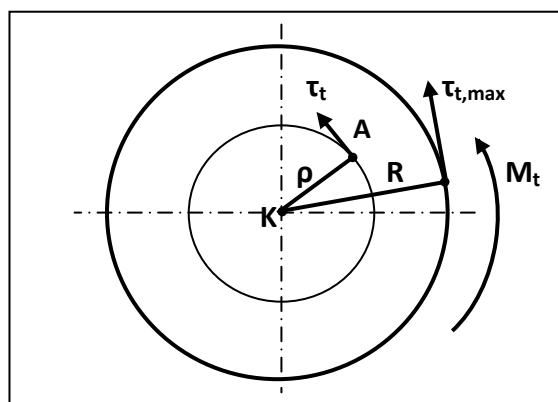
$$M_t = 71620 \cdot \frac{P}{n} \quad (67) \quad (P \text{ σε HP, } M_t \text{ σε Krpm, } n \text{ σε rpm})$$

24.3. Τάσεις στην απλή στρέψη-Συνθήκη αντοχής

Για τον υπολογισμό των τάσεων στην απλή στρέψη κάνουμε τις παρακάτω απλοποιητικές παραδοχές:

1. Οι διατομές της δοκού παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση, που προκαλεί η στρέψη.
2. Κάθε διατομή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της δοκού σαν απόλυτα στερεός δίσκος, δηλαδή και μετά τη στρέψη κάθε ευθύγραμμο τμήμα πάνω σ' αυτήν παραμένει ευθύγραμμο.
3. Το υλικό της δοκού θεωρείται **ομογενές** και **ισότροπο**, ώστε να έχει τις ίδιες ιδιότητες σε κάθε σημείο και προς κάθε κατεύθυνση.

Στη στρέψη κάθε διατομή επιχειρεί να ολισθήσει πάνω στη γειτονική της περιστρεφόμενη γύρω από τον άξονα της δοκού. Στους δομικούς λίθους όμως της διατομής του αριστερού τμήματος ασκούνται δυνάμεις συνοχής από τους δομικούς λίθους της διατομής του δεξιού τμήματος. Οι δυνάμεις αυτές προκαλούν την εμφάνιση τεμνουσών δυνάμεων πάνω στο επίπεδο της διατομής, οι οποίες προκαλούν ροπές ως προς το κέντρο της διατομής, η συνισταμένη των οποίων είναι η στρεπτική ροπή **M_t**. Από τις δυνάμεις αυτές ορίζονται διατμητικές τάσεις στο επίπεδο της διατομής, οι οποίες ονομάζονται **στρεπτικές τάσεις (τ_t)**. Ας θεωρήσουμε μια δοκό με κυκλική διατομή, με διάμετρο **D** (και ακτίνα **R=D/2**) που καταπονείται σε απλή στρέψη, και μια τυχαία διατομή της στην οποία ασκείται στρεπτική ροπή **M_t** (σχ. 41).



Σχήμα 41. Στρεπτικές τάσεις

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε σημείο **A** της διατομής, που απέχει από το κέντρο **K** της διατομής απόσταση **ρ**,

η στρεπτική τάση τ_t , (άρα και η αντίστοιχη στοιχειώδης τέμνουσα δύναμη dQ , που ασκείται σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA γύρω από το σημείο αυτό), είναι εφαπτόμενη του κύκλου που έχει ακτίνα ρ και

$$\tau_t = \frac{M_t}{J_P} \cdot \rho \quad (68)$$

μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

όπου: J_P η **πολική ροπή αδράνειας** της διατομής ως προς το κέντρο της K .

Αν αντικαταστήσουμε τη φορά της στρεπτικής ροπής M_t με ένα πρόσημο, θεωρώντας θετική τη στρεπτική ροπή όταν έχει φορά περιστροφής αντίθετη με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, τότε, από τη σχέση (68), το πρόσημο της στρεπτικής ροπής μεταφέρεται και στη στρεπτική τάση.

Άρα το πρόσημο της στρεπτικής τάσης δείχνει τη φορά περιστροφής της στρεπτικής ροπής.

Από τη διερεύνηση της σχέσης (68) προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Το μέτρο της στρεπτικής τάσης είναι ανάλογο με την απόσταση ρ του σημείου A από το κέντρο K της διατομής.
2. Στο κέντρο K της κυκλικής διατομής ($\rho=0$) η στρεπτική τάση τ_t είναι μηδέν.
3. Η στρεπτική τάση έχει τη μέγιστη τιμή της στα σημεία της περιφέρειας της διατομής όπου $\rho=\rho_{\max}=R$
Πράγματι από τη σχέση (65) προκύπτει:

$$\tau_{t,\max} = \frac{M_t}{J_P} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_t}{J_P} \cdot R = \frac{M_t}{\frac{J_P}{R}} \Rightarrow \tau_{t,\max} = \frac{M_t}{W_P} \leq \tau_{t,\varepsilon\pi} \quad (69)$$

όπου: $W_P = \frac{J_P}{R}$ η **πολική ροπή αντίστασης** της διατομής ως προς το κέντρο της K .

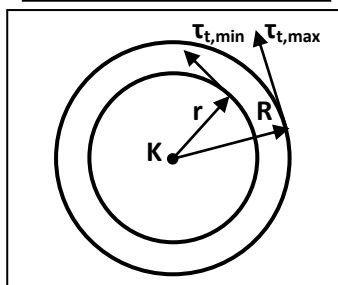
$\tau_{t,\varepsilon\pi}$ η επιτρεπόμενη στρεπτική τάση του υλικού του δοκαριού.

Η σχέση (69) αποτελεί τη **συνθήκη αντοχής** στην απλή στρέψη.

Τιμές για τα μεγέθη J_P και W_P δίνονται στον πίνακα 5 για τις συνηθέστερες διατομές δοκών.

Στην περίπτωση που η δοκός έχει διατομή κυκλικού δακτυλίου (σχ.42) με εξωτερική διάμετρο D (άρα και εξωτερική ακτίνα $R=D/2$) και εσωτερική διάμετρο d (άρα και εσωτερική ακτίνα $r=d/2$), από τη σχέση (68) προκύπτει ότι η στρεπτική τάση παίρνει τη μέγιστη τιμή της στα σημεία του εξωτερικού κύκλου για $\rho=R$ (σχέση 69) και την ελάχιστη τιμή της στα σημεία του εσωτερικού κύκλου για $\rho=r/2$, η οποία είναι:

$$\tau_{t,\min} = \frac{M_t}{J_P} \cdot r \quad (70)$$



Σχήμα 42. Στρεπτικές τάσεις σε διατομή κυκλικού δακτυλίου

24.4. Παραμορφώσεις στην απλή στρέψη

Έστω μια δοκός κυκλικής διατομής, η οποία καταπονείται σε απλή στρέψη.

