ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

113

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019 ευρώ 3,5

61^{η} ΙΜΟ 2020 στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας

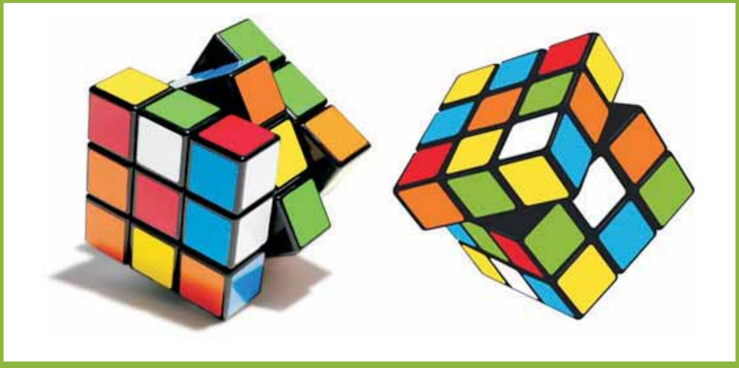
euroMath 2020

Το Euromath 2020 στη Θεσσαλονίκη

Πολλά Μετάλλια στις Ολυμπιάδες

IMO 2019
60th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

O Rubik στην Ελλάδα



Τιμητικές διακρίσεις

Οι Έλληνες που ξεχωρίζουν:

- Κ. Δασκαλάκης
- Δ. Κουκουλόπουλος

ΕΛΤΑ Hellenic Post

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 113 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2019 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι

Πολλές ευχές για χαρούμενη
και δημιουργική χρονιά

με αισιοδοξία, πείσμα, κουράγιο, κατανόηση
και καλή διάθεση παντού
να προσπαθήσουμε για το καλύτερο και

να είμαστε πάντα καλά

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Χρ. Λαζαρίδης, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής: 9 Νοεμβρίου 2019
Ευκλείδης: 18 Ιανουαρίου 2020
Αρχιμήδης: 22 Φεβρουαρίου 2020

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στην επικαιρότητα των Μαθηματικών

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Δρούτσας Παναγιώτης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται: (1). Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ. Γραφείο Αθήνα 54 Τ.Θ. 30044 (2). Στην ιστοσελίδα της Ε.Μ.Ε., όπου υπάρχει δυνατότητα τραπεζικής συναλλαγής με την τράπεζα EUROBANK (3). Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. (4). Με αντικαταβολή, σε εταιρεία ταχυμεταφορών στο χώρο σας, κατά την παραλαβή.

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Ο κύβος του Ρούμπικ

Ο κύβος που όλοι αγάπησαν κράτησαν κάποια στιγμή στο χέρι τους και προσπάθησαν να τον λύσουν

Στάμη Τσικοπούλου

Το Summer Nostos Festival του Ιδρύματος Σταύρος Νιάρχος, παρουσίασε φέτος για δεύτερη χρονιά, από 23-29 Ιουνίου, στο Κέντρο Πολιτισμού Ιδρυμα Νιάρχος, το Nostos University, το οποίο ήταν αφιερωμένο στην έννοια της **πολυπλοκότητας**[1]. Μέσα από workshops, περίπλοκες κατασκευές με κύβους, ντόμινος τραπουλόχαρτα και διαγωνισμούς επιδίωξε με φαντασμαγορικό τρόπο, να μας *μάθει* και να μας αποκρυπτογραφήσει, το πώς να *παίξουμε* με την πολυπλοκότητα. Επίτιμος καλεσμένος ο **Ερνό Ρούμπικ**, ο εφευρέτης του ομώνυμου κύβου, ο οποίος συνομίλησε με το κοινό και πήρε μέρος σε εκδηλώσεις που πραγματοποιήθηκαν με πρωταγωνιστή τον κύβο του. Την τελευταία ημέρα των εκδηλώσεων πραγματοποιήθηκε και ο επίσημος διαγωνισμός επίλυσης παζλ της World Cube Association (WCA) στην Ελλάδα, το Athens SNFestival Cubing 2019. Στο διαγωνισμό έλαβαν μέρος 120 άτομα απ’ όλον τον κόσμο καλύπτοντας πλήρως το όριο των συμμετοχών, τα οποία διαγωνίστηκαν σε διάφορες κατηγορίες, μεταξύ αυτών την επίλυση του κύβου με ένα χέρι ή με κλειστά μάτια. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού ήταν εντυπωσιακά, καθώς οι περισσότεροι συμμετέχοντες κατέρριψαν τα ατομικά τους ρεκόρ.

Πρωταθλητής στην επίλυση του κύβου 3×3×3 αναδείχθηκε ο Γερμανός **Sebastian Weyer** με χρόνο 5.84 δευτερόλεπτα, ο οποίος πρώτευσε και στην επίλυση κύβου 4×4×4 και 5×5×5. Ο Έλληνας **Βασίλης Πρίγκος** (φωτό) κατατάχθηκε στην ίδια κατηγορία στην 5η θέση με χρόνο 9.18. Στην επίλυση κύβου 3×3×3 με κλειστά μάτια πρώτευσε ο **Erik Akkersdijk** από την Ολλανδία με χρόνο 1:35.66.

Στην επίλυση κύβου 3×3×3 με το ένα χέρι, πρωταθλητής αναδείχθηκε ο Γερμανός **Fillipp Weyer** με χρόνο 10.25. Στην 3η θέση της κατηγορίας αυτής κατατάχθηκε ο Έλληνας **Νικόλας Βλασσόπουλος** με χρόνο 15.43.
Στην επίλυση του παζλ με μορφή πυραμίδας πρωταθλητής αναδείχθηκε ο Αμερικανός **Daniel Goodman** με χρόνο 2.28.
Περισσότερα για τον διαγωνισμό θα βρείτε στην ιστοσελίδα:
https://www.worldcubeassociation.org/competitions/AthensSNFestivalCubing2019.

Με αφορμή την επίσκεψη του Ρούμπικ στη χώρα μας ας γνωρίσουμε καλύτερα τον περίφημο κύβο του, που σίγουρα κανείς μας δεν αντιστάθηκε να κάνει κάποια στιγμή μια προσπάθεια για να τον λύσει, αφού θεωρείται κριτήριο ευφυίας.

Πριν από 45 χρόνια, ο Ούγγρος Καθηγητής Αρχιτεκτονικής και Εφαρμοσμένων Τεχνών, Ερνό Ρούμπικ θέλησε να εξοικειώσει τους φοιτητές του με την έννοια της πολυπλοκότητας. Στόχος

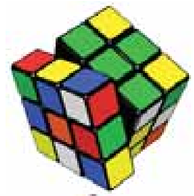
[1] Στη Βικιπαίδεια διαβάζουμε ότι: «Η **θεωρία πολυπλοκότητας** είναι το μέρος εκείνο της θεωρίας υπολογισμού, το οποίο ασχολείται με την κοστολόγηση των πόρων που απαιτούνται για την αλγοριθμική επίλυση ενός προβλήματος. Επομένως η θεωρία πολυπλοκότητας αποτελεί βασικό δομικό λίθο της ανάλυσης αλγορίθμων και κεντρικό γνωστικό πεδίο της επιστήμης υπολογιστών. Οι συνηθέστεροι πόροι για τους οποίους ενδιαφερόμαστε είναι ο *χρόνος*, οπότε μιλάμε για τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, δηλαδή πόσα «βήματα» χρειάζεται να εκτελέσει ο αλγόριθμος συναρτήσει της εισόδου του, και ο *χώρος*, οπότε μιλάμε για τη χωρική πολυπλοκότητα, δηλαδή πόσο χώρο (μνήμη) χρειάζεται ο αλγόριθμος συναρτήσει της εισόδου του. Εκτός από αυτούς τους πόρους, κατά περίπτωση, μπορεί να ενδιαφερόμαστε και για άλλους, όπως για παράδειγμα πόσοι παράλληλοι επεξεργαστές χρειάζονται για να λυθεί ένα πρόβλημα παράλληλα.»

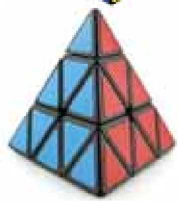
του ήταν να λύσει ένα δομικό πρόβλημα κινούμενων μερών μεμονωμένα, χωρίς να επηρεάσει ή να διαλύσει ολόκληρο τον μηχανισμό.

Επηρεασμένος από τις μηχανικές κατασκευές του Λεονάρντο ντα Βίντσι και του Μικελάντζελο, ο Ρούμπικ επινόησε το 1974 ένα τρισδιάστατο μηχανικό παζλ, τον διάσημο κύβο, που στην αρχή έμοιαζε άλυτος και σε αυτόν τον ίδιο τον κατασκευαστή του και έπρεπε να περάσει ένας μήνας για να καταφέρει να το λύσει. Ο Ρούμπικ, δεν είχε στην αρχή συνειδητοποιήσει ότι είχε δημιουργήσει ένα γρίφο μέχρι την πρώτη φορά που περιέπλεξε τον κύβο του και στη συνέχεια προσπάθησε να τον επαναφέρει.

"Όταν ξεκίνησα, δεν ήξερα τι θα έφτιαχνα, δεν είχα ένα ξεκάθαρο σχέδιο στο μυαλό μου. Με ενδιέφεραν η τρισδιάστατη κατασκευή, η γεωμετρία, οι δυνατότητες της τέχνης και οι μηχανικές κατασκευές. Όλα αυτά τα στοιχεία με έκαναν να απασχοληθώ με διάφορες ιδέες και ο κύβος ήταν μία από αυτές. Γιατί ο κύβος είναι μια από τις βασικές μορφές της γεωμετρίας και των πλατωνικών στερεών. Σκεφτόμουν και εργαζόμουν για τη λύση του αφού πρώτα έδωσα τη λύση της κατασκευής του... Το πρόβλημα που αντιμετώπισα στο να τον λύσω, ήταν σαν να έχει πάει κανείς βόλτα στο δάσος και να έχει περάσει από πολλά σημεία αλλά να μην μπορεί να θυμηθεί πώς να γυρίσει πίσω, επειδή περιπλανήθηκε πολύ μακριά. Σταμάτησα λοιπόν να προσπαθώ να θυμηθώ πώς τον είχα χαλάσει και έψαξα για μια λογική λύση … Ακόμα θυμάμαι τη στιγμή που έλυσα τον γρίφο. Ήταν κάτι που δεν θα το ξεχάσω ποτέ και με έκανε χαρούμενο γιατί θεωρούσα ότι μπορεί να λύνεται αλλά αισθανόμουν ότι αυτό ήταν πολύ δύσκολο... Ο κύβος είναι όπως η ζωή, τα προβλήματα και η χαρά να τα λύνεις... Αν είσαι φιλοπερίεργος και αν επιπλέον είσαι αποφασισμένος να τους λύσεις κιόλας, θα βρεις γύρω σου πολλούς γρίφους..."

Το παιχνίδι πρωτοκυκλοφόρησε στην πατρίδα του την Ουγγαρία το 1977, με τον τίτλο **Μαγικός Κύβος**. Το 1980 ο κύβος διατέθηκε στη παγκόσμια αγορά με το όνομα **Κύβος του Ρούμπικ**.

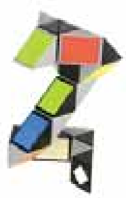




Στα επόμενα χρόνια, η δημοτικότητα του κύβου ήταν τόσο μεγάλη ώστε η εταιρεία που τον διένειμε υπολόγισε πως ένας στους πέντε ανθρώπους είχε προσπαθήσει να τον λύσει. Σύμφωνα με επίσημα στατιστικά στοιχεία, μέχρι τον Ιανουάριο του 2009, το απλό αλλά ταυτόχρονα εθιστικό αυτό παιχνίδι είχε πουλήσει περισσότερα από 350 εκατομμύρια αντίτυπα κάνοντας τον κύβο το εμπορικότερο παιχνίδι παζλ παγκοσμίως, παρόλο που οι συνήθειες των νέων σχετικά με τα παιχνίδια αλλάζουν καθώς όλο και περισσότεροι προτιμούν τα ηλεκτρονικά παιχνίδια.

Σε έναν κλασσικό κύβο του Ρούμπικ (3×3×3) με μήκος πλευράς 5,5 cm, κάθε μία από τις έξι έδρες του καλύπτεται από εννιά αυτοκόλλητα με έξι χρώματα: λευκό, κόκκινο, κίτρινο, πράσινο, μπλε και πορτοκαλί.

Ένας μηχανισμός περιστροφής επιτρέπει σε κάθε έδρα του να περιστρέφεται ανεξάρτητα από τις άλλες, με αποτέλεσμα να συγχέονται τα χρώματα. Για να λυθεί το παζλ, πρέπει κάθε έδρα του κύβου να αποτελείται αποκλειστικά από αυτοκόλλητα του ίδιου χρώματος.



Πέρα από τις δυσκολότερες παραλλαγές του κύβου, όπου αυξάνονται οι στήλες και οι γραμμές, δηλαδή κύβοι με 4×4×4 έως και 17×17×17, διάφορα άλλα παζλ έχουν παραχθεί εμπνευσμένα από τον κύβο του Ρούμπικ τα οποία δεν έχουν τη μορφή κύβου. Για παράδειγμα: παζλ με τη μορφή πυραμίδας (Pyraminx), δωδεκάεδρου (το Megaminx, με 50 κινητά μέρη), παζλ που αλλάζουν σχήμα, όπως εκείνο το φιδιού (Rubik's Snake), κύβοι με φωτογραφίες, φαγώσιμοι όπως κέικ (στην ιστοσελίδα https://www.theydrawandcook.com/illustrations/1899-rubik-cake δίνονται οδηγίες για την παρασκευή του κέικ) ή ακόμη και mp3 κύβοι, με διαφορετικό αριθμό αυτοκόλλητων.

Εξ αιτίας της δημοφιλίας του κύβου και των φανατικών νεαρών ως επί το πλείστον οπαδών του σε όλον τον κόσμο, από το 1982 άρχισαν να διεξάγονται και οι πρώτοι διαγωνισμοί ταχείας επίλυσής του. Το παγκόσμιο ρεκόρ χρόνου για τον κύβο 3×3×3 το έχει ο 22χρονος Αυστραλός **Feliks Zemdegs**, ο οποίος στον διαγωνισμό της Καμπότζης του 2018, καταρρίπτοντας τις προηγούμενες επιδόσεις του που ήταν 4.59 δευτερόλεπτα, κατάφερε να κάνει νέο ρεκόρ στα 4.22 δευτερόλεπτα.

Διεξάγονται ακόμα και διαγωνισμοί, όπου τον κύβο καλείται να τον λύσει μια ρομποτική κατασκευή με βραχίονες όπως αυτή της διπλανής φωτογραφίας. Το 2019 ένα ρομπότ χρειάστηκε 0.38 δευτερόλεπτα για να λύσει τον κύβο του Ρούμπικ, καταρρίπτοντας το προηγούμενο παγκόσμιο ρεκόρ των 0.637 δευτερολέπτων που κατείχε το ρομπότ SUB1 Reloaded.
(δες https://www.youtube.com/ watch?v=b5Mp7_GjhVg)

Ο κύβος αποτελείται από 26 μικρούς ορατούς κύβους από τους οποίους οι **8** είναι **γωνίες**, οι **12 ακμές** και οι υπόλοιποι **6 κέντρα εδρών**. Στη θέση του 27^{ου}, μη ορατού κύβου, βρίσκεται το κέντρο του μηχανισμού περιστροφής, που επιτρέπει σε κάθε έδρα να περιστρέφεται ανεξάρτητα από τις άλλες, με αποτέλεσμα να συγχέονται τα χρώματα. Όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα, πολλοί κύβοι δεν είναι ολόκληροι.

Αν περιστρέφουμε τις έδρες του κύβου, παρατηρούμε ότι τα κομμάτια αλλάζουν θέσεις αλλά όχι είδος, δηλαδή μία γωνία παραμένει πάντα γωνία. Επιπλέον τα κέντρα των εδρών δεν αλλάζουν θέση μεταξύ τους και ορίζουν το χρώμα που πρέπει να έχει ολόκληρη η έδρα. Το κόκκινο κέντρο είναι απέναντι από το πορτοκαλί, το άσπρο απέναντι από το κίτρινο κ.ο.κ.

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που διατυπώθηκαν με την εμφάνιση του κύβου ήταν πόσες κινήσεις χρειάζονται ώστε ένας ανακατεμένος κύβος να έρθει στην αρχική του κατάσταση. Ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών επιλύσιμων διατάξεων των εδρών του κύβου έχει υπολογιστεί ότι είναι: 43.252.003.274.489.856.000*.

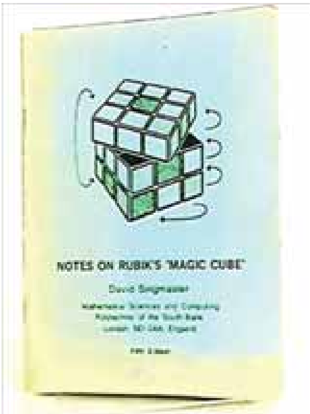
** Ένας κύβος με τυχαία διάταξη των κομματιών του δεν είναι δεδομένο ότι μπορεί να φτάσει στην λυμένη κατάσταση με τις περιστροφές των πλευρών του. Το πλήθος των τυχαίων διατάξεων του υπολογίζεται ως εξής [1]:*

- *Κάθε γωνιακό κομμάτι πρέπει να πάρει μια θέση, υπάρχουν 8! πιθανές διατάξεις.*
- *Κάθε γωνιακό κομμάτι έχει ένα προσανατολισμό, συνολικά 3^7 επιλογές.*
- *Κάθε κομμάτι ακμής πρέπει να πάρει μια θέση, υπάρχουν 12! πιθανές διατάξεις.*
- *Κάθε κομμάτι ακμής έχει ένα προσανατολισμό, συνολικά 2^{11} επιλογές.*

Υπολογίζεται πως υπάρχουν συνολικά 519.024.039.293.878.272.000 [=8!×37×(12!/2)×211] τυχαίες διατάξεις του κύβου. Αποδεικνύεται όμως ότι μόνο το $\frac{1}{12}$ αυτών είναι επιλύσιμες δηλαδή οι 43.252.003.274.489.856.000 περιπτώσεις.

Αυτό σημαίνει πως, αν θεωρήσουμε πως απαιτείται ένα δευτερόλεπτο για κάθε διαφορετική κίνηση, ο χρόνος που χρειάζεται για να δει κανείς όλες τις διατάξεις είναι 1,4 τετράκις εκατομμύρια έτη!

Ένας από τους πιο διάσημους, ενθουσιώδεις και παραγωγικούς υποστηρικτές του κύβου του Ρούμπικ είναι ο David Singmaster, Καθηγητής Μαθηματικών στο London South bank University της Αγγλίας. Ο Singmaster είδε τον κύβο για πρώτη φορά τον Αύγουστο του 1978, στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Ελσίνκι. Ορισμένοι μαθηματικοί που λάμβαναν μέρος στο Συνέδριο, μεταξύ των οποίων ο John Conway και ο Penrose είχαν ήδη έναν κύβο, παρόλο που αυτός δεν είχε ακόμα κυκλοφορήσει στην παγκόσμια αγορά. Ο Singmaster απέκτησε τελικά έναν κύβο απο τον Ούγγρο μαθηματικό Tamás Varga και κατάφερε να τον λύσει μέχρι τις αρχές Σεπτεμβρίου 1978. Χρειάστηκε μόλις δύο εβδομάδες για να αναπτύξει μια γενική λύση. Επινόησε τη σημειογραφία καταγραφής των κινήσεων περιστροφής του κύβου (γνωστή πλέον ως σημειογραφία Singmaster) το Δεκέμβριο του 1978. [4], [5].



Τον Οκτώβριο του 1979, δημοσίευσε τις *Σημειώσεις για τον "Magic Cube"* (Notes on Rubik's 'Magic Cube') που παρείχαν την πρώτη μαθηματική ανάλυση του κύβου χρησιμοποιώντας τη Θεωρία Ομάδων[2], καθώς και μια από τις πρώτες δημοσιευμένες λύσεις του. Έκτοτε δεν έπαψε να ασχολείται με τον κύβο και άλλα παρόμοια παζλ. Κατέχει άλλωστε περισσότερα από 300 παρόμοια παζλ. Το 2009 δημοσίευσε ένα ακόμα βιβλίο το Handbook of Cubik Math στο οποίο αναπτύσει τη θεωρία που σχετίζεται με τη λύση του Κύβου, τις πιθανές εφαρμογές αυτής σε άλλα παρόμοια παζλ και τον τρόπο με τον οποίο ο κύβος παρέχει ένα φυσικό παράδειγμα για πολλές έννοιες στα μαθηματικά όπου τέτοια παραδείγματα είναι δύσκολο να βρεθούν.

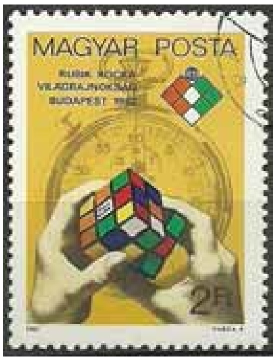
Από το 1980 ο David Singmaster **είχε κάνει μια εικασία πως το μέγιστο πλήθος κινήσεων για να λυθεί ο κύβος είναι 20**. Αργότερα υπολογίστηκε ότι ο αριθμός των απαιτούμενων κινήσεων κυμαίνεται από 40 έως 120.

Το 2010 μια ομάδα ερευνητών, με τη βοήθεια υπολογιστικών συστημάτων, επιπεβαίωσε την εικασία του Singmaster αφού απέδειξε ότι κάθε διάταξη του κύβου του Ρούμπικ μπορεί να λυθεί με το πολύ 20 κινήσεις (κατά 180^o, half tur). Πρόκειται για δύο προγραμματιστές από τη Silicon Valley, ένα μαθηματικό από το Οχάιο κι ένα μαθηματικό από τη Γερμανία, οι οποίοι ένωσαν τις δυνάμεις τους και 35 επεξεργαστές-CPU για να βρουν όλες τις πιθανές λύσεις. Για το σκοπό αυτό υλοποιήθηκε αλγόριθμος που με παράλληλη εκτέλεση χρειαζόταν περίπου 20 δευτερόλεπτα για την λύση ενός σετ.

Για να το πετύχουν έσπασαν, όπως λένε στη σελίδα του αλγόριθμου τους (http://cube20.org/), το πρόβλημα σε 2.217.093.120 επιμέρους προβλήματα! Για την απόδειξη χρειάστηκε να λυθούν 55.882.296 σετ των 19.508.428.800 κύβων από τα 2.217.093.120 συνολικά σετ (~2.52% των περιπτώσεων) καθώς τα υπόλοιπα έχουν συμμετρικές λύσεις. Η εύρεση, όμως, από έναν κοινό θνητό των συγκεκριμένων 20 κινήσεων είναι τόσο δύσκολη ώστε το 20 χαρακτηρίζεται ως ο αριθμός των κινήσεων που χρειάζεται ο Θεός για να επιλύσει το κύβο (**God's number is 20**). Ο απαιτούμενος χρόνος εξαρτάται από τον αριθμό των κινήσεων, την δεξιότητα των χεριών των παιχτών και την ποιότητα κατασκευής του κύβου.
Το 2014 αποδείχτηκε με παρόμοιο τρόπο πως ο αριθμός του Θεού για το σύνολο των κινήσεων κατά ¼ (90^o, quarter turn) είναι 26.

[2] Η θεωρία ομάδων (group theory) είναι ως γνωστόν το πεδίο των μαθηματικών που μελετά τις αλγεβρικές δομές γνωστές ως ομάδες. Μια ομάδα είναι μια αλγεβρική δομή $(G, *)$ που αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων G μαζί με μια συνάρτηση *, που συνδυάζει οποιαδήποτε δύο στοιχεία ώστε να σχηματιστεί ένα τρίτο στοιχείο.
Μπορούμε να κάνουμε το σύνολο των κινήσεων στον κύβο του κύβου Rubik μια ομάδα, την οποία θα δηλώσουμε (G, *). Τα στοιχεία του G θα είναι όλες οι δυνατές κινήσεις/περιστροφές του κύβου (για παράδειγμα: μια πιθανή κίνηση είναι μια φορά δεξιόστροφα η επάνω όψη του ακολουθούμενη από μια αριστερόστροφη στροφή της). Η συνάρτηση της ομάδας θα οριστεί ως εξής: αν M_1 και M_2 είναι δύο κινήσεις, τότε $M_1 * M_2$ είναι πρώτα η κίνηση M_1 και έπειτα η M_2.

Ο κύβος, όπως προαναφέρθηκε, μπορεί να βρεθεί σε περισσότερες από $4{,}3\text{x}10^{19}$ καταστάσεις οπότε, όπως καταλαβαίνουμε, είναι μάλλον απίθανο να επιλυθεί κάνοντας τυχαίες κινήσεις. Είναι απαραίτητο λοιπόν να ακολουθήσουμε μια σαφώς καθορισμένη και πεπερασμένη σε αριθμό ακολουθία κινήσεων που θα μας οδηγήσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Πρέπει δηλαδή να εφαρμόσουμε έναν **αλγόριθμο**.



Το πρόβλημα της επίλυσης του κύβου στις μέρες μας είναι πλήρως καθορισμένο και δομημένο. Επομένως η σχεδίαση και υλοποίηση σε μία γλώσσα προγραμματισμού ενός προγράμματος που θα λύνει τον κύβο είναι μια σχετικά εύκολη διαδικασία. Πρόβλημα όμως παραμένει το πώς μπορείς να διδάξεις εύκολα έναν άνθρωπο, με περιορισμένη δυνατότητα απομνημόνευσης αλλά αυξημένη δυνατότητα αναγνώρισης προτύπων, κατανόηση του τρισδιάστατου χώρου και διαίσθηση, να επιλύει το κύβο χωρίς φυσική επαφή με αυτόν αλλά με ένα φυλλάδιο οδηγιών;

Από την εμφάνιση του κύβου μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί πάρα πολλοί αλγόριθμοι επίλυσης του από εύκολοι έως πάρα πολύ δύσκολοι στην απομνημόνευσή τους και διαφοροποιούνται σημαντικά ως τον αναγκαίο χρόνο επίλυσης και τον αριθμό των απαιτούμενων κινήσεων. Στο διαδίκτυο θα βρει κανείς πολλά βιντεάκια στα οποία φανατικοί οπαδοί του προτείνουν πολλούς τρόπους για να λύσει κανείς τον κύβο. Θα βρει ακόμα και διπλωματικές εργασίες με στοιχεία από τη Θεωρία Ομάδων για την κατανόηση των βημάτων του αλγόριθμου που οδηγούν στη λύση του, π.χ [1], [2].

Ο κύβος του Ρούμπικ είναι ένα σύνθετο πρόβλημα που απασχόλησε τους επιστήμονες για πολλά χρόνια, ώστε να βρεθεί ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος για την επίλυσή του. Παρ' όλες τις προσπάθειες, ο αλγόριθμος του Θεού δεν έχει ακόμα βρεθεί. Για να βρούμε τη βέλτιστη λύση πρέπει απλά να δοκιμάσουμε κάθε συνδυασμό κινήσεων μέχρι να βρούμε έναν που να τον λύνει. Όσο περνάνε τα χρόνια και οι μηχανές αποκτούν περισσότερη υπολογιστική ισχύ, πιστεύουμε ότι προβλήματα όπως αυτό του κύβου, θα συμβάλλουν στην ανάπτυξη νέων μεθόδων και αλγορίθμων ώστε να μικρύνει ο χώρος αναζήτησης.

"*Ο κύβος περιέχει πολλές αντιφάσεις. Είναι φυσικός, χειροκίνητος και απτός. Είναι ένα αντικείμενο που φαίνεται αθώο και παιδικό. Κι όμως για να τον λύσεις, πρέπει να βάλεις το χάος σε τάξη. Τότε είναι και απλό και πολύπλοκο. Θέτει ένα ευθύ ερώτημα, αλλά η απάντηση είναι δύσκολη*", είπε ο Ερνό Ρούμπικ και δεν είχε άδικο.

Βιβλιογραφία

[1] Κωνσταντίνος-Γ-Καρατσενίδης (2018). Ο Κύβος του Ρούμπικ : Ανάλυση και Μέθοδοι Επίλυσης. Πτυχιακή εργασία Ε.Κ.Π.Α Σχολή Θετικών Επιστημών Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών.

[2] Σκαπινάκης Πολύκαρπος Αλγόριθμοι Επίλυσης του κύβου 3x3x3 https://www.sepchiou.gr/

[3] How to Solve the Rubik's Cube - https://en.wikibooks.org

[4] David Singmaster - https://www.speedsolving.com › index.php

[5] Singmaster, D. "Moral and mathematical lessons from a Rubik Cube". *New Scientist*. (23/30 Dec 1982) p. 786-791.

Οι Έλληνες που επιμένουν ... οι Έλληνες που διακρίνονται...

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

*Από την εποχή που ο **Μέγας Αλέξανδρος** έκοψε το γόρδιο δεσμό, οι Έλληνες από την αρχαία Ελλάδα μέχρι σήμερα, δεν έχουν κόψει αλλά έχουν λύσει πολλούς γόρδιους γρίφους της επιστήμης. Μεταξύ των κορυφαίων **βραβευμένων** Ελλήνων Μαθηματικών **Δημήτρη Χριστοδούλου, Θανάση Φωκά, Κωνσταντίνο Δασκαλάκη,** από **φέτος συγκαταλέγεται** και ένας ακόμα νέος Έλληνας επιστήμονας από την Κοζάνη ο **Δημήτρης Κουκουλόπουλος**.*

Ο **Δημήτρης Κουκουλόπουλος** έλυσε πρόσφατα έναν γρίφο που είχε το όνομα εικασία του **RJ Duffin** και του **AC Schaeffer**. Ο γρίφος αυτός ήταν ένα ανοικτό (άλυτο) πρόβλημα από το **1941** της Αναλυτικής Θεωρίας των Αριθμών.

Ο Δημήτρης Κουκουλόπουλος, που φοίτησε στο 2^{ο} Γενικό Λύκειο της Κοζάνης σπούδασε στο Μαθηματικό του ΑΠΘ και συνέχισε τις σπουδές του, στα Αμερικανικά πανεπιστήμια, στο **Ιλινόϊς** και στο **Πρίνστον**. Το 2012 σε ηλικία 28 ετών προσλαμβάνεται ως επίκουρος καθηγητής στο πανεπιστήμιο του **Μόντρεαλ** και σήμερα, 35 ετών, είναι αναπληρωτής καθηγητής στο ίδιο πανεπιστήμιο.

Δημήτρης Κουκουλόπουλος –Montreal

Σε σχετική συνέντευξή του πρόσφατα, έλεγε για την ελληνική εκπαίδευση: «…Όταν πήγα στις ΗΠΑ δεν ένοιωσα κανένα μειονέκτημα σε σχέση με τους συμφοιτητές μου, ήμουν πλήρως προετοιμασμένος, **είχα όλα τα εφόδια για να κάνω έρευνα, γιατί στην Ελλάδα είχα πολύ καλούς δασκάλους και τα Μαθηματικά που ήταν να μάθω, τα έμαθα**. Μου άρεσαν τα Μαθηματικά και οι αριθμοί και στην τελευταία τάξη του Λυκείου έλαβα μέρος στον διαγωνισμό της **Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας** όπου κέρδισα το **χάλκινο μετάλλιο**. Αυτό το γεγονός μου πρόσφερε **αυτοπεποίθηση** και το αναγκαίο **ειδικό βάρος** ώστε να σπουδάσω Μαθηματικά στο μαθηματικό τμήμα αντί του Πολυτεχνείου…».

Ο Δημήτρης με τον μικρότερο του, σε ηλικία συνεργάτη τον **James Maynard** καθηγητή στην Οξφόρδη και με πολλά βραβεία, κατάφερε να αποδείξει την εικασία των «Duffin-Schaeffer» που διατυπώθηκε το 1941 και είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα στον τομέα της «**μετρικής Διοφαντικής προσέγγισης**». Το πρόβλημα είχε να κάνει με προσεγγίσεις αριθμών από κλάσματα και ανήκει στο τομέα της θεωρίας των αριθμών που λέγεται «Διοφαντική προσέγγιση» προς τιμήν του Διόφαντου της Αλεξάνδρειας που ήταν ένας από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Η εικασία αναφέρει **τα κριτήρια** που μπορούμε να θέσουμε ώστε να προσεγγίσουμε αριθμούς, εάν αποκλείσουμε κάποιους παρονομαστές. Οι δύο μαθηματικοί όμως βρήκαν ότι σε αυτή την περίπτωση που αποκλείσουμε κάποιους παρονομαστές ακόμη και ένα αραιό υποσύνολο αυτών, μπορεί τότε ορισμένοι αριθμοί, να μην προσεγγιστούν ποτέ.

Ας πάρουμε ένα παράδειγμα με τον αριθμό **π** που είναι μια μαθηματική σταθερά με άπειρα ψηφία και εμφανίζεται πάρα πολύ συχνά στα Μαθηματικά, τη Φυσική και δεν μπορούν οι άνθρωποι αλλά ούτε και οι υπολογιστές, να δουλέψουν με τόσο πολύπλοκους αριθμούς. Όταν κάνουμε πράξεις θέλουμε πιο απλές προσεγγίσεις. Εάν γράψουμε 4 δεκαδικά ψηφία του π και σταματήσουμε στο 3,1415 έχουμε μια προσέγγιση του αριθμού. Αυτό τον αριθμό μπορούμε να τον γράψουμε σε κλάσμα 31415/10000 ή 6283/2000. Όμως από τους αρχαίους Έλληνες ξέραμε ότι μια πολύ καλή προσέγγιση του **π** με πολύ μικρότερους αριθμούς είναι το κλάσμα (**22/7**) που έχει πολύ μικρότερο παρονομαστή. Ο παρονομαστής του είναι μόνο 7 ενώ ο παρονομαστής του άλλου κλάσματος είναι 2000. Το δεύτερο κλάσμα έχει πολύ μικρότερη πολυπλοκότητα.

James Maynard - Oxford

Το ερώτημα είναι εάν χρησιμοποιήσουμε παρονομαστές μέχρι ένα **άνω φράγμα** π.χ. τα 2

εκατομμύρια, πόσο καλή προσέγγιση μπορούμε να έχουμε σε έναν τέτοιο αριθμό;
Σε τέτοιου είδους μεγάλα ερωτήματα η "Διοφαντική προσέγγιση" θέλει **μ' ένα απλό κλάσμα** να βρει απλές προσεγγίσεις αριθμών. Πολλές από αυτές τις έρευνες στη θεωρία αριθμών βοηθούν την εξέλιξη των εφαρμοσμένων μαθηματικών και της φυσικής.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση η λύση της εικασίας των Duffin – Schaeffer όπως φάνηκε βοηθάει πολύ στην κρυπτογραφία (ασφαλής μετάδοση σήματος), στην πληροφορική στις επικοινωνίες κ.λ.π.
Από τις δηλώσεις του στον τύπο ξεχωρίζουν…

Η αναλυτική θεωρία αριθμών

- Η αναλυτική θεωρία των αριθμών, μου άρεσε πολύ από μικρό παιδί και μου εξίταρε τη φαντασία.
- Ο στόχος μου πάντα ήταν να πάω στις ΗΠΑ. Επέλεξα να πάω απευθείας για διδακτορικό στο πανεπιστήμιο του Ιλινόϊς γιατί εκεί, **είχε μια πολύ καλή ομάδα** στην Αναλυτική θεωρία των αριθμών. Ήμουν αρκετά τυχερός γιατί εκεί άρχισα να δουλεύω με τον **Kevin Ford** έναν καθηγητή που είναι κορυφαίος στον τομέα του.
- Τον τελευταίο χρόνο του διδακτορικού ακολούθησα τον μέντορα μου, στο ναό της Αναλυτικής Θεωρίας, στο πανεπιστήμιο του Πρίνστον, όπου **ένα ολόκληρο έτος** ήταν αφιερωμένο στην αναλυτική θεωρία αριθμών με συμμετοχές των καλυτέρων μαθηματικών της παγκόσμιας μαθηματικής επιστήμης.
- Η εμπειρία μου στο **Πρίνστον** με επηρέασε ακόμη περισσότερο, αφού εκεί γνώρισα τους πιο σημαντικούς επιστήμονες στο τομέα αυτό και έμαθα από κοντά για όλα τα ερωτήματα που τους απασχολούν και είχαν όπως αποδείχτηκε πολύ μεγάλο ενδιαφέρον.
- Εκεί γνωρίστηκα και με τον **Andrew Granville** αξιόλογο ερευνητή στην αναλυτική θεωρία αριθμών.

Η θεωρητική γνώση σήμερα και η εμμονή των εφαρμογών

- Στον σημερινό κόσμο όλα μετριούνται με γνώμονα **το χρήμα**. Το πανεπιστήμιο δεν θα μπορούσε να μείνει ανεπηρέαστο από την ακραία λογική της αγοράς. Αναγνωρίζω τη σημασία δημιουργίας ανθρώπινου δυναμικού με υψηλές δεξιότητες, όμως η θεωρητική κατανόηση του κόσμου προηγείται πάντα των εφαρμογών. Η επένδυση στις θεωρητικές θετικές επιστήμες, στον πολιτισμό, στις ανθρωπιστικές επιστήμες, είναι δείγμα σεβασμού στον πολίτη και ενδεικτική μιας κοινωνίας που βλέπει πέρα από το κέρδος, που βελτιώνει την ποιότητα της ζωής και ταυτόχρονα απαντά στις ανθρώπινες αγωνίες.

Η αναγκαιότητα των Μαθηματικών

«Η ανάγνωση μιας μαθηματικής απόδειξης μπορεί να παρομοιαστεί με το άκουσμα μιας μουσικής συμφωνίας. Οι διαφορετικές ιδέες συνδυάζονται όπως τα όργανα μιας ορχήστρας. Αναπάντεχα, ο μονότονος “**ρυθμός**” διαταράσσεται από μια καινούργια ιδέα, σαν το φλάουτο που έρχεται να πλαισιώσει το μπάσο. Οι πιο όμορφες αποδείξεις συνδυάζουν την απλότητα με το στοιχείο της έκπληξης. Είναι σημαντικό να κάνουμε τη διδασκαλία των Μαθηματικών πιο ελκυστική, εστιάζοντας στην ομορφιά των ιδεών παρά στη μηχανική επίλυση προβλημάτων, όπως όλοι θαυμάζουμε έναν πίνακα του Ντα Βίντσι, ανάλογα μπορούμε να εκτιμήσουμε και την ιδιοφυή απλότητα του “**διαγώνιου επιχειρήματος**” του Cantor».

Στα Μαθηματικά κατασκευάζουμε έναν κόσμο μέσω αξιωμάτων και αναζητούμε τα λογικά συμπεράσματα που συνεπάγονται, όμως η αλήθεια προϋπάρχει. Δικός μας σκοπός είναι **να την ανακαλύψουμε**. Από αυτή τη σκοπιά νιώθω κοντά στον Πλάτωνα και στις “**σκιές**” του. Επομένως, αν και η μαθηματική αλήθεια υπάρχει ανεξάρτητα από εμάς, η κατεύθυνση της μαθηματικής έρευνας υπαγορεύεται από την ανθρώπινη αντίληψη. Τον προηγούμενο αιώνα στα Μαθηματικά δέσποζαν η αυστηρότητα και η καθαρότητα, συνεπεία εν πολλοίς της ομάδας **Nicolas Bourbaki** και της προσπάθειας να κατανοηθούν τα θεμέλια της μαθηματικής λογικής. Αυτό έβλαψε τα μαθηματικά, γιατί τα έκανε να φαίνονται μονολιθικά και απροσπέλαστα στο ευρύ κοινό. Η υπερβολική γενικότητα και η ανάπτυξη της θεωρίας, χωρίς εξήγηση των πρωταρχικών της κινήτρων, έκανε τα μαθηματικά βιβλία στρυφνά. Από τα τέλη του 20ού αιώνα, με την άνοδο τομέων όπως η Συνδυαστική και οι Πιθανότητες, παρατηρείται επιστροφή των Μαθηματικών στις ρίζες τους.
Πρέπει να αναφέρουμε εδώ ότι, τον **Δημήτρη Κουκουλόπουλο** συνεχάρησαν αρκετοί φορείς και πρόσωπα της χώρας μας, μεταξύ αυτών, **ο Πρόεδρος της Δημοκρατίας όπως και η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία,** για το λαμπρό αυτό επίτευγμα.

Ο Κωνσταντίνος Δασκαλάκης – Βραβείο Rolf Nevanlinna 2018

«… προσπαθώ να θυμηθώ τι με ωθούσε στα Μαθηματικά, … σίγουρα η μύηση μου στα Μαθηματικά έγινε από τον πατέρα μου που είναι μαθηματικός. Μου έβαζε γρίφους και **με τσίγκλιζε με τον υπαινικτικό** μαθηματικό **τρόπο ομιλίας** του, που ήθελε να τους αποκρυπτογραφήσω ...». Στα μαθητικά μου χρόνια πήγαινα σε **διαγωνισμούς της ΕΜΕ** και διάβαζα με ενδιαφέρον μαθηματικά βιβλία πέραν της σχολικής ύλης. Τα Μαθηματικά ήταν για μένα ένα πάρτι από όμορφες ιδέες που με γοήτευαν. Με ενδιέφερε να συνομιλήσω με τις όμορφες ιδέες όπως μιλάς σε κόσμο σε ένα πάρτι. Μιλάς με κάποιον, μέχρι να σου τραβήξει την προσοχή κάποιος άλλος …, μετά ένας άλλος …, κοκ. Έτσι σιγά σιγά συνθέτεις μια συνολική **αλήθεια**, τη δική σου, ένα δίκτυο που συνδέει τις ιδέες αυτές και την ιστορική εξέλιξη τους και φέρνει τις ιδέες αυτές στο προσκήνιο.

Μπήκα σε προβληματισμό, όταν άκουσα την **αυτό-αναφορική** πρόταση του Κρητικού διδάσκαλου **Επιμενίδη** «οι Κρήτες είναι πάντα ψεύτες». Αργότερα με τράβηξαν άλλα παρόμοια «παράδοξα» της λογικής, όπως το παράδοξο του **Bertrand Russel**, το θεώρημα του **Kurt Gödel** και το πρόβλημα τερματισμού του **Turing**. Μέσα από μια αναδίπλωση του χρόνου βρήκα την ιδέα της αυτο-αναφορικότητας του **Επιμενίδη,** να έρχεται τον $20^{ο}$ αιώνα να συγκλονίσει τα θεμέλια των Μαθηματικών και να οδηγεί στα θεμέλια της επιστήμης των υπολογιστών! Πώς να μην συγκλονιστεί κανείς από το πως διασυνδέονται έτσι οι μαθηματικές ιδέες!...»

Τα λόγια αυτά είναι από ένα νέο εξαίρετο επιστήμονα, τον **Κωνσταντίνο Δασκαλάκη**, Έλληνα καθηγητή στο MIT, που διακρίνεται με τη συνεχή έρευνα του στο χώρο της Τεχνικής Νοημοσύνης και σαρώνει τα βραβεία στην Επιστήμη των Υπολογιστών [ολόκληρη την συνέντευξη θα την βρείτε στο περιοδικό **ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ** τ.1 του 2019 της ΕΜΕ].

Ο Κωνσταντίνος που αγάπησε τα Μαθηματικά μέσα από τους γρίφους που του έλεγε ο πατέρας του, έδωσε μαθηματική απάντηση σε ένα άλυτο πρόβλημα-γρίφο, τον **γρίφο του Nash**, που έλεγε ότι **σε κάθε αγορά**, ακόμα και όταν υπάρχουν **αντικρουόμενα συμφέροντα**, υπάρχει η δυνατότητα να **βρεθεί η ισορροπία**. Ο Κωνσταντίνος απέδειξε ότι η ισορροπία αυτή, σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι υπολογιστικά αδύνατη.

