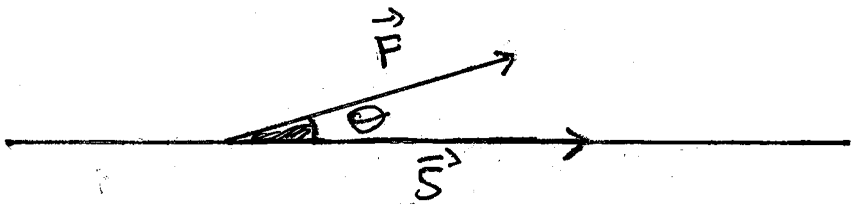
Έργο και κινητική ενέργεια

Έργο δύναμης

1) Αν $\vec{F}$ = σταθερή, τότε

$$W = F \cdot S \cdot \cos\theta$$

όπου W ~ έργο της δύναμης αν μετατοπίσει το σημείο εφαρμογής της κατά διάστημα S. Ενώ θ είναι η γωνία που σχηματίζει η $\vec{F}$ με το διάνυσμα της μετατόπισης, $\vec{S}$.



Με άλλα λόγια

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

Το W είναι μονόμετρο μέγεθος.

Αν $\vec{F} \neq 0$ και $\vec{S} \neq 0$, αλλά $\theta = 90^\circ$ τότε $\vec{F} \cdot \vec{S} = 0$ και $W = 0$. Δηλαδή, η δύναμη δεν παράγει έργο, αν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κάθετα στη διεύθυνση της.

Μονάδες Έργου (S.I)

$$\boxed{1 \text{ Joule} = 1N \cdot 1m}$$

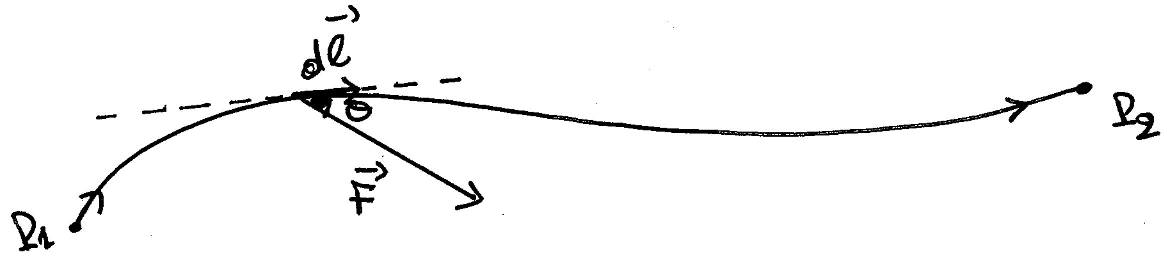
Το συμβολίζουμε με 1J.

2) Αν η $\vec{F}$ είναι μεταβλητή, τότε

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel}\, d\ell =$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} |\vec{F}| \cos\theta\, d\ell$$

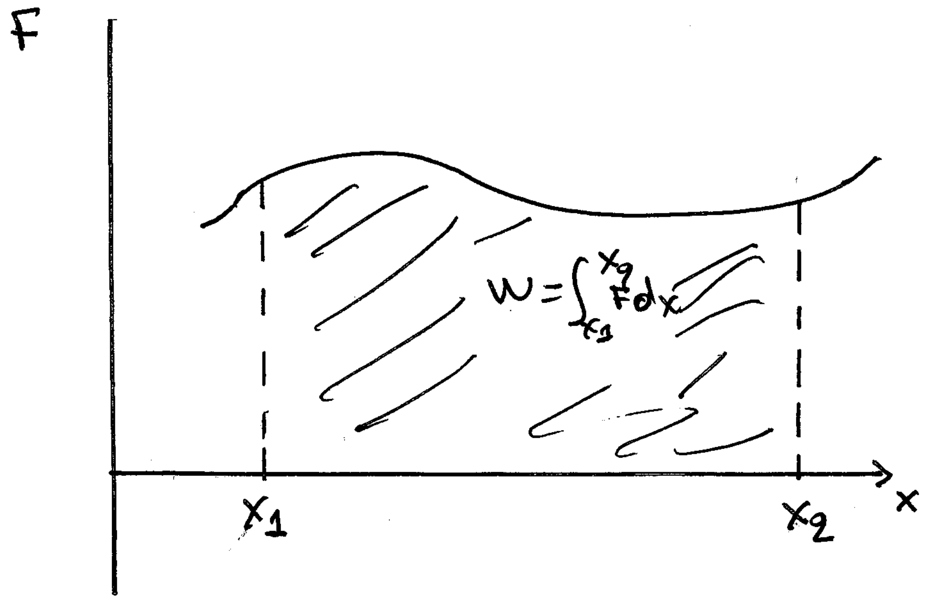
όπου μιλάμε για δύναμη που κινείται από το σημείο P_1 στο σημείο P_2, ενώ $d\vec{\ell}$ είναι το διάνυσμα της στοιχειώδους μετατόπισης και $F_{\parallel}$ το μέτρο της συνιστώσας της δύναμης που είναι παράλληλη στη μετατόπιση.