Θεωρούμε δύο διατομές της δοκού A_1 και A_2 που απέχουν απόσταση l , και y_1, y_2 δύο παράλληλοι κεντροβαρικοί άξονές τους αντίστοιχα (σχ.43). Με την προϋπόθεση ότι η στρεπτική ροπή M_t είναι σταθερή σε όλες τις διατομές μεταξύ των A_1 και A_2 , η γωνία ϕ που στρέφεται η διατομή A_1 σχετικά με την A_2 , σε μοίρες ($^\circ$), αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$\phi = \frac{M_t}{G \cdot J_P} \cdot l \cdot \frac{180}{\pi} \quad (71)$$

όπου:

ϕ η γωνία στροφής μεταξύ δύο διατομών της διατομής σε **μοίρες ($^\circ$)**

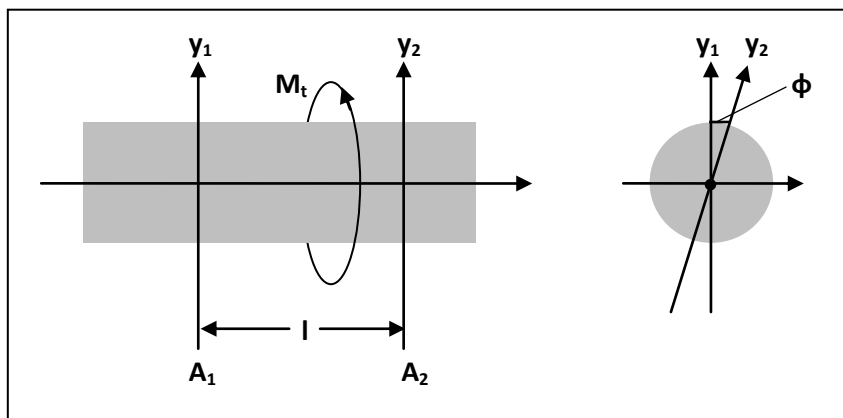
M_t η στρεπτική ροπή σε **Nmm**

G το μέτρο ολίσθησης του υλικού της δοκού σε **N/mm²**

J_P η πολική ροπή αδράνειας της διατομής ως προς το κέντρο βάρους της σε **mm⁴**

l η απόσταση των δύο διατομών σε **mm**

(ο συντελεστής $180/\pi$ χρησιμοποιείται για τη μετατροπή της μονάδας της γωνίας ϕ από **rad** σε **μοίρες**)



Σχήμα 43. Γωνία στροφής μεταξύ δύο διατομών

Ο λόγος $\frac{\phi}{l}$ ονομάζεται **ανηγμένη γωνία στροφής** ή **συστροφή**, συμβολίζεται με ϕ_1 και εκφράζει τη γωνία στροφής μεταξύ δύο διατομών που απέχουν **1mm**, με την προϋπόθεση ότι η στρεπτική ροπή διατηρείται σταθερή μεταξύ τους. Από τη σχέση (71) προκύπτει:

$$\phi_1 = \frac{\phi}{l} = \frac{M_t}{G \cdot J_P} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (72)$$

όπου ϕ_1 η συστροφή σε **$^\circ/\text{mm}$**

Προφανώς

$$\phi = \phi_1 \cdot l \quad (73)$$

Το μέγεθος GJ_P ονομάζεται **μέτρο δυστρεψιάς** της δοκού.

24.5. Στρέψη δοκών μη κυκλικής διατομής.

Οι σχέσεις (69), (70), (71) και (72) αφορούν στη στρέψη δοκού με διατομή σχήματος κύκλου ή κυκλικού δακτυλίου. Η θεωρητική μελέτη της στρέψης δοκών με διατομή που έχει διαφορετικό σχήμα είναι πολύ δύσκολη και εφικτή μόνο για διατομές, που έχουν απλά γεωμετρικά σχήματα, όπως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ισόπλευρο τρίγωνο ή έλλειψη. Οι σχέσεις για τις στρεπτικές τάσεις και τις παραμορφώσεις, προκύπτουν από τη θεωρία της ελαστικότητας και προϋποθέτουν ότι το υλικό βρίσκεται στην περιοχή της αναλογίας, στην οποία ισχύει ο νόμος του **Hooke**, στον οποίο στηρίζεται η απόδειξή τους. Γενικά μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (69) και (72) για τη μέγιστη τάση και τη συστροφή αντίστοιχα θεωρώντας ως W_P και J_P κάποιες παραστάσεις που εμφανίζονται στις σχέσεις που προκύπτουν από τη θεωρητική μελέτη και αντιστοιχούν στα μεγέθη αυτά. Πιο αναλυτικά έχουμε:

α. Δοκός με διατομή σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Αν η διατομή της δοκού έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις h και b (με $h > b$), (σχ. 44α) και M_t είναι η στρεπτική ροπή, που σκείται σ' αυτήν, αποδεικνύεται ότι:

η μέγιστη στρεπτική τάση $\tau_{t,max}$ εμφανίζεται στο μέσο της μεγαλύτερης πλευρά του ορθογωνίου h και το

μέτρο της δίνεται από τη σχέση (69), με:
$$W_P = \alpha \cdot b^2 \cdot h \quad (73)$$

ενώ στις κορυφές του ορθογωνίου η στρεπτική τάση είναι **μηδέν**.

Η τάση στο μέσο της μικρότερης πλευράς b έχει μέτρο:
$$\tau_{t,N} = \frac{b}{h} \cdot \tau_{t,max} \quad (74)$$

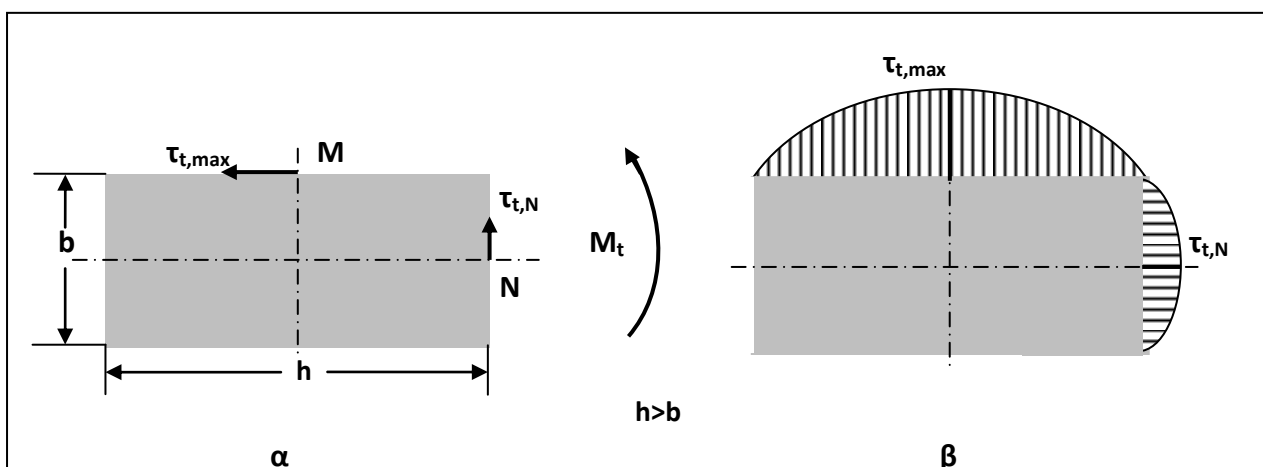
Τέλος η συστροφή ϕ_1 δίνεται από τη σχέση (72) με:
$$J_P = \beta \cdot b^3 \cdot h \quad (75)$$

όπου: α, β δύο εμπειρικοί συντελεστές που δίνονται στον πίνακα 7.

Πίνακας 7. Συντελεστές α, β για στρέψη ορθογωνικής διατομής

h/b	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

Για ενδιαμέσες τιμές του λόγου n χρησιμοποιείται γραμμική παρεμβολή για την εύρεση των α και β



Σχήμα 44. Στρέψη ορθογωνικής διατομής

Στο σχήμα 44β φαίνεται η κατανομή του μέτρου της στρεπτικής τάσης στις πλευρές της διατομής.