Ο γρίφος αυτός είχε τεθεί ως ανοικτό πρόβλημα από την εργασία ενός άλλου μεγάλου επιστήμονα του *John Forbes Nash* το 1950 στη **Θεωρία Παιγνίων**. Ο Κωνσταντίνος Δασκαλάκης **ύ**στερα από όλα τα βραβεία που πήρε και τις τιμητικές διακρίσεις στην πληροφορική, πήρε και το βραβείο Μαθηματικών **Rolf Nevanlinna Price 2018.**

Η ανακοίνωση για το βραβείο έγινε τον Αύγουστο 2018 με την έναρξη του Συνεδρίου της Διεθνούς Ένωσης Μαθηματικών στο Rio De Janeiro της Βραζιλίας. Απονέμεται κάθε 4 χρόνια στο διεθνές συνέδριο μαθηματικών για την εξαιρετική συνεισφορά στις μαθηματικές πλευρές των επιστηών της πληροφορίας (μεταξύ άλλων ανάλυση αλγορίθμων κρυπτογραφία επεξεργασία πληροφοριών και μοντελοποιηση νοημοσύνης). Το βραβείο αυτό αθλοθετήθηκε το 1981 προς τιμή του Φινλανδού μαθηματικού Rolf Nevanlinna, απονέμεται κάθε τέσσερα χρόνια σε επιστήμονα έως 40 ετών.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία τον Ιούνιο 2018 είχε οργανώσει το πρώτο συνέδριο των απανταχού Ελλήνων Μαθηματικών στο οποίο είχε καλέσει ως κεντρικό ομιλητή τον Κωνσταντίνο Δασκαλάκη.

IMO 2019
60TH INTERNATIONAL
MATHEMATICAL OLYMPIAD

60η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Ηνωμένο Βασίλειο, Μπαθ, 11-22 Ιουλίου 2019

https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2019

Η 60η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε στο Μπαθ του Ηνωμένου Βασιλείου από 11 μέχρι και 22 Ιουλίου 2019. με συμμετοχή 112 χωρών και 621 μαθητών εκ των οποίων 65 ήταν κορίτσια. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν 1 αργυρό μετάλλιο, 2 χάλκινα μετάλλια και 3 εύφημες μνείες, ως εξής:

Μελάς Δημήτριος Χρυσοβαλάντης	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Γαλανόπουλος Σπυρίδων	**Ξάνθη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**Αθήνα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λώλας Δημήτριος	**Τρίκαλα**	**Εύφημη Μνεία**
Μαργαρίτης Μηνάς	**Ηράκλειο**	**Εύφημη Μνεία**
Μηλιώρη Ειρήνη	**Αθήνα**	**Εύφημη Μνεία**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της ΕΜΕ, ομότιμος καθηγητής του ΕΜΠ, **Ανάργυρος Φελλούρης** και υπαρχηγός ο διδάκτωρ μαθηματικός **Σιλουανός Μπραζιτίκος**. Η επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων που ακολουθούν ανήκει και στους δύο.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1. Έστω $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες ώστε, για όλους τους ακεραίους a και b, να ισχύει

$$f(2a)+2f(b)=f\big(f(a+b)\big). \qquad \textbf{(1)}$$

Λύση (1ος τρόπος) (Σ. Γαλανόπουλος, Μ. Μαργαρίτης, Δ. Μελάς, Ε. Μηλιώρη)
Για $a=0$ στην (1) λαμβάνουμε τη σχέση

$$f\big(f(b)\big)=2f(b)+f(0),\ \text{για κάθε } b\in\mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Για $b=0$ στην (1) λαμβάνουμε τη σχέση

$$f\left(f\left(a\right)\right)=f\left(2a\right)+2f\left(0\right)\overset{(2)}{\Longrightarrow}2f\left(a\right)+f\left(0\right)=f\left(2a\right)+2f\left(0\right)\Rightarrow f\left(2a\right)=2f\left(a\right)-f\left(0\right),\quad(3)$$

για κάθε $a\in\mathbb{Z}$.

Με αντικατάσταση των (2) και (2) στην (1), λαμβάνουμε:

$$2f\left(a\right)-f\left(0\right)+2f\left(b\right)=2f\left(a+b\right)+f\left(0\right)\Rightarrow$$

$$f\left(a+b\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)-f\left(0\right)\qquad(4)$$

Αν θέσουμε $g\left(n\right)=f\left(n\right)-f\left(0\right),n\in\mathbb{Z},$ τότε από την (4) προκύπτει ότι:

$$g\left(a+b\right)=g\left(a\right)+g\left(b\right),$$

για κάθε $a,b\in\mathbb{Z},$ δηλαδή η συνάρτηση $g\left(n\right)=f\left(n\right)-f\left(0\right),n\in\mathbb{Z},$ ικανοποιεί την εξίσωση του Cauchy. Η λύση της εξίσωσης Cauchy στο σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι γνωστή από τη θεωρία. Εύκολα προκύπτει με επαγωγή ότι $g\left(n\right)=cn,\ n\in\mathbb{Z},$ και $c=g\left(1\right)$. Επομένως θα είναι

$$f\left(n\right)=cn+d,\ n\in\mathbb{Z},\text{ και } c=f\left(1\right)-f\left(0\right),d=-f\left(0\right)\in\mathbb{Z}.$$

Βέβαια οι παράμετροι $c,d\in\mathbb{Z}$ πρέπει να θεωρηθούν έτσι ώστε η συνάρτηση που βρήκαμε να ικανοποιεί την αρχική σχέση (1), δηλαδή πρέπει να ισχύει ότι:

$$2ca+d+2\left(cb+d\right)=f\left(c\left(a+b\right)+d\right)\Leftrightarrow 2c\left(a+b\right)+3d=c\left(c\left(a+b\right)+d\right)+d$$

$$\Leftrightarrow\left(2c-c^2\right)\left(a+b\right)+\left(2-c\right)d=0,\text{ για κάθε } a,b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left(2-c\right)\left(c\left(a+b\right)+d\right)=0,\text{ για κάθε } a,b\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow c=2,d\in\mathbb{Z}\quad\text{ή}\quad c\left(a+b\right)+d=0,\text{ για κάθε } a,b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow c=2,d\in\mathbb{Z}\quad\text{ή}\quad c=d=0.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι: $f\left(a\right)=0,\ a\in\mathbb{Z}$ ή $f\left(a\right)=2a+d,\ d\in\mathbb{Z}$.

Παρατήρηση. Στην παραπάνω λύση η σχέση (3) θα μπορούσε να προκύψει ως εξής:
Επειδή η δοθείσα σχέση στο δεξί μέλος της είναι συμμετρική ως προς τα $a,b\in\mathbb{Z}$, με εναλλαγή των a,b στη σχέση (1) προκύπτει η εξίσωση $f\left(2a\right)+2f\left(b\right)=f\left(2b\right)+2f\left(a\right)$, για κάθε $a,b\in\mathbb{Z}$, δηλαδή ισοδύναμα η εξίσωση

$$f\left(2a\right)-2f\left(a\right)=f\left(2b\right)-2f\left(b\right),\text{ για κάθε } a,b\in\mathbb{Z},$$

από την οποία προκύπτει ότι $f\left(2a\right)-2f\left(a\right)=$ σταθερό για κάθε $a\in\mathbb{Z}$, Για $a=0$, προκύπτει ότι $f\left(2a\right)-2f\left(a\right)=-f\left(0\right)$, για κάθε $a\in\mathbb{Z}$, οπότε $f\left(2a\right)=2f\left(a\right)-f\left(0\right)$, για κάθε $a\in\mathbb{Z}$, δηλαδή έχουμε βρει τη σχέση (3).

2ος τρόπος (Δ. Λώλας, Ε. Ντόκας)

Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε σχέσεις που να έχουν κοινό το ένα μέλος τους, θεωρώντας τα $a,b\in\mathbb{Z}$ τέτοια ώστε να έχουν το ίδιο άθροισμα. Έτσι για $\left(a,b\right)=\left(0,n+1\right)$ και $\left(a,b\right)=\left(1,n\right)$ λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$f\left(0\right)+2f\left(n+1\right)=f\left(f\left(n+1\right)\right),\ f\left(2\right)+2f\left(n\right)=f\left(f\left(n+1\right)\right),$$

από τις οποίες έπεται ότι:

$$f\left(n+1\right)-f\left(n\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(2\right)-f\left(0\right)\right)=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}.$$

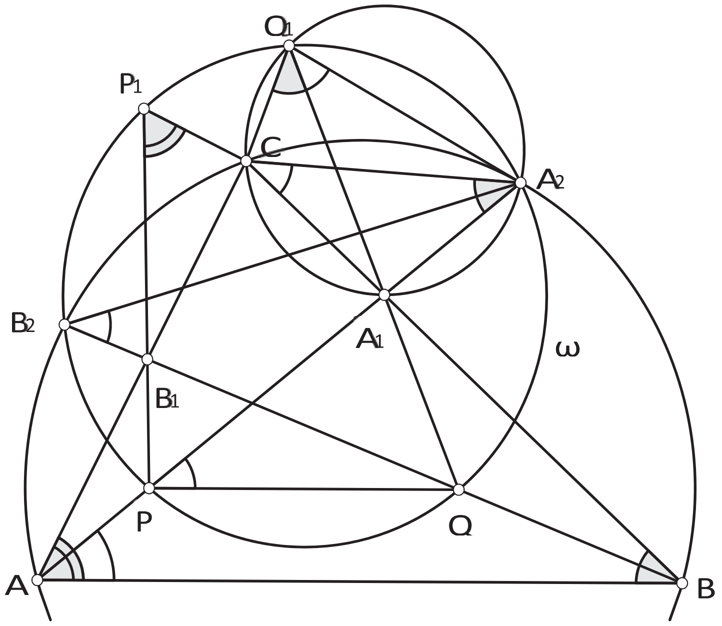
Επειδή η συνάρτηση f ορίζεται μόνο στο $\mathbb{Z}$, έπεται ότι πρέπει να είναι γραμμική, δηλαδή $f\left(n\right)=cn+d,\ n\in\mathbb{Z},$ με $c,d\in\mathbb{Z}$.

Στη συνέχεια, όπως και στον πρώτο τρόπο βρίσκουμε τις λύσεις

$$f\left(a\right)=0,\ a\in\mathbb{Z}\text{ ή } f\left(a\right)=2a+d,\ d\in\mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2. **Στο τρίγωνο ABC, το σημείο A_1 βρίσκεται στην πλευρά BC και το σημείο B_1 βρίσκεται στην πλευρά AC. Έστω P και Q δύο σημεία στα ευθύγραμμα τμήματα AA_1 και BB_1, αντίστοιχα, έτσι ώστε το PQ είναι παράλληλο προς το AB. Έστω P_1 σημείο της ευθείας PB_1, έτσι ώστε το B_1 να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία P και P_1, και $\angle PP_1C = \angle BAC$. Ομοίως, έστω Q_1 σημείο της ευθείας QA_1, έτσι ώστε το A_1 να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Q και Q_1, και $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία P, Q, P_1, και Q_1 είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.**

Λύση



Σχήμα 1

Έστω A_2 και B_2 οι τομές των AA_1 και BB_1 με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC. Έχουμε

$$\angle QPA_2 = \angle BAA_2 = \angle BB_2A_2 = \angle QB_2A_2 ,$$

άρα τα σημεία P, Q, A_2, B_2 είναι ομοκυκλικά. Έστω ότι ανήκουν στον κύκλο ω. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα P_1,Q_1 επίσης ανήκουν στον ω.

Επειδή $\angle CA_2A_1 = \angle CA_2A = \angle CBA = \angle CQ_1Q$, τα C, Q_1, A_2, A_1 είναι ομοκυκλικά. Τότε όμως παίρνουμε

$$\angle QQ_1A_2 = \angle A_1QA_2 = \angle A_1CA_2 = \angle BCA_2 = \angle BAA_2 = \angle QPA_2,$$

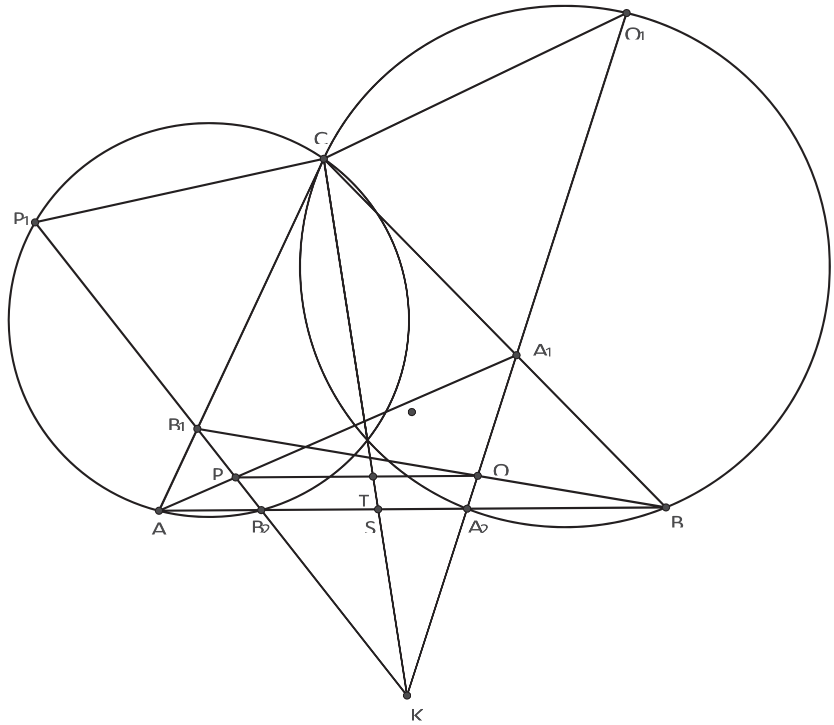
οπότε το Q_1 ανήκει στον ω. Ομοίως, και το P_1 ανήκει στον ω.

$2^{ος}$ τρόπος. Αν οι B_1P και A_1Q τέμνουν την AB στα σημεία B_2 και A_2, αντίστοιχα, τότε από τη σχέση γωνιών που δίνεται έχουμε ότι τα τετράπλευρα AB_2CP_1 και CA_2BQ_1 είναι εγγράψιμα σε δύο κύκλους, έστω ω_1 και ω_2. Επιπλέον, λόγω της παραλληλίας $A_2B_2 \parallel PQ$ έχουμε ότι το P_1Q_1QP είναι εγγράψιμο αν και μόνο αν το $P_1B_2A_2Q_1$ είναι εγγράψιμο.

Ονομάζουμε K το σημείο τομής των P_1B_2 και Q_1A_2. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι το K ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων ω_1 και ω_2, γιατί τότε θα ισχύει ότι $KB_2 \cdot KP_1 = KA_2 \cdot KQ_1$, οπότε το $P_1B_2A_2Q_1$ θα είναι εγγράψιμο. Αν η CK τέμνει την AB στο σημείο S και την PQ στο T, τότε αρκεί το S να ανήκει στον ριζικό άξονα των ω_1 και ω_2, δηλαδή

$$SB_2 \cdot SA = SA_2 \cdot SB \Leftrightarrow \frac{SB_2}{SA_2} = \frac{SB}{SA}.$$

Όμως από την παραλληλία των PQ και A_2B_2 έχουμε ότι: $\dfrac{SB_2}{SA_2}=\dfrac{TP}{TQ}$.



Σχήμα 2

Επομένως, απομένει να αποδείξουμε ότι: $\dfrac{TP}{TQ}=\dfrac{SB}{SA}$.

Λόγω της παραλληλίας των AB και PQ η τελευταία είναι ισοδύναμη με το ότι η TS περνάει από το σημείο τομής των AQ και BP. Αυτό όμως έπεται με χρήση του Θεωρήματος του Πάππου για τις τριάδες σημείων A, P, A_1 και B, P, B_1.

Σημείωση. Αν οι ευθείες P_1B_2 και Q_1A_2 είναι παράλληλες, τότε από το θεώρημα του Πάππου οι ευθεία CK είναι παράλληλη σε αυτές τις δύο και το $P_1B_2A_2Q_1$ βγαίνει ισοσκελές τραπέζιο, οπότε το ζητούμενο έπεται και σε αυτή την περίπτωση.

Πρόβλημα 3. Σε ένα κοινωνικό δίκτυο που έχει 2019 χρήστες, μερικά ζεύγη από αυτούς είναι φίλοι. Όταν ο χρήστης A είναι φίλος με τον χρήστη B, ο χρήστης B είναι επίσης φίλος με τον χρήστη A. Συμβάντα όπως το παρακάτω μπορεί να συμβούν επαναληπτικά, αλλά ένα κάθε φορά:

Τρεις χρήστες A, B, και C τέτοιοι ώστε ο A είναι φίλος και με τους δύο B και C, αλλά οι B και C δεν είναι φίλοι μεταξύ τους, αλλάζουν την κατάσταση φιλίας τους ώστε οι B και C γίνονται φίλοι, ενώ ο A δεν είναι πλέον φίλος με τον B, και δεν είναι πλέον φίλος με τον C. Όλες οι άλλες καταστάσεις φιλίας δεν αλλάζουν.

Αρχικά, 1010 χρήστες έχουν 1009 φίλους ο καθένας, και 1009 χρήστες έχουν 1010 φίλους ο καθένας. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακολουθία τέτοιων συμβάντων μετά την οποία ο κάθε χρήστης είναι φίλος με το πολύ έναν άλλο χρήστη.

Λύση. Το πρόβλημα μετατρέπεται εύκολα σε όρους της θεωρίας γραφημάτων στη μορφή:

Δίνεται γράφημα G με 2019 κορυφές, από τις οποίες 1010 έχουν βαθμό 1009 και οι υπόλοιπες 1009 έχουν βαθμό 1010. Επιτρέπεται να γίνουν στο G πράξεις του παρακάτω τύπου:
Αν η κορυφή Α είναι γειτονική με δύο κορυφές Β και C που δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε μπορούμε να διαγράψουμε τις πλευρές AB και AC από το G και να προσθέσουμε την πλευρά BC.

Ονομάζουμε την παραπάνω πράξη *τριγωνική εναλλαγή γειτονίας*. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι με μία ακολουθία τριγωνικών εναλλαγών γειτονίας μπορεί να προκύψει ένα γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή θα συνδέεται με το πολύ μία άλλη, δηλαδή το γράφημα θα είναι ένωση πλευρών και κορυφών ξένων μεταξύ τους.
Παρατηρούμε πρώτα από όλα ότι το γράφημα G είναι συνεκτικό, αφού ο συνολικός βαθμός δύο οποιωνδήποτε κορυφών του είναι τουλάχιστον 2018, οπότε αυτές ή θα είναι γειτονικές ή θα έχουν μία κοινή γειτονική κορυφή. Επομένως το γράφημα G έχει την ιδιότητα:

S: Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G με τρεις τουλάχιστον κορυφές δεν είναι πλήρης και έχει μία κορυφή περιττού βαθμού.

Θα αποδείξουμε ότι, αν ένα γράφημα G ικανοποιεί την παραπάνω σχέση S και έχει μία κορυφή βαθμού τουλάχιστον 2, τότε υπάρχει μία τριγωνική εναλλαγή γειτονίας στο G η οποία διατηρεί την παραπάνω σχέση S. Επειδή η τριγωνική εναλλαγή γειτονίας μειώνει το συνολικό αριθμό πλευρών του γραφήματος G, χρησιμοποιώντας μία ακολουθία τριγωνικών εναλλαγών γειτονίας μπορούμε να φθάσουμε σε ένα γράφημα G με μέγιστο βαθμό το πολύ 1, οπότε θα έχουμε τελειώσει.
Θεωρούμε μία κορυφή A βαθμού τουλάχιστον 2 σε μία συνεκτική συνιστώσα G' του G. Επειδή δεν υπάρχει συνιστώσα του G με τρεις τουλάχιστον κορυφές που να είναι πλήρης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι γειτονικές κορυφές της A δεν συνδέονται όλες μεταξύ τους ανά δύο. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ένα μέγιστο πλήρες υπογράφημα K του G', κάποια κορυφή A έχει μία γειτονική κορυφή έξω από το K, η οποία λόγω μεγιστικότητας , δεν συνδέεται με κάθε κορυφή του K. Διαγράφοντας το A από το G χωρίζουμε το G' σε μικρότερες συνεκτικές συνιστώσες $G_1, G_2, ..., G_k$, πιθανώς με $k=1$, καθεμία από τις οποίες συνδέεται με το A με μία τουλάχιστον πλευρά. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $k \geq 2$ *και Α συνδέεται με κάποιο* G_i *με δύο τουλάχιστον πλευρές.*

Επιλέγουμε μία κορυφή B του G_i που συνδέεται με την κορυφή A και μία κορυφή C σε μία άλλη συνιστώσα G_j που συνδέεται με την κορυφή A. Τότε οι κορυφές B και C δεν συνδέονται, οπότε με την τριγωνική εναλλαγή γειτονίας διαγράφοντας τις πλευρές AB και AC, και προσθέτοντας την πλευρά BC το G_i παραμένει συνεκτικό. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η πράξη διατηρεί τη συνθήκη, αφού η εφαρμογή της δεν αλλάζει το άρτιο ή το περιττό του βαθμού των κορυφών.

Περίπτωση 2. $k \geq 2$ *και Α συνδέεται με κάθε* G_i *με μία ακριβώς πλευρά.*

Θεωρούμε το επαγόμενο υπογράφημα σε οποιοδήποτε G_i και την κορυφή A. Η κορυφή A έχει βαθμό 1 σε αυτό το υπογράφημα, γιατί ο αριθμός των κορυφών περιττού βαθμού σε ένα γράφημα είναι πάντα άρτιος και βλέπουμε ότι το G_i έχει μία κορυφή περιττού βαθμού στο G. Έτσι, αν θεωρήσουμε B και C να είναι οποιεσδήποτε δύο γειτονικές κορυφές της A, τότε διαγράφοντας τις πλευρές AB και AC, και προσθέτοντας την πλευρά BC στο G_i διατηρείται η παραπάνω συνθήκη, δηλαδή η τριγωνική εναλλαγή γειτονίας δημιουργεί δύο νέες συνιστώσες και αν καθεμία από αυτές έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές, τότε δεν μπορεί να είναι πλήρης και πρέπει να περιέχει μία κορυφή περιττού βαθμού, αφού ισχύει αυτό για κάθε G_i.

Περίπτωση 3. $k=1$ *και Α συνδέεται με το* G_i *με τρεις τουλάχιστον πλευρές*

Από την υπόθεση το A έχει δύο γειτονικές κορυφές που δεν συνδέονται μεταξύ τους. Διαγράφοντας τις πλευρές AB και AC, και προσθέτοντας την πλευρά BC το G' παραμένει συνεκτικό, οπότε συνεχίζουμε όπως στην περίπτωση 1.

Περίπτωση 4. $k=1$ *και A συνδέεται με το G_1 με δύο ακριβώς πλευρές.*

Έστω B και C να είναι οι δύο γειτονικές κορυφές της A που δεν συνδέονται μεταξύ τους. Η διαγραφή των πλευρών AB και AC, και η προσθήκη της πλευράς BC δημιουργεί δύο νέες συνιστώσες, η μία από τις οποίες αποτελείται από μία μόνο κορυφή, ενώ η άλλη περιέχει μία κορυφή περιττού βαθμού. Έχουμε τελειώσει, εκτός αν η δεύτερη συνιστώσα είναι ένα πλήρες γράφημα με τρεις τουλάχιστον πλευρές. Όμως, στην περίπτωση αυτή το G_1 θα είναι ένα πλήρες γράφημα μείον την πλευρά BC, οπότε θα έχει 4 τουλάχιστον κορυφές, αφού το G' δεν είναι 4-κύκλος. Αν D είναι μία τρίτη κορυφή του G_1, τότε διαγράφοντας τις πλευρές BA και BD, και προσθέτοντας την πλευρά AD *το* G' παραμένει συνεκτικό και προχωράμε, όπως στην περίπτωση 1.

Πρόβλημα 4. Να βρείτε όλα τα ζεύγη (k,n) θετικών ακεραίων που ικανοποιούν την εξίσωση $$k!=(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}).$$

Λύση. Για τον ακέραιο A θα συμβολίζουμε με $v_p(A)$ τη μέγιστη δύναμη του p που διαιρεί τον A. Από τον τύπο του Legendre για το $v_2(k!)$, έχουμε ότι:

$$v_2(k!)=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{8}\right\rfloor+\cdots\leqslant\frac{k}{2}+\frac{k}{4}+\frac{k}{8}=k.$$

Επομένως

$$k>v_2(k!)=v_2\left((2^n-1)\cdots(2^n-2^{n-1})\right)=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}=m.$$

Ας υποθέσουμε ότι $n\geq 5$, τότε $m\geq 10$ και

$$2^{n^2-1}=\left(2^n\right)^{n-1}\cdot 2^{n-1}>(2^n-1)\cdots(2^n-2^{n-1})=k!\geq(m+1)!.$$

Επομένως,

$$2^{n^2-1}\geq(m+1)!>2\cdot 3\cdots 7\cdot(8\cdot 8\cdots 8)>2^{12}\cdot 8^{m-6}.$$

Άρα θα έχουμε ότι $n^2-1>12+3(m-6)$, οπότε

$$n^2-2\geq 12+3\left(\frac{n(n-1)}{2}-6\right)\Leftrightarrow n^2\leq 3n+8.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο για $n\geq 5$, οπότε πρέπει: $n\leq 4$.

Αν $n=1$, παίρνουμε $1=2^n-1=1!$, οπότε μία λύση είναι η $(k,n)=\boxed{(1,1)}$.

Αν $n=2$, παίρνουμε $(2^2-1)(2^2-2)=6=3!$, οπότε $(k,n)=\boxed{(3,2)}$ είναι επίσης λύση.

Αν $n=3$, παίρνουμε $(2^3-1)(2^3-2)(2^3-4)=168$ που δεν είναι κάποιο παραγοντικό.

Αν $n=4$ παίρνουμε $(16-1)(16-2)(16-4)(16-8)=20160$, που επίσης δεν είναι κάποιο παραγοντικό.

2ος τρόπος. Όπως και στον πρώτο τρόπο ξεκινάμε δείχνουμε πρώτα ότι $k>\frac{n(n-1)}{2}$. Τώρα από το Λήμμα *Lifting The Exponent* (LTE), έχουμε

$$v_3(2^m-1)=\begin{cases}0, & \text{αν } m \text{ περιττός.}\\ 1+v_3(m), & \text{αν } m \text{ άρτιος.}\end{cases}$$

Επομένως η μέγιστη δύναμη του 3 στο δεξί μέλος είναι

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} 1+v_3(2i)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+v_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor !\right)<\frac{n}{2}+\frac{n}{6}+\frac{n}{12}+\ldots=\frac{3n}{4}.$$

Επομένως $v_3(k!)<\frac{3n}{4}$ και $v_3(k!)\geq\frac{k}{3}-1$, οπότε $k<\frac{9n}{4}+3$ και τελικά $\frac{9n}{4}+3>\frac{n(n-1)}{2}$, που δεν ισχύει για n ≥ 7. Εξετάζοντας τις περιπτώσεις για n ≤ 6 όπως και στον πρώτο τρόπο βρίσκουμε ότι οι μόνες λύσεις είναι οι (1,1) και (2,3).

Πρόβλημα 5. Η Τράπεζα του Bath εκδίδει νομίσματα με το H στην μια όψη και το T στην άλλη όψη. Ο Χάρης έχει n από αυτά τα νομίσματα τοποθετημένα σε μία γραμμή από αριστερά προς τα δεξιά. Ο Χάρης εκτελεί επαναληπτικά την παρακάτω πράξη: αν υπάρχουν ακριβώς $k>0$ νομίσματα στα οποία φαίνεται η όψη H, τότε αναποδογυρίζει το νόμισμα που βρίσκεται στη θέση k από τα αριστερά, διαφορετικά, αν σε όλα τα νομίσματα φαίνεται η όψη T, τότε σταματά. Για παράδειγμα, αν $n=3$ η διαδικασία που αρχίζει με την τοποθέτηση THT θα είναι $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, η οποία σταματά μετά από τρεις πράξεις.

a) Να αποδείξετε ότι, για κάθε αρχική τοποθέτηση, ο Χάρης σταματά μετά από πεπερασμένο αριθμό πράξεων.

b) Για κάθε αρχική τοποθέτηση C, έστω $L(C)$ ο αριθμός των πράξεων μέχρι που ο Χάρης να σταματήσει. Για παράδειγμα, $L(THT)=3$ και $L(TTT)=0$.

Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των τιμών του $L(C)$ για όλες τις 2^n δυνατές αρχικές τοποθετήσεις C.

Λύση. Έστω C μια τοποθέτηση $n-1$ νομισμάτων. Τότε για την τοποθέτηση CT που προκύπτει αν τοποθετήσουμε την όψη T στα δεξιά της τοποθέτησης C έχουμε $L(CT) = L(C)$. Πράγματι σε κάθε στάδιο της διαδικασίας θα έχουμε το πολύ $n-1$ κορώνες και η όψη T στο τέλος δεν θα αλλάξει ποτέ. (Θεωρούμε ότι το H συμβολίζει τις κορώνες και το T τα γράμματα.)

Για μια τοποθέτηση C γράφουμε C' για την τοποθέτηση που προκύπτει από την C αναποδογυρίζοντας όλα τα νομίσματα και βάζοντάς τα σε ανάποδη σειρά. Αν η C έχει $n-1$ νομίσματα, ισχυριζόμαστε ότι: $L(C'H) = L(C) + n$.

Πράγματι, έστω ότι στη C έχουμε k κορώνες και άρα $n-1-k$ γράμματα. Άρα η $C'H$ έχει k γράμματα και $n-k$ κορώνες. Θα αλλάξουμε λοιπόν την όψη του νομίσματος που βρίσκεται στη θέση $n-k$ του C'. Αυτό είναι το αντίστοιχο νόμισμα που βρίσκεται στη θέση k του C. Άρα σε $L(C)$ βήματα η τοποθέτηση $C'H$ θα μετατραπεί σε $HH\cdots H$. Τώρα θα είναι η πρώτη φορά που θα αλλάξει όψη το τελευταίο νόμισμα και σε συνολικά n κινήσεις θα γίνουν όλες οι όψεις T.

Τα πιο πάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη του (α). Τώρα γράφουμε $S(n)$ για τον μέσο όρο τιμών του L(C) για όλες τις δυνατές αρχικές τοποθετήσεις n νομισμάτων και $S_H(n), S_T(n)$ για τους αντίστοιχους μέσους όρους με τελευταία νομίσματα τα H και T αντίστοιχα. Από τα πιο πάνω έχουμε τις αναδρομικές σχέσεις:

$$S_T(n) = S(n-1) \text{ και } S_H(n) = S(n-1) + n.$$

Άρα έχουμε

$$S(n)=\frac{S_T(n)+S_H(n)}{2}=S(n-1)+\frac{n}{2}=\cdots=S(1)+\frac{1}{2}[2+\cdots+n]=\frac{n(n+1)}{4},$$

αφού είναι άμεσο ότι $S(1)=\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 6. **Έστω I το έκκεντρο του οξυγώνιου τριγώνου ABC με $AB \neq AC$. Ο εγγεγραμμένος κύκλος ω του ABC εφάπτεται των πλευρών BC, CA, και AB στα σημεία D, E, και F, αντίστοιχα. Η ευθεία που περνά από το σημείο D και είναι κάθετη στο EF τέμνει τον κύκλο ω ξανά στο σημείο R. Η ευθεία AR τέμνει ξανά τον κύκλο ω στο σημείο P. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων PCE και PBF τέμνονται ξανά στο σημείο Q.**

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες DI και PQ τέμνονται πάνω στην ευθεία που περνά από το A και είναι κάθετη στο AI.

Λύση **(Δημήτρης Μελάς)**

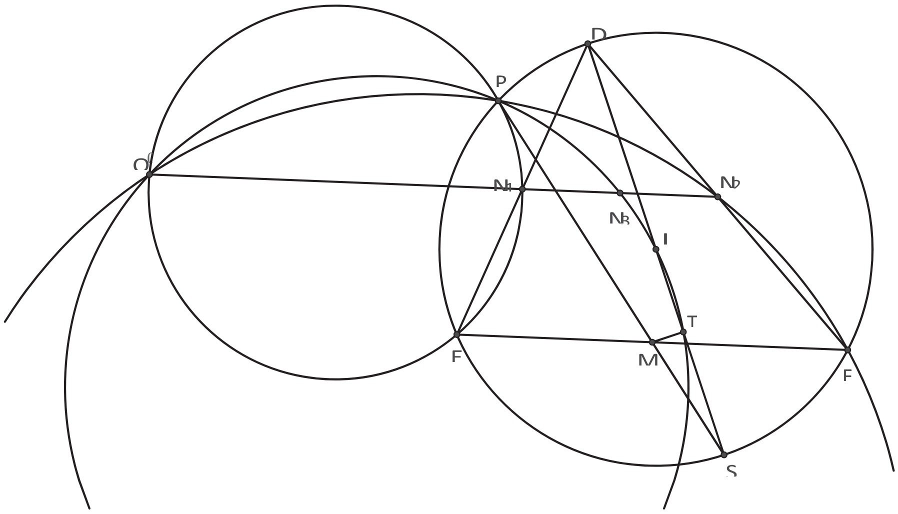
Αν η DI τέμνει τον ω και την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας A στα σημεία S και G, θα αποδείξουμε πρώτα ότι η PS περνά από το μέσον M της EF. Πράγματι, στο τρίγωνο RFE η RP είναι συμμετροδιάμεσος και η RM είναι διάμεσος, άρα $\angle FRP = \angle MRE$. Όμως, από το ισοσκελές τραπέζιο $RSEF$ και τη συμμετρία έχουμε ότι $\angle MRE = \angle FMS$, οπότε $\angle FRP = \angle FMS$, οπότε τα P, M, S είναι συνευθειακά.

Κάνουμε τώρα αντιστροφή κέντρου ως προς τον ω. Τα σημεία A, B, C πηγαίνουν στα μέσα M, N_1 και N_2 των FE, FD και ED, αντίστοιχα, οπότε ο κύκλος (BPF) πηγαίνει στον κύκλο (N_1PF) και ο κύκλος (CPE) πηγαίνει στον κύκλο (N_2PE).

Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε το αντίστροφο του G. Η πολική του M είναι η κάθετη στη MI στο σημείο A, άρα το G ανήκει στην πολική του M. Έπεται ότι και το M θα ανήκει στην πολική του G. Επομένως το αντίστροφο του G είναι το ίχνος της καθέτου από το M στη GI, έστω T. Για να δείξουμε λοιπόν ότι η PQ περνάει από το G αρκεί να αποδείξουμε ότι οι κύκλος (IPT) περνά από το σημείο τομής Q' (το αντίστροφο του Q) των (N_1PF), (N_2PE). Θα δείξουμε πρώτα ότι ο (IPT) περνά από το μέσον N_3 του τμήματος N_1N_2. Πράγματι, επειδή το N_3 είναι το κέντρο του κύκλου $(MTDP)$ έχουμε ότι $\angle N_3PT = 90° - \angle PDT = \angle DIN_3$,

αφού η IN_3 είναι μεσοκάθετος της DP.

Τώρα έχουμε ότι $\angle PQ'N_1 = \angle PEN_1 = \angle PFD = \angle PQ'N_2$,



Σχήμα 3

άρα τα Q', N_1 και N_2 είναι συνευθειακά.

Τέλος, επειδή IN_3 μεσοκάθετος της PD, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\angle DIP$, θα έχουμε ότι

$$\angle N_3IP = \angle DFP = \angle PQ'N_3,$$

άρα το PIN_3Q' είναι εγγράψιμο, άρα ο $(PITN_3)$ περνάει από το Q', που είναι το ζητούμενο.

36η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Κισινάου, Μολδαβία 30 Απριλίου – 5 Μαΐου 2019
(http://bmo2019.md/results)

Η 36η Βαλκανική μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε στη Μολδαβία από 30 Απριλίου μέχρι 5 Μαΐου 2019 με τη συμμετοχή μαθητών των χωρών της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και με μερικές ακόμη χώρες από Ασία και Ευρώπη. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν τρία αργυρά και δύο χάλκινα μετάλλια.

Γαλανόπουλος Σπυρίδων	**Ξάνθη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Μαργαρίτης Μηνάς	**Ηράκλειο**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Μελάς Δημήτριος Χρυσοβαλάντης	**Αθήνα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λώλας Δημήτριος	**Τρίκαλα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Κουντουράκης Επιμενίδης	**Χανιά**	**Συμμετοχή**

Αρχηγός της αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αθανάσιος Μάγκος**, ο οποίος είχε και την επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων που ακολουθούν, και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Ευάγγελος Ζώτος**.

Προβλήματα και Λύσεις

Πρόβλημα 1. Έστω P το σύνολο όλων των πρώτων αριθμών. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:\mathrm{P}\to\mathrm{P}$, για τις οποίες ισχύει $f(p)^{f(q)}+q^p=f(q)^{f(p)}+p^q$, για κάθε $p,q\in\mathrm{P}$.

Λύση: Παρατηρούμε από τη μορφή της δεδομένης σχέσης ότι μία λύση του προβλήματος είναι η ταυτοτική συνάρτηση $f(p)=p,\ p\in\mathrm{P}$. Θα συνεχίσουμε με την αναζήτηση και άλλων λύσεων. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι: $f(2)=2$. Θεωρώντας στη δεδομένη σχέση $q=2$ και p οποιοδήποτε περιττό πρώτο αριθμό παίρνουμε τη σχέση:

$$f(p)^{f(2)}+2^p=f(2)^{f(p)}+p^2. \qquad (1)$$

Αν υποθέσουμε ότι $f(2)\neq 2$, τότε ο $f(2)$ θα είναι περιττός και το δεύτερο μέλος της ισότητας (1) θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος. Για να συμβαίνει το ίδιο και με το πρώτο μέλος πρέπει $f(p)=2$, για κάθε περιττό πρώτο p. τότε όμως, για οποιουσδήποτε διαφορετικούς περιττούς πρώτους p,q προκύπτει ότι: $2^2+q^p=2^2+p^q\Rightarrow q^p=p^q\Rightarrow p=q$, άτοπο.

Επομένως, ισχύει ότι: $f(2)=2$ και η ισότητα (1) γίνεται:

$$f(p)^2+2^p=2^{f(p)}+p^2 \Leftrightarrow 2^p-p^2=2^{f(p)}-f(p)^2, \qquad (2)$$

για κάθε περιττό πρώτο p. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$g:T:=\{3,4,5,\dots\}\to\mathbb{Z}$, με τύπο $g(n)=2^n-n^2$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, αφού ισχύει:

$$g(n+1)-g(n)=2^n-2n-1>0,\ \text{για κάθε } n\in T. \qquad (3)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει εύκολα με επαγωγή. Πράγματι, για $n=3$, ισχύει $2^3-2\cdot 3-1=1>0$. Αν υποθέσουμε ότι, $2^\kappa-2\kappa-1>0,\ \kappa\geq 3$ τότε για $n=\kappa+1$ έπεται ότι:

$$2^{\kappa+1}-2(\kappa+1)-1=\left(2^\kappa-2\kappa-1\right)+\left(2^\kappa-2\right)>0.$$

Επομένως η σχέση (3) αληθεύει για κάθε $n \in T$. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι: (1)$\Leftrightarrow f(p)=p$, για κάθε περιττό πρώτο p, δηλαδή $f(p)=p$, για κάθε πρώτο p, αφού έχουμε ήδη αποδείξει ότι $f(2)=2$. Επομένως δεν υπάρχει λύση του προβλήματος διαφορετική από την ταυτοτική συνάρτηση.

Πρόβλημα 2. Αν a,b,c πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$0 \le a \le b \le c \text{ και } a+b+c=ab+bc+ca>0.$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\sqrt{bc}(a+1)\ge 2$. Να βρείτε όλες τις τριάδες (a,b,c) για τις οποίες ισχύει η ισότητα.

Λύση: Έστω $a+b+c=ab+bc+ca=k>0$. Επειδή $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$, έπεται ότι $k^2 \ge 3k \Rightarrow k \ge 3$, αφού $k>0$. Επίσης, από τις υποθέσεις $0\le a\le b\le c$, έπεται ότι $bc\ge ca\ge ba$, οπότε από τη σχέση $ab+bc+ca=k\ge 3 \Rightarrow 3bc\ge 3\Rightarrow bc\ge 1$. Τότε από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου λαμβάνουμε: $b+c\ge 2\sqrt{bc}\ge 2$, όπου η ισότητα ισχύει όταν $b=c$.
Από την υπόθεση $a+b+c=ab+bc+ca$ έπεται ότι:

$$a=\frac{b+c-bc}{b+c-1}=1-\frac{bc-1}{b+c-1}\ge 1-\frac{bc-1}{2\sqrt{bc}-1}=\frac{\sqrt{bc}\left(2-\sqrt{bc}\right)}{2\sqrt{bc}-1} \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- $\sqrt{bc}=2$. Τότε $\sqrt{bc}(a+1)\ge 2$, αφού $a+1\ge 1$. Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $a=0$ και $b=c=2$.
- $\sqrt{bc}<2$. Τότε λόγω και της (1) έχουμε
$$a\sqrt{bc}\ge \frac{bc\left(2-\sqrt{bc}\right)}{2\sqrt{bc}-1}=\frac{bc}{2\sqrt{bc}-1}\left(2-\sqrt{bc}\right).$$
Επειδή $\dfrac{bc}{2\sqrt{bc}-1}\ge 1$, με ισότητα για $bc=1$, λαμβάνουμε $\sqrt{bc}(a+1)\ge 2$, με την ισότητα να ισχύει, αν, και μόνον αν, $a=b=c=1$.
- $\sqrt{bc}>2$. Τότε παίρνουμε $\sqrt{bc}(a+1)>2(a+1)\ge 2$.

Η ισότητα, από τις δύο πρώτες περιπτώσεις, ισχύει, αν, και μόνον αν, $(a,b,c)=(1,1,1)$ ή $(a,b,c)=(0,2,2)$.

Πρόβλημα 3. Ας είναι ABC σκαληνό, οξυγώνιο τρίγωνο. Ας είναι X και Y δύο διαφορετικά, εσωτερικά σημεία του ευθύγραμμου τμήματος BC, για τα οποία ισχύει $\angle CAX=\angle YAB$. Υποθέτουμε ότι:

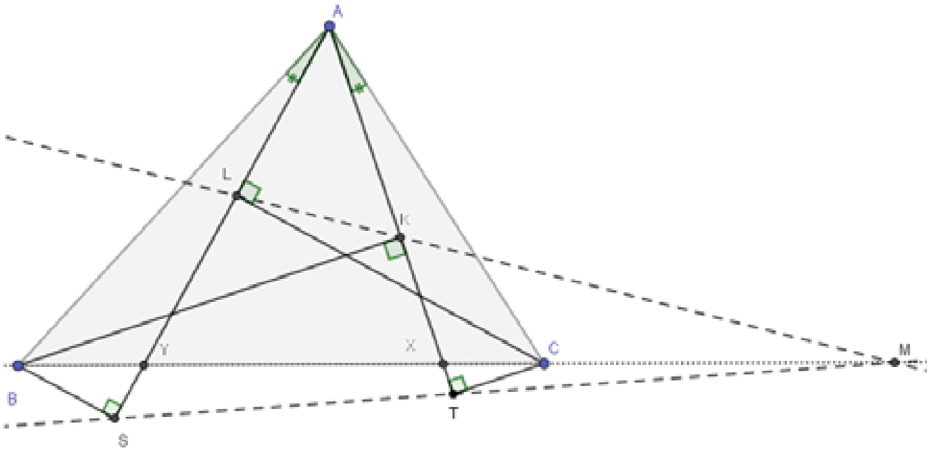
(1) K και S είναι τα ίχνη των καθέτων από το B στις ευθείες AX και AY αντίστοιχα

(2) T και L είναι τα ίχνη των καθέτων από το C στις ευθείες AX και AY αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες KL και ST τέμνονται πάνω στην ευθεία BC.

