Δυναμική Ενέργεια

Διατήρηση της Ενέργειας

1) Πεδίο Δυνάμεων

Ως πεδίο δυνάμεως ονομάζουμε το χώρο αυτό μέσα στον οποίο ασκείται κατάλληλη δύναμη σε κατάλληλο υπόθεμα που έχουμε φέρει σε κάποιο σημείο του.

Παράδειγμα:

1) Βαρυτικό Πεδίο: → ασκεί βαρυτική δύναμη σε μάζες

2) Ηλεκτρικό Πεδίο: → ασκεί ηλεκτρική δύναμη σε φορτία

3) Μαγνητικό Πεδίο: → ασκεί μαγνητική δύναμη σε κινούμενα φορτία.

Ορισμένα πεδία δυνάμεων έχουν την ιδιότητα να είναι συντηρητικά (αστρόβιλα). Για αυτά τα πεδία, το έργο της δύναμης του πεδίου, είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση. Λόγω αυτού έχει νόημα να ορίσουμε την έννοια της Δυναμικής Ενέργειας, η οποία είναι ιδιότητα του συστήματος σώμα-πεδίο, αλλά συνήθως την προσδίδουμε στο σώμα, και σχετίζεται με τη θέση του σώματος (υποθέματος δηλ.) μέσα στο πεδίο.

Για να ορίσουμε τη δυναμική ενέργεια, υπολογίζουμε το έργο που πρέπει να καταναλώσουμε, έτσι ώστε να μετακινήσουμε το υπόθεμα από μια θέση (1) σε μια θέση (2), κινούμενοι <u>ΕΝΑΝΤΙΑ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ</u>. Δηλαδή, ασκώντας κάθε φορά δύναμη που είναι <u>αντίθετη</u> (ακριβώς αντίθετη) στη <u>δύναμη του πεδίου</u>. (με άλλα λόγια θέλουμε να κινείται το σώμα, αλλά να μη επιταχύνεται). Λέμε τότε, ότι αυτό το έργο, είναι ίσο με τη <u>Διαφορά Δυναμικής Ενέργειας</u> μεταξύ των σημείων (1) και (2).

<u>Δηλαδή</u>

$$U_2 - U_1 = W_F(1\to2)$$

U_2: δυναμική ενέργεια στο σημείο 2

U_1: δυναμική ενέργεια στο σημείο 1

$W_F(1\to2)$: έργο της F πάνω, πάμε από το σημείο (1) στο σημείο (2).

όπου F είναι η δύναμη που ασκούμε εμείς, η οποία είναι πάντα ίση και αντίθετη με τη δύναμη του πεδίου!!

κάποιες φορές τη δυναμική ενέργεια τη συμβολίζουμε με $E_Δ$.

Όμως η F είναι αντίθετη της <u>δύναμης</u> του πεδίου, άρα $W_F(1\to2) = -W_{F_{πεδίου}}(1\to2)$ [δηλ. είναι το αντίθετο του έργου αν το σώμα κινούνταν από το σημείο (1) στο σημείο (2) μόνο κάτω από την επίδραση της δύναμης του πεδίου].

Όμως από το Θεώρημα έργου ενέργειας:

$$W_{F_{πεδίου}}(1\to2) = K_2 - K_1 \Rightarrow$$

$$-W_{F_{πεδίου}}(1\to2) = \boxed{K_1 - K_2} = W_F(1\to2).$$

Άρα

$$U_2 - U_1 = \underbrace{k_1}_{\text{κινητική ενέργεια στο σημείο 1}} - \underbrace{k_2}_{\text{κινητική ενέργεια στο σημείο 2.}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_2 + k_2 = U_1 + k_1}$$

Δηλαδή το άθροισμα σε μια θέση δυναμικής και κινητικής ενέργειας διατηρείται. Το άθροισμα αυτό το ονομάζουμε Μηχανική Ενέργεια στη συγκεκριμένη θέση. Άρα

$$\boxed{U + K = E_M = U + \frac{1}{2} m v^2 = \text{σταθ}}$$

Η Μηχανική ενέργεια διατηρείται, όταν οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι οι ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ. Όλα όσα αναφέραμε πιο πριν μπορούμε να τα καταλάβουμε πιο καλά με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Το πιο σύνηθες είναι το βαρυτικό πεδίο.

Βαρυτικό Πεδίο κοντά στην Επιφάνεια της Γης.

κοντά στην επιφάνεια της γης η βαρυτική δύναμη δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{W}_g = m\vec{g}$$ και δείχνει κάθετα προς τα κάτω. Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό και μπορούμε να ορίσουμε δυναμική ενέργεια. Εδώ η δυναμική ενέργεια ερμηνεύεται ως εξής: Για να υψώσουμε ένα σώμα σε ύψος h από την επιφάνεια της γης, κινούμενοι ενάντια στο βάρος, πρέπει να ασκούμε σε κάθε στιγμή δύναμη $\vec{F}$ ίση σε μέτρο και αντίθετη του βάρους (είναι στην πραγματικότητα μια οριακή διαδικασία) Δηλ $\vec{F} = -\vec{W}$.

