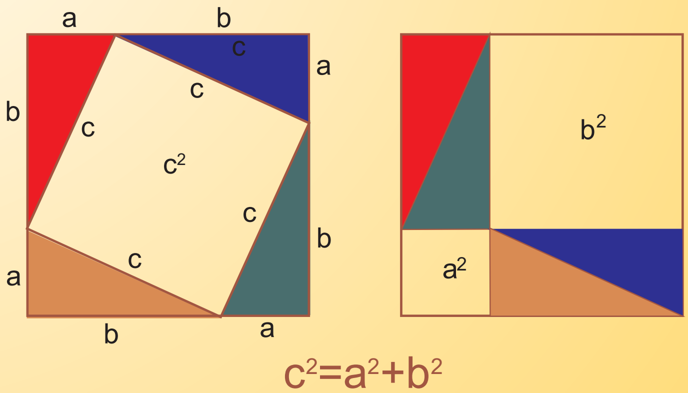
Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

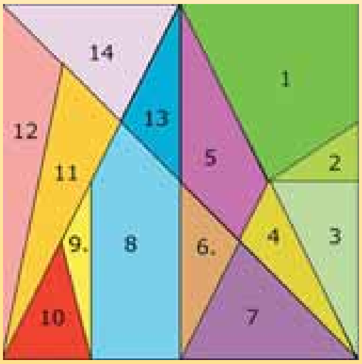
Ευκλείδης Α΄ 123

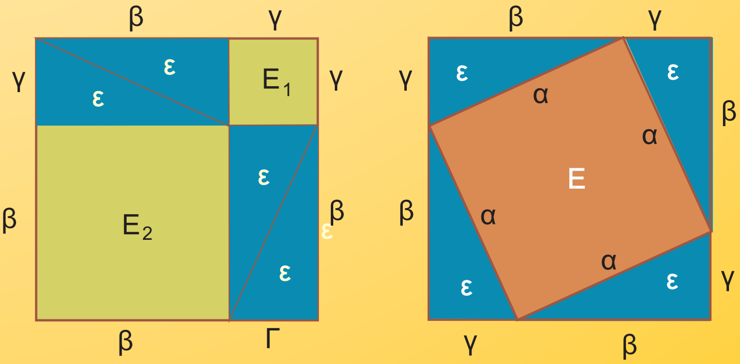
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2022 ευρώ 3,00

Οι αριθμητικές κανονικότητες στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του Γυμνασίου: ένα θαυμάσιο μέσον γενίκευσης και εισαγωγής στην Άλγεβρα



Το «παιχνίδι» KenKen





ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 123

Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2022

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητές και αγαπητοί μαθητές και συνάδελφοι,

Με τα προβλήματα λόγω κορονοϊού να συνεχίζονται, η επιτροπή του περιοδικού ξεπέρασε όλες τις δυσκολίες, με τηλεδιασκέψεις και συνεργασία εξ' αποστάσεως προχώρησε στην ακόλλητη έκδοση και κυκλοφορία του περιοδικού.

Σε αυτό το 3ο τεύχος της σχολικής χρονιάς 2021-22 και το 4ο που ακολουθεί καταβάλαμε μεγάλη προσπάθεια για να βοηθήσουμε τους μαθητές στα μαθήματά τους και παράλληλα να ενημερωθούν και σε άλλα γενικά μαθηματικά θέματα.

Τέλος ελπίζουμε και ευχόμαστε σύντομα να τελειώσουν όλες οι δυσκολίες και οι εχθροπραξίες μεταξύ των λαών. ΟΧΙ στον πόλεμο, ΝΑΙ στην Ειρήνη.

Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Το θεώρημα του Pick κλείνει το μάτι σε γεωπίνακες και εμβαδά

Βαρβάρα Γεωργιάδου-Καμπουρίδη

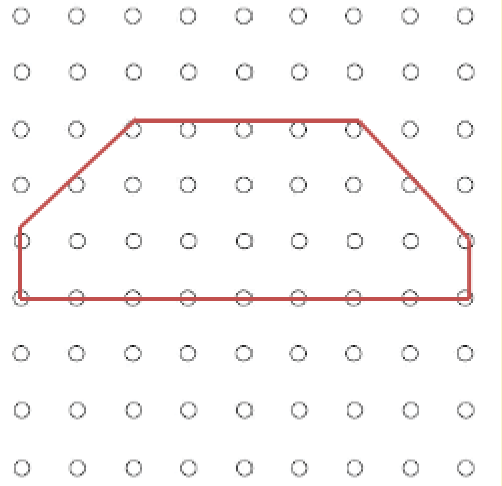
Γεωπίνακες (geoboards)

Από τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου ακόμη χρησιμοποιούμε γεωπίνακες για την διερεύνηση βασικών μαθηματικών εννοιών, όπως είναι η έννοια του εμβαδού, σε τρίγωνα, ορθογώνια και άλλα πολύγωνα. Γιατί όμως συμβαίνει αυτό;

Γιατί χρησιμοποιούμε τον *γεωπίνακα* στην εύρεση του εμβαδού; Πώς συνδέονται τα καρφάκια του εσωτερικού ενός σχήματος με τα καρφάκια που ορίζουν περιμετρικά το σχήμα; Μας βοηθούν μόνο στο να σχηματίζουμε τετράγωνα και να υπολογίζουμε εύκολα το εμβαδόν; Ή μήπως οδηγούμαστε και σε πιο σύνθετες διαδικασίες που στηρίζονται στη μορφή αυτού του εργαλείου, του γεωπίνακα, που πιο κάτω θα ονομάσουμε *πλέγμα*.

Στην παρουσίαση που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα μέσα από μια σειρά από βήματα λογικά ιεραρχημένα.

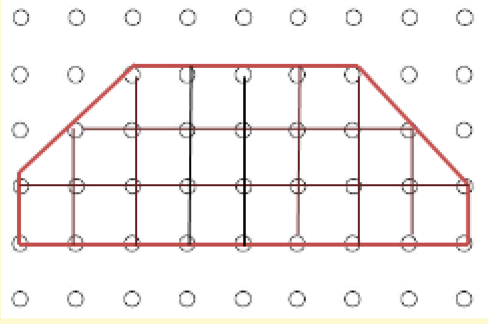
Ας δούμε ένα απλό πρόβλημα εύρεσης εμβαδού τοποθετημένο σε έναν γεωπίνακα 9 επί 9.



Το κόκκινο πολύγωνο στον διπλανό γεωπίνακα είναι ο κήπος που θα φυτέψει ο Λεωνίδας την άνοιξη στο χωράφι δίπλα στο σπίτι του. Η απόσταση ανάμεσα σε κάθε καρφάκι αντιπροσωπεύει στην πραγματικότητα 1 μ.. Ο Λεωνίδας θα περιφράξει αυτή την εξάπλευρη έκταση και υπολογίζει πως θα καλύψει 20 τ.μ.

Έχει δίκιο;

Μετρώντας τα τετράγωνα που δημιουργούν οι οριζόντιες και κάθετες γραμμές στο εσωτερικό του εξαπλεύρου (18) και προσθέτοντας σε αυτά τα τέσσερα μισά (4 X $\frac{1}{2}$ = 2) επαληθεύουμε τον ισχυρισμό του Λεωνίδα.



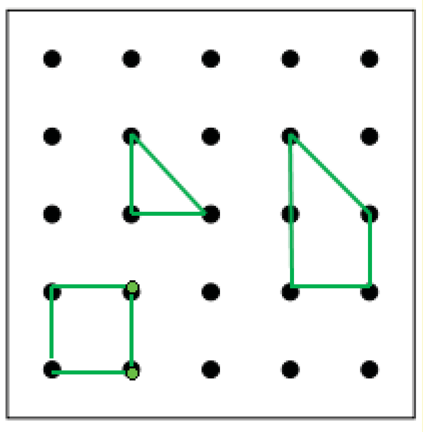
Φαίνεται εύκολο να σχεδιάζουμε πολύγωνα στον γεωπίνακα και να βρίσκουμε τα εμβαδά τους. Όμως οι μαθηματικοί δεν ικανοποιούνται μόνο βρίσκοντας σωστά αποτελέσματα με υπολογισμούς. Συνήθως προσπαθούν να ανακαλύψουν τι μπορεί να κρύβεται πίσω από τους υπολογισμούς. Δηλαδή, ψάχνουν να βρουν τρόπους για να συντομεύσουν τις διαδικασίες-υπολογισμούς μέσω ενός τύπου-λύσης-κανόνα στον οποίο θα καταλήξουν περνώντας από το ειδικό στο γενικό και από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Σύμφωνα με τον Raymond Wilder (1896-1982), μαθηματικό, φιλόσοφο και ανθρωπολόγο, η *γενίκευση*, μαζί με την *αφαίρεση* και την *ενοποίηση* βρίσκονται στην καρδιά του μαθηματικού γίγνεσθαι.

Στις εξερευνήσεις μας παρακάτω, θα ακολουθήσουμε τ΄αχνάρια ενός μαθηματικού που μελέτησε τη συμπεριφορά των εμβαδών των πολυγώνων που κατασκευάζονται σε ένα πλέγμα, όπως, για παράδειγμα, αυτό του γεωπίνακα. Οι αποστάσεις ανάμεσα στα καρφάκια είναι 1 μονάδα.

Οδηγό σε αυτή την εξερεύνηση θα έχουμε *τη μέτρηση* και *την παρατήρηση*.

***1ο βήμα*:** ξεκινάμε με κατασκευές πολυγώνων που δεν έχουν στο εσωτερικό τους κανένα καρφάκι.

εσωτ.καρφ.: 0



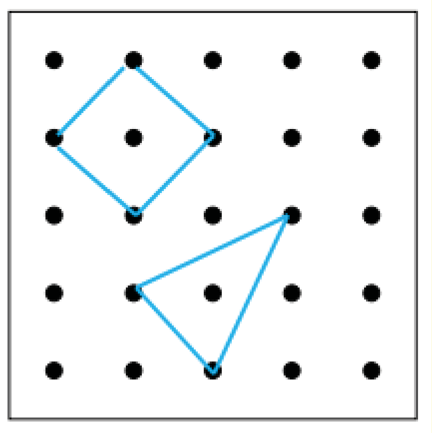
Παρατηρούμε τα διπλανά σχήματα και συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Αρ.καρφιών που ορίζουν το σχήμα	3	4	5	....
Εμβαδόν τετρ.μονάδες	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	....

Διαπιστώνουμε ότι κάθε φορά που ο αριθμός των καρφιών που ορίζουν το σχήμα αυξάνεται κατά 1 καρφάκι, το εμβαδόν αυξάνεται κατά μισή τετρ.μονάδα. Αν συνεχίσουμε τη συμπλήρωση του πίνακα, θα το επιβεβαιώσουμε και για άλλα σχήματα με το ίδιο χαρακτηριστικό.

***2ο βήμα*:** Κατασκευάζουμε πολύγωνα που έχουν στο εσωτερικό τους ένα καρφάκι.

εσωτ.καρφ.: 1



Παρατηρούμε τα διπλανά σχήματα και συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Αρ.καρφιών που ορίζουν το σχήμα	3ⁱ	4	5	....
Εμβαδόν τετρ.μονάδες	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	....

Παρατηρήσεις:

α) Επιβεβαιώνουμε την παρατήρηση από το 1ο βήμα: κάθε φορά που ο αριθμός των καρφιών που ορίζουν το σχήμα αυξάνεται κατά 1 καρφάκι, το εμβαδόν αυξάνεται κατά μισή τετρ.μονάδα.

β) Παρατηρούμε ακόμη ότι το τρίγωνο με 1 καρφάκι στο εσωτερικό του έχει εμβαδόν $1\frac{1}{2}$ τετρ.μονάδες, δηλαδή 1 τετρ.μονάδα επιπλέον από το εμβαδόν του τριγώνου χωρίς κανένα καρφάκι.

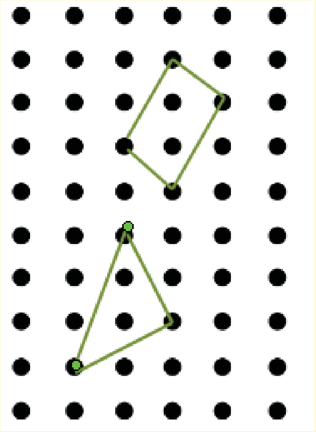
γ) Μπορούμε να εκφράσουμε το εμβαδόν του σχήματος (Ε) σε σχέση με τον αριθμό των καρφιών που ορίζουν το σχήμα (β) ;

Παρατηρώντας τα ζευγάρια **(Ε , β)** στον πίνακα διαπιστώνουμε ότι: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$, όπου β ο αριθμός των καρφιών που ορίζουν το σχήμα.

Εδώ, *προοικονομώντας*, όπως λέμε στον Όμηρο, το τι θα συμβεί παρακάτω, γράφουμε τη σχέση αυτή ως εξής: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{1} + \mathbf{1}$

***3ο βήμα*:** Κατασκευάζουμε πολύγωνα που έχουν στο εσωτερικό τους δύο καρφάκια.

εσωτ.καρφ.:2



Παρατηρούμε τα διπλανά σχήματα και συμπληρώνουμε τον πίνακα:

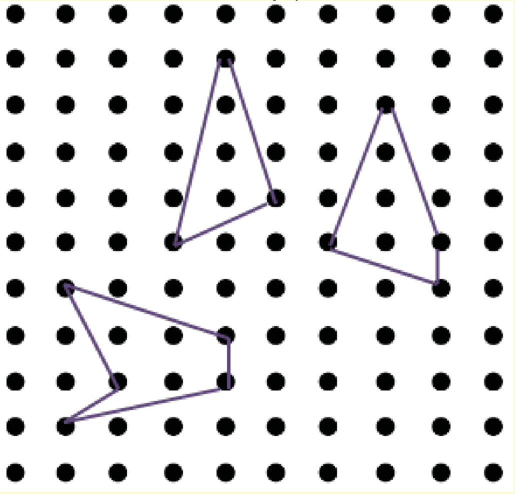
Αρ.καρφιών που ορίζουν το σχήμα	3	4	5	....
Εμβαδόν τετρ.μονάδες	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	....

Επιβεβαιώνουμε και τις δύο παρατηρήσεις του προηγούμενου βήματος.

Η σχέση που βρήκαμε στο 2ο βήμα, διαμορφώνεται εδώ ως εξής: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{1} + \mathbf{2}$, όπου, όπως φαίνεται, ο αριθμός 2 αντιστοιχεί στον αριθμό των καρφιών εντός του σχήματος. Ας σημειωθεί, ότι αντίστοιχα ο αριθμός 1 στην ίδια θέση στη σχέση του βήματος 2 αντιστοιχεί στον αριθμό των καρφιών εντός του σχήματος.

4ο βήμα: Κατασκευάζουμε 3 πολύγωνα που έχουν στο εσωτερικό τους τρία καρφάκια.

εσωτ.καρφ.: 3



Ισχύει η σχέση που βρήκαμε στα προηγούμενα βήματα;

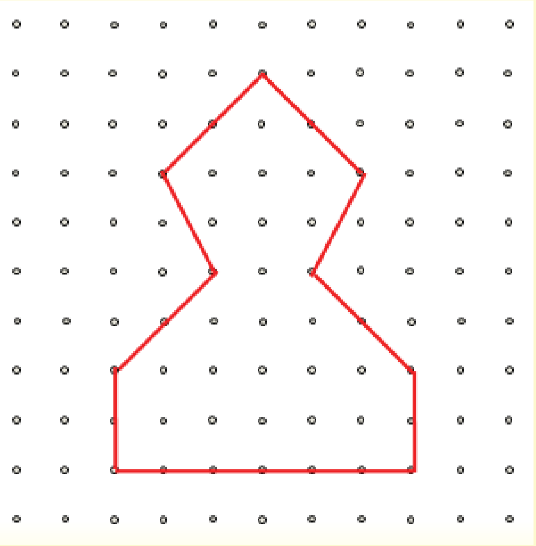
$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{1} + \mathbf{3}$, όπου 3 είναι τα εσωτερικά καρφάκια;

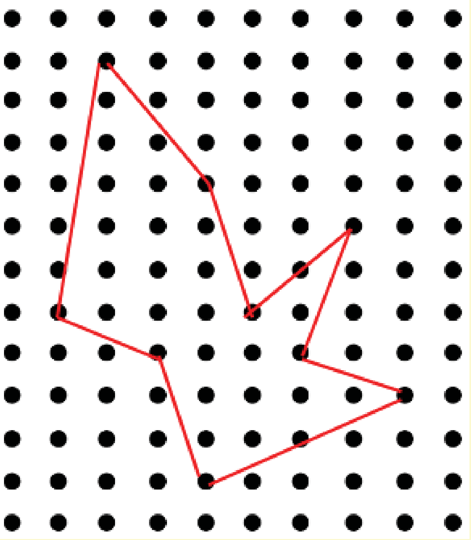
Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι απαντήσεις για περισσότερες περιπτώσεις των παραπάνω σχημάτων.

		αριθμός καρφιών που ορίζουν το σχήμα							
		3	4	5	6	7	8	10	20
αριθμός εσωτερ. καρφιών	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	9
	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	10
	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	6	11
	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6	7	12
	4	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6	$6\frac{1}{2}$	7	8	13

Έτσι, η σχέση που βρήκαμε παραπάνω επιβεβαιώνεται για όλα τα παραπάνω πολύγωνα και μπορεί να διατυπωθεί ως τύπος: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha}$, όπου **Ε** είναι το εμβαδόν του πολυγώνου, **β** ο αριθμός των καρφιών που το ορίζει και **α** ο αριθμός των καρφιών του εσωτερικού του πολυγώνου.

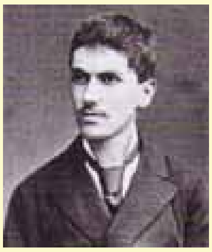
Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν κάθε πολυγώνου που κατασκευάζεται σε ένα πλέγμα, όπως:





Και τώρα, αφού ολοκληρώσαμε τις εξερευνήσεις μας και καταλήξαμε σε έναν διάσημο τύπο, ήρθε η ώρα να αναφερθούμε στον μαθηματικό που τον ανακάλυψε πρώτος, τον **Georg Alexander Pick (1859-1942)**, έναν μαθηματικό που άφησε την τελευταία του πνοή σε προχωρημένη για την εποχή ηλικία σε στρατόπεδο συγκέντρωσης του χιτλερικού καθεστώτος.

Ποιος ήταν ο Georg Alexander Pick;



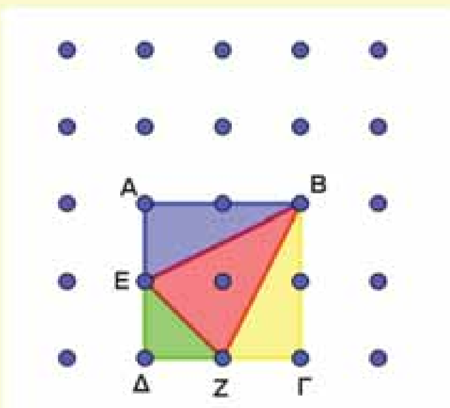
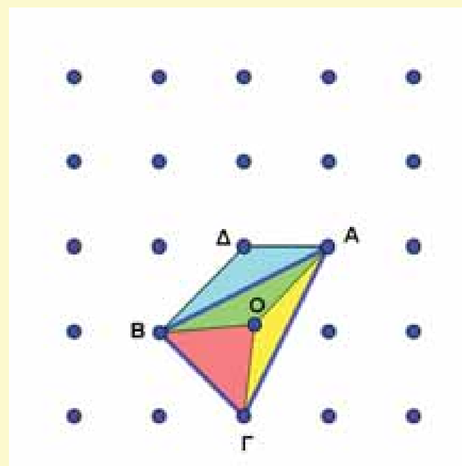
Ο **Georg Alexander Pick** γεννήθηκε το 1859 στη Βιέννη της Αυστρίας. Ήταν εβραϊκής καταγωγής. Ο πατέρας του ήταν διευθυντής ενός ιδιωτικού εκπαιδευτικού ιδρύματος. Ο Georg φοίτησε κατά τα γυμνασιακά του χρόνια στο Leopoldstaedter Communal Gymnasium. Το 1875, στα 16 του χρόνια, ξεκίνησε τη φοίτησή του στο πανεπιστήμιο της Βιέννης, όπου σπούδασε μαθηματικά και φυσική. Αποφοίτησε το 1879 με έναν τίτλο σπουδών που του επέτρεπε να διδάξει και τα δυο αυτά αντικείμενα. Μετά την απόκτηση του διδακτορικού του διορίστηκε ως βοηθός του Ernest Mach στο πανεπιστήμιο Karl-Ferdinand της Πράγας Προήχθη σε αναπληρωτή καθηγητή μαθηματικών το 1888 και διορίστηκε ως τακτικός καθηγητής το 1892 στο γερμανικό πανεπιστήμιο της Πράγας (German University of Prague). Οι επιστημονικές του εργασίες στα μαθηματικά εκτείνονταν σε ένα ευρύ φάσμα αντικειμένων, όπως συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής, τις διαφορικές εξισώσεις και τη διαφορική γεωμετρία. Είναι περισσότερο γνωστός για το θεώρημα του Pick το οποίο εμφανίστηκε σε μια οκτασέλιδη δημοσίευση του το 1899 με τίτλο Geometrisches zur Zahlenlehre. Μετά το 1927 που συνταξιοδοτήθηκε ανακηρύχθηκε ομότιμος (επίτιμος) καθηγητής και γύρισε στη γενέτειρα πόλη του, τη Βιέννη. Το 1938 με την είσοδο των γερμανικών στρατευμάτων στην Αυστρία, ο Pick επέστρεψε στην Πράγα. Ο στρατός του Χίτλερ εισέβαλε στην Τσεχοσλοβακία το Μάρτη του 1939. Ο Pick είχε εκλεγεί μέλος της Τσέχικης ακαδημίας επιστημών και τεχνών (Czech Academy of Sciences and Arts), αλλά όταν οι Ναζί κατέλαβαν την Πράγα αποκλείστηκε (εξαιρέθηκε) από την ακαδημία. Οι Ναζί ίδρυσαν ένα στρατόπεδο συγκέντρωσης στο Theresienstadt στη βόρεια Βοημία για να κλείσουν τους ηλικιωμένους, τους προνομιούχους και τους φημισμένους εβραίους. Ο Pick στάλθηκε στο Theresienstadt στις 13 Ιουλίου του 1942 και πέθανε εκεί δυο εβδομάδες αργότερα στην ηλικία των 82 ετών.

Πηγές: University of Illinois, Dipl. Katsigiannis Kostas, Davis & Hersh, Wikipedia

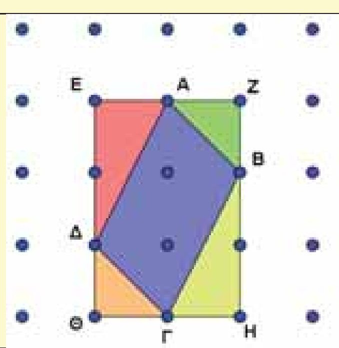
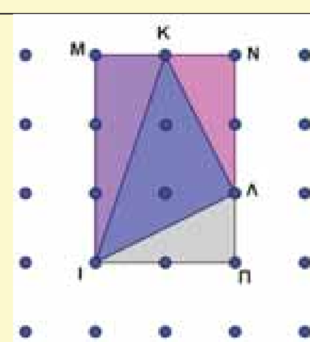
Ευχαριστίες Στον συνάδελφο Χρήστο Μπατέλη που επιμελήθηκε τα παρακάτω σχήματα.

---

i

<table>
<tr>
<td>Τρίγωνο ΕΒΖ με ένα καρφάκι στο εσωτερικό του (υπολογισμός εμβαδού 1ος τρόπος)
Σχηματίζω το τετράγωνο ΑΒΓΔ με εμβαδόν 4.
Ε (ΕΒΖ)=Ε (ΑΒΓΔ) - Ε (ΑΕΒ)-Ε(ΒΖΓ)-Ε (ΕΔΖ)
$= 4 - 1 - 1 - \frac{1}{2} = 1\ \frac{1}{2}$
</td>
<td>Τρίγωνο ΕΒΖ με ένα καρφάκι στο εσωτερικό του (υπολογισμός εμβαδού 2ος τρόπος)
Σχηματίζω το παραλληλόγραμμο ΔΑΟΒ.
Ε (ΟΑΓ) =Ε (ΒΔΑ).
Οπότε Ε (ΑΒΓ) = Ε (ΒΟΓ) + Ε (ΔΑΟΒ)=$1\ \frac{1}{2}$
</td>
</tr>
</table>

ii Υπολογισμός του εμβαδού των σχημάτων με 2 καρφάκια στο εσωτερικό τους σύμφωνα με τον 1ο τρόπο

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

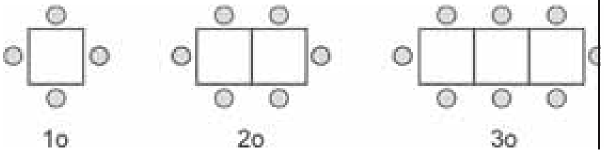
Οι αριθμητικές κανονικότητες στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του Γυμνασίου: ένα θαυμάσιο μέσον γενίκευσης και εισαγωγής στην Άλγεβρα

Γιώργος Κόσυβας

Στον κοινωνικό μας περίγυρο μπορούμε διακρίνουμε διαδοχικές συλλογές αντικειμένων που μεταβάλλονται και κάθε συλλογή της σειράς προκύπτει από την προηγούμενη με έναν συγκεκριμένο τρόπο. Καθώς παρατηρούμε τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται ή ελαττώνεται το πλήθος τους μπορούμε να ανακαλύψουμε έναν *κανόνα* που τις παράγει. Λέμε τότε ότι έχουμε μια *κανονικότητα*. Οι σειροθετημένες συλλογές μπορεί να αποτελούνται από συγκεκριμένα αντικείμενα, από εικόνες, γεωμετρικά σχήματα, ψηφιακά δημιουργήματα ή να παριστάνονται με αριθμούς. Αυτές οι διαδοχικές συλλογές αντικειμένων αντιστοιχίζονται με αριθμούς, για αυτό ονομάζονται αριθμητικές κανονικότητες. Μια σειρά αριθμών που περιγράφεται από μια *κανονικότητα* ονομάζεται επίσης *ακολουθία*. Κάθε αριθμός της διαδοχής ονομάζεται *όρος* της κανονικότητας ή της ακολουθίας και για να βρούμε τους όρους της πρέπει να ανακαλύψουμε τον κανόνα, δηλαδή τον αναδρομικό ή τον γενικό τύπο που παράγει όλους τους όρους της. Για συλλογές αριθμών που περιγράφουν κανονικότητες θα αποδίδουμε το ίδιο νόημα με τη λέξη ακολουθία.

Στα προβλήματα με κανονικότητες συνήθως δίνεται ένα επαρκές πλήθος όρων, από τους οποίους μπορούμε να βρίσκουμε τον κανόνα σχηματισμού όλων των όρων και να προβλέπουμε το πλήθος των στοιχείων για οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Ας τα δούμε αυτά με το ακόλουθο παράδειγμα.

Πρόβλημα (Β΄Γυμνασίου): *Η ιδιοκτήτρια ενός εστιατορίου προσπαθεί να βρει έναν τρόπο να τοποθετήσει τα μικρά τετράγωνα τραπέζια, ώστε να έχει όσο το δυνατόν περισσότερες θέσεις για μεγάλες παρέες. Όλα τα τραπέζια είναι ίδια τετράγωνα και όταν τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο σχηματίζουν ένα μεγάλο ορθογώνιο. Το ένα τραπέζι φιλοξενεί τέσσερις πελάτες. Τα δύο τραπέζια, τοποθετημένα δίπλα δίπλα, φιλοξενούν έξι πελάτες και τα τρία οκτώ κ.ο.κ.*



α) Να βρείτε πόσους πελάτες χωρούν τα 6 τραπέζια στη σειρά;

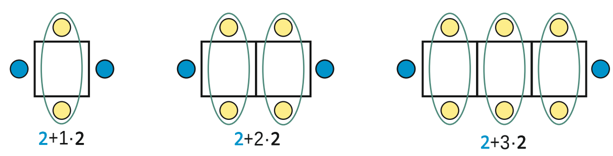
β) Να βρείτε πόσους πελάτες χωρούν τα 100 τραπέζια στη σειρά; Να εξηγήσετε.

γ) Να βρείτε έναν κανόνα που να δίνει για κάθε σχήμα τη σχέση που έχει ο αριθμός των πελατών με τον αριθμό των τραπεζιών. Να εξηγήσετε γιατί λειτουργεί αυτός ο κανόνας.

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι πολύ απλή. Αρκεί να κατασκευάσουμε ένα σχήμα με 6 μικρά τραπέζια στη και να μετρήσουμε τις καρέκλες ή τους ισάριθμους πελάτες που φιλοξενεί. Βρίσκουμε: 14 πελάτες. Για τη λύση του δεύτερου και του τρίτου ερωτήματος οι μαθηματικές απαιτήσεις ψηλώνουν, απαιτούνται πιο σύνθετες, πιο τολμηρές ιδέες. Η λύση στο πρώτο ερώτημα ελπίζουμε να ανοίξει την όρεξη για τη συνέχεια. Θα ξεπροβάλλει μπροστά σας ένα πλήθος συναρπαστικών τρόπων γενίκευσης του προβλήματος! Ας στρέψουμε την προσοχή μας σε μερικούς από αυτούς.