Λύση: Ας είναι M το σημείο τομής της LK με την BC. Από το Θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο AYX με διατέμνουσα την LKM προκύπτει:

$$\frac{AL}{LY}\frac{YM}{MX}\frac{XK}{KA}=1 \qquad (1)$$



Σχήμα 1

Επίσης ισχύει:

$$\frac{BS}{CT}=\frac{AS}{AT} \qquad (\mathbf{2}), \qquad \frac{BK}{CL}=\frac{AK}{AL} \qquad (\mathbf{3})$$

$$\frac{BK}{CT}=\frac{KX}{TX} \qquad (\mathbf{4}), \qquad \frac{BS}{CL}=\frac{SY}{LY} \qquad (\mathbf{5}),$$

από τα ζεύγη όμοιων τριγώνων $BSA \cong ATC, BKA \cong ALC, BKX \cong TCX, BSY \cong CLY$, αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$\frac{AS}{SY}\cdot\frac{XT}{TA}=\frac{BS}{CT}\cdot\frac{XT}{SY}=\frac{BS}{SY}\cdot\frac{XT}{CT}=\frac{CL}{LY}\cdot\frac{KX}{BK}=\frac{AL}{AK}\cdot\frac{KX}{LY}$$

όπου, η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της (2), η τρίτη λόγω των (4), (5) και η τέταρτη λόγω της (3). Έχουμε, δηλαδή ότι: $\frac{AS}{SY}\cdot\frac{XT}{TA}=\frac{AL}{AK}\cdot\frac{KX}{LY}$,

η οποία λόγω της (1) γράφεται $\frac{AS}{SY}\cdot\frac{YM}{MX}\cdot\frac{XT}{TA}=1.$

Από το αντίστροφο του Θεωρήματος του Μενελάου στο τρίγωνο AXY προκύπτει ότι τα σημεία S, T, M είναι συνευθειακά και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Πρόβλημα 4. Ένα πλέγμα περιέχει όλα τα σημεία της μορφής (m, n), όπου m και n είναι ακέραιοι με $|m| \le 2019, |n| \le 2019$ και $|m|+|n| < 4038$. Ονομάζουμε *συνοριακά*, τα σημεία (m, n) του πλέγματος για τα οποία ισχύει είτε $|m| = 2019$, είτε $|n| = 2019$. Οι τέσσερις ευθείες $x = \pm 2019$ και $y = \pm 2019$ ονομάζονται *συνοριακές ευθείες*. Δύο σημεία του πλέγματος ονομάζονται *γειτονικά*, αν η απόσταση μεταξύ τους ισούται με 1. Η Άννα και ο Βασίλης παίζουν στο πλέγμα το ακόλουθο παιχνίδι:

Η Άννα αρχικά τοποθετεί ένα πιόνι στο σημείο $(0, 0)$. Ο Βασίλης παίζει πρώτος και στη συνέχεια παίζουν εναλλάξ.

(1) Κάθε φορά που παίζει ο Βασίλης διαγράφει το πολύ δύο συνοριακά σημεία από κάθε συνοριακή ευθεία.

(2) Κάθε φορά που παίζει η Άννα κάνει ακριβώς τρία βήματα, όπου ως βήμα νοείται η μετακίνηση του πιονιού από το σημείο στο οποίο βρίσκεται, σε ένα γειτονικό σημείο, το οποίο δεν έχει ήδη διαγραφεί.

Αν η Άννα μπορέσει να τοποθετήσει το πιόνι σε κάποιο συνοριακό σημείο, το οποίο δεν έχει διαγραφεί, το παιχνίδι τελειώνει και η Άννα κερδίζει. Υπάρχει στρατηγική νίκης για την Άννα;

Λύση: Η Άννα δεν έχει στρατηγική νίκης. Θα παραθέσουμε μια στρατηγική νίκης για τον Βασίλη. Είναι αρκετό να περιγραφεί η στρατηγική του για τις διαγραφές στην συνοριακή ευθεία $y = 2019$.

Ο Βασίλης διαγράφει πρώτα τα σημεία $(0,2019)$ και $(-1, 2019)$. Αφού η Άννα παίξει, ο Βασίλης διαγράφει τα επόμενα δύο διαθέσιμα σημεία αριστερά, αν η Άννα μείωσε την $x-$ συντεταγμένη της, τα επόμενα δύο διαθέσιμα σημεία δεξιά, αν η Άννα αύξησε την $x-$ συντεταγμένη της, και το επόμενο διαθέσιμο σημείο αριστερά και το επόμενο διαθέσιμο σημείο δεξιά, αν η Άννα δεν μετέβαλε την $x-$ συντεταγμένη της. Η μόνη εξαίρεση στο παραπάνω είναι κατά την πρώτη φορά που η Άννα μειώνει το x ακριβώς κατά 1. Τότε, ο Βασίλης διαγράφει το επόμενο διαθέσιμο σημείο αριστερά και το επόμενο διαθέσιμο σημείο δεξιά.

Η παραπάνω στρατηγική εξασφαλίζει το εξής: Αν η Άννα κάνει μια σειρά βημάτων που φτάνουν στο $(-x, y)$ με $x > 0$ και την ακριβώς ανάποδη σειρά κινήσεων οριζοντίως, φτάνοντας στο (x, y), ο Βασίλης διαγράφει τουλάχιστον τόσα σημεία αριστερά του $(0,2019)$ στην πρώτη σειρά κινήσεων, από ότι δεξιά του $(0,2019)$ στην δεύτερη σειρά κινήσεων.

Έτσι, ας υποθέσουμε ότι η Άννα κερδίζει, με το να τοποθετήσει το πιόνι της στο $(k, 2019)$ για κάποιο $k > 0$.

Θεωρούμε την παράσταση $\Delta = 3m - (2x + y)$, όπου m είναι ο συνολικός αριθμός σημείων που διέγραψε ο Βασίλης δεξιά του $(0,2019)$ και (x, y) είναι η θέση του πιονιού της Άννας.

Για κάθε ακολουθία βημάτων που εκτελείται, πρώτα από την Άννα και μετά από τον Βασίλη, η τιμή της παράστασης Δ δεν μειώνεται. Αυτό μπορεί να φανεί από τον ακόλουθο πίνακα, στον οποίο φαίνονται οι μεταβολές των $3m$ και $2x + y$. (Έχουν εξαιρεθεί οι περιπτώσεις στις οποίες $2x + y < 0$).

Βήμα	$(0,3)$	$(1,2)$	$(-1,2)$	$(2,1)$	$(0,1)$	$(3,0)$	$(1,0)$	$(2,-1)$	$(1,-2)$
m	1	2	0 (ή 1)	2	1	2	2	2	2
$3m$	3	6	0 (ή 3)	6	3	6	6	6	6
$2x + y$	3	4	0	5	1	6	6	3	0

Από τον πίνακα φαίνεται επίσης ότι αν σε αυτή την ακολουθία βημάτων η Άννα αλλάξει το y κατά $+1$ ή -2, τότε η τιμή της Δ αυξάνεται κατά 1. Ακόμα, αν η Άννα αλλάξει το y κατά $+2$ ή -1, τότε την πρώτη φορά που συμβαίνει αυτό, η τιμής της Δ αυξάνεται κατά 2.
Αφού υποθέσαμε ότι η Άννα κερδίζει με το να τοποθετήσει το πιόνι της στο $(k, 2019)$, πρέπει να είναι $m \leq k - 1$ και $k \leq 2018$. Εκείνη λοιπόν τη στιγμή έχουμε

$$\Delta = 3m - (2k + 2019) = k - 2022 \leq -4.$$

Άρα την τελευταία φορά που ήταν η σειρά της να παίξει, η Άννα πρέπει να μείωσε την τιμή της Δ τουλάχιστον κατά 4. Άρα στο τελευταίο βήμα της βρέθηκε στο $(1,2)$ ή στο $(2,1)$, τα οποία δίνουν μείωση κατά 4 και 5, αντίστοιχα. (Δεν μπορεί να ήταν στο $(3,0)$ γιατί τότε θα είχε κερδίσει. Επίσης, δεν θα μπορούσε να είχε κάνει ένα ή δύο βήματα την τελευταία φορά που έπαιξε, γιατί αυτό δεν θα αρκούσε για την απαραίτητη μείωση της Δ).

Αν λοιπόν στο τελευταίο βήμα της ήταν στο $(1,2)$, αμέσως προηγουμένως θα είχαμε $y = 2018$ και $\Delta = 0$, το οποίο σημαίνει ότι σε κάποιο βήμα της η συνολική μεταβολή του y δεν θα ήταν $0 \bmod 3$. Όμως τότε, ισχύει $\Delta > 0$, άτοπο.

Αν στο τελευταίο βήμα της ήταν στο $(2,1)$, αμέσως προηγουμένως θα είχαμε $y = 2018$ και $\Delta = 0$ ή $\Delta = 1$, το οποίο σημαίνει ότι θα έπρεπε να είχε κάνει τουλάχιστον δύο βήματα με μεταβολή του y η με $+1$ ή -2, ή τουλάχιστον ένα βήμα με μεταβολή του y που να είναι $+2$ ή -1. Και στις δύο περιπτώσεις, με βάση τον πίνακα, προκύπτει ότι η Δ αυξάνεται τουλάχιστον κατά 2, άτοπο.

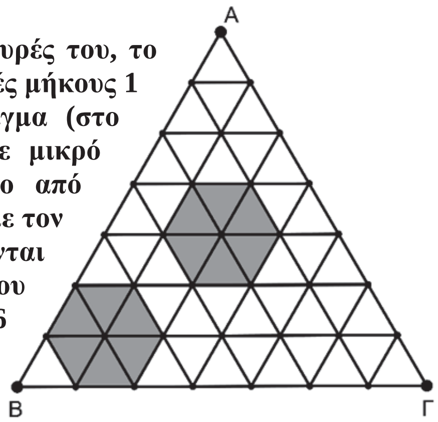
Προκριματικός διαγωνισμός 2019

30 Μαρτίου 2019

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

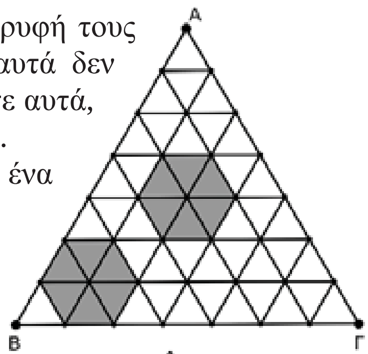
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές μήκους k cm (ΑΒ = ΒΓ= ΑΓ = k cm). Με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του, το χωρίζουμε σε k^2 (το πλήθος) μικρά ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές μήκους 1 cm. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένα τριγωνικό πλέγμα (στο διπλανό σχήμα φαίνεται η περίπτωση για k = 7). Σε κάθε μικρό ισόπλευρο πλευράς 1 τοποθετούμε έναν ακριβώς θετικό ακέραιο από το 1 έως το k^2, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο τέτοια τρίγωνα με τον ίδιο αριθμό. Με κορυφές τα σημεία του πλέγματος ορίζονται κανονικά εξάγωνα με πλευρές μήκους 1 cm. Ονομάζουμε *αξία* του εξαγώνου, το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα 6 ισόπλευρα τρίγωνα από τα οποία αποτελείται το εξάγωνο. Να βρεθεί (συναρτήσει του k) η μέγιστη τιμή του αθροίσματος των αξιών, όλων των εξαγώνων.



Λύση

Τα μικρά τρίγωνα χωρίζονται σε τέσσερεις κατηγορίες.

Στη πρώτη κατηγορία ανήκουν τα τρία μικρά τρίγωνα που μία κορυφή τους ταυτίζεται με τις κορυφές του μεγάλου τριγώνου. Τα τρίγωνα αυτά δεν ανήκουν σε κάποιο εξάγωνο, οπότε οι αριθμοί που τοποθετούνται σε αυτά, δεν συμμετέχουν στα τελικά αθροίσματα με τις αξίες των εξαγώνων.



Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα μικρά τρίγωνα που ανήκουν σε ένα μόνο εξάγωνο.

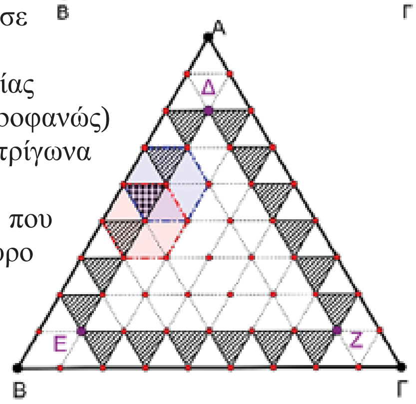
Σε κάθε πλευρά υπάρχουν k-2 τρίγωνα, οπότε συνολικά έχουμε:

$$3(k-2)+3=3k-3$$

τρίγωνα της δεύτερης κατηγορίας.

Στη τρίτη κατηγορία ανήκουν τα ισόπλευρα τρίγωνα που ανήκουν σε δύο ακριβώς εξάγωνα.Σε κάθε πλευρά υπάρχουν k-3 τρίγωνα, άρα συνολικά έχουμε 3(k-3) τρίγωνα της τρίτης κατηγορίας

Για τον υπολογισμό λοιπον των τελικών αθροισμάτων, θα πρέπει (προφανώς) να προσθέσουμε δύο φορές τους αριθμούς που βρίσκονται μέσα στα τρίγωνα της Δεύτερης κατηγορίας.



Στην τέταρτη κατηγορία τέλος ανήκουν τα μικρά ισόπλευρα τρίγωνα που ανήκουν σε τρία εξάγωνα. Τα τρίγωνα αυτά βρίσκονται στο ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ, οπότε το πλήθος τους είναι $(k-3)^2$.

Τελικά έχουμε:

$1^η$ Κατηγορία: 3 τρίγωνα (συμμετέχουν σε 0 εξάγωνα).

$2^η$ Κατηγορία: 3k-3 τρίγωνα (συμμετέχουν σε 1 εξάγωνο το καθένα).

$3^η$ Κατηγορία: 3k-9 τρίγωνα (συμμετέχουν σε 2 εξάγωνα το καθένα).

$4^η$ Κατηγορία: k^2-6k+9 τρίγωνα (συμμετέχουν σε 3 εξάγωνα το καθένα).

Για να πετύχουμε το μεγαλύτερο άθροισμα αξιών, θα πρέπει να τοποθετήσουμε του όσο το δυνατόν μεγαλύτερους αριθμούς σε τρίγωνα όσο το δυνατό μεγαλύτερης κατηγορίας (ώστε οι μεγαλύτεροι αριθμοί να προστεθούν περισσότερες φορές).

Σύμφωνα με την προηγούμενη σκεψη, θα πρέπει να τοποθετήσουμε:

1. Τους αριθμούς του συνόλου $A=\{1,2,3\}$ (που είναι οι μικρότεροι) στα 3 τρίγωνα της πρώτης κατηγορίας, οπότε το μερικό άθροισμα που θα προκύψει είναι: $S_A=1+2+3=6$.

2. Τους αριθμούς του συνόλου $B=\{4,5,6,\cdots,3k\}$ (που είναι οι αμέσως μεγαλύτεροι) στα 3k-3 τρίγωνα της δεύτερης κατηγορίας, οπότε το μερικό άθροισμα που θα προκύψει είναι:

$$S_B=4+5+6+\cdots+3k=\frac{4+3k}{2}(3k-3)=\frac{(3k-3)(3k+4)}{2}.$$

3. Τους αριθμούς του συνόλου $\Gamma=\{(3k+1),(3\kappa+2),\cdots,(6k-9)\}$ (που είναι οι αμέσως μεγαλύτεροι) στα 3k-9 τρίγωνα της τρίτης κατηγορίας, οπότε το μερικό άθροισμα που θα προκύψει είναι: $S_\Gamma=(3k+1)+(3k+2)+\cdots+(6k-9)=\dfrac{(3k+1)+(6k-9)}{2}(3k-9).$

4. Τους αριθμούς του συνόλου $\Delta=\{(6k-8),(6\kappa-7),\cdots,k^2\}$ (που είναι οι αμέσως μεγαλύτεροι) στα k^2-6k+9 τρίγωνα της τέταρτης κατηγορίας, οπότε το μερικό άθροισμα που θα προκύψει είναι:

$$S_\Delta=(6k-8)+(6k-7)+\cdots+k^2=\frac{k^2+6\kappa-8}{2}(k^2-6k+9).$$

Άρα η μέγιστη τιμή του αθροίσματος των αξιών είναι:

$$S_{max}=S_A+S_B+2S_\Gamma+3S_\Delta=\frac{3(k^4-14k^2+33k-24)}{2}.$$

Έστω τώρα γ ένα στοιχείο του συνόλου Γ και δ ένα στοιχείο του συνόλου Δ, τότε στο τελικό άθροισμα S_{max} θα υπάρχει ο προσθετέος 2γ+3δ. Αν εναλλάξουμε τη θέση των αριθμών, τότε στο τελικό άθροισμα S_{max} θα υπάρχει ο προσθετέος 2δ+3γ. Επειδή όμως γ<δ και 2<3 θα ισχύει η ανισότητα 2δ+3γ<2γ+3δ (απλή εφαρμογή της ανισότητας της αναδιάταξης). Άρα ο τρόπος τοποθέτησης των αριθμών που περιγράψαμε, δίνει το μεγαλύτερο άθροισμα.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε *ABC* εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ κέντρου Ο. Έστω I το έκκεντρο του *ABC* και *D, E, F* τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου *ABC* με τις *BC, AC, AB*, αντίστοιχα. Αν *S* είναι το ίχνος της κάθετης από το D την ευθεία *EF*, να αποδείξετε ότι η ευθεία *SI* περνάει από το αντιδιαμετρικό σημείο του *A* στον κύκλο Γ.

Λύση

Θεωρούμε X το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου Γ με την *IA'*, όπου *A'* το αντιδιαμετρικό του *A* στον Γ. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία *X, S, I* είναι συνευθειακά.

Έχουμε ότι $\widehat{IXA}=90$, άρα το *X* ανήκει στον κύκλο διαμέτρου *AI*. Το ίδιο όμως ισχύει και για τα σημεία *E* και *F*, επομένως το *X* θα ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου *AEIF*. Επομένως, θα είναι $\widehat{AFX}=\widehat{AEX}$. Όμως, ισχύει και $\widehat{ACX}=\widehat{ABX}$, και επομένως τα τρίγωνα *BFX, CEX* είναι όμοια. Άρα,

$$\frac{XF}{XE}=\frac{BF}{CE}=\frac{BD}{CD} \qquad (1).$$

Επίσης, επειδή η τομή της *EF* με τη *BC* είναι το αρμονικό συζυγές του *B*, και ισχύει και $\widehat{SDF}=90$ η *SD* θα είναι διχοτόμος της $\widehat{BSC}$, και συνεπώς

$$\frac{BS}{CS}=\frac{BD}{CD} \qquad (2).$$

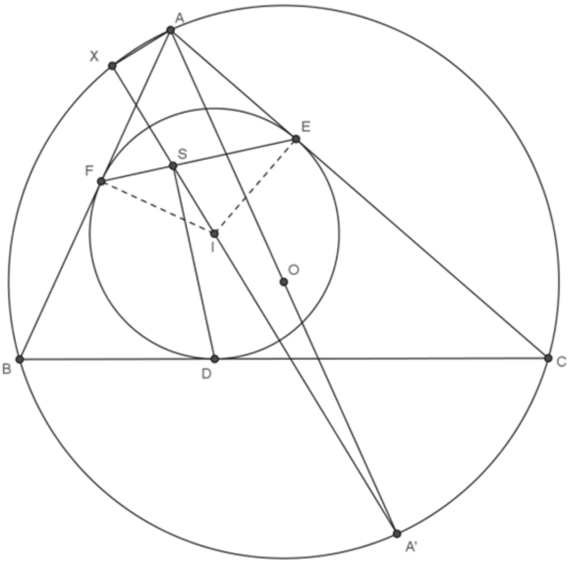
Τέλος, επειδή $\widehat{AFE}=\widehat{AEF}$, και $\widehat{FSB}=\widehat{CSE}$ (η *EF* είναι εξωτερική διχοτόμος της $\widehat{BSC}$), τα τρίγωνα *BFS, CES* είναι όμοια. Επομένως,

$$\frac{BS}{CS}=\frac{SF}{SE} \qquad (3).$$

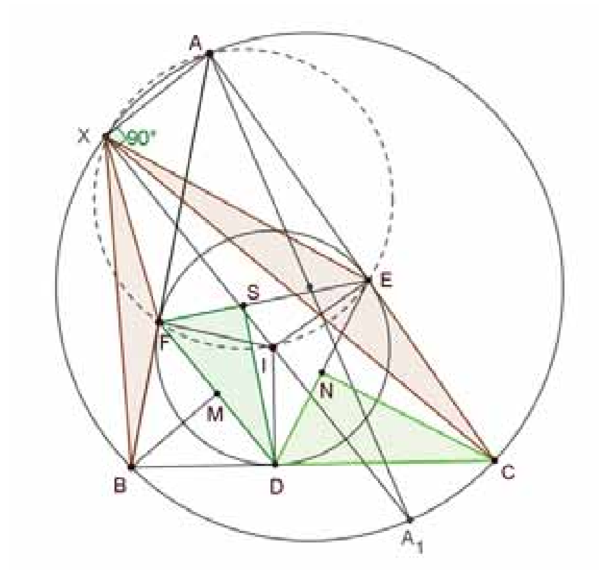
Οι $(1),(2),(3)$ δίνουν ότι $\dfrac{XF}{XE}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BS}{CS}=\dfrac{SF}{SE}$, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η *XS* είναι διχοτόμος της $\widehat{EXF}$.

Όμως, καθώς το I είναι το μέσο του τόξου *EF* στον $(AEIF)$, και η *XI* είναι διχοτόμος της $\widehat{EXF}$.
Άρα, τα σημεία *X, S, I* είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έπεται.

Οι $(1),(2),(3)$ δίνουν ότι $\dfrac{XF}{XE}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BS}{CS}=\dfrac{SF}{SE}$, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η *XS* είναι διχοτόμος της $\widehat{EXF}$. Όμως, καθώς το I είναι το μέσο του τόξου *EF* στον $(AEIF)$, και η *XI* είναι διχοτόμος της $\widehat{EXF}$. Άρα, τα σημεία *X, S, I* είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έπεται.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

2ος τρόπος (αφού έχουμε αποδείξει τη σχέση (1))

Θεωρούμε τα μέσα M, N των FD, DE αντίστοιχα. Επειδή $D\widehat{F}E=D\widehat{E}C$ (χορδής και εφαπτομένης), τα ορθογώνια τρίγωνα DFS, DCN είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{FS}{DF}=\frac{EN}{DC} \qquad (4).$$

Ομοίως, από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα DES, BDM είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{SE}{ED}=\frac{MD}{BD} \qquad (5).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (4) και (5) παίρνουμε

$$\frac{FS}{SE}=\frac{BD}{CD} \qquad (6).$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με την (1) μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η *XS* είναι διχοτόμος της $\widehat{EXF}$. Όμως, καθώς το I είναι το μέσο του τόξου *EF* στον $(AEIF)$, και η *XI* είναι διχοτόμος της $\widehat{EXF}$. Άρα, τα σημεία *X, S, I* είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έπεται.

Πρόβλημα 3

Έστω $\nu > 1$ ένας θετικός ακέραιος. Κάθε τετράγωνο ενός $\nu \times \nu$ πίνακα περιέχει έναν ακέραιο έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

(α) **Κάθε αριθμός του πίνακα είναι ισοϋπόλοιπος με το 1 $\bmod \nu$.**

(β) **Το άθροισμα των αριθμών του σε οποιαδήποτε γραμμή του πίνακα είναι ισοϋπόλοιπο με το $\nu \bmod \nu^2$.**

(γ) **Το άθροισμα των αριθμών του σε οποιαδήποτε στήλη του πίνακα είναι ισοϋπόλοιπο με το $\nu \bmod \nu^2$.**

Έστω Γ_i το γινόμενο των αριθμών της $i-$γραμμής και Σ_j το γινόμενο των αριθμών της $j-$στήλης του πίνακα. Να αποδείξετε ότι τα αθροίσματα $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_\nu$ και $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_\nu$ είναι ισοϋπόλοιπα $\bmod \nu^4$.

Λύση

Έστω $\mathrm{A}_{i,j}$ ο αριθμός που ανήκει στην τομή της $i-$ γραμμής και $j-$ στήλης. Έστω P το γινόμενο όλων των ν^2 αριθμών του πίνακα. Για ευκολία γράφουμε $\alpha_{i,j} = \mathrm{A}_{i,j} - 1$ και $\gamma_i = \Gamma_i - 1$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \Gamma_i \equiv (\nu - 1) + \mathrm{P} \left(\bmod \nu^4 \right) \qquad (1)$$

Λόγω της συμμετρίας των συνθηκών του προβλήματος, προκύπτει και η αντίστοιχη σχέση για τις στήλες του πίνακα:

$$\sum_{i=1}^{n} \Sigma_i \equiv (\nu - 1) + \mathrm{P} \left(\bmod \nu^4 \right), \qquad (2)$$

οπότε από τις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

Από τη συνθήκη (1), ο αριθμός ν διαιρεί το $\alpha_{i,j}$, για όλα τα i, j. Επομένως οποιοδήποτε γινόμενο τουλάχιστον δύο από τους αριθμούς $\alpha_{i,j}$ διαιρείται με το ν^2, οπότε

$$\Gamma_i = (1 + \alpha_{i,1})(1 + \alpha_{i,2}) \ldots (1 + \alpha_{i,n}) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} + \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le} \alpha_{i,j_1} \alpha_{i,j_2} + \ldots$$

$$\equiv 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \equiv 1 - \nu + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} \left(\bmod \nu^2 \right), \text{ για κάθε δείκτη } i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Από τη συνθήκη (β) προκύπτει ότι $\Gamma_i \equiv 1 \left(\bmod \nu^2 \right)$, οπότε $\nu^2 \mid \gamma_i$. Επομένως, κάθε γινόμενο δύο τουλάχιστον παραγόντων από τους γ_i διαιρείται με το ν^4. Με επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας λαμβάνουμε

$$\mathrm{P} = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_\nu = (1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2) \cdots (1 + \gamma_\nu) \equiv 1 + \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i \left(\bmod \nu^4 \right),$$

οπότε

$$\sum_{i=1}^{\nu} \Gamma_i = \nu + i = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i \equiv \nu + (\mathrm{P} - 1) \left(\bmod \nu^4 \right).$$

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(y^2+1\right)f(x)-yf(xy)=yf\left(\frac{x}{y}\right),\ \text{για κάθε } x,y>0.$$

Λύση

Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί στην πιο απλή μορφή:

$$\left(y+\frac{1}{\upsilon}\right)f(x)=f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right),\ \text{για κάθε } x,y>0. \qquad (1)$$

Θεωρούμε ένα σταθερό πραγματικό αριθμό a και μία νέα μεταβλητή $t>0$. Τότε για τις τιμές $f(t), f\left(t^2\right), f(at)$ και $f\left(a^2t^2\right)$ προκύπτει από τη δεδομένη σχέση (1), ένα σύστημα τεσσάρων γραμμικών εξισώσεων, ως εξής:

$$\text{Για } x=y=t \Rightarrow \left(t+\frac{1}{t}\right)f(t)=f\left(t^2\right)+f(1) \qquad (2)$$

$$\text{Για } x=at, y=\frac{t}{a} \Rightarrow \left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)f(at)=f\left(t^2\right)+f\left(a^2\right) \qquad (3)$$

$$\text{Για } x=t, y=a^2t \Rightarrow \left(a^2t+\frac{1}{a^2t}\right)f(t)=f\left(a^2t^2\right)+f\left(\frac{1}{a^2}\right) \qquad (4)$$

$$\text{Για } x=y=at \Rightarrow \left(at+\frac{1}{at}\right)f(at)=f\left(a^2t^2\right)+f(1) \qquad (5)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (2) και (3) και ομοίως των (4) και (5), λαμβάνουμε τις σχέσεις:

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)f(t)-\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)f(at)=f(1)-f\left(a^2\right) \qquad (8)$$

$$\left(a^2t+\frac{1}{a^2t}\right)f(t)-\left(at+\frac{1}{at}\right)f(at)=f\left(\frac{1}{a^2}\right)-f(1) \qquad (9)$$

από τις οποίες με απαλοιφή του $f(at)$ λαμβάνουμε:

$$\left(\left(at+\frac{1}{at}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\left(a^2t+\frac{1}{a^2t}\right)\right)f(t)=$$

$$\left(at+\frac{1}{at}\right)\left(f(1)-f\left(a^2\right)\right)-\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\left(f\left(\frac{1}{a^2}\right)-f(1)\right). \qquad (10)$$

Επειδή $\left(at+\frac{1}{at}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\left(a^2t+\frac{1}{a^2t}\right)=a+\frac{1}{a}-\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)<0$, αφού $a+\frac{1}{a}\geq 2$, από τη σχέση (1) λύνοντας ως προς το $f(t)$ λαμβάνουμε μία σχέση της μορφής

$$f(t)=c_1t+\frac{c_2}{t},\ t>0, \qquad (11)$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 εκφράζονται σε όρους των $f(1), f\left(a^2\right)$ και $f\left(\frac{1}{a^2}\right)$ και δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή t. Τέλος, εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλες οι συναρτήσεις της μορφής (11) αποτελούν λύσεις του προβλήματος.

Οι ΛΥΣΕΙΣ των ασκήσεων του τεύχους 112

Α56. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο πραγματικό αριθμό c που ικανοποιεί τη συνθήκη $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq cn$, για όλους τους θετικούς ακέραιους n και για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_n$ που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του –1 και τέτοιοι ώστε $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 0$.

(Ρουμανία 2018)

Λύση

Πρέπει πρώτα, δεδομένου ενός θετικού ακέραιου n, να βρεθεί μία ανισοτική σχέση για τους αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_n$ που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του –1 και τέτοιοι ώστε $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 0$, που να αφορά το άθροισμα των τετραγώνων τους. Για να μπορέσει κανείς να εκμεταλλευθεί τη δεδομένη σχέση $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 0$, πρέπει να ξεκινήσει από κατάλληλη αρχική ανισότητα που να εμπλέκει και κυβική δύναμη, αλλά και τον παράγοντα $x_k + 1 \geq 0$. Προφανώς ένας δεύτερος παράγοντας πρέπει να είναι δευτέρου βαθμού.

Με το παραπάνω σκεπτικό θεωρούμε την ανισότητα

$$(x_k+1)(x_k-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_k+1)\left(x_k^2 - 2x_k a + a^2\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x_k^3 - (2a-1)x_k^2 + \left(a^2-2a\right)x_k + a^2 \geq 0,\ k = 1,2,3,...$$

Επειδή δεν μας ενδιαφέρει το άθροισμα των πρωτοβάθμιων δυνάμεων των x_k, επιλέγουμε $a = 2$, έτσι ώστε $a^2 - 2a = 0$. Τότε έχουμε: $x_k^3 - 3x_k^2 + 4 \geq 0,\ k = 1,2,3,...$, από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 4n \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \frac{4n}{3}$$

Ο ζητούμενος αριθμός c θα είναι $\frac{4}{3}$, αν βρούμε αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_n$ τέτοιους ώστε να πληρούν τις συνθήκες και να ισχύει η ισότητα στην τελευταία σχέση.

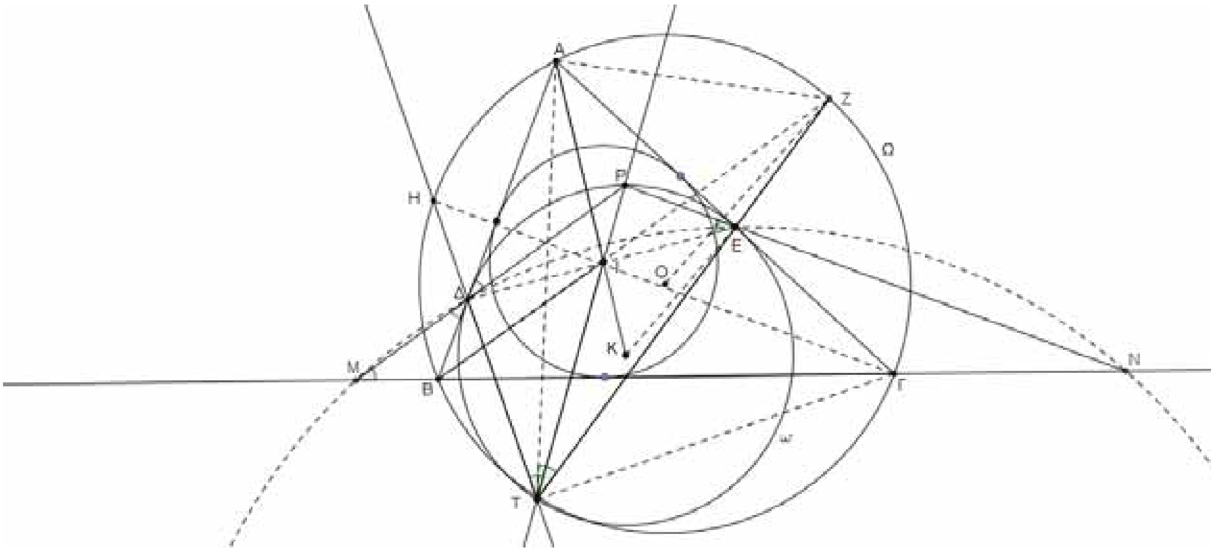
Πράγματι, αν ο αριθμός n είναι πολλαπλάσιος του 9 και πάρουμε $8n/9$ από τους αριθμούς ίσους με -1 και τους υπόλοιπους $n/9$ ίσους με 2, τότε έχουμε την ισότητα.

Επομένως, ο ελάχιστος πραγματικός αριθμός c που ικανοποιεί την σχέση c που ικανοποιεί την σχέση $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq cn$, για όλους τους θετικούς ακέραιους n και για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_n$ που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του –1, έτσι ώστε $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 0$, είναι ο $c = \frac{4}{3}$.

Γ46. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με έκκεντρο Ι και περιγεγραμμένο κύκλο Ω. Έστω ω ο κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ και εσωτερικά στον κύκλο Ω. Έστω Δ,Ε και Τ τα σημεία επαφής του κύκλου ω με τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και τον κύκλο Ω, αντίστοιχα. Έστω ακόμη ότι η ευθεία ΙΤ τέμνει τον κύκλο ω για δεύτερη φορά στο σημείο Ρ και έστω ότι οι ευθείες ΡΔ και ΡΕ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία Μ και Ν, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε,Μ,Ν ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Ποιο είναι το κέντρο αυτού του κύκλου;

(Ρουμανία 2018)

Λύση



Σχήμα 2

Στο σχήμα είναι σημειωμένες οι κατάλληλες γωνίες που πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι ίσες. Υπάρχει όμως δυσκολία στη μεταφορά γωνιών, γιατί οι απαραίτητες ισότητες δεν είναι προφανείς. Ένας στόχος είναι να αποδείξουμε ότι οι γωνίες $\Delta\hat{E}P$ και $B\hat{M}\Delta$ είναι ίσες.

Εύκολα βγαίνουν οι ισότητες: $\Delta\hat{E}P = \Delta\hat{T}P = A\hat{\Delta}P$ (εγγεγραμμένες γωνίες στον κύκλο ω και γωνία χορδής – εφαπτομένης)

Στη συνέχεια μπορούμε να αποδείξουμε ότι: $\Delta\hat{T}P = A\hat{T}E$. Όμως για αυτό χρειάζονται:

- Προέκταση των ΤΔ και ΤΕ, όπως στο σχήμα. Ομοιοθεσία των κύκλων ω και Ω που εφάπτονται εσωτερικά, ως προς κέντρο Τ. Τελικά το σημείο Ζ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.

- Αυτή η ομοιοθεσία απεικονίζει το Δ στο σημείο Η και το Ε στο σημείο Ζ. Επίσης μία εφαπτομένη του κύκλου ω απεικονίζεται σε εφαπτομένη του κύκλου Ω. Από αυτό προκύπτει ότι $OZ \perp A\Gamma$, οπότε το Ζ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ και έτσι τα σημεία Β, Ι, Ζ είναι συνευθειακά. Ομοίως προκύπτει ότι το Η είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, οπότε τα σημεία Γ, Ι, Η είναι συνευθειακά.

- Τα σημεία Δ, Ι και Ε είναι συνευθειακά. Για την απόδειξη χρειάζεται το θεώρημα του Pascal σε ειδική περίπτωση γενικευμένου εξαγώνου που οι πλευρές του τέμνονται. Το κατάλληλο εξάγωνο είναι το ΑΒΖΤΗΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο Ω και οι πλευρές του τέμνονται ανά δύο στα σημεία Δ, Ι και Ε, τα οποία από το θεώρημα του Pascal είναι συνευθειακά. Προσέξτε την εύρεση των απέναντι πλευρών του εξαγώνου:

ΑΒ ΖΤ ΗΓ

12 34 56

Οι απέναντι πλευρές αντιστοιχούν στα ζευγάρια

$$(12)\to(45),\ (23)\to(56) \text{ και } (34)\to(61).$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ προκύπτει ότι το Ι είναι μέσο του τμήματος ΔΕ.

- Η ευθεία ΤΑ είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΤΔΕ. Αυτό προκύπτει εύκολα, αν λάβουμε υπόψη ότι οι ευθείες ΑΔ και ΑΕ είναι εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΤΔΕ.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε στη ζητούμενη σχέση. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ότι η ευθεία ΜΡ είναι παράλληλη προς τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ και επίσης η παραλληλία $\mathrm{NP} \parallel \Gamma\mathrm{I}$.

Έχουμε:

$$\Delta\hat{\mathrm{T}}\mathrm{P} = \Delta\hat{\mathrm{T}}\mathrm{I} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{T}}\mathrm{E} \text{ (ιδιότητα της συμμετροδιαμέσου)}$$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{T}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{T}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} \text{ (εγγεγραμμένες στο τόξο ΑΖ)}$$

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{P} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{T}}\mathrm{P} \text{ (γωνία χορδής-εφαπτομένης, αντίστοιχη εγγεγραμμένη)}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{P} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{MP} \parallel \mathrm{BI}.$$

Ομοίως προκύπτει ότι: $\mathrm{NP} \parallel \Gamma\mathrm{I}$.

Με τις προηγούμενες ισότητες εύκολα καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα, αφού

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{P} = \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{P}.$$

Για το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΔΕΝΜ δείτε που τέμνονται οι μεσοκάθετοι των πλευρών ΜΔ και ΔΕ του τετραπλεύρου ΔΕΝΜ. Προφανώς στο παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην κορυφή Α.

Ν42. Δοθέντος ενός μη αρνητικού ακέραιου κ να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι ν τέτοιοι ώστε το γινόμενο οποιωνδήποτε ν διαδοχικών θετικών ακέραιων διαιρείται με τον αριθμό $(\nu+\kappa)^2+1$. (Ρουμανία 2018)

Λύση

Επειδή αναφερόμαστε σε ν διαδοχικούς ακέραιους, η πρώτη σκέψη μας είναι ότι το $\nu!$ διαιρεί το γινόμενό τους. Επομένως, δοθέντος ενός μη αρνητικού ακεραίου κ, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι ν τέτοιοι ώστε ο $(\nu+\kappa)^2+1$ να διαιρεί το $\nu!$.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε τους αριθμούς $\nu=\kappa+2\mu^2$, για κατάλληλα μεγάλους αριθμούς μ της μορφής $\mu\equiv 1(\bmod 5)$. Έτσι για δεδομένο κ, αρκεί να βρούμε απειρία αριθμών ν που είναι τέτοια ώστε ο $(\nu+\kappa)^2+1$ να είναι γινόμενο παραγόντων μικρότερων του ν.

Πράγματι, επειδή $\mu=5\rho+1, \rho=1,2,3,...$, για $\nu=2\mu^2-\kappa$, έχουμε:

$$(\nu+\kappa)^2+1=4\mu^4+1=\left(2\mu^2+1\right)^2-(2\mu)^2=\left(2\mu^2+2\mu+1\right)\left(2\mu^2-2\mu+1\right)$$
$$==(50\rho^2+30\rho+5)(50\rho^2+10\rho+1)=5(10\rho^2+6\rho+5)(50\rho^2+10\rho+1).$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$5<10\rho^2+6\rho+1<50\rho^2+10\rho+1=2\mu^2-2\mu+1=2\mu^2-(2\mu-1)<2\mu^2-\kappa=\nu,$$

αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα μεγάλο μ, δηλαδή τέτοιο ώστε να ισχύει η τελευταία ανισότητα

$(2\mu-1)<-\kappa \Leftrightarrow 2\mu-1>\kappa \Leftrightarrow 2\mu>\kappa+1$ (θυμηθείτε εδώ ότι το κ είναι δεδομένο).

Ασκήσεις για λύση

Α57. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Αν $x_1,x_2,...,x_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(x_1+x_2+...+x_n+1\right)^2\geq 4\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right).$$

Α57. Ένας ακέραιος του Gauss (Gaussian integer) είναι ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος είναι ακέραιοι. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο n, έτσι ώστε να υπάρχει μία ακολουθία $z_1,z_2,...,z_n$ ακέραιων του Gauss των οποίων τα μέτρα να είναι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι.

Ν43. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (p,q) πρώτων αριθμών για τους οποίους ο αριθμός $p^{q-1}+q^{p-1}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Γ47. Έστω ΒΔ και ΓΕ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Ο κύκλος διαμέτρου ΑΓ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ζ, ενώ ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ τέμνει την ευθεία ΓΕ στα σημεία Η και Θ, όπου το Θ βρίσκεται μεταξύ των Γ και Ε. Αν $\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}=12^0$, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Theta}\mathrm{Z}$.

Δ21. Δύο παίκτες Α και Β παίζουν ένα παιγνίδι ως εξής: Σχηματίζουν ένα αριθμό γράφοντας εναλλάξ από ένα ψηφίο από αριστερά προς τα δεξιά. Ένας παίκτης χάνει, αν μετά την κίνησή του, υπάρχει ακολουθία ψηφίων $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ τέτοια ώστε να υπάρχει θετικός ακέραιος κ για τον οποίο ο αριθμός $\overline{\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}...\alpha_\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 11. Αν ο Α αρχίζει να γράφει ψηφία πρώτος, να βρείτε ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

***συντακτική επιτροπή*: Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μανιατοπούλου Αμαλία, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος**

Ι. τι είναι τα Μαθηματικά;

«... Όταν διαβάζουμε ένα φορμαλιστικό μαθηματικό επιχείρημα, μας δίνεται η εντύπωση ότι οι όροι που δεν έχουν οριστεί ή οι βασικοί ορισμοί έχουν επιλεγεί λόγω κάποιας ιδιοτροπίας. Οι μαθηματικοί αντλούν κατεργάρικη ευχαρίστηση από τη δημιουργία της ψευδούς εντύπωσης ότι ο ορισμός είναι αυθαίρετος. Στην πραγματικότητα δεν συμβαίνει αυτό. Τα θεωρήματα των μαθηματικών καθοδηγούν τους ορισμούς όσο και οι ορισμοί καθοδηγούν τα θεωρήματα...Υπάρχει επομένως μία συγκαλυμμένη κυκλικότητα στη φορμαλιστική παρουσίαση των μαθηματικών...Αντί να επικεντρώσουν την προσοχή τους στην περίεργη αυτή κυκλικότητα, οι φιλόσοφοι προσποιήθηκαν ότι δεν υφίσταται, ως εάν η αξιωματική μέθοδος, προχωρώντας γραμμικά από ορισμό σε θεώρημα, να ήταν προικισμένη με οριστικότητα. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι η μαθηματική αλήθεια δεν γεννάται από κάποια φορμαλιστική παρουσίαση. Μάλλον, η φορμαλιστική παρουσίαση είναι απλώς μια τεχνική για την έκθεση της μαθηματικής αλήθειας.

Η αλήθεια μιας μαθηματικής θεωρίας διαφέρει από την ορθότητα οποιασδήποτε αξιωματικής μεθόδου η οποία μπορεί να επιλεγεί για την παρουσίαση της θεωρίας. Η διάκριση αυτή διέλαθε την προσοχή των μαθηματικιζόντων φιλοσόφων...»

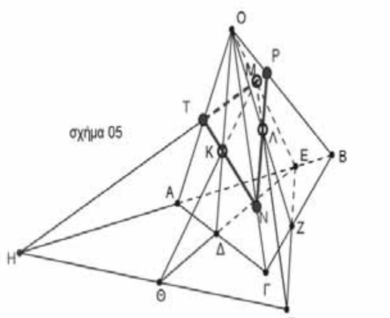
[***πηγή***: *από το βιβλίο του Gian-Carlo Rota, "Μαθηματικά και Φιλοσοφία" (2015, ISBN 978-618-5027-49-0)*]

ΙΙ. "Ευκλείδεια Γεωμετρία, αγάπη μου"

προλεγόμενα συνεχίζουμε, με την τομή πυραμίδας με επίπεδο, στα πλαίσια του «*γενικού προβλήματος*», (τεύχος 112): «*Δίνεται πυραμίδα και τρία σημεία πάνω στην επιφάνειά της. Να βρεθεί η τομή της πυραμίδας με το επίπεδο που ορίζουν τα δοσμένα σημεία*»

σχόλιο 1 στο προηγούμενο τεύχος είδαμε τις δύο πρώτες περιπτώσεις.

iii. Τρίτη περίπτωση τα δοσμένα σημεία βρίσκονται στο εσωτερικό τριών εδρών της πυραμίδας (σχήμα 05)



επίπεδη τομή πυραμίδας όταν γνωρίζουμε τρία κοινά σημεία του επιπέδου με την επιφάνεια της πυραμίδας (στο εσωτερικό τριών εδρών της)

παράδειγμα Δίνεται πυραμίδα Ο.ΑΒΓ και σημεία Κ,Λ,Μ στο εσωτερικό των εδρών ΟΑΓ,ΟΒΓ,ΟΑΒ αντίστοιχα. Να βρεθεί η τομή της πυραμίδας με το επίπεδο που ορίζουν τα δοσμένα σημεία.