Το έργο αυτής της δύναμης είναι τότε mgh και λέμε ότι αυτή είναι η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύτηκε και η οποία θα αποδοθεί με τη μορφή κινητικής ενέργειας όταν το σώμα αφεθεί να πέσει, κινούμενο μόνο με την επίδραση του βάρους του. Οπότε για το βαρυτικό πεδίο έχουμε ότι αν ένα σώμα κινηθεί από ένα σημείο ύψους h_1 σε ένα σημείο ύψους h_2 τότε

$$mgh_2 - mgh_1 = \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{1}{2}mu_2^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{mgh_2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = mgh_1 + \frac{1}{2}mu_1^2} = σταθ$$

Η Μηχανική ενέργεια ενός σώματος μάζας m σε ύψος h από την επιφάνεια της γης δίνεται λοιπόν από τον τύπο:

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2}mu^2 + mgh}$$

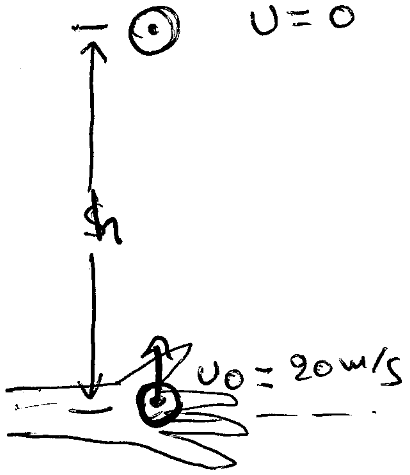
όπου u είναι η ταχύτητα που έχει το σώμα σε αυτό το ύψος.

Παράδειγμα (S.O.S)

Πετάμε μπάλα προς τα πάνω, μάζας $m = 0{,}15\,kg$ με αρχική ταχύτητα $u_0 = 20\,m/s$. Η κίνηση είναι κατακόρυφη και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Σε ποιο ύψος θα φτάσει η μπάλα;

Λύση

Παρόλο που συνήθως θεωρούμε την επιφάνεια της γης ως σημείο από το οποίο μετράμε το ύψος h, μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο, αρκεί να μην το αλλάξουμε κατά την επίλυση του προβλήματος. Εδώ, βολεύει να θεωρήσουμε το χέρι μας. Έτσι στο χέρι μας $h=0$ και επομένως μπορούμε να πούμε ότι η μπάλα εκεί έχει μόνο κινητική ενέργεια. Άρα όπως φαίνεται στο σχήμα, έχουμε:



Σημείο 2 (υ=0 διότι εκεί σταματά)

Σημείο 1

Σημείο 1: $E_{M1} = \frac{1}{2} m υ_0^2 = 30\ Joule$

Σημείο 2: $E_{M2} = mgh = 30\ Joule$ (λόγω του ότι $E_{M1} = E_{M2}$!!)

Άρα $h = \frac{30\ Joule}{mg} \approx \boxed{20,4\ m}$

Προσέξτε το εξής: μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα, χωρίς αντικατάσταση από την αρχή.

Δηλ:

Αφού $E_{M1} = E_{M2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} υ_0^2 = \cancel{m} g h \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{h = \frac{υ_0^2}{2g}}$ που είναι ο ίδιος τύπος που θα βρίσκαμε αν προσπαθούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα, θεωρώντας ότι το σώμα κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $g = 9,81 m/s^2$ και με αρχική ταχύτητα $υ_0$ και με τη χρήση των τύπων: $υ = υ_0 - gt$ και $h = υ_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Ένα άλλο ερώτημα που μπορούμε να θέσουμε είναι το εξής: Σε ποιο ύψος η μπάλα θα έχει ταχύτητα $υ_α = 8\ m/s$;

Απάντηση

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ισχύει ότι

$$E_μ = \frac{1}{2} m υ_α^2 + mgh_α = 30\,J \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(0,15)\,8^2 + mgh_α = 30\,J \Rightarrow$$