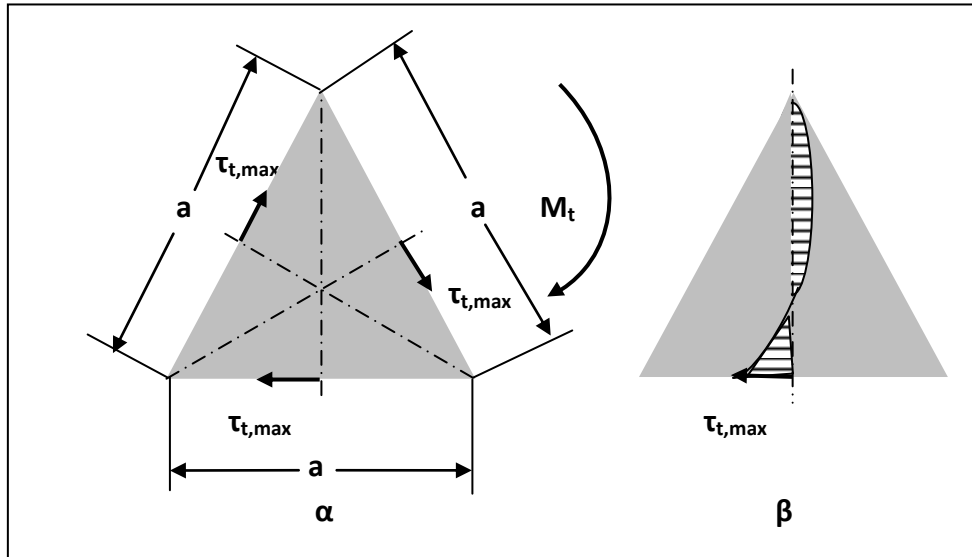
β. Δοκός με διατομή σχήματος ισόπλευρου τριγώνου

Αν η διατομή της δοκού έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά a (σχ. 45α) και M_t είναι η στρεπτική ροπή που ασκείται σ' αυτήν, αποδεικνύεται ότι:

η μέγιστη στρεπτική τάση $\tau_{t,max}$ εμφανίζεται στο μέσο κάθε μιας από τις πλευρές της διατομής και το

μέτρο της δίνεται από τη σχέση (69), με:
$$W_P = 0,077 \cdot a^3 \quad (76)$$

και η συστροφή ϕ_1 δίνεται από τη σχέση (72) με:
$$J_P = 0,0385 \cdot a^4 \quad (77)$$



Σχήμα 45. Στρέψη τριγωνικής διατομής

Στο σχήμα 45β φαίνεται η κατανομή του μέτρου της στρεπτικής τάσης κατά μήκος μιας διαμέσου της τριγωνικής διατομής.

γ. Δοκός με διατομή σχήματος έλλειψης

Αν η δοκός έχει διατομής σχήματος έλλειψης με ημιάξονες α και β ($\alpha > \beta$) (σχ.46α) και M_t η στρεπτική ροπή, που ασκείται σ' αυτήν, αποδεικνύεται ότι:

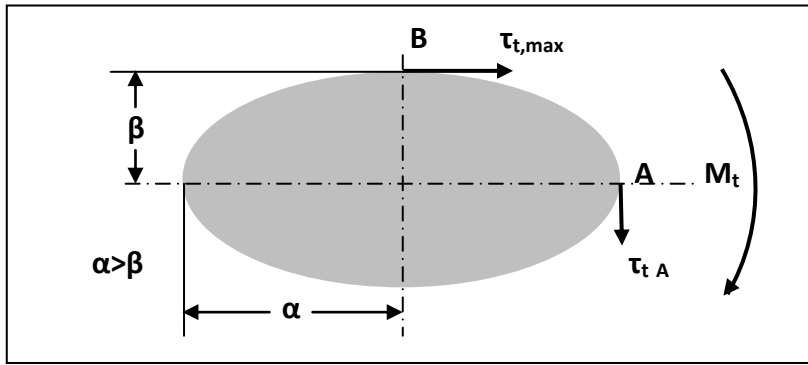
η μέγιστη στρεπτική τάση $\tau_{t,max}$ εμφανίζεται στο σημείο **B**, που ο μικρός άξονας β τέμνει την έλλειψη,

εφάπτεται στη έλλειψη και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση (69) με:
$$W_P = \frac{\pi \cdot a \cdot \beta^2}{2} \quad (78)$$

Η στρεπτική τάση στο σημείο **A** που ο μεγάλος άξονας α τέμνει την έλλειψη εφάπτεται στην έλλειψη και

το μέτρο της δίνεται από τη σχέση:
$$\tau_A = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \tau_{t,max} \quad (79)$$

και η συστροφή ϕ_1 δίνεται από τη σχέση (72) με:
$$J_P = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (80)$$



Σχήμα 46. Στρέψη ελλειπτικής διατομής

Τα παραπάνω συμπεράσματα περιλαμβάνονται συνοπτικά στον πίνακα 8.

Πίνακας 8. Στρεπτική τάση και γωνία στροφής μη κυκλικών διατομών

Σχήμα Διατομής	Μέγιστη στρεπτική τάση $\tau_{t,max}$	Θέση μέγιστης στρεπτικής τάσης	Πολική ροπή αντίστασης W_p	Ανηγμένη γωνία στροφής ϕ_1	Πολική ροπή αδράνειας J_p
Ορθογώνιο παραλλ/μμο $b \times h$ ($h > b$)	$\tau_{t,max} = \frac{M_t}{W_p}$	Στο μέσο της μεγάλης πλευράς (h)	$W_p = a \cdot b^2 \cdot h$	$\phi_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p} \cdot \frac{180}{\pi}$	$J_p = \beta \cdot b^3 \cdot h$
Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς a		Στα μέσα των πλευρών	$W_p = 0,077 \cdot a^3$		$J_p = 0,0385 \cdot a^4$
Έλλειψη με ημιάξονες α, β ($\alpha > \beta$)		Στην τομή του μικρού ημιάξονα με την έλλειψη	$W_p = \frac{\pi \cdot a \cdot \beta^2}{2}$		$J_p = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}$

24.5. Στρέψη λεπτότοιχων σωλήνων

Στην περίπτωση δοκού που έχει διατομή **κλειστού** πλαισίου μικρού πάχους (σχ. 47), αποδεικνύεται ότι: η μέγιστη στρεπτική τάση $\tau_{t,max}$ εμφανίζεται στο σημείο της εξωτερικής περιμέτρου της διατομής με το

μικρότερο πάχος (t_{min}) και δίνεται από τη σχέση (69) με:

$$W_p = 2 \cdot A_m \cdot t_{min} \quad (81)$$

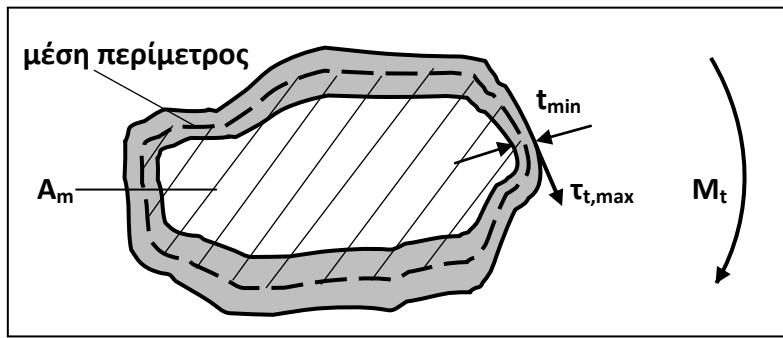
και η ανηγμένη γωνία στροφής ϕ_1 δίνεται από τη σχέση (72) με:

$$J_p = 4 \cdot \frac{A_m^2}{s} \cdot t_{min} \quad (82)$$

όπου: s το μήκος της μέσης περιμέτρου, δηλαδή της γραμμής που περνάει από τα μέσα του πάχους και A_m το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη μέση περίμετρο.