απάντηση (σχήμα 05) Οι ευθείες που ορίζονται από τα ζεύγη σημείων (Ο,Κ),(Ο,Λ),(Ο,Μ) τέμνουν τις ΑΓ,ΓΒ,ΒΑ στα Δ,Ζ,Ε αντίστοιχα.

- Στα πλαίσια του επιπέδου που ορίζουν οι ΜΕ,ΜΚ, οι οι ευθείες ΕΔ, ΜΚ τέμνονται σε σημείο Θ.
- Στα πλαίσια του επιπέδου που ορίζουν οι ΜΕ,ΜΛ, οι ευθείες ΕΖ,ΜΛ τέμνονται σε σημείο Π.
- Στα πλαίσια του επιπέδου της βάσης ΑΒΓ, η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Π,Θ τέμνουν την ευθεία ΒΑ σε σημείο Η. Το Η είναι το νέο κοινό σημείο του επιπέδου (Κ,Λ,Μ) με το επίπεδο της έδρας ΟΑΒ.
- Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΟΑΒ, το τέμνον επίπεδο έχει μ' αυτήν δύο κοινά σημεία Η,Μ. Η ευθεία ΗΜ τέμνει τις ακμές ΟΑ,ΟΒ στα Τ,Ρ αντίστοιχα.
- Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΟΒΓ, το τέμνον επίπεδο έχει μ' αυτήν δύο κοινά σημεία Ρ,Λ. Η ευθεία ΡΛ τέμνει την ακμή ΟΓ στο Ν.
- Άρα το επίπεδο που ορίζουν τα Κ,Λ,Μ τέμνουν την πυραμίδα κατά το τρίγωνο ΝΤΡ.

iv. Τέταρτη περίπτωση τα δοσμένα σημεία βρίσκονται σε ακμές και στο εσωτερικό εδρών της πυραμίδας (σχήμα 08)

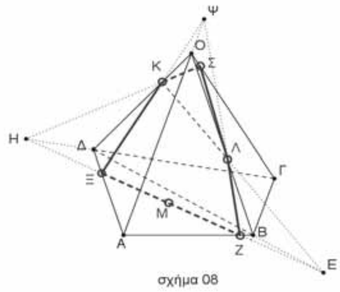
παράδειγμα Δίνεται πυραμίδα Ο.ΑΒΓΔ και τρία σημεία Κ,Λ,Μ απ' τα οποία τα δύο πρώτα ανήκουν στις ακμές ΟΔ,ΟΒ αντίστοιχα και το τρίτο στο εσωτερικό της βάσης ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η τομή της πυραμίδας με το επίπεδο που ορίζουν τα δοσμένα σημεία.

απάντηση (σχήμα 08)

● Στα πλαίσια του επιπέδου που ορίζουν οι ακμές ΟΔ,ΟΒ, η ευθεία ΚΛ τέμνει την προέκταση της ευθείας ΔΒ στο Ε.

● Στα πλαίσια του επιπέδου της βάσης ΑΒΓΔ η ευθεία ΕΜ τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Η, την ακμή ΔΑ στο Ξ και την ακμή ΑΒ στο Ζ.

● Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΟΔΓ, η ευθεία ΗΚ τέμνει την ΟΓ στο Σ



σχήμα 08

● Άρα το επίπεδο που ορίζουν τα Κ,Λ,Μ τέμνουν την πυραμίδα κατά το πεντάγωνο ΞΖΛΣΚ.

[πηγή: «Θεωρία Τομών των Στερεών», Γιάννη Κερασαρίδη]

III. Αυτό το ξέρατε;

Τι είναι ο "κομήτης του Γκόλντμπαχ"; *[η απάντηση στο τέλος της στήλης]*

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. Ο ιός του AIDS και τα Μαθηματικά

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Κώστας Μακρυγιάννης (Αθήνα), μας υπόδειξε ένα σημείωμα του έγκυρου επιστημονικού σχολιαστή Σταύρου Ξενικουδάκη, με τίτλο «Όταν τα Μαθηματικά δείχνουν το δρόμο στην Ιατρική» (πηγή: «Scientific American»). Λόγω έλλειψης χώρου, παρουσιάζουμε μια ικανοποιητική περίληψη του σημειώματος.

«...Δουλεύοντας στο παρασκήνιο, ο λογισμός είναι ο αφανής ήρωας στη σύγχρονη καθημερινότητα των ανθρώπων. Χρησιμοποιώντας τις ικανότητες πρόβλεψης των διαφορικών εξισώσεων, ο άνθρωπος έχει καταφέρει να αλλάξει τον κόσμο. Είναι χαρακτηριστικός ο υποστηρικτικός ρόλος που έπαιξε ο διαφορικός λογισμός στον αγώνα της ιατρικής ενάντια στον ιό του AIDS, τον HIV...Ο ιός του AIDS (εμφανίστηκε στο προσκήνιο, τη δεκαετία του 1980), στόχευε τα βοηθητικά κύτταρα Τ του ανοσοποιητικού συστήματος, χρησιμοποιώντας τα για να αναπαράγει χιλιάδες αντίγραφά του. Τα αντίγραφα του ιού έμπαιναν στην κυκλοφορία του αίματος και άλλων σωματικών υγρών, μολύνοντας κι άλλα κύτταρα Τ σε κάθε σημείο του σώματος...

...Το 1994 εμφανίστηκε μια άλλη κατηγορία φαρμάκων, οι παρεμποδιστές πρωτεάσης, που εμπόδιζαν την ωρίμανση των ιών, έτσι που να μην μπορούν να μολύνουν κύτταρα Τ... Λίγο μετά την εμφάνιση αυτής της νέας κατηγορίας φαρμάκων για το AIDS, δύο ομάδες ερευνητών, με επικεφαλής τον Ντέιβιντ Χο (διευθυντή του Ερευνητικού Κέντρου Ααρον Ντάϊμοντ για το AIDS (ADARC) στη Νέα Υόρκη) και τον Αλαν Πέρελσον (μαθηματικό ανοσιολόγο) συνεργάστηκαν σε μια μελέτη που άλλαξε τον τρόπο που οι γιατροί έβλεπαν τον ιό HIV και οδήγησε σε ριζικά διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισής του.

Ανεξήγητη «νηνεμία»

Το AIDS χωρίς θεραπευτική αγωγή έχει τρία στάδια. Στο αρχικό στάδιο καταρρέει ο αριθμός των βοηθητικών κυττάρων Τ, που είναι γνωστά και ως κύτταρα CD4. Ταυτόχρονα, το ιικό φορτίο (ο αριθμός των αντιγράφων του ιού στο αίμα) αυξάνεται κατακόρυφα, μέχρι που το ανοσοποιητικό σύστημα να αρχίσει να καταπολεμά τη μόλυνση. Τότε τα συμπτώματα - σαν της γρίππης - παύουν και ο ασθενής νιώθει καλύτερα. Στο δεύτερο στάδιο το ιικό φορτίο σταθεροποιείται για χρόνια, ενώ ο χαμηλός αριθμός κυττάρων CD4 συνεχίζει να μειώνεται αργά, αλλά σταθερά. Στο τρίτο στάδιο, ο αριθμός των κυττάρων CD4 πέφτει εκ νέου απότομα και το ιικό φορτίο αυξάνεται και πάλι κατακόρυφα.

Λογισμός

Ο διαφορικός λογισμός επέτρεψε στον Πέρελσον και τον Χο να κατασκευάσουν μαθηματικό μοντέλο αυτής της μείωσης και να εξάγουν τα απρόσμενα συμπεράσματα απ' αυτό. Ορίζοντας ως dV τη μεταβολή του ιικού φορτίου V μέσα στο στοιχειώδη χρόνο dt και με δεδομένο ότι ένα σταθερό κλάσμα του αριθμού των ιών καθαριζόταν από το ανοσοποιητικό κάθε μέρα, σχημάτισαν τη διαφορική εξίσωση: dV/V=-c dt. Η σταθερά c έκφραζε το κλάσμα του ιικού φορτίου. Λύνοντας την εξίσωση για να υπολογίσουν το ιικό φορτίο ως συνάρτηση του χρόνου βρήκαν ότι: V(t)=V0e-ct, όπου V0 το αρχικό ιικό φορτίο και e η βάση των φυσικών λογαρίθμων (2,71828...). Προσαρμόζοντας την καμπύλη που παριστάνει αυτή η εξίσωση στα πειραματικά δεδομένα που είχαν συλλέξει, μπόρεσαν να υπολογίσουν τη σταθερά c. Η λύση αυτή επιβεβαιώνει ότι με τη χορήγηση του φαρμάκου, το ιικό φορτίο μειώνεται εκθετικά με βάση το χρόνο.

Ο ρυθμός μείωσης του ιικού φορτίου μπορεί να δοθεί με τη μορφή παραγώγου ως: dV/dt = -cV. Οσο πιο μικρό είναι το V (το ιικό φορτίο), τόσο μικρότερος γίνεται ο ρυθμός μείωσής του, όπως ένας νεροχύτης που αδειάζει όλο και πιο αργά όσο απομακρύνεται μέσω της αποχέτευσης μέρος του νερού που περιέχει. Στη συνέχεια, ο Χο και ο Πέρελσον μοντελοποίησαν τον ρυθμό μεταβολής του ιικού φορτίου πριν από τη χορήγηση του φαρμάκου, ως: dV/dt = P - cV, όπου P είναι ο ρυθμός παραγωγής νέων αντιγράφων ιών. Στη δεύτερη - χωρίς συμπτώματα - φάση του AIDS, οι ιοί πρέπει να παράγονται με τον ίδιο ρυθμό που καταστρέφονται από το ανοσοποιητικό, ή στην αναλογία με τον νεροχύτη, το νερό από τη βρύση συμπληρώνει το νερό που φεύγει από την αποχέτευση. Σε αυτήν την ισορροπία dV/dt είναι μηδέν, οπότε P = cV.

Οι δύο ερευνητές χρησιμοποίησαν την απλή τελευταία εξίσωση για να υπολογίσουν ένα κρίσιμο μέγεθος, που κανείς δεν είχε καταφέρει να υπολογίσει: Τον αριθμό των ιών που εκκαθαρίζονται από το ανοσοποιητικό καθημερινά. Αποδείχτηκε ότι επρόκειτο για ένα δισεκατομμύριο ιούς τη μέρα, απόδειξη του τιτάνιου αγώνα που πραγματοποιούσε το ανοσοποιητικό σύστημα στην ασυμπτωματική φάση.

Τριπλή θεραπευτική αγωγή

Πραγματοποιώντας νέα πειράματα και βελτιώνοντας το μαθηματικό μοντέλο τους παραπέρα, ώστε να περιλαμβάνει και τη μεταβολή του αριθμού των βοηθητικών κυττάρων Τ, οι Χο και Πέρελσον υπολόγισαν ως ακριβέστερη τιμή τα 10 δισεκατομμύρια ιούς τη μέρα, ενώ η ζωή των μολυσμένων κυττάρων Τ δεν ξεπερνούσε τις δύο μέρες. Η συνειδητοποίηση του μεγέθους της πάλης του ανοσοποιητικού στην ήρεμη φάση του AIDS οδήγησε τους γιατρούς να κάνουν στροφή 180 μοιρών στη θεραπεία που χορηγούσαν. Ενώ έως τότε περίμεναν να ξεκινήσει η τρίτη φάση για να δώσουν αντικά φάρμακα, ώστε να μην έχει ήδη αποκτήσει ανθεκτικότητα σε αυτά ο ιός, γνωρίζοντας πια πως ο HIV κάθε άλλο παρά βρισκόταν σε «χειμερία νάρκη», άρχισαν να δίνουν βοήθεια στο ανοσοποιητικό με τη μορφή φαρμάκων όσο νωρίτερα μπορούσαν. Όμως ένα φάρμακο δεν αρκούσε.

Τα μαθηματικά του Πέρελσον έδειξαν ότι με βάση τον ρυθμό μετάλλαξης του HIV, το μέγεθος του γονιδιώματός του και τον αριθμό των ιών που παράγονταν κάθε μέρα, μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα θα είχε σημειωθεί μετάλλαξη σε καθένα από τα γενετικά «γράμματα» του γονιδιώματος προσφέροντας πιθανότατα ανθεκτικότητα στον ιό. Η ταυτόχρονη χορήγηση δύο διαφορετικών φαρμάκων βελτίωνε τα πράγματα, αλλά και πάλι μέσα στη μέρα μπορούσαν να γίνουν αρκετές διπλές μεταλλάξεις. Αντίθετα, η ταυτόχρονη χορήγηση τριών φαρμάκων ήταν δύσκολο να αντιμετωπιστεί από τον HIV, καθώς η πιθανότητα τριπλής μετάλλαξης ανθεκτικότητας και προς τα τρία φάρμακα ήταν μόλις μία στα δέκα εκατομμύρια.

Ο διαφορικός λογισμός που οδήγησε στην τριπλή συνδυαστική θεραπευτική αγωγή του AIDS δεν θεράπευσε από τον HIV. Μετέτρεψε όμως έναν θανατηφόρο ιό σε μια χρόνια διαχειρίσιμη ασθένεια, τουλάχιστον για όσους έχουν πρόσβαση σε αυτήν τη θεραπεία...»

2^{o} θέμα. Ερευνητές χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα για βελτιστοποίηση της παραγωγής ελαιόλαδου. (Του Rosa Gonzalez-Lamas, σε μετάφραση του συνεργάτη μας Στέλιου Μπρούζου)

προλεγόμενα συγκεκριμένα , μια ομάδα ερευνητών από το Ισπανικό Πανεπιστήμιο της Jaén έχει αναπτύξει νέα μαθηματικά μοντέλα που μπορούν να βοηθήσουν στην πρόβλεψη της ποιότητας του εξαιρετικά παρθένου ελαιόλαδου και στη βελτιστοποίηση της παραγωγής του. Οι ερευνητές ανέπτυξαν αυτά τα μοντέλα με τη μέθοδο της επιφάνειας απόκρισης ***(RSM)***, η οποία διερευνά τη σχέση μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών που εμπλέκονται στην παραγωγική διαδικασία και χρησιμοποιείται συχνά για τη μεγιστοποίηση της απόδοσης συγκεκριμένης ουσίας.

« Η RSM μας επιτρέπει να λάβουμε πληροφορίες που χάνουμε όταν χρησιμοποιούμε κλασσική μεθοδολογία", δήλωσε στην εφημερίδα Olive Oil Times ο Francisco Espínola Lozano, καθηγητής στο

Πανεπιστήμιο της Jaén και επικεφαλής ερευνητής στη μελέτη. "Το πλεονέκτημά της είναι ότι μπορεί κανείς να μελετήσει τη συνδυασμένη συμπεριφορά διαφόρων μεταβλητών παραγόντων, μετρώντας την επίδραση του καθενός και την αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ όλων».

Ο καθηγητής δήλωσε ότι η μελέτη διερεύνησε για πρώτη φορά μια συνδυασμένη έρευνα τεσσάρων τεχνολογικών παραγόντων: το μέγεθος του κόσκινου και των σφυριών του μύλου που αλέθει τις ελιές, το χρόνο και τη θερμοκρασία κατά την οποία η πάστα ελιάς είναι μαλακή. και τις δόσεις του τεχνολογικού ανοσοενισχυτικού που χρησιμοποιείται για τη βελτίωση της απόδοσης της ελιάς.

"Πούδρα και πηλός της caolitica έχουν ήδη εγκριθεί ως τεχνολογικά βοηθητικά, αλλά χρησιμοποιήσαμε ανθρακικό ασβέστιο και είχε καλύτερα αποτελέσματα", δήλωσε. "Αυτό αντιπροσωπεύει μια πολλά υποσχόμενη ερευνητική γραμμή".

Σύμφωνα με τον καθηγητή, η χρήση διαφορετικών μαθηματικών μοντέλων κατά τη διάρκεια της έρευνας επέτρεψε στους ερευνητές να ανακαλύψουν τη σχέση μεταξύ αυτών των τεχνολογικών και γεωπονικών παραγόντων. Για το λόγο αυτό, τα μοντέλα μπορούν να καθορίσουν τις επιπτώσεις που θα έχει η ποικιλία της ελιάς, ο βαθμός ωριμότητας, το είδος καλλιέργειας (παραδοσιακό, εντατικό, υπερβολικά εντατικό) και η χρήση ή η έλλειψη άρδευσης στη διαδικασία παραγωγής του ελαίου.

Με την εφαρμογή της RSM σε ένα προσχεδιασμένο στατιστικό πείραμα, οι ερευνητές ανέπτυξαν επίσης μοντέλα που μπορούν να προβλέψουν την επίδραση της διακύμανσης ορισμένων τεχνολογικών παραμέτρων στο έλαιο. Ένα παράδειγμα αυτού είναι η ικανότητα του μοντέλου να αυξάνει ή να μειώνει ορισμένες φαινολικές ενώσεις με αντιοξειδωτικές και αντιφλεγμονώδεις ιδιότητες, όπως η oleocanthal (τύπος φυσικής φαινολικής ένωσης που βρίσκεται σε εξαιρετικά παρθένο ελαιόλαδο . Φαίνεται ότι είναι υπεύθυνη για την αίσθηση καψίματος στο λαιμό όταν καταναλώνεται ένα τέτοιο έλαιο), επιτρέποντας τη δημιουργία προϊόντων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και διακυμάνσεις, τόσο όσον αφορά την γεύση όσο και τις ιδιότητες υγείας.

"Εκτός από τις αποδόσεις, μελετήσαμε τις ρυθμιζόμενες παραμέτρους ποιότητας και το περιεχόμενο των φαινολικών ενώσεων (φυσικά αντιοξειδωτικά) και των πτητικών περιεχομένων που είναι υπεύθυνα για τα αρώματα, αξιολογώντας περισσότερες από 30 απαντήσεις", δήλωσε ο καθηγητής ,και πρόσθεσε ότι τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται εξαρτώνται από το γνώρισμα του ελαίου που θέλουν να βελτιώσουν οι ερευνητές.

Αυτά τα νέα μοντέλα όχι μόνο βοηθούν στην πρόβλεψη της ποιότητας των ελαιόλαδων αλλά και διευκολύνουν την αυτοματοποίηση της παραγωγής ελαιόλαδου στα ελαιοτριβεία. Δεν απαιτείται συγκεκριμένη τεχνολογική προσαρμογή, μόνο η εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων προσαρμοσμένων στη ποικιλία ελιών που έχουν υποστεί επεξεργασία στο μύλο. Σε περίπτωση που ένας παραγωγός αποφασίσει να διαχειριστεί την παραγωγή του με συστηματικό και αυτοματοποιημένο τρόπο, τα μαθηματικά μοντέλα μπορούν να συμπεριληφθούν στο λογισμικό που χρησιμοποιείται.

[**πηγή:** *By Rosa Gonzalez-Lamas (on January 9, 2019)* **-** *«Researchers Use Mathematical Models to optimize Olive Oil Production»]*

3^ο^ θέμα. Frege: η έννοια της ισότητας - οι συναρτήσεις

προλεγόμενα ο συνάδελφος Χάρης Τσουλουχάς υπηρετεί με απόσπαση στο ελληνικό Σχολείο της Φρανκφούρτης. Με μια ολόκληρη σειρά σημειωμάτων, που μας έστειλε, καλύπτει πολλές πλευρές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Δυστυχώς, είναι αδύνατο (λόγω τραγικής έλλειψης χώρου), να δημοσιεύσουμε, πέραν του ενός, σημειώματα.

«Ο Gottlob Frege (1848-1925) έζησε σε μια εποχή η οποία συνδέεται με σημαντικές αναζητήσεις στα πεδία των μαθηματικών, της φυσικής, της φιλοσοφίας και της κοινωνίας. Οι φιλοσοφικές αναζητήσεις του σχετίζονται με την εγκυρότητα της μαθηματικής γνώσης, την καθαρότητα και σαφήνεια των μαθηματικών εννοιών, εκφρασμένων σε μια ιδεώδη επιστημονική γλώσσα, στην οποία οι σημασίες των λέξεων είναι μονοσήμαντες, όπως και οι συνδέσεις μεταξύ των συμβόλων μιας τέτοιας γλώσσας, σχέδιο που είχε ήδη συλλάβει ο Leibniz.

Σχεδιάζοντας, λοιπόν, ο Frege την λειτουργία μιας λογικά τέλειας και χωρίς αμφισημίες γλώσσας, διατυπώνει την σχέση σημείου-σημασίας-αναφοράς και της διασύνδεσής τους με την έννοια της πρότασης. Σε αυτό το πλαίσιο ερευνάται η σχέση της ισότητας "a=b". Σε αυτή την ισότητα τα a και b συμπίπτουν. Συμπίπτουν δηλαδή τα σημεία (ονόματα/σύμβολα) που αναφέρονται στα αντικείμενα και όχι τα ίδια τα αντικείμενα. Προτάσεις της μορφής "a=b" μπορεί να περιέχουν συχνά αξιόλογες επεκτάσεις γνώσης όταν υπάρχει διαφορά στον τρόπο (σημασία/Sinn) με τον οποίο τα σημεία a και b αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο, αυτό δηλαδή που ο Frege ονομάζει αναφορά (Bedeutung) των σημείων. Αν η ισότητα ήταν απλά μια σχέση αναφορών τότε η "a=b" δεν θα διέφερε από την "a=a", αν όμως πρόκειται για διαφορά στον τρόπο εμφάνισης των σημείων, λέει ο Frege, τότε η ισότητα περιέχει πραγματική γνώση. Αν λ.χ. a="Έσπερος", b="Αυγερινός", η "a=b" αναφέρεται στο ίδιο ουράνιο σώμα (προϊόν αστρονομικής ανακάλυψης). Η αναφορά των λέξεων (σημείων) "Έσπερος" και "Αυγερινός" είναι η ίδια, όχι όμως και η σημασία των σημείων.

Αν το σημείο a της ισότητας "a=b" αντικατασταθεί με την ακολουθία σημείων 2.2^3+2 και το b με το σημείο 18, προκύπτει η ισότητα$2.2^3+2=18$, δηλαδή τα σύμβολα και των δύο μελών της ισότητας έχουν την ίδια αναφορά, όπως την ίδια αναφορά έχουν και τα σύμβολα 3.6 και 22-4. Τα διαφορετικά σημεία, οι εκφράσεις 3.6 και 22-4, αντιπροσωπεύουν διαφορετικές θεωρήσεις, διαφορετικούς τρόπους παρουσίασης του ίδιου αριθμητικού συμβόλου, του 18, όπως και ο "Έσπερος" και ο "Αυγερινός" εκφράζουν διαφορετικές θεωρήσεις του ίδιου αντικειμένου, εφόσον ο "Αυγερινός" (Morgenstern) αναφέρεται στην πρωινή και ο "Έσπερος" (Abendstern) στην βραδινή εμφάνιση του πλανήτη "Αφροδίτη".

Ο Frege εναντιώνεται στην τρέχουσα άποψη της εποχής του, ότι συνάρτηση είναι ένας τύπος που περιέχει το γράμμα "x" χωρίς να γίνεται διάκριση μεταξύ μορφής και περιεχομένου, μεταξύ σημείου και σημαινόμενου, γιατί τότε θα ήταν η έκφραση $2.x^3+x$ μια συνάρτηση του x και η έκφραση 2.2^3+2 μια συνάρτηση του 2. Η ουσία της συνάρτησης βρίσκεται κατά τον Frege σε αυτό που θα μπορούσε να γραφεί έτσι: $2.()^3+()$, που αποτελεί το κοινό στοιχείο των εκφράσεων λ.χ. "2.1^3+1","2.2^3+2", "2.4^3+4" οι οποίες αναφέρονται αντίστοιχα στους αριθμούς 3,18,132. Στην έκφραση $2.x^3+x$ το "x" ονομάζεται όρισμα της συνάρτησης (Argument), δεν ανήκει στην συνάρτηση και συμπληρώνει την έκφραση $2.()^3+()$, η οποία από μόνη της είναι μη πλήρης (unvollständig) και ονομάζεται ακόρεστη (ungesättigt) ή χρήζουσα συμπληρώματος (ergänzungsbedürftig). Αυτό με το οποίο η συνάρτηση συμπληρώνεται μέσω του ορίσματός της ονομάζεται τιμή της συνάρτησης για το συγκεκριμένο όρισμα. Οι αριθμητικές τιμές της συνάρτησης ορίζουν το πεδίο τιμών της (Wertverlauf). Σε μια συνάρτηση f(x) το x αντιπροσωπεύει το όρισμα ενώ το f(x) δηλώνει ότι ο εσωτερικός χώρος της παρένθεσης είναι χώρος για την υποδοχή του συμβόλου του ορίσματος.

Η σελίδα 149 του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου θα μπορούσε να διαβαστεί και υπό το φως των παραπάνω αναζητήσεων. Εκεί διαβάζουμε ότι η συνάρτηση f(x)=x2-4x+7 θα μπορούσε να έχει την μορφή f(-2)=(-2)2-4(-2)+7 και ότι για να υπολογίσουμε το f(-2) τοποθετούμε το -2 στις θέσεις που ορίζουν οι παρενθέσεις:

f(-2)=(-2)2-4(-2)+7=4+8+7=19.

Όμοια f(3x)=(3x)2-4(3x)+7=9x2-12x+7».

V. ειδήσεις – ειδησούλες

1η. Ένα σπουδαίο βιβλίο. *Το 2018, η συμπλήρωση εκατό χρόνων συνεχούς και αδιάλειπτης λειτουργίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, ήταν η αφορμή για έναν "απολογισμό" του έργου της ΕΜΕ, επιστημονικού, εκπαιδευτικού και κοινωνικού. Το Διοικητικό Συμβούλιο της Εταιρείας αποφάσισε να υλοποιήσει ένα φιλόδοξο στόχο: την παρουσίαση της ιστορίας του επιστημονικού μας σωματείου, χρησιμοποιώντας σαν πηγές όλα τα αρχεία της Εταιρείας, δίνοντας βέβαια μεγαλύτερη έμφαση στα τελευταία 30 χρόνια.*

Ανατέθηκε, λοιπόν σε τριμελή ομάδα, αποτελούμενη από τους Αγγελική Χρονοπούλου (επιστημονική υπεύθυνη), Θανάση Μαλαφέκα και Μαρία Γεωργούδη με τη συνεργασία του Γενικού Γραμματέα του ΔΣ Γιάννη Τυρλή το έργο αυτό, η ανασύσταση της μεγάλης εικόνας της ιστορίας της ΕΜΈ την πρόσφατη 30ετία 1988-2018 με προβολές στην 100ετία και μεθοδολογική επιλογή της ομάδας ήταν να αναδείξει «τα επιτεύγματα και τις επιπτώσεις τους, όπως αυτά αναδεικνύονται από τα θεσμικής έγγραφα και την ανάλυσή μας».

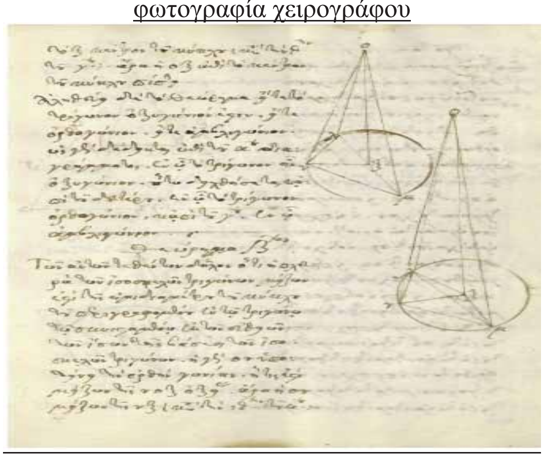
Όπως σημειώνουν οι συγγραφείς στον πρόλογό τους «Το βιβλίο αυτό όμως επιχειρεί να υπερβεί τον συγκυριακό χαρακτήρα, ενδογενή άλλωστε στις επετειακές επικαιρότητες, και στοχεύει να καταστεί ο κύριος μοχλός που θα καταστήσει διαχρονικά επίκαιρη την ΕΜΈ όχι μόνο στα όρια της επιστημονικής μαθηματικής κοινότητας αλλά και στην ευρύτερη ελληνική κοινωνία.

Με αυτό το βιβλίο επιδιώκουμε να γνωρίσουν την ΕΜΈ οι νέοι συνάδελφοι που δεν την γνώρισαν μέχρι τώρα αλλά και οι παλαιότεροι συνάδελφοι ανεξάρτητα από τις καταβολές τους και τη θετική ή αρνητική εικόνα που έχουν διαμορφώσει για τη λειτουργία της.

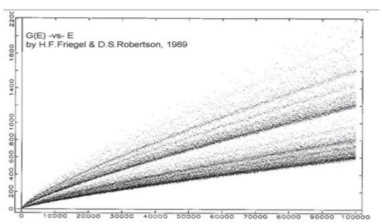
Αυτή η ΕΜΕ είναι η δική μας ΕΜΕ και όλοι μαζί ΔΣ, Εξελεγκτική Επιτροπή και μέλη, όλοι μαζί θα την διασφαλίσουμε και θα την εξελίξουμε. Διαβάζοντας τα μέλη της ΕΜΕ το βιβλίο μας "Η ιστορία της ΕΜΕ την *πρόσφατη 30ετία (1988-2018) με προβολές στην 100ετία"αισιοδοξούμε πως θα γνωρίσουν μια ΕΜΕ όπως την επιθυμούν, ξεπερνώντας τις προσωπικές αντιλήψεις που έχουμε συνδιαμορφώσει ο ένας για τον άλλο και κατανοώντας πως η ΕΜΕ είναι το κοινό μας σπίτι και αξιοποιώντας το γεγονός πως το βιβλίο μάς εφοδιάζει με τα κατάλληλα "εργαλεία" για να συνδιαμορφώσουμε με τη δράση μας την ΕΜΕ, όπως ακριβώς την έχει ονειρευτεί ο καθένας και η καθεμία από μας».*

2η. Μεγάλη απώλεια. Έφυγε σε ηλικία 89 ετών, ο νομπελίστας Αμερικανός φυσικός και «πατέρας» των κουάρκς Μάρεϊ Γκελ-Μαν, ένας από τους μεγάλους επιστήμονες του 20ού αιώνα, ο οποίος είχε τιμηθεί με το Νόμπελ Φυσικής του 1969 για τη σημαντική συμβολή του στη θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων**.** Ο θάνατος του επήλθε στο σπίτι του στη Σάντα Φε του Νέου Μεξικού, όπου ήταν συνιδρυτής και διακεκριμένος καθηγητής του Ινστιτούτου της πόλης. Υπήρξε επίσης ομότιμος καθηγητής Θεωρητικής Φυσικής στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Καλιφόρνια (Caltech) και είχε εργαστεί για αρκετά χρόνια στο CERN. Ο Γκελ-Μαν ήταν αυτός που πρότεινε ότι τα πρωτόνια και τα νετρόνια δεν αποτελούν τους στοιχειώδεις δομικούς λίθους της ύλης, αλλά αποτελούνται από άλλα μικρότερα θεμελιώδη σωματίδια, τα οποία ονόμασε κουάρκ. Η ονομασία αυτή προέρχεται από την πρόταση «Three quarks for Muster Mark» στο μυθιστόρημα Finnegans Wake του Ιρλανδού Τζέιμς Τζόις. Αρκετά αργότερα αποδείχθηκε και πειραματικά η ύπαρξη των κουάρκ.

3η. Δυστυχώς δεν προλαβαίνετε... Όπως μας πληροφορεί ο συνάδελφος Ανδρέας Χατζηπολάκης (σημαντικός μαθηματικός κι ερευνητής), στις 27 Ιούνη 2019 πραγματοποιήθηκε Δημοπρασία, για την πώληση «***Χειρόγραφης Ἀριθμητικής και Γεωμετρίας***», του έτους 1796 (!!).

<u>φωτογραφία χειρογράφου</u>	<u>σπέρματα περιεχομένων</u>
	*χειρόγραφο σε χαρτί, 22-23 στίχοι ανά σελίδα, (228x167 mm.), …………* ▪ «...Αριθμητική έστιν επιστήμη, των αριθμών τους λόγους και τα ιδιώματα θεωρούσα, και πως δει τούτοις χρήσθαι διδάσκουσα…...» ▪ «…Σημείον έστιν ου μέρος ουδέν ...», ▪ «…γραμμή δε, εισροή σημείου...» ▪ «…Περί της επιπέδου τριγωνομετρίας βιβλίον εν ...» ▪ «…Τέλος της Γεωγραφίας και των του Αρχιμήδους θεωρημάτων...» ▪ «...προστεθήτω δε τη τριγωνομετρία τα θεωρήματα ταύτα , αναγκαία όντα δια την φυσικήν...» *Τιμή εκκίνησης: € 3.000-4.000*

4η. Από δημοσιεύματα της εποχής (για τον προπάτορα των σημερινών Υπολογιστών): Στις 15 Ιούνη 1960, *ο Βέρνερ φον Μπράουν* ανακοινώνει ότι η IBM παρέδωσε στον αμερικανικό στρατό «πανίσχυρο» (!!...) ηλεκτρονικό υπολογιστή «***μεγέθους μικράς οικίας***» (!!...). Υπενθυμίζουμε ότι Βέρνερ φον Μπράουν ήταν ο «πατέρας» του διαστημικού προγράμματος των ΗΠΑ.



VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;"

Αν τοποθετήσουμε στον οριζόντιο άξονα συντεταγμένων τους άρτιους ακεραίους και στον κατακόρυφο άξονα τους δυνατούς τρόπους που μπορεί να γραφεί ο καθένας τους ως άθροισμα δυο πρώτων, προκύπτει η χαρακτηριστική εικόνα ουράς κομήτη, όπως μπορείτε να δείτε στο διπλανό γράφημα.(http://unprime6.blogspot.gr/2013/02/goldbach-conjecture.html) [**πηγή**: από το σημείωμα του Θανάση Δρούγα με τίτλο «Η εικασία του Γκόλντμπαχ, ένα θρυλικό πρόβλημα»**]**

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις Άλγεβρας

Λέων Κουτσούρης

A_1. Να απλοποιηθεί παράσταση Α αν $x \in [1,3]$

$$\mathbf{A=\sqrt{4x^2-28x+49}-\sqrt[4]{81x^4-108x^3+54x^2-12x+1}}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι:

$4x^2-28x+49=(2x-7)^2$ και

$81x^4-108x^3+54x^2-12x+1=$

$=(9x^2)^2+36x^2+1-108x^3+18x^2-12x=$

$=(9x^2)^2+(6x)^2+1^2-2\cdot 9x^2\cdot 6x+2\cdot 9x\cdot 1-2\cdot 6x\cdot 1=$

$=(9x^2-6x+1)^2=\left[(3x-1)^2\right]^2=(3x-1)^4$

Τότε, $A=\sqrt{(2x-7)^2}-\sqrt[4]{(3x-1)^4}$

$A=|2x-7|-|3x-1|$.

Δίνεται x∈[1,3] δηλαδή 1≤x≤3

Τότε 3x≥3 και 2x≤6

3x–1≥3–1 και 2x–7≤–1

3x–1≥2 1 και 2x–7≤–1

Άρα 3x–1>0 άρα 2x–7≤0

Άρα A=7–2x–3x+1 οπότε: A=8–5x

A_2. Βρείτε το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας ρ όπου ρ θετικός ακέραιος και ισχύουν:

1<2d (ρ,4)<5 και |ρ–1|≤|ρ–3|

Λύση: 1<2d(ρ,4)<5 ⇔1<2|ρ–4|<5 ⇔

$\frac{1}{2}<|\rho-4|<\frac{5}{2} \Leftrightarrow |\rho-4|>\frac{1}{2}$ και $|\rho-4|<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$(\rho-4<-\frac{1}{2}$ ή $\rho-4>\frac{1}{2})$ και $-\frac{5}{2}<\rho-4<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$(\rho<\frac{7}{2}$ ή $\rho>\frac{9}{2})$ και $\frac{3}{2}<\rho<\frac{13}{2}$ Με $\rho \in Z_+^*$ θα είναι

ρ=2 ή ρ=3 ή ρ=5 ή ρ=6

Επίσης $|\rho-1|\le|\rho-3| \Leftrightarrow (\rho-1)^2\le(\rho-3)^2$

$\Leftrightarrow \rho^2-2\rho+1\le\rho^2-6\rho+9 \Leftrightarrow 4\rho\le 8 \Leftrightarrow \rho\le 2$. Άρα ισχύει $\rho=2$. Οπότε $E=\pi\cdot\rho^2=4\pi$ τ.μ.

A_3. Να δειχθεί ότι η παράσταση $A=2^{6\nu+2}-2^{4\nu+2}+2^{2\nu+1}-2$ διαιρείται με το 3 για κάθε ν∈N. Δίνεται ότι ισχύει: $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\nu-1}+\beta\cdot\alpha^{\nu-2}+\ldots+\beta^{\nu-2}\cdot\alpha+\beta^{\nu-1}\right)$

Λύση

Με ν=0 ισχύει αφού $A=2^2-2^2+2-2=0$ που διαιρείται με το 3. Με $\nu\neq 0$ έχουμε:

$A=2^{4\nu+2}\left(2^{2\nu}-1\right)+2\left(2^{2\nu}-1\right)$

$A=\left(2^{2\nu}-1\right)\left(2^{4\nu+2}+2\right)$

$A=\left(4^\nu-1\right)\left(2^{4\nu+2}+2\right)$ για $\nu\neq 0$

$A=(4-1)\left(4^{\nu-1}+4^{\nu-2}+\ldots+4+1\right)\left(2^{4\nu+2}+2\right)$

$A=3\kappa$, με $\kappa\in\mathbb{N}$, δηλαδή πολλαπλάσιο του 3.

Άρα σε κάθε περίπτωση το Α διαιρείται με 3.

A_4. Δίνεται $A=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{19}{4}-2\sqrt{3}}$

Να δειχτεί ότι ισχύει i) $A=\sqrt{3}-\frac{5}{2}$

ii) Να δειχθεί ότι: $\dfrac{5\sqrt{3}-\frac{37}{4}}{|A|}-A=0$

Λύση: i) Παρατηρούμε ότι: $1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2$$

και $\frac{19}{4}-2\sqrt{3}=4+\frac{3}{4}-2\sqrt{3}=$

$$2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{οπότε}$$

$$A=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ άρα } A=\sqrt{3}-\frac{5}{2}.$$

ii) Θέλουμε: $\dfrac{5\sqrt{3}-\frac{37}{4}}{|A|}-A=0$ πράγματι

$$\frac{5\sqrt{3}-\frac{37}{4}}{\left|\sqrt{3}-\frac{5}{2}\right|}-\sqrt{3}+\frac{5}{2}=0$$

$$\frac{5\sqrt{3}-\frac{37}{4}}{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}+\frac{\left(-\sqrt{3}+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\sqrt{3}\right)}{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}=0$$

$$\frac{5\sqrt{3}-\frac{37}{4}}{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}+\frac{\left(\frac{5}{2}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}-\sqrt{3}\right)}=0$$

$$\frac{5\sqrt{3}-\frac{37}{4}+\frac{25}{4}-5\sqrt{3}+3}{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}=0$$

$$\frac{0}{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}=0$$

$0=0$

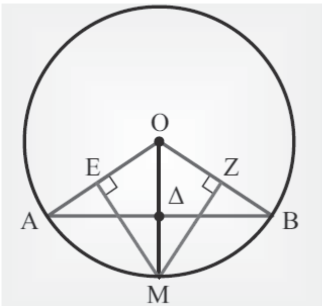
Τάξη: Α΄

Ισότητες και ανισότητες σε κύκλους και τρίγωνα

Κωνσταντίνος Παναγιώτου – Παράρτημα **ΕΜΕ Λάρισας**

1. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ισαπέχει από τις ακτίνες που αντιστοιχούν στα άκρα του τόξου και μάλιστα απόσταση ίση με το μισό της αντίστοιχης χορδής.

Λύση: Φέρουμε $ME \perp OA$ και $MZ \perp OB$. Θα δείξουμε ότι $ME = MZ = \frac{AB}{2}$.



Επειδή σε ίσα τόξα του του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες είναι $A\hat{O}M = B\hat{O}M$, αφού $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΕΜ και ΟΖΜ είναι ίσα διότι έχουν:

1) ΟΜ=ΟΜ (κοινή πλευρά)
2) $E\hat{O}M = Z\hat{O}M$ ($A\hat{O}M = B\hat{O}M$)

Επομένως είναι ΕΜ=ΖΜ (1) ως πλευρές ίσων τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{O}M$ και $Z\hat{O}M$

Έστω Δ το σημείο τομής των ΟΜ και ΑΒ. Επειδή το Μ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι $OM \perp AB$ και το Δ είναι μέσο του ΑΒ και είναι $A\Delta = \frac{AB}{2}$ (2). Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΔΑ και ΟΕΜ είναι ίσα διότι έχουν

1) ΟΑ=ΟΜ(ως ακτίνες του κύκλου)
2) $A\hat{O}\Delta = M\hat{O}E$ (κοινή γωνία)

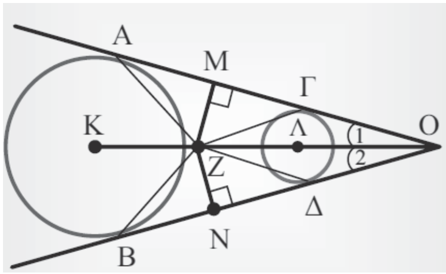
Επομένως είναι $ME = A\Delta$ (3) ως πλευρές ίσων τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{O}\Delta$ και $M\hat{O}E$.

Από (1), (2) και (3) παίρνουμε $ME = MZ = \frac{AB}{2}$

2. Έστω δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) με R>ρ που βρίσκονται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου. Φέρουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων. Να δείξετε ότι α) οι εξωτερικές εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο της διακέντρου και β) οι μεσοκάθετοι των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων τμημάτων τέμνονται σε σημείο της διακέντρου

Λύση

α) Στον κύκλο (Κ,R) η ευθεία ΟΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$.



Το ίδιο και στο κύκλο (Λ, ρ) η ευθεία ΟΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$. Όμως η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$ είναι μοναδική. Άρα οι ευθείες ΟΚ και ΟΛ ταυτίζονται. Επομένως το σημείο Ο βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο ΚΛ.

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της διακέντρου ΚΛ και της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΓ, τότε ΖΑ=ΖΓ (1). Θα δείξουμε ότι το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ ,δηλαδή ΖΒ=ΖΔ.

Τα τρίγωνα ΖΟΓ και ΖΟΔ είναι ίσα διότι:

1) ΟΖ=ΟΖ (κοινή πλευρά)
2) ΟΓ=ΟΔ (εφαπτόμενα τμήματα)
3) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ΟΖ διχοτόμος της $\hat{O}$)

Επομένως είναι ΖΓ=ΖΔ (2) ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων

Τα τρίγωνα ΖΟΑ και ΖΟΒ είναι ίσα διότι:

1) ΟΖ=ΟΖ (κοινή πλευρά)
2) ΟΑ=ΟΒ (εφαπτόμενα τμήματα)
3) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ΟΖ διχοτόμος της $\hat{O}$)

Επομένως ΖΑ=ΖΒ (3) ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων

Από (1) ,(2) και (3) προκύπτει ότι ΖΒ=ΖΔ και το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) φέρουμε το ύψος ΑΗ και τις διχοτόμους ΑΔ και ΓΕ των γωνιών $B\hat{A}H$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα. Αν το σημείο τομής των ΑΔ και ΓΕ είναι το Ρ, να δείξετε ότι:

α) $ΑΔ \perp ΓΕ$ και β) ΑΡ=ΡΔ

Λύση

α) Είναι $\hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{B\hat{A}H}{2}$ και $\hat{Γ}_1=\hat{Γ}_2=\frac{\hat{Γ}}{2}$.

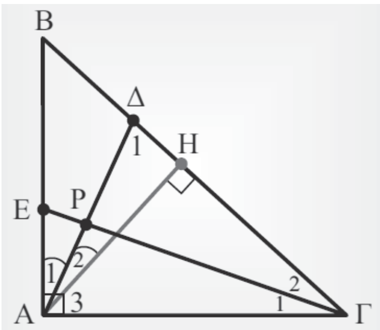
Όμως $B\hat{A}H=\hat{Γ}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$.