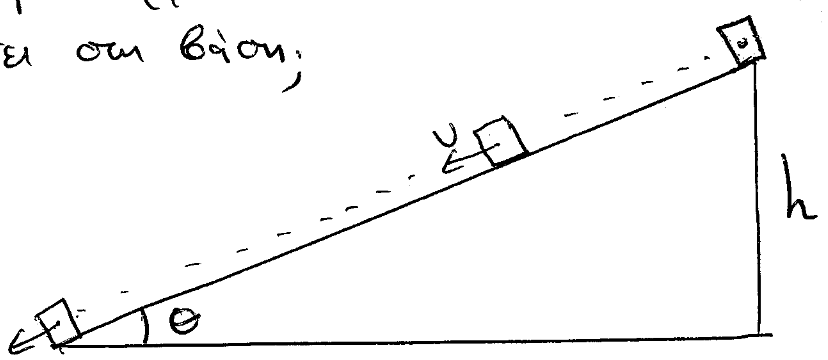
$$4,8\,J + mgh_α = 30\,J \Rightarrow$$

$$mgh_α = (30 - 4,8)\,J = 25,2\,J \Rightarrow$$

$$h_α = \frac{25,2}{mg} \approx \boxed{17,13\,m}$$

Παράδειγμα (S.O.S)

Κεκλιμένο επίπεδο: Σώμα μάζας m βρίσκεται στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου ύψους h και γωνίας θ. Ξεκινά με αρχική ταχύτητα υο. Με τι ταχύτητα θα φτάσει στη βάση;



Λύση

Στο σημείο της κορυφής έχει

$$E_{μ_{κορ}} = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

ενώ στην βάση έχει μόνο κινητική ενέργεια

και

$$E_{μ_{βάση}} = K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Άρα:

$$\cancel{m}gh + \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2gh}$$

Αν $v_0 = 0$. (δηλ. αρχικά είναι ακίνητο, τότε:

$$v^2 = 2gh \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Παράδειγμα (S.O.S)

Ελατήριο: Από τη μελέτη που κάναμε για το έργο της δύναμης του ελατηρίου στη σελίδα E5 καταλαβαίνουμε ότι όταν ένα ελατήριο στο οποίο είναι δεμένη μάζα m μετατοπίζεται από τη θέση ισορροπίας κατά x, τότε σε αυτό αντιστοιχούμε δυναμική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} k x^2$$

και αντιστοιχούμε μηχανική ενέργεια,

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2}$$

κι η μάζα του σώματος που είναι δεμένο στο ελατήριο

↳ ταχύτητα όταν η μετατόπιση είναι x.

η οποία διατηρείται. Έτσι για παράδειγμα στη θέση ισορροπίας όλη η μηχανική ενέργεια είναι κινητική (διότι $x=0$ εκεί), ενώ στα άκρα όπου $v=0$, όλη η μηχανική ενέργεια είναι δυναμική. Δηλ

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2}_{E_M \text{ σε τυχαία θέση}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{\iota\sigma}^2}_{E_M \text{ στη θέση ισορροπίας}} = \underbrace{\frac{1}{2} k X_M^2}_{E_M \text{ στη μέγιστη απομάκρυνση (είτε έκταση είτε συμπίεση)}}$$

Παράδειγμα (S.O.S)

Σώμα μάζας $m = 0{,}2\,kg$ είναι προσδεμένο σε ελατήριο και όλο το σύστημα είναι οριζόντιο, ενώ το σώμα κινείται χωρίς τριβές. Το ελατήριο έχει σταθερά $k = 5\,N/m$. Εκτείνουμε το σύστημα κατά $X_\varepsilon = 0{,}1\,m$ και στη συνέχεια το αφήνουμε να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα. Πόση είναι η ταχύτητα όταν $x = 0{,}08m$.

Λύση

Θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:
Στη θέση Έκτασης έχουμε μόνο δυναμική ενέργεια (αφού δεν δίνουμε αρχική ταχύτητα).
Άρα

$$E_{M_{εκτ}} = \frac{1}{2}kx_τ^2$$

Ενώ στην τυχαία θέση $x_α = 0{,}08$ θα έχουμε ταυτόχρονα δυναμική και κινητική ενέργεια. Άρα

$$E_{M_α} = \frac{1}{2}mυ_α^2 + \frac{1}{2}kx_α^2$$

Πρέπει

$$E_{M_{εκτ}} = E_{M_α} \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}}kx_τ^2 = \cancel{\frac{1}{2}}mυ_α^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kx_α^2 \Leftrightarrow$$

$$kx_τ^2 = mυ_α^2 + kx_α^2 \Leftrightarrow mυ_α^2 = kx_τ^2 - kx_α^2 =$$

$$= 5(0{,}1)^2 - 5(0{,}08)^2 = 0{,}05J - 0{,}032J = 0{,}018J$$

Άρα

$$υ_α^2 = \frac{0{,}018}{0{,}2} = 0{,}09\frac{m^2}{s^2} \Leftrightarrow \boxed{υ_α = \pm 0{,}3 m/s}$$

Το ± σημαίνει ότι θα έχει αυτή την ταχύτητα στο ίδιο σημείο όχι μόνο όταν κινείται προς τη θέση ισορροπίας, αλλά και όταν από τη θέση ισορροπίας θα κινείται προς το άκρο και θα απέχει από αυτήν πάλι 0,08m!!

~ . ~