Σε περίπτωση που μιλάμε για ευθύγραμμη κίνηση και με τη δύναμη να κατευθύνεται κατά μήκος της γραμμής κίνησης, αλλά με μεταβαλλόμενο μέτρο τότε η σχέση δίνεται από τον τύπο

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

για κίνηση μεταξύ των σημείων x_1 και x_2.
Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε το γράφημα $F = F(x)$

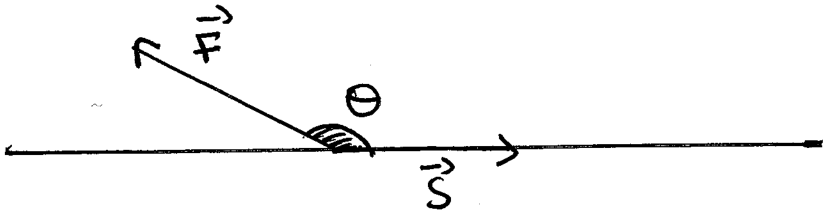


το έργο δίνεται από το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των x και μεταξύ των σημείων x_1 και x_2.

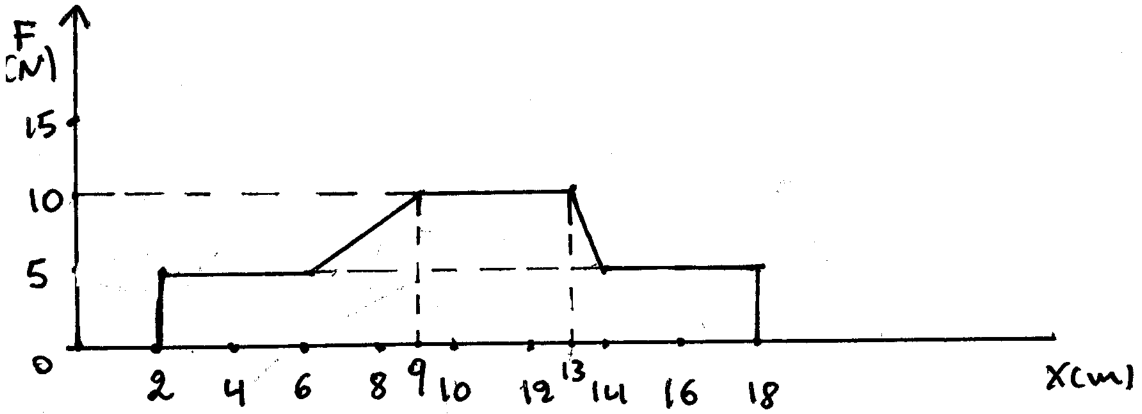
Παρατήρηση

Το έργο μπορεί να είναι και **αρνητικό**!!

π.χ.



Άσκηση



Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης.

Παράδειγμα (S.O.S)

Ελατήριο

Στην περίπτωση ενός ελατηρίου που μεταβάλλεται το μήκος του κατά Δx, από τη θέση ισορροπίας τότε η δύναμη δίνεται από τον τύπο

δύναμη στη γραμμική περιοχή

$$F = -k\Delta x$$

k: σταθερά ελατηρίου.