Επομένως $\hat{Γ}_1=\hat{A}_1$.

Στο τρίγωνο ΡΑΓ έχουμε :

$P\hat{A}Γ+Γ\hat{A}P=\hat{A}_2+\hat{A}_3+\hat{Γ}_1=\hat{A}_2+\hat{A}_3+\hat{A}_1=90°$.

Επομένως $A\hat{P}Γ=180°-P\hat{A}Γ-Γ\hat{A}P=90°$, δηλαδή $ΑΔ \perp ΓΕ$.

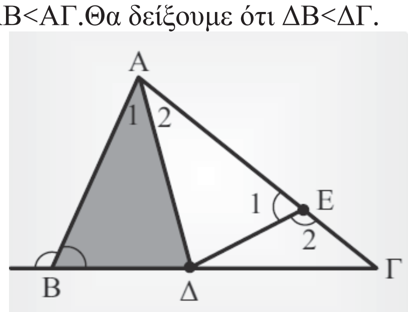


β) Στο τρίγωνο ΓΑΔ είναι ΓΡ διχοτόμος και υψος, οπότε το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ισοσκελές με κορυφή Γ. Επομένως η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$ είναι και διάμεσος του τριγώνου. Άρα ΑΡ=ΡΔ

4. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος ΑΔ χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε τμήματα ομοίως άνισα με τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου.

Λύση

Έστω ΑΒ<ΑΓ.Θα δείξουμε ότι ΔΒ<ΔΓ.



Στην ΑΕ παίρνουμε τμήμα ΑΕ=ΑΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΕ είναι ίσα, διότι έχουν:

1. ΑΒ=ΑΕ (από κατασκευή)
2. ΑΔ=ΑΔ (κοινή πλευρά)
3. $B\hat{A}Δ=E\hat{A}Δ$ (ΑΔ διχοτόμος)

Επομένως ΔΒ=ΔΕ (1) ως πλευρές ίσων τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\left(B\hat{A}Δ=E\hat{A}Δ\right)$ και $\hat{B}=\hat{E}_1$ ως γωνίες ίσων τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές (ΑΔ=ΑΔ). Άρα $\hat{B}_{εξ}=\hat{E}_2$ (παραπληρώματα ίσων γωνιών). Όμως $\hat{B}_{εξ}>\hat{Γ}$, οπότε είναι $\hat{E}_2>Γ$ και έτσι στο τρίγωνο ΕΔΓ έχουμε την ίδια σχέση για τις απέναντι πλευρές, δηλαδή ΔΓ>ΔΕ (2).Από (1) και (2) έχουμε ΔΓ>ΔΒ ή ΔΒ<ΔΓ

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Να δείξετε ότι $τ-α<AK<τ$ [όπου $τ=\frac{α+β+γ}{2}$, $α=BΓ$, $β=AΓ$, $γ=AB$].

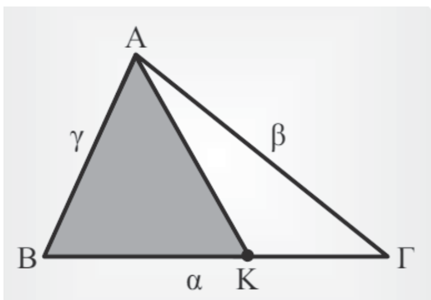
Λύση

Από τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ έχουμε

$AB<BK+KA$ και $AΓ<ΓK+AK$.

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε διαδοχικά

$$AB+AΓ<BK+KΓ+2KA$$
$$γ+β<α+2AK$$
$$γ+β-α<2AK$$
$$2τ-α-α<2AK$$
$$2τ-2α<2AK$$
$$τ-α<AK \quad (1)$$



Επίσης είναι $AK<AB+BK$ και $AK<AΓ+KΓ$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε διαδοχικά

$2AK<AB+AΓ+BK+KΓ$ δηλαδή

$2AK<γ+β+α$, δηλαδή $2AK<2τ$, άρα $AK<τ$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $τ-α<AK<τ$.

Τάξη: Β΄

Επιλεγμένες Ασκήσεις Άλγεβρας

Μαρία Σίσκου – Γεώργιος Τσαβαρής – Χρήστος Π. Τσιφάκης

1η. Στο 2ο Λύκειο Κερατσινίου φοιτούν 300 μαθητές και η μέση βαθμολογία τους στα Μαθηματικά το Α' Τετράμηνο είναι 15. Στο Β' Τετράμηνο ένας ορισμένος αριθμός μαθητών αύξησε την βαθμολογία του κατά 4 μονάδες ο καθένας, ενώ οι υπόλοιποι μείωσαν τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες ο κάθε μαθητής. Να βρείτε πόσοι μαθητές βελτίωσαν τη βαθμολογία τους και πόσοι την χειροτέρευσαν, αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία στο Β' Τετράμηνο έγινε 17.

Λύση:

Η μέση βαθμολογία του Α΄τετραμήνου είναι:

$$15=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{300}}{300}\Leftrightarrow$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_{300}=15\cdot 300=4500.$$

Έστω ότι κατά το Β΄τετράμηνο κ μαθητές αύξησαν την βαθμολογία τους κατά 4 μονάδες και οι υπόλοιποι $300-\kappa$ την μείωσαν κατά 2 μονάδες ο καθένας. Έτσι έχουμε:

$$17=\frac{(x_1+4)+\ldots+(x_\kappa+4)+(x_{\kappa+1}-2)+\ldots+(x_{300}-2)}{300}\Leftrightarrow$$

$$5100=(x_1+\ldots+x_{300})+4\kappa+(300-\kappa)\cdot 2\Leftrightarrow$$

$$5100=4500+4\kappa+(300-\kappa)\cdot 2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\kappa=200$$

Άρα 200 μαθητές αύξησαν την βαθμολογία τους κατά 4 μονάδες και οι υπόλοιποι 100 την μείωσαν κατά 2 στο Β΄ τετράμηνο.

2η. Έστω $x_1,x_2,\ldots,x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις: $7,5,\alpha,2,5,\beta,8,6,\gamma,5,3$, όπου α,β,γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha<\beta<\gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x}=6$, $\delta=6$ και $R=8$ αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α,β,γ έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=217$.

β. Για τις τιμές των α,β,γ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $s_x=\sqrt{\frac{58}{11}}$ και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Έστω $y_1,y_2,\ldots,y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1,x_2,\ldots,x_{11}$ επί μια σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2. Αν $\bar{y}=9$ και $s_\psi=2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2. (Θέμα Επαναληπτικών Εξετάσεων Γ΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας 2007)

Λύση:

α. Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 11 και η διάμεσος είναι $\delta=6$ θα πρέπει να υπάρχουν 5 παρατηρήσεις με μικρότερη τιμή του 6 και άλλες 5 με μεγαλύτερη τιμή. Αν τοποθετήσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά

$2,3,5,5,5,\overset{\delta}{6},7,8,\alpha,\beta,\gamma$ παρατηρούμε ότι υπάρχουν 5 παρατηρήσεις με μικρότερη τιμή.

Άρα οι αριθμοί α,β,γ θα είναι μεγαλύτεροι του 6. Αφού το εύρος $R=8$ πρέπει η μεγαλύτερη παρατήρηση να είναι το 10. Άρα $\gamma=10$. Έτσι θα έχουμε $\alpha^2+\beta^2=117=36+81$, οπότε $\alpha=6$ και $\beta=9$. Συνεπώς οι παρατηρήσεις είναι $2,3,5,5,5,6,6,7,8,9,10$.

β. Η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι:

$$s_x{}^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_{11}-\bar{x})^2}{11}=$$

$$\frac{(-4)^2+(-3)^2+3(-1)^2+2\cdot 0+1^2+2^2+3^2+4^2}{11}=\frac{58}{11}$$

Άρα $s_x=\sqrt{\frac{58}{11}}>0{,}1$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

γ. Έχουμε ότι $y_i=c_1\cdot x_i+c_2$. Άρα

$\bar{y}=c_1\cdot\bar{x}+c_2\Leftrightarrow\ 6\cdot c_1+c_2=9$ και

$s_y=|c_1|\cdot s_x\Leftrightarrow|c_1|=2\Leftrightarrow c_1=\pm 2$.

Για $c_1=2$ προκύπτει $c_2=-3$

Για $c_1=-2$ προκύπτει $c_2=21$.

3η. Αν σ' ένα δείγμα μεγέθους ν για τις μεταβλητές X,Y,Z ισχύουν $Z=2X-14$, $Y=1-X$ και οι μεταβλητές Y και Z έχουν τον ίδιο συντελεστή μεταβλητότητας (δηλαδή $CV_z=CV_y$), να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$.

Λύση:

Ισχύουν οι σχέσεις: $\bar{y}=1-\bar{x}$, $\bar{z}=2\bar{x}-14$,

$S_y=|-1|\cdot S_x=S_x$, $S_z=|2|\cdot S_x=2S_x$

και με $\overline{z},\overline{y}\neq 0$ έχουμε

$$CV_z=CV_y \Leftrightarrow \frac{S_z}{|\overline{z}|}=\frac{S_y}{|\overline{y}|}\Leftrightarrow \frac{2S_x}{|2\overline{x}-14|}=\frac{S_x}{|1-\overline{x}|}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{|\overline{x}-7|}=\frac{1}{|1-\overline{x}|}\Leftrightarrow |\overline{x}-7|=|1-\overline{x}|\Leftrightarrow$$

$$(\overline{x}-7)^2=(1-\overline{x})^2\Leftrightarrow -14\overline{x}+49=-2\overline{x}+1\Leftrightarrow$$

$$12\overline{x}=48\Leftrightarrow \overline{x}=4.$$

4η.Δίνονται οι ευθείες

$(\varepsilon_1): x+(\lambda+2)y=3$, $(\varepsilon_2): (\lambda-2)x+5y=3$

με $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε την σχετική θέση των δύο ευθειών.

ii) Στην περίπτωση που οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο Μ, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

iii) Εάν το σημείο τομής τους Μ, ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): x+2y=3$, να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση:

i) Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος:

$$D=\begin{vmatrix}1 & \lambda+2\\ \lambda-2 & 5\end{vmatrix}=9-\lambda^2=(3-\lambda)(3+\lambda)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}3 & \lambda+2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=9-3\lambda=3(3-\lambda)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ \lambda-2 & 3\end{vmatrix}=9-3\lambda=3(3-\lambda)$$

- Αν $D\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq\pm 3$ τότε το σύστημα έχει μοναδική ρίζα, Άρα οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο.
- Αν $\lambda=-3$ το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix}x-y=3\\ x-y=-3\end{matrix}\right\}$ που είναι αδύνατο. Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες.
- Αν $\lambda=3$ το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix}x+5y=3\\ x+5y=3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x+5y=3$ που έχει άπειρες λύσεις, άρα οι ευθείες ταυτίζονται.

ii) Για $\lambda\neq\pm 3$ οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο με συντεταγμένες $x=\frac{D_x}{D}=\frac{3(3-\lambda)}{9-\lambda^2}=\frac{3}{3+\lambda}$ και $y=\frac{D_y}{D}=\frac{3(3-\lambda)}{9-\lambda^2}=\frac{3}{3+\lambda}$

Άρα το σημείο τομής είναι $M\left(\frac{3}{3+\lambda},\frac{3}{3+\lambda}\right)$, με $\lambda\neq\pm 3$.

iii) Αφού το $M\in(\varepsilon)$ τότε $\frac{3}{3+\lambda}+\frac{6}{3+\lambda}=3$ δηλαδή $\frac{3}{3+\lambda}=1$ άρα $\lambda=0$.

5η.Αν το σύστημα $\left\{\begin{matrix}x+y=\lambda\\ x+2y=\lambda+1\end{matrix}\right\}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ έχει μοναδική λύση την (x_0,y_0), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η παράσταση $K=x_0{}^2+y_0{}^2$ γίνεται ελάχιστη.

Λύση:

Το σύστημα ισοδύναμα γίνεται:

$$\left.\begin{matrix}x+y=\lambda\\ x+2y=\lambda+1\end{matrix}\right\}\overset{(E_2)-(E_1)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{matrix}x+y=\lambda\\ y=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=\lambda-1\\ y=1\end{matrix}\right\}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, την $(x_0,y_0)=(\lambda-1,1)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Έτσι η παράσταση K γίνεται:

$$K(\lambda)=(\lambda-1)^2+1\geq 1=K(1)$$

Άρα η παράσταση K γίνεται ελάχιστη για $\lambda=1$

6η.Να λυθεί στο $\mathbb{R}$, το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix}x+\sqrt{xy}+y=7\\ x^2+xy+y^2=21\end{matrix}\right\}$$

Λύση:

$$\left\{\begin{matrix}x+\sqrt{xy}+y=7\\ x^2+xy+y^2=21\end{matrix}\right\}\overset{xy>0}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{matrix}x+y=7-\sqrt{xy}\\ (x+y)^2-xy=21\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}x+y=7-\sqrt{xy}\\ \left(7-\sqrt{xy}\right)^2-xy=21\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+y=7-\sqrt{xy}\\ \sqrt{xy}=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}x+y=5\\ xy=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow (x,y)=\{(1,4),(4,1)\}.$$

7η.Να λυθεί στο $\mathbb{R}$, το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix}x^2+xy+y^2=7\\ 2x^2+5xy+y^2=16\end{matrix}\right\}.$$

Λύση:

Το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{matrix}x^2+xy+y^2=7\\ 2x^2+5xy+y^2=16\end{matrix}\right\}\underset{\cdot 7}{\overset{\cdot 16}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left\{\begin{matrix}16x^2+16xy+16y^2=16\cdot 7\\ 14x^2+35xy+7y^2=16\cdot 7\end{matrix}\right\}\overset{-}{\Leftrightarrow}$$

$$2x^2-19xy+9y^2=0 \overset{:y^2\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{y}=9 \text{ ή } \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

Έτσι έχουμε

$$(\Sigma_1):\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ \dfrac{x}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x=9y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2=\dfrac{1}{13} \\ x=9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ x=\pm\dfrac{9\sqrt{13}}{13} \end{cases}.$$

Άρα $(x,y)=\left(\frac{9\sqrt{13}}{13},\frac{\sqrt{13}}{13}\right),\left(-\frac{9\sqrt{13}}{13},-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$.

$$(\Sigma_2):\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2=1 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases},$$

οπότε $(x,y)=(1,2),(-1,-2)$.

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$$(x,y)=\left\{(1,2),(-1,-2),\left(\frac{9\sqrt{13}}{13},\frac{\sqrt{13}}{13}\right),\left(-\frac{9\sqrt{13}}{13},-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)\right\}.$$

8η. Να βρεθούν τα x, y αν ισχύει ότι:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2-x^2-y^2-7}+|3x+y-11|=0$$

Λύση:

Η ισότητα ισχύει όταν

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2-x^2-y^2-7=0 \\ \text{και } 3x+y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x-2y-2=0 \\ 3x+y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 3x+y-11=0 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 5x=12 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{12}{5},\frac{19}{5}\right)$$

9η. Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε τα συστήματα $(\Sigma_1):\begin{cases} 3x+3=6y+12 \\ \dfrac{x}{5}+4y=5 \end{cases}$ και $(\Sigma_2):\begin{cases} (\kappa-1)x+(2\lambda+2)y=\kappa+\lambda \\ 2\kappa x+10\lambda y=0 \end{cases}$ να είναι ισοδύναμα.

Λύση:

Ισοδύναμα είναι τα συστήματα τα οποία έχουν τις ίδιες λύσεις. Έτσι έχουμε:

$$(\Sigma_1):\begin{cases} 3x+3=6y+12 \\ \dfrac{x}{5}+4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6y=9 \\ x+20y=25 \end{cases} \text{ με}$$

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 20 \end{vmatrix}=66$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 25 & 20 \end{vmatrix}=330$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 25 \end{vmatrix}=66$$

Έχουμε ότι: $(x,y)=(5,1)$.

Για τις τιμές αυτές το (Σ_2) γίνεται:

$$\begin{cases} (\kappa-1)x+(2\lambda+2)y=\kappa+\lambda \\ 2\kappa x+10\lambda y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\kappa-1)\cdot 5+(2\lambda+2)\cdot 1=\kappa+\lambda \\ 10\kappa+10\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\kappa+\lambda=3 \\ 10\kappa+10\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow (\kappa,\lambda)=(1,-1).$$

10η. i) Αν για το 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y ισχύει $\begin{cases} 2D_x-3D_y=5D \\ 3D_x+6D_y=9D \end{cases}$ και έχει μοναδική λύση να υπολογιστούν τα x,y.

ii) Αν για το 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y ισχύει:

$$-2D_x^2-2D_y^2-4D^2+4D_xD-4D_yD=0 \quad (1)$$

και έχει μοναδική λύση να υπολογιστούν τα x,y.

Λύση:

i) Δεδομένου ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση γνωρίζουμε ότι $D\neq 0$ και $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$. Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} 2\dfrac{D_x}{D}-3\dfrac{D_y}{D}=5 \\ 3\dfrac{D_x}{D}+6\dfrac{D_y}{D}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+6y=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x,y)=\left(\frac{19}{7},\frac{-1}{7}\right).$$

ii) Από την σχέση (1) προκύπτει

$$-2D_x^2+4D_xD-2D^2-2D_y^2-4D_yD-2D^2=0 \Leftrightarrow$$

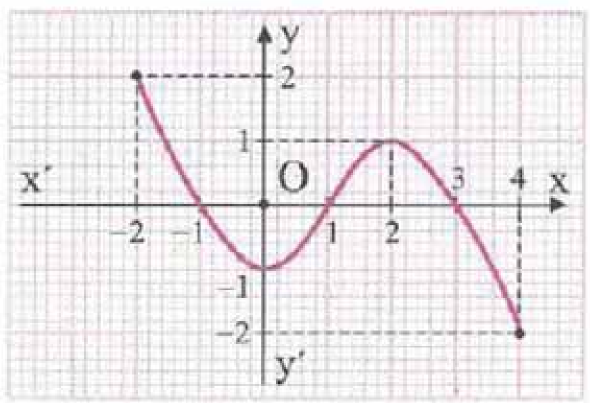
$-2(D_x^2-2D_xD+D^2)-2(D_y^2+2D_yD+D^2)=0 \Leftrightarrow$

$-2(D_x-D)^2-2(D_y+D)^2=0 \Leftrightarrow$

$D_x=D$ και $D_y=-D$.

Άρα $(x,y)=(1,-1)$

11η. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο παρακάτω σχήμα. Να βρεθεί:



i) Το πεδίο ορισμού της.
ii) Το σύνολο τιμών της.
iii) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x΄x και y΄y.
iv) Για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x.
v) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=1$.

Λύση:

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα που σχηματίζεται απ' την προβολή της καμπύλης C_f στον άξονα x'x. Άρα $A_f=[-2,4]$.

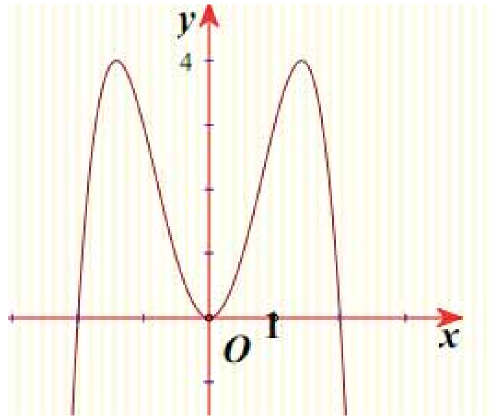
ii) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα που σχηματίζεται απ' την προβολή της καμπύλης C_f στον άξονα y΄y. Άρα το σύνολο τιμών είναι $[-2,2]$.

iii) Παρατηρούμε ότι η C_f τέμνει τον x'x στα σημεία: $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $\Gamma(3,0)$ και τον y΄y στο σημείο: $\Delta(0,-1)$.

iv) Ζητάμε το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $f(x)>0$, οπότε $x\in(-2,-1)\cup(1,3)$.

v) Παρατηρούμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=1$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία με τετμημένες $x=2$ ή $x=-1{,}6$. Άρα η εξίσωση $f(x)=1$ έχει δύο ρίζες.

12η. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^4+4x^2$.



Να βρεθούν οι τιμές του $m\in R$ ώστε η εξίσωση $x^4-4x^2+1-m=0$, να έχει 4 ρίζες να υπογραμμιστεί η σωστή απάντηση στις παρακάτω περιπτώσεις.

α. $-5<m<1$
β. $0\le m\le 4$
γ. $-5\le m\le -1$
δ. $-3\le m\le 1$

Λύση:

Να δικαιολογηθεί η σωστή απάντηση.

13η. Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)=x \text{ για κάθε } x\in R.$$

i) Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Να λυθεί η ανίσωση:

$$f(x^3)<f(3x^2-3x-2)$$

Λύση:

i) Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με

$x_1<x_2 \Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)\Rightarrow$

$f^3(x_1)-f^3(x_2)+f(x_1)-f(x_2)<0\Rightarrow$

$(f(x_1)-f(x_2))\cdot$

$\left[f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1\right]<0$ (1).

Αν θεωρήσουμε την παράσταση

$f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1$

ως τριώνυμο με άγνωστο το $f(x_1)$ έχουμε ότι

$\Delta=f^2(x_2)-4\left[f^2(x_2)+1\right]=-3f^2(x_2)-4<0$

Άρα $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1>0$.

Οπότε από (1) προκύπτει ότι

$f(x_1)-f(x_2)<0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η $f\uparrow$.

ii) $f\left(x^3\right)<f\left(3x^2-3x-2\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x^3<3x^2-3x-2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+3x+2<0 \Leftrightarrow$

$x^3-3x^2+3x-1<-3 \Leftrightarrow (x-1)^3<-3$

οπότε: $x-1<-\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x<1-\sqrt[3]{3}$.

Άρα $x\in\left(-\infty,1-\sqrt[3]{3}\right)$.

14η. Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=3x^3+2x-5, x\in\mathbb{R}}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=0$ και να γίνει ο πίνακας προσήμων της f.

γ) Αν $\alpha>0$, να δείξετε ότι: $f(\alpha)\cdot f(\frac{1}{\alpha})<0$

Λύση:

α) Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με

$$x_1<x_2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1^3<x_2^3 \\ 2x_1<2x_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x_1^3<3x_2^3 \\ 2x_1-5<2x_2-5\end{matrix}\right\}$$

και άρα $3x_1^3+2x_1-5<3x_2^3+2x_2-5 \Rightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\uparrow$

β) Προφανώς $f(1)=0$ και αφού η f είναι γνησίως μονότονη άρα είναι "1−1". Συνεπώς το $x_0=1$ μοναδική λύση της $f(x)=0$.

Ακόμα επειδή $f\uparrow$ R για $x<1\Rightarrow f(x)<0$ και για $x>1\Rightarrow f(x)>0$.

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

γ) Οι αριθμοί $\alpha,\frac{1}{\alpha}$ είναι θετικοί αντίστροφοι, άρα είναι εκατέρωθεν του $x_0=1$.

Συμπερασματικά είναι ετερόσημες οι τιμές τους και άρα $f(\alpha)\cdot f(\frac{1}{\alpha})<0$.

15η. Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=-x^2+6x+7, x\in\mathbb{R}}.$$

α) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων αν υπάρχουν της παραπάνω συνάρτησης.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=2019$ και το πλήθος των ριζών της $f(x)=0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)=16\cdot f(x)$

ε) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε:

$$\mathbf{2f(\alpha)+3f(\beta)=80}$$

Λύση:

α) Για κάθε $x\in R$ έχουμε

$f(x)=-x^2+6x+7 \Leftrightarrow$

$f(x)=-(x^2-6x+9-16)$

$f(x)=-(x^2-6x+9)+16 \Leftrightarrow$

$f(x)=-(x-3)^2+16\le 16=f(3)$

Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 16 στο $x_0=3$.

β) Η $f(x)=-(x-3)^2+16$ είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα κάτω με μέγιστη τιμή το 16. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(R)=(-\infty,16]$.

γ) Η f στο διάστημα $(-\infty,3)$ είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $(-\infty,16)$, άρα έχει μοναδική λύση. Ομοίως στο διάστημα $[3,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα με σύνολο τιμών το $(-\infty,16]$ και έχει μοναδική λύση. Τελικά η $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο R.

δ) $f^2(x)=16\cdot f(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot(f(x)-16)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)=0$ ή $f(x)-16=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=16$

Από γ) ερώτημα και επειδή $f(-1)=f(7)=0$ η $f(x)=0$ έχει 2 ρίζες τις $x=-1$ και $x=7$ από α) ερώτημα η $f(x)=16$ έχει μοναδική λύση την $x=3$.

Τελικά η εξίσωση $f^2(x)=16\cdot f(x)$ έχει τρεις ρίζες τις $x=-1$, $x=3$, $x=7$.

ε) Από α) ερώτημα έχουμε ότι $f(\alpha)\le 16$ και $f(\beta)\le 16$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=3$.

Άρα $2f(\alpha)+3f(\beta)\le 80$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=3$ και $\beta=3$.

Τάξη: Β΄

Εξισώσεις

Νικόλαος Ζέρβας, Άγγελος Παπαϊωάννου - Παράρτημα **ΕΜΕ Λάρισας**

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε μια συλλογή εξισώσεων (πολυωνυμικών, ρητών, άρρητων, τριγωνομετρικών και λογαριθμικών) λυμένες με τη χρήση μεθόδων άλγεβρας και μόνο. Δηλαδή χωρίς τη χρήση μεθόδων ανάλυσης.

ΑΣΚΗΣΗ 1η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση

$$\mathbf{9x^3-18x^2+12x-5=0}$$

Λύση:

Αν ο πραγματικός αριθμός x είναι λύση της εξίσωσης έχουμε:

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με 3 και γίνεται:

$$3\cdot\left(9x^3-18x^2+12x-5\right)=3\cdot 0\Leftrightarrow$$

$$27x^3-54x^2+36x-15=0\Leftrightarrow$$

$$27x^3-54x^2+36x-8=7\Leftrightarrow(3x-2)^3=7\Leftrightarrow$$

$$3x-2=\sqrt[3]{7}\Leftrightarrow 3x=2+\sqrt[3]{7}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\cdot\left(2+\sqrt[3]{7}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2η. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$\mathbf{\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+2}+\sqrt{5x+3}=}$$
$$\mathbf{=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$$

Λύση:

Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα x που κάνουν όλα τα υπόρριζα μη αρνητικά, δηλαδή: $x\geq-\frac{1}{3}$

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+2}+\sqrt{5x+3}=$$
$$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{4x+2}-\sqrt{x+2}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{5x+3}-\sqrt{x+3}\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\frac{3x+1-x-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}+\frac{4x+2-x-2}{\sqrt{4x+2}+\sqrt{x+2}}+$$
$$+\frac{5x+3-x-3}{\sqrt{5x+3}+\sqrt{x+3}}=0\Leftrightarrow\frac{2x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}+$$
$$+\frac{3x}{\sqrt{4x+2}+\sqrt{x+2}}+\frac{4x}{\sqrt{5x+3}+\sqrt{x+3}}=0\Leftrightarrow$$
$$x\left(\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}+\frac{3}{\sqrt{4x+2}+\sqrt{x+2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{\sqrt{5x+3}+\sqrt{x+3}}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x\left(\overbrace{\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}}^{>0}+\overbrace{\frac{3}{\sqrt{4x+2}+\sqrt{x+2}}}^{>0}+\right.$$
$$\left.+\overbrace{\frac{4}{\sqrt{5x+3}+\sqrt{x+3}}}^{>0}\right)=0\Leftrightarrow x=0.$$

Γενίκευση:

Η εξίσωση: $\sqrt{\alpha x+\kappa}+\sqrt{\beta x+\lambda}+\sqrt{\gamma x+\mu}=$
$=\sqrt{x+\kappa}+\sqrt{x+\lambda}+\sqrt{x+\mu}$

έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3η. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$\mathbf{\sqrt{7+6x-x^2}+2\cdot\sqrt{7+12x-2x^2}=x^2-6x+23}$$

Λύση:

Η εξίσωση ορίζεται όταν:

$$(7+6x-x^2\geq0\wedge 7+12x-2x^2\geq0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in\left[3-\frac{5\sqrt{2}}{2},3+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$$

Τα τριώνυμα $7+6x-x^2$ και $7+12x-2x^2$ έχουν μέγιστη τιμή 16 και 25 αντίστοιχα.

Οπότε:

- $\sqrt{7+6x-x^2}\leq\sqrt{16}=4\ \ (1)$
- $2\cdot\sqrt{7+12x-x^2}\leq2\cdot\sqrt{25}=10\ \ (2)$

Με πρόσθεση των (1), (2) έχουμε:

$$\sqrt{7+6x-x^2}+2\cdot\sqrt{7+12x-x^2}\leq14$$

Οπότε $x^2-6x+23\leq14\Leftrightarrow x^2-6x+9\leq0\Leftrightarrow$
$(x-3)^2\leq0\Leftrightarrow x=3$

Ο αριθμός $x=3$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 4η. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$\mathbf{x^3+1=2\cdot\sqrt[3]{2x-1}}$$

Λύση:

Θέτουμε $2x-1=t^3\quad(1)$.

Η εξίσωση τότε γράφεται

$$x^3 = 2t - 1 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$x^3 - t^3 = 2\cdot(t-x) \Leftrightarrow$$

$$(x-t)\left(x^2 + x\cdot t + t^2\right) + 2\cdot(x-t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-t)\cdot\left(\underbrace{x^2 + x\cdot t + t^2 + 2}_{>0}\right) = 0 \Leftrightarrow x = t$$

Ετσι η (1) δίνει:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\cdot(x-1)\cdot(x+1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ή } x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση

$$-\eta\mu x + \eta\mu^3 x + \eta\mu^5 x + \eta\mu^7 x + \cdots = 0$$

Λύση:

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\eta\mu x \neq \pm 1$ γιατί δεν επαληθεύεται η εξίσωση γι αυτές τις τιμές. Με πρόσθεση του $2\eta\mu x$ και στα δυο μέλη της εξίσωσης αυτή γίνεται

$$\eta\mu x + \eta\mu^3 x + \eta\mu^5 x + \eta\mu^7 x + \cdots = 2\eta\mu x$$

Το πρώτο μέλος αποτελεί το άθροισμα απείρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = \eta\mu x$ και $\lambda = \eta\mu^2 x$. Η εξίσωση τότε ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\eta\mu x}{1-\eta\mu^2 x} = 2\cdot\eta\mu x \Leftrightarrow 2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi \text{ ή } x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

με $\kappa \in Z$.

ΑΣΚΗΣΗ 6η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\left|6x^2 + x - 2\right| + \left|2 + 3x - 9x^2\right| = \left|4x - 3x^2\right|$$

Λύση:

Λήμμα: Ισχύει $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta \geq 0$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(6x^2 + x - 2\right) + \left(2 + 3x - 9x^2\right) = 4x - 3x^2$$

οπότε η εξίσωση ισοδυναμεί με την ανίσωση

$$\left(6x^2 + x - 2\right)\cdot\left(2 + 3x - 9x^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x-1)(3x+2)(3x-2)(3x+1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ 7η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$2^{2x^2-5x+2} + 2^{4x^2-8x+3} = 1 + 2^{6x^2-13x+5}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι:

$$\left(2x^2 - 5x + 2\right) + \left(4x^2 - 8x + 3\right) = 6x^2 - 13x + 5$$

Οπότε αν θέσουμε

$$2x^2 - 5x + 2 = \alpha \text{ και } 4x^2 - 8x + 3 = \beta$$

η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με:

$$2^\alpha + 2^\beta = 1 + 2^{\alpha+\beta} \Leftrightarrow 2^\alpha + 2^\beta - 1 - 2^\alpha\cdot 2^\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(2^\alpha - 1\right)\left(1 - 2^\beta\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Άρα: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$

ή

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}.$$

Άρα τελικά $x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2} \vee x = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 8η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt{16 - 8x + x^2} + \sqrt{4x^2 - 13x - 17} = x - 4$$

(Nasser Ellid)

Λύση:

Πρέπει και αρκεί: $\left.\begin{array}{r} 16 - 8x + x^2 \geq 0 \\ 4x^2 - 13x - 17 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \geq \frac{17}{4}$ Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\sqrt{16 - 8x + x^2} + \sqrt{4x^2 - 13x - 17} = x - 4 \Leftrightarrow$$

$$|x-4| + \sqrt{4x^2 - 13x - 17} = x - 4 \Leftrightarrow$$

$$x - 4 + \sqrt{4x^2 - 13x - 17} = x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4x^2 - 13x - 17} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 13x - 17 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 (\text{Απορριπτεται}) \text{ ή } x = \frac{17}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\frac{1}{(5x-3)^3}+\left(\frac{3x+1}{10x^2-21x+9}\right)^3+\frac{1}{(2x-3)^3}=\frac{9x+3}{(10x^2-21x+9)^2}$$

Λύση:

Ισχύει η ταυτότητα:

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$ (I)

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε

$$\alpha=\frac{1}{5x-3},\quad \beta=\frac{3x+1}{10x^2-21x+9},\quad \gamma=\frac{1}{2x-3}$$

είναι

$$3\alpha\beta\gamma=\frac{9x+3}{(10x^2-21x+9)^2}$$

και η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$$

η οποία σύμφωνα με την ταυτότητα (I) δίνει:

$$\frac{1}{5x-3}+\frac{3x+1}{10x^2-21x+9}+\frac{1}{2x-3}=0 \quad (1)$$

ή $$\frac{1}{5x-3}=\frac{3x+1}{10x^2-21x+9}=\frac{1}{2x-3} \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:

$$\frac{1}{5x-3}+\frac{3x+1}{10x^2-21x+9}+\frac{1}{2x-3}=0 \Leftrightarrow$$

$$2x-3+3x+1+5x-3=0 \Leftrightarrow$$

$10x=5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ δεκτή.

Η (2) εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι αδύνατη, αφού $\frac{1}{5x-3}=\frac{1}{2x-3}\Leftrightarrow x=0$,

ενώ για $x=0$ είναι $\frac{3x+1}{10x^2-21x+9}\neq\frac{1}{2x-3}$.

Άρα $x=\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 10η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\left(x^2-4x+11\right)\cdot\left(x^4-8x^2+21\right)=35$$

Λύση:

$$\left(x^2-4x+11\right)\cdot\left(x^4-8x^2+21\right)=35 \Leftrightarrow$$

$$\left[(x-2)^2+7\right]\cdot\left[(x^2-4)^2+5\right]=35 \quad (E)$$

Όμως $(x-2)^2+7\geq 7$ (1) για κάθε $x\in R$, με την ισότητα να ισχύει για $x=2$, και

$(x^2-4)^2+5\geq 5$ (2) για κάθε $x\in R$, με την ισότητα να ισχύει για $x=\pm 2$,

Αν πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\left[(x-2)^2+7\right]\cdot\left[(x^2-4)^2+5\right]\geq 35$$

με την ισότητα να ισχύει για $x=2$.

Οπότε η (E) γίνεται:

$$\left[(x-2)^2+7\right]\cdot\left[(x^2-4)^2+5\right]=35 \Leftrightarrow x=2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt[31]{2019}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}\cdot\ldots\cdot\sqrt[30]{\sqrt[31]{x}}=\sqrt{2019}$$

Λύση:

$$\sqrt[31]{2019}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}\cdot\ldots\cdot\sqrt[30]{\sqrt[31]{x}}=\sqrt{2019}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[31]{2019}\cdot x^{\frac{1}{2\cdot 3}}\cdot\ldots\cdot x^{\frac{1}{30\cdot 31}}=\sqrt{2019}\Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{30\cdot31}}=\frac{\sqrt{2019}}{\sqrt[31]{2019}}\Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{30\cdot31}}=\frac{2019^{\frac{1}{2}}}{2019^{\frac{1}{31}}}\Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{30\cdot31}}=2019^{\frac{1}{2}-\frac{1}{31}} \quad (1)$$

Όμως

$$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{30\cdot31}=$$

$$\frac{3-2}{2\cdot3}+\frac{4-3}{3\cdot4}+\cdots+\frac{31-30}{30\cdot31}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{30}-\frac{1}{31}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{31}=\frac{29}{62} \quad (*)$$

Έτσι έχουμε

$$(1)\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x^{\frac{29}{62}}=2019^{\frac{29}{62}}\Leftrightarrow x=2019.$$

ΑΣΚΗΣΗ 12η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$10x^3-6x^2-12x-8=0$$

Λύση:

$$10x^3-6x^2-12x-8=0\Leftrightarrow$$

$$10x^3=6x^2+12x+8\Leftrightarrow$$

$$10x^3=x^3+6x^2+12x+8-x^3 \Leftrightarrow$$

$$10x^3=(x+2)^3-x^3 \Leftrightarrow 11x^3=(x+2)^3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[3]{11}\cdot x\right)^3=\left(x+2\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{11}\cdot x=x+2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt[3]{11}-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x-1}=2$.

Λύση:

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x\geq 1$

Θέτουμε $\sqrt{x+3}=\alpha$ και $\sqrt[3]{x-1}=\beta$ οπότε έχουμε: $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha^2-\beta^3=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2-\beta\\ (2-\beta)^2-\beta^3=4\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha=2-\beta\\ \beta^3-\beta^2+4\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=0\end{cases}$$

Άρα $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\\ \sqrt[3]{x-1}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$

ΑΣΚΗΣΗ 14η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$, την εξίσωση:

$$\log_3\left(2011\cdot x^2+3^{\frac{\sqrt{3}}{5}}\right)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+5}$$

Λύση:

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\log_3\left(2011\cdot x^2+3^{\frac{\sqrt{3}}{5}}\right)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+5} \Leftrightarrow$$

$$2011\cdot x^2+3^{\frac{\sqrt{3}}{5}}=3^{\frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+5}} \Leftrightarrow$$

$$2011\cdot x^2=3^{\frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+5}}-3^{\frac{\sqrt{3}}{5}} \quad (1)$$

Αυτή έχει λύση στο $\mathbb{R}$, όταν

$$3^{\frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+5}}-3^{\frac{\sqrt{3}}{5}}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+5}\geq\frac{\sqrt{3}}{5} \Leftrightarrow$$

$$5\cdot\sqrt{x^2+3}\geq\sqrt{3}\cdot\left(x^2+5\right) \Leftrightarrow$$

$$25x^2+75\geq 3x^4+30x^2+75 \Leftrightarrow$$

$$3x^4+5x^2\leq 0 \Leftrightarrow x=0$$

Που εύκολα διαπιστώνουμε ότι επαληθεύει την (1).

Άρα η εξίσωση έχει ρίζα το $x=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 15η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$, την εξίσωση:

$$|x-1|+|x-3|+|x+2|=7\cdot(x-4)$$

Λύση:

Η εξίσωση ορίζεται για $x\geq 4$.

Για αυτές τις τιμές του x είναι

$x-1>0, x-3>0, x+2>0$

και η εξίσωση γίνεται:

$$|x-1|+|x-3|+|x+2|=7\cdot(x-4) \Leftrightarrow$$

$$x-1+x-3+x+2=7x-28 \Leftrightarrow$$

$$x+x+x-7x=1+3-2-28 \Leftrightarrow$$

$$-4x=-26 \Leftrightarrow x=\frac{13}{2}, \text{ δεκτή}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16η. Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x}}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32}$$

Λύση:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x}}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)}}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2})}}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2})}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{4})}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{4}}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4})}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{8})}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{8}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{32} \overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}$$

Τάξη: Β΄

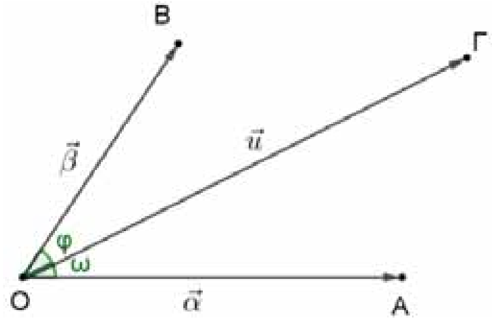
Διανύσματα

Θωμάς Λάντος, Παράρτημα **ΕΜΕ Λάρισας**

Άσκηση 1η. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα, να δείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση.

1ος τρόπος: Έχουμε ότι: $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{u}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{u}})=\omega$, $(\widehat{\vec{\beta},\vec{u}})=\varphi$



- $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=\vec{\alpha}\left(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right)=$

$|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\varphi+\omega)\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}||\vec{u}|\sigma\upsilon\nu\omega=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|[1+\sigma\upsilon\nu(\varphi+\omega)]\Leftrightarrow$

$|\vec{u}|\sigma\upsilon\nu\omega=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|[1+\sigma\upsilon\nu(\varphi+\omega)]\quad(1)$

- $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=\vec{\beta}\left(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right)=$

$|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu(\varphi+\omega)\Leftrightarrow$

$|\vec{u}|\sigma\upsilon\nu\varphi=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|[1+\sigma\upsilon\nu(\varphi+\omega)]\quad(2)$

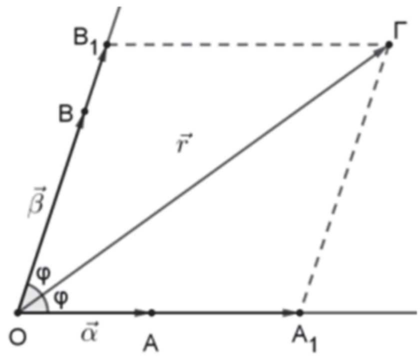
Από (1) και (2) έχουμε: $|\vec{u}|\sigma\upsilon\nu\omega=|\vec{u}|\sigma\upsilon\nu\varphi\Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\varphi\Leftrightarrow\omega=\varphi$. Άρα ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

2ος τρόπος: Έχουμε ότι: $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και ΟΓ Διχοτόμος της $\widehat{AOB}$.

Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{r}$ = $\overrightarrow{O\Gamma}$ του οποίου ο φορέας διχοτομεί τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=2\varphi$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, έχουμε ότι: υπάρχουν $\lambda,\mu\in R$ ώστε:

$\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB_1}=\mu\overrightarrow{OB}=\mu\vec{\beta}$ και

$\vec{r}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}\Leftrightarrow\vec{r}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\quad(1)$



- $\vec{r}\cdot\vec{\alpha}=(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})\vec{\alpha}=\lambda|\vec{\alpha}|^2+\mu|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu2\varphi\Leftrightarrow$

$|\vec{r}||\vec{\alpha}|\sigma\upsilon\nu\varphi=|\vec{\alpha}|\left[\lambda|\vec{\alpha}|+\mu|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu2\varphi\right]\Leftrightarrow$

$|\vec{r}|\sigma\upsilon\nu\varphi=\lambda|\vec{\alpha}|+\mu|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu2\varphi\quad(2)$

- $\vec{r}\cdot\vec{\beta}=(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})\vec{\beta}=\mu|\vec{\beta}|^2+\lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu2\varphi\Leftrightarrow$

$|\vec{r}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\varphi=|\vec{\beta}|\left[\mu|\vec{\beta}|+\lambda|\vec{\alpha}|\sigma\upsilon\nu2\varphi\right]\Leftrightarrow$

$|\vec{r}|\sigma\upsilon\nu\varphi=\lambda|\vec{\alpha}|\sigma\upsilon\nu2\varphi+\mu|\vec{\beta}|\quad(3)$

Από (2) και (3) έχουμε:

$\lambda|\vec{\alpha}|+\mu|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu2\varphi=\lambda|\vec{\alpha}|\sigma\upsilon\nu2\varphi+\mu|\vec{\beta}|\Leftrightarrow$

$\left(\mu|\vec{\beta}|-\lambda|\vec{\alpha}|\right)(\sigma\upsilon\nu2\varphi-1)=0$. Αλλά $\sigma\upsilon\nu2\varphi-1\neq0$, οπότε είναι $\mu|\vec{\beta}|-\lambda|\vec{\alpha}|=0\Leftrightarrow\lambda=\mu\cdot\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$ και η (1) γίνεται: $\vec{r}=\mu\cdot\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\frac{\mu}{|\vec{\alpha}|}\cdot\left(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{r}=\rho\vec{u}$,

όπου $\rho=\frac{\mu}{|\vec{\alpha}|}$ και $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$, οπότε $\vec{u}//\vec{r}$.

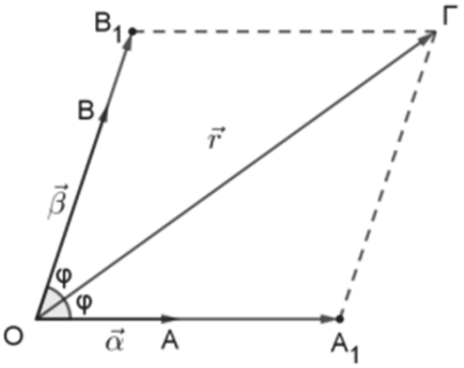
Άρα ο φορέας του $\vec{u}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

3ος τρόπος: Έχουμε ότι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha},\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.