Όταν η δοκός έχει διατομή **ανοικτού** πλαισίου μικρού πάχους οι σχέσεις (81) και (82) γίνονται αντίστοιχα:

$$W_p = \frac{s \cdot t_{min}^2}{3} \quad (83) \quad \text{και} \quad J_p = \frac{s \cdot t_{min}^3}{3} \quad (84)$$



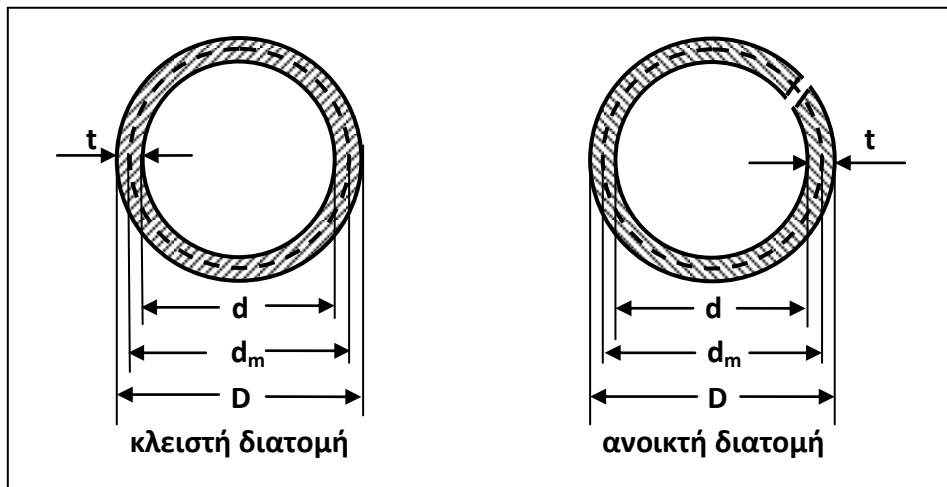
Σχήμα 47. Στρέψη λεπτότοιχης διατομής

Εφαρμογή

Αν $(\tau_{t,max})_{κλ}$, $(\tau_{t,max})_{αν}$ είναι οι μέγιστες στρεπτικές τάσεις δύο ίσων διατομών με σχήμα **κλειστού** και **ανοικτού** κυκλικού δακτυλίου αντίστοιχα, με εξωτερική διάμετρο **D** και εσωτερική **d**, σταθερού πάχους **t**, $(\phi_1)_{κλ}$, $(\phi_1)_{αν}$ οι ανηγμένες γωνίες στροφής τους αντίστοιχα και

$d_m = \frac{D+d}{2}$ η μέση διάμετρος για κάθε μια, αποδεικνύεται ότι (σχ.48):

$$\frac{(\tau_{t,max})_{αν}}{(\tau_{t,max})_{κλ}} = 6 \cdot \frac{d_m}{t} \quad (85) \quad \text{και} \quad \frac{(\phi_1)_{αν}}{(\phi_1)_{κλ}} = 12 \cdot \left(\frac{d_m}{t}\right)^2 \quad (86)$$



Σχήμα 48. Στρέψη κλειστής και ανοικτής λεπτότοιχης διατομής

24.6. Υπερστατικά προβλήματα στρέψης

Θεωρούμε ένα «καλώδιο» που αποτελείται από τον πυρήνα από υλικό **(1)** και από το περίβλημα από υλικό **(2)**. Το καλώδιο καταπονείται σε στρέψη από ένα σύστημα δύο αντίθετων ροπών που τα διανύσματά τους έχουν τη διεύθυνση του άξονα του καλωδίου (σχ.49).

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις στρεπτικές τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε υλικό.

Θεωρούμε μια τυχαία τομή **AA'** και εξετάζουμε την ισορροπία του αριστερού τμήματος του καλωδίου.

Αν ονομάσουμε M_{t1} και M_{t2} τις στρεπτικές ροπές που ασκούν οι δομικοί λίθοι των διατομών των δύο

δεξιών τμημάτων των δοκαριών στους δομικούς λίθους των διατομών των αριστερών τμημάτων αντίστοιχα, για να ισορροπεί το αριστερό τμήμα του καλωδίου, πρέπει:

$$-M_1 + M_{t1} + M_{t2} = 0 \Rightarrow M_{t1} + M_{t2} = M_1 \quad (\alpha)$$

Η σχέση (α) είναι η μοναδική σχέση στατικής ισορροπίας για το αριστερό τμήμα, αλλά περιέχει δύο άγνωστους, την M_{t1} και την M_{t2} . Η σχέση (α) επομένως δεν επαρκεί για την εύρεσή τους. Άρα το πρόβλημα είναι υπερστατικό. Δεδομένου όμως ότι ο πυρήνας είναι σταθερά στερωμένος μέσα στο περίβλημα, χωρίς να μπορεί να ολισθήσει μέσα σ' αυτό, πρέπει:

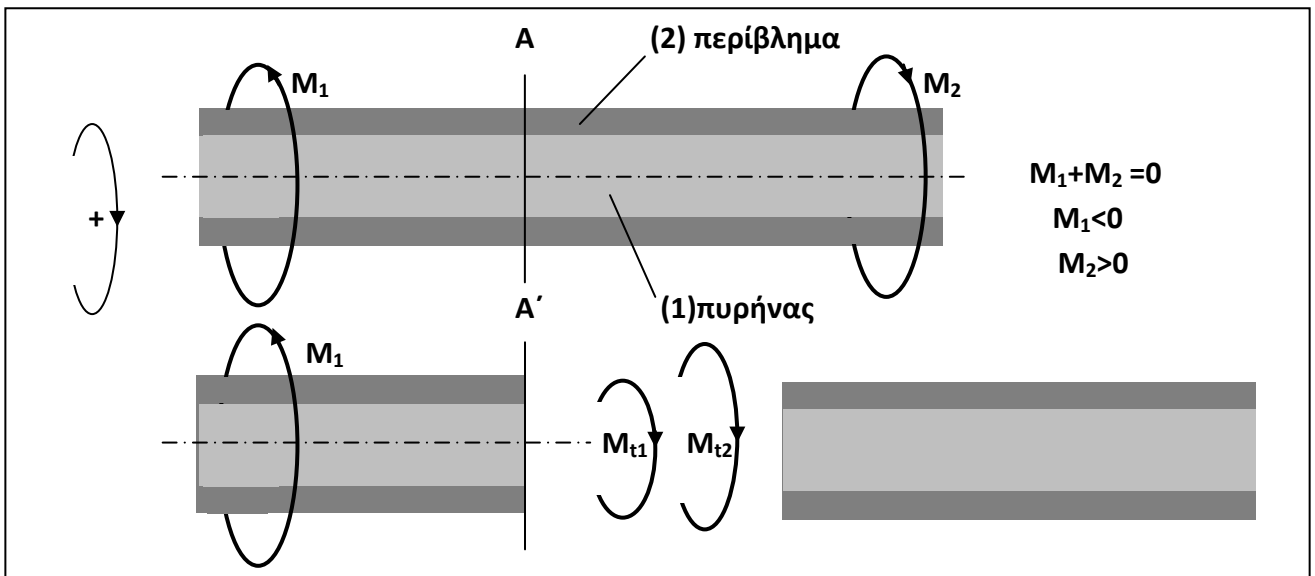
$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \frac{M_{t1}}{G_1 \cdot J_{P1}} \cdot l_1 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{M_{t2}}{G_2 \cdot J_{P2}} \cdot l_2 \cdot \frac{180}{\pi} \Rightarrow \frac{M_{t1}}{M_{t2}} = \frac{G_1 \cdot J_{P1}}{G_2 \cdot J_{P2}} \Rightarrow \frac{M_{t1}}{M_{t2}} = k \quad (\beta)$$

όπου θέσαμε $k = \frac{G_1 \cdot J_{P1}}{G_2 \cdot J_{P2}} \quad (87)$ και δεδομένου ότι $l_1 = l_2$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (α) και (β), μετά από πράξεις, βρίσκουμε:

$$M_{t1} = \frac{k}{k+1} \cdot M_1 \quad (88) \quad \text{και} \quad M_{t2} = \frac{1}{k+1} \cdot M_1 \quad (89)$$

Κατόπιν υπολογίζουμε την στρεπτική τάση σε κάθε υλικό από τη σχέση (69).



Σχήμα 49. Υπερστατικό πρόβλημα στρέψης

24.7. Ασκήσεις

1. Ο άξονας ενός μηχανήματος έχει μήκος **50 cm** και μεταφέρει ισχύ **140 KW** στις **1300 rpm**. Η γωνία στροφής των ακραίων διατομών δεν πρέπει να υπερβαίνει τις **0,8 °**.