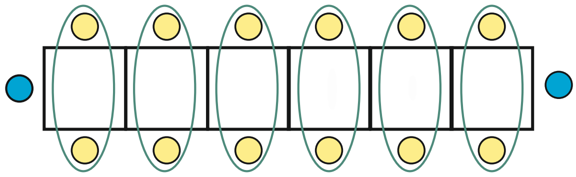
Πρώτος τρόπος: 2+2·ν

Η προσέγγιση αυτή στην Άλγεβρα του Γυμνασίου χαρακτηρίζεται από την κανονικότητα του ακόλουθου σχήματος. Εύκολα ανακαλύπτουμε τον κανόνα «προσθέτουμε 2». Απομονώνοντας τους 2 πρώτους πελάτες κάθε όρου (μπλε κυκλάκια) και δημιουργώντας ζεύγη με τους υπόλοιπους πελάτες, παρατηρούμε ότι κάθε φορά για τη μετάβαση στον επόμενο όρο προστίθενται 2 πελάτες.



Για τη δημιουργία κι άλλων μεγαλύτερων τραπεζιών προστίθενται 2 ακόμα πελάτες σε κάθε όρο. Ο 1ος όρος έχει «2 και ένα ζεύγος πελατών». Ο 2ος όρος έχει «2 και δύο ζεύγη πελατών». Ο 3ος όρος έχει «2 και τρία ζεύγη πελατών» κ.λπ.

Ελέγχουμε τον κανόνα για τον $6^{ο}$ όρο: θα έπρεπε να έχουμε 2 πελάτες και επιπλέον 6 ζεύγη πελατών. Συνολικά σε 6 μικρά τραπέζια ($6^{ος}$ όρος) χωρούν: 2+6·2=14 πελάτες. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το σχήμα μας και να προβούμε σε απαρίθμηση. Πράγματι μπορούν να καθίσουν 14 πελάτες!



6ος όρος: 2+6·2=14

Αν σκεφτούμε με τον ίδιο τρόπο για 100 μικρά τραπέζια (100ος όρος) προβλέπουμε ότι θα χωρούν 2+100·2=202 πελάτες.

Ο ζητούμενος κανόνας μπορεί να διατυπωθεί με λέξεις ως εξής: για να βρίσκουμε κάθε φορά τον αριθμό των πελατών σε οποιοδήποτε όρο, ξεκινάμε με δύο πελάτες, και προσθέτουμε τον αριθμό του όρου πολλαπλασιασμένο επί 2. Συντομότερα μπορούμε να γράψουμε:

Αριθμός πελατών=2+(αριθμός του όρου)×2.

Με άλλα λόγια το αριθμητικό πλήθος πελατών υπακούει σε έναν γενικό κανόνα που εξαρτάται από το εκάστοτε βήμα στη σειρά των όρων της ακολουθίας.

- Ο $1^{ος}$ όρος με 1 τραπέζι θα έχει 2+1·2 πελάτες,
- Ο $2^{ος}$ όρος με 2 μικρά τραπέζια θα έχει 2+2·2 πελάτες,
- Ο $100^{ος}$ όρος με 100 μικρά τραπέζια θα έχει 2+100·2 πελάτες, κ.λπ.

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις μπορούμε να μαντέψουμε το γενικό τύπο με τη βοήθεια μιας μεταβλητής ν.

Έτσι, ο γενικός τύπος που μπορεί να χρησιμοποιεί η ιδιοκτήτρια του καταστήματος για να γνωρίζει κάθε φορά ποιος είναι ο αριθμός πελατών για ν μικρά τραπέζια είναι ο εξής:

2+ ν·2 πελάτες.

Με λίγη προσπάθεια μπορείτε να καταλήξετε στην προηγούμενη αλγεβρική παράσταση. Η γενίκευση έρχεται ως λογικό συμπέρασμα και μπορεί να εκφραστεί με τον τύπο της συνάρτησης: **y=2ν+2**

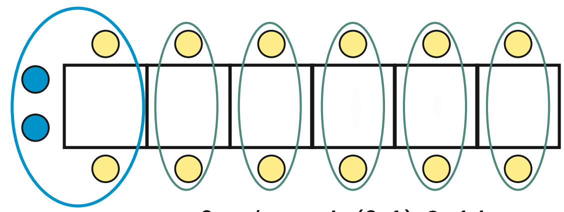
Ο ν είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Στο πλαίσιο του προβλήματος η μεταβλητή ν παριστάνει την ένδειξη της θέσης.

Η προηγούμενη λύση υποστηρίζεται από το σχήμα, το οποίο βοηθά στην κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στον αριθμό των μικρών τραπεζιών (σειρά του όρου) και το πλήθος των πελατών.

Οι παραστάσεις 2+2ν και 2ν+2, γνωρίζετε ότι είναι ίδιες. Στην έκφραση 2ν+2, οι όροι 2ν και 2 παριστάνουν μια μεταβαλλόμενη και μια σταθερή ποσότητα αντιστοίχως και αυτή η αλγεβρική παράσταση δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο. Επιπλέον, μπορούμε να συνδέσουμε την παράσταση 2ν με το άθροισμα ν+ν ή το γινόμενο ν×2. Αυτές οι ιδιαιτερότητες των αλγεβρικών παραστάσεων είναι γνώριμες.

Δεύτερος τρόπος: 4+2·(ν-1)

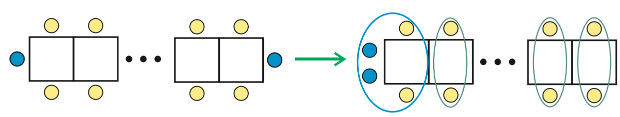
Ο τρόπος αυτός είναι παρόμοιος με τον προηγούμενο. Αρκεί να παρατηρήσουμε προσεκτικά τους αρχικούς όρους. Σχεδιάζουμε τον $6^{ο}$ όρο της κανονικότητας με τους 14 πελάτες. Μεταφέρουμε τον τελευταίο πελάτη στην αρχή και κυκλώνουμε τους τέσσερις πελάτες του πρώτου τραπεζιού της τραπεζαρίας. Επίσης διαπιστώνουμε ότι η μετάβαση από έναν όρο στον αμέσως επόμενο προσθέτει 2 πελάτες.



6ος όρος: 4+(6-1)·2=14

Μπορούμε να γενικεύσουμε τη λύση του προβλήματος για κάθε όρο:

«Μπορούμε να χωρίσουμε κάθε τραπεζαρία σε δύο μέρη: στο μέρος που μένει το ίδιο και στο μέρος που μεγαλώνει. Το μέρος που μένει το ίδιο είναι οι 4 πελάτες και το μέρος που αλλάζει είναι ο πολλαπλασιασμός του 2 με τα (ν-1) ζεύγη».



νος όρος: 4+(ν-1)·2

Από ένα «δείγμα» λίγων παραδειγμάτων μπορούμε να φτάσουμε στην ανακάλυψη της λύσης για το σχήμα 100 και τέλος να βρούμε τον κανόνα για τη γενίκευση της λύσης: **4+2·(ν-1).**

Εξετάζοντας περισσότερο την κανονικότητα, μπορούμε να συμπληρώσουμε έναν πίνακα τιμών και να βρούμε τον κανόνα ο οποίος δείχνει πώς το πλήθος των πελατών (y) εξαρτάται από τον αριθμό των μικρών τραπεζιών (ν).

Αριθμός τραπεζιών (ν)	1	2	3	…	100
Πλήθος πελατών (y)	4	6	8	…	202

Είναι βέβαιο ότι οι περισσότεροι θα αναγνωρίσετε και θα περιγράψετε τον κανόνα ως «προσθέτουμε 2». Ομοίως παρατηρώντας τον πίνακα τιμών οριζόντια θα διαπιστώσουμε ότι κάθε φορά που προστίθεται ένα μικρό τραπέζι, ο αριθμός των πελατών αυξάνεται κατά δύο. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις θα μπορέσουμε να βρούμε τον γενικό τύπο. Οι τιμές της μεταβλητής y γράφονται:

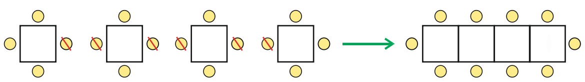
2·(1-1) +4, …, 2·(6-1) +4, …, 2·(100-1) +4,…

Επομένως ο γενικός τύπος είναι: **y=2·(ν-1)+4**. Συνεχίζοντας μπορείτε τα δεδομένα του πίνακα τιμών να τα παραστήσετε με σημεία στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Πού θα βρίσκονται όλα αυτά τα σημεία;

Τρίτος τρόπος: 4ν-(ν-1)·2

Σύμφωνα με αυτόν τον τρόπο από τα γειτονικά τραπέζια που συνενώνονται και σχηματίζουν ένα μεγάλο ορθογώνιο, απομακρύνονται τα ενδιάμεσα ζεύγη πελατών.

Αντί να αργοσαλεύουμε από όρο σε όρο, μπορούμε να γενικεύσουμε. Στην ειδική περίπτωση των 4 μικρών τραπεζιών, απαιτείται συνδυασμός πρόσθεσης-αφαίρεσης με απομάκρυνση των τριών ενδιάμεσων ζευγών από πελάτες του ακόλουθου σχήματος.



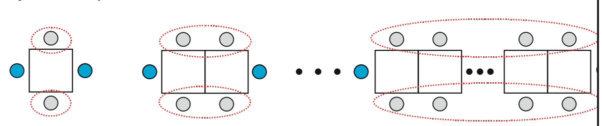
Μια εκπληκτική ιδέα πρόβαλε ένας μαθητής της Β΄ Γυμνασίου που έδωσε την εξής λύση:

«*Αφού σε κάθε τραπέζι χωρούν 4 πελάτες γύρω του, στα 4 μικρά τραπέζια θα χωρούν 16 πελάτες. Όμως τους πελάτες που είναι ενδιάμεσα πρέπει να τους αφαιρέσουμε. Όλοι οι πελάτες που είναι στις μέσες των μικρών τραπεζιών έχουν από δύο πελάτες και όλα αυτά τα ζευγάρια που είναι ενδιάμεσα είναι 3, δηλαδή ένα λιγότερο από το 4 που είναι ο αριθμός των μικρών τραπεζιών. Τελικά, αν αφαιρέσουμε τους 6 μεσαίους πελάτες βρίσκουμε 10 πελάτες για τα 4 τραπέζια*».

Ουσιαστικά ο μαθητής περιέγραψε τη λύση 4ν-2(ν-1) και ήταν χαρούμενος από την ανακάλυψή του. Ο προηγούμενος τρόπος συνιστά μια θαυμάσια επινόηση. Θα συμφωνήσετε ότι αυτός ο τρόπος πλεονεκτεί από άλλους τρόπους, γιατί είναι πρωτότυπος και απλός.

Τέταρτος τρόπος: ν+ν+2

Ένας ακόμα απλός τρόπος είναι ο εξής: «*Στη μια πλευρά του ορθογώνιου τραπεζιού κάθονται ν πελάτες και στην απέναντι πλευρά επίσης ν. Δύο ακόμα πελάτες κάθονται στις ακρινές καρέκλες. Βρίσκουμε: ν+ν+2 πελάτες*».

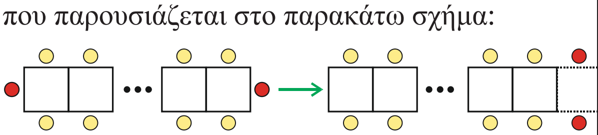


1ος όρος: 1+1+**2** 2ος όρος: 2+2+**2** νος όρος: ν+ν+**2**

Έτσι, ο γενικός τύπος που μπορεί να χρησιμοποιεί η ιδιοκτήτρια του εστιατορίου για να ξέρει κάθε φορά ποιος είναι ο αριθμός των πελατών για ν τραπέζια είναι ο εξής: ν+ν+2 πελάτες.

Πέμπτος τρόπος: 2(ν+1)

Τέλος αξίζει να μνημονευτεί ένας ακόμα τρόπος που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Ο τρόπος αυτός περιγράφεται ως εξής: «*Μπορούμε να φανταστούμε ένα τραπέζι ακόμα. Σε αυτό θα καθίσουν αντικριστά δύο πελάτες, που μεταφέρονται στο τέλος. Στη νέα τραπεζαρία οι πελάτες κάθονται μόνο απέναντι σε κάθε τραπέζι, ενώ στις ακρινές θέσεις δεν υπάρχουν πελάτες. Έτσι, όσοι πελάτες κάθονται στα ν τραπέζια, οι ίδιοι θα καθίσουν και στα ν+1 τραπέζια. Οπότε όλοι οι πελάτες θα είναι: 2·(ν+1)… Μιλά το ίδιο το σχήμα*».

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο κανόνας που προκύπτει είναι ο ακόλουθος: **2(*ν*+1)**

Όταν συνδυάζουμε οπτικές εικόνες, λέξεις, αριθμούς και αλγεβρικά σύμβολα αναπτύσσουμε πλουσιότερη κατανόηση.

Η ισοδυναμία των διαφορετικών τύπων

Μέχρι τώρα δοκιμάσαμε μερικές ιδέες και καταλήξαμε στους προηγούμενους τρόπους. Όμως σίγουρα υπάρχουν κι άλλοι διαφορετικοί τρόποι!

Βρήκαμε πέντε γενικούς τύπους για το πλήθος των πελατών συναρτήσει του αριθμού ν των μικρών τραπεζιών (σειρά του σχήματος). Οι τύποι αυτοί είναι:

ν+ν+2, 2(ν+1), 4ν-(ν-1)·2, 4+2·(ν-1), 2+2ν

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό ότι υπάρχουν περισσότερες από μια σωστές απαντήσεις στο πρόβλημα. Ποιος από τους παραπάνω κανόνες είναι ο σωστός; Αν θέσετε στους πέντε τύπους κάποια τιμή του ν θα βρείτε τον ίδιο αριθμό. Δοκιμάστε! Αν για παράδειγμα βάλετε ν=100 θα βρείτε κάθε φορά 202 πελάτες! *Πώς είναι δυνατόν διαφορετικές αλγεβρικές παραστάσεις να εκφράζουν το ίδιο πράγμα και να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα για την ίδια τιμή του ν;*

Η απάντηση στο ερώτημα είναι μια νέα πρόκληση! Τώρα έχετε την ευκαιρία να γνωρίσετε σε περισσότερο βάθος την αλγεβρική γλώσσα. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και κάνοντας αναγωγή όμοιων όρων μπορείτε να γράψετε:

- **ν+ν+2=2ν+2,**
- **2(ν+1)=2ν+2 και**
- **4ν-(ν-1)·2=4ν-2ν+2=2ν+2**
- **4+2·(ν-1)=4+2ν-2=2+2ν.**

Στα Μαθηματικά τέτοιες αλγεβρικές παραστάσεις λέγονται ισοδύναμες. Με τον τρόπο αυτό γενικεύουμε και αιτιολογούμε. Η αιτιολόγηση δείχνει την πραγματική χρησιμότητα της άλγεβρας.

Αναδρομικός ή γενικός συλλογισμός;

Ας περιγράψουμε πρώτα με ένα παράδειγμα τι είναι ο αναδρομικός συλλογισμός. Αν γνωρίζουμε ότι μια μεγάλη ορθογώνια τραπεζαρία με 99 μικρά τετράγωνα τραπέζια ($99^{ος}$ όρος) χωράει 200 πελάτες, τότε προσθέτοντας 2, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι τα 100 τραπέζια θα χωρούν 202 πελάτες. Όμως για να βρούμε πόσους πελάτες χωρά η τραπεζαρία με τα 99 τραπέζια πρέπει να ξέρουμε πόσους χωρά εκείνη με τα 98 τραπέζια ($98^{ος}$ όρος), για να βρούμε πόσους χωρά εκείνη με τα 98 μικρά τραπέζια πρέπει ήδη να γνωρίζουμε πόσους χωρά αυτή που έχει 97 μικρά τραπέζια ($97^{ος}$ όρος) κ.ο.κ. Έτσι για να βρούμε τον 100ό όρο θα πρέπει αργοδιαβαίνοντας να περάσουμε από όλους τους προηγούμενους όρους της ακολουθίας. *Είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε κάθε φορά τον προηγούμενο όρο για να βρίσκουμε τον επόμενο;* Παρότι η αναδρομική προσέγγιση μας επιτρέπει να μαντεύουμε τα στοιχεία του επόμενου ζεύγους (ν, y) της ακολουθίας, δεν μας βοηθά να φτάνουμε στο βάθος και να καταλαβαίνουμε τη σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων.

Από την περιγραφή των προηγούμενων τρόπων είδαμε τι είναι γενικός συλλογισμός. Ίσως αρκετοί μαθητές της Δευτέρας Γυμνασίου αισθάνονται ασφαλείς με τις αναδρομικές στρατηγικές, όπως «*κάθε φορά προσθέτουμε δύο πελάτες*», ενώ τα καταφέρνουν λιγότερο με την αναγνώριση, περιγραφή και εξήγηση ενός γενικού κανόνα της κανονικότητας (y=2ν+2). Με την αναδρομικότητα η μαθηματική σκέψη σιγοπερπατά με αργά, αλλά σταθερά βήματα. Η αναδρομική σκέψη είναι πολύ χρήσιμη στην άλγεβρα. Είναι το σημείο εκκίνησης για την παραγωγή του γενικού τύπου. Καθώς οι μαθητές του Δημοτικού Σχολείου αριθμούν ανά 2 παραλείποντας αριθμούς ακολουθούν αναδρομικό συλλογισμό:

4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

Η κλίση της ευθείας y=2ν+2 είναι 2. Την έννοια αυτή μαθαίνουν οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Ο αναδρομικός κανόνας παρέχει μια ισχυρή σύνδεση με την έννοια της κλίσης της ευθείας. Περιγράφει την αύξηση του αριθμού των πελατών καθώς αυξάνει ο αριθμός των τραπεζιών κατά 1.

Πάντως για αρίφνητα, δηλαδή πολυάριθμα τραπέζια, ο αναδρομικός τρόπος δεν είναι τόσο αποτελεσματικός όσο ο γενικός κανόνας. Μπορεί ορισμένοι μαθητές να καταλήγουν δύσκολα στον γενικό μαθηματικό κανόνα. Όμως ο γενικός κανόνας είναι καλύτερος από τον αναδρομικό συλλογισμό και απαραίτητος στην άλγεβρα. Ευτυχώς μερικές φορές η γεωμετρική εποπτεία προσφέρει ανεκτίμητη βοήθεια για να δώσουμε νόημα στον αλγεβρικό τύπο. Από ένα μικρό πλήθος όρων βρίσκουμε τον κανόνα σχηματισμού όλων των όρων και προβλέπουμε το πλήθος των πελατών για οποιονδήποτε αριθμό τραπεζιών. Τα αριθμητικά παραδείγματα παρέχουν τις απαραίτητες ειδικές περιπτώσεις για τη γενίκευση. Μας δίνουν ευκαιρίες να εξερευνήσουμε την κανονικότητα και να εκφράσουμε τη γενίκευση με λόγια, σύμβολα και σχήματα. Τις πληροφορίες που αντλούμε από τη λεπτή παρατήρηση του σχήματος με τάξη 6 τις επεκτείνουμε στο εκατοστό και το νιοστό σχήμα. Ο ζητούμενος γενικός τύπος για να αποφασίζει κάθε φορά η ιδιοκτήτρια του καταστήματος ποιος είναι ο αριθμός των πελατών για ν τραπέζια είναι ο εξής: y=2ν+2 πελάτες. Ο προηγούμενος τύπος παριστάνει μια συνάρτηση στην οποία ο γενικός όρος εκφράζεται ως συνάρτηση της θέσης του. Για την εύρεση του κανόνα του προβλήματος σε μια τάξη αναφέρθηκε από έναν μαθητή το ακόλουθο επιχείρημα:

> *Μισό! Δεν συμφωνώ με αυτό που κάνετε. Δεν πιστεύω ότι ο κανόνας [2ν+2] θα ισχύει πάντοτε. Μπορεί να ισχύει για μερικούς αριθμούς, αλλά μπορεί να μην ισχύει για μερικούς άλλους.*

Μαζί με τη θαυμαστή αβεβαιότητα της μαθηματικής συζήτησης στην τάξη ξυπνούν αντιρρήσεις και συγκρίσεις που υποδαυλίζουν την αγάπη για το παρακινδυνευμένο και το αδοκίμαστο ανοίγοντας καινούργιους γόνιμους προβληματισμούς. *Μπορεί ο κανόνας μιας κανονικότητας να ισχύει για μερικούς μόνο φυσικούς αριθμούς;* Η αμφιβολία για την αποδοχή του κανόνα θέτει έμμεσα το βαθύτερο ερώτημα σε τι συνίσταται μια έγκυρη και αποτελεσματική γενίκευση. Για τους μαθηματικούς μια δημιουργική πράξη είναι έγκυρη μόνο με την απόδειξη, η οποία είναι το πιο προχωρημένο στάδιο μαθηματικού συλλογισμού. Στα Μαθηματικά, όλα τα πράγματα πρώτα ορίζονται ή αποδεικνύονται γενικά και ύστερα εφαρμόζονται στις ειδικές περιπτώσεις. Η μαθηματική απόδειξη βεβαιώνει ότι ένας κανόνας ισχύει για όλους τους αριθμούς. Η λεγόμενη τέλεια ή μαθηματική επαγωγή ακολουθεί την τροχιά διδασκαλίας και μάθησης της απόδειξης και αποτελεί μια εξελιγμένη μορφή αποδεικτικού συλλογισμού, η οποία διδάσκεται στο Λύκειο.

Ωστόσο, για το Γυμνάσιο αρκούν όσα παρατέθηκαν. Αντί οι μαθητές να ακολουθούν δόγματα του τύπου «πίστευε και μη ερεύνα» μαθαίνοντας ορισμούς και έτοιμες αποδείξεις είναι καλύτερα να εξερευνούν προβλήματα και να πλάθουν τις δικές τους αιτιολογήσεις. Η ανακάλυψη του γενικού κανόνα (y=2ν+2) παραπέμπει στο είδος συλλογισμού που περιγράψαμε: συνδυάζει τη διατύπωση ενός υποθετικού κανόνα με την επαναληπτική χρήση λίγων παραδειγμάτων. Για να διατυπώσουμε μια γενική πρόβλεψη, επαληθεύουμε πολλές φορές την υπόθεσή μας εξετάζοντας αν έχει νόημα. Όταν γενικεύουμε μια κανονικότητα με βάση ένα μικρό «δείγμα» συνδυάζουμε την υπόθεση που εξηγεί τα ειδικά παραδείγματα και περνάμε από το μερικό στο γενικό. Την απόσταση που μας χωρίζει με το βαθύτερο πλούτο της απόδειξης θα γεφυρώσουμε στο Λύκειο, σκαρφαλώνοντας σε ψηλότερες μαθηματικές κορυφές!

Μαθηματικές προκλήσεις για αυτενέργεια

Στη συνέχεια, σάς προτείνουμε μερικές μαθηματικές προκλήσεις από τη χώρα των κανονικοτήτων για να οξύνετε περαιτέρω την εξυπνάδα σας. Οι εικόνες σάς περιμένουν για να στηρίξουν τις ζεστές σκέψεις σας. Λύνοντας τα προβλήματα, θα αποκτήσετε μια ευχάριστη γνωριμία με την εύρεση του κανόνα και την αλγεβρική του έκφραση. Βάλτε αμέσως σε κίνηση το δημιουργικό μυαλό σας και σίγουρα θα τα καταφέρετε!

Πρόβλημα 1 (Β΄): *Η Λερναία Ύδρα είναι ένα τέρας με 9 κεφάλια. Για κάθε ένα κεφάλι που κόβει ο Ηρακλής, στη θέση του φυτρώνουν δύο νέα!*

Πόσα κεφάλια θα έχει η Λερναία Ύδρα μετά το κόψιμο της $5^{ης}$ κεφαλής, της $9^{ης}$ κεφαλής, της νιοστής κεφαλής;

Πρόβλημα 2 (Α΄): *Ένας σταθμός αυτοκινήτων χρεώνει 3 ευρώ για κάθε ώρα στάθμευσης.*

α) *Να συμπληρώσετε τον πίνακα:*

Ώρες χρήσης (ν)	1	2	3	4	5	6	7
Χρέωση σε € (y)	3	6					

β) *Οι παραπάνω χρεώσεις περιγράφουν μια κανονικότητα; Αν ναι ποιος είναι ο γενικός τύπος της;*

γ) *Πόσες ώρες ήταν παρκαρισμένο ένα αυτοκίνητο που πλήρωσε 39 ευρώ;*

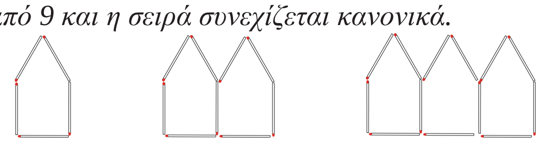
Πρόβλημα 3 (Α΄): *Δίνεται η κανονικότητα των αριθμών:* $-5, -\frac{15}{2}, -10, -\frac{25}{2}, -15, \ldots$

α) *Να βρείτε τον 10ο όρο της.*

β) *Να βρείτε τον 100ο όρο της.*

γ) *Να βρείτε έναν γενικό κανόνα με τον οποίο θα μπορούμε να βρίσκουμε κάθε όρο της ακολουθίας.*

Πρόβλημα 4 (Β΄): *Θεωρούμε μια ακολουθία σχημάτων από σπιτάκια. Το 1ο σχήμα (σπιτάκι) αποτελείται από 5 σπίρτα, το 2ο (δύο σπιτάκια) από 9 και η σειρά συνεχίζεται κανονικά.*



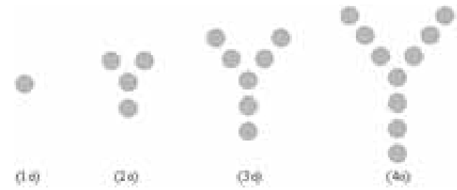
(1ο) (2ο) (3ο)

α) *Πόσα σπιρτόξυλα υπάρχουν στο $4^ο$ σχήμα; Αν συνέχιζες το μοτίβο πόσα σπιρτόξυλα θα χρειαζόσουν για να δημιουργήσεις το $8^ο$ σχήμα;*

β) *Θα σου έπαιρνε πολύ χρόνο για να φτιάξεις ή να σχεδιάσεις το $100^ο$ σχήμα. Να περιγράψεις έναν σύντομο τρόπο για την εύρεση του αριθμού των σπίρτων του $100^{ου}$ σχήματος.*

γ) *Να γράψεις έναν κανόνα για την εύρεση του αριθμού των σπίρτων που χρειάζονται για κάθε σχήμα, και να εξηγήσεις γιατί αυτός λειτουργεί;*

Πρόβλημα $5^ο$ (Β΄). *Θεωρούμε μια ακολουθία σχημάτων από κυκλικούς δίσκους που σχηματίζουν το γράμμα «Υ». Η σειρά συνεχίζεται κανονικά.*



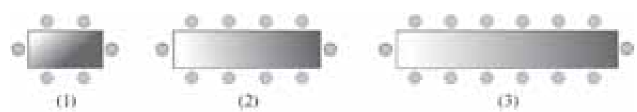
α) *Πόσους κυκλικούς δίσκους έχει το 6ο και το 100ο σχήμα;*

β) *Να δημιουργήσετε πίνακα τιμών για ν=1,2,..6. Να παραστήσετε τα ζεύγη τιμών με σημεία σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.*

γ) *Ποιος είναι ο κανόνας προσδιορισμού του αριθμού των κυκλικών δίσκων που χρειάζονται στο νιοστό σχήμα;*

δ) *Υπάρχει σχήμα με 180 κυκλικούς δίσκους; Αν υπάρχει ποια σειρά έχει αυτό το σχήμα στην ακολουθία; Αν δεν υπάρχει να εξηγήσετε γιατί;*

Πρόβλημα 6 (Β΄): *Είσαστε ιδιοκτήτης ενός εστιατορίου και θέλετε να βρείτε έναν τρόπο να τοποθετήσετε τα μικρά ορθογώνια τραπέζια, ώστε να έχετε όσο το δυνατόν περισσότερες θέσεις για μεγάλες παρέες. Όλα τα τραπέζια είναι ίδια ορθογώνια παραλληλόγραμμα και όταν τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο σχηματίζουν μια μεγάλη ορθογώνια τραπεζαρία. Το ένα τραπέζι φιλοξενεί 6 πελάτες. Τα δύο τραπέζια, τοποθετημένα δίπλα δίπλα, φιλοξενούν 10 πελάτες και τα τρία 14 κ.ο.κ.*

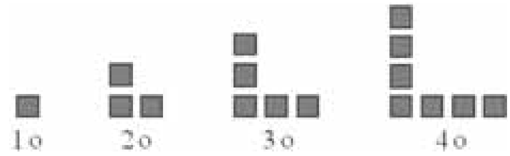


α) *Να βρείτε πόσους πελάτες χωρά η τραπεζαρία του $6^{ου}$ σχήματος στη σειρά;*

β) *Να βρείτε πόσους πελάτες χωρά η τραπεζαρία του 100ού σχήματος; Να εξηγήσετε.*

γ) *Να βρείτε έναν κανόνα που να δίνει για κάθε σχήμα τη σχέση που έχει ο αριθμός των πελατών με τον αριθμό της θέσης της τραπεζαρίας στη σειρά. Να εξηγήσετε γιατί λειτουργεί αυτός ο κανόνας.*

Πρόβλημα $7^ο$ (Γ΄). *Θεωρούμε μια ακολουθία σχημάτων από τετραγωνάκια που μετά από το 1ο σχηματίζουν τους «Γνώμονες του Πυθαγόρα». Η σειρά συνεχίζεται κανονικά.*



α) *Πόσα τετραγωνάκια έχει το 7ο και πόσα το 100ο σχήμα;*

β) *Να βρείτε έναν τύπο που να δίνει άμεσα τον αριθμό των τετραγώνων που χρειάζονται στο νιοστό σχήμα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Να αιτιολογήσετε κάθε τύπο.*

γ) *Πόσα τετράγωνα έχει το άθροισμα των πρώτων 100 σχημάτων;*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Οι λύσεις των θεμάτων των μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1 (a) **Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\mathbf{k}$ για την οποία το πολυώνυμο $\mathbf{P(x)=x^3-kx+2}$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια για την τιμή του $\mathbf{k}$ που θα βρείτε να γράψετε το πολυώνυμο $\mathbf{P(x)=x^3-kx+2}$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές.**

(b) **Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\mathbf{a, b}$ ικανοποιούν την εξίσωση $\mathbf{2a+b+\frac{4}{ab}=10}$, να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του $\mathbf{a}$.**

Λύση: (a) Για να είναι ο 2 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)=x^3-kx+2$, πρέπει και αρκεί

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-2k+2=0 \Leftrightarrow k=5. \text{ Για } k=5 \text{ παίρνουμε:}$$

$$P(x)=x^3-5x+2=x^3-4x-x+2=x(x-2)(x+2)-(x-2)=(x-2)(x^2+2x-1).$$

(b) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε: $b+\frac{4}{ab}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{4}{ab}}=\frac{4}{\sqrt{a}}$

Επομένως, $2a+\frac{4}{\sqrt{a}}\leq 10$. Θέτοντας $\sqrt{a}=x$, παίρνουμε $x^2+\frac{2}{x}\leq 5 \Leftrightarrow x^3-5x+2\leq 0$.

Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα έχουμε $(x-2)(x^2+2x-1)\leq 0$. Η τελευταία δεν ισχύει για $x>2$, άρα $x\leq 2$, οπότε $a\leq 4$. Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a=4$, παίρνουμε $b=1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

2ος τρόπος: Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε: $2a+b+\frac{4}{ab}=\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\cdots+\frac{a}{4}+b+\frac{4}{ab}\geq 10\sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8}\cdot b\cdot\frac{4}{ab}}$.

Επομένως $\sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8}\cdot b\cdot\frac{4}{ab}}\leq 1$, άρα $a^7\leq 4^7$, άρα $a\leq 4$. Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a=4$, παίρνουμε $b=1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

3ος τρόπος: Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $ab^2+(2a^2-10a)b+4=0$. (1)

Για να έχει λύσεις η τελευταία, πρέπει η διακρίνουσα να είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow a^2(2a-10)^2-16a\geq 0 \Leftrightarrow a(a-5)^2-4\geq 0 \Leftrightarrow a^3-10a^2+25a-4\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3-4a^2-6a^2+25a-4\geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-4)-(6a-1)(a-4)\geq 0 \Leftrightarrow (a-4)(a^2-6a+1)\geq 0.$$

Η τελευταία αληθεύει για $3-2\sqrt{2}\leq a\leq 4$ ή $a\geq 3+2\sqrt{2}$.

Αν $a\geq 3+2\sqrt{2}$, τότε η (1) δεν μπορεί να ισχύει, αφού

$$ab^2>0,\ (2a^2-10a)b>0, \text{ οπότε } ab^2+(2a^2-10a)b+4>4.$$

Επομένως $3-2\sqrt{2}\leq a\leq 4$. Άρα η μέγιστη τιμή του a είναι 4, αφού για για $a=4$, παίρνουμε $b=1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

Πρόβλημα 2: **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε**

$$\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma=30^0,\ \Delta\hat{B}A=50^0,\ \Delta\hat{\Gamma}B=55^0}.$$

(α) **Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\hat{B}=\hat{\Gamma}=80^0}$**

(β) **Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathbf{\Delta\hat{A}\Gamma}$.**

Λύση (1ος τρόπος)

(α) Πρώτα διαπιστώνουμε ότι $\hat{B}=\Delta\hat{B}A+\Delta\hat{B}\Gamma=50^0+30^0=80^0$.

Αν ήταν $\hat{A}=\hat{B}=80^0$, τότε θα είχαμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=80^0+80^0+\hat{\Gamma}>160^0+55^0=215^0$, που είναι άτοπο.

Αν ήταν $\hat{A}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^0-80^0}{2}=50^0$, τότε $B\hat{\Gamma}\Delta=55^0<\hat{\Gamma}=50^0$, άτοπο.

Επομένως έχουμε $\hat{B}=\hat{\Gamma}=80^0$ και $\hat{A}=20^0$

(β) Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^0$, έχουμε:

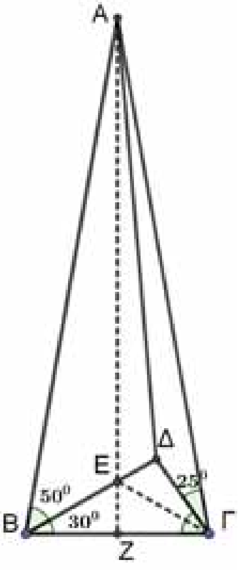
$$\Delta\hat{\Gamma}A = 80^0 - 55^0 = 25^0 \qquad (1)$$

Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας $\hat{A}$, που επιπλέον είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ, και υποθέτουμε ότι τέμνει την ευθεία ΒΔ σε σημείο Ε, σχήμα 1.

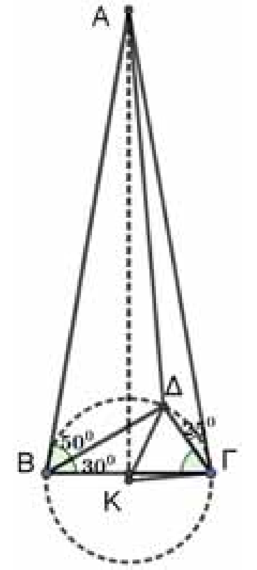
Επειδή στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι $\Gamma\hat{B}\Delta < B\hat{\Gamma}\Delta$, έπεται ότι $\Delta\Gamma < \Delta B$, οπότε το Δ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο ακμής ΑΖ που περιέχει το σημείο Γ. Έτσι το Ε βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ. Επειδή το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΕΓ, έπεται ότι $E\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma = 30^0$, οπότε

$$E\hat{\Gamma}\Delta = 55^0 - 30^0 = 25^0 \overset{(1)}{=} \Delta\hat{\Gamma}A . \qquad (2)$$

Από τη σχέση (2) έπεται ότι η ευθεία ΓΔ διχοτομεί τη γωνία $E\hat{\Gamma}A$ του τριγώνου ΑΕΓ.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\Delta\hat{E}\Gamma$ και $\Delta\hat{E}A$ είναι εξωτερικές στα τρίγωνα ΕΒΓ και ΕΒΑ, αντίστοιχα, οπότε έχουμε: $\Delta\hat{E}\Gamma = 30^0 + 30^0 = 60^0$ και $\Delta\hat{E}A = E\hat{B}A + \dfrac{\hat{A}}{2} = 50^0 + 10^0 = 60^0$.

Άρα είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{E}A = 60^0$, οπότε η ευθεία ΕΔ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{E}\Gamma$ του τριγώνου ΑΕΓ.

Επομένως, το σημείο Δ είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ, οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = \dfrac{E\hat{A}\Gamma}{2} = \dfrac{10^0}{2} = 5^0$.

2ος τρόπος (β) Θεωρούμε το περίκεντρο Κ του τριγώνου ΒΔΓ, σχήμα 2, το οποίο βρίσκεται στη μεσοκάθετη της ΒΓ. Επειδή $\widehat{\Delta K\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Delta B\Gamma} = 60°$, ως επίκεντρη, έπεται ότι το τρίγωνο ΚΔΓ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, οπότε είναι ισόπλευρο. Άρα $\widehat{B\Gamma K} = 5°$, οπότε $\widehat{A\Gamma K} = 85°$. Όμως, $\widehat{KA\Gamma} = 10°$, οπότε το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισοσκελές και το Α είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΔΓ και το Δ είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη του ΚΓ, οπότε θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{KA\Gamma}$, δηλαδή $\widehat{\Delta A\Gamma} = 5°$.

Πρόβλημα 3: **Στον πίνακα γράφουμε σε μία σειρά $\mathbf{n}$ αριθμούς, $\mathbf{n \geq 40}$, όπου καθένας από αυτούς ισούται με 1 ή -1, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:**

(i) **Το άθροισμα οποιωνδήποτε 40 διαδοχικών αριθμών είναι ίσο με 0.**

(ii) **Το άθροισμα οποιωνδήποτε 42 διαδοχικών αριθμών δεν είναι ίσο με 0.**

Ονομάζουμε $\boldsymbol{\Sigma_n}$ το μέγιστο δυνατό άθροισμα των $\mathbf{n}$ αριθμών του πίνακα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του $\boldsymbol{\Sigma_n}$ για τις διάφορες τιμές του $\mathbf{n}$.

Λύση: Αφού το άθροισμα των πρώτων 40 αριθμών είναι 0, πρέπει οι μισοί να είναι 1 και οι άλλοι μισοί -1. Αφού το άθροισμα των πρώτων 42 δεν είναι 0, πρέπει ο 41ος και ο 42ος αριθμός να είναι ίσοι, έστω ίσοι με $a \in \{-1, 1\}$. Ομοίως αν πάρουμε τους 42 αριθμούς, από τον 2ο μέχρι τον 43ο, αφού το άθροισμά τους δεν είναι 0, θα πρέπει ο 42ος και ο 43ος να είναι ίσοι. Άρα και ο 43ος πρέπει να είναι ίσος με a. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε ότι όλοι οι αριθμοί από τον 41ο και μετά πρέπει να είναι ίσοι με α. Επομένως αν $n > 60$, το άθροισμα των 40 αριθμών από τον a_{22} μέχρι τον a_{61} έχει τους 21 αριθμούς $a_{41} = a_{42} = \cdots = a_{61} = a$, οπότε τα 1 και -1 δεν μπορεί να είναι ίσα το πλήθος σε αυτό το άθροισμα, άρα το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών δεν είναι 0, άτοπο.

Επομένως, η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n είναι 60. Η μέγιστη τιμή του Σ_n επιτυγχάνεται όταν έχουμε όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς ίσους με 1. Κοιτώντας την πρώτη 40-αδα, αριθμών, πρέπει να έχουμε τουλάχιστον 20 αριθμούς ίσους με -1. Άρα οι αριθμοί ίσοι με 1 είναι το πολύ 40. Άρα, για κάθε n , έχουμε ότι $\Sigma_n \leq 20$. Πράγματι, το 20 είναι η μέγιστη δυνατή τιμή και επιτυγχάνεται όταν οι πρώτοι 20 αριθμοί είναι όλοι ίσοι με 1, η δεύτερη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με -1 και η τρίτη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με 1.

Πρόβλημα 4: **Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων $\mathbf{(x, y)}$ που είναι τέτοιοι ώστε ο ακέραιος $\mathbf{x^2 + y^2}$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $\mathbf{x^5 + y}$ και $\mathbf{y^5 + x}$.**

Λύση: Επειδή $x^2+y^2 \mid x(x^5+y)$ και $x^2+y^2 \mid y(y^5+x)$, έπεται ότι

$$x^2+y^2 \mid x(x^5+y)+y(y^5+x) \Rightarrow x^2+y^2 \mid x^6+y^6+2xy. \qquad (1)$$

Όμως από την ταυτότητα για το άθροισμα κύβων παίρνουμε ότι: $x^2+y^2 \mid (x^2)^3+(y^2)^3 = x^6+y^6$. (2)

Επομένως συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε ότι: $x^2+y^2 \mid 2xy$. (3)

Αυτό σημαίνει ότι $x^2+y^2 \le 2\cdot|xy| \Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \le 0$, δηλαδή $|x|=|y|$.

Επομένως έχουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $x=y$, τότε από την εκφώνηση έχουμε: $2x^2 \mid x^5+x \Rightarrow 2x \mid x^4+1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x=1$ ή $x=-1.$,

(β) Αν $x=-y$, τότε από την εκφώνηση έχουμεq $2x^2 \mid x^5-x \Rightarrow 2x \mid x^4-1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x=1$ ή $x=-1.$,

Επομένως τα ζεύγη που ζητάμε είναι τα $(x,y)\in\{(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)\}$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 122

Α69. Έχουμε τέσσερις πανομοιότυπες χρυσές αλυσίδες με βάρη $1, \alpha, \alpha^2$ και α^3, όπου $\alpha>1$ άγνωστος πραγματικός αριθμός. Διαθέτουμε και μία ζυγαριά με δύο δίσκους η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση βαρών, χωρίς να φαίνονται τα πραγματικά βάρη. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να βρούμε την αλυσίδα με το μεγαλύτερο βάρος με δύο μόνο συγκρίσεις βαρών.

Talent search 2021-22

Λύση. Επειδή $\alpha>1$, η αλυσίδα με το μεγαλύτερο βάρος είναι αυτή που έχει βάρος α^3. Μπορούμε στην πρώτη ζύγιση να τοποθετήσουμε σε κάθε δίσκο της ζυγαριάς από δύο αλυσίδες. Οι δυνατές επιλογές ζευγών είναι: $(1,\alpha)$ με (α^2,α^3), $(1,\alpha^2)$ με (α,α^3) και $(1,\alpha^3)$ με (α,α^2).

Σημειώνουμε ότι η αλυσίδα με το βάρος α^3. βρίσκεται και στις τρεις περιπτώσεις στο δίσκο με το μεγαλύτερο βάρος. Αυτό προκύπτει, επειδή $\alpha>1$, από τις ανισώσεις

- $\alpha^3+\alpha^2>\alpha+1 \Leftrightarrow \alpha^2(\alpha+1)>\alpha+1 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha^2-1)>0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2(\alpha-1)>0$.
- $\alpha^3+\alpha>\alpha^2+1 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2+1)>\alpha^2+1 \Leftrightarrow (\alpha^2+1)(\alpha-1)>0$.
- $\alpha^3+1>\alpha^2+\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2>\alpha-1 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2-1)>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2(\alpha+1)>0$.

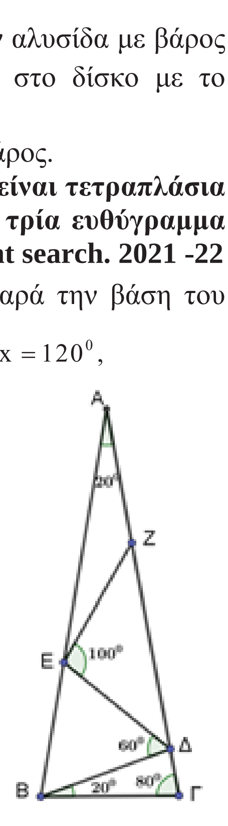
Επομένως μετά την πρώτη ζύγιση θα προκύψει ένα βαρύτερο ζεύγος που περιέχει την αλυσίδα με βάρος α^3. Έτσι στη δεύτερη ζύγιση για τις δύο αλυσίδες του συγκεκριμένου ζεύγους στο δίσκο με το μεγαλύτερο βάρος θα βρίσκεται το βάρος α^3.

Επομένως με δύο ζυγίσεις μπορούμε να εντοπίσουμε την αλυσίδα με το μεγαλύτερο βάρος.

Γ52. Σε ένα οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι μία από τις γωνίες του είναι τετραπλάσια από μία άλλη γωνία του. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο μπορεί να διαιρεθεί με τρία ευθύγραμμα τμήματα σε τρία μη επικαλυπτόμενα ισοσκελή τρίγωνα. **Talent search. 2021 -22**

Λύση: Έστω ότι το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει γωνία κορυφής $\hat{A}$ και γωνίες παρά την βάση του $\hat{B}=\hat{\Gamma}$. Αν υποθέσουμε ότι $\hat{A}=x$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\frac{x}{4}$ τότε $x+2\cdot\frac{x}{4}=180^0 \Rightarrow \frac{3x}{2}=180^0 \Rightarrow x=120^0$,

που είναι άτοπο, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Αν $\hat{A}=x$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}=4x$, τότε $9x=180^0 \Rightarrow x=20^0$. Άρα είναι: $\hat{A}=20^0$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}=80^0$.



Θεωρούμε το σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε: $\Gamma\hat{B}\Delta=20^0$.

Τότε $B\Delta\Gamma=80^0=\hat{\Gamma}\Rightarrow B\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΒ έτσι ώστε $B\hat{\Delta}E=60^0$, οπότε το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο, αφού $\Delta\hat{B}E=80^0-20^0=60^0$. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{E}Z=100^0$. Τότε θα είναι $E\hat{\Delta}Z=180^0-(80^0+60^0)=40^0$ και $E\hat{Z}\Delta=180^0-(100^0+40^0)=40^0$, οπότε και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές. Επειδή

$A\hat{E}Z = 180^0 - \left(60^0 + 100^0\right) = 20^0 = \hat{A}$ και το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Γ53. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ και σημείο Κ στην ευθεία ΑΓ έτσι ώστε το Γ να βρίσκεται μεταξύ ων σημείων Α και Κ και $B\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{\Gamma}A$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}B > 90^0$.

(β) Μία ευθεία περνάει από το σημείο Δ παράλληλη προς την ευθεία ΒΓ και τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Μ. Αν επιπλέον, δίνεται ότι $2 \cdot \hat{A} + 3 \cdot \hat{B} = 180^0$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΜ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{B}\Gamma$. **ΜΟ Τσεχίας 2019**

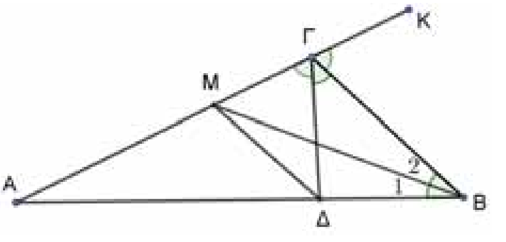
Λύση. (α) Η γωνία $B\hat{\Gamma}K$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε έχουμε $B\hat{\Gamma}K = \hat{A} + \hat{B} = \Delta\hat{\Gamma}A$(από υπόθεση) και αφού το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΑΒ, έπεται ότι

$$\hat{\Gamma} > \Delta\hat{\Gamma}A = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} > 180^0 - \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Gamma} \equiv A\hat{\Gamma}B > 90^0.$$

(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\hat{B}_1 = \Delta\hat{B}M = M\hat{B}\Gamma = \hat{B}_2$, σχήμα 1. Έχουμε ότι:

$\Delta\hat{\Gamma}B = 180^0 - 2 \cdot B\hat{\Gamma}K = 180^0 - 2 \cdot (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{B}$,

λόγω της υπόθεσης $2 \cdot \hat{A} + 3 \cdot \hat{B} = 180^0$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta\Gamma$. Επειδή $\Delta M \parallel B\Gamma$, έπεται ότι:



Σχήμα 2

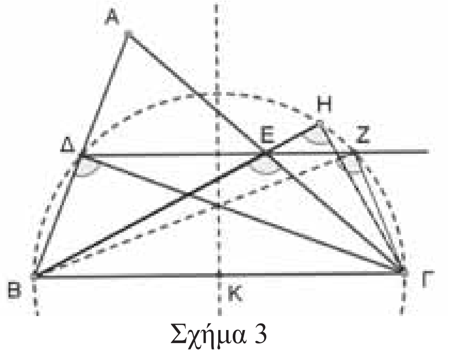
- $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{\Gamma}M$, οπότε $\Delta M = \Delta\Gamma = \Delta B$, δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ισοσκελές με $\Delta\hat{M}B = \hat{B}_1$
- $\Delta\hat{M}B = \hat{B}_2$, (εντός εναλλάξ γωνίες στις $\Delta M \parallel B\Gamma$με τέμνουσα την ευθεία ΒΜ.

Άρα είναι $\hat{B}_1 = \Delta\hat{B}M = M\hat{B}\Gamma = \hat{B}_2 \Rightarrow$ΒΜ διχοτόμος γωνίας $\hat{B}$.

Γ54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Αν $AB < A\Gamma$, να αποδείξετε ότι: $B\hat{\Delta}\Gamma < B\hat{E}\Gamma$. **ΜΟ Τσεχίας 2017**

Λύση Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $AB < A\Gamma \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}B < A\hat{B}\Gamma = \hat{B}$. (1)

Γράφουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο γ του τριγώνου ΒΔΓ και έστω η ευθεία των μέσων ΔΕ τον τέμνει και στο σημείο Ζ. Λόγω συμμετρίας του Ζ με το σημείο Δ ως προς την μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, ισχύει ότι $B\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{Z}\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $B\hat{Z}\Gamma < B\hat{E}\Gamma$.



Σχήμα 3

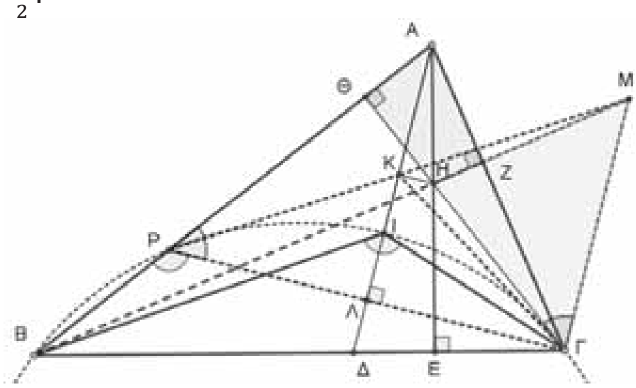
Επειδή $\hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}B < A\hat{B}\Gamma = \hat{B} = B\hat{\Gamma}Z$, η ευθεία ΓΑ βρίσκεται μέσα στη γωνία $B\hat{\Gamma}Z$, οπότε τέμνει την ευθεία ΔΖ σε σημείο Ε μεταξύ των σημείων Δ και Ζ. Επομένως, το σημείο Ε είναι εσωτερικό στον κύκλο γ, οπότε η προέκταση του ΒΕ προς το μέρος του Ε τέμνει τον κύκλο σε σημείο, έστω Η, για το οποίο ισχύει ότι: $B\hat{E}\Gamma > E\hat{H}\Gamma = B\hat{H}\Gamma = B\hat{Z}\Gamma$.

Γ55. Έστω Η και Ι το ορθόκεντρο και το έκκεντρο, αντίστοιχα, ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΙ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε σημείο Ρ διαφορετικό του Β. Έστω Κ η ορθή προβολή του Η πάνω στην ευθεία ΑΙ και Μ το συμμετρικό του Ρ ως προς το Κ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Η και Μ είναι συνευθειακά. **Baltic Way 2017**

Λύση: Γνωρίζουμε ότι: $B\hat{I}\Gamma = 180^0 - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$. Επειδή $B\hat{P}\Gamma = B\hat{I}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$, έπεται ότι: $A\hat{P}\Gamma = 180^0 - B\hat{P}\Gamma = 180^0 - \left(90^0 + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}$, οπότε: $A\hat{\Lambda}P = 180^0 - \frac{\hat{A}}{2} - \left(90^0 + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^0$. Επομένως η ΑΛ είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΑΡΓ.

Άρα το τρίγωνο ΑΡΓ είναι ισοσκελές με ΑΡ = ΑΓ και $A\hat{P}\Gamma = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}$. Επειδή το σημείο Κ ανήκει στη διχοτόμο ΑΛ που είναι και μεσοκάθετη της ΚΓ, έπεται ότι: ΚΡ = ΚΓ = ΚΜ, αφού Μ συμμετρικό του Ρ

ως προς το σημείο Κ. Επομένως το τρίγωνο ΡΓΜ είναι ορθογώνιο στο Γ, οπότε ΓΜ ∥ ΑΛ.
Άρα είναι: $A\widehat{\Gamma}M = \Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{\widehat{A}}{2}$.



Σχήμα 4

Επειδή ΗΚ ⊥ ΑΔ ∥ ΓΜ, έπεται ότι ΗΚ μεσοκάθετη της ΓΜ, οπότε και το τρίγωνο ΗΓΜ είναι ισοσκελές με

$$H\widehat{\Gamma}M = H\widehat{\Gamma}A + A\widehat{\Gamma}M = 90^0 - \widehat{A} + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^0 - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΡΓ και ΗΓΜ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε $\Gamma\widehat{H}M = \widehat{A}$ και αφού $B\widehat{H}\Gamma = \Theta\widehat{H}Z = 180^0 - \widehat{A}$ (από το εγγράψιμο ΑΘΗΖ), έπεται ότι $B\widehat{H}\Gamma + \Gamma\widehat{H}M = 180^0 - \widehat{A} + \widehat{A} = 180^0$,οπότε τα σημεία Β, Η και Μ είναι συνευθειακά.

Γ56. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 100^0$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Στην προέκταση της διχοτόμου ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ = ΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι: ΕΖ ⊥ ΑΓ. **ΜΟ Ρουμανίας 2019**

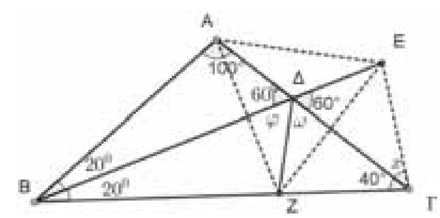
Λύση: Επειδή ΒΑ = ΒΖ, το σημείο Ζ είναι συμμετρικό του Α ως προς τη διχοτόμο της γωνία $\hat{B}$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΖΒΔ είναι ίσα, οπότε

$$\varphi = B\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}A = 60^0 \quad \text{και} \quad \omega = 180^0 - \left(60^0 + 60^0\right) = 60^0.$$

Επειδή ΒΓ = ΒΕ, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με

$$B\hat{\Gamma}E = B\hat{E}\Gamma = \frac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0 \Rightarrow x + 40^0 = 80^0$$

Άρα είναι $x = A\hat{\Gamma}E = 40^0$, οπότε τα τρίγωνα ΖΓΔ, ΓΔΕ έχουν μία πλευρά κοινή και τις δύο προσκείμενες γωνίες σε αυτή την πλευρά ίσες. οπότε είναι ίσα. Επομένως θα είναι ΓΕ = ΓΖ, οπότε η ΓΔ ως διχοτόμος του ΖΓΕ θα είναι και ύψος.



Διόρθωση

Στην άσκηση Α67 του προηγούμενου τεύχους οι αριθμοί α,β έγιναν εκ παραδρομής θετικοί, ενώ έπρεπε να είναι μη αρνητικοί. Η σωστή διατύπωση της εκφώνησης είναι:

Α67. Οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\alpha^{2014} + \beta^{2014} = \alpha^{2016} + \beta^{2016}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \le 2$.

Ασκήσεις για λύση

Γ57. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $\gamma(O, R)$. Ο κύκλος γ_1 εφάπτεται των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα σημεία Δ, Ε και Ζ, αντίστοιχα, έτσι ώστε η κορυφή Α και τα σημεία Ε, Ζ να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ΒΓ. Αν η ακτίνα του κύκλου γ_1 ισούται με R, να αποδείξετε ότι: $O\Delta \perp EZ$.

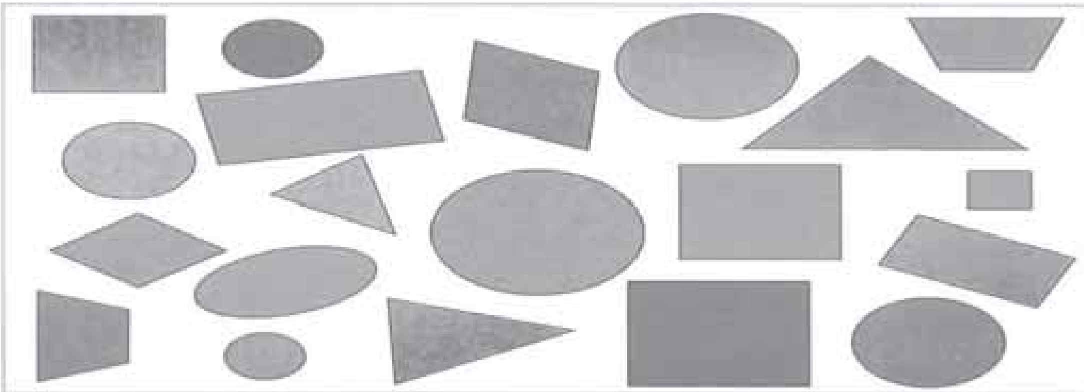
Α70. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y είναι διάφοροι του 0 και ικανοποιούν την ισότητα:

$$x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης $E = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

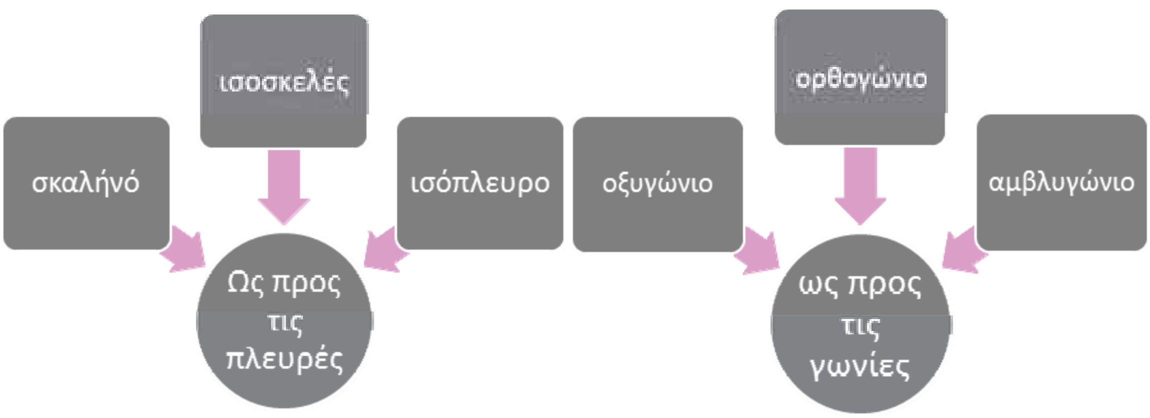
Α΄ Τάξη Βασικά γεωμετρικά σχήματα

Μαρία Σίσκου



◊ **ΤΡΙΓΩΝΑ**

- Αρχικά να πούμε ότι τα τρίγωνα χωρίζονται σε κατηγορίες ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες.