Έστω διάνυσμα $\vec{r}=\overrightarrow{O\Gamma}$ του οποίου ο φορέας ΟΓ διχοτομεί τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=2\varphi$. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $A_1OB_1\Gamma$, οπότε υπάρχουν $\lambda,\mu\in R$ ώστε:

$\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{\alpha},\ \overrightarrow{OB_1}=\mu\overrightarrow{OB}=\mu\vec{\beta}$ και

$\vec{r}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}\Leftrightarrow\vec{r}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\ (1)$. Αλλά η $O\Gamma$ διχοτόμος, οπότε το $A_1OB_1\Gamma$ είναι ρόμβος και συνεπώς $OA_1=OB_1$, δηλαδή



$|OA_1|=|OB_1|\Leftrightarrow\left|\lambda|\vec{\alpha}|\right|=|\mu\vec{\beta}|\Leftrightarrow\lambda|\vec{\alpha}|=\mu|\vec{\beta}|$

$\Leftrightarrow\lambda=\mu\cdot\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$, η (1) γίνεται:

$\vec{r}=\mu\cdot\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\dfrac{\mu}{|\vec{\alpha}|}\cdot\left(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{r}=\rho\vec{u}$,

όπου $\rho=\dfrac{\mu}{|\vec{\alpha}|}$ και $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$, οπότε $\vec{u}//\vec{r}$.

Άρα ο φορέας του $\vec{u}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

4ος τρόπος Έχουμε ότι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha},\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$

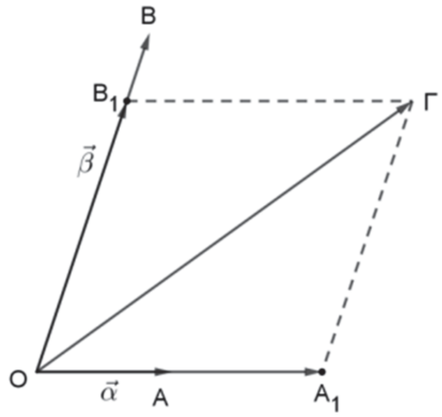
Έστω $\overrightarrow{OA_1}=\vec{\alpha}_o=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$ το μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB_1}=\vec{\beta}_0=\dfrac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}$ το μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση του $\vec{\beta}$.

Το $A_1OB_1\Gamma$ είναι ρόμβος γιατί $|\vec{\alpha}_0|=|\vec{\beta}_0|=1$, οπότε $OA_1=OB_1$. Άρα η $O\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Έστω $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{v}$, τότε

$\vec{v}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}\Leftrightarrow\vec{v}=\vec{\alpha}_0+\vec{\beta}_0\Leftrightarrow$

$\vec{v}=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}_0|}\vec{\alpha}+\dfrac{1}{|\vec{\beta}_0|}\vec{\beta}=\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=$

$=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\left(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right)=\rho\vec{u}\Leftrightarrow\vec{v}//\vec{u}$,



όπου: $\dfrac{1}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\rho>0$ και $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$.

Άρα ο φορέας του $\vec{u}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Άσκηση 2η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Θέτουμε: $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta},|\vec{\alpha}|=\alpha,|\vec{\beta}|=\beta,|\overrightarrow{B\Gamma}|=\gamma$ και $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ η περίμετρός του. Να γραφεί το $\overrightarrow{A\Delta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και μετά να βρεθεί το $|\overrightarrow{A\Delta}|$ σε συνάρτηση των α,β,γ,τ.

Λύση:

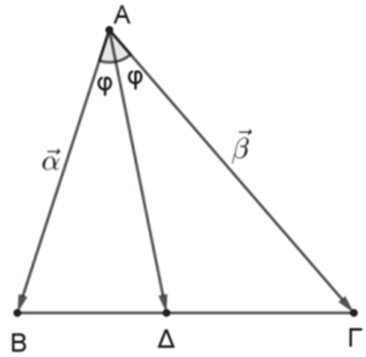
Από Άσκηση 1 το διάνυσμα

$\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}=\beta\vec{\alpha}+\alpha\vec{\beta}$

είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{A\Delta}$, δηλαδή $\vec{u}//\overrightarrow{A\Delta}$,

οπότε υπάρχει $\mu\in R$ ώστε:

$\overrightarrow{A\Delta}=\mu\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Delta}=\mu\beta\vec{\alpha}+\mu\alpha\vec{\beta}\quad(4)$



Έστω $\overrightarrow{B\Delta}=\lambda\overrightarrow{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Delta}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}}{1+\lambda}$, (από πρόταση 2), οπότε: $\overrightarrow{A\Delta}=\dfrac{1}{1+\lambda}\vec{\alpha}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\vec{\beta}$ (5)

Από (4) και (5) είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\mu\beta=\dfrac{1}{1+\lambda}\\ \mu\alpha=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\end{array}\right|\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow\lambda=\frac{\alpha}{\beta},\mu=\frac{1}{\alpha+\beta}$$

Άρα: $\overrightarrow{A\Delta}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{\beta}$ (6)

Θέτω $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}=\rho\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=1-\rho$ οπότε:

$\overrightarrow{A\Delta}=\rho\vec{\alpha}+(1-\rho)\vec{\beta}$ και

$\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\rho^2\vec{\alpha}^2+(1-\rho)^2\vec{\beta}^2+2\rho(1-\rho)\vec{\alpha}\vec{\beta}$

Αλλά $\overrightarrow{B\Gamma}^2=\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)^2=\vec{\beta}^2+\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$2\vec{\alpha}\vec{\beta}=-\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2+\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$

Άρα: $\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\rho^2\alpha^2+(1-\rho)^2\beta^2+$

$+\rho(1-\rho)\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\rho\alpha^2+(1-\rho)\beta^2-\rho(1-\rho)\gamma^2\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\alpha^2+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\beta^2-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\gamma^2\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)-\alpha\beta\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\dfrac{4\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}{(\alpha+\beta)^2}$ (7).

Άσκηση 3η. Σε ισοσκελές τρίγωνο, οι διχοτόμοι των ίσων γωνιών του είναι ίσες.

Λύση: Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=A\Gamma=\beta$, $B\Gamma=\alpha$) και $B\Delta$, ΓE οι διχοτόμοι των ίσων γωνιών του $\hat{B},\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Από τη σχέση **(6)** της άσκησης 2, έχουμε:

$\overrightarrow{B\Delta}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{B\Gamma}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$ και

$\overrightarrow{\Gamma E}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\Gamma B}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\Gamma A}$

- $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu\varphi\Leftrightarrow$

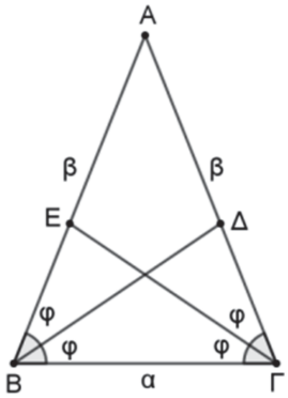
$\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{B\Gamma}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}\right)\overrightarrow{B\Gamma}=\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|\cdot\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{B\Gamma}^2+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow$

$\alpha\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu2\varphi\Leftrightarrow$

$\alpha\cdot\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha^2\beta\sigma\upsilon\nu2\varphi}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha\beta(1+\sigma\upsilon\nu2\varphi)}{\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|(\alpha+\beta)}$ (8)



- $\overrightarrow{\Gamma E}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\cdot\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\Gamma B}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\Gamma A}\right)\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\cdot\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Leftrightarrow$

$\alpha\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}^2+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Leftrightarrow$

$\alpha\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\alpha^2+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\sigma\upsilon\nu2\varphi\Leftrightarrow$

$\alpha\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha^2\beta\sigma\upsilon\nu2\varphi}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha\beta(1+\sigma\upsilon\nu2\varphi)}{\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|(\alpha+\beta)}$ (9)

Από (8), (9) έχουμε: $\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\Leftrightarrow B\Delta=\Gamma E$.

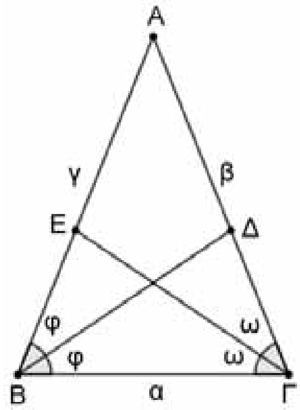
Άσκηση 4η. Αν σε τρίγωνο οι διχοτόμοι δύο γωνιών του είναι ίσες, τότε αυτό είναι ισοσκελές.

Λύση: Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ όπου ΒΔ, ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B},\hat{\Gamma}$ με $B\Delta=\Gamma E$ και $AB=\gamma$, $A\Gamma=\beta$, $B\Gamma=\alpha$ και $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ η περίμετρός του.

Είναι: $B\Delta=\Gamma E\Leftrightarrow B\Delta^2=\Gamma E^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2$

και από (7) της άσκησης 2, έχουμε:

$$\frac{4\alpha\gamma\tau(\tau-\beta)}{(\alpha+\gamma)^2}=\frac{4\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}{(\alpha+\beta)^2}\Leftrightarrow\frac{\gamma(\tau-\beta)}{(\alpha+\gamma)^2}=\frac{\beta(\tau-\gamma)}{(\alpha+\beta)^2}\Leftrightarrow$$



$$\frac{\gamma(\alpha+\gamma-\beta)}{(\alpha+\gamma)^2}=\frac{\beta(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta)^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}-\frac{\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)^2}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}=\beta\gamma\left[\frac{1}{(\alpha+\gamma)^2}-\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\right]\Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma(\alpha+\beta)-\beta(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)}=\beta\gamma\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\gamma)^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\gamma)^2}\Leftrightarrow$$

$$\alpha(\gamma-\beta)=\frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)(2\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\Leftrightarrow$$

$$(\beta-\gamma)\left[\underbrace{\frac{\beta\gamma(2\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}_{>0}+\alpha\right]=0\Leftrightarrow\beta-\gamma=0\Leftrightarrow\beta=\gamma.$$

Άσκηση 5η. Στο ισοσκελές τρίγωνο τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του, είναι ίσα.

Λύση: Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma=\beta$, $B\Gamma=\alpha$) και $B\Delta$, ΓE τα ύψη του.

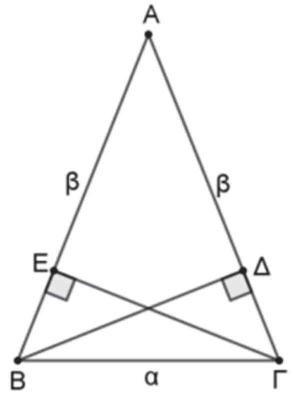
Είναι: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A\Delta}=\lambda\,\overrightarrow{\Delta\Gamma}\\ \overrightarrow{AE}=\mu\,\overrightarrow{EB}\end{array}\right|\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{B\Delta}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{B\Gamma}}{1+\lambda}\\ \overrightarrow{\Gamma E}=\dfrac{\overrightarrow{\Gamma A}+\mu\overrightarrow{\Gamma B}}{1+\mu}\end{array}\right|\quad(1),$

από πρόταση (2). $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow\dfrac{\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{B\Gamma}}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$(1+\lambda)\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu A=\lambda\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\Leftrightarrow$$

$$(1+\lambda)\beta^2\sigma\upsilon\nu A=\lambda\beta^2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu A=\frac{\lambda}{1+\lambda}\quad(2)$$



- $\overrightarrow{\Gamma E}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\dfrac{\overrightarrow{\Gamma A}+\mu\,\overrightarrow{\Gamma B}}{1+\mu}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}-\mu\overrightarrow{AB}^2=0\Leftrightarrow$$

$$(1+\mu)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}-\mu\overrightarrow{AB}^2=0\Leftrightarrow$$

$$(1+\mu)\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu A=\mu\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\Leftrightarrow$$

$$(1+\mu)\beta^2\sigma\upsilon\nu A=\mu\beta^2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu A=\frac{\mu}{1+\mu}\quad(3)$$

Από (2) και (3) είναι $\lambda=\mu$, οπότε:

- $\overrightarrow{B\Delta}=\dfrac{1}{1+\lambda}\left(\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{B\Gamma}\right)\Leftrightarrow$

$$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\overrightarrow{BA}^2+2\lambda\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\lambda^2\overrightarrow{B\Gamma}^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\beta^2+2\lambda\beta\alpha\sigma\upsilon\nu B+\lambda^2\alpha^2\right)\quad(4)$$

- $\overrightarrow{\Gamma E}=\dfrac{1}{1+\lambda}\left(\overrightarrow{\Gamma A}+\lambda\overrightarrow{\Gamma B}\right)\Leftrightarrow$

$$\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\overrightarrow{\Gamma A}+\lambda\overrightarrow{\Gamma B}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\overrightarrow{\Gamma A}^2+2\lambda\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}+\lambda^2\overrightarrow{\Gamma B}^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\beta^2+2\lambda\beta\alpha\sigma\upsilon\nu B+\lambda^2\alpha^2\right)\quad(5)$$

Από (4) και (5) έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\Leftrightarrow B\Delta=\Gamma E.$$

Άσκηση 6η. Αν σε τρίγωνο δύο ύψη του είναι ίσα, τότε αυτό είναι ισοσκελές.

Λύση: Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου $B\Delta$, ΓE τα ύψη του και $B\Delta=\Gamma E\Rightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|$

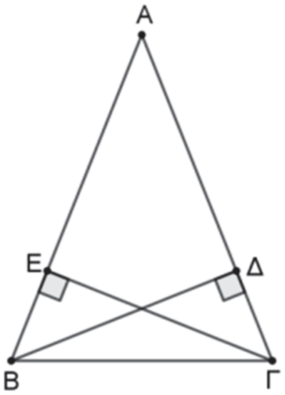
Έχουμε: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\\ \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{E\Gamma}\end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{E\Gamma}\Rightarrow$

$\left(\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)^2=\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{E\Gamma}\right)^2\Rightarrow \overrightarrow{B\Delta}^2+\overrightarrow{\Delta\Gamma}^2+2\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}=$

$=\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{E\Gamma}^2+2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{E\Gamma}\overset{\left(B\Delta\perp\Delta\Gamma,\ BE\perp E\Gamma\right)}{\Rightarrow}$

$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2+\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|^2=\left|\overrightarrow{BE}\right|^2+\left|\overrightarrow{E\Gamma}\right|^2\Rightarrow$

$\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|^2=\left|\overrightarrow{BE}\right|^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|$.



- $\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}\Rightarrow\overrightarrow{B\Delta}^2=\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)^2\Rightarrow$

$\overrightarrow{B\Delta}^2=\overrightarrow{B\Gamma}^2+\overrightarrow{\Gamma\Delta}^2+2\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}\Rightarrow$

$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2+\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|^2+2\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|\cdot\text{συν}\Gamma\quad(1)$

- $\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{BE}\Rightarrow\overrightarrow{\Gamma E}^2=\left(\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{BE}\right)^2\Rightarrow$

$\overrightarrow{\Gamma E}^2=\overrightarrow{\Gamma B}^2+\overrightarrow{BE}^2+2\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{BE}\Rightarrow$

$\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2=\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|^2+\left|\overrightarrow{BE}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\text{συν}B\quad(2)$

Αλλά $\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|$, οπότε από (1) και (2) έχουμε:

$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2+\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|^2+2\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|\cdot\text{συν}\Gamma=$

$=\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|^2+\left|\overrightarrow{BE}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\text{συν}B\Rightarrow$

$\text{συν}B=\text{συν}\Gamma\Rightarrow\hat{B}=\hat{\Gamma}$.

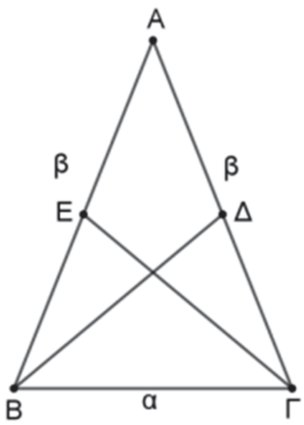
Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 7η. Σε ισοσκελές τρίγωνο οι διάμεσοι προς τις ίσες πλευρές του, είναι ίσες.

Λύση: Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=A\Gamma=\beta$, $B\Gamma=\alpha$) και ΒΔ, ΓΕ οι διάμεσοί του προς τις ίσες πλευρές.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{B\Delta}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}\right)\\ \overrightarrow{\Gamma E}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma A}\right)\end{array}\right|\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\cdot\beta\cdot\text{συν}B\right)\\ \left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\cdot\beta\cdot\text{συν}\Gamma\right)\end{array}\right|.$$



Οπότε: $\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|$. Άρα: $B\Delta=\Gamma E$.

Άσκηση 8η. Αν δύο διάμεσοι τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

Λύση: Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Delta=\Gamma E$, τότε:

$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{\Gamma E}\right)\left(\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Gamma E}\right)=0\Leftrightarrow$

$\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma A}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma A}\right)\right]=0\Leftrightarrow$

$\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Gamma A}\right)\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma A}\right)=0\Leftrightarrow$

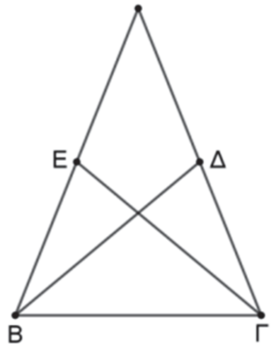
$\left(2\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow$

$\left[2\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right]\left(\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}\right)=0\Leftrightarrow$

$3\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}\right)=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A\Gamma}^2-\overrightarrow{AB}^2=0\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\Leftrightarrow AB=A\Gamma$.



Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α.

Τάξη: Β΄ Επιλεγμένες Ασκήσεις Γεωμετρίας

Χρήστος Π. Τσιφάκης

ΑΣΚΗΣΗ 1η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 1+\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{6}$ και $\gamma = 2$.

i) Να υπολογίσετε την $\hat{B}$.
ii) Να βρείτε το είδος του τριγώνου.
iii) Να υπολογίσετε την προβολή ΑΔ της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΑΓ.

Λύση: i) Από τον νόμο συνημιτόνων έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\cdot\gamma\cdot\text{συν}\hat{B} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\hat{B} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\cdot\gamma} \Leftrightarrow \text{συν}\hat{B} = \frac{1}{2}$$ Άρα $\hat{B} = 60^o$.

ii) Έχουμε ότι: $\beta = \sqrt{6} > \sqrt{4} = 2 = \gamma$.
Άρα συγκρίνουμε τις πλευρές α και β.

$$\alpha^2 - \beta^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{6}^2 =$$

$$4+2\sqrt{3}-6 = 2\left(\sqrt{3}-1\right) > 0.$$

Οπότε είναι $\alpha > \beta$. Έτσι έχουμε:

$$\alpha^2 = 4+2\sqrt{3} < \beta^2 + \gamma^2 = 6+4 = 10.$$

Άρα η γωνία $\hat{A} < 90^o$ και το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

iii) Από γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

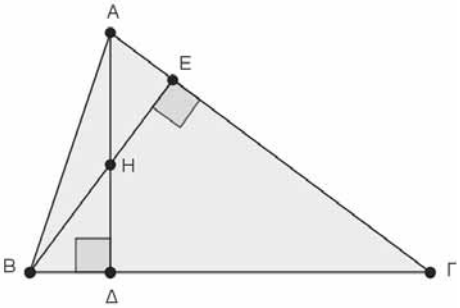
$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2A\Gamma\cdot \text{προβ}_{A\Gamma}AB \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2A\Gamma\cdot A\Delta \Leftrightarrow$$

$$A\Delta = \frac{A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2}{2A\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2η. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ που τέμνονται στο Η. Να δείξετε ότι: $AB^2 = BH\cdot BE + AH\cdot A\Delta$.

Λύση: Αφού η ΓΔ είναι η προβολή της ΑΓ στην ΒΓ από το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε: $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma\cdot\Gamma\Delta =$



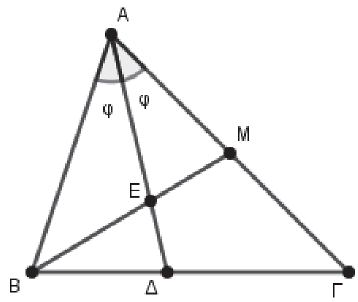
$$B\Gamma^2 + A\Gamma^2 - B\Gamma\cdot\Gamma\Delta - \Gamma E\cdot\Gamma A =$$
$$B\Gamma(B\Gamma-\Gamma\Delta) + A\Gamma(A\Gamma - \Gamma E) =$$
$$= B\Gamma\cdot B\Delta + A\Gamma\cdot AE \qquad (1).$$

Αφού το τετράπλευρο ΕΓΔΗ είναι εγγράψιμο έχουμε: $B\Gamma\cdot B\Delta = BH\cdot BE \quad (2)$
και $A\Gamma\cdot AE = AH\cdot A\Delta \quad (3)$

Άρα $(1) \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} AB^2 = BH\cdot BE + AH\cdot A\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 3η. Εστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το σημείο τομής της διαμέσου ΒΜ με τη διχοτόμο του ΑΔ. Να δείξετε ότι $BE\cdot\Gamma\Delta = 2\cdot EM\cdot B\Delta$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{BE}{EM} = 2\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$ (1).



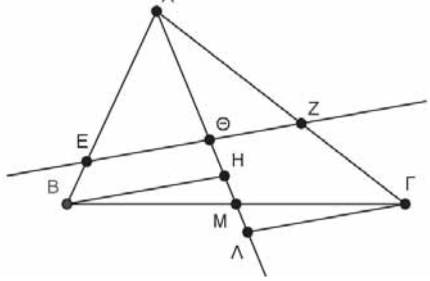
Από το θεώρημα διχοτόμου στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΒΓ έχουμε: $\frac{BE}{EM} = \frac{AB}{AM}$ (2)

και $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AB}{2AM}$ (3)

Από τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει η ζητούμενη.

ΑΣΚΗΣΗ 4η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρό του. Από το Θ φέρνουμε ευθεία (ε) που αφήνει τις κορυφές Β και Γ στο ίδιο ημιεπίπεδο και τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\frac{AB}{AE} + \frac{A\Gamma}{AZ} = 3$.

Λύση: Φέρνουμε την ΒΗ//ΕΘΖ και την ΓΛ//ΕΘΖ Τότε από θεώρημα Θαλή έχουμε αντίστοιχα $\frac{AB}{AE} = \frac{AH}{A\Theta}$ (1) και $\frac{A\Gamma}{AZ} = \frac{A\Lambda}{A\Theta}$ (2).



Προσθέτοντας κατά μέλη

$$\frac{AB}{AE}+\frac{A\Gamma}{AZ}=\frac{AH}{A\Theta}+\frac{A\Lambda}{A\Theta}=\frac{AH+A\Lambda}{A\Theta}\quad (3).$$

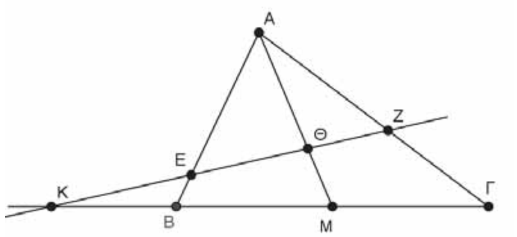
Τα τρίγωνα ΒΗΜ και ΓΜΛ είναι ίσα (γιατί;) οπότε $HM=M\Lambda$ (4).

$$AH+A\Lambda=(AM-HM)+(AM+M\Lambda)=$$

$$=2AM=2\cdot\frac{3}{2}A\Theta=3A\Theta\quad (5).$$

Άρα $\frac{AB}{AE}+\frac{A\Gamma}{AZ}\overset{(5)}{=}\frac{3A\Theta}{A\Theta}=3$.

Β΄ τρόπος



Αρκεί $\frac{AE+EB}{AE}+\frac{AZ+Z\Gamma}{AZ}=3$ ή $\frac{EB}{EA}+\frac{Z\Gamma}{ZA}=1$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Μενελάου στα τρίγωνα ABM και $A\Gamma M$ έχουμε:

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{\Theta A}{\Theta M}\cdot\frac{KM}{KB}=1\Rightarrow\frac{EB}{EA}\cdot 2\cdot\frac{KM}{KB}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{KB}{KM}\quad\text{και}\quad\frac{Z\Gamma}{ZA}\cdot\frac{\Theta A}{\Theta M}\cdot\frac{KM}{K\Gamma}=1\Rightarrow$$

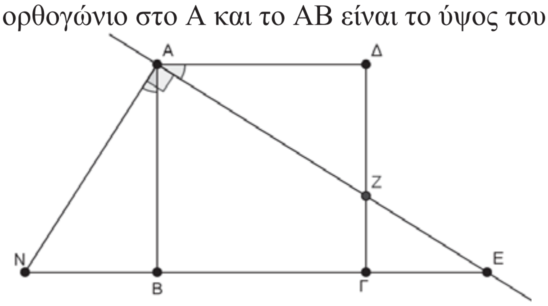
$\Rightarrow\frac{Z\Gamma}{ZA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{K\Gamma}{KM}$.Αφού το Μ είναι το μέσον του $B\Gamma$ ισχύει ότι $KM=\frac{KB+K\Gamma}{2}$.

Άρα $\frac{EB}{EA}+\frac{Z\Gamma}{ZA}=\frac{KB+K\Gamma}{KM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2KM}{KM}=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 5η. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α. Από την κορυφή A φέρνουμε ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ στο Z και την προέκταση της $B\Gamma$ στο E. Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AZ^2}=\frac{1}{\alpha^2}.$$

Λύση: Φέρνουμε την $AN\perp(\varepsilon)$ που τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ν. Το τρίγωνο ΝΑΕ είναι ορθογώνιο στο Α και το ΑΒ είναι το ύψος του.



Άρα $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{AB^2}$ (1).

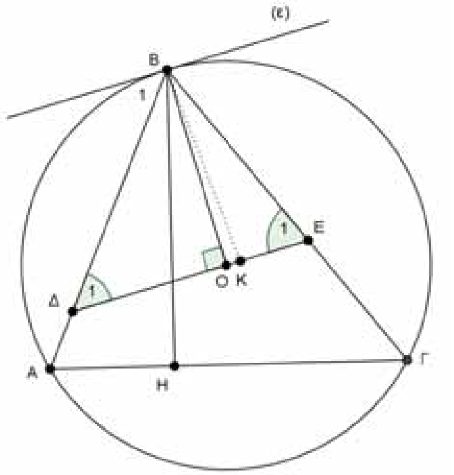
Τα τρίγωνα ΑΝΒ και ΑΔΖ είναι ίσα (γιατί έχουν $AB=A\Delta=\alpha$, $\hat{B}=\hat{\Delta}=90^o$, $N\hat{A}B=Z\hat{A}\Delta$ οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες), άρα $AN=AZ$.

$$\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AZ^2}=\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{\alpha^2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6η. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και $BH=R\sqrt{2}$ το ύψος του. Από το H φέρουμε $H\Delta\perp AB$ και $HE\perp B\Gamma$. Να δείξετε ότι $OB\perp\Delta E$ και ότι τα σημεία Δ,O,E είναι συνευθειακά.

Λύση: Από μετρικές σχέσεις στα ορθογώνια τρίγωνα ABH και $BH\Gamma$ έχουμε

$B\Delta\cdot BA=BH^2=BE\cdot B\Gamma$, οπότε το $A\Gamma E\Delta$ είναι εγγράψιμο, άρα $\hat{A}=\hat{E}_1$. Αλλά $\hat{A}=\hat{B}_1$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτιομένης.



Άρα $\hat{E}_1=\hat{\Delta}_1\Rightarrow\Delta E//(\varepsilon)\Rightarrow\Delta E\perp OA$ αφού $(\varepsilon)\perp OA$.Στο τρίγωνο $B\Delta E$ φέρνουμε το ύψος $BK\perp E\Delta$ και έστω $K\not\equiv O$.

Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $BA\Gamma$ είναι όμοια, άρα $\frac{BK}{BH}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}$.

Αλλά $\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{\frac{BH^2}{BA}}{B\Gamma}=\frac{BH^2}{BA\cdot B\Gamma}=\frac{BH^2}{2R\cdot BH}=\frac{BH}{2R}$.

Άρα $\frac{BK}{BH}=\frac{BH}{2R}\Rightarrow BK=\frac{BH^2}{2R}=\frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{2R}=R$.

Άρα το $K\equiv O$.

Τάξη: Γ΄ Εύρεση συνάρτησης ΑΠΟ τη ΣΥΝΘΕΣΗ της με άλλη

Κώστας Βακαλόπουλος

Όταν χρησιμοποιούμε τη λέξη «αποσύνθεση», εννοούμαι την εύρεση της μιας εκ των συναρτήσεων που έχουμε στη σύνθεση δυο συναρτήσεων όταν γνωρίζουμε την σύνθεση και την άλλη. Δείτε την άσκηση 6 της Β΄ Ομάδας του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου στη σελίδα 30. Όσα θα γράψουμε στη συνέχεια είναι σύμφωνα με τις οδηγίες που έχουμε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (σήμερα ΙΕΠ) από το 2007. Στα παρακάτω με D_f θα συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (Αντίστοιχα για τις άλλες συναρτήσεις).

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2-3x}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Α) Να βρεθεί τουλάχιστον μια συνάρτηση f έτσι, ώστε $(f\circ g)(x)=2x+1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και να παρασταθεί γραφικά.

Β) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f έτσι, ώστε $(f\circ g)(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και να παρασταθούν γραφικά.

Λύση:

Α) Εύρεση του πεδίου ορισμού της f:

Αφού η (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ θα είναι: $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{1\}$ δηλαδή ίσο με το πεδίο ορισμού της g που από την υπόθεση είναι: $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τιμή της g ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Δηλαδή $g(A)\subseteq D_f$ (όπου $g(A)$ το σύνολο τιμών της g για $A=D_g$)

Εύρεση συνόλου τιμών της g:

Έστω $y=\dfrac{2-3x}{x-1}$, $x\neq 1$. Έχουμε: $y=\dfrac{2-3x}{x-1}\Leftrightarrow$
$y(x-1)=2-3x\Leftrightarrow yx+3x=2+y\Leftrightarrow$
$x(y+3)=2+y$ (2).

- Αν $y=-3$ τότε $(2)\Leftrightarrow\ 0\cdot x=-1$ που είναι αδύνατη, οπότε $-3\notin g(A)$.
- Αν $y\neq -3$ τότε $(2)\Leftrightarrow x=\dfrac{2+y}{y+3}$. Ελέγχουμε αν $x=\dfrac{2+y}{y+3}\neq 1$ για κάθε $y\neq -3$. Ισχύει διότι αν $\dfrac{2+y}{y+3}=1$ τότε $2+y=y+3$ οπότε $0\cdot y=1$ που είναι αδύνατη. Άρα $g(A)=\mathbb{R}-\{-3\}$. Άρα $\mathbb{R}-\{-3\}\subseteq D_f$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι ένα υπερσύνολο, έστω Β του $\mathbb{R}-\{-3\}$.

Εύρεση του τύπου της f:

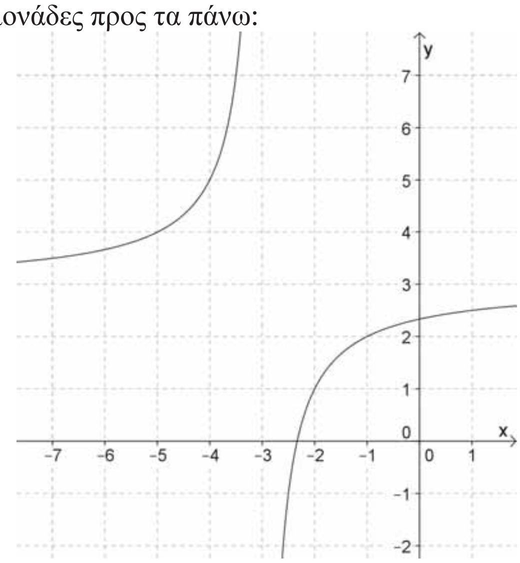
Έστω $y=g(x)=\dfrac{2-3x}{x-1}$, $x\neq 1$. Για κάθε $y\neq -3$ έχουμε: $y=\dfrac{2-3x}{x-1}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=\dfrac{2+y}{y+3}$. Έτσι,

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(y)=2\left(\frac{2+y}{y+3}\right)+1=\frac{3y+7}{y+3}$$

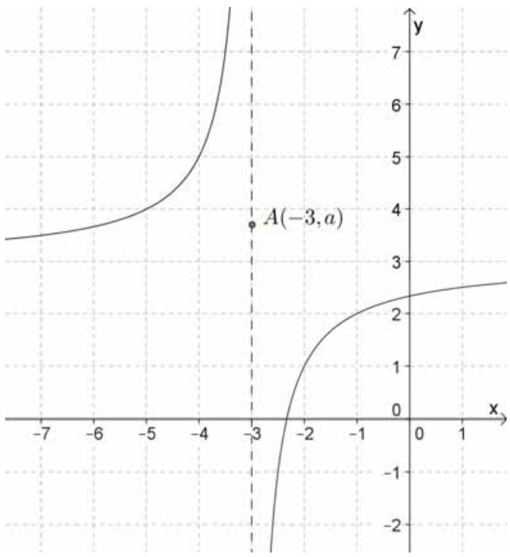
Άρα μια συνάρτηση f είναι η $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+3}$, $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{3x+7}{x+3}=\frac{3(x+3)-2}{x+3}=-\frac{2}{x+3}+3.$$

Αν $\varphi(x)=-\dfrac{2}{x}$, $x\neq 0$ παρατηρούμε ότι: $f(x)=\varphi(x+3)+3$. Άρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ (που είναι ως γνωστόν υπερβολή), οριζοντίως καταρχήν, κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, κατακόρυφα στη συνέχεια κατά 3 μονάδες προς τα πάνω:



Β) Οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη συνθήκη (1) είναι άπειρες και έχουν τη μορφή $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+7}{x+3} & ,x\neq -3\\ \alpha & ,x=-3\end{cases}$, όπου α ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων αυτών είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης που προέκυψε στο ερώτημα Α) συμπεριλαμβανομένου και του σημείου $A(-3,\alpha)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ που κινείται στην ευθεία $x=-3$.



ΑΣΚΗΣΗ 2η

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$(g\circ f)(x)=4x-2$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{7}{8}\right\}$ **και** $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1},x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, **να βρείτε τη συνάρτηση f.**

Λύση:

Εύρεση του πεδίου ορισμού της f:

Ισχύει: $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{7}{8}\right\}\subseteq D_f$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι ένα υπερσύνολο του $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{7}{8}\right\}$

Εύρεση του τύπου της f:

Για κάθε $x\in D_{g\circ f}$, όπου $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{7}{8}\right\}=$ $=\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\neq -\dfrac{1}{2}\right\}$ έχουμε $g(f(x))=\dfrac{3f(x)-1}{2f(x)+1}$ Όμως για κάθε $x\neq\dfrac{7}{8}$ ισχύει $g(f(x))=4x-2$. Έτσι, έχουμε:

$\dfrac{3f(x)-2}{2f(x)+1}=4x-2\Leftrightarrow(4x-2)(2f(x)+1)=$

$3f(x)-2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(8x-7)f(x)=1-4x\overset{x\neq\frac{7}{8}}{\Leftrightarrow}$

$f(x)=\dfrac{1-4x}{8x-7}$. Μια συνάρτηση λοιπόν που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες είναι η $f(x)=\dfrac{1-4x}{8x-7}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{7}{8}\right\}$. Εξετάζουμε αν μπορούμε να «επεκτείνουμε» την παραπάνω συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Από την ισότητα $\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\neq -\dfrac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{7}{8}\right\}$ προκύπτει άμεσα ότι $\left\{x\in D_f \,/\, f(x)=-\dfrac{1}{2}\right\}=\left\{\dfrac{7}{8}\right\}$

Άρα η συνάρτηση, με το ευρύτερο πεδίο ορισμού που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος είναι η $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-4x}{8x-7} & ,x\neq\dfrac{7}{8}\\ -\dfrac{1}{2} & ,x=\dfrac{7}{8}\end{cases}$

Σχόλιο:

Στην παραπάνω άσκηση το πεδίο ορισμού της σύνθεσης δεν θα μπορούσε να είναι το $\mathbb{R}$ γιατί τότε θα ίσχυε: $g\left(f\left(\dfrac{7}{8}\right)\right)=4\cdot\dfrac{7}{8}-2=\dfrac{3}{2}$ (από τον τύπο της σύνθεσης) και $g\left(f\left(\dfrac{7}{8}\right)\right)=g(\alpha)=\dfrac{3\alpha-1}{2\alpha+1}$ με $\alpha=f\left(\dfrac{7}{8}\right)$(από τον τύπο της g). Έτσι, για τον αριθμό α θα είχαμε: $\dfrac{3\alpha-1}{2\alpha+1}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow$

$2(3\alpha-1)=3(2\alpha+1)\Rightarrow 6\alpha-2=6\alpha+3\Rightarrow 0\cdot\alpha=5$

που είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=-x^4$, $x\in\mathbb{R}$. **Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:** $(f\circ g)(x)=\sqrt{16-x^4}$ **(1) για κάθε** $x\in[-2,2]$.

Λύση:

Εύρεση του πεδίου ορισμού της f:

Από υπόθεση $D_g = \mathbb{R}$ και $D_{f\circ g} = [-2,2] (= A)$

Το πεδίο ορισμού της f θα είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου τιμών $g(A)$ της g στο $A = [-2,2]$ αφού $g(A) \subseteq D_f$

Εύρεση του συνόλου τιμών της g στο A

Έστω $y = -x^4$ για κάθε $x \in A = [-2,2]$.

Έχουμε: $y = -x^4 \Leftrightarrow x^4 = -y$ (1).

- Αν $y > 0$ η (1) είναι αδύνατη.
- Αν $y \le 0$ τότε η εξίσωση (1) έχει λύση.

Όμως $x \in [-2,2] \Rightarrow |x| \le 2 \Rightarrow |x|^4 \le 2^4 \Rightarrow x^4 \le 16$
$\Rightarrow -y \le 16 \Rightarrow y \ge -16$. Άρα $g(A) = [-16,0]$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι ένα υπερσύνολο B του $[-16,0]$.

Εύρεση του τύπου της f:

Έστω $y = g(x) = -x^4$. Τότε $x^4 = -y$. Έτσι,

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{16 - x^4} = \sqrt{16 + y}$$

Οι ζητούμενες συναρτήσεις f είναι άπειρες, της μορφής: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{16+x} & , x \in [-16,0] \\ h(x) & , x \in B - [-16,0] \end{cases}$

Όπου h μια οποιαδήποτε συνάρτηση που μπορεί να οριστεί στο $B - [-16,0]$

Πράγματι η συνάρτηση $f\circ g$

✓ Ορίζεται εφόσον: $x \in [-2,2]$ και $g(x) \in D_f$ δηλαδή $x \in [-2,2]$ και $-x^4 \in B$ δηλαδή $x \in [-2,2]$. Άρα $D_{f\circ g} = [-2,2]$

✓ Έχει τύπο:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{16 + g(x)} = \sqrt{16 + (-x^4)}$$
$$= \sqrt{16 - x^4}$$

Διότι $g(x) = -x^4 \ge -16$ για κάθε $x \in [-2,2]$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι δεν έχει σημασία για τη σύνθεση $f\circ g$ ο τύπος της f στο $B - [-16,0]$.

ΑΣΚΗΣΗ 4η

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2,2]$

A) Να βρεθεί τουλάχιστον μια συνάρτηση f έτσι, ώστε $(g\circ f)(x) = |2\sigma\upsilon\nu x|$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f έτσι, ώστε $(g\circ f)(x) = |2\sigma\upsilon\nu x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Λύση:

A) Εύρεση του πεδίου ορισμού της f:

Από την υπόθεση το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι: $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$. Όμως $D_{g\circ f} \subseteq D_f$ δηλαδή $\mathbb{R} \subseteq D_f$. Επίσης είναι γνωστό ότι $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Από την ιδιότητα των συνόλων σύμφωνα με την οποία ισχύει: $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$, έχουμε: $D_f = \mathbb{R}$.

Εύρεση του τύπου της f:

Από την υπόθεση έχουμε: $(g\circ f)(x) = |2\sigma\upsilon\nu x|$
$\Rightarrow g(f(x)) = |2\sigma\upsilon\nu x|$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης για κάθε $x \in D_{g\circ f}$, όπου $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f \,/\, -2 \le f(x) \le 2\}$ έχουμε $g(f(x)) = \sqrt{4 - f^2(x)}$ (3). Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (2) και (3) προκύπτει ότι: $\sqrt{4 - f^2(x)} = |2\sigma\upsilon\nu x|$. Οπότε

$$\sqrt{4 - f^2(x)} = |2\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow 4 - f^2(x) = 4\sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$\Leftrightarrow f^2(x) = 4 - 4\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = 4(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)$$
$$\Leftrightarrow f^2(x) = 4\eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η σχέση (4) δεν σημαίνει ότι: $f(x) = 2\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -2\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά σημαίνει ότι: $f(x) = 2\eta\mu x$ για κάποια $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -2\eta\mu x$ για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί την (4) είναι η $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μια άλλη είναι η $f(x) = -2\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

Μια άλλη είναι η $f(x) = \begin{cases} -2\eta\mu x & , x < 0 \\ 2\eta\mu x & , x \ge 0 \end{cases}$ κ.λ.π

B) Από την (4) προκύπτει ότι υπάρχει $B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε: $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu x & , x \in B \\ -2\eta\mu x & , x \in \mathbb{R} - B \end{cases}$

Προφανώς υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f με την παραπάνω μορφή.

Σημείωση: Για την κατανόηση του ισχυρισμού μας στο ερώτημα Α) δηλαδή ότι αν $f^2(x)=g^2(x)$ για κάθε $x\in A\subseteq \mathbb{R}$ τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι: ($f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$) ή ($f(x)=-g(x)$ για κάθε $x\in A$) προσέξτε το παρακάτω παράδειγμα:

Για τις συναρτήσεις $f(x)=|x-1|$ και $g(x)=x-1$ ισχύει: $f^2(x)=g^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όμως οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ούτε ίσες ούτε αντίθετες αλλά ισχύει:

$$f(x)=\begin{cases}-g(x) & ,x\in(-\infty,1)\\ g(x) & ,x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

Ας δούμε επίσης και τον ισχυρισμό ότι αν $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

Για τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\geq 0\\ 2019x & ,x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}2020x & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$ ισχύει ότι $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ενώ δεν ισχύει ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Α) Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f(x^3)=3x^4+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Β) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f(x^3)=3x^4+1$ (1). Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(0)$.

Λύση:

Α) Στην άσκηση αυτή το πεδίο ορισμού της ζητούμενης συνάρτησης δίνεται ότι είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πράγματι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3$ που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, επειδή το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$, για το πεδίο ορισμού της f θα ισχύει: $g(A)=\mathbb{R}\subseteq D_f$.

Όμως $D_f\subseteq\mathbb{R}$, άρα: $D_f=\mathbb{R}$

Θέτουμε $x^3=t$, $t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{t} & ,\ t\geq 0\\ -\sqrt[3]{-t} & ,\ t<0\end{cases}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $t\geq 0$ τότε έχουμε:
  $f(t)=3\left(\sqrt[3]{t}\right)^4+1=3\left(\sqrt[3]{t}\right)^3\cdot\left(\sqrt[3]{t}\right)+1=3t\sqrt[3]{t}+1$
- Αν $t<0$ τότε έχουμε:
  $f(t)=3\left(-\sqrt[3]{-t}\right)^4+1=3\left(-\sqrt[3]{-t}\right)^3\cdot\left(-\sqrt[3]{-t}\right)+1=$
  $-3(-t)\cdot\left(-\sqrt[3]{-t}\right)+1=-3t\sqrt[3]{-t}+1$

Άρα: $f(x)=\begin{cases}3x\sqrt[3]{x}+1 & ,\ x\geq 0\\ -3x\sqrt[3]{-x}+1 & ,\ x<0\end{cases}$

Β) Η συνάρτηση $f(x^3)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $3x^4+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, οπότε παραγωγίζοντας τα μέλη της (1) έχουμε:

$$\left(f(x^3)\right)'=\left(3x^4+1\right)'\Rightarrow 3x^2f'(x^3)=12x^3\ \ (2)$$

Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να βρούμε από την (2) το $f'(0)$.