Ο άξονας είναι κατασκευασμένος από χάλυβα με μέτρο ολίσθησης $G = 80 \text{ KN/mm}^2$ και επιτρεπόμενη τάση στρέψης $\tau_{\text{τεπ}} = 70 \text{ N/mm}^2$. Η κάμψη του άξονα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογιστεί η απαιτούμενη διάμετρος της διατομής του άξονα του μηχανήματος.

2. Ο ελικοφόρος άξονας πλοίου είναι κοίλος με εξωτερική διάμετρο **600 mm** και εσωτερική **500 mm** και μεταφέρει ισχύ **18000 KW** στις **120 rpm**. Ο Νηογνώμονας απαιτεί η μέγιστη γωνία στροφής των διατομών ανά μέτρο μήκους άξονα να μην υπερβαίνει τις **0,25°**.

Για το υλικό του άξονα δίνεται το μέτρο ολίσθησης **$G = 80 \text{ KN/mm}^2$** και η επιτρεπόμενη τάση στρέψης **$\tau_{\text{τεπ}} = 75 \text{ N/mm}^2$** . Η κάμψη του άξονα θεωρείται αμελητέα.

Να ελεγχθεί αν ο άξονας πληροί τις απαιτήσεις του Νηογνώμονα.

3. Αν αντικαταστήσουμε τον συμπαγή άξονα μιας μηχανής με ένα κοίλο από το ίδιο υλικό και προφανώς της ίδιας αντοχής σε στρέψη που οι διαμέτροι της διατομής του να έχουν λόγο **0,8**, πόση οικονομία βάρους θα έχουμε και πόσο αυξάνεται η δυστρεψία του άξονα.

4. Το τύμπανο του εργάτη της άγκυρας ενός πλοίου έχει διάμετρο **60 cm** και το βάρος της άγκυρας είναι **3 KN**. Η συστροφή του άξονα του τυμπάνου δεν πρέπει να υπερβαίνει τις **0,005°** και η ταχύτητα ανέλκυσης της άγκυρας είναι **15 m/min**.

Για το υλικό της ατράκτου δίνεται το μέτρο ολίσθησης **$G = 80 \text{ KN/mm}^2$** και η επιτρεπόμενη τάση στρέψης **$\tau_{\text{τεπ}} = 70 \text{ N/mm}^2$** . Η κάμψη του άξονα θεωρείται αμελητέα. Ο βαθμός απόδοσης του συστήματος ηλεκτροκινητήρα – εργάτη είναι **0,85**.

Να υπολογιστεί η απαιτούμενη διάμετρος του άξονα του τυμπάνου και η απαιτούμενη ισχύς του ηλεκτροκινητήρα που κινεί το τύμπανο.

5. Άξονας μήκους **110 cm**, κυκλικής διατομής, συνδέεται στο αριστερό του άκρο με τον άξονα κινητήρα που στρέφεται με **1300 rpm** και παίρνει ισχύ **480 KW** από αυτόν. Σε απόσταση **50 cm** από το αριστερό του άκρο φέρει οδοντωτό τροχό μέσω του οποίου δίνει ισχύ **220 KW** σε κάποιο μηχάνημα ενώ στο δεξιό του άκρο φέρει άλλον οδοντωτό τροχό μέσω του οποίου δίνει την υπόλοιπη ισχύ σε δεύτερο μηχάνημα. Το τμήμα του άξονα από το αριστερό του άκρο, όπου συνδέεται με τον άξονα του κινητήρα, μέχρι τον πρώτο οδοντωτό τροχό έχει διάμετρο **6 cm**, ενώ το υπόλοιπο έχει διάμετρο **5 cm**.

Για το υλικό του άξονα δίνονται το μέτρο ολίσθησης **$G=80 \text{ KN/mm}^2$** και η επιτρεπόμενη στρεπτική τάση **$\tau_{\text{τεπ}}=90 \text{ N/mm}^2$** . Η κάμψη του άξονα θεωρείται αμελητέα.

Να ελεγχθεί η αντοχή του άξονα και να υπολογιστεί η γωνία στροφής των ακραίων διατομών του.

6. Κοίλος άξονας μήκους **1,5 m** έχει διατομή κυκλικού δακτυλίου, με εξωτερική διάμετρο **6 cm**, και μεταφέρει ισχύ **60 KW** στις **850 rpm**.

Για το υλικό του άξονα δίνεται το μέτρο ολίσθησης **$G=80 \text{ KN/mm}^2$** και η επιτρεπόμενη στρεπτική τάση **$\tau_{\text{τεπ}}=85 \text{ N/mm}^2$** .

Να υπολογιστεί το απαιτούμενο πάχος της διατομής του και η γωνία στροφής των ακραίων διατομών του.

7. Άξονας από ορείχαλκο, κυκλικής διατομής διαμέτρου **8 cm** βρίσκεται σταθερά στερεωμένος μέσα σε χαλύβδινο σωλήνα πάχους **5 mm**. Για τα υλικά των δύο αξόνων δίνονται:

για τον ορείχαλκο: μέτρο ολίσθησης **$G_{\text{op}}=39 \text{ KN/mm}^2$** , επιτρεπόμενη στρεπτική τάση **$\tau_{\text{τεπ,op}}=40 \text{ N/mm}^2$**
για τον χάλυβα: μέτρο ολίσθησης **$G_{\text{x}}=82 \text{ KN/mm}^2$** , επιτρεπόμενη στρεπτική τάση **$\tau_{\text{τεπ,x}}=85 \text{ N/mm}^2$** .

Να υπολογιστεί η μέγιστη ισχύς που μπορεί να μεταφέρει το σύστημα των δύο αξόνων στις **900 rpm**.

25. Λυγισμός

25.1. Βασικές έννοιες και μεγέθη του λυγισμού

Ο **λυγισμός** είναι το φαινόμενο της καμπύλωσης του άξονα μιας δοκού (ή ράβδου), η οποία καταπονείται σε κεντρική αξονική θλίψη.

Ο λυγισμός είναι ένα πιθανολογικό φαινόμενο, η πιθανότητα εμφάνισης του οποίου εξαρτάται από το υλικό, τις διαστάσεις και τον τρόπο στήριξης της δοκού και το μέτρο του αξονικού θλιπτικού φορτίου.

Όταν το θλιπτικό φορτίο έχει μέτρο μικρότερο από μια ορισμένη τιμή, η οποία ονομάζεται **κρίσιμο φορτίο λυγισμού ($F_{κρ}$)**, δεν εμφανίζεται λυγισμός. Και αν ακόμη προκαλέσουμε κάποια καμπύλωση του άξονα της δοκού με μια στιγμιαία εγκάρσια δύναμη, ο άξονας επανέρχεται στην αρχική ευθύγραμμη θέση του, δηλαδή βρίσκεται σε μια κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας.

Αν όμως το μέτρο του θλιπτικού φορτίου υπερβεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, τότε, αν για οποιονδήποτε λόγο προκληθεί μια καμπύλωση του άξονα, αυτός δεν επανέρχεται στην αρχική ευθύγραμμη θέση του, αλλά παραμένει καμπυλωμένος. Τότε λέμε ότι έχουμε λυγισμό. Δηλαδή ο λυγισμός είναι μια κατάσταση ασταθούς ισορροπίας του άξονα. Όσο δε αυξάνει το μέτρο του θλιπτικού φορτίου, πέραν του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, τόσο αυξάνει η πιθανότητα εμφάνισης του λυγισμού. Θεωρητικά μπορούμε να διατηρήσουμε ευθύγραμμο τον άξονα της δοκού και με φορτίο μεγαλύτερο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, αν όμως αυτός καμπυλωθεί για οποιονδήποτε λόγο, είναι πλέον αδύνατο να τον επαναφέρουμε στην αρχική ευθύγραμμη θέση του.