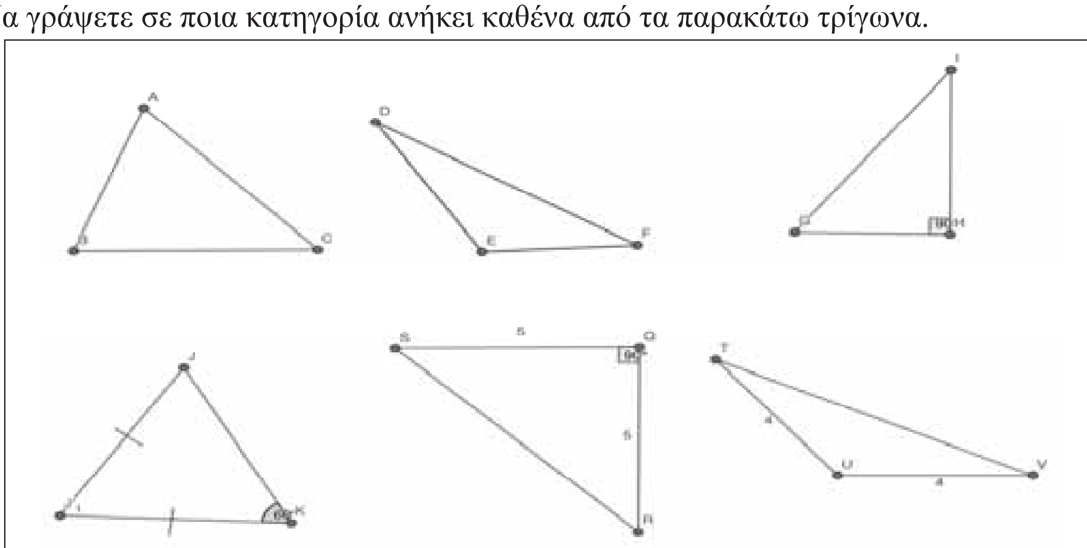


- Σκαληνό: Όλες οι πλευρές άνισες.
- Ισοσκελές: Δύο σκέλη (πλευρές) ίσες.
- Ισόπλευρο: Τρείς πλευρές ίσες.

- Οξυγώνιο: Όλες οι γωνίες οξείες.
- Ορθογώνιο: Μία ορθή γωνία.
- Αμβλυγώνιο: Μία αμβλεία γωνία.

Εφαρμογή 1.

Να γράψετε σε ποια κατηγορία ανήκει καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα.

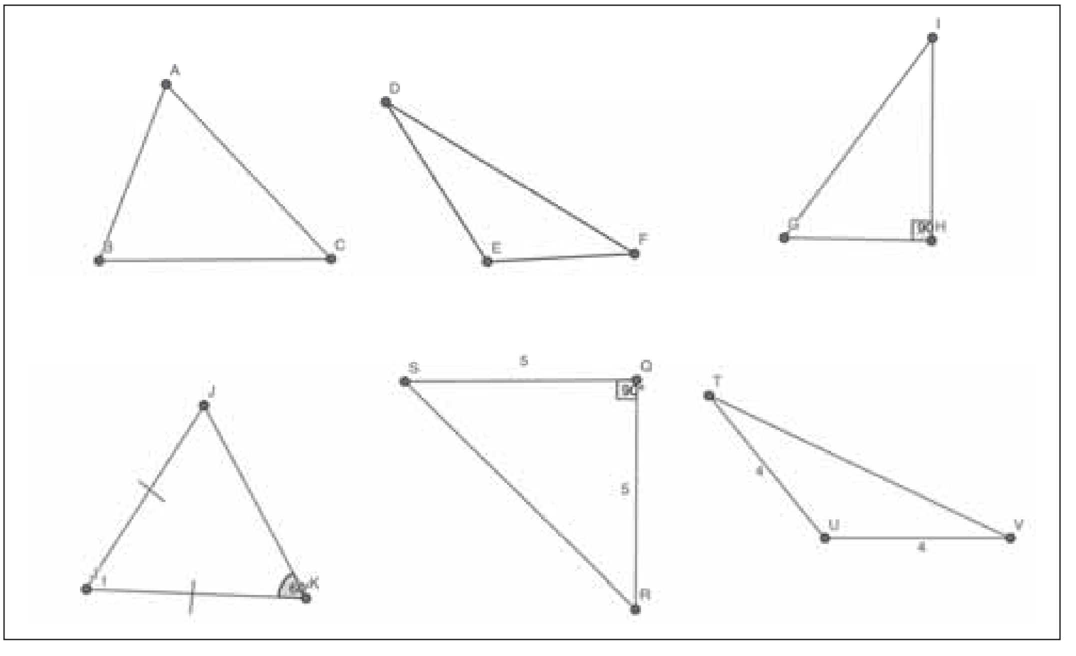


Τα τρίγωνα έχουν:
Κύρια στοιχεία
Δευτερεύοντα στοιχεία:

- Πλευρές
- Διάμεσος
- Ύψος
- Διχοτόμος
- Γωνίες

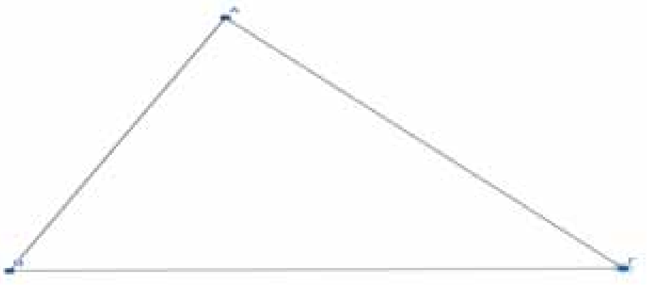
Διάμεσός: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.(**Χωρίζει τη μια πλευρά σε δύο ίσα τμήματα.**)
Ύψος: Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή κάθετα στην απέναντι πλευρά.
Διχοτόμος: Το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνία του τριγώνου, το οποίο φέρουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.(**Χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες.)**

Εφαρμογή 2.
Να σχεδιάσετε τα δευτερεύοντα στοιχεία στα παρακάτω σχήματα και να πείτε τι είναι το καθένα. Τα ύψη με κόκκινο, τις διαμέσους με πράσινο και τις διχοτόμους με μπλέ.



Σημαντική ιδιότητα τριγώνου:
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του ισούται με 180^o.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$$



Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.

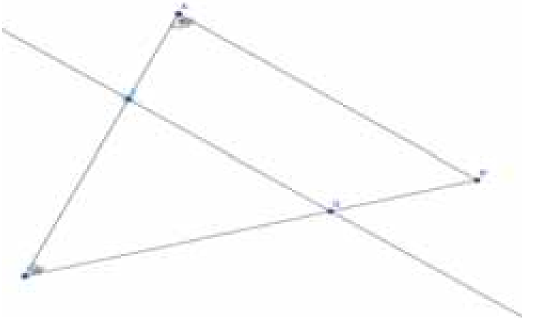
- **Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου.**
- **Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.**

Ιδιότητες ισοπλεύρου τριγώνου.

- **Όλες οι πλευρές του τριγώνου και όλες οι γωνίες είναι ίσες.**
- **Όλες οι διάμεσοι είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου**
- **Όλες οι διάμεσοι είναι ύψη και διχοτόμοι.**

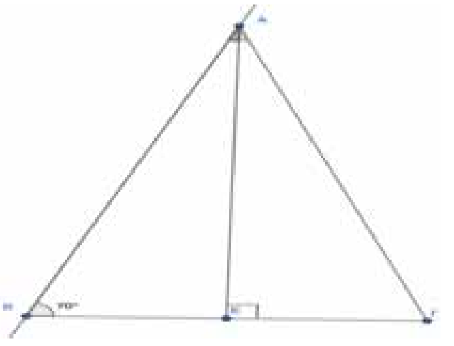
Εφαρμογή 3.

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\widehat{A}=80^0$ και $\widehat{B}=50^0$.Η ευθεία που το τέμνει στα Ε, Ζ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του σχήματος.



Εφαρμογή 4.

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΕ ύψος και διάμεσος να υπολογίσετε όλες τις γωνίες στο σχήμα.



◊ Παραλληλόγραμμα

- **Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Δηλαδή ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ**
- **Βάση** μπορεί να ονομαστεί κάθε πλευρά του και **ύψος** η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά.

Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων:

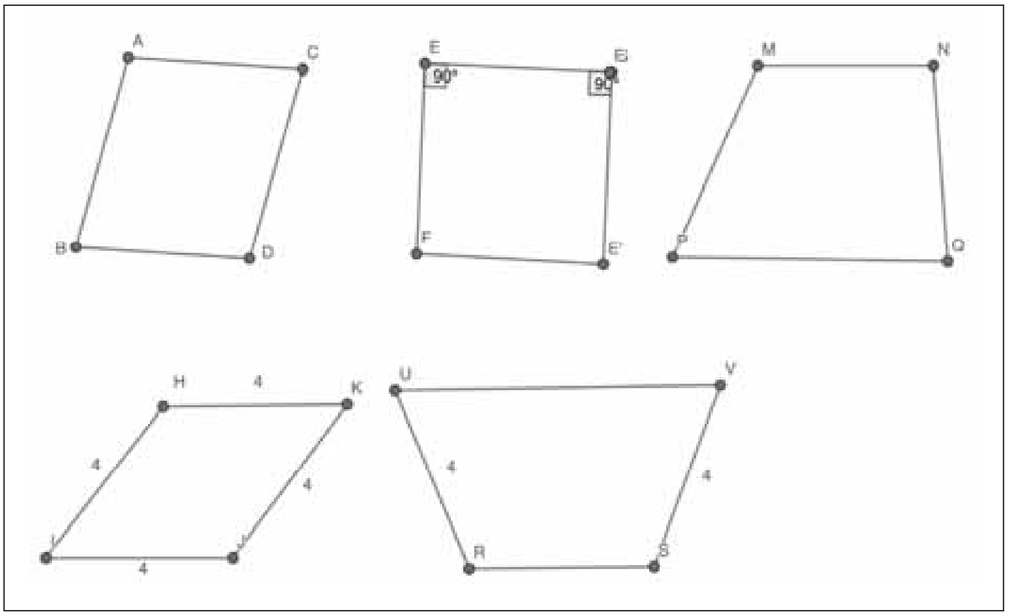
- **Ορθογώνιο** είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.
- **Ρόμβος** είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- **Τετράγωνο** είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες.

◊ Τραπέζιο

- **Τραπέζιο** είναι το τετράπλευρο που έχει δύο πλευρές παράλληλες.
- Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου ονομάζονται βάσεις και η απόσταση μεταξύ τους ονομάζεται ύψος.
- **Ισοσκελές** τραπέζιο ονομάζεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές ίσες.

Εφαρμογή 5.

Να γράψετε τι είδος τετράπλευρου είναι καθένα από τα παρακάτω σχήματα και να σχεδιάσετε ένα ύψος σε καθένα από αυτά.



Ιδιότητες πλάγιου παραλληλογράμμου.

- Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγώνιών του είναι κέντρο συμμετρίας του.
- Οι διαγώνιες διχοτομούνται.
- Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

Ιδιότητες ορθογωνίου.

- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται.

Ιδιότητες ρόμβου.

- Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται
- Οι διαγώνιες του διχοτομούν τις γωνίες του.

Ιδιότητες τετραγώνου.

- Οι ευθείες των διαγωνίων και οι μεσοκάθετοι των πλευρών είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιες είναι κάθετες, ίσες και διχοτομούνται
- Οι διαγώνιες του διχοτομούν τις γωνίες του.

Σημαντική σημείωση:_Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος ταυτόχρονα επομένως έχει τις ιδιότητες και του ορθογωνίου και του ρόμβου.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου.

- Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων του είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες.

Εφαρμογή 6.

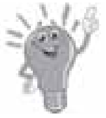
Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο, ένα ρόμβο, ένα τετράγωνο και ένα ισοσκελές τραπέζιο και με τη βοήθεια του χάρακα και του μοιρογνωμόνιού να επαληθεύσετε τις παραπάνω ιδιότητες για το κάθε σχήμα που έχετε σχεδιάσει.

Β΄ Τάξη

Ρητοί αριθμοί και πράξεις

Στυλιανός Μαραγκάκης – Ανδρέας Τριανταφύλλου

Οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί είναι δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμών που όχι μόνο χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά αλλά μας διευκολύνουν στην καθημερινή μας ζωή και σε συναλλαγές.



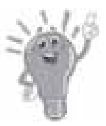
Πρόσημα λέγονται τα σύμβολα « + » και « – ». Τα χρησιμοποιούμε για να διακρίνουμε τους αριθμούς σε θετικούς και σε αρνητικούς. Έτσι όσοι αριθμοί έχουν **πρόσημο +** χαρακτηρίζονται ως **θετικοί αριθμοί** και όσοι έχουν το **πρόσημο –** χαρακτηρίζονται ως **αρνητικοί αριθμοί**. Π.χ. οι αριθμοί +2,+1/5,+0,15, +217/3 είναι **θετικοί αριθμοί,** ενώ οι αριθμοί –6, –25/3, –150,3, –1/3, –0,105 είναι **αρνητικοί αριθμοί**. Συχνά στους θετικούς αριθμούς παραλείπεται το πρόσημο. Δηλαδή, όταν σε ένα αριθμό δεν υπάρχει πρόσημο τότε εννοείται το «+»και ο αριθμός είναι θετικός.

Το **μηδέν** δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός. Γι’ αυτό και δεν γράφουμε πρόσημο μπροστά από αυτό.

Ομόσημοι λέγονται δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο. Δηλαδή είναι όλοι θετικοί ή όλοι αρνητικοί. Π.χ. οι αριθμοί +5, +57, +1,25 είναι ομόσημοι, όπως και οι αριθμοί –3, –16/5, –200, –1,3.

Ετερόσημοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο. Δηλαδή ο ένας είναι αρνητικός και ο άλλος θετικός. Π.χ. οι +8, –6 είναι ετερόσημοι.

Ακέραιοι αριθμοί (integer numbers)είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών 0, 1, 2, 3, 4, . . . και των αρνητικών αριθμών που προκύπτουν από αυτούς βάζοντάς τους μπροστά το πρόσημο «– ». Το σύνολο των ακέραιων αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$.

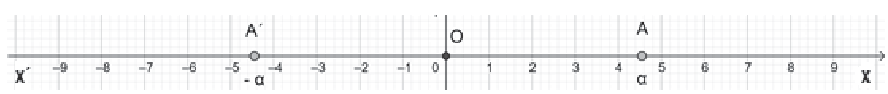


Έτσι έχουμε $\mathbb{Z} = \{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$.

Ρητοί αριθμοί (rational numbers) είναι οι ακέραιοι αριθμοί, τα κλάσματα, οι δεκαδικοί με συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων και οι περιοδικοί δεκαδικοί. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbb{Q}$.

Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία του άξονα x΄Ox

Στον ημιάξονα Οx θεωρούμε τον αντικείμενό του Οx΄, οπότε λέμε ότι έχουμε τον άξονα x΄Ox. Αν ένας θετικός αριθμός α αντιστοιχίζεται στο σημείο Α του ημιάξονα Οx, ο αριθμός –α αντιστοιχίζεται στο συμμετρικό στοιχείο Α΄ του Α ως προς κέντρο το Ο. Ο αριθμός **α** χαρακτηρίζεται ως **τετμημένη του σημείου Α** και ο αριθμός **–α τετμημένη του σημείου Α΄.**



Εφαρμογές

- **Να εκφράσετε με τη βοήθεια ρητών αριθμών, τις παρακάτω προτάσεις**

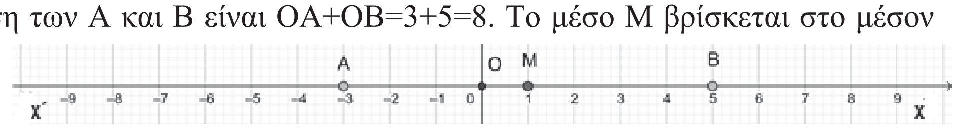
  1) Το υποβρύχιο βρίσκεται σε βάθος 75μ. **2) Η τιμή μειώθηκε κατά 6€**

  3) Η θερμοκρασία είναι 2 ^{o}C υπό το μηδέν.

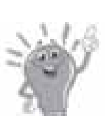
  ΛΥΣΗ: **1)** – 75μ. **2)** – 6€ **3)** – 2 ^{o}C

- Τα σημεία Α και Β έχουν στον άξονα των ρητών αριθμών, τετμημένες – 3 και +5. Να βρείτε την τετμημένη του μέσου Μ του ΑΒ.

  ΛΥΣΗ: Η απόσταση των Α και Β είναι ΟΑ+ΟΒ=3+5=8. Το μέσο Μ βρίσκεται στο μέσον της απόστασης, δηλαδή στο 4=8/2. Άρα το Μ βρίσκεται 4 θέσεις δεξιότερα του Α και επομένως η τετμημένη του Μ είναι 1.



Απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α ονομάζουμε την απόσταση του σημείου, με τετμημένη **α**, από την αρχή Ο του άξονα των ρητών αριθμών και τη συμβολίζουμε $|\alpha|$.



Σχόλιο: Στην πράξη απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού είναι ο αριθμός χωρίς το πρόσημό του. Άρα είναι πάντα θετικός αριθμός.

Αντίθετοι αριθμοί ονομάζονται 2 ετερόσημοι αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή. Επομένως αντίθετος του χ είναι ο – x και ισχύει $|-x| = |x|$.

Ο αντίθετος του +2 είναι ο – 2 καθώς και ο αντίθετος του – 2 είναι ο +2.

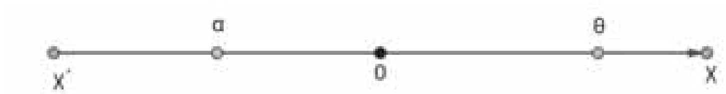
Η παράσταση – (+2) διαβάζεται ο αντίθετος του +2, και είναι ίση με – 2.

Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός. Π.χ. $|+3|=+3$

Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του. Π.χ. $|-5|=+5$

Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι 0, δηλαδή $|0|=0$

Σύγκριση Ρητών Αριθμών

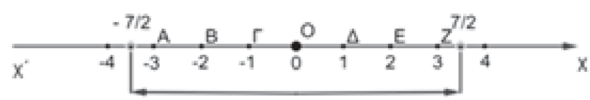


Μεγαλύτερος από 2 ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται **δεξιότερα** από τον άλλον στον άξονα x΄Ox. Επομένως: Κάθε θετικός ρητός θ είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό α, δηλαδή α<θ.

Κάθε **θετικός** ρητός θ είναι μεγαλύτερος από το 0, ενώ κάθε **αρνητικός** ρητός α είναι μικρότερος από το 0, δηλαδή α < 0 και θ > 0.

Εφαρμογές

- **Να βρείτε τους ακέραιους που έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη του 7/2.**



ΛΥΣΗ: οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι οι τετμημένες του άξονα χ΄Οχ , που η απόστασή τους είναι μικρότερη από το 7/2. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, τα σημεία αυτά είναι τα Α, Β, Γ, Ο, Δ, Ε, και Ζ.

- **Να βρείτε τους αντίθετους των αριθμών α) +5 β) – 6 γ) 1/2**

ΛΥΣΗ: α) Ο αντίθετος του +5 είναι ο αριθμός που έχει πρόσημο « – », και απόλυτη τιμή ίση με $|+5|=5$, άρα ο – 5. Δηλαδή –(+5) = – 5.

β) Ο αντίθετος του –6 είναι ο αριθμός που έχει πρόσημο «+» και απόλυτη τιμή ίση με $|-6|=6$, άρα ο +6. Δηλαδή –(–6)=+6.

γ) Ο αντίθετος του 1/2 = +1/2 είναι ο αριθμός – 1/2.

- **Να λύσετε την εξίσωση $|x|=3$**

ΛΥΣΗ: Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

Αν x > 0 τότε $|x|=x$, οπότε η εξίσωση γίνεται x=3. Αν x <0 τότε $|x|=-x$, οπότε η εξίσωση γίνεται –x=3, άρα x =–3. Επομένως η εξίσωση $|x|=3$ έχει 2 λύσεις $\begin{cases} x=-3, \text{ όταν } x<0 \text{ ή} \\ x=3, \text{ όταν } x>0 \end{cases}$

Πρόσθεση Ρητών Αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους **ομόσημους αριθμούς**, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

- Για να υπολογίσουμε το άθροισμα (+3) + (+7), προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών +3, +7, δηλαδή $|+3|+|+7|=3+7=10$, και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «+». Άρα (+3) + (+7) = +10. Ανάλογα (– 3) + (– 7) = –($|-3|+|-7|$) = –(3+7)= –10

Σχόλιο: Πρακτικά για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους **ομόσημους αριθμούς**, προσθέτουμε τους αριθμούς, και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα (+3) + (+7), προσθέτουμε τους αριθμούς 3, 7, δηλαδή, 3+7 = 10 και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο « + ». Άρα (+3) + (+7) = +10.

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα (–3) + (–7), προσθέτουμε τους αριθμούς 3, 7, δηλαδή, 3+7 = 10 και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο « – ». Άρα (–3) + (–7) = –10

Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους αριθμούς**, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα (+3)+(–7), αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη, δηλαδή $|-7|-|+3|=7-3=4$, και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «–». Άρα (+3)+(–7)=–4.

Σχόλιο: Στην πράξη για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους αριθμούς**, θεωρούμε τους αριθμούς, χωρίς το πρόσημό και από τον μεγαλύτερο αφαιρούμε τον μικρότερο, στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή,(δηλαδή το πρόσημο που είχε ο μειωτέος).

- Για να υπολογίσουμε το άθροισμα (+3) + (–7), θεωρούμε τους αριθμούς 7, 3 και από τον μεγαλύτερο αφαιρούμε τον μικρότερο, δηλαδή, 7 – 3 = 4 και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο « – ». Άρα (+3) + (–7) = – 4.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

Αντιμεταθετική ιδιότητα: α+β = β+α για κάθε α,β που ανήκουν στο $\mathbb{Q}$

Προσεταιριστική ιδιότητα: α+(β+γ) = (α+β)+γ για κάθε α,β,γ που ανήκουν στο $\mathbb{Q}$

Το 0 ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης: α+0 = 0+α = α για κάθε α που ανήκει στο $\mathbb{Q}$

Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι 0: α+(–α) = (–α)+α = 0

Εφαρμογές: Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

Α) (+6) + (+9)   Β) (–36) + (+6)   Γ) (–14) +(–6)   Δ) $\left(-\frac{8}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$

ΛΥΣΗ: Α) οι αριθμοί +6 , +9 είναι ομόσημοι, οπότε $(+6)+(+9)=+(6+9)=+15=15$.

Β) οι αριθμοί $-36,+6$ είναι ετερόσημοι, άρα $(-36)+(+6)=-(36-6)=-30$.

Γ) οι αριθμοί $-14,\ -6$ είναι ομόσημοι, άρα $(-14)+(-6)=-(14+6)=-20$.

Δ) οι αριθμοί $-\frac{8}{3},+\frac{2}{3}$ είναι ετερόσημοι, και έχουμε: $\frac{8}{3}>\frac{2}{3}$, άρα $\left(-\frac{8}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{6}{3}=-2$.

Άθροισμα πολλών προσθετέων

Για να υπολογίσουμε ένα άθροισμα πολλών προσθετέων, **διαγράφουμε τους αντίθετους όρους** και μετά διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν οι **προσθετέοι** είναι **ομόσημοι**, τότε προσθέτουμε τους αριθμούς, και στο αποτέλεσμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Αν στο άθροισμα υπάρχουν και **θετικοί και αρνητικοί προσθετέοι**, χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς, προσθέτουμε χωριστά τους θετικούς και χωριστά τους αρνητικούς, και καταλήγουμε σε άθροισμα δύο ετερόσημων αριθμών ή προσθέτουμε τους δύο πρώτους όρους, στο άθροισμά τους τον τρίτο όρο, στο νέο άθροισμα τον τέταρτο όρο κ.ο.κ., μέχρι να εξαντληθούν όλοι οι προσθετέοι.

Σχόλιο: Για να **απλοποιηθεί η γραφή ενός αθροίσματος πολλών προσθετέων,** συμφωνούμε να παραλείπουμε το σύμβολο της πρόσθεσης και τις παρενθέσεις, και να γράφουμε τους προσθετέους, τον ένα δίπλα στον άλλο με το πρόσημό τους. π.χ. $(+4)+(+6)+(-5)=+4+6-5=10-5=5$

Εφαρμογές: Α) Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

1) $(+4)+(+6)+(-5)+(-2)+(+5)+(-4)$ **2)** $(+5)+(+9)+(-3)+(-9)+(-5)+(+8)$

ΛΥΣΗ: 1) Παρατηρώντας τους όρους του αθροίσματος, βλέπουμε ότι υπάρχουν αντίθετοι αριθμοί, ο +4 και ο – 4 , ο +5 και ο – 5, οπότε μπορούμε να τους παραλείψουμε. Έτσι έχουμε $(+4)+(+6)+(-5)+(-2)+(+5)+(-4)=+6-2=+(6-2)=+4=4$.

2) Παρατηρώντας τους όρους του αθροίσματος, βλέπουμε ότι υπάρχουν αντίθετοι αριθμοί, ο +9 και ο – 9, ο +5 και ο – 5, οπότε μπορούμε να τους παραλείψουμε. Έτσι έχουμε $(+5)+(+9)+(-3)+(-9)+(-5)+(+8)=-3+8=+(8-3)=+5=5$.

Β) Να υπολογίσετε το άθροισμα, αφού πρώτα κάνετε απαλοιφή των παρενθέσεων. $(-3)+(+7)+(-5)+(+2)+(-8)+(+6)$

ΛΥΣΗ: $(-3)+(+7)+(-5)+(+2)+(-8)+(+6)=$ απαλοιφή παρενθέσεων

$= -3+7-5+2-8+6$ χωρισμός θετικών αρνητικών
$= +7+2+6-8-3-5$ πρόσθεση χωριστά θετικών και αρνητικών
$= +15-16$ πρόσθεση ετερόσημων αριθμών
$= -1$

Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β. Δηλαδή **α – β = α + (– β)**

Σχόλια **Απαλοιφή παρενθέσεων**

- Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το «+» ή δεν υπάρχει πρόσημο, μπορούμε να την βγάλουμε μαζί με το «+» (αν έχει), αφήνοντας τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους. π.χ. $((+13)+(-5))+((-6)+(+2))=(+13)+(-5)+(-6)+(+2)=13-5-6+2=4$.
- Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το « **–** », μπορούμε να την βγάλουμε μαζί με το « **–** » γράφοντας τους όρους που περιέχει με αλλαγμένα τα πρόσημά τους. π.χ. $-((+13)+(-5))-((-6)+(+2))=(-13)+(+5)+(+6)+(-2)=-13+5+6-2=-15+11=-4$.
- Σε μία παράσταση που περιέχει παρενθέσεις και αγκύλες, συνήθως εργαζόμαστε από μέσα προς τα έξω. Δηλαδή πρώτα απαλείφουμε τις παρενθέσεις μετά τις αγκύλες κ.ο.κ., με την αγκύλη να μετατρέπεται σε παρένθεση. π.χ. $(+13)-\left[(-5)-((-6)+2)\right]=+13-\left((-5)+(+6)+(-2)\right)=13+5-6+2=20-6=14$

  ή ξεκινάμε εκτελώντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις. π.χ.
  $(+13)-\left[(-5)-((-6)+2)\right]=13-\left(-5-(-6+2)\right)=13-\left(-5-(-4)\right)=13-(-5+4)=13-(-1)=13+1=14$

Εφαρμογές: Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

1) $A=1+\left[(-5)-((-6)+(+2))\right]$ **2)** $B=-2-\left[(-7)+((-3)+(5)+(-7))\right]-\left((-6)+(+2)\right)$

2) $\Gamma=5-\left[\alpha+(-3)\right]+(1-\beta)$ αν $\alpha=-1+(3-5)$ και $\beta=5-\left[(-2+7)+(-3)\right]$

3) Αν $\alpha-\beta=3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Delta=3-(\alpha+5)-\left[7-(\beta-3)\right]$

ΛΥΣΗ **1)** $A=1+\left[(-5)-((-6)+(+2))\right]$, εκτελούμε τις πράξεις, αρχίζοντας από το εσωτερικό των παρενθέσεων $A=1+\left[(-5)-(-6+2)\right]=1+\left(-5-(-4)\right)=1+(-5+4)=1+(-1)=0$.