Στο ερώτημα Α) όμως βρήκαμε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}3x\sqrt[3]{x}+1 & ,\ x\geq 0\\ -3x\sqrt[3]{-x}+1 & ,\ x<0\end{cases}$$

Οπότε

για $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-3x\sqrt[3]{-x}}{x}=0$

και για $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{x}=0$

Άρα $f'(0)=0$

(Η άσκηση 5 προτάθηκε από τον Δημήτρη Αργυράκη)

Τάξη: Γ΄

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Στέλιος Κοφινάς – Γιώργος Μαυρίδης – Παράρτημα **Ε.Μ.Ε. Λάρισας**

Άσκηση 1η: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 0 \\ x+1, & x>1 \end{cases}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της.
iii) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f και f^{-1}

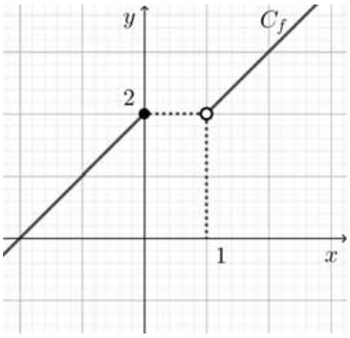
Λύση

i) Για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

- αν $x_1,\ x_2\in(-\infty,0]$, τότε $x_1+2=x_2+2$ οπότε $x_1=x_2$
- αν $x_1\in(-\infty,0]$ και $x_2\in(1,+\infty)$, τότε $x_1+2=x_2+1$ οπότε $x_1+1=x_2$ που είναι αδύνατον διότι $x_1\le 0\Rightarrow x_1+1\le 1$ και $x_2>1$.
- αν $x_1,\ x_2\in(1,+\infty)$, τότε $x_1+1=x_2+1$ οπότε $x_1=x_2$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα, η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Η γραφική παράσταση της f (παρακάτω σχήμα)

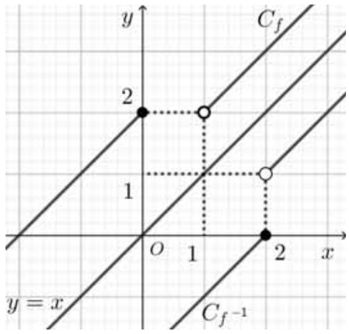


αποτελείται από τις ημιευθείες $y=x+2$, $x\le 0$ και $y=x+1$, $x>1$.

ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y=x$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} αποτελείται από τις ημιευθείες με εξισώσεις: $y=x-2$, $x\le 2$ και $y=x-1$, $x>2$.

Δηλαδή, $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2, & x\le 2 \\ x-1, & x>2 \end{cases}$

iii) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από



τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(1,+\infty)$ ως πολυωνυμική. Επίσης,

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=0+2=2=f(0)$

Άρα, η f είναι συνεχής και στο σημείο 0. Τελικά, η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

- Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 2^-}f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=2-2=0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=2-1=1$.

Οπότε, $\lim\limits_{x\to 2^-}f^{-1}(x)\ne\lim\limits_{x\to 2^+}f^{-1}(x)$ και συνεπώς δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f^{-1}(x)$.

Άρα, η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι συνεχής στο σημείο 2. Τελικά η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{2\}$

Άσκηση 2η: Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^5-x^4+x^2-2x+1=0 \quad \text{έχει:}$$

i) ακριβώς μία ακέραια ρίζα
ii) μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

i) Η δοθείσα εξίσωση είναι πολυωνυμική με ακέραιους συντελεστές. Επομένως, οι μόνες πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου της δηλαδή οι αριθμοί -1 και 1.

Όμως, $(-1)^5-(-1)^4+(-1)^2-2\cdot(-1)+1=2\ne 0$ και $1^5-1^4+1^2-2\cdot 1+1=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο αριθμός 1 είναι η μοναδική ακέραια ρίζα της δοθείσας εξίσωσης.

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει ότι το πολυώνυμο

$$P(x)=x^5-x^4+x^2-2x+1$$

διαιρείται με το $x-1$. Επομένως, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-1)Q(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner εκτελούμε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και βρίσκουμε το πολυώνυμο $Q(x)$.

1	–1	0	1	–2	1	1
	1	0	0	1	–1	
1	0	0	1	–1	0	

Άρα, $Q(x)=x^4+x-1$. Οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)Q(x)=0$.

Μεθοδολογία: *Το θεώρημα του Bolzano δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο διάστημα $[0,1]$ για τη συνάρτηση $P(x)=x^5-x^4+x^2-2x+1$ αφού $P(1)=0$. Όμως, $P(x)=(x-1)\cdot Q(x)$. Εξετάζουμε λοιπόν, αν το θεώρημα του Bolzano μπορεί να εφαρμοστεί στο διάστημα $[0,1]$ για τη συνάρτηση $Q(x)=x^4+x-1$*

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $Q(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Q είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

Επίσης $Q(0)\cdot Q(1)=-1\cdot 1=-1<0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $Q(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 3η: Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(f(x))<f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii) η συνάρτηση f δεν έχει ολικό ελάχιστο

iii) η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Λύση

Σχόλιο: *Όταν δίνεται κάποια σχέση, προφανώς εννοείται ότι οι παραστάσεις που εμφανίζονται σ' αυτήν έχουν νόημα αριθμού.*

i) Από τη δοθείσα σχέση προκύπτει ότι $f(x)\in D_f$ για κάθε $x\in D_f$. Δηλαδή, $f(x)\in[0,1]$ για κάθε $x\in[0,1]$. Επομένως, $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

ii) *«Η απαγωγή σε άτοπο είναι μια μαθηματική μέθοδος, αλλά έχει κάποια ομοιότητα με την ειρωνεία. Η ειρωνεία υιοθετεί μια ορισμένη ιδέα και την τονίζει όλο και περισσότερο, μέχρι να οδηγήσει σε κάτι το φανερά παράλογο.»* George Polya

Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0\in[0,1]$. Δηλαδή, ότι ισχύει η σχέση $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in[0,1]$. Θέτοντας όπου x το $f(x_0)\in[0,1]$ παίρνουμε $f(f(x_0))\ge f(x_0)$ που είναι αδύνατον, αφού από την υπόθεση ισχύει $f(f(x))<f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$. Άρα, η συνάρτηση f δεν έχει ολικό ελάχιστο.

iii) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Αυτό όμως είναι αδύνατον σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα. Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Άσκηση 4η: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=4\ln x-\frac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f^{-1}(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Λύση

i) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$\ln x_1<\ln x_2 \Rightarrow \begin{cases} 4\ln x_1<4\ln x_2 \\ \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\ln x_1<4\ln x_2 \\ -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\ln x_1-\frac{1}{x_1}<4\ln x_2-\frac{1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς $1-1$.

ii)

Σημείωση: *Η γνώση της μονοτονίας της συνεχούς συνάρτησης f επιτρέπει την εύρεση του συνόλου τιμών της. Δηλαδή, την εύρεση του πεδίου ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.*

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως, $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Όμως, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(4\ln x-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\ln x-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$

Είναι λοιπόν $f\left((0,+\infty)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Δηλαδή, $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Παρατήρηση

*Κάθε ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$ **(1)** είναι κατ' ανάγκη και ρίζα της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$ **(2).** Πράγματι, αν υπάρχει x_0 τέτοιος, ώστε $f(x_0)=x_0$, τότε $f^{-1}(x_0)=x_0$ και συνεπώς $f^{-1}(x_0)=f(x_0)$*

iii) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, δηλαδή το σύνολο $(0,+\infty)$. Επομένως, η εξίσωση $f^{-1}(x)=\alpha$ είναι αδύνατη αν $\alpha\in(-\infty,0]$, ενώ έχει μοναδική λύση, αν $\alpha\in(0,+\infty)$.

iv) Εξετάζουμε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$. Προς τούτο, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-x=4\ln x-\frac{1}{x}-x,\ x\in[1,e]$$

και παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $g(1)=4\ln1-\frac{1}{1}-1=-2<0,$

  $g(e)=4\ln e-\frac{1}{e}-e=4-\frac{1}{e}-e>0.$

  Οπότε $g(0)g(e)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση: $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

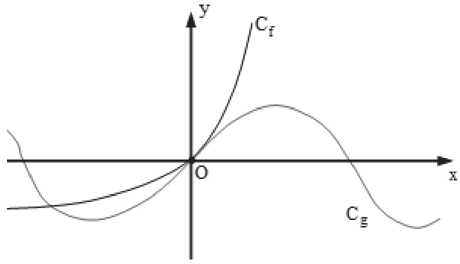
Συνεπώς, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $M(x_0,x_0)$ με την ευθεία $y=x$. Το σημείο αυτό είναι κατ' ανάγκη και κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}

Άσκηση 5η: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, καθώς επίσης και η γραφική παράσταση της συνάρτηση $g(x)=ημx,\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{f(x)-g(x)}=+\infty.$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $O(0,0)$.

iii) Αν η C_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την (ε) *παρά μόνο το σημείο επαφής τους* και ισχύει $f(1)>1$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.



Λύση

i) Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)-g(x)\right]=f(0)-g(0)=0$ και $f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$ κοντά στο 0.

Οπότε, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{f(x)-g(x)}=+\infty.$

ii) Κοντά στο 0 έχουμε $f(x)>ημx$. Οπότε: $\frac{f(x)}{x}>\frac{ημx}{x}$ (1) για $x>0$ και $\frac{f(x)}{x}<\frac{ημx}{x}$ (2) για $x<0$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ οπότε υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$,

και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}$ άρα

$(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\geq\lim\limits_{x\to0^+}\frac{ημx}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq1$
$\Rightarrow f'(0)\geq1$

$(2)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}\leq\lim\limits_{x\to0^-}\frac{ημx}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leq1\Rightarrow f'(0)\leq1$

Άρα, $f'(0)=1$ και συνεπώς η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι: $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x.$

iv) Η συνάρτηση $f(x)-x$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0,+\infty)$. Οπότε, διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Και επειδή $f(1)-1>0$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει

$$f(x)-x>0\Leftrightarrow f(x)>x.$$

Όμως, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

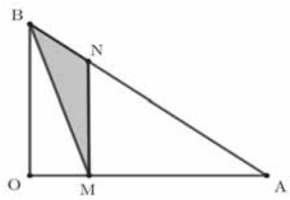
Τάξη: Γ΄

Ασκήσεις – Προβλήματα

Νικόλαος Ζέρβας, Άγγελος Παπαϊωάννου – Παράρτημα **Ε.Μ.Ε. Λάρισας**

Αφορμή για το παρόν άρθρο αποτελεί το «θέμα Γ» των πανελλαδικών εξετάσεων στα μαθηματικά της ομάδας προσανατολισμού θετικών σπουδών της χρονιάς 2018. Το θέμα αυτό ήταν μία άσκηση - πρόβλημα από το σχολικό βιβλίο της **Γ΄ Λυκείου** «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» εμπλουτισμένο με κάποια επιπλέον ερωτήματα. Με αφορμή το θέμα αυτό κάναμε μια συλλογή των ασκήσεων-προβλημάτων που υπάρχουν στα βιβλία των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας στις τρεις τάξεις του Λυκείου. Σας παρουσιάζουμε μερικά από αυτά, στα οποία προσθέσαμε κάποια δικά μας ενδεικτικά ερωτήματα ώστε να έχουν τη μορφή ολοκληρωμένων θεμάτων για πανελλαδικές εξετάσεις.

Άσκηση 1η: Στο επόμενο σχήμα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο O. Το σημείο M κινείται στην OA από το σημείο O ως το A έτσι, ώστε $MN//OB$. Αν είναι $OA=4$, $OB=3$, $OM=x$ και ονομάσουμε $E(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου BMN, τότε:



1) **Να αποδείξετε ότι $E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$, $0\le x\le 4$.**
2) **Να βρείτε τη θέση του M πάνω στην OA για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού;**
3) **Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία.**
4) **Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.**
5) **Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$, όπου $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη σύνθεση της $E(x)$ με την $f(x)=\ln x$**

Πηγή της άσκησης: ***Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Γενικής Παιδείας Α΄ Λυκείου***

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ομοιότητα τριγώνων, Εμβαδόν τριγώνου

Λύση 1) Από την ομοιότητα των τριγώνων AMN, AOB έχουμε:

$$\frac{MN}{OB}=\frac{AM}{OA}\Leftrightarrow\frac{MN}{3}=\frac{4-x}{4}\Leftrightarrow MN=\frac{3}{4}(4-x)$$

Επομένως το τρίγωνο BMN έχει εμβαδόν

$$E(x)=\frac{MN\cdot MO}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot(4-x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$$ με

$x\ge 0$ και $4-x\ge 0$, δηλαδή $0\le x\le 4$.

2) Ζητάμε να βρούμε την τιμή του $x\in[0,4]$ για την οποία η συνάρτηση $E(x)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Ο τύπος της συνάρτησης $E(x)$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου παίρνει τη μορφή $E(x)=-\frac{3}{8}(x-2)^2+\frac{3}{2}$, $x\in[0,4]$ και έχουμε: $(x-2)^2\ge 0\Rightarrow -\frac{3}{8}\cdot(x-2)^2\le 0\Rightarrow$

$-\frac{3}{8}\cdot(x-2)^2+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}\Rightarrow E(x)\le E(2)$, $x\in[0,4]$

Επομένως το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x=2$, δηλαδή όταν το M είναι μέσο του OA και η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι $E(2)=\frac{3}{2}$

Σημείωση 1.: Η συνάρτηση E είναι της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=-\frac{3}{8}<0$, $\beta=\frac{3}{2}$ και $\gamma=0$, οπότε παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, δηλαδή για $x=2$ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Σημείωση 2. : Στο ερώτημα 2) καθώς και στο ερώτημα 3) μπορούμε να εργαστούμε και με παράγωγο.

3) Έστω $x_1,x_2\in[0,2]$ με $x_1<x_2$, τότε:

$0\le x_1<x_2\le 2\Rightarrow -2\le x_1-2<x_2-2\le 0$

$\Rightarrow 0\le -(x_2-2)<-(x_1-2)\le 2$

$\Rightarrow[-(x_2-2)]^2<[-(x_1-2)]^2\Rightarrow(x_1-2)^2>(x_2-2)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3}{8}(x_1-2)^2+\frac{3}{2}<-\frac{3}{8}(x_2-2)^2+\frac{3}{2}\Rightarrow E(x_1)<E(x_2)$.

Επομένως η συνάρτηση E είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$. Ομοίως αν $x_1,x_2\in[2,4]$ με $x_1<x_2$, τότε $2\le x_1<x_2\le 4\Rightarrow 0\le x_1-2<x_2-2\le 2$

$\Rightarrow(x_1-2)^2<(x_2-2)^2\Rightarrow\frac{3}{8}(x_1-2)^2<\frac{3}{8}(x_2-2)^2$

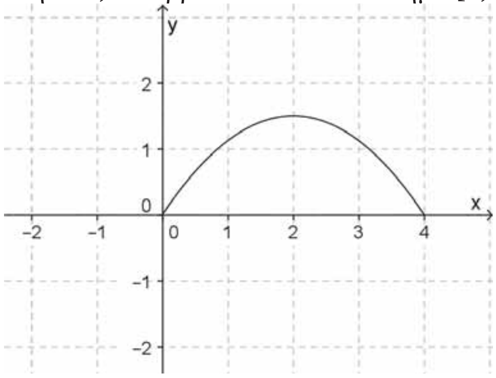
$\Rightarrow -\frac{3}{8}\cdot(x_1-2)^2>-\frac{3}{8}\cdot(x_2-2)^2$

$$\Rightarrow -\frac{3}{8}\cdot(x_1-2)^2+\frac{3}{2} > -\frac{3}{8}\cdot(x_2-2)^2+\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow E(x_1)>E(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση E είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,4]$

Σημείωση: Η συνάρτηση είναι της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=-\frac{3}{8}<0,\ \beta=\frac{3}{2}$ και $\gamma=0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ δηλαδή στο $[0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},4\right]$ δηλαδή στο $[2,4]$.

4) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης E είναι το τόξο παραβολής με κορυφή το σημείο Ο΄(2, 3/2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση x=2, που βρίσκεται στο διάστημα [0,4]



5) Αναζητούμε τη σύνθεση της E με την f, δηλαδή τη συνάρτηση $g=f\circ E$. Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της έχουμε:

$$\begin{cases} x\in A_E \\ E(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ -\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<4$$

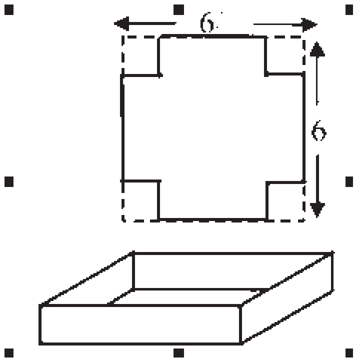
Άρα: $(f\circ E)(x)=f(E(x))=\ln\left(-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x\right)$, $x\in(0,4)$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x\right)=$

$\lim\limits_{y\to 0^+}\ln y=-\infty$, όπου $y=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$

και $\lim\limits_{x\to 4^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\ln\left(-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x\right)=$

$\lim\limits_{y\to 0^+}\ln y=-\infty$, όπου $y=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$

Άσκηση 2η: Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6dm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο ανοιχτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα πάνω οι πλευρές. Αν κάθε ένα από τα τέσσερα ίσα τετράγωνα έχει πλευρά xdm και f(x) είναι ο όγκος του σχηματιζόμενου δοχείου



1) Να αποδείξετε ότι $f(x)=4x^3-24x^2+36x$, $x\in(0,3)$

2) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-16}{x}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}$

3) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον τρόπος να κοπεί η κάθε πλευρά κατά xdm με $x\in(0,3)$ τέτοιος, ώστε το δοχείο να έχει όγκο ίσο με $10dm^3$.

Πηγή της άσκησης: Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας Γ Λυκείου

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμβαδόν τετραγώνου, όγκος παραλληλεπιπέδου.

Λύση. 1) Το σχηματιζόμενο δοχείο έχει βάση τετράγωνο πλευράς $6-2x$ και ύψος x Επομένως ο όγκος του θα είναι

$V=f(x)=x\cdot(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$ με $x\in(0,3)$.

2) Ισχύει ότι $f(x+1)-16=...=4x^3-12x^2$

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-16}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\cdot x^3-12\cdot x^2}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}(4x^2-12x)=0$.

Σημείωση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με $f'(x)=12x^2-24x+36$. Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-16}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=f'(1)=0$$

Για κάθε $x\in(0,2)$ ισχύει: $\left|\frac{f(x+1)-16}{x}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|=$

$$=\left|\frac{f(x+1)-16}{x}\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{f(x+1)-16}{x}\right|\Leftrightarrow$$

$$-\left|\frac{f(x+1)-16}{x}\right|\le\frac{f(x+1)-16}{x}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\le\left|\frac{f(x+1)-16}{x}\right|$$

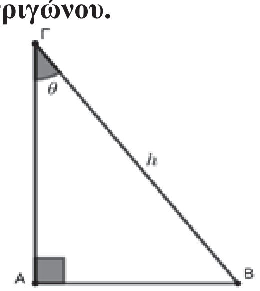
Και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-16}{x}=0$ προκύπτει από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-16}{x}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}=0$

3) Ζητάμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=10$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,3)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-10,\ x\in(0,3)$. Οπότε $g(x)=4x^3-24x^2+36x-10,\ x\in(0,3)$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$ και επιπλέον ισχύει $g(1)\cdot g(2)=6\cdot(-2)=-12<0$. Επομένως λόγω του θεωρήματος του Bolzano η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=10$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,2)\subseteq(0,3)$, άρα έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,3)$.

Σημείωση: Με τη βοήθεια της παραγώγου αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τρόποι για να δημιουργηθεί δοχείο που να έχει όγκο ίσο με $10\,dm^3$.

Άσκηση 3η: Με συρματόπλεγμα μήκους 40m περιφράσσουμε τμήμα γης σχήματος ορθογωνίου τριγώνου.



Αν η υποτείνουσα του τριγώνου είναι $h\,m$ και η μία οξεία γωνία $\theta\,rad$, τότε:

1) Να δείξετε ότι $h(0)=\dfrac{40}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+1}$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

2) Για ποια τιμή του θ η υποτείνουσα παίρνει τη μικρότερη τιμή και ποια είναι αυτή;

3) Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές της γωνίας θ για τις οποίες το τρίγωνο έχει εμβαδό $E=40\,m^2$.

Πηγή της άσκησης: Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας Τύπος εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου

Λύση. 1) Γνωρίζουμε ότι: $\eta\mu\theta=\dfrac{AB}{h}$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{A\Gamma}{h}$

Άρα: $AB+A\Gamma+B\Gamma=40\Leftrightarrow$
$h\cdot\eta\mu\theta+h\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+h=40\Leftrightarrow$

$h=h(\theta)=\dfrac{40}{1+\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, αφού για κάθε $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει: $1+\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$

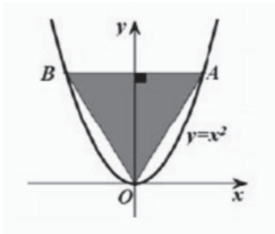
2) Ισχύει: $\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=\eta\mu\theta+\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=$

$$\eta\mu\theta+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\cdot\eta\mu\theta+\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

Άρα: $h(\theta)=\dfrac{40}{1+\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως η υποτείνουσα h(θ) παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν το $\eta\mu\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του δηλαδή το 1 που συμβαίνει για $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.



Άρα η συνάρτηση h παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Η ελάχιστη τιμή για την υποτείνουσα h είναι $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=40\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$

Σημείωση: Το h(θ) γίνεται ελάχιστο όταν ο παρονομαστής ημθ+συνθ+1 γίνεται μέγιστος και το εξετάζουμε με τη βοήθεια της παραγώγου.

3) Για το εμβαδόν του τριγώνου ισχύει

$$E(\theta)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot A\Gamma=\frac{1}{2}h^2(\theta)\cdot\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta,\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Είναι $E(\theta)=40\Leftrightarrow h^2(\theta)\cdot\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=80\Leftrightarrow$

$$\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{80}{h^2(\theta)}\Leftrightarrow\frac{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2-1}{2}=\frac{80}{h^2(\theta)}\oplus$$

$$\frac{\left(\frac{40}{h(\theta)}-1\right)^2-1}{2}=\frac{80}{h^2(\theta)}\Leftrightarrow\left[\left(\frac{40}{h(\theta)}-1\right)^2-1\right]h^2(\theta)=160$$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow h(\theta)=18$

Επομένως θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση h(θ)=18 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Έστω $A_1=\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ και $A_2=\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ οπότε:

$$h(A_1)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}h(\theta),\lim_{x\to0^+}h(\theta)\right)=\left(40\left(\sqrt{2}-1\right),20\right)$$

$$h(A_2)=\left[h\left(\frac{\pi}{4}\right),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x)\right)=\left[40\left(\sqrt{2}-1\right),20\right)$$

Επειδή $18\in h(A_1)$ και $18\in h(A_2)$ η εξίσωση $h(\theta)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο A_1 και μία στο A_2, αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη σε κάθε διάστημα.

Άσκηση $4^η$: Στο επόμενο σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

1) Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου Α και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

2) Αν $f(x)$ είναι η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, να βρείτε το $\lim_{x\to-2}g(x)$ αν ισχύει $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

3) Για τη συνάρτηση f του σχήματος, να δείξετε ότι η εξίσωση:

$|f(x)-\ln x|=\ln x-f(x)$ είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$

4) Αν $\Phi(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)+\Phi^2(x)=4,\ x\in[-2,2]$ και $\Phi(0)=2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης Φ.

Πηγή της άσκησης: ***Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου***

Προαπαιτούμενες γνώσεις: ***Καρτεσιανό επίπεδο, εμβαδόν τριγώνου.***

Λύση. 1) Αν $x>0$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, τότε είναι $A(x,x^2)$ και λόγω συμμετρίας $B(-x,x^2)$. Άρα $(AB)=2x$ και

$$(OA)=(OB)=\sqrt{x^2+(x^2)^2}=\sqrt{x^2+x^4}$$

Επειδή όμως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο θα ισχύει $(AB)=(OA)$, άρα

$$2\cdot x=\sqrt{x^2+x^4}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}4\cdot x^2=x^2+x^4\Leftrightarrow$$
$$3\cdot x^2-x^4=0\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$$

αφού $x>0$ και $(OAB)=\frac{(AB)\cdot υ}{2}=3\cdot\sqrt{3}$ τ.μ.

2) Θέτουμε $\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow g(x)=\frac{x^2}{h(x)}$

με $\lim_{x\to-2}h(x)=+\infty$ άρα

$$\lim_{x\to-2}g(x)=\lim_{x\to-2}\left[x^2\cdot\frac{1}{h(x)}\right]=0 \text{ αφού } \lim_{x\to-2}x^2=4$$

και $\lim_{x\to-2}\frac{1}{h(x)}=0$

Σημείωση: Από υπόθεση $\lim_{x\to-2}\frac{x^2}{g(x)}=+\infty$. Όμως $\lim_{x\to-2}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$. Άρα: $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2}{g(x)}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-2}\frac{1}{g(x)}=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to-2}g(x)=0$$

3) $|f(x)-\ln x|=\ln x-f(x)\Leftrightarrow f(x)-\ln x\le0\quad(1)$

Έστω $h(x)=f(x)-\ln x=x^2-\ln x$, $x>0$.

Επομένως $(1)\Leftrightarrow h(x)\le0$.

Η h παραγωγίσιμη με $h'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$, $x>0$

- $h'(x)<0\Leftrightarrow0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{2}}$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ τη τιμή $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$ $=\frac{1}{4}+\ln\sqrt{2}>0$. Άρα $h(x)>0$ για κάθε $x>0$

Οπότε η ανίσωση $f(x)-\ln x\le0$ είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$

4) $f(x)+\Phi^2(x)=4\Leftrightarrow x^2+\Phi^2(x)=4\Leftrightarrow\Phi^2(x)=4-x^2$

$\Leftrightarrow\left(\Phi(x)=\sqrt{4-x^2}\text{ ή }\Phi(x)=-\sqrt{4-x^2}\right)$,

για κάθε $x\in[-2,2]$. Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $\Phi(x)=0$ στο $[-2,2]$:

$\Phi(x)=0\Leftrightarrow\Phi^2(x)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$. Άρα η συνάρτηση Φ δεν μηδενίζεται για κάθε $x\in(-2,2)$ και επειδή είναι συνεχής στο $(-2,2)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$ και επειδή $\Phi(0)=2$ θα ισχύει $\Phi(x)>0$, για κάθε $x\in(-2,2)$.

Άρα $\Phi(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in(-2,2)$ και επειδή $\Phi(-2)=\Phi(2)=0$ ισχύει $\Phi(x)=\sqrt{4-x^2},x\in[-2,2]$.

Συνεχείς συναρτήσεις και ρητοί αριθμοί

Στέλιος Μαρίνης και Βασίλης Νεστορίδης

Όλοι γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό διάστημα (α,β), $\alpha<\beta$ περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς. Ακόμη αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ και τότε σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο η f διατηρεί πρόσημο σε κάποια περιοχή[1] $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $\delta>0$ του x_0. Στα πάρα κάτω θα βασιστούμε σ' αυτά τα δύο προαναφερθέντα πράγματα.

A: Η έννοια της συνέχειας σε σημείο

A_1: Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής $f(x_0)>0$ στο $x_0\in\mathbb{R}$ τότε, όπως ήδη αναφέραμε, υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Χρησιμοποιώντας το A_1 αποδείξτε το ακόλουθο:

A_2: Αν είναι συνάρτηση συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε $g(x_0)-\varepsilon<g(x)<g(x_0)+\varepsilon$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f_1(x)=g(x)-g(x_0)+\varepsilon$, $x\in\mathbb{R}$. Αυτή είναι συνεχής στο x_0 και $f_1(x_0)=\varepsilon>0$. Άρα βάσει του A_1 υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε $f_1(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$. Έτσι βρίσκουμε $g(x)>g(x_0)-\varepsilon$ για κάθε $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$. (1)
Θεωρούμε ακόμη την συνάρτηση $f_2(x)=-g(x)+g(x_0)+\varepsilon$. Αυτή είναι επίσης συνεχής στο x_0 και $f_2(x_0)=\varepsilon>0$. Άρα βάσει του A_1 υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε $f_2(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$. Έτσι βρίσκουμε $g(x)<g(x_0)+\varepsilon$ για κάθε $x\in(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$ (2) Θέτουμε $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$. Τότε συνδυάζοντας τα (1) και (2) βρίσκουμε $g(x_0)-\varepsilon<g(x)<g(x_0)+\varepsilon$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (3)

Παρατήρηση: Το A_2 ισοδύναμα γράφεται ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (4). Σε πιο αυστηρές παραστάσεις της θεωρίας η (4) αποτελεί ορισμό για την συνέχεια της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.

B: Ταύτιση συνεχών συναρτήσεων

B_1: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(q)=0$ για κάθε ρητό αριθμό q. Δείξτε $f\equiv 0$.

Απόδειξη: Αρκεί να δειχθεί $f(x_0)=0$ για κάθε άρρητο αριθμό x_0. Έστω x_0 άρρητος αριθμός. Ισχύει $f(x_0)>0$ ή $f(x_0)<0$ ή $f(x_0)=0$.

---

[1] Στο σχολικό εγχειρίδιο απλουστευμένα αυτό αναφέρεται ως «κοντά στο x_0»

Έστω $f(x_0)>0$. Τότε σύμφωνα με το Α υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Αλλά το διάστημα $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ περιέχει ένα ρητό αριθμό q (και πολλούς άλλους ρητούς αριθμούς). Για $x=q\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ έχουμε εξ υποθέσεων $f(x)=f(q)=0$, το οποίο αντιφάσκει στο $f(x)>0$. Άρα αποκλείεται $f(x_0)>0$. Έστω τώρα $f(x_0)<0$, τότε σύμφωνα με το Α υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Αλλά το διάστημα $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ περιέχει ένα ρητό αριθμό q. Για $x=q\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ έχουμε εξ υποθέσεων $f(x)=f(q)=0$, το οποίο αντιφάσκει στο $f(x)<0$. Άρα αποκλείεται και $f(x_0)<0$, οπότε $f(x_0)=0$.

B_2: Έστω $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις. Αν $\omega(q)=g(q)$ για κάθε ρητό αριθμό q, δείξτε $\omega\equiv g$

.

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση $f=\omega-g$. Αυτή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(q)=0$ για κάθε ρητό αριθμό q. Άρα βάσει του B_1 ισχύει $f\equiv 0$, οπότε $\omega\equiv g$.

B_3: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε $f(q)=0$ για κάθε ρητό αριθμό q και ότι η f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό x_0. Τότε $f\equiv 0$.

Απόδειξη: Η ίδια με την απόδειξη του B_1 διότι σ' αυτή την απόδειξη χρησιμοποιήθηκε μόνο ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό x_0 και δεν χρειαστήκαμε την συνέχεια της f σε ρητούς αριθμούς x_0.

B_4: Έστω $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι ω και g είναι συνεχείς σε κάθε άρρητο αριθμό x_0 και ότι $\omega(q)=g(q)$ για κάθε ρητό αριθμό q. Τότε $\omega\equiv g$.

Απόδειξη: Η ίδια με την απόδειξη του B_2 μόνο που αντί να χρησιμοποιηθεί το B_1 θα χρησιμοποιηθεί το B_3.

Ερώτηση: Στα B_1,B_2,B_3 και B_4 είναι δυνατόν να εναλλάξουμε τους ρόλους των ρητών και άρρητων αριθμών; Αν ναι, γράψετε τις αντίστοιχες διατυπώσεις B_1',B_2',B_3',B_4' και κάνετε τις αποδείξεις. Ακόμη εξετάσετε αν το ακόλουθο είναι σωστό ή όχι.

B_5: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε κάθε ανοικτό διάστημα (α,β), $\alpha<\beta$ περιέχει και στοιχεία του A. Έστω $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις.

Υποθέτουμε ότι η ω και η g είναι συνεχείς σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}-A$ και ότι ισχύει $\omega(q)=g(q)$ για κάθε $q\in A$. Τότε $\omega\equiv g$.

Γ: Συναρτήσεις που μετατρέπουν αριθμητικές προόδους σε γεωμετρικές

Μία πρόοδος α_n, $n\in\mathbb{Z}$ λέγεται αριθμητική πρόοδος αν είναι της μορφής $\alpha_n=c+n\tau$, $n\in\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,...\}$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς c και τ. Μία πρόοδος b_n, $n\in\mathbb{Z}$ λέγεται γεωμετρική πρόοδος αν είναι της μορφής $b_n=C\cdot\lambda^n$, $n\in\mathbb{Z}$, για κάποιους πραγματικούς αριθμούς C και λ, $\lambda\neq 0$.

Γ_1: Έστω $k\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=k\alpha^x$. Τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και μετατρέπει αριθμητικές προόδους σε γεωμετρικές.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο κάθε εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής. Άρα η f είναι συνεχής. Ακόμη $f(\alpha_n)=k\alpha^{\alpha_n}=k\alpha^{(c+n\tau)}=k\alpha^c(\alpha^\tau)^n$, η οποία είναι γεωμετρική με $C=k\alpha^c$ και $\lambda=\alpha^\tau>0$.

Γ_2: Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση που μετατρέπει αριθμητικές προόδους σε γεωμετρικές. Τότε υπάρχουν $K\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$, ώστε για κάθε ρητό αριθμό q ισχύει $g(q)=K\alpha^q$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο $\alpha_n=n$, $n\in\mathbb{Z}$. Εξ υποθέσεως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί C και $\lambda\neq 0$ ώστε $g(n)=g(a_n)=C\lambda^n$. Προφανώς $g(0)=C$ και $g(1)=C\lambda$. Αν $C=0$ θα δείξουμε $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω $x\neq 0$. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο $\alpha'_n=nx$, $n\in\mathbb{Z}$. Εξ υποθέσεως υπάρχει $C'\in\mathbb{R}$ και $\lambda'\neq 0$ ώστε $g(nx)=C'(\lambda')^n$. Άρα $C'=g(0)=C=0$, η οποία δίνει $g(x)=g(1\cdot x)=C'(\lambda')=0$. Αφού και $g(0)=C=0$ δείξαμε ότι αν $C=0$ το $g\equiv 0$, οπότε σ' αυτή την περίπτωση $g(q)=K\alpha^q$ με $K=0$ και $\alpha=1$ και ισχύει το αποτέλεσμα.

Έστω τώρα $C\neq 0$. Τότε $g(0)=C$ και $\lambda=\dfrac{g(1)}{g(0)}$. Θα δείξουμε $\lambda>0$. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο $\alpha''_n=n\cdot\dfrac{1}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. Εξ υποθέσεως $g\left(n\cdot\dfrac{1}{2}\right)=g(\alpha''_n)=C''(\lambda'')^n$ με $\lambda''\neq 0$. Προφανώς $C''=g(0)=C$ και $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=C''\lambda''=C\lambda''$. Ακόμη $g(1)=g\left(2\cdot\dfrac{1}{2}\right)=C''(\lambda'')^2=C(\lambda'')^2$. Άρα $\lambda=\dfrac{g(1)}{g(0)}=\dfrac{C(\lambda'')^2}{C}=(\lambda'')^2\geq 0$. Αφού $\lambda\neq 0$ έχουμε $\lambda>0$.

Έστω $q=\dfrac{\gamma}{s}$ ένας ρητός αριθμός με $\gamma,s\in\mathbb{Z}$, $s>0$. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο $a'''_n=n\cdot\dfrac{1}{s}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Εξ υποθέσεως $g\left(n\cdot\dfrac{1}{s}\right)=g(a'''_n)=C'''(\lambda''')^n$ με $\lambda'''\neq 0$. Όπως πιο πριν δείξαμε $\lambda>0$ με ανάλογο τρόπο βλέπουμε $\lambda'''>0$. Άρα $g(0)=C'''=C$ και $g(1)=g\left(s\cdot\dfrac{1}{s}\right)\equiv C'''(\lambda''')^s$. Οπότε $\lambda=\dfrac{g(1)}{g(0)}=\dfrac{C(\lambda''')^s}{C}=(\lambda''')^s$. Άρα $\lambda'''=\lambda^{1/s}$ και $g(q)=g\left(\gamma\cdot\dfrac{1}{s}\right)=C'''(\lambda''')^\gamma=C(\lambda^{1/s})^\gamma=C\lambda^{\gamma/s}=C\lambda^q$.

Οπότε θέτουμε $K=C=g(0)\in\mathbb{R}$ και $\alpha=\lambda=\dfrac{g(1)}{g(0)}>0$ και έχουμε το ζητούμενο.■

Γ_3: Έστω συνεχής συνάρτηση ω που μετατρέπει αριθμητικές προόδους σε γεωμετρικές. Τότε υπάρχουν $K\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$ ώστε $\omega(x)\equiv K\alpha^x$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Γ_2 υπάρχουν $K\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$ ώστε για κάθε ρητό αριθμό q να ισχύει $\omega(q)=K\alpha^q$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=K\alpha^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις *ω* και f είναι συνεχείς στα $\mathbb{R}$ και $\omega(q)=f(q)$ για κάθε ρητό αριθμό q. Σύμφωνα με το B_2 ισχύει $\omega\equiv f$. Άρα $\omega(x)=K\alpha^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πληροφοριακό σχόλιο: Αν στο Γ_3 δεν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ω είναι συνεχής αλλά υποθέσουμε μόνο ότι μετατρέπει αριθμητικές προόδους σε γεωμετρικές, τότε δεν είναι σωστό ότι $\omega(x)\equiv K\alpha^x$ με $K\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν κι άλλες συναρτήσεις *ω* που μετατρέπουν αριθμητικές προόδους σε γεωμετρικές και δεν είναι της προηγούμενης μορφής. Φυσικά αυτές δεν είναι συνεχείς. Η απόδειξη ότι υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις *ω* είναι προχωρημένη και παραλείπεται.

Ένα πρόβλημα που οδηγεί σε μία πυθαγόρεια τριάδα.

Λευτέρης Τσιλιακός

Να χωριστεί ευθύγραμμο τμήμα l, με μήκος ένα θετικό ρητό, σε τρία διαδοχικά τμήματα α, β, γ έτσι ώστε αυτά να είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το τμήμα α.

Λύση

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε το σύστημα:

α + β + γ = l (1)

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (2)

Θα υπολογίσουμε τα α και β συναρτήσει των l και γ, θεωρώντας ότι $\gamma < \frac{l}{2}$

Η (2) λόγω της (1) γίνεται: $(l-\beta-\gamma)^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \ldots \beta = \frac{l^2-2l\gamma}{2(l-\gamma)}$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$\alpha = l - \frac{l^2-2l\gamma}{2(l-\gamma)} - \gamma \Leftrightarrow \alpha = \frac{(l-\gamma)^2+\gamma^2}{2(l-\gamma)}.$$

Έτσι η (2) γράφεται: $\left[\frac{(l-\gamma)^2+\gamma^2}{2(l-g)}\right]^2 = \left[\frac{l^2-2l\gamma}{2(l-\gamma)}\right]^2 + \gamma^2$ (3)

Δηλαδή τα τμήματα α, β, γ με $\alpha = \frac{(l-\gamma)^2+\gamma^2}{2(l-\gamma)}$, $\beta = \frac{l^2-2l\gamma}{2(l-\gamma)}$ και $\gamma < \frac{l}{2}$ αποτελούν λύση του προβλήματός μας.

(3) $\Leftrightarrow [(l-\gamma)^2+\gamma^2]^2 = (l^2-2l\gamma)^2 + [2\gamma(l-\gamma)]^2$ (4)

Η (4) δείχνει ότι αν $x = l^2 - 2l\gamma$, $y = 2\gamma(l-\gamma)$, $z = (l-\gamma)^2 + \gamma^2$ ισχύει:

$z^2 = x^2 + y^2$, δηλ. ότι οι x,y,z ικανοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα.

Παράδειγμα

Έστω ότι το μήκος του l είναι 10,2 και γ=1,8

Λύση

Για την εύρεση μίας πυθαγόρειας τριάδας από τους x, y, z έχουμε:

$$x = l^2 - 2l\gamma = 10{,}2^2 - 2\cdot 10{,}2 \cdot 1{,}8 = 67{,}32$$

$$y = 2\gamma(l-\gamma) = 2\cdot 1{,}8 \cdot (10{,}2 - 1{,}8) = 30{,}24$$

$$z = (l-\gamma)^2 + \gamma^2 = (10{,}2-1{,}8)^2 + 1{,}8^2 = 73{,}8$$

Είναι: $x^2 + y^2 = 67{,}32^2 + 30{,}24^2 = 5446{,}44 = 73.8^2 = z^2$

Προφανώς και

$$7380^2 = 6732^2 + 3024^2 \Leftrightarrow (205\cdot 36)^2 = (187\cdot 36)^2 + (84\cdot 36)^2 \Leftrightarrow 205^2 = 187^2 + 84^2$$

Άρα οι φυσικοί αριθμοί 205, 187, 84 αποτελούν μία πυθαγόρεια τριάδα με (205,187,84)=1.

Επειδή εξάλλου για δεδομένο l ο γ μπορεί να πάρει άπειρες ρητές τιμές (αφού $\gamma < \frac{l}{2}$), συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να έχουμε άπειρες πυθαγόρειες τριάδες, όπως οι x,y,z που ικανοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα.

Επομένως:

- Αν τα l και γ έχουν μέτρα φυσικούς αριθμούς τότε οι x,y,z αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα
- Αν τα l και γ έχουν μέτρα θετικούς ρητούς, τότε ορίζεται από αυτούς μία πυθαγόρεια τριάδα, όπως φάνηκε στο παράδειγμα που προηγήθηκε.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των Μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **Αντωνόπουλος Νίκος –Λουριδάς Γιάννης – Τριάντος Γιώργος**

ΑΣΚΗΣΗ 316. (ΤΕΥΧΟΣ 107)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ με $\alpha_1\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu \neq 0$ ισχύει: $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu| = S$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1})^2 + (\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2})^2 + \ldots + (\alpha_\nu + \frac{1}{\alpha_\nu})^2 \geq \frac{(S^2+\nu^2)^2}{\nu \cdot S^2}$$

(**Γιώργος Τσιώλης** – Τρίπολη)

ΛΥΣΗ (**Δήμος Παπαδόπουλος** – Άγρα, Έδεσσα)

Εξαιτίας της προφανούς ισότητας

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2 = |\alpha|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} + 2 = \left(|\alpha| + \frac{1}{|\alpha|}\right)^2$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(|\alpha_1| + \frac{1}{|\alpha_1|})^2 + (|\alpha_2| + \frac{1}{|\alpha_2|})^2 + \ldots + (|\alpha_\nu| + \frac{1}{|\alpha_\nu|})^2 \geq \frac{(S^2+\nu^2)^2}{\nu \cdot S^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, \ x > 0$$

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} \text{ και } f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0$$

οπότε είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$. Από την ανισότητα Jensen για την ν-ιάδα $(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_\nu|)$ έχουμε:

$$\frac{f(|\alpha_1|) + f(|\alpha_2|) + \ldots + f(|\alpha_\nu|)}{\nu} \geq f\left(\frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|}{\nu}\right)$$

$$\Rightarrow \left(|\alpha_1| + \frac{1}{|\alpha_1|}\right)^2 + \left(|\alpha_2| + \frac{1}{|\alpha_2|}\right)^2 + \ldots + \left(|\alpha_\nu| + \frac{1}{|\alpha_\nu|}\right)^2 \geq \nu f\left(\frac{S}{\nu}\right)$$

και $\nu f\left(\frac{S}{\nu}\right) = \nu\left(\frac{S}{\nu} + \frac{\nu}{S}\right)^2 = \nu\left(\frac{S^2+\nu^2}{\nu S}\right)^2 = \frac{\left(S^2+\nu^2\right)^2}{\nu S^2}$

οπότε προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Λύσεις έστειλαν επίσης οι:
(**Ιωαννίδης Αντώνης** - Χολαργός και **Ηλιόπουλος Γιάννης** - Καλαμάτα)

ΑΣΚΗΣΗ 317. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \int_0^1 (e^{\frac{t^2}{x}} - 1)dt)$.

(**Γιάννης Ηλιόπουλος** – Καλαμάτα)

ΛΥΣΗ (**Γιάννης Ηλιόπουλος** – Καλαμάτα)

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}e$ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e, \ x \in [0, 1]$$

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x) = e^x - 1 - xe$ και $f''(x) = e^x - e < 0, 0 < x < 1$ οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ με $f'(0) = 0$.