όπου το (-) υποδηλώνει ότι η δύναμη είναι δύναμη επαναφοράς

Για ευκολία θα γράφουμε

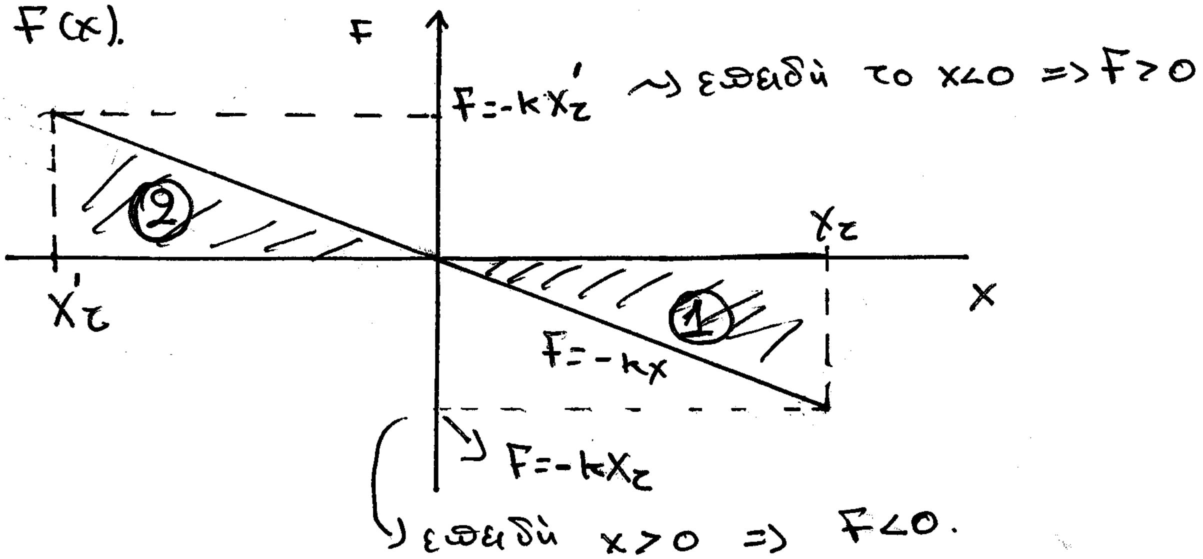
$$F = -kx$$

όπου θα εννοούμε ότι το x είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας.

Τότε, για μετατόπιση από $x=0$ ως $x=x_\tau$ θα έχουμε:

$$W = \int_0^{x_\tau} F\,dx = -\int_0^{x_\tau} kx\,dx = -k\int_0^{x_\tau} x\,dx = \boxed{-\frac{1}{2}kx_\tau^2}$$

Το έργο αυτό, επειδή η δύναμη είναι γραμμική, δίνεται από το σχετικό εμβαδό στο γράφημα $F = F(x)$.



Παρατηρείστε ότι το εμβαδόν του τριγώνου 1 είναι

$$E_1 = W_F = \frac{1}{2}(\text{βάση})(\text{ύψος}) = \frac{1}{2}x_\tau\cdot(-kx_\tau) = -\frac{1}{2}kx_\tau^2.$$

Επίσης, παρατηρείστε ότι και για το τρίγωνο 2 ισχύει

$$E_2 = W_F = \frac{1}{2}(x'_\tau)\cdot(-kx'_\tau) = -\frac{1}{2}k{x'_\tau}^2 \quad \text{και}$$

όπου παρόλο $x'_\tau<0 \Rightarrow (x'_\tau)^2>0$ άρα $E_2=W_F<0$.