2) $B=-2-\left[(-7)+((-3)+(5)+(-7))\right]-\left((-6)+(+2)\right)$, εκτελούμε τις πράξεις αρχίζοντας από το εσωτερικό των παρενθέσεων

$B=-2-\left[-7+(-3+5-7)\right]-(-6+2)=-2-(-7-5)-(-4)=-2-(-12)+4=-2+12+4=16-2=14$

3) Υπολογίζουμε αρχικά τα α, β. Αφού $\alpha=-1+(3-5)$ και $\beta=5-\left[(-2+7)+(-3)\right]$

έχουμε $\alpha=-1+(-2)$, δηλαδή $\alpha=-3$, $\beta=5-\left[(+5)+(-3)\right]$ οπότε $\beta=5-(+2)$, δηλαδή $\beta=3$

Επομένως $\Gamma=5-\left[\alpha+(-3)\right]+(1-\beta)=\left[-3+(-3)\right]+(1-3)=(-6)+(-2)=-8$

4) Από $\alpha-\beta=3$ έχουμε $\alpha=3+\beta$ οπότε αντικαθιστώντας το α στη Δ, έχουμε

$\Delta=3-(3+\beta+5)-\left[7-(\beta-3)\right]=3-(8+\beta)-(7-\beta+3)=3-8-\beta-(10-\beta)=3-8-\beta-10+\beta$

Επομένως παραλείποντας τους αντίθετους β και $-\beta$, έχουμε $\Delta=3-8-10=3-18=-15$

Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση Ρητών Αριθμών

Το σύμβολο της τελείας για το γινόμενο δύο ρητών αριθμών α,β συνήθως παραλείπεται. $\alpha\cdot\beta=\alpha\beta$

Πρόσημο γινομένου και πηλίκου ρητών αριθμών

- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο **ομόσημων** αριθμών είναι **θετικός** αριθμός
  Δηλαδή: αν α > 0 και β > 0, τότε αβ > 0 και α/β>0 αν α < 0 και β < 0, τότε αβ>0 και α/β >0
- Το γινόμενο και το πηλίκο δύο **ετερόσημων** αριθμών είναι **αρνητικός** αριθμός
  Δηλαδή: αν α > 0 και β < 0, τότε αβ < 0 και α/β<0 αν α < 0 και β>0, τότε αβ < 0 και α/β<0

Ισχύει και το αντίστροφο

Αν **αβ > 0 ή α/β > 0**, οι αριθμοί **α, β είναι ομόσημοι**, δηλαδή α > 0 και β > 0 ή α < 0 και β < 0.

Αν **αβ < 0 ή α/β < 0**, οι αριθμοί **α, β είναι ετερόσημοι**, δηλαδή α > 0 και β < 0 ή α < 0 και β > 0.

Σχόλια

- Το πηλίκο της διαίρεσης α : β ή α/β με $\beta \neq 0$, ονομάζεται λόγος του α προς το β και είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot x = \alpha$
- Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.
- Η διαίρεση α/β ή $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να γραφεί $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, επομένως για να διαιρέσουμε 2 ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή αντί για διαίρεση να κάνουμε πολλαπλασιασμό. $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$
- Δύο αριθμοί α και β διαφορετικοί από το 0 λέγονται αντίστροφοι όταν $\alpha \cdot \beta = 1$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

Αντιμεταθετική ιδιότητα: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ για κάθε α, β που ανήκουν στο $\mathbb{Q}$

Προσεταιριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ για κάθε α,β,γ που ανήκουν στο $\mathbb{Q}$

Το 1 ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού: $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$ για κάθε α που ανήκει στο $\mathbb{Q}$

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:
$\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$ για κάθε α,β,γ που ανήκουν στο $\mathbb{Q}$

Σχόλιο: Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε περισσότερους από 2 ετερόσημους αριθμούς, παίρνουμε τους αριθμούς χωρίς το πρόσημό τους και βρίσκουμε το αποτέλεσμα. Το πρόσημο στο αποτέλεσμα θα είναι (+) αν το πλήθος των αρνητικών αριθμών είναι ζυγός αριθμός, και (–) αν είναι μονός.

- Πολλαπλασιάζοντας οποιονδήποτε αριθμό (θετικό ή αρνητικό) με το 0, το αποτέλεσμα είναι μηδέν.
- Το μηδέν διαιρούμενο με οποιονδήποτε μη μηδενικό αριθμό, είναι 0.

Εφαρμογές: Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α. $(-3) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-7) \cdot (+2)$ **β.** $(-\frac{1}{2}) \cdot (+\frac{3}{8}) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (+\frac{8}{2})$

γ. $(-\frac{1}{2}) \cdot [(-4) + (-\frac{2}{3}) - (-3)]$ **δ.** $(-7) \cdot [(-4) : (+\frac{1}{2})] \cdot (+\frac{9}{2}) : (-9)$

Λύση **α.** το πλήθος των αρνητικών αριθμών είναι περιττό, άρα το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι αρνητικός αριθμός, οπότε $(-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-7)\cdot(+2) = -\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 2\right) = -21$

β. το πλήθος των αρνητικών αριθμών είναι άρτιο, άρα το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι θετικός αριθμός, οπότε $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{8}{2}\right) = +\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{2}\right) = +\frac{1}{2}$ ή $\frac{1}{2}$

γ. $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[(-4)+\left(-\frac{2}{3}\right)-(-3)\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-4-\frac{2}{3}+3\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{12}{3}-\frac{2}{3}+\frac{9}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = +\frac{5}{6}$

δ. Αντί διαίρεσης κάνουμε πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του διαιρέτη
$(-7)\cdot\left[(-4):\left(+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(+\frac{9}{2}\right):(-9) = (-7)\cdot\left[(-4)\cdot(+2)\right]\cdot\left(+\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right) = (-7)\cdot(-8)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(7\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\right) = -28$

Να λυθεί η εξίσωση: $\left[(-16):\left(+\frac{12}{3}\right)+(+17):(-0,17)\right]:x = \left(-\frac{51}{10}\right):(+0,03)+66$.

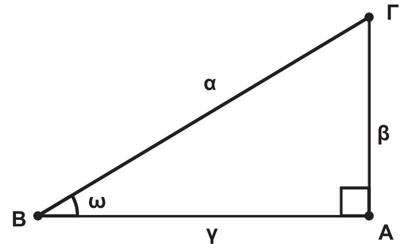
Λύση: Εκτελούμε τις πράξεις στο εσωτερικό της αγκύλης της εξίσωσης και μετατρέπουμε τις διαιρέσεις σε γινόμενα, και έχουμε $\left[(-16):(+4)+(+17):\left(-\frac{17}{100}\right)\right]:x = \left(-\frac{51}{10}\right):\left(+\frac{3}{100}\right)+66$

$\left[(-16)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+(+17)\cdot\left(-\frac{100}{17}\right)\right]:x = \left(-\frac{51}{10}\right)\cdot\left(+\frac{100}{3}\right)+66$ $\quad ((-4)+(-100)):x = (-170)+66$, οπότε $(-104):x = -104$, άρα $x = (-104):(-104)$ Δηλαδή $x = 1$.

Τριγωνομετρία Γ΄ Γυμνασίου

Αρδαβάνη Καλλιόπη – Μάλλιαρης Χρήστος

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας, ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Για την οξεία γωνία ω του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) θυμόμαστε ότι:



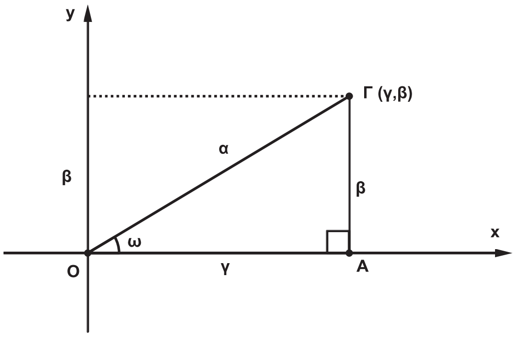
$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Παρατηρούμε ότι: $0 < \eta\mu\omega < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$ αφού η κάθετη πλευρά (ΑΒ ή ΑΓ) είναι πάντα μικρότερη από την υποτείνουσα (ΒΓ).

Προσαρμόζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ώστε η κορυφή Β να συμπίπτει με την αρχή Ο των αξόνων και η πλευρά ΒΑ να είναι πάνω στην ημιευθεία Οx.



Παρατηρούμε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (γ,β) και οι προηγούμενοι τύποι γίνονται:

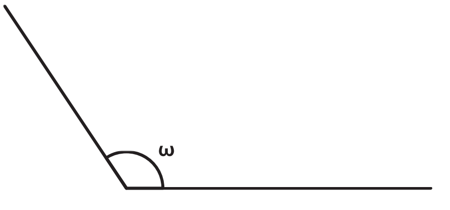
$$\eta\mu\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου Γ}}{\text{απόσταση του σημείου Γ από το Ο}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{τετμημένη του σημείου Γ}}{\text{απόσταση του σημείου Γ από το Ο}}$$

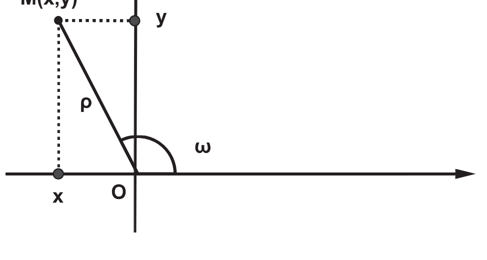
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου Γ}}{\text{τετμημένη του σημείου Γ}}$$

Με τη βοήθεια του ορθοκανονικού συστήματος θα ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αμβλείας γωνίας.

Έστω $90^o < \hat{\omega} < 180^o$ την τοποθετούμε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ώστε



η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο Ο (αρχή των αξόνων), η μία πλευρά της να είναι πάνω στον ημιάξονα Οx και η άλλη πλευρά να βρεθεί στο 2^o τεταρτημόριο.



Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ πάνω στην πλευρά αυτή (Μ διαφορετικό από το Ο) με συντεταγμένες Μ(x,y).

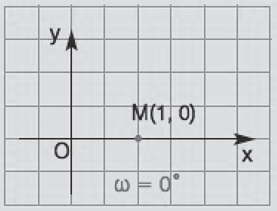
Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου Μ}}{\text{απόσταση του σημείου Μ από το Ο}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του σημείου Μ}}{\text{απόσταση του σημείου Μ από το Ο}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου Μ}}{\text{τετμημένη του σημείου Μ}} = \frac{y}{x}$$

Όπου $\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. Γενικά: αν $0^o \le \hat{\omega} \le 180^o$ και σημείο M(x,y) τότε ισχύουν τα παραπάνω. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0^o, 90^o και 180^o.

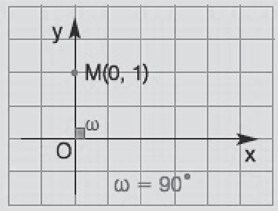


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx π.χ. το Μ(1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 0°$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$ημ0° = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$συν0° = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$εφ0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

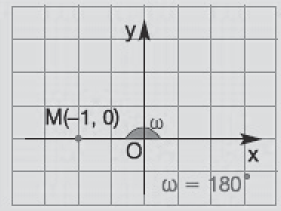


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οy π.χ. το Μ(0,1), τότε $\omega = x\hat{O}M = 90°$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$ημ90° = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$συν90° = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

εφ90° δεν ορίζεται (γιατί x=0)



Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx′ π.χ. το Μ(–1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 180°$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$ημ180° = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$συν180° = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$εφ180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

Παρατηρούμε ότι:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \text{ (γιατί;) και } \frac{ημω}{συνω} = εφω \text{ (γιατί;)}$$

➔ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Θα υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x\hat{O}M$ όταν:

- **i.** **Μ(–3,4)**
- **ii.** ***η πλευρά ΟΜ είναι πάνω στην ευθεία (ε) με εξίσωση y=–3x και το σημείο Μ έχει τετμημένη ίση με –1.***

i. Όταν Μ(–3,4) έχω: $\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Άρα:

$$ημω = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου M}}{\text{απόσταση του σημείου M από το O}} = \frac{4}{5}$$

$$συνω = \frac{\text{τετμημένη του σημείου M}}{\text{απόσταση του σημείου M από το O}} = \frac{-3}{5}$$

$$εφω = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου M}}{\text{τετμημένη του σημείου M}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

ii. Το σημείο Μ έχει τετμημένη –1 και βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση y=–3x άρα θα πρέπει για χ=–1: y = –3 · (–1) = 3, συνεπώς το σημείο Μ έχει συντεταγμένες Μ(–1,3) και όμοια με το (i) θα έχουμε:

$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

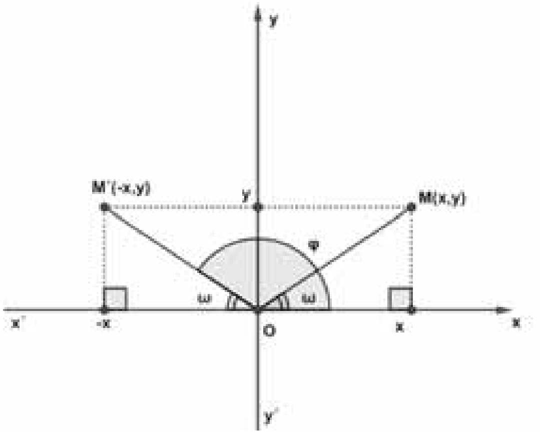
Άρα:

$$ημω = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου M}}{\text{απόσταση του σημείου M από το O}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$συνω = \frac{\text{τετμημένη του σημείου M}}{\text{απόσταση του σημείου M από το O}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$$

$$εφω = \frac{\text{τεταγμένη του σημείου M}}{\text{τετμημένη του σημείου M}} = \frac{3}{-1} = -3$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ



Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων παίρνουμε σημείο M(x,y) και το συμμετρικό του M΄ ως προς τον άξονα y΄y.
Το σημείο M΄ έχει συντεταγμένες (–x,y)
και OM = OM΄= ρ.
Οι γωνίες $x\hat{O}M = x΄\hat{O}M΄ = \hat{\omega}$,
άρα $x\hat{O}M΄ = 180^o - \hat{\omega}$ επομένως οι γωνίες $\hat{\omega} = x\hat{O}M$ και $\hat{\varphi} = x\hat{O}M΄$ είναι παραπληρωματικές.

Για τις γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ έχουμε:

$ημω = \frac{y}{ρ}$ $\qquad$ $ημφ = \frac{y}{ρ}$

$συνω = \frac{x}{ρ}$ $\qquad$ $συνφ = \frac{-x}{ρ} = -\frac{x}{ρ}$

$εφω = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $εφφ = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$

Άρα παρατηρούμε ότι δύο παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετα συνημίτονα και εφαπτομένες.

Γενικά

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° – ω ισχύουν

- $ημ(180^\circ - ω) = ημω$
- $συν(180^\circ - ω) = -συνω$
- $εφ(180^\circ - ω) = -εφω$

➔ ΑΣΚΗΣΗ 2:

Υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπληρωματικών γωνιών των 30^o , 45^o και 60^o.

Η παραπληρωματική γωνία των 30^o είναι η γωνία των 150^o και έχουμε:

$ημ\ 150 = ημ\ (180–30) = ημ\ 30 = \frac{1}{2}$

$συν\ 150 = συν\ (180–30) = –συν\ 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$εφ\ 150 = εφ\ (180–30) = –εφ\ 30 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Η παραπληρωματική γωνία των 45^o είναι η γωνία των 135^o και έχουμε:

$ημ\ 135 = ημ\ (180–45) = ημ\ 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$συν\ 135 = συν\ (180–45) = –συν\ 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$εφ\ 135 = εφ\ (180–45) = –εφ\ 45 = –1$

Η παραπληρωματική γωνία των 60^o είναι η γωνία των 120^o και έχουμε:

$ημ\ 120 = ημ\ (180–60) = ημ\ 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$συν\ 120 = συν\ (180–60) = –συν\ 60 = -\frac{1}{2}$

$εφ\ 120 = εφ\ (180–60) = –εφ\ 60 = -\sqrt{3}$

➔ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Να υπολογίστε τις παραστάσεις:

$Α= συν75^o+ημ115^o –ημ65^o +συν105^o$

$Β=ημ(180^o –φ)–ημφ$

$Γ=ημ1^o +ημ2^o +ημ3^o + … + ημ90^o –ημ91^o –ημ92^o – … – ημ179^o –ημ180^o$

Α=συν75^o+ημ115^o–ημ65^o+συν105^o=
=συν75^o+ημ(180^o–65^o)–ημ65^o+συν(180^o–75^o)=
=συν75^o+ημ65^o–ημ65^o–συν75^o=0
Β=ημ(180–φ)–ημφ=ημφ–ημφ=0
Γ=ημ1^o +ημ2^o +ημ3^o + … + ημ90^o –ημ91^o –ημ92^o – … – ημ179^o –ημ180^o =
=ημ1^o +ημ2^o +ημ3^o + … + ημ90^o –ημ(180^o – 89^o)–ημ(180^o – 88^o) – … – ημ(180^o – 1^o) – ημ180^o =
=ημ1^o +ημ2^o +ημ3^o + … + ημ90^o –ημ89^o–ημ88^o – … – ημ1^o –ημ0^o =
=(ημ1^o– ημ1^o)+ (ημ2^o– ημ2^o)+ …+(ημ89^o– ημ89^o)+ ημ90^o –ημ0^o =1–0=1

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 4:**

Αν $16\,\text{συνω} + 5 = 0$ και $90 < \widehat{\omega} < 180$, να υπολογίσετε τη ημω και εφω

$16\,\text{συνω} + 5 = 0$ ή συνω = $-\frac{5}{16}$, αλλά $\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$ ή $\text{ημ}^2\omega + \left(-\frac{5}{16}\right)^2 = 1$ ή $\text{ημ}^2\omega = 1 - \left(-\frac{5}{16}\right)^2 = \frac{231}{256}$ ή $\text{ημω} = \pm\frac{\sqrt{231}}{\sqrt{256}} = \pm\frac{\sqrt{231}}{16}$ αλλά επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία άρα ημω>0 συνεπώς $\text{ημω} = \frac{\sqrt{231}}{16}$ και $\text{εφω} = \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}} = \frac{\frac{\sqrt{231}}{16}}{-\frac{5}{16}} = -\frac{\sqrt{231}}{5}$

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 5:**

Να βρείτε τη γωνία ω αν γνωρίζουμε ότι $\text{συνω} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Γνωρίζουμε ότι: $\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$ ή $\text{ημ}^2\omega + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$ ή $\text{ημ}^2\omega + \frac{2}{4} = 1$ ή $\text{ημ}^2\omega = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$ ή $\text{ημω} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, αλλά επειδή συνω>0 η γωνία ω θα είναι οξεία άρα και το ημω>0 δηλαδή $\text{ημω} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $\widehat{\omega} = 45^o$

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 6:**

Να λύσετε τις εξισώσεις: $\text{συνx} = -\frac{1}{2}$ και $\text{εφx} = -1$

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 7:**

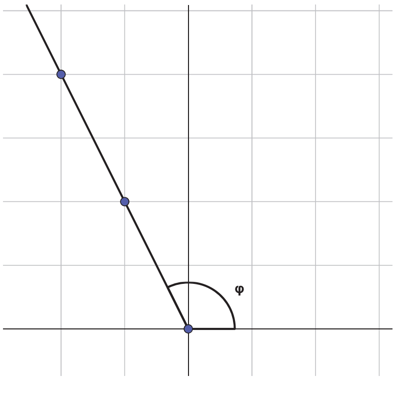
Να δείξετε ότι:
$\text{ημ}^3\omega + \text{ημω}\ \text{συν}^2\omega = \text{ημω}$
$\text{συν}^2\omega\ \ \text{εφ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 8:**

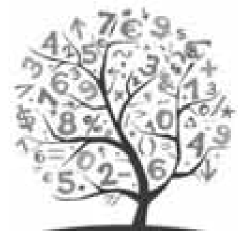
Να δείξετε ότι $\text{συν}^2 30 + \text{συν}^2 120 = 1$

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 9:**

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ του παρακάτω σχήματος:

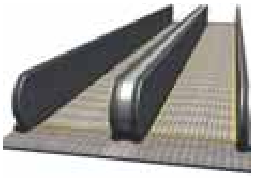


Ειδικά Θέματα για τους μαθητές των Β΄ – Γ΄ Γυμνασίου



Β΄ Γυμνασίου

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου



1) Για να διασχίσει ο Ερμής τον κυλιόμενο διάδρομο, όταν αυτός λειτουργεί, χρειάζεται 24 δευτερόλεπτα όταν συγχρόνως βαδίζει πάνω σε αυτόν. Όταν ο κυλιόμενος διάδρομος δεν λειτουργεί χρειάζεται 1 λεπτό να βαδίσει επάνω σε αυτόν.
Πόσο χρόνο θα χρειαστεί ο Ερμής να τον διασχίσει όταν λειτουργεί ο διάδρομος αλλά ο Ερμής παραμένει ακίνητος πάνω σε αυτόν;

2) Να βρείτε έναν τετραψήφιο αριθμό της μορφής ααββ, που να είναι τέλειο τετράγωνο. (ααββ σημαίνει ότι το ψηφίο των χιλιάδων είναι ίδιο με το ψηφίο των εκατοντάδων και το ψηφίο των δεκάδων είναι ίδιο με το ψηφίο των μονάδων).

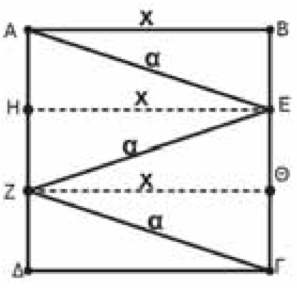
3) Ένας αγγειοπλάστης θα πρέπει να κατασκευάσει έναν ορισμένο αριθμό από βάζα σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μερικών ημερών.
Υπολογίζει ότι αν κατασκευάζει 2 βάζα περισσότερα την ημέρα, από αυτά που έχει προγραμματίσει, θα ολοκληρώσει την δουλειά που του ανέθεσαν σε 3 ημέρες νωρίτερα από τον αρχικό προγραμματισμό. Αν κατασκευάζει 4 βάζα περισσότερα την ημέρα, από τα προγραμματισμένα, θα ολοκληρώσει την δουλειά του 5 ημέρες νωρίτερα από τον αρχικό προγραμματισμό. Πόσα βάζει θα πρέπει να κατασκευάσει και ποιος ήταν ο αρχικός χρονικός προγραμματισμός;

4) Εννέα αριθμοί είναι γραμμένοι σε μία σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο. Ο μεσαίος αριθμός είναι ο μέσος όρος των εννέα αυτών αριθμών. Ο μέσος όρος των 5 μεγαλύτερων αριθμών είναι 68 και ο μέσος όρος πέντε μικρότερων είναι είναι 44. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 9 αυτών αριθμών.

5) Ένας μαθητής συμμετείχε σε ένα γραπτό διαγωνισμό λύσης 7 προβλημάτων στον οποίο για κάθε λύση, ανάλογα με τη δυσκολία του προβλήματος και την πληρότητα της απάντησης, η βαθμολογία ήταν 5 ή 4 ή 3 ή 2 ή 1 ή 0.
Τελικά ο μαθητής συγκέντρωσε 30 βαθμούς. Πόσες είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις βαθμολογίας στις λύσεις που έδωσε (για παράδειμα ένας συνδυασμός είναι 5, 5, 5, 4, 4, 4, 3)

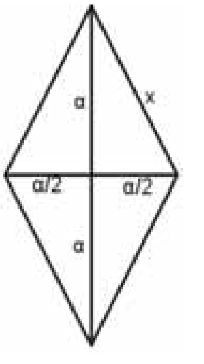
Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 122

1) Έστω **α** το ψηφίο των δεκάδων και **β** το ψηφίο των μονάδων, οπότε ο αριθμός είναι ίσος με 10α+β. Ο αριθμός που προκύπτει από την αντιστροφή της σειράς των ψηφίων του είναι ο αριθμός 10β+α οπότε το άθροισμά τους είναι ο αριθμός 11α+11β δηλαδή ο αριθμός 11·(α+β). Αυτός ο αριθμός για να είναι τετράγωνος θα πρέπει υποχρεωτικά α+β=11 και καθώς α και β είναι μονοψήφιοι αριθμοί όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί δίνουν τους αριθμούς 29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65.



2) Έστω x η πλευρά του τετραγώνου άρα το εμβαδόν του θα είναι ίσο με x^2. Στα δύο ισοσκελή τρίγωνα φέρνουμε τα ύψη ΕΗ και ΖΘ οπότε προκύπτει άμεσα ότι ΑΗ=ΗΖ και ΕΘ=ΘΓ. Αλλά ΖΗ=ΕΘ και ΑΗ=ΒΕ που σημαίνει ότι τα τμήματα ΑΗ, ΗΖ, ΖΔ, ΒΕ, ΕΘ και ΘΓ είναι ίσα μεταξύ τους άρα κάθε ένα είναι ίσο με $\frac{x}{3}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει: $x^2+\frac{x^2}{9}=\alpha^2$ οπότε $\frac{10x^2}{9}=\alpha^2$ και επομένως $x^2=\frac{9\alpha^2}{10}$

3) Αν ονομάσουμε α τη μικρή διαγώνιο και 2α τη μεγάλη τότε εύκολα προκύπτει ότι το εμβαδόν Ε του ρόμβου δίνεται από την σχέση $E=\frac{2\alpha\cdot\alpha}{2}=\alpha^2$. Από εδώ προκύπτει ότι $\alpha=\sqrt{E}$. Σειρά έχει τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα από τα 4 ίσα τρίγωνα από όπου προκύπτει αρχικά $x^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{5\alpha^2}{4}$ και με βάση τα προηγούμενα $x^2=\frac{5E}{4}$ άρα $x=\frac{1}{2}\sqrt{5E}$



4) Το τρίτο κλάσμα μετά από τα $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ θα είναι το $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$. Το επόμενο κλάσμα θα είναι το $\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{1}{8}$ και αν εργαστούμε όμοια θα προκύψει το επόμενο κλάσμα $\frac{1}{13}$. Αν παρατηρήσουμε τώρα τη σειρά των κλασμάτων $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{13}$ είναι φανερό ότι ο αριθμητής είναι σταθερά το 1 ο δε παρονομαστής προκύπτει από το άθροισμα των παρονομαστών των δύο προηγουμένων κλασμάτων άρα το επόμενο κλάσμα θα είναι το $\frac{1}{21}$ και το 10^o θα είναι το $\frac{1}{144}$.

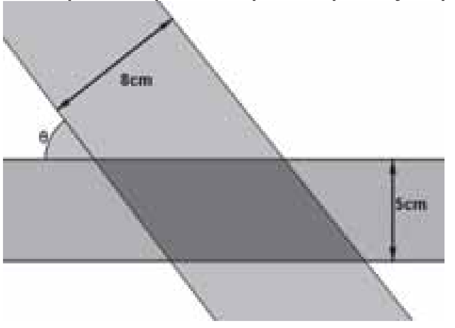
5) Για να πηγαίνουν όλα τα παιδιά σχολείο θα πρέπει οι ηλικίες τους να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 5 και μικρότερες ή ίσες του 18.
Καθώς γνωρίζουμε το γινόμενο των ηλικιών τους είναι προφανές ότι οι ηλικίες τους θα είναι διαιρέτες αυτού του αριθμού δηλαδή του 60.060. Εδώ το καλύτερο που θα έχουμε να κάνουμε είναι να αναλύσουμε τον αριθμό αυτό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η ανάλυση μας δίνει: 60.060=2·2·3·5·7·11·13. Μία σειρά κατάλληλων συνδυασμών των πρώτων αυτών αριθμών μπορεί να είναι 2·3=6, 2·7=14, 5, 11, 13. Προφανώς αυτός ο συνδυασμός των πρώτων παραγόντων δεν είναι μοναδικός, για παράδειγμα θα μπορούσε να είναι 2·5=10, 2·3=6, 7, 11, 13 όμως σε κάθε περίπτωση το πλήθος των ηλικιών που προκύπτουν είναι 5 (μιλάμε για ηλικίες παιδιών που πάνε σχολείο).

Γ΄ Γυμνασίου

1) Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z με βάση τις παραμέτρους α, β, γ για τις οποίες ισχύει:

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)\neq 0$$
$$\alpha^3+\alpha^2x+\alpha y+z=0$$
$$\beta^3+\beta^2x+\beta y+z=0$$
$$\gamma^3+\gamma^2x+\gamma y+z=0$$

2) Διαθέτουμε δύο λωρίδες με ύψος 5cm 8cm αντίστοιχα. Με πιά γωνία θ θα πρέπει να τοποθετήσουμε την μία πάνω από την άλλη ώστε η κοινή τους περιοχή να έχει εμβαδόν $100cm^2$;



3) Δίνονται οι αριθμοί α=0,123451234512345………… και β=0,987659876598765…………
Να εκφράσετε το άθροισμα α+β σε μορφή κλάσματος.

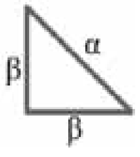
Υπόδειξη: Να αξιοποιήσετε την ισότητα $\frac{1}{3}$=0,333333333.......

4) Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ να αποδείξετε ότι για κάθε περιττό αριθμό ν ισχύει: $\frac{1}{\alpha^\nu}+\frac{1}{\beta^\nu}+\frac{1}{\gamma^\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu}$

5) Ένας εργαζόμενος μετακινείται από και προς την εργασία του είτε με τραίνο είτε με λεωφορείο. Εάν το πρωί πηγαίνοντας από το σπίτι του στην εργασία χρησιμοποιεί τραίνο τότε το απόγευμα επιστρέφει με λεωφορείο. Αν επιστρέφει από την εργασία του στο σπίτι του με τραίνο τότε το πρωί έχει πάει στην εργασία του με λεωφορείο.
Κατά την διάρκεια ορισμένων εργάσιμων ημερών ο συγκεκριμένος εργαζόμενος έχει χρησιμοποιήσει 8 φορές το λεωφορείο για να πάει στη δουλειά του το πρωί, έχει επιστρέψει από τη δουλειά του στο σπίτι 15 φορές με λεωφορείο ενώ έχει συνολικά μετακινηθεί με τραίνο 9 φορές (είτε να πάει είτε να επιστρέψει από την εργασία του).
Πόσες είναι οι εργάσιμες ημέρες στις οποίες αναφέρεται το πρόβλημα;

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 122

1) Ας δουλέψουμε αντίστροφα (συνήθως λέμε ας διατηρήσουμε τις ισοδυναμίες).
Το $\beta+\gamma\le\sqrt{2}\alpha$ είναι ισοδύναμο με το $(\beta+\gamma)^2\le 2\alpha^2$ δηλαδή με το $\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot\gamma\le 2\alpha^2$ και καθώς $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ έχουμε ισοδύναμα $2\beta\cdot\gamma\le\alpha^2$ δηλαδή $2\beta\cdot\gamma\le\beta^2+\gamma^2$ ή $\beta^2+\gamma^2\ge 2\beta\cdot\gamma$ το οποίο όμως ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική σχέση $\beta+\gamma\le\sqrt{2}\alpha$.
Είναι προφανές ότι $\beta^2+\gamma^2=2\beta\cdot\gamma$ όταν β=γ δηλαδή όταν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Ας δούμε και Γεωμετρικά το παραπάνω συμπέρασμα



Καθώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές ορθογώνιο θα έχουμε $\alpha=\sqrt{2}\beta$ που σημαίνει $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha$ ή $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha$ ή $2\beta=\sqrt{2}\alpha$ που εκφράζει την ισότητα $\beta+\gamma=\sqrt{2}\alpha$.

2) Αφού $x+4y=5$ έχουμε $x^2+9y^2=(5-4y)^2+9y^2=25y^2-40y+25=(5y)^2-2\cdot4\cdot5y+16+9=(5y-4)^2+9$. Αυτή η παράσταση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό y είναι πάντα μεγαλύτερη είτε ίση του 9 (γιατί;) και επομένως η παράσταση $\sqrt{x^2+9y^2}$ μπορεί να πάρει ελάχιστη τιμή τον αριθμό 3.

3) Έστω t ο χρόνος που κάνει το τραίνο να καλύψει την απόσταση των 120km κάθε φορά που αναχωρεί από τον σταθμό Α στην προγραμματισμένη του ώρα με την συνηθισμένη ταχύτητά του u οπότε ισχύει: $t=\frac{120}{u}$ (1). Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν ελαττώνει την ταχύτητα u κατά 4km/h. Εδώ ο χρόνος που κάνει για να καλύψει την ίδια απόσταση είναι t+1 και ισχύει: $t+1=\frac{120}{u-4}$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει: $\frac{120}{u}=\frac{120}{u-4}-1$ από όπου προκύπτει η εξίσωση:

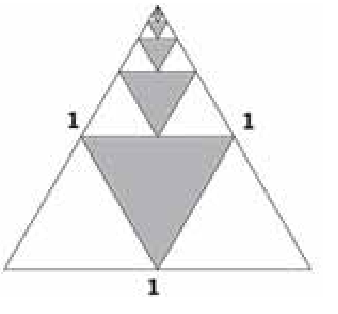
$$u^2-4u-480=0 \text{ ή } (u+20)\cdot(u-24)=0 \text{ και επομένως } u=24\text{km/h}.$$

4) Στην παράσταση $\frac{(\alpha^2+\alpha+1)\cdot(\beta^2+\beta+1)\cdot(\gamma^2+\gamma+1)\cdot(\delta^2+\delta+1)}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta}$ ας απομονώσουμε κατάλληλα τους παράγοντες των γινομένων.

Συγκεκριμένα $\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha}=\alpha+\frac{1}{\alpha}+1$. Εδώ τώρα θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ (γιατί;) άρα $\alpha+\frac{1}{\alpha}+1\geq 3$.

Όμοια $\beta+\frac{1}{\beta}+1\geq 3$ και $\beta+\frac{1}{\beta}+1\geq 3$ άρα η αρχική παράσταση με τα γινόμενα είναι μεγαλύτερη ή το πολύ ίση με 81 για κάθε θετική τιμή των α, β, γ, δ.

5) α) Παρατηρήστε ότι το σκιασμένο τρίγωνο στην πρώτη γραμμή έχει εμβαδόν το $\frac{1}{4}$ ολόκληρου του τριγώνου, στη δεύτερη γραμμή το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο έχει εμβαδόν το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{4}$ ολόκληρου άρα το $\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ ολόκληρου. Αν σκεφτούμε επαγωγικά



στην τρίτη γραμμή το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου θα είναι το $\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$ και στην τέταρτη γραμμή θα είναι το $\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}$ ολόκληρου του τριγώνου.

β) Παρατηρούμε ότι κάθε σκιασμένο τρίγωνο καλύπτει το $\frac{1}{3}$ κάθε γραμμής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι συνολικά όλα τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα καλύπτουν το $\frac{1}{3}$ ολόκληρου του τριγώνου.

γ) Με βάση τα α) και β) θα έχουμε ότι $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}+..............=\frac{1}{3}$

Αλληλογραφία

Επιμέλεια: Παναγιώτης Χριστόπουλος

Μαθηματικά τυφλοίς όμμασι

Ειρήνη Κυριακή Χρόνη

Τα μαθηματικά είναι μια διεθνής και αυστηρά ακριβής γλώσσα. Είναι γλώσσα που δεν υπάρχει καμιά δυσκολία να γίνει κατανοητή από κάθε άνθρωπο στη Γη όποια εθνική γλώσσα και αν ομιλεί. Στηρίζεται στη λογική μας και εν μέρει στις εμπειρίες μας. Η διδασκαλία τους μπορεί να γίνει ακόμα και σε μαθητές με προβλήματα όρασης. Αρκεί να αναλάβουν αυτό το έργο κατάλληλα καταρτισμένοι καθηγητές. Η διδασκαλία με τους παραδοσιακούς τρόπους σε μια τάξη μαζί με όλους τους μαθητές είναι δύσκολη.

Η τυφλότητα περιορίζει τις εμπειρίες του παιδιού, αφού μια πλειάδα πληροφοριών προσλαμβάνονται από τους οφθαλμούς. Αυτό σημαίνει πως ένα παιδί με πρόβλημα όρασης δε μπορεί να παρακολουθήσει μαθηματικά σε μια συνηθισμένη τάξη διδασκαλίας.

Η διεθνής έρευνα υποστηρίζει πως ένα τυφλό παιδί μπορεί να ανταποκριθεί επαρκώς με ορισμένες τροποποιήσεις και προσαρμογές των μεθόδων και των μέσων διδασκαλίας, οι οποίες αφορούν κυρίως την ανάπτυξη οπτικών εννοιών. Τα παιδιά αυτά δυσκολεύονται να ολοκληρώσουν σε περιορισμένο χρονικό πλαίσιο τις ατομικές διερευνητικές εργασίες τους. Για την εκμάθηση και εξάσκηση του μαθηματικού λόγου θα πρέπει να γίνουν κατανοητές οι έννοιες του χρόνου, της θέσης, της κατεύθυνσης, του μεγέθους, του σχήματος, της σχέσης, της διαφοροποίησης, της ακολουθίας, της ποσότητας, των πράξεων, της σύγκρισης, του συνδυασμού, της κατηγοριοποίησης, των σχημάτων κ.α. Έτσι κρίνεται απαραίτητη η χρήση μηχανημάτων ηχογράφησης (κασετόφωνο, ή άλλη συσκευή ψηφιακής καταγραφής ήχου) για την καταγραφή διαλέξεων, ειδικών συσκευών ανάγνωσης και γραφής, όπως πινακίδες και γραφίδες, οπτικά βοηθήματα, συστήματα κλειστών κυκλωμάτων τηλεόρασης, ηλεκτρονικές συσκευές για καταγραφή σημειώσεων, Η/Υ προσαρμοσμένοι με συνθετική ομιλία/μεγέθυνση/Braille. Απαιτείται εξοικείωση με τη χρήση ειδικών συσκευών για μαθηματικά και άλλες επιστήμες, π.χ. άβακας, ομιλούν κομπιουτεράκι, θερμόμετρο, ηλεκτρονική συσκευή για σημειώσεις σε Braille, εξειδικευμένο εξοπλισμό μετρήσεων, και Η/Υ προσαρμοσμένους με ομιλία/μεγέθυνση/οθόνη Braille.

Το 2003 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο ενέκρινε τον κώδικα Nemeth για τις θετικές επιστήμες και συνεπώς τον κλάδο των μαθηματικών. Επειδή οι αριθμοί συμπίπτουν με τα σημεία στίξης, για να τους ξεχωρίζουμε βάζουμε μπροστά από κάθε αριθμό τον ενδείκτη που ονομάζεται αριθμοδείκτης. Στους παρακάτω πίνακες φαίνεται η αντιστοίχιση των αριθμών με το σύστημα των έξι κουκίδων.

Αριθμοδείκτης	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
⠼	⠂	⠆	⠒	⠲	⠢	⠖	⠶	⠦	⠔	⠴

Τα διαφοροποιημένα ΑΠΣ και ΔΕΠΠΣ δίνουν ιδιαίτερη σημασία στο υλικό το οποίο διαφέρει από αυτό των άλλων μαθητών. Για τα μαθηματικά, που στηρίζονται κυρίως στις οπτικές εμπειρίες, κρίνεται απαραίτητη η χρήση εναλλακτικών μέσων και ποικιλία στη μέθοδο και τα υλικά. Έτσι οι τυφλοί μαθητές όχι μόνο δεν αποκλείονται από τη μαθησιακή διαδικασία, αλλά εξοικειώνονται και εκλεπτύνουν άλλες αισθήσεις όπως ο ήχος και η αφή. Προτείνεται ένα μαθησιακό περιβάλλον πλούσιο σε ήχους με πληροφορίες, επεξηγήσεις και γνώσεις στους μαθητές, αλλά και απτικό υλικό που περιλαμβάνει ειδικούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές, μηχάνημα PIAF που φτιάχνει ανάγλυφα σχήματα, ομιλούσες υπολογιστικές μηχανές, μεταφραστές της Braille, ανάγλυφους πίνακες και διαγράμματα, μαθηματικά όργανα με ενδείξεις σε γραφή Braille, δισδιάστατα ή τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, μαθηματικό κουτί με χάρακες με απτικά σημάδια, άβακες, χαρτί δίπλωσης και αναδίπλωσης, διάφορα σχεδιαστικά εργαλεία, προπλάσματα κ.α.

Ωστόσο, και το σώμα των ίδιων των μαθητών μπορεί να αποτελέσει εργαλείο μάθησης. Τα «μαθηματικά του Σώματος» είναι μια αποτελεσματική διδακτική μέθοδος για τη διδασκαλία διάφορων μαθηματικών εννοιών, όπως κατεύθυνση, διαστάσεις, αρίθμηση κτλ.. Σύμφωνα με αυτή, ο μαθητής με πρότυπο το σώμα του συγκρίνει μεγέθη με μονάδα μέτρησης το σώμα του, μετρά με τα βήματα και κατανοεί την έννοια της απόστασης την οποία υπολογίζει με το χρόνο που χρειάζεται για να τη διανύσει.

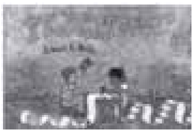
Μέχρι σήμερα δεν έχουν διασαφηνιστεί διαφοροποιημένες θεωρίες μάθησης ή «φόρμουλες-μοντέλα» που αφορούν τη διδασκαλία και την επαυξημένη αυτοδιάθεση των τυφλών παιδιών. Αδιαμφησβήτητα για τους τυφλούς μαθητές η κατάκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών όπως του σχήματος, της μορφής, του μεγέθους δεν είναι εύκολη. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ορισμένες δύσκολα κατανοήσιμες έννοιες και τεχνικές ευκολότερης προσέγγισής τους με διάφορα μέσα και εργαλεία.

Έννοιες	**Τεχνικές παρέμβασης – Παραδείγματα**
1.«Από το μέρος στο όλο» - διάκριση - ομαδοποίηση	Διδασκαλία «από το απλό στο σύνθετο»
2. Αριθμός	Διδασκαλία με χρήση ακουστικού και απτικού υλικού. Ανάλυση ακουστικών μοτίβων, σε συνδυασμό με κίνηση και απτική αναπαράσταση.
3. Πληθικότητα αριθμών	Διδασκαλία αριθμών από λέξη σε μέγεθος κι ύστερα σε σύνθετη μονάδα.
4. Επίλυση μαθηματικών προβλημάτων	Διδασκαλία με χρήση παραδειγμάτων, υλικών και μέσων από την καθημερινή ζωή. Πρόβλημα με αγοραπωλησία φρούτων με πραγματικά χρήματα.
5. Χωρική αίσθηση	Διδασκαλία με συνδυασμό αισθήσεων. Η κίνηση μέσα στο χώρο βοηθά στην κατανόηση των χωρικών σχέσεων και στην κατανόηση εννοιών της γεωμετρίας.
6. Αίσθησης του σχήματος, της μορφής, του μεγέθους μεγάλων χώρων ή αντικειμένων	Διδασκαλία με τη χρήση προπλασμάτων ή μικρών αντικειμένων. Για τη μέτρηση περιμέτρου χρησιμοποιείται η παλάμη ή ο χάρακας.
7. Γεωμετρικά σχήματα	Διδασκαλία με απτικό υλικό. Χρήση πλαστικών καλωδίων που επαναφέρονται εύκολα στο αρχικό τους σχήμα.
8. Μέτρηση	Διδασκαλία με μονάδα μέτρησης το σώμα και όχι το μέτρο.
9. Απόσταση	Διδασκαλία με το βάδισμα .
10. Γραφικές παραστάσεις	Διδασκαλία με απτικό υλικό. Ο εκπαιδευτικός σύρει το δάχτυλο του παιδιού πάνω σε ανάγλυφα φύλλα ειδικού χαρτιού στα οποία είναι σχεδιασμένη η γραφική παράσταση με τη μορφή αυλάκωσης.

Η τύφλωση δε σημαίνει ανικανότητα ούτε αδυναμία δράσης. Πράγματι, η μειονεξία που προκαλεί είναι υπαρκτή όμως όχι καθηλωτική. Οι τυφλοί μαθητές μπορούν να αναπληρώσουν το ελαττωματικό αισθητήριο όργανο, με άλλα αισθητήρια όργανα και άλλες πνευματικές δυνάμεις. Η χρήση κατάλληλων υλικών και μεθόδων κατά την εκπαιδευτική διαδικασία βοηθά στην ισότιμη πρόσβαση γνώσης, μοιρασμένης τόσο σε βλέποντες όσο και σε μη.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι κατάλληλο υλικό, απτικό ή ακουστικό, είναι αυτό που θα βοηθήσει να υπερνικηθούν οι οποιεσδήποτε δυσκολίες των τυφλών στα μαθηματικά. Απαιτείται κατάλληλη πλαισίωση και παιδαγωγική της συνεκπαίδευσης που ενσωματώνει όλους τους μαθητές. Υπό τη σκέπη κατάλληλου εκπαιδευτικού σχεδιασμού που ταιριάζει στις μαθησιακές ανάγκες του κάθε μαθητή διακηρύσσεται η ελπίδα για μια «Επιστήμη για όλους-Science for all».

Η Ειρήνη Κυριακή Χρόνη, φοιτήτρια ΠΤΔΕ



GOOGOL ή 10^{100}

Κωνσταντίνος Σιούλας Φυσικός, Μεταπτυχιακός φοιτητής ΕΚΠΑ

Οι μεγάλοι αριθμοί, εκατομμύρια, δισεκατομμύρια, τρισεκατομμύρια κ.ο.κ. ασκούσαν πάντα μια γοητεία τόσο στα παιδιά όσο και στους μεγάλους. Σήμερα, με το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, μπορούμε εύκολα να γράψουμε κάθε αριθμό, οσονδήποτε μεγάλος κι αν είναι αυτός. Ωστόσο, στις απαρχές των ελληνικών μαθηματικών, που η αρίθμηση γινόταν στο αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα, η γραφή ενός πολύ μεγάλου αριθμού δεν ήταν εύκολη υπόθεση. Σε ένα μικρό δοκίμιο με τίτλο **"Ο Ψαμμίτης",** ο διάσημος Αρχιμήδης (περίπου 287-212 π.Χ.), υπολόγισε την ποσότητα των κόκκων άμμου που θα μπορούσε να περιέχει η "σφαίρα του κόσμου". Βρήκε έναν αριθμό περίπου ίσον με εκείνον που θα εκφράζαμε με το σημερινό σύστημά μας, με ένα "1" ακολουθούμενο από εξήντα τέσσερα μηδενικά. Ο **Αρχιμήδης** είχε μια ιδιαίτερη "ροπή" να κατασκευάζει πολύπλοκα προβλήματα των οποίων οι άγνωστοι, εκφράζονταν με πολύ μεγάλους αριθμούς. Το **"Βοεικό πρόβλημα"** που απέστειλε στους Αλεξανδρινούς μαθηματικούς για να το επιλύσουν είναι τόσο δύσκολο ώστε, για πολλούς αιώνες παρέμεινε άλυτο! Το "Βοεικό πρόβλημα" λύθηκε το 1965 από τρεις αμερικανούς επιστήμονες με τη βοήθεια δύο ηλεκτρονικών υπολογιστών και η λύση ήταν ένας τεράστιος αριθμός με 206. 545 ψηφία! Οι μεγάλοι αριθμοί εξάπτανε επίσης τη φαντασία και των αρχαίων Ινδών. Σε ένα ποίημά του ο **Edwin Arnold** (Άγγλος ποιητής, 1832-1904), του οποίου ένα απόσπασμα δημοσιεύτηκε στο **"Φως από την Ασία",** αναφέρεται σε μια μυθική αφήγηση σχετικά με την εκπαίδευση του νεαρού Βούδα από το δάσκαλό του Βισαουμίτρα, και ο Βισαουμίτρα είπε: "Αρκεί πάμε τώρα στους αριθμούς".

Το παιδί άρχισε να απαγγέλλει : "Ψηφία, δεκάδες, εκατοντάδες, ωσότου έφτασε στον ολοστρόγγυλο Λάχ...Ύστερα είναι τα κοτί, ναχούτ, νιναχούτ,..

Αλλά να, κι άλλοι ακόμη αριθμοί: Ο Κάτχα για να βρίσκουμε πόσα είναι της νύχτας τα αστέρια, ο Κότι Κάτχα, για τις σταγόνες του Ωκεανού... Ο Σαρβανίκτσεπα, που μας δίνει όλου του **Γκούνγκα** την άμμο... Και Δάσκαλε, αν θέλεις θα σου πω πόσα κομματάκια ήλιου βρίσκονται απ΄ άκρη σ΄ άκρη μέσα σε μια γιοτζάνα".

Τότε ο μικρός πρίγκιπας πρόφερε στη στιγμή σωστά ολόκληρο τον αριθμό τους. Ο Βισαουμίτρα μαγεμένος ατένισε πρώτα στο πρόσωπο το αγόρι, γονάτισε ύστερα μπροστά του και ανέκραξε: " Δικός σου, Δάσκαλε, όλων των δασκάλων! Σύ, όχι εγώ, είσαι Γκουρού". Στη δεκαετία του 1940 ένας αμερικανός μαθηματικός, ο **Edwarrd Kasner (1878-1955)** του Πανεπιστημίου της Κολούμπια, σε κουβέντες που είχε με μικρά παιδιά, βρέθηκε μπροστά στο εξής πρόβλημα: Ποιοι αριθμοί απαιτούνται για να εκφραστεί το πλήθος των σταγόνων της βροχής που πέφτουν μια βροχερή μέρα στη Νέα Υόρκη; Οι αριθμοί, βέβαια, είναι πολύ μεγάλοι, αλλά πεπερασμένοι... Ερωτήσεις αυτού του τύπου είναι πολύ συνηθισμένες στις Η.Π.Α.-λέγονται ερωτήσεις Φέρμι- και αποτελούν μέρος της συνέντευξης για πρόσληψης σε μεγάλες εταιρείες. Παράδειγμα:

- Πόσα πρατήρια βενζίνης υπάρχουν στις ΗΠΑ;
- Πόσοι χορδιστές πιάνου δραστηριοποιούνται στο Σικάγο;
- Πόσα μπαλάκια γκολφ χωρούν σε ένα στάδιο;

Για να μυήσει ο Kasner τον εννιάχρονο ανεψιό του στους μεγάλους αριθμούς, επινόησε το **γκούγκολ (1 googol = 10^{100} δηλ. 1 ακολουθούμενο από 100 μηδενικά!)** Κατ΄ άλλους το googol επινοήθηκε από τον **Milton Sirota**, ανεψιό του Kasner, και πρωτοαναφέρθηκε στο βιβλίο **"Mathematics and the Imagination"** των Kasner και Newman.

Πιθανόν η νέα λέξη googol να γεννήθηκε από το **"Γκούνκα"** που αναφέρει στο ποίημά του ο Edwin Arnold.

Το **Google, μηχανή αναζήτησης του internet,** είναι ένα λογοπαίγνιο με τη λέξη **googol** και συμβολίζει το όραμα και την πρόθεση της εταιρείας να οργανώσει τον φαινομενικά άπειρο αριθμό πληροφοριών, που είναι διαθέσιμες στο διαδίκτυο.

Αν και το googol είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός, στα μάτια ενός μαθηματικού, συνηθισμένου να παίζει με την έννοια του απείρου, είναι ένας ...μικρός αριθμός.

Η τιμή όμως 10^{100} ξεπερνά κατά πολύ τα όρια του πραγματικού κόσμου, αφού δεν έχει πλέον καμιά φυσική σημασία! Ένα συνηθισμένο διαμέρισμα 100 τ.μ. ή 100.000.000 τ. χιλ. είναι πολύ μακριά από το googol. Ας πάρουμε την επιφάνεια της Γης, μήπως και έχουμε κάποια σεβαστή τιμή. Η επιφάνεια της υδρογείου είναι 510.000.000 τ. χλμ. ή $5x10^{20}$ τ. χιλιοστά περίπου, δηλ. ένα 5 ακολουθούμενο από 20 μηδενικά, πάλι όμως πολύ μακριά από το googol!

Ο άνθρωπος σίγουρα, δεν μπορεί να μετρήσει τις σταγόνες του νερού μιας θάλασσας ούτε τους κόκκους άμμου μιας ερήμου. Δεχόμενοι όμως ότι οι σταγόνες έχουν διάμετρο 2 χιλιοστά, η Μεσόγειος θα περιλάμβανε περίπου 10^{24} σταγόνες. Επίσης, στη Σαχάρα (έκταση $8x10^6$ τ. χλμ.) μία στρώση άμμου πάχους 20 εκ., δεχόμενοι ότι υπάρχουν 10 κόκκοι ανά κυβικό χιλιοστό, θα περιλάμβανε 10^{21} κόκκους άμμου.

Αν σκεπάσουμε την Ελλάδα (ηπειρωτικό και νησιωτικό τμήμα έχει έκταση περίπου 132.000 τ. χλμ.) με ένα στρώμα άμμου ύψους ενός μέτρου και δεχόμενοι ότι χρειάζονται 10 κόκκοι ανά κυβ. χιλ., θα χρειαστούμε περίπου $1{,}32x10^{21}$ κόκκους άμμου.

Ο αριθμός κόκκων άμμου που ολόκληρος ο όγκος της Γης θα μπορούσε να περιέχει, με την προηγούμενη πυκνότητα, είναι περίπου 10^{31}. Αριθμός πολύ μεγάλος, αλλά και πολύ μικρός για το googol! Ας δεχτούμε, όχι αποδεδειγμένα, ότι το Σύμπαν είναι κοίλο και πεπερασμένο. Οι αστρονομικοί υπολογισμοί, σε συνδυασμό με αυτούς της ατομικής φυσικής, αποδεικνύουν ότι ο λόγος της διαμέτρου του Σύμπαντος προς τη διάμετρο του πυρήνα του ατόμου είναι 10^{42}. Γενικά, το 10^{42} είναι το κλασικό όριο για καθετί που είναι πραγματικά μετρήσιμο στο Σύμπαν!

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει ποσότητα ενός googol από οτιδήποτε. Ο αριθμός 100^{100} ξεπερνά καθετί που θα μπορούσε να αριθμηθεί και να μετρηθεί στον φυσικό κόσμο. **Ο Kasner με το googol έβαλε ένα από τα όρια ανάμεσα στην αριθμητική και τη φυσική.** Φυσικά, αυτό δεν εμποδίζει τους μαθηματικούς να ξεπεράσουν κατά πολύ τα όρια του μετρήσιμου Σύμπαντος, αφού ένας αριθμός όπως το googol δεν είναι γι΄ αυτούς παρά ένα από τα αμέτρητα στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών, προηγούμενος από το $10^{100}+1$ και βέβαια πάντα πολύ μικρότερος από το άπειρο!

- Από το μαθητή **Παναγιώτη Μουρούκο** Γ΄ τάξη Γυμνασίου του Αγρινίου πήραμε ασκήσεις που έλυσε αλλά δεν είναι στην ύλη του σχολείου.

Τέλεια Τετράγωνα

Έστω x, y φυσικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός x □ y είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση: Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$4y^2 - 3x^2 - x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4(y^2 - x^2) - (x - y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4(y - x)(y + x) - (x - y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4(y-x)(y-x+2x) - (x-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8(y-x)x + [4(y-x)^2 - (x-y)] = 0.$$

Ίο τριώνυμο $t^2 + 8(y-x)t + [4(y-x)^2 - (x-y)]$ έχει ακέραιες ρίζες $x_1 = x$ και $x_2 = 8(x-y) - x = 7x - 8y$, άρα η διακρίνουσά του Δ πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου: $\Delta = 64(y-x)^2 - 4[4(y-x)^2 - (x-y)] = 48(y-x)^2 + 4(x-y) = 4(x-y)[12(x-y)+1] = k^2$, με $k \in N$. Επειδή ο ΜΚΔ των $x-y$ και $12(x-y)+1$ είναι η μονάδα, πρέπει καθένας από τους αριθμούς αυτούς να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Μέγιστα – Ελάχιστα

Αν $x, y \in R$ με $16x^2 + 36y^2 = 9$, να βρείτε τη μεγίστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x - 2y$.

Λύση: Θέτουμε $\alpha = x - 2y$, οπότε $x = 2y - \alpha$, και αντικαθιστούμε στη δοθείσα:

$$16(2y + \alpha)^2 + 36y^2 = 9 \Leftrightarrow 16(4y^2 + 4y\alpha + \alpha^2) + 36y^2 = 9 \Leftrightarrow 100y^2 + 64y\alpha + 16\alpha^2 - 9 = 0 \ (*)$$

Η (*) έχει διακρίνουσα $\Delta = (64\alpha)^2 - 4\cdot 100\cdot(16\alpha^2 - 9) = -2304\alpha^2 + 3600$, η οποία πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός: $-2304\alpha^2 + 3600 \geq 0 \Leftrightarrow 2304\alpha^2 \leq 3600 \Leftrightarrow (48\alpha)^2 \leq 60^2 \Leftrightarrow 48|\alpha| \leq 60 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{5}{4}$.

Επομένως, η μεγίστη τιμή της παράστασης είναι $\frac{5}{4}$ και η ελάχιστη $-\frac{5}{4}$

Επίλυση εξισώσεων στους πραγματικούς

Να λύσετε στο R την εξίσωση: $2x^2 + y^2 + 7 = 2(x+1)(y+1)$

Λύση: Πρόκειται για μια εξίσωση με δύο αγνώστους, η οποία λύνεται αν τη γράψουμε ισοδύναμα ως άθροισμα τετραγώνων ίσο με 0: $2x^2 + y^2 + 7 = 2(xy + x + y + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y + x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 + (x-2)^2 = 0^2 \cdot x = 2$ και $y = 3$.

Τι κάνουμε όμως αν δεν παρατηρήσουμε αυτή τη διάσπαση; Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο τον x και παράμετρο τον y: $2x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0$, οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = 4(y+1)^2 - 8(y^2 - 2y + 5) =$ $4y^2 + 8y + 4 - 8y^2 + 16y - 40 = 4y^2 + 24y - 36 = -4(y-3)^2 \leq 0$. Για να έχει λύσεις η εξίσωση, πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow y = 3$, επομένως έχουμε τη διπλή ρίζα $x = \frac{2(y+1)}{4} = \frac{2-4}{4} = 2 \Leftrightarrow x = 2$. Και τους δύο τρόπους βρίσκουμε τη μοναδική λύση $(x,y) = (2,3)$.

