Ορμή - Διατήρηση Ορμής - Ώθηση

(Ο-1)

Όταν ένα σωμάτιο μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$, τότε λέμε ότι αυτό έχει ορμή

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

(δηλ. χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vec{p}$ για την ορμή)

Επειδή η μάζα είναι πάντα θετική, η ορμή έχει <u>πάντα</u> την <u>ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα</u>. Προφανώς, η ορμή $\vec{p}$ είναι <u>διανυσματικό μέγεθος</u>.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες στο χώρο:

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) \quad \left[= (p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k})\right]$$

και επειδή $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, τότε προφανώς

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z.$$

Θεωρώντας το δεύτερο νόμο του Newton και επειδή μελετάμε μέχρι στιγμής συστήματα όπου η μάζα τους παραμένει σταθερή με το χρόνο, βλέπουμε ότι:

$$\Sigma\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{(\text{επειδή } m=\text{σταθ})}{=} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Δηλ. ο δεύτερος νόμος του Newton μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της ορμής ως εξής:

$$\boxed{\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

(Για την ακρίβεια αυτή είναι και η γενικότερη διατύπωση του $2^{ου}$ νόμου, η οποία ισχύει και για συστήματα μεταβλητής μάζας.)

Με λόγια:

Το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε ένα σωμάτιο, είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του με το χρόνο.

•) Η ορμή συστήματος σωματιδίων

Όταν έχουμε ένα σύστημα σωματιδίων, όπου το καθένα έχει ορμή $\vec{P}_i$, δηλ. έχουμε ορμές $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots$ (μία ορμή για κάθε σωμάτιο) τότε λέμε ότι η ολική ορμή του συστήματος είναι:

$$\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots$$

και αν $\vec{P}_{ολ} = (P_{ολx}, P_{ολy}, P_{ολz})$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τότε:

$$P_{ολx} = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots$$

$$P_{ολy} = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots$$

$$P_{ολz} = P_{1z} + P_{2y} + P_{3z} + \dots$$

·) Διατήρηση της Ορμής

As θεωρήσουμε ένα σύστημα n τον αριθμό σωματιδίων, όπου το καθένα έχει μάζα $m_1, m_2, \dots m_n$ και ταχύτητα $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots \vec{U}_n$, αντίστοιχα.

Τις δυνάμεις που ασκούνται γενικά σε ένα σύστημα, βοηθά να τις χωρίσουμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες όσον αφορά τη μελέτη της ορμής: Σε Εσωτερικές και Εξωτερικές

· Εσωτερικές είναι οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωματιδίων του συστήματος.

Εξωτερικές είναι οι δυνάμεις που ασκούνται από κάποιον άλλο φορέα εκτός συστήματος.

Προσοχή

Πρώτα αναγνωρίζουμε ποιο είναι το σύστημα και μετά αποφασίζουμε ποιες δυνάμεις είναι εσωτερικές και ποιες εξωτερικές. Έτσι, π.χ. Για το σύστημα Γη-Σελήνη, εσωτερικές είναι οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούν η Γη στη Σελήνη και η Σελήνη στη Γη, ενώ η βαρυτική έλξη που τους ασκεί ο Ήλιος είναι εξωτερική. Όμως, για το σύστημα Γη-Σελήνη-Ήλιος, όλες οι προαναφερόμενες δυνάμεις είναι εσωτερικές!!

Αν σε ένα σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε αυτό ονομάζεται Απομονωμένο Σύστημα.

Ισχύει το εξής: (Αρχή Διατήρησης της Ορμής)

Όταν το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε ένα σύστημα είναι ίσο με μηδέν (δηλ. όταν μιλάμε για ένα απομονωμένο σύστημα), η ολική ορμή του συστήματος είναι σταθερή

Θα το δείξουμε για δύο σώματα αυτό.

Έστω $\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ τότε:

$$\frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt}.$$ όμως πιο

πριν είδαμε ότι: $\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_1 \rightarrow$ (δύναμη που ασκείται στο σώμα 1) και αντίστοιχα

$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_2 \rightarrow$ (δύναμη που ασκείται στο σώμα 2)

Άρα

$$\frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Όμως αν οι δυνάμεις είναι μόνο εσωτερικές τότε $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Άρα

$$\frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{P}_{ολ} = σταθ}.$$

Πολύ εύκολα δείχνεται ότι η Αρχή διατήρησης της Ορμής, ισχύει και για περισσότερα από δύο σώματα.