Τέλος, αν η αρχική επιμήκυνση είναι x_1 και η τελική x_2, τότε:

$$W_{x_1x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \boxed{\frac{1}{2}k\underline{\underline{x_1}}^2 - \frac{1}{2}k\underline{\underline{x_2}}^2}$$

Εφαρμογή

·) Αν $x_1=0$ (δηλ. αρχικό σημείο, το σημείο ισορροπίας)

Τότε

$$W_{0x_2} = -\frac{1}{2}kx_2^2 < 0 \quad \left(= W(0 \to x_2)\right)$$

·) Αν $x_2=0$ (δηλ. τελικό σημείο, το σημείο ισορροπίας)

Τότε $$W_{x_1 0} = \frac{1}{2}kx_1^2 > 0 \left(= W(x_1 \to 0)\right)$$

Συμπέρασμα

Αν απομακρυνόμαστε από τη θέση ισορροπίας το έργο της δύναμης είναι αρνητικό, ενώ αν προσεγγίζουμε (κινούμαστε προς, δηλ.) τη θέση ισορροπίας το έργο της δύναμης είναι θετικό!!

•) Κινητική Ενέργεια

Αν ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα v, τότε λέμε ότι έχει κινητική ενέργεια

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

Πολλές φορές τη συμβολίζουμε και με το γράμμα E_K

•) Θεώρημα Έργου - Ενέργειας

Όταν σε σώμα που κινείται ασκείται μη-μηδενική δύναμη, τότε αυτό επιταχύνεται και άρα μεταβάλλεται η ταχύτητα του και επομένως η κινητική του ενέργεια. Θα δείξουμε τη σχέση μεταξύ του έργου της δύναμης αυτής και της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος. Για ευκολία θα θεωρήσουμε μία διάσταση και κινητό σώμα μάζας m πάνω στο οποίο ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να αυξάνεται η ταχύτητα. Τότε, προφανώς, αν $F = |\vec{F}|$

$$F = ma, \quad \text{όπου } a = |\vec{a}|$$

↳ επιτάχυνση

εφόσον $F = \text{σταθ}$, τότε και $a = \text{σταθ.}$ και

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2} m v_{τελ}^2 - \frac{1}{2} m v_{αρχ}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_{τελ}^2 - v_{αρχ}^2 \right).$$

όμως $U_{τελ} = U_{αρχ} + a\,t$

t → χρόνος που διαρκεί η μεταβολή της ταχύτητας.

<u>Άρα</u>

$$U^2_{τελ} = (U_{αρχ} + at)^2 = U^2_{αρχ} + a^2t^2 + 2\,a\,t\,U_{αρχ}$$

και

$$U^2_{τελ} - U^2_{αρχ} = \underbrace{\cancel{U^2_{αρχ}} + a^2t^2 + 2atU_{αρχ}}_{U^2_{τελ}} - \cancel{U^2_{αρχ}} =$$

$$= a^2t^2 + 2U_{αρχ}\,at =$$

$$= a\,(2tU_{αρχ} + at^2) =$$

$$= \boxed{2a\left(U_{αρχ}t + \tfrac{1}{2}at^2\right)}$$

Άρα

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}m\left[2a\left(U_{αρχ}t + \tfrac{1}{2}at^2\right)\right] =$$

$$= \underbrace{ma}_{F}\;\underbrace{\left(U_{αρχ}t + \tfrac{1}{2}at^2\right)}_{S} =$$

S → διάστημα που διανύθηκε

$$= F \cdot S = \boxed{W_F}$$

→ έργο της δύναμης!!

Άρα,

$$\boxed{K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F}$$

"S.O.S",!

> Αν η δύναμη μειώνει την κινητική ενέργεια τότε το έργο είναι αρνητικό !!

Δείξαμε μόνο μια ειδική περίπτωση, ενός αποτελέσματος που λέει:

> Το έργο που παράγεται από τη συνισταμένη εξωτερική δύναμη επί ενός σωματίου ισούται με την μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σωματίου.
>
> $$\boxed{W_{τοτ} = K_2 - K_1 = \Delta K}$$

Θεώρημα Έργου - Ενέργειας.

Ισχύς

Η ισχύς είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής του έργου

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

(παράγωγος έργου ως προς το χρόνο)

↳ στιγμιαία ισχύς

Ορίζουμε και τη μέση ισχύ: (Ε9)

$$P_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$ όπου $\Delta W \rightsquigarrow$ μεταβολή έργου

$\Delta t \rightsquigarrow$ χρόνος που διήρκησε η μεταβολή.