Κάθε θλιπτική δύναμη προκαλεί μια αντίστοιχη θλιπτική τάση στο υλικό. Η τάση που προκαλείται όταν η θλιπτική δύναμη είναι ίση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, ονομάζεται **κρίσιμη τάση λυγισμού ($\sigma_{κρ}$)**.

$$\sigma_{κρ} = \frac{F_{κρ}}{A} \quad (90)$$

Άρα θα ισχύει:

25.2. Θεωρία Euler. (Ελαστικός λυγισμός)

Ο **Euler** μελέτησε το φαινόμενο του λυγισμού και υπολόγισε θεωρητικά την κρίσιμη τάση λυγισμού με την προϋπόθεση ότι αυτή δεν υπερβαίνει το όριο αναλογίας του υλικού, ώστε να ισχύει ο νόμος του **Hooke**, στον οποίο στηρίζονται όλοι οι υπολογισμοί. Γι αυτό και η θεωρία ονομάζεται και **ελαστικός λυγισμός**.

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τα συμπεράσματα και τις σχέσεις που προέκυψαν από τη θεωρία του **Euler**:

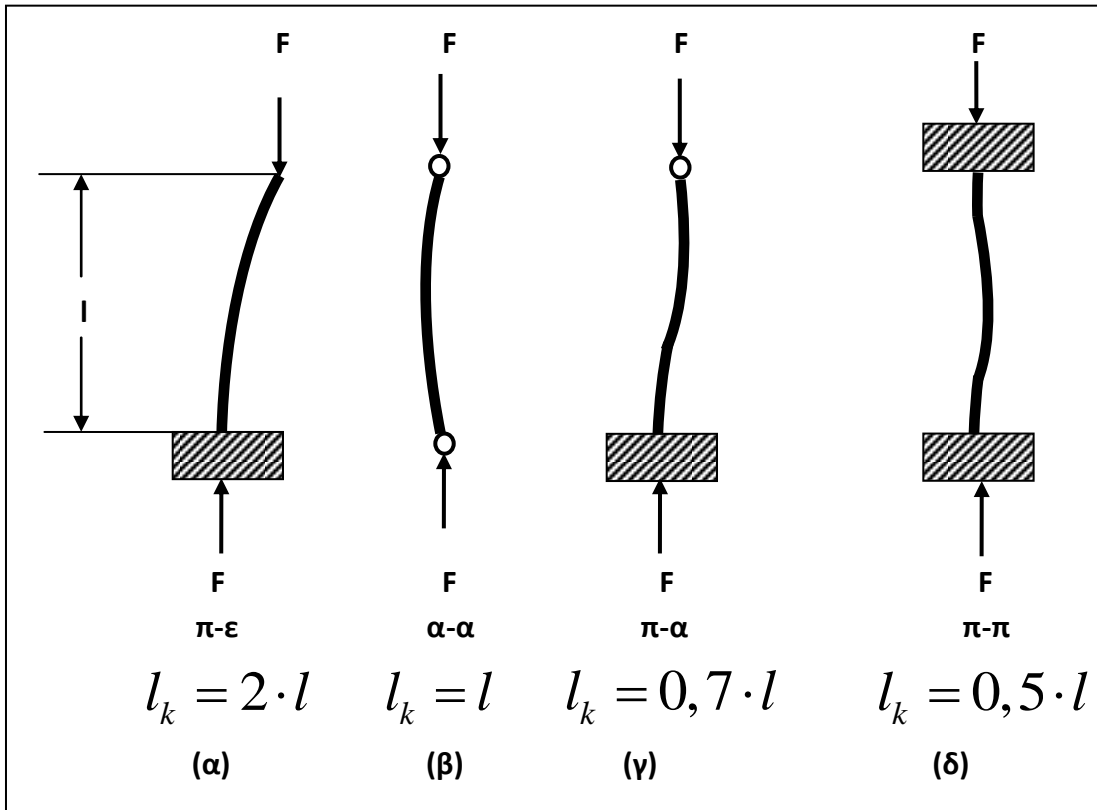
α. Μήκος λυγισμού l_k ονομάζεται ένα μέγεθος που εξαρτάται από το πραγματικό μήκος l της δοκού και τον τρόπο στήριξης αυτής. Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις στήριξης:

Αν δοκός είναι **πακτωμένη** στο ένα άκρο και **ελεύθερη** στο άλλο (**π-ε**) (σχ. 50α): $l_k = 2 \cdot l$ (91)

Αν η δοκός είναι **αρθρωτή** και στα δύο άκρα (**α-α**) (σχ.50β): $l_k = l$ (92)

Αν η δοκός είναι **πακτωμένη** στο ένα άκρο και **αρθρωτή** στο άλλο (**π-α**) (σχ. 50γ): $l_k = 0,7 \cdot l$ (93)

Αν η δοκός είναι **πακτωμένη** και στα δύο άκρα (**π-π**) (σχ. 50δ): $l_k = 0,5 \cdot l$ (94)



Σχήμα 50. Μήκος λυγισμού

Λυγηρότητα λ ονομάζεται ο λόγος:

$$\lambda = \frac{l_k}{i_{\min}} \quad (95)$$

όπου: i_{\min} η ελάχιστη αξονική ακτίνα αδράνειας της διατομής της δοκού.

Η κρίσιμη τάση λυγισμού δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (96)$$

με την προϋπόθεση ότι αυτή δεν υπερβαίνει το όριο αναλογίας σ_p του υλικού.

Συνθήκη αντοχής σε λυγισμό

Για να μην εμφανιστεί το φαινόμενο του λυγισμού σε μια δοκό που καταπονείται σε κεντρική μονοαξονική θλίψη πρέπει η θλιπτική τάση να μην υπερβαίνει μια επιτρεπόμενη τιμή, η οποία είναι ο λόγος της κρίσιμης τάσης λυγισμού προς τον συντελεστή ασφάλειας σε λυγισμό S_k , ο οποίος καθορίζεται από εμπειρικά τεχνικά και μη δεδομένα.

$$\sigma_{\theta} \leq \frac{\sigma_{\kappa\rho}}{S_k} \quad (97)$$

Η σχέση (97) αποτελεί τη **συνθήκη αντοχής σε λυγισμό** μιας δοκού. Η έκφραση «συνθήκη αντοχής σε λυγισμό» είναι καταχρηστική και εννοεί τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε να αποκλειστεί τελείως η πιθανότητα εμφάνισης λυγισμού της δοκού.

Αν η θλιπτική τάση οφείλεται στη δράση της θλιπτικής δύναμης F τότε η σχέση (97) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{κρ}}{S_k} \quad (98)$$

25.3. Μελέτη λυγισμού χωρίς την ισχύ του νόμου του Hooke (πλαστικός λυγισμός)

Η κρίσιμη τάση λυγισμού που δίνεται από την σχέση (96) υπολογίστηκε με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού.

Αν όμως δεν συμβαίνει αυτό και η κρίσιμη τάση λυγισμού, που προκύπτει από τη σχέση (96) υπερβαίνει το όριο αναλογίας του υλικού, σημαίνει ότι δεν ισχύει η σχέση (96), άρα δεν είναι εφικτός ο θεωρητικός υπολογισμός της κρίσιμης τάσης λυγισμού.

Ο **Tetmajer** υπολόγισε πειραματικά την κρίσιμη τάση λυγισμού στην περίπτωση αυτή και κατέληξε στον εμπειρικό τύπο:

$$\sigma_{κρ} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 \quad (99)$$

όπου **a, b, c** : τρεις συντελεστές, (**συντελεστές Tetmajer**) και υπολογίζονται πειραματικά για κάθε υλικό.

Η κρίσιμη τάση υπολογισμού που προκύπτει από τη σχέση (99) υπερβαίνει το όριο αναλογίας.

Αν όμως υπερβαίνει και το όριο διαρροής σ_s του υλικού, τότε η δοκός κινδυνεύει από διαρροή σε θλίψη πριν εμφανιστεί πιθανότητα λυγισμού, οπότε στην περίπτωση αυτή η δοκός ελέγχεται μόνο σε θλίψη.

Από τις σχέσεις (96) και (99) προκύπτει ότι σε κάθε τιμή της κρίσιμης τάσης λυγισμού $\sigma_{κρ}$ αντιστοιχεί και μια τιμή της λυγηρότητας λ .