Παράδειγμα (S.O.S)

Έστω όπλο μάζας $m_o = 3kg$ το οποίο ρίχνει σφαίρα μάζας $m_σ = 5g$ η οποία κινείται με ταχύτητα $υ_σ = 300 m/s$. Το όπλο μπορεί να ανακρούσει ελεύθερα. Με πόση ταχύτητα θα ανακρούσει;

Λύση

Θεωρούμε ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα. Τότε η ολική ορμή του συστήματος όπλο-σφαίρα, διατηρείται σταθερή. Αρχικά, το σύστημα είναι ακίνητο, οπότε

$$\vec{P}_{ολ αρχ} = 0.$$

Άρα και $\vec{P}_{ολ τελ} = 0$!!

όπως $\vec{P}_{ολικά} = m_o\vec{U}_o + m_σ\vec{U}_σ$ όπου
$\vec{U}_o$ είναι η ταχύτητα ανάκρουσης. Επειδή όλη η κίνηση γίνεται σε ευθύγραμμη διεύθυνση (το θεωρούμε για ευκολία) μπορούμε να γράψουμε:

$$m_oU_o + m_σU_σ = 0 \Rightarrow$$

$$m_oU_o = -m_σU_σ \Rightarrow$$

$$U_o = -\frac{m_σ}{m_o}U_σ$$ → δείχνει ότι έχουμε ανάκρουση

όπως περιμέναμε, η ταχύτητα του όπλου είναι αντίθετης φοράς από την ταχύτητα της σφαίρας (δηλ. έχουμε ανάκρουση).
Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές, τώρα:

$$U_o = -\frac{0{,}005\,kg}{3\,kg}\cdot 300\,m/s = \boxed{-0{,}5\,m/s}$$

κατά τη διάρκεια της αποχώρησης της σφαίρας, αυτή έχει κινητική ενέργεια:

$$K_σ = \frac{1}{2}m_σU_σ^2 = 225\,J\ \left[=\frac{1}{2}(0{,}005\,kg)(300\,m/s)^2\right]$$

ενώ το όπλο:

$$K_o = \frac{1}{2}m_oU_o^2 = 0{,}375\,J\ \left[=\frac{1}{2}\,3\,kg\,(0{,}5\,m/s)^2\right]$$

Αν συγκρίνουμε τις δύο κινητικές ενέργειες (0-7)

έχουμε ότι

$$\frac{K_o}{K_\sigma} = \frac{\frac{1}{2} m_o u_o^2}{\frac{1}{2} m_\sigma u_\sigma^2} = \frac{m_o u_o^2}{m_\sigma u_\sigma^2} =$$

$$= \frac{m_o \left(-\frac{m_\sigma}{m_o} u_\sigma\right)^2}{m_\sigma u_\sigma^2} = \frac{m_o \frac{m_\sigma^2}{m_o^2} \cancel{u_\sigma^2}}{m_\sigma \cancel{u_\sigma^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{m_o} m_\sigma^2}{m_o^{\cancel{2}} \cancel{m_\sigma}} = \boxed{\frac{m_\sigma}{m_o}}$$

1) Ώθηση

Ξεκινάμε με την θεώρηση σταθερής δύναμης: Αν μια σταθερή δύναμη ασκείται σε ένα σώμα για χρονικό διάστημα Δt, έστω από t_1 ως t_2, (δηλαδή $\Delta t = t_2 - t_1$) τότε:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow d\vec{P} = \vec{F} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \Rightarrow (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) = \vec{F} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