Άρα $f'(x) < 0$ στο $(0, 1]$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Έτσι, για κάθε $x \in (0, 1]$ έχουμε

$$f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}e$$

Αν στην τελευταία ανισότητα θέσουμε $\frac{t^2}{x}$ στο x, με $0 < t \leq 1$ και $x > 1$, έχουμε:

$$e^{\frac{t^2}{x}} < 1 + \frac{t^2}{x} + \frac{t^4}{2x^2}e$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(e^{\frac{t^2}{x}} - 1\right)dt < \int_0^1 \left(\frac{t^2}{x} + \frac{t^4}{2x^2}e\right)dt$$

$$\Rightarrow x\int_0^1 \left(e^{\frac{t^2}{x}} - 1\right)dt < \int_0^1 \left(t^2 + \frac{t^4}{2x}e\right)dt$$

$$\Rightarrow x\int_0^1 \left(e^{\frac{t^2}{x}} - 1\right)dt < \frac{1}{3} + \frac{e}{10x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\left[x\int_0^1 \left(e^{\frac{t^2}{x}} - 1\right)dt\right] \leq \frac{1}{3}, \ (1)$$

Επιπλέον, από την γνωστή ανισότητα $e^x \geq x + 1$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$e^{\frac{t^2}{x}} - 1 \geq \frac{t^2}{x} \Rightarrow x\int_0^1 \left(e^{\frac{t^2}{x}} - 1\right)dt \geq x\int_0^1 \frac{t^2}{x}dx = \frac{1}{3}$$

οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x\int_0^1 \left(e^{\frac{t^2}{x}} - 1\right)dt\right] \geq \frac{1}{3}$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\int_0^1(e^{\frac{t^2}{x}}-1)dt)=\frac{1}{3}$

Λύσεις έστειλαν επίσης οι:
(Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και **Δήμος Παπαδόπουλος** Άγρα- Έδεσσα)

ΑΣΚΗΣΗ 318. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Αν R_1, R_2 είναι οι ακτίνες των δύο περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ στα οποία χωρίζεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=\frac{\pi}{2}$) από την διάμεσό του ΑΔ, να δειχθεί ότι το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $(ΑΒΓ)=\frac{(2R_1R_2)^3}{(R_1^2+R_2^2)^2}$.**(Γιώργος Τσιώλης** – Τρίπολη)

ΛΥΣΗ (Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη)

Είναι φανερό ότι τα κέντρα K_1, K_2 των δυο κύκλων βρίσκονται πάνω στην μεσοκάθετη της διαμέσου ΑΔ και έστω $R_1=K_1Δ,\ R_2=K_2Δ$ οι ακτίνες των δυο κύκλων. Ισχύουν:

$$M\hat{K}_1Δ=\frac{A\hat{K}_1Δ}{2}=\hat{B} \text{ και } M\hat{K}_2Δ=\frac{A\hat{K}_2Δ}{2}=\hat{Γ}$$

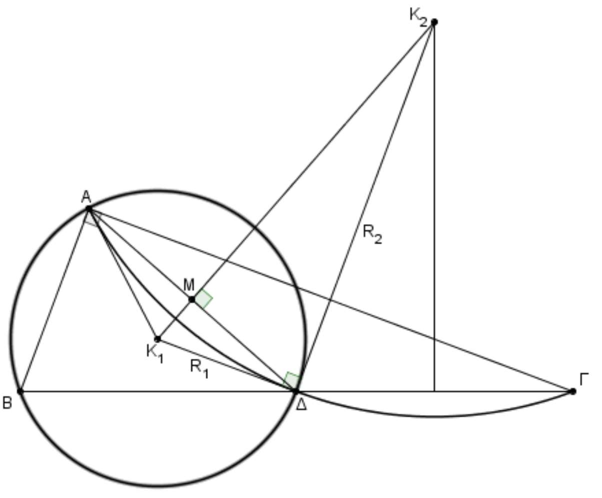
οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και $K_1ΔK_2$ είναι όμοια, άρα $K_1\hat{Δ}K_2=90^o$ και $\frac{(ΑΒΓ)}{(K_1ΔK_2)}=\frac{ΒΓ^2}{K_1K_2{}^2}$, (1)

Αλλά

$$(K_1ΔK_2)=\frac{1}{2}R_1R_2,\ (2) \quad \text{και } (K_1K_2)^2=R_1^2+R_2^2,\ (3)$$

Από την (1) λόγω τα των (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{2(ΑΒΓ)}{R_1\cdot R_2}=\frac{ΒΓ^2}{R_1^2\cdot R_2^2},\ (4)$$



Αλλά

$$K_1K_2\cdot ΔM=R_1R_2 \text{ και } ΔM=\frac{R_1R_2}{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}=\frac{ΑΔ}{2}=\frac{ΒΓ}{4}$$

οπότε $ΒΓ=\frac{4R_1R_2}{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}$, (5)

Έτσι, από τις ισότητες (4), (5), έχουμε:

$$\frac{2(ΑΒΓ)}{R_1R_2}=\frac{16(R_1R_2)^2}{(R_1^2+R_2^2)^2}\Rightarrow (ΑΒΓ)=\frac{(2R_1R_2)^3}{(R_1^2+R_2^2)^2}$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύσεις έστειλαν επίσης οι:
(Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και **Δήμος Παπδόπουλος** Άγρα- Έδεσσα)

ΑΣΚΗΣΗ 319. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Να δειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $E\le\frac{τ^2+3ρ^2+12Rρ}{6\sqrt{3}}$ όπου τ η ημιπερίμετρος, ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου , R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Πότε ισχύει η ισότητα; **(Γιώργος Νικητάκης** – Σητεία)

ΛΥΣΗ (Δήμος Παπαδόπουλος Άγρα- Έδεσσα)

Για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$τρ\le\frac{τ^2+3ρ^2+12Rρ}{6\sqrt{3}} \text{, ή αρκεί}$$

$$τ^2+3ρ^2+12Rρ\ge 6\sqrt{3}τρ \text{, ή αρκεί}$$

$$τ^2+27ρ^2-6\sqrt{3}τρ+12Rρ-24ρ^2\ge 0$$

που ισχύει, αφού προκύπτει με τη βοήθεια της ανισότητας Euler $(R\ge 2ρ)$ από την προφανή

$$\left(τ-3\sqrt{3}ρ\right)^2+12ρ(R-2ρ)\ge 0$$

Θα αναζητήσουμε τώρα πότε ισχύει η ισότητα.
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν

$$\begin{cases} τ=3\sqrt{3}ρ \\ R=2ρ \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} α+β+γ=6\sqrt{3}ρ \\ R=2\cdot 4Rημ\frac{A}{2}ημ\frac{B}{2}ημ\frac{Γ}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2R(ημA+ημB+ημΓ)=3\sqrt{3}R \\ ημ\frac{A}{2}ημ\frac{B}{2}ημ\frac{Γ}{2}=\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} συν\frac{A}{2}συν\frac{B}{2}συν\frac{Γ}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ ημ\frac{A}{2}ημ\frac{B}{2}ημ\frac{Γ}{2}=\frac{1}{8} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} σφ\frac{A}{2}σφ\frac{B}{2}σφ\frac{Γ}{2}=3\sqrt{3} \\ ημ\frac{A}{2}ημ\frac{B}{2}ημ\frac{Γ}{2}=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Είναι επίσης γνωστό ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$

Έτσι, με τα δεδομένα του προβλήματος, η ανισοϊσότητα Cauchy

$$\frac{\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}{3}\geq\sqrt[3]{\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

καθίσταται ισότητα, που ισχύει μόνο όταν

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}=\sigma\varphi\frac{B}{2}=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\Leftrightarrow\frac{A}{2}=\frac{B}{2}=\frac{\Gamma}{2}$$

Επομένως, η ισότητα στην περίπτωσή μας ισχύει μόνο όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 320. (ΤΕΥΧΟΣ 108)

Αν P τυχαίο σημείο στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ , κ, λ, μ οι αποστάσεις του P από τις κορυφές Α,Β,Γ αντιστοίχως και d_1,d_2,d_3 οι αποστάσεις του P από τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντιστοίχως, τότε να αποδειχθεί ότι για το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η ανισότητα:

$$\kappa\alpha^2+\lambda\beta^2+\mu\gamma^2\geq 4E\left(\frac{d_1}{\eta\mu A}+\frac{d_2}{\eta\mu B}+\frac{d_3}{\eta\mu\Gamma}\right).$$

(**Γιώργος Νικητάκης** – Σητεία)

ΛΥΣΗ (**Γιώργος Νικητάκης** – Σητεία)

Το τετράπλευρο ΑΖΡΕ είναι εγγράψιμο και έστω R_1 η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου. Είναι φανερό ότι η ΑΡ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε $AP=2R_1$. Άρα,

$$\frac{ZE}{\eta\mu A}=2R_1\Rightarrow ZE=AP\cdot\eta\mu A,\ (1)$$

Αν Z_1E_1 είναι η προβολή του ΡΖ στην πλευρά ΒΓ, τότε $ZE\geq Z_1E_1=Z_1H+HE_1=d_3\sigma\upsilon\nu\omega+d_2\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\eta\mu B,\ \sigma\upsilon\nu\varphi=\eta\mu\Gamma$ οπότε

$$ZE\geq d_3\eta\mu B+d_2\eta\mu\Gamma,\ (2)$$

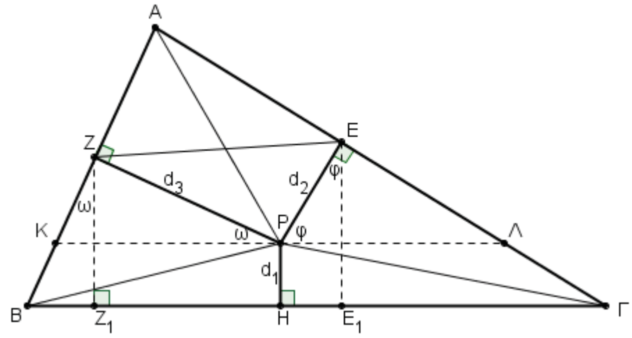
Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$AP\cdot\eta\mu A\geq d_3\eta\mu B+d_2\eta\mu\Gamma$$

$$\Rightarrow\kappa\geq d_3\frac{\frac{\beta}{2R}}{\frac{\alpha}{2R}}+d_2\frac{\frac{\gamma}{2R}}{\frac{\alpha}{2R}}\Rightarrow\kappa\geq d_3\frac{\beta}{\alpha}+d_2\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Rightarrow\kappa\alpha^2\geq d_3\alpha\beta+d_2\alpha\gamma\Rightarrow\kappa\alpha^2\geq d_3\frac{2E}{\eta\mu\Gamma}+d_2\frac{2E}{\eta\mu B}$$

$$\Rightarrow\kappa\alpha^2\geq 2E\left(\frac{d_3}{\eta\mu\Gamma}+\frac{d_2}{\eta\mu B}\right)$$



Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι:

$$\lambda\beta^2\geq 2E\left(\frac{d_3}{\eta\mu\Gamma}+\frac{d_1}{\eta\mu A}\right)\ \text{και}\ \mu\gamma^2\geq 2E\left(\frac{d_1}{\eta\mu A}+\frac{d_2}{\eta\mu B}\right)$$

οπότε $\kappa\alpha^2+\lambda\beta^2+\mu\gamma^2\geq 4E\left(\frac{d_1}{\eta\mu A}+\frac{d_2}{\eta\mu B}+\frac{d_3}{\eta\mu\Gamma}\right)$

που είναι το ζητούμενο.

Προτεινόμενα Θέματα

336. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}=60^o$ και $\hat{B}=45^o$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ ώστε $B\Delta=\frac{1}{3}B\Gamma$

Να αποδείξετε ότι $\frac{AB^4}{9}+\frac{A\Gamma^4}{36}=A\Delta^4\cdot\varepsilon\varphi 15^o$

(**Αποστολόπουλος Γιώργος** - Μεσολόγγι)

337. Έστω $A_oA_1A_2A_3A_4$ ένα κανονικό πεντάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα $R=1$. Να αποδείξετε ότι $(A_oA_1\cdot A_oA_2)^2=5$

(**Καρτσακλής Δημήτριος** – Αγρίνιο)

338. Έστω $(\alpha_\nu),\ \nu\in\mathbb{N}^*$ μια ακολουθία με

$$\alpha_1=\sqrt{2}\ \text{και}\ \alpha_{\nu+1}=\sqrt{2+\alpha_\nu}\ \text{για κάθε}\ \nu>1$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\left(4^\nu(2-\alpha_\nu)\right)$

(**Καρτσακλής Δημήτριος** – Αγρίνιο)

339. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{\alpha^5}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^5}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^5}{\alpha+\beta}\geq 8(AB\Gamma)^2$

(**Γιώργος Νικητάκης** – Σητεία)

340. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$S=\frac{\sqrt{x^4+x^2+2x+1}+\sqrt{x^4-2x^3+5x^2-4x+1}}{x}$$

όταν το x μεταβάλλεται στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

(**Αντωνόπουλος Νίκος** - Ίλιον)

Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Ρούλα Σπανδάγου

Η στήλη αυτή θα δημοσιεύει σε κάθε τεύχος του "Ευκλείδη Β′" μια μαθηματική πρόταση στην Αρχαία Ελληνική με την απόδοσή της στην Νεοελληνική. Οι προτάσεις θα προέρχονται από εργασίες γνωστών και άγνωστων στο ευρύ κοινό Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών.

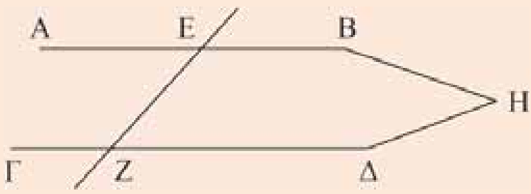
Αιτία της καθιερώσεως της στήλης αυτής είναι η προσέγγιση της Αρχαίας Ελληνικής δια μέσου των μαθηματικών κειμένων.

Η πρόταση κζ′ του α′ βιβλίου των "Στοιχείων" του Ευκλείδου

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Δεῖξις

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Απόδοση στη Νεοελληνική

Αν δύο ευθείες τέμνονται από μια ευθεία έτσι, ώστε οι εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Απόδειξη

Διότι έστω οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΖ σχηματίζοντας τις εναλλάξ γωνίες $A\hat{E}Z$, $E\hat{Z}\Delta$ ίσες. Λέω ότι ΑΒ // ΓΔ.

Διότι αν δεν είναι (παράλληλες), προεκτεινόμενες οι ΑΒ, ΓΔ θα τέμνονται ή προς τη μεριά των σημείων Β, Δ ή προς τη μεριά των Α, Γ. Έστω ότι προεκτεινόμενες τέμνονται προς τη μεριά των Β, Δ στο σημείο Η. Τότε στο τρίγωνο ΗΕΖ η εξωτερική γωνία $A\hat{E}Z$ θα είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι $E\hat{Z}H$, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, αν οι ΑΒ, ΓΔ προεκταθούν, δεν τέμνονται στη μεριά των σημείων Β, Δ. Όμοια αποδεικνύεται ότι (δεν τέμνονται) ούτε και προς τα Α, Γ. Οι δε ευθείες που δεν τέμνονται προς καμία μεριά είναι παράλληλες. Οπότε ΑΒ // ΓΔ.

Άρα, αν δύο ευθείες τέμνονται από μια ευθεία έτσι, ώστε οι εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες· πράγμα το οποίο έπρεπε να αποδείξουμε.

Βιβλία που λάβαμε …

Χρήσιμες επισημάνσεις στα Μαθηματικά

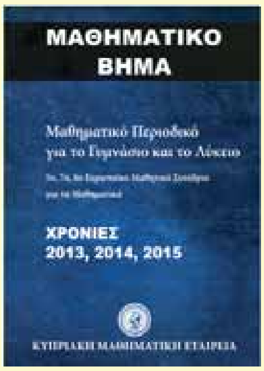
Αντώνης Κ. Κυριακόπουλος

(…) Τα Μαθηματικά διδάσκονται γιατί τα χρειαζόμαστε στις πρακτικές μας ανάγκες. Γιατί τα χρησιμοποιούν, κατά τον ένα ή τον άλλο τρόπο, όλες ανεξαιρέτως οι επιστήμες. Η ξέφρενη ανάπτυξη της τεχνολογίας οφείλεται κυρίως στα Μαθηματικά (…) Πέρα όμως από όλα αυτά, τα Μαθηματικά διδάσκονται και για άλλους πολλούς και σπουδαίους λόγους. Διδάσκονται για να συνηθίσει ο μαθητής να πειθαρχεί στη Λογική (αρχή, συνέχεια, συνέπεια). Να μάθει να κάνει σωστούς συλλογισμούς, να οργανώνει σωστά τα επιχειρήματά του, να είναι σαφής και σύντομος και να μην οδηγείται σε φαύλους κύκλους. Να μάθει να διακρίνει περιπτώσεις, να προσέχει τις λεπτομέρειες και να μαθαίνει από τα λάθη του, καθώς και από τα λάθη των άλλων. Τα Μαθηματικά καλλιεργούν τη Λογική και συντελούν στην ικανότητα του μαθητή να αναλύει, να συνθέτει και να επεξεργάζεται δημιουργικά ένα δεδομένο υλικό, καθώς και την ικανότητα επιλογής και εφαρμογής της κατάλληλης μεθόδου. Οι αρετές αυτές θα μείνουν στο υποσυνείδητο του μαθητή και θα τις εφαρμόζει αργότερα στη ζωή του, όταν ίσως έχει ξεχάσει τα Μαθηματικά. (…) Αυτά και πολλά άλλα, από τα γραφόμενα του συγγραφέα, μπορεί κανείς να διαπιστώσει μέσα από τις σελίδες αυτού του πολύ χρήσιμου, στις μέρες μας, διδακτικού βιβλίου. Επισημάνσεις, μέθοδοι, προσεκτικές παρατηρήσεις, σχόλια και πολλά παραδείγματα κάνουν την ανάγνωση του συναρπαστική.

Μέθοδοι Παραστάσεων

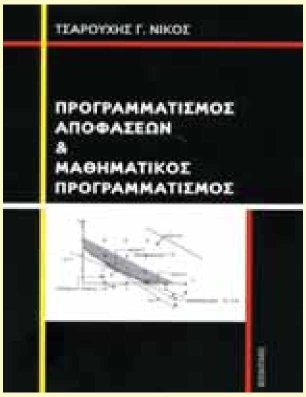
Γεώργιος Ε. Λευκαδίτης
Γεώργιος Μ. Εξαρχάκος

Το βιβλίο περιέχει τις γεωμετρικές αρχές, θεωρία, ασκήσεις και θέματα των τεσσάρων Μεθόδων Παραστάσεων: …Μέθοδος Monge, Αξονομετρίας, Προοπτικής, Υψομετρίας Επιπλέον περιλαμβάνει θεωρία και θέματα Σκιαγραφίας στα συστήματα Monge, Αξονομετρίας και Προοπτικής



Μαθηματικό Βήμα

Μια ενδιαφέρουσα και πλούσια έκδοση από την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία σε θέματα Μαθηματικών διαγωνισμών και Ολυμπιάδων καθώς και επίκαιρα υλικό στα Μαθηματικά από τα πρόσφατα και σημαντικά ευρωπαϊκά μαθητικά συνέδρια που έγιναν σε διάφορες μεγάλες πόλεις της Ευρώπης.



Προγραμματισμός Αποφάσεων & Μαθηματικός Προγραμματισμός

Νίκος Γ . Τσαρούχης

«Ο Προγραμματισμός Αποφάσεων είναι ένα αναπόσπαστο και ίσως το πιο αναπτυγμένο τμήμα του γενικού πεδίου της έρευνας των επιχειρήσεων ή των διοικητικών επιστημών. Καλύπτει ειδικά θέματα, όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, ο δυναμικός προγραμματισμός, καθώς και προσδιοριστικά προβλήματα, πιθανολογικά (ή ριψοκίνδυνα) προβλήματα.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα και ο Προγραμματισμός Αποφάσεων είναι εναλλάξιμες έννοιες. Η Επιχειρησιακή Ανάλυση ή αργότερα η Επιχειρησιακή Έρευνα αναγνωρίστηκε και άρχισε να χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου οπότε και δημιουργήθηκαν διάφορες ομάδες που αποτελούνταν από άτομα με Μαθηματικό, Στατιστικό και Επιστημονικό υπόβαθρο. Ορισμένες από τις Επιχειρησιακές Έρευνες που διεξήγαν ήταν: α) ο προσδιορισμό του βέλτιστου μεγέθους συνοδείας, όπου τα εμπειρικά δεδομένα πρότειναν ότι το μεγαλύτερο μέγεθος της συνοδείας αντιστοιχούσε αναλογικά σε μικρότερες ζημιές λόγω των υποβρυχίων επιθέσεων, β) ο προσδιορισμός του καλύτερου τρόπου για την ανάπτυξη μονάδων ραντάρ για να δώσει τη μέγιστη δυνατή κάλυψη των πιθανών επιθέσεων του εχθρού κ.α».

Τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ μας ΔΙΑΣΚΕΔΑΖΟΥΝ

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Αριθμητικό Ανέκδοτο

Ένα πρωινό ο **2** συνάντησε στην αγορά το **9** .

- Καλημέρα **7**
- Μήπως κοιμάσαι ακόμα, δεν βλέπεις ο **9** είμαι!
- Α! συγνώμη αφαιρέθηκα. **(9-2=7)**

Οι αριθμοί έχουν μαγεία, ομορφιά, αρμονία …

Οι περισσότεροι άνθρωποι φαντάζονται ότι τα μαθηματικά είναι σελίδες ολόκληρες με πολύπλοκες πράξεις αριθμών, κάτι σαν λογιστικά βιβλία. Τα μαθηματικά έχουν ομορφιά που δεν βρίσκεται μόνο στον συμβολισμό, αλλά στις ιδέες, στους κρυμμένους μαθηματικούς νόμους που ανακαλύπτουμε ότι ισχύουν παντού, στα ζώα, στα φυτά, στα αστέρια, στην φύση, στο Σύμπαν. Θαυμάζουμε τα σχήματα στα αστέρια, στα σύννεφα, στο ηλιοβασίλεμα. Θαυμάζουμε τα σχήματα και τα χρώματα που κάνει η φύση στις πεδιάδες, στα βουνά, στο ουράνιο τόξο, στις νιφάδες του χιονιού, στον ιστό της αράχνης, στις κηρύθρες της μέλισσας. Ο άνθρωπος ως περίεργο ον μετά το θαυμασμό που εκδηλώνει καταλαμβάνεται από μια υπερβολική απορία. Μα πως το έκανε αυτό ο ταχυδακτυλουργός, ο Φακίρης, η αράχνη, η μέλισσα, η Φύση, ο Θεός. Ε, αυτή είναι η ομορφιά των μαθηματικών. Αυτή την ομορφιά την κληρονομήσαμε από τους Αρχαίοι Έλληνες, τους Βαβυλώνιους, τους Αιγύπτιους, τους Άραβες, τους Κινέζους, τους Ινδούς, κ.ά.

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το νησί

Σε ένα μικρό νησί δύο δρομείς ξεκίνησαν ταυτόχρονα αλλά προς αντίθετη κατεύθυνση για να κάνουν το γύρο του νησιού περπατώντας στον περιμετρικό δρόμο. Ο πρώτος βαδίζει κάθε ημέρα οκτώ χιλιόμετρα. Ο δεύτερος βαδίζει την πρώτη ημέρα μόνο ένα χιλιόμετρο, την δεύτερη ημέρα δύο χιλιόμετρα και κάθε επόμενη ημέρα ένα χιλιόμετρο παραπάνω από την προηγούμενη. Όταν οι δύο δρομείς συναντήθηκαν, ο πρώτος είχε καλύψει τα δύο τρίτα του περιμετρικού δρόμου. Σε πόσες ημέρες μετά την αναχώρηση συναντήθηκαν; Πόσα χιλιόμετρα είναι ο περιμετρικός δρόμος του νησιού;

Η παρέα μας

Γεια σου Μανώλη πως περάσατε χθες στην ταβέρνα του Βαγγέλη; Ήταν μεγάλη η παρέα; «Ναι ήταν ο Νίκος, ο Γιώργος και αρκετοί φίλοι, που αν οι μισοί είχαν φέρει και τις γυναίκες τους θα ήμασταν 54». Πόσοι φίλοι πήγαν στην παρέα του Μανώλη;

Το Ρακόμελο

Ένα δοχείο περιέχει 3 λίτρα μέλι, ένα δεύτερο περιέχει 5 λίτρα ρακί κι ένα τρίτο περιέχει 7 λίτρα νερό. Το περιεχόμενο των τριών δοχείων το αδειάζουμε σ' ένα άλλο μεγάλο δοχείο και το ανακατεύουμε για να φτιάξουμε ρακόμελο. Στη συνέχεια ξαναγεμίζουμε τα τρία δοχεία ρακόμελο με την ίδια ποσότητα που είχαν αρχικά. Πόσα λίτρα μέλι, ρακί και νερό περιέχει τώρα το κάθε δοχείο;

Οι αγγελιοφόροι

Ένας αγγελιοφόρος έφυγε από την Αθήνα με ένα μήνυμα να το πάει στην Σπάρτη. Κάθε ημέρα τρέχει 24 χιλιόμετρα. Το μήνυμα που μεταφέρει έχει λάθος, πρέπει αλλάξει. Ένας δεύτερος αγγελιοφόρος που τρέχει 36 χιλιόμετρα την ημέρα, με το νέο μήνυμα ξεκίνησε τρείς μέρες αργότερα. Θα προλάβει τον πρώτο αγγελιοφόρο πριν φτάσει στη Σπάρτη; (Η απόσταση Αθήνα –Σπάρτη είναι μεγαλύτερη από 220 χιλιόμετρα)

Το μυρμήγκι

Ένα μυρμήγκι είναι το μεσημέρι 36 μέτρα μακριά από τη φωλιά του. Την πρώτη ώρα προχώρησε 18 μέτρα, αλλά τη δεύτερη ώρα γυρίζει 12 μέτρα πίσω. Την τρίτη ώρα προχωράει πάλι 18 μέτρα και την τέταρτη γυρίζει πάλι 12 πίσω. Έτσι συνεχίζει μέχρι το βράδυ. Σε 8 ώρες θα νυχτώσει. Θα προλάβει να μπει στη φωλιά του;

Τα σύκα

Η Άννα μάζεψε ένα καλάθι σύκα και πηγαίνει για το σπίτι της. Στο δρόμο συνάντησε τρείς φίλες της. Στην πρώτη δίνει τα μισά, στην δεύτερη δίνει τα μισά από τα εναπομείναντα σύκα, στην τρίτη επίσης τα μισά από αυτά που της είχαν απομείνει. Τελικά όταν έφτασε στο σπίτι της έβαλε τα μισά στο ψυγείο, έδωσε 3 σε μια γειτόνισσα πέταξε τα άλλα 2 που ήταν χαλασμένα για να αδειάσει το καλάθι της. Πόσα ήταν όλα τα σύκα που είχε μαζέψει η Άννα;

Ο Μιχάλης

Χρόνια Πολλά Μιχάλη να τα εκατοστίσεις. Πόσων χρόνων γίνεσαι; Σε δέκα χρόνια θα έχω την τριπλάσια ηλικία, απ' αυτήν που είχα πριν από δέκα χρόνια; Ποια γενέθλια εορτάζει ο Μιχάλης;

Η φασολιά.

Ο Χαράλαμπος αγόρασε ένα μικρό φυτό φασολιάς και το φύτεψε στον κήπο του. Έβαλε δίπλα του ένα πάσαλο για στήριγμα ώστε μεγαλώνοντας να αναρριχηθεί. Το φυτό κάθε μέρα διπλασιάζει το ύψος του. Για να φτάσει στο πάνω μέρος του πασσάλου θέλει εικοσιτέσσερις μέρες. Σε πόσες ημέρες θα φτάσει στο μισό ύψος του πασσάλου ;

Ο Θαλής και ο Περικλής

Ο Θαλής και ο Περικλής κάνουν τη βόλτα τους στην αγορά, αλλά καθώς περπατάνε βλέπουν στο δρόμο ένα χαρτονόμισμα των είκοσι ευρώ. Το παίρνει ο Θαλής αλλά ο Περικλής του λέει: «Αν το πάρεις εσύ θα έχεις τα διπλά χρήματα από μένα, ενώ αν το πάρω εγώ θα έχουμε κι οι δυο τα ίδια χρήματα». Πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους στην τσέπη;

Διεθνείς Μαθητικές Ολυμπιάδες 2019

Στο παρακάτω άρθρο, δίνουμε για τη σχολική χρονιά πέρασε (2018-2019), μια πρώτη αναφορά στοιχείων από τις Διεθνείς μαθητικές Ολυμπιάδες 2018-2019.

Τα χαρακτηριστικά σημεία που θέλουμε να αναδείξουμε είναι:

- Ο αριθμός των διοργανώσεων των Ολυμπιάδων ανά επιστήμη
- Το πλήθος των χωρών που συμμετείχαν
- Την Ελληνική συμμετοχή και τα σχετικά αποτελέσματα

Αυτό θα αποτελέσει ένα πρώτο στοιχείο συγκριτικών δεδομένων και προσδιορισμού ενδιαφέροντος και τα πρώτα συμπεράσματα, αυτής της χρονιάς, από τους μαθητικούς επιστημονικούς διαγωνισμούς.

50 Iph 2019 Διεθνής Ολυμπιάδα Φυσικής

Η $50^{η}$ Ολυμπιάδα Φυσικής έγινε στο Τελ Αβιβ του Ισραήλ, τον Ιούλιο του 2019. Στην $50^{η}$ Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής συμμετείχαν **78 χώρες**. Η χώρα μας πήρε **3** εύφημες μνείες με τους Κ. Φωτόπουλο (Αθήνα), Ι. Μπέλλο (Λάρισα) και Γ. Αναστασίου (Αθήνα)

51 Icho 2019 Διεθνής Ολυμπιάδα Χημείας

Η $51^{η}$ Ολυμπιάδα Χημείας έγινε η στο Παρίσι της Γαλλίας τον Ιούλιο του 2019. Στην $51^{η}$ Ολυμπιάδα Χημείας συμμετείχαν **80 χώρες**. Η χώρα μας πήρε **1** χάλκινο μετάλλιο με τον Α. Φωκαΐδη – Ψύλλα

13 ΙΟΛΛ 2019 Διεθνής Ολυμπιάδα Αστρονομίας – Αστροφυσικής

Η $13^{η}$ Ολυμπιάδα Αστρονομίας – Αστροφυσικής έγινε στην πόλη Keszthely της Ουγγαρίας τον Αύγουστο του 2019. Στην $13^{η}$ Ολυμπιάδα Αστρονομίας – Αστροφυσικής συμμετείχαν **46 χώρες**. Η χώρα μας πήρε **2** αργυρά μετάλλια με τους Θ. Πουλτουρτζίδη (Κιλκίς) και Α. Μανέ (Βόλος) και **3** χάλκινα μετάλλια με Ε, Βασιλείου (Πειραιάς), Δ. Γάκη (Πάτρα) και Κ. Ξυλόπορτα (Αθήνα).

Πρώτη φορά η Ελλάδα πήγε τόσο καλά, με ένα μάθημα που δεν διδάσκεται στο σχολείο (πιο παλιά στη χώρα μας, το μάθημα αυτό υπήρχε σαν μάθημα Κοσμογραφίας) και ούτε έχει bonus εισαγωγής στα ΑΕΙ. Η εξέταση στην Ολυμπιάδα περιελάμβανε 50% θεωρία Αστροφυσικής, 25% ανάλυση δεδομένων και 25% αστρονομικές παρατηρήσεις

30 IBO 2019 Διεθνής Ολυμπιάδα Βιολογίας

Η $30^{η}$ Ολυμπιάδα Βιολογίας έγινε στο Szeged της Ουγγαρίας τον Ιούλιο του 2019 όπου συμμετείχαν **78 χώρες** . Στην $30^{η}$ Ολυμπιάδα Βιολογίας η χώρα μας πήρε **1** αργυρό με τον Γ. Χριστοδούλου (Κιάτο) και **2** χάλκινα με τους Γ. Στούρα (Αλεξανδρούπολη) και Ν. Κωνσταντινίδη (Θεσσαλονίκη) και με μία εύφημη μνεία με την Δ. Θέου (Αθήνα)

31 IOI 2019 Διεθνής Ολυμπιάδα Πληροφορικής

Η $31^{η}$ Ολυμπιάδα Πληροφορικής έγινε στο Μπακού του Αζερμπαϊτζάν τον Αύγουστο του 2019, όπου συμμετείχαν **87 χώρες**. Στην $31^{η}$ Ολυμπιάδα Πληροφορικής η χώρα μας πήρε **1** χάλκινο μετάλλιο με τον Α. Παναγόπουλο (Πάτρα)

Εδώ υπήρξε μια σύντομη περιγραφή των διεθνών μαθητικών Ολυμπιάδων 2019 όπου συμμετείχε και η χώρα μας και τα σχετικά αποτελέσματα. Οι αντίστοιχες **Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες** καθώς και **Βαλκανιάδες** παρουσιάζονται αναλυτικά αμέσως μετά.

Το Euromath & Euroscience τον Μάρτιο του 2020 στη Θεσσαλονίκη

Το Συνέδριο απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας 9-18 ετών με ατομικές και ομαδικές παρουσιάσεις . Το Μάρτιο του 2019 έγινε στην **Πάφο της Κύπρου** με μεγάλη συμμετοχή μαθητών (Το 2018 είχε γίνει στην Κρακοβία της Πολωνίας). Σ' αυτό συμμετείχαν πάνω από **400 μαθητές** και εκπαιδευτικοί από **24 χώρες** με 150 παρουσιάσεις από τους μαθητές και 23 workshops από εκπαιδευτικούς και ειδικούς επιστήμονες. Οι διαγωνισμοί αυτοί αναφέρονται κυρίως σε θέματα όπως, MATHfactor Europe και Science-Factor Europe, MATHPresentation and Science Presentation, Matheatre Europe και Science-Theatre Europe, όπως και στην καλύτερη ατομική και ομαδική παρουσίαση στο διαγωνισμό Mathematics and Science Poster Design. Άλλες αξιόλογες θεματικές ενότητες είναι: Mathematics Journalistic article competition, Communication competition … κ.λπ. … Πολλές σχετικές αναλυτικές πληροφορίες υπάρχουν στο **www.euromath.org**

Το Υπουργείο Παιδείας τιμά τους Διακριθέντες Μαθητές των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων 2018-2019

Η ηγεσία του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων δέχθηκε στις 3 Σεπτέμβρη 2019 στο Υπουργείο τους μαθητές με τους γονείς τους και τους συνοδούς των Ελληνικών Ομάδων που συμμετείχαν και διακρίθηκαν στην **60^{η}** Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, στην **36^{η}** Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα, στην **23^{η}** Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων, στην **8^{η}** Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια και στον **6^{ο}** Μεσογειακό Μαθηματικό Διαγωνισμό Νεότητας (MYMC).

Σε μία πολύ ζεστή εκδήλωση, η Υπουργός Νίκη Κεραμέως, η Υφυπουργός Σοφία Ζαχαράκη και η Γενική Γραμματέας Αναστασία Γκίκα, συνεχάρησαν θερμά τους μαθητές, οι οποίοι πέτυχαν τις σημαντικές διακρίσεις στους διεθνείς διαγωνισμούς, αλλά και τους αφανείς υποστηρικτές τους δηλαδή τις οικογένειές τους, τους εκπαιδευτικούς τους και τα μέλη της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Έγινε μία πολύ εποικοδομητική ανταλλαγή απόψεων και η Υπουργός εξέφρασε την πρόθεση της ηγεσίας του Υπουργείου να επαναφέρει **το καθεστώς κάλυψης των εξόδων** των μαθητικών αποστολών, ως ελάχιστη ένδειξη επιβράβευσης της προσπάθειας των μαθητών για τη συμμετοχή τους στους Διεθνείς Διαγωνισμούς.

Οι μαθητές που συμμετείχαν στους Διεθνής διαγωνισμούς και πέτυχαν διακρίσεις σε ένα χαρακτηριστικό αναμνηστικό φωτογραφικό στιγμιότυπο με την Υπουργό Παιδείας Νίκη Κεραμέως και την Υφυπουργό Σοφία Ζαχαράκη καθώς και την Γ. Γραμματέα του Υπουργείου Αναστασία Γκίκα.

Οι Διεθνείς Μαθηματικοί Διαγωνισμοί του 2019 που συμμετείχε η ΕΜΕ

60η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2019

Η 60η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε στο Μπαθ του Ηνωμένου Βασιλείου από 11 μέχρι και 22 Ιουλίου 2019. με συμμετοχή **112 χωρών** και **621 μαθητών** εκ των οποίων 65 ήταν κορίτσια. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν 1 αργυρό μετάλλιο, 2 χάλκινα μετάλλια και 3 εύφημες μνείες.

Μελάς Δημήτριος Χρυσοβαλάντης	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Γαλανόπουλος Σπυρίδων	**Ξάνθη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**Αθήνα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λώλας Δημήτριος	**Τρίκαλα**	**Εύφημη Μνεία**
Μαργαρίτης Μηνάς	**Ηράκλειο**	**Εύφημη Μνεία**
Μηλιώρη Ειρήνη	**Αθήνα**	**Εύφημη Μνεία**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της ΕΜΕ, Ομότιμος καθηγητής του ΕΜΠ, **Ανάργυρος Φελλούρης** και υπαρχηγός ο διδάκτωρ μαθηματικός **Σιλουανός Μπραζιτίκος**.

36η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

(http://bmo2019.md/results)

Η 36η Βαλκανική μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε στην πρωτεύουσα Κισινάου της Μολδαβίας από 30 Απριλίου μέχρι 5 Μαΐου 2019 με τη συμμετοχή μαθητών των χωρών της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και με μερικές ακόμη χώρες από Ασία και Ευρώπη. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν τρία αργυρά και δύο χάλκινα μετάλλια.

Γαλανόπουλος Σπυρίδων	**Ξάνθη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Μαργαρίτης Μηνάς	**Ηράκλειο**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Μελάς Δημήτριος Χρυσοβαλάντης	**Αθήνα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λώλας Δημήτριος	**Τρίκαλα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Κουντουράκης Επιμενίδης	**Χανιά**	**Συμμετοχή**

Αρχηγός της αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αθανάσιος Μάγκος** και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Ευάγγελος Ζώτος**.

8η ΕΥΡΩΠΑΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΓΙΑ ΚΟΡΙΤΣΙΑ

https://www.egmo.org/egmos/egmo8/

ΚΙΕΒΟ – ΟΥΚΡΑΝΙΑ, 7-13 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2019

Η όγδοη Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών διοργανώθηκε φέτος στο Κίεβο της Ουκρανίας από 7 μέχρι 13 Απριλίου με συμμετοχή **50 χωρών** (36 Ευρωπαϊκών και 14 από άλλες Ηπείρους). Συνολικά έλαβαν μέρος 196 κορίτσια και η Ελληνική ομάδα κατέκτησε δύο Χάλκινα μετάλλια και δύο Εύφημες Μνείες.

Μηλιώρη Ειρήνη	**Αθήνα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Σάββα Άρτεμις Χρυσάνθη	**Θεσσαλονίκη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Αβδελά Δανάη Χριστίνα	**Σέρρες**	**Εύφημη Μνεία**
Ρασβάνη Κωνσταντίνα	**Βόλος**	**Εύφημη μνεία**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος** και υπαρχηγός η μαθηματικός **Ευαγγελία Λώλη.**

6ος Μεσογειακός Μαθηματικός Διαγωνισμός Νεότητας MYMC,

Νάπολη, Ιταλία, http://www.mymc.it/2019/mymc-2019.html

Διοργανώνεται κάθε χρόνο από Ιταλικά Πανεπιστήμια και φέτος συμμετείχαν 17 χώρες της Μεσογείου και είναι ομαδικός διαγωνισμός. Κάθε χώρα συμμετέχει με 2 αγόρια και 2 κορίτσια που δεν συμμετείχαν στην Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα της αντίστοιχης χρονιάς.

Αδαμόπουλος Διονύσιος,	**Πύργος**	**Χάλκινο MYMC**
Εμμανουήλ Δημήτριος	**Αθήνα**	**Χάλκινο MYMC**
Σάββα Άρτεμις,	**Θεσσαλονίκη**	**Χάλκινο MYMC**
Κόλλια Σοφία,	**Αθήνα**	**Χάλκινο MYMC**

Αρχηγός της αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Νικόλαος Κολλιόπουλος**

23η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων

Αγρός, Κύπρος 20 – 25 Ιουνίου 2019

https://www.cms.org.cy/pages/competitions/jbmo-2019/jbmo-2019

Η 23η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων έγινε στην Κύπρο από 20 μέχρι 25 Ιουνίου 2019 με τη συμμετοχή μαθητών των χωρών της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και με μερικές ακόμη φιλοξενούμενες χώρες από Ασία και Ευρώπη. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν τρία αργυρά και τρία χάλκινα μετάλλια, ως εξής:

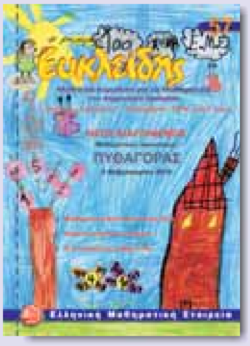
Λιγνός Ορέστης	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Σταμέλος Γρηγόρης	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Κωνσταντινίδου Μιχαέλα	**Θεσσαλονίκη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Παπαλέξης Θάνος	**Λάρισα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Κωνσταντινίδης Κωνσταντίνος	**Θεσσαλονίκη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Γεωργελές Γιώργος	**Ξάνθη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο μαθηματικός **Αλέξανδρος Συγκελάκης,** ο οποίος είχε και την επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων που ακολουθούν, και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Ανδρέας Βαρβεράκης.**

Τους μαθητές συνόδεψαν ο Πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ, Ανάργυρος Φελλούρης, ο Γενικός Γραμματέας Παναγιώτης Δρούτσας, ο Ευάγγελος Ζώτος , μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ καθώς και τα μέλη της Επιτροπής Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας Νικόλαος Κολλιόπουλος, Ευαγγελία Λώλη, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος και Ευάγγελος Ψύχας.

Στη φωτογραφία η Υπουργός στο σχετικό διάλογο με τους μαθητές και τους γονείς τους, κατά την επίσκεψή τους, στο Υπουργείο Παιδείας. Η ηγεσία του Υπουργείου Παιδείας απένειμε στους διακριθέντες τιμητικούς επαίνους και αναμνηστικά που τα επιμελήθηκαν οι μαθητές της Σιβιτανίδειου Σχολής Τεχνικών Επαγγελμάτων.

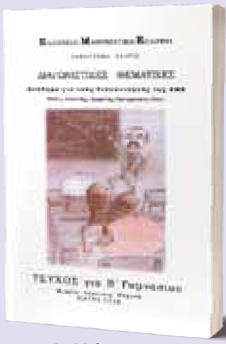
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας



Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€

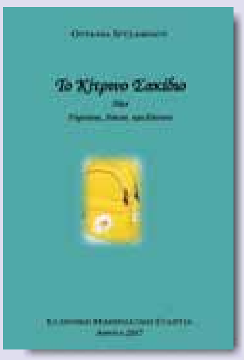
Τιμή τεύχους: 3,5€



Τιμή βιβλίου: 12€

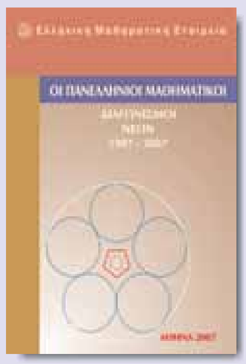
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€



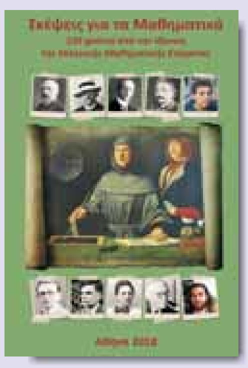
Τιμή βιβλίου: 18€

Τιμή βιβλίου: 30€

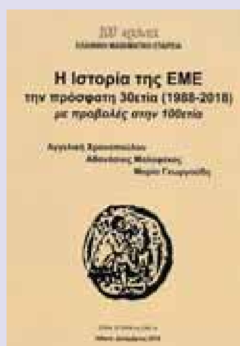


Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 15€



Τιμή βιβλίου: 20€