Η λυγηρότητα λ_p που προκύπτει από τη σχέση (96) όταν η κρίσιμη τάση λυγισμού είναι ίση με το όριο αναλογίας σ_p του υλικού, ονομάζεται **οριακή ελαστική λυγηρότητα** και είναι:

$$\lambda_p = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (100)$$

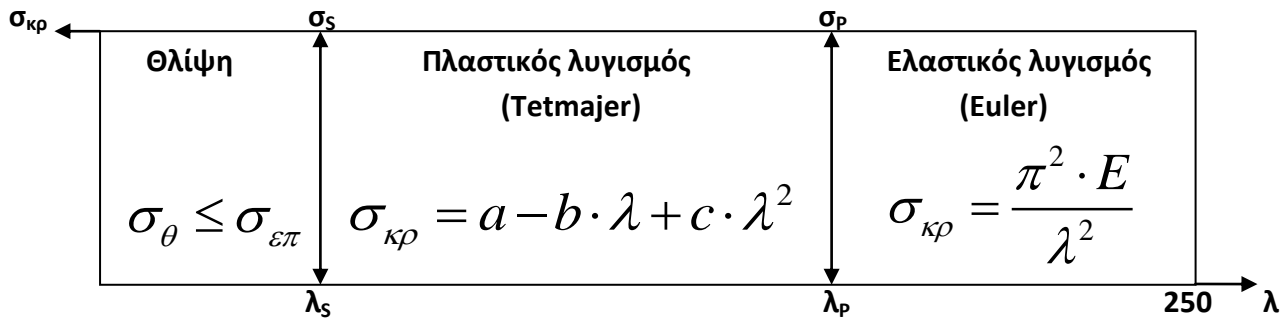
Η λυγηρότητα λ_s που προκύπτει από τη σχέση (99) όταν η κρίσιμη τάση λυγισμού είναι ίση με το όριο διαρροής σ_s του υλικού, ονομάζεται **οριακή πλαστική λυγηρότητα** και θεωρώντας αμελητέο τον συντελεστή **c** (δεδομένου ότι η τιμή του είναι πολύ μικρή σε σχέση με τον συντελεστή **b**), είναι:

$$\lambda_s \cong \frac{a - \sigma_s}{b} \quad (101)$$

Από τις σχέσεις (96) και (99) είναι προφανές ότι η λυγηρότητα λ ακολουθεί αντίστροφη πορεία αύξησης από την κρίσιμη τάση λυγισμού $\sigma_{κρ}$. Δοκοί με λυγηρότητα μεγαλύτερη του **250** είναι πρακτικά άχρηστοι γιατί έχουν πολύ μικρή δυνατότητα αξονικής θλιπτικής φόρτισης, λόγω μικρής κρίσιμης τάσης.

Τα παραπάνω περιέχονται συνοπτικά στον πίνακα 9 που ακολουθεί.

Πίνακας 9. Υπολογισμός κρίσιμης τάσης λυγισμού



25.4. Μεθοδολογία μελέτης δοκού σε λυγισμό.

1. Υπολογίζουμε το μήκος λυγισμού l_k από το μήκος της δοκού και το είδος στήριξής της:

$$l_k = 2 \cdot l \quad \text{για } \pi\text{-}\epsilon$$

$$l_k = l \quad \text{για } \alpha\text{-}\alpha$$

$$l_k = 0,7 \cdot l \quad \text{για } \pi\text{-}\alpha$$

$$l_k = 0,5 \cdot l \quad \text{για } \pi\text{-}\pi$$

2. Υπολογίζουμε το εμβαδόν της διατομής A και την ελάχιστη ακτίνα αδράνειας i_{\min} της διατομής

3. Υπολογίζουμε την λυγηρότητα της δοκού:

$$\lambda = \frac{l_k}{i_{\min}}$$

4. Υπολογίζουμε την κρίσιμη τάση λυγισμού σ_{kp}

$$\alpha. \text{ Av } \lambda_p \leq \lambda \implies \sigma_{kp} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

$$\beta. \text{ Av } \lambda_s \leq \lambda < \lambda_p \implies \sigma_{kp} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

$$\gamma. \text{ Av } \lambda \leq \lambda_s \implies \sigma_{kp} \geq \sigma_s \quad \text{Δεν υπάρχει πιθανότητα λυγισμού}$$

5. Για τις περιπτώσεις **3α** και **3β** ελέγχουμε την συνθήκη αντοχής σε λυγισμό:

$$\sigma_{\theta} \leq \frac{\sigma_{kp}}{S_k} \quad \text{και αν η τάση οφείλεται στο θλιπτικό φορτίο } F, \quad \frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{kp}}{S_k}$$

Για την περίπτωση **3γ** η δοκός ελέγχεται μόνο σε θλίψη: $\sigma_{\theta} \leq \sigma_{\epsilon\pi}$ ή αντίστοιχα $\frac{F}{A} \leq \sigma_{\epsilon\pi}$

25.5. Μέθοδος των συντελεστών ω

Στην συνθήκη αντοχής σε λυγισμό, ο δεύτερος όρος $\frac{\sigma_{κρ}}{S_k}$ ενέχει θέση επιτρεπόμενης τάσης, οπότε μπορούμε να τον θεωρήσουμε σαν κλάσμα της επιτρεπόμενης τάσης σε θλίψη, δηλαδή σαν λόγο της επιτρεπόμενης τάσης σε θλίψη προς ένα συντελεστή ω μεγαλύτερο της μονάδας. Οπότε:

$$\boxed{\frac{\sigma_{κρ}}{S_k} = \frac{\sigma_{επ}}{\omega}} \quad (102)$$

οπότε, αν αντικαταστήσουμε το δεύτερο μέλος της σχέσης (98) από το δεύτερο μέλος της σχέσης (102)

έχουμε:

$$\boxed{\sigma_{\theta} \leq \frac{\sigma_{επ}}{\omega}} \quad (103)$$

Για κάθε υλικό και για συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή ασφάλειας σε λυγισμό, μπορούμε, ακολουθώντας τη μεθοδολογία μελέτης σε λυγισμό, να υπολογίζουμε από τη σχέση (102) τον συντελεστή ω για κάθε

τιμή της λυγηρότητας λ :

$$\boxed{\omega = \frac{\sigma_{επ}}{\sigma_{κρ}} \cdot S_k} \quad (104)$$

και να κατασκευάσουμε πίνακες λ - ω για όλα τα υλικά και για δεδομένο συντελεστή ασφάλειας S_k .

Στον πίνακα 10 δίνονται οι συντελεστές λυγισμού ω για διάφορα υλικά κατά **DIN**.

Με τη μέθοδο των συντελεστών ω απλοποιείται η μεθοδολογία μελέτης της αντοχής σε λυγισμό:

Τα βήματα 1,2,3 είναι ίδια με τη μεθοδολογία της παραγράφου 25.4.

4. Βρίσκουμε τον συντελεστή ω που αντιστοιχεί στη λυγηρότητα που βρήκαμε στο βήμα 3, από τους πίνακες των συντελεστών ω για το υλικό της δοκού.

5. Εφαρμόζουμε τη σχέση (103) ή για $\sigma_{\theta} = \frac{F}{A}$ τη σχέση: $\frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{επ}}{\omega}$

25.5. Προβλήματα λυγισμού

Τα προβλήματα αντοχής σε λυγισμό είναι τριών ειδών:

α. Προβλήματα ελέγχου σε λυγισμό: Γνωρίζουμε το υλικό και τις διαστάσεις της δοκού, τον τρόπο στήριξής της, τον συντελεστή ασφάλειας σε λυγισμό και το ασκούμενο θλιπτικό φορτίο και θέλουμε να ελέγξουμε αν η δοκός κινδυνεύει ή όχι σε λυγισμό.

Εφαρμόζουμε τα βήματα 1,2,3,4 και ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη αντοχής σε λυγισμό (βήμα 5).