<u>Μονάδες</u> (S.I): 1 Watt (1W)

$$1W = 1J/1s$$

Συνήθως είναι και ο <u>ίππος</u> (hp)

$$1hp = 746W = 0{,}746kW$$

Δηλ $\boxed{1hp \simeq \frac{3}{4}kW}$

Μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

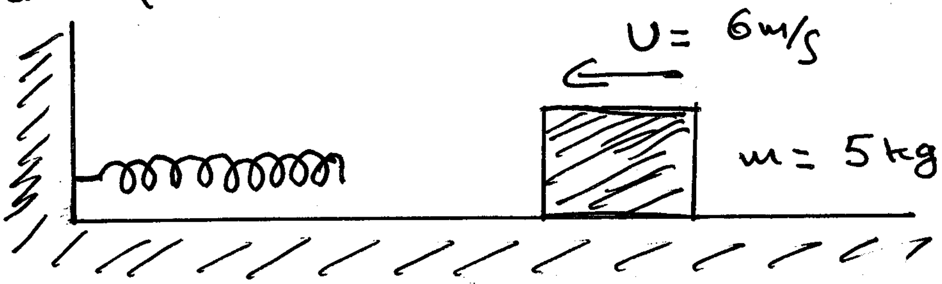
$\vec{v}$ ↳ στιγμιαία ταχύτητα

Άρα σε <u>μια διάσταση</u> και για <u>F = σταθ</u>

$$\boxed{P = Fv}$$

Παράδειγμα (S.O.S)

Κύβος μάζας $m = 5\,kg$ κινείται με ταχύτητα $6\,m/s$ κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας χωρίς τριβή προς την κατεύθυνση ενός ελατηρίου σταθεράς $k = 500\,N/m$ που είναι προσδεμένο σε τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος κατά το οποίο θα συμπιεστεί το ελατήριο.



Λύση

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F$$

όπου επειδή θα σταματήσει το σώμα στο μέγιστο μήκος που θα συμπιεστεί το ελατήριο, θα έχουμε $υ_{τελ} = 0$. Άρα $K_{τελ} = 0$ και

$$-K_{αρχ} = W_F$$

Από το παράδειγμα στη σελίδα E4 έχουμε βρει ότι για τη δύναμη του ελατηρίου

$$W_F = -\frac{1}{2} k x_{τελ}^2$$ (διότι η αρχική μετατόπιση είναι 0 εδώ)

Άρα

$$\cancel{+}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} m υ_{αρχ}^2 = \cancel{+}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} k \cdot x_{τελ}^2 \Rightarrow$$

$$m υ_{αρχ}^2 = k \cdot x_{τελ}^2 \Rightarrow$$

$$x_{τελ}^2 = \frac{m υ_{αρχ}^2}{k} \Rightarrow$$

$$x_{τελ} = \frac{5 (6)^2}{500} = \frac{5 \cdot 36}{500} m^2 =$$

$$= \frac{18\cancel{0}}{50\cancel{0}} m^2 = 0{,}36 m^2$$

οπότε $\boxed{x = 0{,}6 m}$ (για την ακρίβεια $x = \pm 0{,}6 m$)

Παράδειγμα

Σε ελατήριο που βρίσκεται σε οριζόντια θέση είναι προσδεμένη μάζα $m = 5 kg$

Το ελατήριο έχει σταθερά $k = 500\ N/m$. (E 12)

Για μετατόπιση $x_1 = +0,6m$ έχουμε $U_1 = 8 m/s$.