διότι $\vec{F}$=σταθ

$$\Rightarrow \vec{P}_2-\vec{P}_1 = \vec{F}\,(t_2-t_1) = \vec{F}\Delta t$$

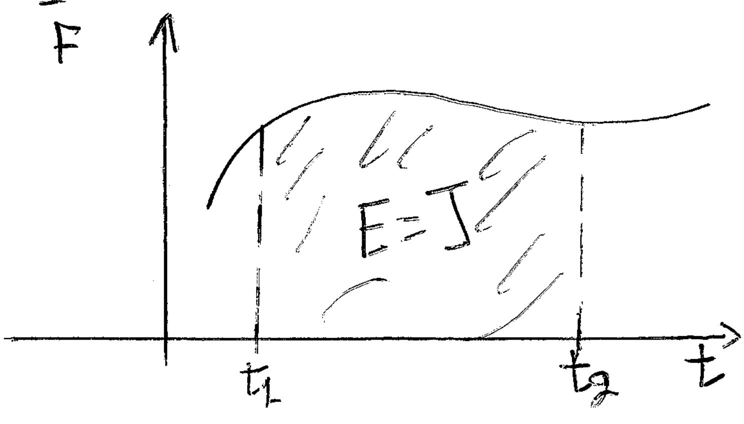
Το γινόμενο $\vec{F}\Delta t$ το οποίο ισούται από ότι βλέπουμε με τη μεταβολή της ορμής του σώματος ονομάζεται <u>ώθηση της δύναμης $\vec{F}$</u>. Τη συμβολίζουμε με $\vec{J}$.

$$\boxed{\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \vec{F}(t_2-t_1) = \vec{P}_2-\vec{P}_1 = \Delta\vec{P}}$$

Σε περίπτωση που η δύναμη δεν είναι σταθερή, τότε προφανώς

$$\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt \Rightarrow \boxed{\vec{P}_2-\vec{P}_1 = \int_{t_2}^{t_1}\vec{F}\,dt = \vec{J}}$$

Στη <u>μία διάσταση</u> τώρα, από το διάγραμμα Δύναμης-Χρόνου, η ώθηση είναι ίση με το εμβαδό μεταξύ του γραφήματος της δύναμης και του άξονα των χρόνων, από τη χρονική στιγμή t_1 ως t_2.



Αν γνωρίζουμε την ώθηση, (δηλ. την αρχική και τελική ορμή) και το χρονικό διάστημα για το οποίο διήρκησε η μεταβολή, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της <u>μέσης δύναμης</u>: Δηλ. <u>σταθερή αυτή δύναμη</u> που αν ασκηθεί στο σώμα για το ίδιο χρονικό διάστημα Δt, θα προκαλέσει την ίδια μεταβολή ορμής:

$$\boxed{\vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{J} = \vec{F}_{\mu}(t_2 - t_1) = \vec{F}_{\mu}\Delta t}$$

Τόσο η ώθηση όσο και ορμή είναι προφανώς διανυσματικά μεγέθη, οπότε στις δύο διαστάσεις π.χ.:

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt = P_{2x} - P_{1x} = m v_{2x} - m v_{1x}$$

$$J_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt = P_{2y} - P_{1y} = m v_{2y} - m v_{1y}$$

όπου

$$\vec{J} = (J_x, J_y), \quad \vec{P} = (P_x, P_y), \quad \vec{F} = (F_x, F_y).$$

Παράδειγμα (5.0.5)

Η μπάλα μάζας $m = 0,4\ kg$ κατευθύνεται προς τοίχο ο οποίος είναι κατακόρυφος ενώ η μπάλα κινείται οριζόντια. Όταν κατευθύνεται προς τον τοίχο έχει ταχύτητα $v_1 = 30\ m/s$ ενώ αναπηδά με ταχύτητα $v_2 = 20\ m/s$. α) Ποια η ώθηση της δύναμης που ασκείται από τον τοίχο; β) Ποια η μέση δύναμη που ασκείται στην μπάλα αν αυτή βρίσκεται σε επαφή με τον τοίχο για $t = 0,01\ s$.

Λύση

α) Θεωρούμε θετική κατεύθυνση αυτήν της αναπήδησης. Τότε

αρνητική διότι η v είναι προς το τοίχο

$$P_1 = mv_1 = (0,4\,kg)(-30\,m/s) = -12\ kg\,m/s$$

ενώ $P_2 = mv_2 = (0,4)\underbrace{(20\ m/s)}_{} = 8\ kg\,m/s$

θετική διότι είναι στην κατεύθυνση της αναπήδησης.

Άρα

$$J = P_2 - P_1 = mv_2 - mv_1 = 8\,kg\,m/s - (-12\,kg\,m/s) =$$

$$= (8 + 12)\,kg\,m/s = \boxed{20\,kg\,m/s}$$

Τότε

β) $J = F_m \Delta t \Rightarrow F_m = \frac{J}{\Delta t} = \frac{20\,kg\,m/s}{0,01\,s} = \boxed{2000\,N}$