Η Εικασία του Δράκου

Ηλίας Κωνσταντόπουλος

Στο νότιο μέρος της Εύβοιας και βόρεια της Καρύστου, υπάρχει ένα βουνό που το λένε «Όχη». Σε υψόμετρο 1300 μέτρα περίπου υπάρχουν μερικά κτίσματα με τεράστιους ογκόλιθους, που οι ντόπιοι τα λένε «Δρακόσπιτα». Φυσικά, γιατί τέτοια σπίτια μόνο μεγάλοι δράκοι θα μπορούσαν να τα κτίσουν. Εκεί λοιπόν, τα πολύ παλιά χρόνια, ζούσαν πολλοί και μεγάλοι δράκοι. Ήταν ο φόβος και ο τρόμος της περιοχής, γιατί ήταν τεράστιοι, φτερωτοί και έτρωγαν ό,τι εύρισκαν. Μικρά και μεγάλα ζώα, πουλιά, ανθρώπους, ακόμα και ψάρια. Οι κάτοικοι της περιοχής είδαν και αποείδαν, δεν μπορούσαν να τους πολεμήσουν και κάλεσαν τον Ηρακλή για να τους εξολοθρεύσει. Εκείνος σκότωσε με τα βέλη του και το ρόπαλό του όλους τους δράκους, εκτός από έναν, τον τελευταίο.

- Μη με πειράξεις, Ηρακλή! Είμαι ο τελευταίος δράκος, αν με σκοτώσεις, θα εκλείψει το γένος των δράκων.
- Αν αφήσεις ήσυχους τους ανθρώπους, δε θα σε πειράξω, υποσχέθηκε ο Ηρακλής. Και τα ζώα. Δε θα πειράξεις ποτέ άλλο ζώο.
- Και τι θα τρώω για να ζήσω; Δράκος είμαι, θέλω σάρκα, όχι φύλλα και χορτάρι.
- Δεν ξέρω να σου απαντήσω. Μπορώ όμως να σε συμβουλεύσω. Στο νησί της Σάμου υπάρχει ένας σοφός άνθρωπος, ο Πυθαγόρας. Έχω ακούσει ότι έχει βρει έναν τρόπο να ζει, χωρίς να τρώει συνηθισμένη τροφή. Θα σου έλεγα να τον επισκεφθείς.
- Ευχαριστώ, Ηρακλή, είπε ο δράκος και χωρίς να χάσει καιρό πέταξε χαρούμενος για τη Σάμο. Βρήκε τον Πυθαγόρα σε μια σπηλιά να κάθεται κοντά στη φωτιά και να σκέφτεται. Ήταν τόσο συγκεντρωμένος που δεν κατάλαβε την παρουσία του δράκου. Αυτός πεινούσε ήδη και σκέφτηκε προς στιγμή να τον κάνει μια χαψιά, αλλά θυμήθηκε τον Ηρακλή και δείλιασε. Κροτάλισε τα φτερά του για να δείξει στον Πυθαγόρα την παρουσία του. Ο σοφός στράφηκε προς αυτόν, τον κοίταξε χωρίς να τον φοβηθεί και τον καλωσόρισε :

- Σε τι οφείλω την τιμή της επίσκεψής σου, καλέ μου δράκε; Και για να μην σε φωνάζω «δράκε», πιο είναι το όνομά σου;

  Ο δράκος συγκινήθηκε. Κανένας μέχρι τότε δεν τον είχε αποκαλέσει «καλό».
- Σοφέ μου άνθρωπε, είπε. Είμαι ο τελευταίος επιζών δράκος και δεν έχω όνομα. Θέλω τη συμβουλή σου. Ο Ηρακλής μ’ έστειλε. Μου είπε, ότι έχεις βρει έναν τρόπο να ζεις χωρίς να τρως.
- Αυτό είναι αλήθεια, απάντησε ο Πυθαγόρας. Δεν τρώω τροφή πλέον. Ζω με τη γνώση και πίνω μόνο νερό.
- Τι είναι αυτή η «γνώση»;
- Είναι δύσκολο να σου εξηγήσω, γιατί είσαι δράκος. Δεν έχεις και πολύ μυαλό.

  Ο δράκος πήγε να θυμώσει με την προσβολή που δέχτηκε από τον Πυθαγόρα, αλλά είχε αρκετό μυαλό, ώστε να σκεφτεί ότι τον είχε ανάγκη. Ο Ηρακλής τον περίμενε και αυτός φοβόταν πολύ τον θάνατο.

- Σε παρακαλώ, βοήθησέ με. Μάθε με να ζω, χωρίς να τρώω. Είμαι ο τελευταίος δράκος, δεν πρέπει να πεθάνω, θέλω να μείνω αθάνατος!
- Μη διαπράττεις ύβρη, δράκε! Κανένας δεν είναι αθάνατος.
- Έστω να ζήσω εκατομμύρια χρόνια. Να μην εξαφανιστεί το είδος των δράκων.
- Είσαι δύσκολη περίπτωση, αλλά ίσως μπορώ να σε βοηθήσω. Είσαι και συμπαθητικός. Για να δούμε. Τι έτρωγες μέχρι τώρα; Σάρκα! Και δεν έπλενες και τα δόντια σου, γι' αυτό μυρίζει άσχημα το στόμα σου. Κλείσε το και άσε με να σκεφτώ.

Ο δράκος δε μίλησε, δεν τόλμησε να ανοίξει το στόμα του. Ο Πυθαγόρας σκάλισε ήσυχα τη φωτιά του και μέσα στις φλόγες της είδε τη λύση στο πρόβλημα του δράκου. Γύρισε προς αυτόν και του είπε :

- Θα τρως αριθμούς . Έναν κάθε φορά. Όσο πιο μεγάλο αριθμό τρως, τόσο περισσότερες ημέρες δε θα χρειάζεσαι τροφή. Αλλά μη φας ξαφνικά κάποιον μεγάλο αριθμό, θα βαρυστομαχιάσεις. Φύγε τώρα και άφησέ με να σκεφτώ.
- Τι είναι αυτοί οι αριθμοί; Τρώγονται;
- Υπάρχουν μόνο στη σκέψη μας, αλλά αν το πιστέψεις, τότε ναι, τρώγονται.

Ο δράκος κάτι πήγε να πει, αλλά θυμήθηκε την κακοσμία του στόματός του και το ξανάκλεισε. Αμίλητος πέταξε μακριά και σε λίγα λεπτά έφτασε στο δρακόσπιτό του. Ξάπλωσε, αλλά η πείνα τον θέριζε. Ποιον αριθμό να φάει πρώτα; Ως ανόητος δράκος που ήταν σκέφτηκε τον αριθμό 100, αλλά του φάνηκε αρκετά μεγάλος. Θυμήθηκε τι του είπε ο Πυθαγόρας και φοβήθηκε. Τι να εννοούσε ο σοφός όταν του είπε «μεγάλος αριθμός»; Τι σημαίνει «μεγάλος»;

Σκέφτηκε να φάει τον αριθμό 1, αλλά πονηρός εκ φύσεως καθώς ήταν του φάνηκε πολύ μικρός, έτσι έφαγε τον 2.

Μόλις τον έφαγε, ένοιωσε παράξενα. Η πείνα του πέρασε, το στομάχι του έπαψε να γουργουρίζει και η αναπνοή του ευωδίασε. Μια γλυκιά κούραση τον κυρίευσε και αποκοιμήθηκε, χωρίς να το καταλάβει. Ο ύπνος του κράτησε δυο ολόκληρες ημέρες και δυο νύχτες, σαράντα οκτώ ολόκληρες ώρες. Χωρίς να πεινάσει καθόλου!

Όμως, το επόμενο πρωί που ξύπνησε, ένοιωσε πάλι την πείνα του να θεριεύει. Είπε, να βγει να φάει καμιά αγελάδα για πρωινό, αλλά θυμήθηκε τον φοβερό Ηρακλή και τη συμβουλή του Πυθαγόρα και δεν τόλμησε.

Έτσι, έφαγε τον αριθμό 3. Τον έκανε μια χαψιά, άλλαξε πλευρό και ξανακοιμήθηκε. Μετά από τρεις ημέρες που ξύπνησε, ένοιωσε μεγάλη χαρά. Είχε βρει έναν τρόπο να τρέφεται, χωρίς να σκοτώνει. Και όχι μόνον αυτό. Του φαινόταν ότι και το μυαλό του είχε αρχίσει να ξυπνάει. Αφού, να φανταστείτε, σκέφτηκε, ότι αν έτρωγε τον επόμενο αριθμό 4, αυτός θα είχε την ίδια γεύση με τον αριθμό 2, αφού διαιρείται με τον 2. Τέτοια σκέψη από δράκο ήταν πολύ προχωρημένη!

Άφησε λοιπόν τον αριθμό 4 και έφαγε τον 5. Άλλη γεύση, αλλά πιο χορταστικός! Για πέντε ολόκληρες ημέρες το στομάχι του δεν ζήτησε τροφή, μόνο νερό. Αλλά νεράκι είχε άφθονο. Δίπλα στο δρακόσπιτο υπήρχε μια δρακοπηγή, που έβγαζε άφθονο και εύγεστο νερό. Όταν διψούσε, σηκώνονταν, έπινε νερό και έκανε τις βόλτες του να ξεμουδιάσει. Καμιά φορά πετούσε κιόλας. Αλλά ζώο, δε διανοήθηκε να πειράξει. Δεν το είχε ανάγκη άλλωστε. Στις πέντε ημέρες πείνασε ξανά. Ήπιε πρώτα νεράκι και θέλοντας να δοκιμάσει καινούργια γεύση, άφησε ήσυχο τον αριθμό 6, γιατί αυτός διαιρείται με το 2, αλλά και με το 3 και καταβρόχθισε τον αριθμό 7.

Εξαίσια γεύση! Ελαφρύ και χορταστικό γεύμα!

Για να μην τα πολυλογούμε, ο δράκος μας είχε λύσει το πρόβλημα της τροφής του. Κάθε φορά που πεινούσε έτρωγε έναν αριθμό και ζούσε για τόσες ημέρες, όσες έλεγε ο αριθμός. Επειδή δε γινόταν όλο και πιο έξυπνος, άφηνε τους αριθμούς οι οποίοι διαιρούνταν με κάποιον άλλο αριθμό και έτρωγε μόνο αυτούς που δεν είχαν διαιρέτη άλλον αριθμό. Έτσι, έβρισκε πάντα νέες γεύσεις. Μήπως όμως κάποτε θα τελείωναν οι αριθμοί; Για να δούμε ποιους αριθμούς έφαγε και ποιους άφησε μέχρι το 100 :

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Μολονότι έφαγε είκοσι πέντε αριθμούς μόνο και άφησε τους άλλους, χόρτασε την πείνα του για 2+3+5+7+…+97= 1151 ημέρες!

Βλέπετε ότι από τους ζυγούς έφαγε μόνο το 2, όλοι οι άλλοι είναι μονοί.

Όταν βρέθηκε στην ανάγκη συνέχισε με τον αριθμό 101. Πρώτος αριθμός, πρώτη γεύση! Θα του αρκούσε για να μην πεινάσει 101 ημέρες. Ο δράκος μας ήταν ευτυχισμένος. Δεν πεινούσε και ο Ηρακλής τον είχε αφήσει ήσυχο. Ένοιωθε ευγνωμοσύνη για τον σοφό Πυθαγόρα.

Όμως, είχε αρχίσει να σκέφτεται. Να σκέφτεται πολύ! Άραγε με αυτόν τον τρόπο θα ζούσε αιώνια ή κάποια στιγμή δε θα εύρισκε αριθμούς χωρίς διαιρέτες; Θα μου πείτε ότι, αν συνέβαινε αυτό, θα μπορούσε να αρχίσει να τρώει τους αριθμούς που είχε αφήσει στην πρώτη διαλογή. Όμως αυτή η ιδέα δεν του άρεσε, ήθελε πάντα να δοκιμάζει νέες γεύσεις.

Κατέφυγε πάλι σε έναν σοφό, τον Ευκλείδη. Αυτός τον καθησύχασε. Οι αριθμοί χωρίς διαιρέτες, οι πρώτοι αριθμοί, δε θα τελείωναν ποτέ. Αυτό το είχε αποδείξει. Δεν υπήρχε λόγος λοιπόν να φοβάται γι' αυτό. Ακόμα τον διαβεβαίωσε ότι όσο πιο μεγάλο πρώτο αριθμό θα έτρωγε, τόσο πιο εξαίσια γεύση θα είχε και τόσο περισσότερες ημέρες θα του χάριζε. Το πρόβλημα ήταν μόνο να βρίσκει πρώτους αριθμούς.

Στην αναζήτηση αυτή ο Δράκος έκανε μια τρομερή ανακάλυψη. Διαπίστωσε ότι:

«Καμία εκατοντάδα διαδοχικών ακεραίων, μετά το 100, δεν περιελάμβανε τόσους πρώτους, όσους είχε η πρώτη εκατοντάδα, δηλαδή 25».

Όλες οι εκατοντάδες, εκτός της πρώτης, περιείχαν λιγότερους πρώτους αριθμούς. Επειδή δεν μπορούσε να αποδείξει αυτή την παρατήρηση, την ονόμασε «Εικασία του Δράκου». Έτσι έβαλε και αυτός το λιθαράκι του στη μαθηματική ανακάλυψη. Η εικασία του βέβαια παραμένει αναπόδεικτη. Μήπως κάποιος από εσάς θα μπορούσε να τον βοηθήσει, να την αποδείξει ή να την καταρρίψει, και να δοξαστεί;

Πάντως κατάφερνε να βρίσκει όλο και μεγαλύτερους πρώτους. Να φανταστείτε ότι, πριν από λίγο καιρό έφτασε στον αριθμό 6.700.417. Μ' αυτόν θα ήταν χορτάτος για 6.700.417 ημέρες, δηλαδή για πολλά - πολλά χρόνια. Πόσα άραγε;

Γι' αυτό και ζει μέχρι σήμερα, σοφός και ο ίδιος πλέον, στο δρακόσπιτό του, στην κορυφή του βουνού «Όχη». Αν καμιά φορά ανεβείτε στο βουνό αυτό, σίγουρα θα τον συναντήσετε. Έχει μακρύνει ο λαιμός του, δε βγάζει πλέον φλόγες και δυσοσμία από το στόμα του, αλλά ευωδιές της άνοιξης. Είναι και αυτός σοφός, χάρη στο σοφό Πυθαγόρα.

Ο al-Khwarizmi (αλ-Χαρίζμι) και οι εξισώσεις 2ου βαθμού.

Φώτης Κουνάδης

Ο al-Khwarizmi, Μαθηματικός, Γεωγράφος και Αστρονόμος , γεννήθηκε στην Περσία και πιθανότατα έζησε από το 780μ.Χ. έως το 850μ.Χ. Θεωρείται από πολλούς ο πατέρας της Άλγεβρας, αφού για πρώτη φορά παρουσιάζεται στα βιβλία του μια ολοκληρωμένη μελέτη της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Η ίδια η λέξη Άλγεβρα προέρχεται από τον τίτλο μιας ενότητας του έργου του με το όνομα al-jabr που σημαίνει συγκόλληση. Ο al-Khwarizmi προσπάθησε να εισάγει εξισώσεις και μεθόδους επίλυσης τους που δεν θα αντιμετωπίζουν μόνο συγκεκριμένα προβλήματα, αλλά γενικευμένα να μπορούν να χρησιμοποιούνται ώστε να λύνονται ομάδες προβλημάτων.

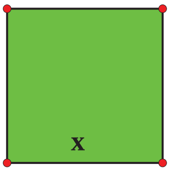
Γράφει στην εισαγωγή ενός βιβλίου του: ‘‘Αρχίζω με την προσπάθειά μου να προσδιορίσω αυτό που ψάχνω. Από τη στιγμή όμως που δεν γνωρίζω τι *πράγμα* είναι αυτό που ψάχνω, θα το ονομάζω απλά *πράγμα.*’’

Ονομάζει την άγνωστη ποσότητα (x) της εξίσωσης με τον όρο *πράγμα*, το τετράγωνο του αγνώστου με τον όρο *τετράγωνο*, ενώ τον άγνωστο όταν πολλαπλασιάζεται με έναν συντελεστή με τον όρο *ρίζα*. Δημιουργεί με αυτόν τον τρόπο εξισώσεις χωρίς να χρησιμοποιεί σύμβολα της αριθμητικής ή γράμματα για τις μεταβλητές, που δεν ήταν γνωστά άλλωστε εκείνη την εποχή, και τις λύνει περιγράφοντας τη διαδικασία. Κατηγοριοποίησε τις εξισώσεις 2ου βαθμού σε έξι ομάδες, όπου ευφυώς αντιμετώπισε τον άγνωστο όπως το γνωστό, αφού εφάρμοσε στον άγνωστο τις πράξεις που χρησιμοποιούμε και για τους αριθμούς. Για μία εξίσωση γράφει: Το *τετράγωνο* (x^2) και 10 *ρίζες* ($10\cdot x$) μας δίνουν 39. Αυτή η πρόταση σήμερα θα μας έδινε την εξίσωση $x^2+10x=39$. Για να λύσει την εξίσωση αυτή ακολουθούσε τα παρακάτω βήματα:

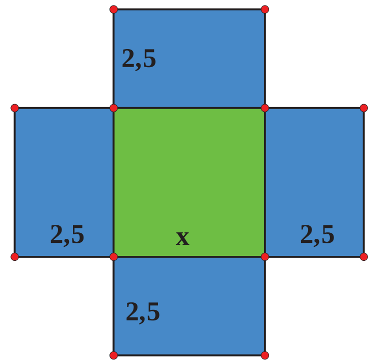
Διαδικασία	**Πράξεις**
1. Διαιρούμε δια του δύο τις *ρίζες* (δηλαδή τον συντελεστή του x).	10:2=5
2. Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τον εαυτό του.	$5\cdot 5=25$
3. Προσθέτουμε στο γινόμενο το 39.	25+39=64
4. Βρίσκουμε τον αριθμό που όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του θα μας δώσει το προηγούμενο αποτέλεσμα.	$\sqrt{64}=8$
5. Αφαιρούμε από το αποτέλεσμα το μισό των *ριζών* που είχαμε.	$8-\frac{10}{2}=8-5=3$
6. Βρίσκουμε έτσι *το πράγμα*, δηλαδή τη θετική λύση της εξίσωσης.Σημειώνουμε εδώ ότι στα Αραβικά Μαθηματικά δεν υπήρχαν οι αρνητικοί αριθμοί.	Το 3 είναι η λύση. Επαλήθευση: $3^2+10\cdot 3=39$ ή $9+30=39$, που ισχύει.

Γεωμετρική λύση της ίδιας εξίσωσης $x^2+10x=39$.

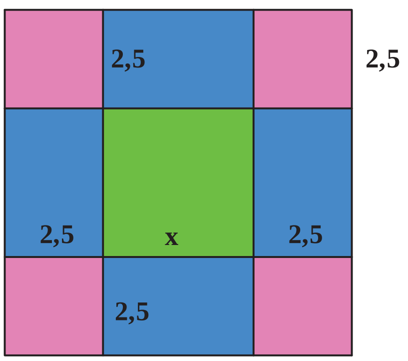
Αρχικά κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο πλευράς x. Το εμβαδόν του θα είναι x^2.



Στις πλευρές του τετραγώνου κατασκευάζουμε 4 ορθογώνια που έχουν τη μία διάσταση x και την άλλη $\frac{10}{4}=2,5$. Τότε το εμβαδόν του κάθε ορθογωνίου προκύπτει από το γινόμενο των δύο διαστάσεών του, δηλαδή θα είναι $2,5\cdot x$.



Το σχήμα που έχει προκύψει έχει συνολικό εμβαδόν που προκύπτει αν στο εμβαδόν του τετραγώνου προσθέσουμε τα εμβαδά των 4 ορθογωνίων, δηλαδή $x^2+4\cdot(2,5\cdot x)$ ή $x^2+10\cdot x$ που εμείς θέλουμε να ισούται με 39 που είναι το δεύτερο μέλος και συγχρόνως ο σταθερός όρος της εξίσωσης . Συμπληρώνουμε τώρα το σχήμα με 4 τετραγωνάκια πλευράς 2,5 το καθένα και με εμβαδόν $2,5^2=6,25$.

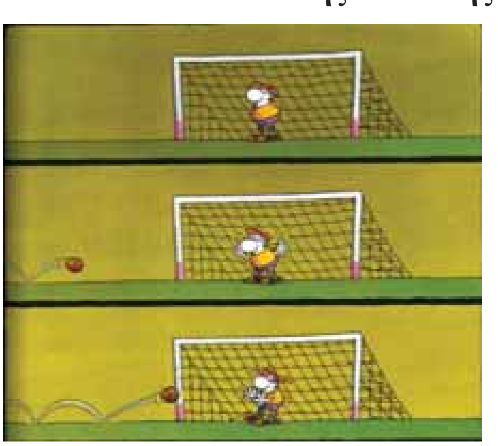


Σχηματίζεται έτσι ένα τετράγωνο που έχει εμβαδόν $39+4\cdot 6,25=39+25=64$ και πλευρά 8. Από το σχήμα όμως η πλευρά του τετραγώνου είναι 2,5+x+2,5 ή x+5 , οπότε προκύπτει η εξίσωση x+5=8 ή $x=8-5$ ή $x=3$. Σύγχρονη **αλγεβρική λύση** της εξίσωσης $x^2+10x=39$. Γράφουμε την εξίσωση $x^2+10x=39$ στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,δηλαδή $x^2+10x-39=0$ με α=1,β=10 και $\gamma=-39$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\cdot\gamma=10^2-4\cdot1\cdot(-39)=100+156=256>0$, άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις που δίνονται από τον τύπο $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-10\pm\sqrt{256}}{2\cdot1}=\frac{-10\pm16}{2}$. Η θετική λύση είναι η $x=\frac{-10+16}{2}=\frac{6}{2}=3$.

Η αγωνία του τερματοφύλακα πριν το πέναλτι ή αλλιώς από την στρατηγική στην τυχαιότητα.

Φώτης Κουνάδης



Ας μιλήσουμε για την αγωνία του τερματοφύλακα σε έναν αγώνα ποδοσφαίρου πριν από ένα πέναλτι που ο διαιτητής έδωσε σε βάρος της ομάδας του.

Έχει την ατυχία να στέκεται απέναντι από τον αντίπαλο επιθετικό που ετοιμάζεται να το εκτελέσει.Τι μπορεί να σκέφτεται εκείνη την στιγμή;

Μάλλον σε ποια γωνία θα επιλέξει να πέσει, προσπαθεί δηλαδή να “διαβάσει” τις προθέσεις του αντιπάλου του.

Μπορεί όμως, όπως συνήθως συμβαίνει, να έχει μελετήσει τον αντίπαλο και να γνωρίζει πως συνηθίζει να κτυπάει τα πέναλτι, δηλαδή ότι αυτός προτιμά να στέλνει την μπάλα σε μια συγκεκριμένη γωνία, ας πούμε δεξιά.

Αλλά και ο επιθετικός με τη σειρά του μπορεί να μαντεύει τις σκέψεις του τερματοφύλακα και τότε ίσως προτιμήσει να αλλάξει τη συνηθισμένη γωνία και να στείλει την μπάλα αριστερά.
Αυτή την σκέψη του όμως μπορεί να την καταλάβει ο τερματοφύλακας και έτσι τελευταία στιγμή να πέσει στην άλλη γωνία και όχι σε αυτή που σχεδίαζε.
Είναι βέβαιο ότι και οι δύο προσπαθούν να εφαρμόσουν μία στρατηγική και χρησιμοποιώντας την πληροφόρηση που έχουν να προβλέψουν την πρόθεση του αντίπαλου παίκτη. Ας κάνουμε τώρα μερικές υποθέσεις:

Αρχικά ότι η μπάλα θα πάει οπωσδήποτε προς το τέρμα, δε θα καταλήξει άουτ ή στο δοκάρι. Επίσης ότι δε θα υπάρχουν εξωγενείς παράγοντες που ενδεχομένως να επηρεάσουν τη διαδικασία και μπορεί να οφείλονται στη συμπεριφορά των φιλάθλων, στον αγωνιστικό χώρο, στις καιρικές συνθήκες κ.λ.π..
Όλα είναι ιδανικά.
Τότε ο τερματοφύλακας αποφασίζει να εγκαταλείψει την στρατηγική και τους βασανιστικούς υπολογισμούς και να λειτουργήσει μόνο με την τύχη.
Θα ρίξει ένα νόμισμα και ανάλογα με το αποτέλεσμα θα επιλέξει τη γωνία που θα πέσει.
Θα μπορούσε μάλιστα να το αποκαλύψει στον αντίπαλο παίκτη που εκείνη τη στιγμή βάζει την μπάλα στα 11 βήματα ή ακόμη και να το ανακοινώσει από τα μεγάφωνα του γηπέδου στους φιλάθλους που παρακολουθούν τον αγώνα.
Αυτό που δε θα αποκαλύψει προφανώς είναι σε ποια γωνία θα πέσει αν έρθει κεφάλι ή γράμματα.

Σε αυτή τη φάση η επιλογή της γωνίας ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος.

Ας πούμε ότι αποφασίζει ότι:
Α) Αν έρθει "Κεφάλι" θα πέσει αριστερά.
Β) Αν έρθει "Γράμματα" θα πέσει δεξιά.

Με αυτό τον τρόπο μετατρέπει ένα παιχνίδι στρατηγικής σε πείραμα τύχης.
Ως πείραμα τύχης ορίζεται η διαδικασία που όσες φορές και αν την επαναλάβουμε δε μπορούμε να προβλέψουμε με απόλυτη βεβαιότητα το αποτέλεσμα. Μπορούμε όμως να γνωρίζουμε όλα τα δυνατά αποτέλεσματα και έτσι να δημιουργήσουμε ένα σύνολο που ονομάζεται δειγματικός χώρος του πειράματος και συμβολίζεται συνήθως με Ω. Στην περίπτωσή μας $\Omega = \{\text{Κεφάλι, Γράμματα}\}$.
Η πιθανότητα να έρθει ένα από τα δύο είναι 50-50 ή μία στις δύο περιπτώσεις.
Λέμε ότι η πιθανότητα να έρθει "Κεφάλι" είναι $\frac{1}{2}$=50% και η πιθανότητα να έρθει "Γράμματα" είναι επίσης $\frac{1}{2}$=50%.
Εισάγει επομένως την τυχαιότητα στη διαδικασία και εγκαταλείπει την στρατηγική. Έτσι έχει

πιθανότητα 50% , καθόλου αμελητέα, να διαλέξει τη σωστή γωνία που θα πέσει και να αποκρούσει το πέναλτι.
Τελικά μία στις δύο φορές θα πετυχαίνει ενώ ταυτόχρονα αφήνει στον αντίπαλο να καταστρώνει στρατηγικές και να κάνει υποθέσεις που πλέον όμως δεν θα έχουν καμία σημασία για κανέναν από τους δύο.

Το «παιχνίδι» KenKen

Αδάμ Αγγελής   Ανδρέας Τριανταφύλλου

Το πνευματικό παιχνίδι (παζλ – puzzle) **KenKen**[1] που στα γιαπωνέζικα αναφέρεται ως "kashikoku-naru-pazuru" (παζλ που σε κάνει εξυπνότερο) επινοήθηκε το 2004 από τον Ιάπωνα Μαθηματικό Τετσούγια Μιγιαμότο (Tetsuya Miyamoto, 1959).

Ο Τετσούγια Μιγιαμότο είναι πτυχιούχος μαθηματικός του πανεπιστημίου Waseda (www.waseda.jp) του Τόκυο ο οποίος από το 1993 ασχολείται με την προγύμναση μαθητών στα Μαθηματικά. Επινόησε το παζλ αυτό προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές του να αναπτύξουν δεξιότητες στους υπολογισμούς και να είναι ικανοί να αντιμετωπίζουν τα προβλήματα με υπομονή, επιμονή και περίσκεψη. Και, επιπροσθέτως, όπως έχει πει ο ίδιος το παζλ *«εκπαιδεύει το μυαλό σου να σκέφτεται λογικά»*. Σήμερα το **KenKen** δημοσιεύεται στις σελίδες παιχνιδιών πολλών εφημερίδων του εξωτερικού όπως: New York Times, The Times of London, Yomiuri Shimbun κ.ά. Επίσης, διατίθεται ως εφαρμογή στο App Store και στο Google Play Store.

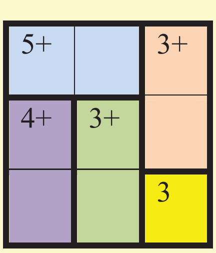
Το παζλ οργανώνεται πάνω σε ένα πλέγμα διαστάσεων νxν (3≤ν≤9). Το πλέγμα χωρίζεται σε **περιοχές**. Κάθε περιοχή του πλέγματος μπορεί να αποτελείται από ένα ή περισσότερα τετραγωνάκια και ονομάζεται **«κλουβί»** (cage). Κάθε κλουβί για να ξεχωρίζει περικλείεται από μαύρο έντονο περίγραμμα ή μπορεί να είναι και χρωματισμένο. Μέσα σε κάποια κλουβιά στην πάνω αριστερή γωνία τους υπάρχει ένας αριθμός. Κάποιοι αριθμοί δίπλα τους έχουν ένα σύμβολο πράξης. Πως παίζεται:

Ο αριθμός φανερώνει το αποτέλεσμα που πρέπει να επιτύχουμε εφαρμόζοντας την πράξη που προσδιορίζει το σύμβολο δίπλα του. Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει υποχρεωτικά να τηρήσουμε τους πιο κάτω κανόνες:

Α) Στα τετραγωνάκια του κλουβιού να τοποθετήσουμε τους κατάλληλους φυσικούς αριθμούς από το 1 μέχρι το ν. Δηλαδή αν το παζλ είναι π.χ. 6x6 θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6.

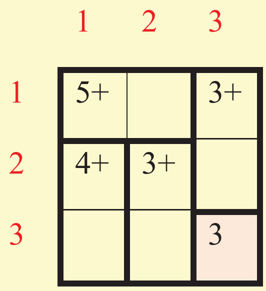
Β) Οι αριθμοί που εμείς θα συμπληρώσουμε πρέπει να είναι μόνο μια φορά σε κάθε γραμμή ή στήλη.