Σε ποια θέση είναι η ταχύτητα του ίση με $U_2 = 6\ m/s$;

Λύση

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα έργου - ενέργειας

$$K_2 - K_1 = W_F = \frac{1}{2}k\underline{\underline{x_1}}^2 - \frac{1}{2}k\underline{\underline{x_2}}^2 \Rightarrow$$

$$K_2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = K_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}mU_2^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kx_2^2 = \cancel{\frac{1}{2}}mU_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$5U_2^2 + 500x_2^2 = 5 \cdot 8^2 + 500 \cdot (0,6)^2 \Rightarrow$$

$$5U_2^2 + 500x_2^2 = (320 + 180)\,J =$$

$$= 500\,J \Rightarrow$$

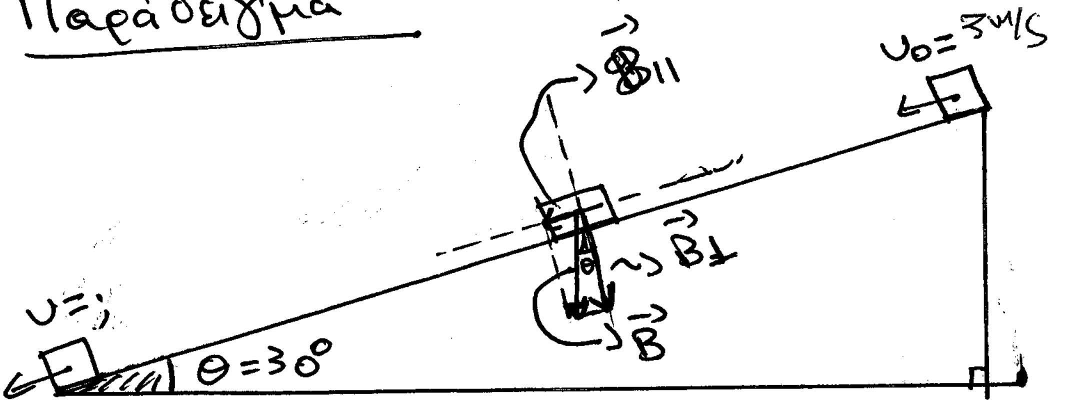
$$U_2^2 + 100x_2^2 = 100 \Rightarrow$$

$$6^2 + 100x_2^2 = 100 \Rightarrow$$

$$100x_2^2 = 100 - 36 = 64\,J \Rightarrow$$

$$x_2^2 = 0,64\,m^2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \pm 0,8m} \; !!$$

Παράδειγμα



Σε κεκλιμένο επίπεδο ύψους $h = 3\,m$, στην κορυφή του, βρίσκεται σώμα μάζας $m = 2\,kg$, το οποίο έχει αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 3\,m/s$.

Με τι ταχύτητα θα φτάσει στη βάση;
($g = 9{,}81\,m/s^2$)

Λύση

Στο σώμα, κατά μήκος της κίνησής του, ασκείται η παράλληλη συνιστώσα του βάρους:

$$|\vec{B}_{\parallel}| = |\vec{B}|\sin\theta \Rightarrow B_{\parallel} = |\vec{B}_{\parallel}| = B\sin\theta = \boxed{mg\sin\theta}$$

(Η $\vec{B}_{\perp}$ δεν παράγει έργο!!)

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για αυτή τη δύναμη:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F$. Επειδή η $B_{\parallel}$ είναι σταθερή τότε $W_F = |B_{\parallel}| \cdot S$ όπου S το μήκος του κεκλ. επιπέδου. Από το σχήμα $S = \dfrac{h}{\sin\theta}$ άρα

$$W_F = mg\sin\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} = \boxed{mgh}$$

E14

Άρα $W_F = (2 \cdot 9,81 \cdot 3)\,J = 58,86\,J$

Θ.Μ.Κ.Ε

$$\frac{1}{2} m \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ταχύτητα} \\ \text{στη βάση}}}{u^2} - \frac{1}{2} m u_0^2 = 58,86\,J \Rightarrow$$

S.O.S

ή $\frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = mgh \Rightarrow$

$\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} u_0^2 = gh \Rightarrow$

$u^2 = u_0^2 + 2gh$ ⊗

$$u^2 - u_0^2 = 58,86 \Rightarrow$$

$$u^2 = 58,86 + u_0^2 = 58,86 + 9 = 67,86\,m^2/s^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u \approx 8,24\,m/s}$$

⊗ Δηλ. το u είναι ανεξάρτητο και της μάζας!