β. Προβλήματα ικανότητας φόρτισης: Γνωρίζουμε το υλικό και τις διαστάσεις της δοκού, τον τρόπο στήριξής της και τον συντελεστή ασφάλειας σε λυγισμό και θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του θλιπτικού φορτίου ώστε η δοκός να μην κινδυνεύσει σε λυγισμό.

Εφαρμόζουμε τα βήματα 1,2,3,4 και στο βήμα 5 λύνουμε τη συνθήκη αντοχής ως προς το μέτρο του φορτίου.

γ. Προβλήματα διαστασιολόγησης: Γνωρίζουμε το υλικό και το μήκος της ράβδου, τον τρόπο στήριξής της και το ασκούμενο φορτίο και θέλουμε να υπολογίσουμε τις μικρότερες απαιτούμενες διαστάσεις της διατομής της ώστε η δοκός να μην κινδυνεύσει σε λυγισμό.

Υποθέτουμε κάποιες διαστάσεις για τη διατομή (από εμπειρικά κυρίως δεδομένα) και ελέγχουμε τη διατομή που επιλέξαμε όπως στην περίπτωση (α). Αν ο έλεγχος αποβεί αρνητικός, παίρνουμε μεγαλύτερες διαστάσεις και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο. Όσο ο έλεγχος αποβαίνει αρνητικός επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρις ότου βρούμε μια διατομή για την οποία ο έλεγχος αποβαίνει θετικός. Αυτή είναι και η ζητούμενη.

Αν ο έλεγχος για την αρχική επιλογή των διαστάσεων αποβεί θετικός, η διατομή είναι κατάλληλη. Αν θέλουμε να πάρουμε πιο μικρή διατομή (συνήθως για λόγους οικονομίας όγκου, βάρους ή κόστους της κατασκευής), επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο για την αμέσως μικρότερη διατομή και όσο ο έλεγχος αποβαίνει θετικός, συνεχίζουμε να μικραίνουμε τη διατομή, μέχρις ότου καταλήξουμε σε αρνητικό έλεγχο για κάποια. Η αμέσως μεγαλύτερη απ' αυτήν διατομή είναι η ζητούμενη.

Πίνακας 10. Συντελεστές λυγισμού ω για διάφορα υλικά

Λυγηρότητα $\lambda = \frac{l_k}{i_{\min}}$	Χάλυβες (DIN 4114)		Ξύλο (DIN 1052)	Οπλισμένο Σκυρόδεμα (DIN 1045)
	St 33 & St 37	St 52		
20	1,04	1,06	1,08	1,00
30	1,08	1,11	1,15	1,00
40	1,14	1,19	1,26	1,00
50	1,21	1,28	1,42	1,00
60	1,30	1,41	1,62	1,04
70	1,41	1,58	1,88	1,08
80	1,55	1,79	2,20	1,24
90	1,71	2,05	2,58	1,42
100	1,90	2,53	3,00	1,62
110	2,11	3,06	3,63	1,91
120	2,43	3,65	4,32	2,28
130	2,85	4,28	5,07	2,64
140	3,30	4,96	5,88	3,00
150	3,80	5,70	6,75	-
160	4,34	6,48	7,68	-
170	4,88	7,32	8,67	-
180	5,47	8,21	9,72	-
190	6,10	9,14	10,83	-
200	6,75	10,13	12,00	-
210	7,45	-	-	-
220	8,17	-	-	-
230	8,93	-	-	-
240	9,73	-	-	-
250	10,55	-	-	-

Για ενδιάμεσες τιμές της λυγηρότητας λ ο συντελεστής λυγισμού ω βρίσκεται με γραμμική παρεμβολή

25.6. Ασκήσεις

1. Να συγκριθεί η λυγηρότητα μιας δοκού κυκλικής διατομής με τη λυγηρότητα μιας δοκού με διατομή κυκλικού δακτυλίου με λόγο διαμέτρων (εσωτερική προς εξωτερική) ίσο με $\kappa < 1$, που έχουν το ίδιο εμβαδόν διατομής, το ίδιο μήκος και τον ίδιο τρόπο στήριξης.
2. Ξύλινο υποσύλωμα ορθγωνικής διατομής με διαστάσεις **150 x 80 mm**, ύψους **4 m**, είναι πακτωμένο στο κάτω άκρο και αρθρωτό στο πάνω.
Για το ξύλο δίνονται το μέτρο ελαστικότητας $E = 12,5 \text{ KN/mm}^2$,
οι συντελεστές Tetmajer $a = 30 \text{ N/mm}^2$, $b = 0,18 \text{ N/mm}^2$, $c = 0$, οι οριακές λυγηρότητες $\lambda_p = 100$, $\lambda_s = 2$.
Ο συντελεστής ασφάλειας σε λυγισμό δίνεται $S_k = 1,6$.
α. Να υπολογιστεί το μέγιστο φορτίο που μπορεί να σηκώσει με ασφάλεια.
β. Πόσο φορτίο μπορεί να σηκώσει αν το αρθρώσουμε σε απόσταση ίση με τα $2/3$ του ύψους του από το κάτω άκρο;
3. Χαλύβδινο υποσύλωμα ύψους **2 m**, με διατομή διπλού πλατύπελμου ταυ (IPB), είναι πακτωμένο στο κάτω άκρο και ελεύθερο στο πάνω και σηκώνει βάρος **700 KN**.
Για το χάλυβα δίνονται:
μέτρο ελαστικότητας $E = 206 \text{ KN/mm}^2$, συντελεστές Tetmajer $a = 285 \text{ N/mm}^2$, $b = 0,82 \text{ N/mm}^2$, $c = 0$,
οριακές λυγηρότητες $\lambda_p = 100$, $\lambda_s = 60$. Ο συντελεστής ασφάλειας σε λυγισμό δίνεται $S_k = 2,2$.
Να επιλεγεί το ελάχιστο απαιτούμενο μέγεθος της διατομής του, ώστε να μην αντιμετωπίσει κίνδυνο λυγισμού.
4. Χαλύβδινος σωλήνας νερού με εξωτερική διάμετρο **20 mm** και πάχος **0,8 mm**, έχει μήκος **1,5 m** σε θερμοκρασία **20 °C** και είναι πακτωμένος στα δύο του άκρα σε δύο ακλόνητα σημεία.
Για τον χάλυβα δίνονται:
το μέτρο ελαστικότητας $E = 206 \text{ KN/mm}^2$, ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$
οι συντελεστές Tetmajer $a = 285 \text{ N/mm}^2$, $b = 0,82 \text{ N/mm}^2$, $c = 0$, οι οριακές λυγηρότητες $\lambda_p = 100$,
 $\lambda_s = 60$. Ο συντελεστής ασφάλειας σε λυγισμό δίνεται $S_k = 1,5$.
Να υπολογιστεί η μέγιστη θερμοκρασία του νερού ώστε ο σωλήνας να μην αντιμετωπίσει πρόβλημα λυγισμού.
5. Η κολώνα του διπλανού σχήματος είναι κατασκευασμένη από χάλυβα εμπορίου, έχει ύψος **3 m**, διατομή τετραγωνικού πλαισίου (κοιλοδοκός), με πλευρά **120 mm** και πάχος **10 mm**, και είναι πακτωμένη στη βάση της. Η δύναμη που της ασκεί ο επίτονος είναι τέτοια ώστε η κολώνα να καταπονείται σε αξονική θλίψη.
Για το υλικό της κολώνας δίνονται το μέτρο ελαστικότητας $E = 180 \text{ N/mm}^2$ και η επιτρεπόμενη τάση σε θλίψη $\sigma_{\text{επ}} = 110 \text{ N/mm}^2$.
Να γίνει έλεγχος της κολώνας σε λυγισμό με τη μέθοδο ω και να υπολογιστεί η διάμετρος της διατομής του επίτονου, αν αυτός είναι συρματοσχοίνο με επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\text{επ}} = 120 \text{ N/mm}^2$.