Γ) Σε όποιο τετραγωνάκι-κλουβί υπάρχει ένας αριθμός χωρίς να ακολουθείται από σύμβολο πράξης πρέπει υποχρεωτικά να συμπληρωθεί το τετραγωνάκι κλουβί με τον ίδιο αριθμό.

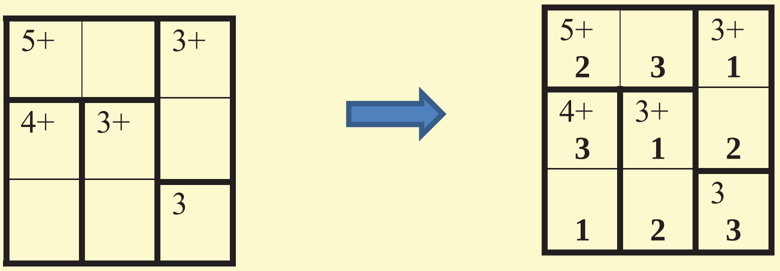


Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικότερα με εικόνες και περιγραφές όσα προαναφέρθηκαν. Σε ένα 3x3 KenKen παζλ, δηλαδή με ν=3, χρησιμοποιούμε τους αριθμούς από 1 έως 3.

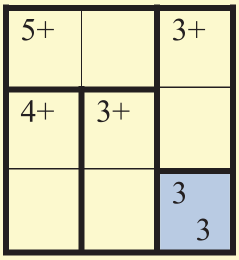
[1] KenKen® is a registered trademark of KenKen Puzzle, LLC. Puzzle content ©2021 KenKen Puzzle LLC. All rights reserved



Αυτό το παζλ αποτελείται από 5 κλουβιά. Το κάτω δεξιά τετραγωνάκι αποτελεί από μόνο του ένα κλουβίστο οποίο υποχρεωτικά θα τοποθετηθεί ο αριθμός που αναγράφεται πάνω αριστερά, δηλαδή ο αριθμός 3.

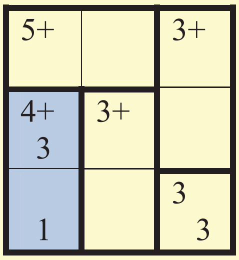


Ας ξεκινήσουμε το παιχνίδι



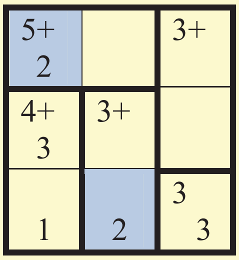
1. Τοποθετούμε τον αριθμό 3 στο κλουβί που υπάρχει αριθμός χωρίς σύμβολο πράξης. Είναι πάντοτε καλύτερο να ξεκινάμε συμπληρώνοντας τα κλουβιά που δεν έχουν σύμβολο πράξης

2. Στο κάτω αριστερά κλουβί πρέπει να συμπληρωθούν τα κελιά που το αποτελούν με τους αριθμούς 3 και 1 ώστε να έχουν άθροισμα 4.

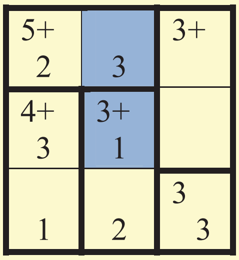


3. Ο αριθμός 3 πρέπει να τοποθετηθεί στο επάνω κελί, αφού στην κάτω γραμμή υπάρχει ήδη ο αριθμός 3.

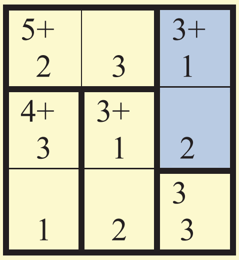
4. Κάθε γραμμή και στήλη πρέπει να περιέχουν τους αριθμούς 1, 2 και 3.



Η κάτω οριζόντια γραμμή περιέχει τους αριθμούς 1 και 3, έτσι ο αριθμός 2 πρέπει να τοποθετηθεί στο μεσαίο κελί της κάτω γραμμής. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική συμπληρώνουμε και την αριστερά κατακόρυφη στήλη.



5. Τοποθετούμε στο μεσαίο κελί της πρώτης γραμμής τον αριθμό 3 ώστε να έχουμε 2 + 3 = 5. Στη συνέχεια τοποθετούμε στο μεσαίο κελί της μεσαίας στήλης τον αριθμό 1 ώστε να έχουμε 1 + 2 = 3.



6. Στο κελί στην επάνω δεξιά γωνία τοποθετούμε τον αριθμό 1, επειδή είναι ο μόνος αχρησιμοποίητος αριθμός από τους 1, 2, 3 που πρέπει να περιέχονται στα κελιά της πρώτης γραμμής του παζλ. Για ανάλογους λόγους, στο μεσαίο κελί της δεξιάσστήλης τοποθετούμε τον αριθμό 2, ή ακόμη και επειδή ανήκει στο επάνω κλουβί της δεξιάς στήλης με 1 + 2 = 3 και τελειώσαμε. Το 3x3 KenKen παζλ είναι ολόσωστα συμπληρωμένο.

Υποδείξεις για την συμπλήρωση ενός παζλ π.χ. του 6x6 .

1.- Σχεδιάζουμε σε χαρτί ακριβώς το παζλ όπως μας έχει δοθεί για επίλυση. Φροντίζουμε τα τετραγωνάκια να έχουν αρκετό μέγεθος ώστε να μπορούμε να σημειώνουμε τους διάφορους συνδυασμούς αριθμών που εκτιμούμε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθούν. Για παράδειγμα αν έχουμε σε ένα 6x6 παζλ ένα κλουβί με δύο τετραγωνάκια και θέλουμε να προκύπτει ως πηλίκο το 3 σημειώνουμε, με μολύβι, τα ζευγάρια 6, 2 και 2, 6 μέχρι να αποφασίσουμε πιο ζευγάρι είναι το κατάλληλο.

2.- Σημειώνουμε σε χαρτί τους αριθμούς που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μας βοηθάει ιδιαίτερα σε παζλ μεγάλων διαστάσεων για τον έλεγχο των αριθμών που έχουμε χρησιμοποιήσει. Στο 6x6 παζλ οι αριθμοί είναι οι 1,2,3,4,5 και 6.

3.- Συμπληρώνουμε τα κλουβιά που έχουν έναν σκέτο αριθμό ο οποίος δεν προκύπτει ως αποτέλεσμα πράξης. Αυτά είναι απλά τετραγωνάκια που είναι συγχρόνως και κλουβιά.

4.- Παρατηρούμε το είδος της πράξης που πρέπει να εφαρμοστεί. Αν είναι πολλαπλασιασμός ή διαίρεση αναλύουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Αν είναι πρόσθεση ή αφαίρεση αναπτύσσουμε το αποτέλεσμα

Έτσι για παράδειγμα στο 6x6 παζλ για το κλουβί με το 45x παρατηρούμε ότι 45=3x3x5. Έτσι για να επιτύχουμε αποτέλεσμα 45 με εφαρμογή της πράξης του πολλαπλασιασμού πρέπει το 5 να τοποθετηθεί στο γωνιακό τετραγωνάκι του κλουβιού και από ένα 3 στα άλλα.

3	3÷		16×		1-
3+		45×			
3-		5-		5	5+
10+	12+		5-	9+	
15×		2÷		5-	

Για το 15x είναι 15=3x5. Άρα τοποθετούνται ως 5 και 3.

Για το 16x, το 16=2x2x2x2. Το κλουβί όμως έχει τρία τετραγωνάκια. Άρα θα συμπληρωθεί από την τριάδα 2,4,2 (δεν μπορεί να είναι 2,2,4 ή 4,2,2) ή από την 4,1,4.

Ας δούμε τώρα το κλουβί με 3÷ που είναι δίπλα στο 16x. Το κλουβί αυτό πρέπει να συμπληρωθεί με δύο αριθμούς που το πηλίκο τους θα είναι 3. Πώς το πετυχαίνουμε αυτό; Με το 3÷1 ή με το 6÷2. Το ζευγάρι 3 και 1 απορρίπτεται αφού στην ίδια γραμμή υπάρχει το 3. Άρα θα είναι το 6 και 2 ή το 2 και 6. Το 2 θα υπάρχει οπωσδήποτε. Επομένως για το 16x θα χρησιμοποιήσω τη τριάδα 4,1,4.

Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι το τελευταίο τετραγωνάκι της πρώτης γραμμής συμπληρώνεται με το 5. Κάτω από το 5 θα μπει το 6 αφού αυτό το κλουβί απαιτεί δύο αριθμούς με διαφορά 1 και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ζευγάρι 5 και 4.

3	3÷		16×		1-
3+		45×			
3-		5-		5	5+
10+	12+		5-	9+	
15×		2÷		5-	

Στην τελευταία γραμμή το κλουβί 5- θα συμπληρωθεί αναγκαστικά από το ζευγάρι 6 και 1 αφού 6-1=5 και το 6 υπάρχει στην τελευταία στήλη.

Πάνω από αυτό βρίσκεται το κλουβί με το 9+. Με λίγη προσπάθεια βλέπουμε ότι το 9 προκύπτει ως άθροισμα των τριάδων 1,2,6 (οι 1,6,2 ή 2,1,6 ή 2,6,1 ή 6,1,2 ή 6,2,1 δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα), 1,3,5 – 1,4,4 – 2,3,4 – 2,5,2. Τριάδες που περιέχουν το 1 ή το 6 απορρίπτονται (γιατί;). Απορρίπτεται και η τριάδα 2,5,2 (γιατί;). Οπότε απομένει η τριάδα 2,3,4 με το 4 να τοποθετείται στο κάτω δεξιά τετραγωνάκι του κλουβιού. Αυτό μας οδηγεί να τοποθετήσουμε το 3 ακριβώς πάνω από το 4 και πάνω από αυτό το 2 (γιατί;). Πετυχαίνουμε έτσι και την συμπλήρωση του κλουβιού με το 5+ αλλά, τώρα, και το διπλανό 9+ τοποθετώντας το 2 πάνω και το 3 κάτω.

Ας δούμε τώρα και το κλουβί 2÷. Το 2 προκύπτει ως πηλίκο από τα ζεύγη 4,2 και 6,3. Το 6,3 απορρίπτεται και το 4,2 τοποθετείται με αυτή τη σειρά γιατί αν τοποθετηθεί ως 2,4 το 4 θα βρίσκεται στην ίδια στήλη με το 4 της πρώτης γραμμής.

Για το κλουβί 10+ βλέπουμε ότι το 10 προκύπτει ως άθροισμα του 5 συν 5 και του 6 συν 4. Μας ταιριάζει το ζευγάρι 4 πάνω και 6 κάτω.

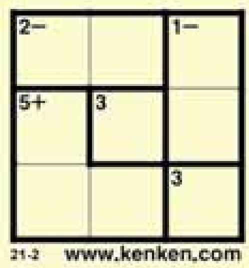
Το κλουβί 3-, πάνω από το προηγούμενο συμπληρώνεται με τους αριθμούς 4,1 με πρώτο, βέβαια, το 1 και μετά το 4. Εύκολα τώρα συμπληρώνουμε και από πάνω κλουβί με το 2 πρώτα και το 1 μετά.

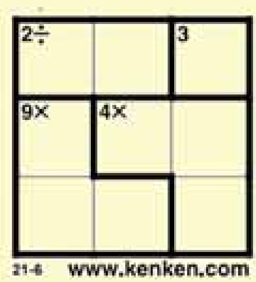
Στην τρίτη σειρά λείπει το 6. Εύκολα λοιπόν συμπληρώνεται το κλουβί 5- με το 6 πάνω και το 1 κάτω για να έχουμε την διαφορά 6-1=5 που απαιτείται. Και το άλλο κλουβί 5- συμπληρώνεται με το 6 πάνω και το 1 κάτω. Βάζουμε και το 5 στην τέταρτη γραμμή που λείπει. Προφανώς, στην πρώτη γραμμή το κλουβί 3÷ συμπληρώνεται με το 6 πρώτα και το 2 μετά. Τώρα πια 2 και μετά 5 στην πέμπτη σειρά και τελειώσαμε.

Και τώρα η σειρά σας

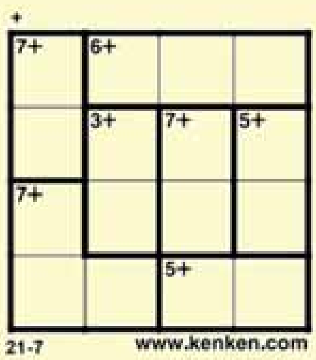
Συμπληρώστε τα παρακάτω KenKen παζλ.

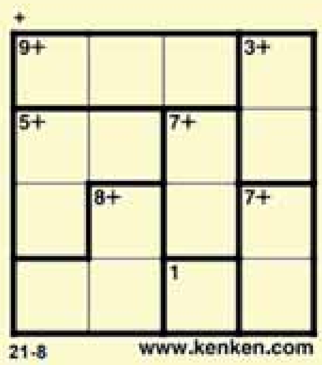
3x3.

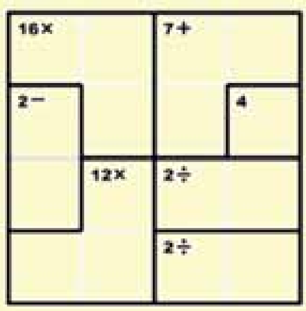




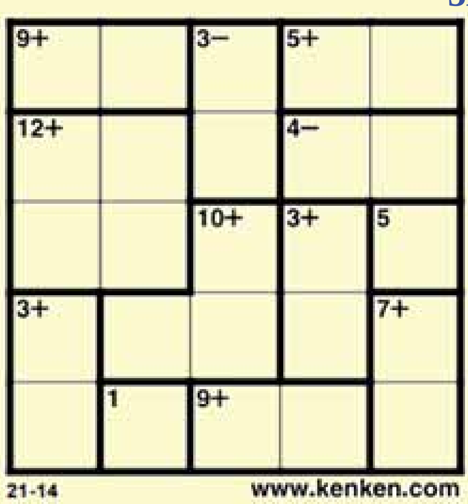
4x4



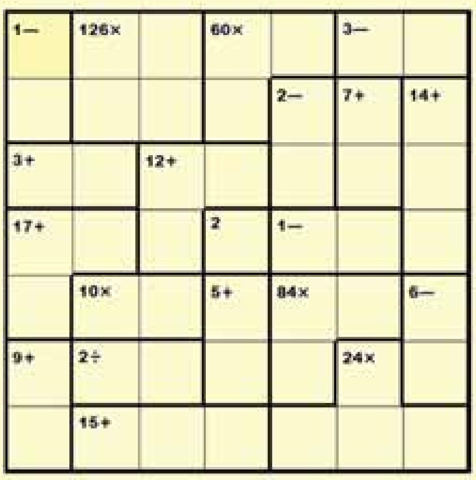




5x5



7x7



Πηγές: https://en.wikipedia.org/wiki/KenKen και https://www.kenkenpuzzle.com/

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Από τη στιγμή που κάποιος έχει συναίσθηση του κακού που έκανε, από τότε αρχίζει η διαδικασία βελτίωσής του.

Πυθαγόρας

Ξέρετε ότι:

Ο Μπασέ είχε πάθος με τους Γρίφους;

Ο Γάλλος **Μπασέ** δεν ήταν μαθηματικός αλλά ποιητής, που του άρεσε να μελετά τους κλασικούς αλλά το πάθος του ήταν οι μαθηματικοί γρίφοι. Δημοσίευσε μια συλλογή γρίφων και το 1621 μετέφρασε και δημοσίευσε «**Τα αριθμητικά**» **του Διόφαντου** τα οποία μετά την πυρπόληση της βιβλιοθήκης στην Αλεξάνδρεια είχαν λησμονηθεί.

Έτσι ο Μπασέ αλλά και άλλοι μελετητές έφεραν και πάλι στην δημοσιότητα τη θεωρία αριθμών και αναζωπύρωσαν τις μεθόδους των Αρχαίων Ελλήνων. Μάλιστα ένα αντίγραφο του βιβλίου του Μπασέ ενέπνευσε αργότερα τον **Φερμά** που παράλληλα με τα δικαστικά του καθήκοντα μελετούσε και μαθηματικά. Στα περιθώρια κάθε σελίδας του βιβλίου του Μπασέ, ο Φερμά έκανε σημειώσεις. Μια από τις σημειώσεις του ήταν και το **τελευταίο θεώρημά του Φερμά** που η απόδειξή του βασάνισε πολλές γενιές μαθηματικών από το 1670, όταν μετά το θάνατό του ο γιός του δημοσίευσε τα χειρόγραφά του. Ο Φερμά είχε εντυπωσιαστεί από την απόδειξη του Ευκλείδη ότι υπάρχουν άπειρες πυθαγόρειες τριάδες και σημείωσε δίπλα στο περιθώριο του βιβλίου: «**Είναι αδύνατο δύναμη μεγαλύτερη του τετραγώνου να γραφεί ως άθροισμα ίδιων δυνάμεων**» και συνέχιζε «έχω μια υπέροχη απόδειξη όμως δεν χωρά σε ένα τόσο μικρό περιθώριο». Αυτό είδε σε κάποια βιβλιοθήκη ο 10χρονος Άντριου Ουάλις και 30 χρόνια αργότερα το 1994 έδωσε την απόδειξή του.

Ένας δικαστής δεν έβγαλε απόφαση; Ένας διάσημος σοφιστής από τα Άβδηρα ήταν ο Πρωταγόρας που το επάγγελμά του ήταν να διδάσκει την ρητορική και την σοφιστική. Ο Πλάτωνας στο «Μένωνα» (ένα διάλογο για την αρετή) λέει ότι ο Πρωταγόρας είχε δεκαπλάσιο πλούτο από το Φειδία και από άλλους που έκαναν ανδριάντες(πολύ καλή δουλειά τότε). Ο Πρωταγόρας δίδαξε την σοφιστική σε πολλές πόλεις και στην Αθήνα.

Ενδιαφέρουσα είναι η δικαστική διαμάχη που είχε με τον μαθητή του Εύαθλο: Ο Πρωταγόρας ανέλαβε να διδάξει τη ρητορική, στον Εύαθλο. Συμφωνήσανε τα μισά της αμοιβής του να καταβληθούν με την λήξη των μαθημάτων και τα άλλα μισά όταν θα κερδίσει την πρώτη δίκη που θα αναλάβει. Όμως ο Εύαθλος δεν δικηγορούσε και δεν εξοφλούσε το χρέος του και ο Πρωταγόρας κατέφυγε στη δικαιοσύνη. Ο Πρωταγόρας κατέθεσε αγωγή σε βάρος του Ευάθλου, υποστηρίζοντας, ότι εάν το δικαστήριο κάνει δεκτή την αγωγή του, νόμιμα θα εισπράξει την αμοιβή του. Εάν πάλι απορριφθεί η αγωγή του, αυτό σημαίνει ότι ο Εύαθλος κέρδισε την πρώτη δίκη και πρέπει να τηρήσει τη συμφωνία. Ο Εύαθλος στις προτάσεις του, ως καλός και αντάξιος μαθητής του δασκάλου του, υποστήριξε, ότι εάν το δικαστήριο τον απαλλάξει δεν θα πληρώσει το υπόλοιπο, αλλά και στην περίπτωση που δεν αθωωθεί από το δικαστήριο και πάλι δεν υποχρεούται να πληρώσει, αφού δεν θα έχει κερδίσει την πρώτη δίκη του. (Μάλλον ο δικαστής μπερδεύτηκε και δεν έβγαλε απόφαση).

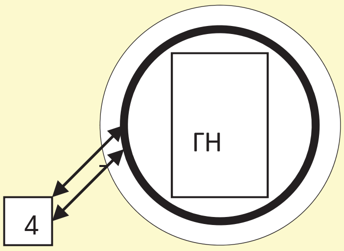
ΓΡΙΦΟΙ

Τα θέματα: Στο διαγωνισμό «**Πυθαγόρα**» της ΕΜΕ η Δήμητρα, ο Τάκης και η Σοφία πήραν μέρος. Τα παιδιά διαβάζουν το θέμα και σημειώνουν πια απάντηση από αυτές που τους υποδεικνύεται είναι σωστή. Κάθε παιδί δίνει απάντηση σε όλες τις ερωτήσεις με την δική του ταχύτητα. Όταν η Δήμητρα τελείωσε ο Τάκης είχε απαντήσει σε 18 ερωτήσεις και η Σοφία σε 15. Όμως όταν τελείωσε και ο Τάκης η Σοφία είχε απαντήσει σε 20 ερωτήσεις. Πόσα θέματα τους δόθηκαν;

Το πλαίσιο: Θέλω να φτιάξω ένα ορθογώνιο πλαίσιο. Έκοψα δύο ξύλινα πηχάκια 50 εκατοστά το καθένα και δύο 80 εκατοστά το καθένα. Τα κάρφωσα αλλά δεν είμαι σίγουρος αν το πλαίσιο είναι ορθογώνιο. Γωνιόμετρο δεν έχω, τι πρέπει να κάνω;

Κύβος και Τετράγωνο: Ποιος είναι ο 2ψήφιος που είναι και τετράγωνο και κύβος; Υπάρχει και 3ψήφιος;

Με το 5: Χρησιμοποιήστε 5 φορές το 5 και με πράξεις να φτιάξετε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10.



Ένα μεγάλο έργο: Μια εταιρεία έχει αναλάβει ένα μεγάλο έργο στην Αφρική, από το σημείο Α μέχρι το Β επί του Ισημερινού σε τόξο 45° να κάνει τρία έργα, α) δρόμο, β) σε ύψος 4 μέτρα να στηρίξει καλώδιο μεταφοράς ρεύματος και γ) δημιουργία Μετρό σε βάθος 8 μέτρων σταθερά από την επιφάνεια. (Θεωρούμε τη Γη σφαίρα με λεία επιφάνεια και περιφέρεια 40.000 χιλιόμετρα). Ποιο είναι το μήκος του δρόμου, ποιο του καλωδίου για το ρεύμα και ποιο της γραμμής του Μετρό;

Το 222 και ο 3ψήφιος: Αν πάρουμε ένα 3ψήφιο με τα ίδια ψηφία μπορούμε να γράψουμε άλλους 5 3ψήφιους αριθμούς π.χ. έστω ο 735 έχουμε 753 375 357 537 573, ποια ιδιότητα έχει το άθροισμά τους;

Κόψτον σε κύβους: Δύο αριθμοί συζητούν: Αν με κόψεις σε μικρούς κύβους δεν αλλάζω, και εγώ το ίδιο. Ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί;

Τα Αρνιά: Ρώτησαν το βοσκό πόσα αρνιά έχει να διαθέσει για το Πάσχα και αυτός απάντησε:
- Άσε μη ρωτάς, δύσκολη χρονιά, πριν 10 μέρες μου έφαγε ο Λύκος δεκατέσσερα πρόβατα. Από τα υπόλοιπα γέννησαν τα μισά από ένα αρνί. Αυτά που γέννησαν μου δίνουν κάθε μέρα δύο λίτρα γάλα το καθένα εκτός από πενήντα που μου δίνουν ένα λίτρο το καθένα και γεμίζω δύο δοχεία των 100 λίτρων. Πόσα αρνιά έχει ο βοσκός για το Πάσχα;

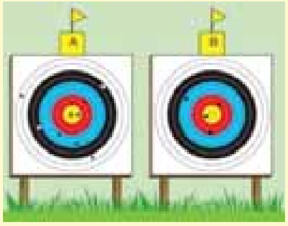
- Τους πιο κάτω γρίφους πρότειναν: **ο Σ. Μαραγκάκης και ο Α. Τριανταφύλλου**

Τα Γενέθλια: Ο Γιώργος, ο Βασίλης, ο Γιάννης, ο Αδάμ και ο Μιχάλης έχουν γενέθλιά διαδοχικές ημέρες, μεταξύ Δευτέρας και Παρασκευής.

- Τα γενέθλια του Γιώργου είναι κάποιες μέρες πριν από του Μιχάλη και του Βασίλη μετά του Αδάμ.
- Ο Γιάννης είναι δύο μέρες μεγαλύτερος από τον Αδάμ.
- Τα γενέθλια του Μιχάλη είναι την Πέμπτη.

Μπορείτε να καταλάβετε πια μέρα έχει γενέθλια ο καθένας;

Ο 3ψήφιος: Σε 3ψήφιο αριθμό το ψηφίο των δεκάδων είναι έξι μονάδες περισσότερο από το ψηφίο των μονάδων. Το ψηφίο των εκατοντάδων είναι οκτώ μονάδες μικρότερο από το ψηφίο των δεκάδων. Ποιος είναι ο αριθμός;



Ο Στόχος: Πόσους πόντους σκοράρει ο παίχτης Β γνωρίζοντας ότι η συνολική βαθμολογία του παίχτη Α είναι 55 και ότι κερδίζονται διαφορετικοί πόντοι στις δέκα ζώνες σε αύξουσα τιμή προς το κέντρο;

Οι κορύνες: Ποιες κορύνες πρέπει να χτυπηθούν για να κερδίσετε ακριβώς 120 πόντους;

Απαντήσεις στους Γρίφους τ.122

Αίνιγμα: ΑΕΤΟΣ γίνεται ΕΤΟΣ και ΕΤΟΣΑ που αν διαβαστεί ανάποδα ΑΣΟΤΕ (άσωτε).

Η ηλικία της Άννας: Οι πρώτοι αριθμοί μέχρι το 100 είναι: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Σύμφωνα με την περιγραφή της Άννας η ηλικία της είναι 19 χρόνων και οι αδελφές της 17 και 23. Που 17+19+23=59 πρώτος και $(14+16+20)/2=50/2=25=5^2$.

Μάντεψε: Διαιρέστε το πηλίκο που σας έδωσε δια 77 και θα έχετε τον αριθμό του.

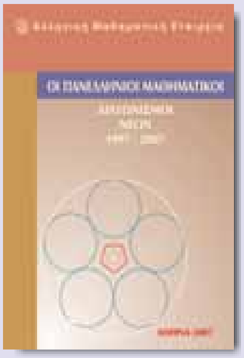
Το σακί: Το σακί είναι ένας κύλινδρος και ο όγκος του είναι $V=\pi R^2.h$ ενώ η περιφέρεια του είναι το μήκος κύκλου $L=2\pi R$. Έχουμε $2\pi R_1=60$ ή $R_1=\frac{60}{2\pi}$ και $2\pi R_2=30$ ή $R_2=\frac{30}{2\pi}$. Ο όγκος στο μεγάλο σακί είναι: $V_1=\pi R_1^2 h=\pi\left(\frac{60}{2\pi}\right)^2\cdot 80$ κ.εκ. ενώ στο μικρό $V_2=\pi R_2^2 h=\pi\left(\frac{30}{2\pi}\right)^2\cdot 80$ κ.εκ. δηλαδή $\frac{V_1}{V_2}=4$. Άρα χάνει γιατί η ποσότητα 4 μικρών είναι όσο ένα μεγάλο.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές

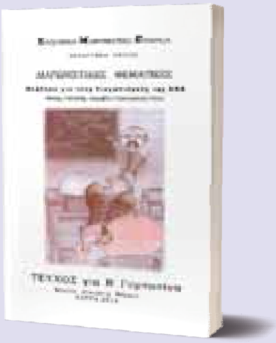
Νέα τιμή βιβλίου: 15€



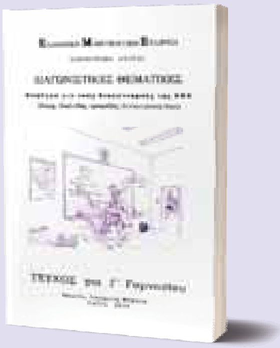
Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Νέα τιμή βιβλίου: 15€

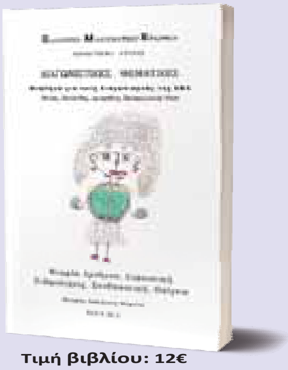
Διαγωνισμοί



Τιμή βιβλίου: 12€

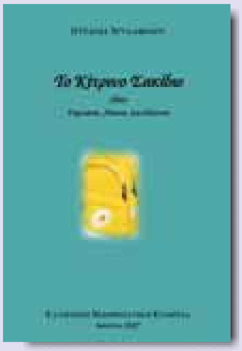


Τιμή βιβλίου: 12€

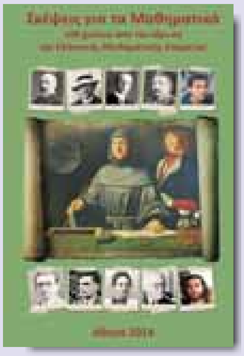


Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ



Τιμή βιβλίου: 18€

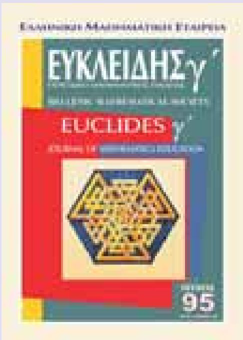


Τιμή βιβλίου: 15€

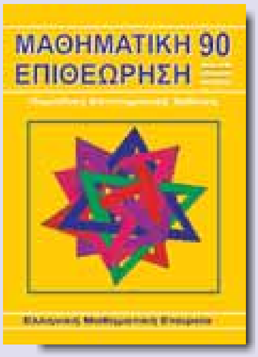
Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr