Ορίζουσες.

Έστω $A_{2x2}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$. Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα Α αντιστοιχίζομε έναν πραγματικό αριθμό τον οποίο ονομάζομε ορίζουσα του Α και ορίζεται ως $|A|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$. Η έννοια της ορίζουσας είναι αναγκαία προκειμένου να ελεγχθεί αν ένας τετραγωνικός πίνακας αντιστρέφεται.

Ορίζουσα 1ης τάξεως.

- Έστω $A=[\alpha_{11}]$. Ο $\alpha_{11}\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ορίζουσα του A. Συμβολικά είναι $|A|=|\alpha_{11}|=\alpha_{11}$. Επειδή ο Α είναι διαστάσεων $1x1$, η ορίζουσα του ονομάζεται $1^{ης}$ τάξεως.

Ορίζουσα 2ης τάξεως.

- Έστω $A_{2x2}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$. Εξ΄ ορισμού, ο $(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ορίζουσα του Α και συμβολίζεται ως $|A|$ ή $D(A)$ ή $Det(A)$. Δηλαδή $|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$. Όπως για τον πίνακα έτσι και για την ορίζουσα λέμε ότι έχει δυο γραμμές και δυο στήλες. Συνεπώς η ορίζουσα λέγεται $2^{ης}$ τάξεως.

Εφαρμογή.

Έστω $A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}$. Ισχύει ότι $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=4-6=-2$

Ορίζουσα 3ης τάξεως.

- Έστω $A_{3x3}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$. Εξ΄ ορισμού, ο πραγματικός αριθμός

$\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$ ονομάζεται ορίζουσα του A. Επειδή ο πίνακας είναι διαστάσεων $3x3$, η ορίζουσα λέγεται $3^{ης}$ τάξεως.

Δηλαδή $|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$

Ανάπτυγμα ορίζουσας 3ης τάξεως.

Έστω $A_{3x3}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$. Η ορίζουσα του είναι $|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$.

Ανάπτυγμα ορίζουσας σύμφωνα με τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας σύμφωνα με τα στοιχεία της $2^{ης}$ γραμμής.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\alpha_{21}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\alpha_{23}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας σύμφωνα με τα στοιχεία της $3^{ης}$ γραμμής.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\alpha_{31}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\alpha_{32}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\alpha_{33}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας σύμφωνα με τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\alpha_{21}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\alpha_{31}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας σύμφωνα με τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\alpha_{32}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας σύμφωνα με τα στοιχεία της $3^{ης}$ στήλης.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\alpha_{23}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\alpha_{33}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Κανόνας Sarrus.

Πρόκειται για μνημονικό κανόνα που εφαρμόζεται μόνο για το ανάπτυγμα ορίζουσας τρίτης τάξεως.

$$|A| = \left|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix} = -\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{22}\alpha_{11} + \alpha_{31}\alpha_{23}\alpha_{12} + \alpha_{32}\alpha_{21}\alpha_{13}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Ιδιότητες των οριζουσών.

• Η ορίζουσα δε μεταβάλλεται αν πάρομε το ανάπτυγμα της κατά τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε γραμμής (ή στήλης) της.

• Όταν όλα τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε γραμμής (ή στήλης) είναι μηδέν, τότε η ορίζουσα ισούται με τον αριθμό μηδέν.

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 3 \cdot 0 = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 0$,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$

• Όταν τα αντίστοιχα στοιχεία δυο γραμμών (ή στηλών) είναι ίσα ή ανάλογα, τότε η ορίζουσα ισούται με τον αριθμό μηδέν.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 30 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0$

• Η ορίζουσα των διαγωνίων πινάκων ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου τους. Η σχετική απόδειξη γίνεται με χρήση της επαγωγικής μεθόδου.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$ $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) 2 \cdot 3 = -6$

• Για κάθε τετραγωνικό πίνακα ισχύει ότι $|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}^{\mathrm{T}}|$. Δηλαδή η ορίζουσα κάθε τετραγωνικού πίνακα ισούται με την ορίζουσα του ανάστροφου του. Αυτό σημαίνει ότι η ορίζουσα δε μεταβάλλεται, αν οι γραμμές της γίνουν στήλες με την ίδια διάταξη.

Για $\nu = 2$ ισχύει ότι $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Εφαρμογή.

Έστω $\mathrm{A}_{2\mathrm{X}2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ισχύει ότι $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

Είναι $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ και $|\mathrm{A}^{\mathrm{T}}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$.

Για $\nu = 3$ ισχύει ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = -\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{22}\alpha_{11} + \alpha_{31}\alpha_{23}\alpha_{12} + \alpha_{32}\alpha_{21}\alpha_{13} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

• Για κάθε τριγωνικό άνω (ή κάτω) πίνακα ισχύει ότι $|\mathrm{A}| = \alpha_{11}\alpha_{22}...\alpha_{\nu\nu}$, δηλαδή η ορίζουσα του ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου αυτού.

• Αν σε μία ορίζουσα εναλλάξομε τη θέση δυο γραμμών (ή στηλών) τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Πράγματι έστω η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$.

Με εναλλαγή της θέσεως των δυο γραμμών, προκύπτει ότι $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ a & \beta \end{vmatrix} = \beta\gamma - \alpha\delta$,

Με εναλλαγή της θέσεως των δυο στηλών, προκύπτει ότι $\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \beta\gamma - \alpha\delta$

Αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = 5$, τότε εναλλάσσοντας τη θέση των γραμμών προκύπτει ότι

$$\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \kappa \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{vmatrix} = -5.$$

Ομοίως αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \kappa \end{vmatrix} = 5$, τότε εναλλάσσοντας τη θέση των στηλών προκύπτει ότι

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ \varepsilon & \delta & \zeta \\ \theta & \eta & \kappa \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \zeta & \varepsilon & \delta \\ \kappa & \theta & \eta \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \delta & \zeta & \varepsilon \\ \eta & \kappa & \theta \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \varepsilon & \zeta & \delta \\ \theta & \kappa & \eta \end{vmatrix} = 5.$$

• Αν πολλαπλασιάσομε τα στοιχεία μίας γραμμής (ή στήλης) μίας ορίζουσας με τον αριθμό k, τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με το k.

$$k\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & k\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ k\gamma & k\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & \beta \\ k\gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & k\beta \\ \gamma & k\delta \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} ka & k\beta \\ k\gamma & k\delta \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & \beta \\ k\gamma & k\delta \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2a & k^2\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ k^2\gamma & k^2\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2a & \beta \\ k^2\gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & k^2\beta \\ \gamma & k^2\delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k\alpha & 2\beta & 3\gamma \\ k\delta & 2\varepsilon & 3\zeta \\ k\eta & 2\theta & 3\lambda \end{vmatrix} = 6k\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \lambda \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} k\alpha & k\beta & k\gamma \\ k\delta & k\varepsilon & k\zeta \\ k\eta & k\theta & k\lambda \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \lambda \end{vmatrix}$$

• Για κάθε $\mathrm{A}_{\nu x\nu}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\lambda \mathrm{A}| = \lambda^\nu |\mathrm{A}|$.

Πράγματι αν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$ τότε $\lambda\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1\nu} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\alpha_{\nu 1} & \lambda\alpha_{\nu 2} & \dots & \lambda\alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$ οπότε

$$|\lambda\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1\nu} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\alpha_{\nu 1} & \lambda\alpha_{\nu 2} & \dots & \lambda\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \lambda^\nu \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \lambda^\nu |\mathrm{A}|.$$

• Αν κάθε στοιχείο μίας γραμμής (ή στήλης) μίας ορίζουσας είναι άθροισμα δυο προσθετέων, τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3+x & 4+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{vmatrix}.$$

• Αν στα στοιχεία μίας γραμμής (ή στήλης) μίας ορίζουσας προσθέσομε τα αντίστοιχα στοιχεία μίας άλλης γραμμής (ή στήλης) πολλαπλασιασμένα με έναν αριθμό k, η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma+5a & \delta+5\beta \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma-4a & \delta-4\beta \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3\beta & \beta \\ \gamma+3\delta & \delta \end{vmatrix}.$$

• Αν A,B είναι πίνακες $2x2$ τότε ισχύει ότι $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|$.

Αποδεικνύεται ότι η ισότητα $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|$ ισχύει γενικά για πίνακες $\nu x\nu$.

Αν $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ προκύπτει ότι $|\mathrm{A}^2| = |\mathrm{A}|^2$. Γενικότερα $|\mathrm{A}^k| = |\mathrm{A}|^k$, $|\mathrm{A}^{-1}| = |\mathrm{A}|^{-1}$.

• Κάθε τετραγωνικός $\nu x\nu$ πίνακας με περισσότερα από $\nu^2-\nu$ μηδενικά στοιχεία έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.

Απόδειξη.

Αν η κάθε γραμμή του πίνακα έχει το πολύ $\nu-1$ μηδενικά στοιχεία, τότε οι ν γραμμές, δηλαδή ο πίνακας, έχει το πολύ $\nu(\nu-1) = \nu^2-\nu$ μηδενικά στοιχεία.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots \\ \dots & 0 \end{pmatrix},\ \nu^2-\nu = 2^2-2 = 2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \nu^2-\nu = 3^2-3 = 6$$

• Αν για τον τετραγωνικό $\nu x\nu$ πίνακα A ισχύει ότι $|\mathrm{A}| = 1$, τότε $|\mathrm{A}^\nu| = |\mathrm{A}|^\nu = 1^\nu = 1$.

• Το ανάπτυγμα κάθε ορίζουσας ν τάξεως είναι άθροισμα $\nu\,!$ όρων.

• Αν A, B πίνακες $2x2$, το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του AB ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του BA.

Εφαρμογή.

Αν $|A| = 3$, και A_{2x2}, είναι $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$, $|A^2| = |A|^2 = 3^2 = 9$, $|A^3| = |A|^3 = 3^3 = 27$,

$|\lambda A| = \lambda^2 |A| = 3\lambda^2$, $|\lambda A^{-1}| = \lambda^2 |A^{-1}| = \lambda^2 |A|^{-1} = \frac{\lambda^2}{3}$.

Π.χ. 1. Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

Είναι $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

Η $2^η$ και η $3^η$ γραμμή πολλαπλασιάστηκαν επί 1 και ακολούθως προστέθηκαν στην $1^η$ γραμμή. Στη συνέχεια, από την $1^η$ γραμμή θα βγει κοινός παράγοντας το $(x+2)$. Τέλος, η $1^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-1) προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές.

$$(x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = -2$ ή $x = 1$(Διπλή λύση).

Π.χ. 2. Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Είναι $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

Η $2^η$ και η $3^η$ γραμμή αφού πολλαπλασιάστηκαν επί 1 προστέθηκαν στην $1^η$ γραμμή. Στη συνέχεια, από την $1^η$ γραμμή θα βγει κοινός παράγοντας το $(2x-1)$, η $1^η$ στήλη πολλαπλασιασμένη επί (-1) θα προστεθεί στις άλλες δύο στήλες και μετά θα υπολογισθεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας.

$$(2x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1-x & 0 \\ x & 0 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(-1-x)(-1-x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1)^2 = 0$$

$(2x-1)(1+x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$ ή $x = -1$(Διπλή λύση)

Π.χ. 3. Υπολογίστε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2020^3 & 3{,}14159 \\ 0 & 2 & 45^6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Είναι $\begin{vmatrix} 1 & 2020^3 & 3{,}14159 \\ 0 & 2 & 45^6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ διότι όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Π.χ. 4. Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Από τη $2^η$ γραμμή θα βγει κοινός παράγοντας το a και στη συνέχεια η $1^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-1) και (-3) θα προστεθεί στις $2^η$ και $3^η$ γραμμή, αντίστοιχα.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1-x \\ 0 & x-3 & 3-3x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

Υπολογισμός αναπτύγματος της ορίζουσας σύμφωνα με τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης.

$$\alpha(-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 0 & 1-x \\ x-3 & 3-3x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha \begin{vmatrix} 0 & 1-x \\ x-3 & 3(1-x) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha(1-x)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x-3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha(1-x)(3-x) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 3$.

Π.χ. 5. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 & 1 \\ \beta & 2+\alpha & 1 \\ 2 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Η $2^η$ και η $3^η$ στήλη πολλαπλασιασμένες επί 1, προστίθεται στην $1^η$ στήλη. Ακολούθως από την $1^η$ στήλη βγαίνει κοινός παράγοντας το $(\alpha+\beta+3)$.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 & 1 \\ \beta & 2+\alpha & 1 \\ 2 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+3 & \beta+2 & 1 \\ \alpha+\beta+3 & 2+\alpha & 1 \\ \alpha+\beta+3 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+3)\begin{vmatrix} 1 & \beta+2 & 1 \\ 1 & 2+\alpha & 1 \\ 1 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+3)0 = 0.$$

Δύο στήλες ($1^η$ και $3^η$) ίσες, άρα η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

Π.χ. 6. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 1+y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1+y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1+y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Είναι $\begin{vmatrix} 1+y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1+y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1+y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1+y_1 \\ 1 & 1 & x_2+y_2 \\ 1 & 1 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1+y_1 \\ 1 & x_2 & x_2+y_2 \\ 1 & x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1+y_1 \\ y_2 & 1 & x_2+y_2 \\ y_3 & 1 & x_3+y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 \\ y_2 & 1 & x_2 \\ y_3 & 1 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_2 \\ y_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1+y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2+y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 \\ y_2 & 1 & x_2 \\ y_3 & 1 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ y_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 \\ y_2 & 1 & x_2 \\ y_3 & 1 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Π.χ. 7. Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 2^5 & 2^5 & 2^5 \\ 2^5 & 2^5-x & 2^5 \\ 2^5 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0$.

Από την $1^η$ στήλη βγαίνει κοινός παράγοντας το 2^5.

$$\begin{vmatrix} 2^5 & 2^5 & 2^5 \\ 2^5 & 2^5-x & 2^5 \\ 2^5 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2^5\begin{vmatrix} 1 & 2^5 & 2^5 \\ 1 & 2^5-x & 2^5 \\ 1 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2^5 & 2^5 \\ 1 & 2^5-x & 2^5 \\ 1 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

Η $1^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-1) προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές. Ακολούθως, υπολογίζεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2^5 & 2^5 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 2^6-2^5-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x\left(2^6-2^5-x\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2^6-2^5=64-32=32.$$

Π.χ. 8. Υπολογίστε την $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Η 1η γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-4), (-7) προστίθεται στις 2η, 3η γραμμές, αντίστοιχα.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = (-3)(-6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18\cdot 0 = 0$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας ισούται με μηδέν, διότι έχει δύο ίσες γραμμές (2η, 3η).

Π.χ. 9. Αν A_{3X1}, B_{1X3}, να βρεθεί ο AB και να δειχθεί ότι δεν αντιστρέφεται.

Έστω $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$.

Είναι $AB=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3\beta_1 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_3 \end{pmatrix}$.

Είναι $|AB|=0$ διότι τα στοιχεία δυο γραμμών (Γ_1,Γ_2) είναι ανάλογα $\left(\Gamma_1\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}=\Gamma_2\right)$.

Π.χ. 10. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\gamma & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma\alpha & \beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$.

Αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$ προφανώς ισχύει.

Πράγματι αν $\alpha=0$ είναι $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta^2 \\ 0 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \beta\gamma\left(\beta\gamma^2-\beta^2\gamma\right)$

Πράγματι αν $\beta=0$ είναι $\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \alpha^3\gamma^2-\alpha^2\gamma^3$

Πράγματι αν $\gamma=0$ είναι $\begin{vmatrix}1 & \alpha^2 & \alpha^3\\ 1 & \beta^2 & \beta^3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \alpha & \alpha^2\\ 0 & \beta & \beta^2\\ \alpha\beta & 0 & 0\end{vmatrix}=\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2$

Αν $\alpha\beta\gamma\neq 0$, πολλαπλασιάζοντας την ορίζουσα επί $\alpha\beta\gamma$ και ταυτόχρονα διαιρώντας την πρώτη γραμμή με το α, τη δεύτερη γραμμή με το β και την τρίτη γραμμή με το γ προκύπτει:

$$\begin{vmatrix}1 & \alpha^2 & \alpha^3\\ 1 & \beta^2 & \beta^3\\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3\end{vmatrix}=\alpha\beta\gamma\begin{vmatrix}\frac{1}{\alpha} & \alpha & \alpha^2\\ \frac{1}{\beta} & \beta & \beta^2\\ \frac{1}{\gamma} & \gamma & \gamma^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\cancel{\alpha}\beta\gamma}{\cancel{\alpha}} & \alpha & \alpha^2\\ \frac{\alpha\cancel{\beta}\gamma}{\cancel{\beta}} & \beta & \beta^2\\ \frac{\alpha\beta\cancel{\gamma}}{\cancel{\gamma}} & \gamma & \gamma^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\beta\gamma & \alpha & \alpha^2\\ \gamma\alpha & \beta & \beta^2\\ \alpha\beta & \gamma & \gamma^2\end{vmatrix}.$$

Πρόταση. Αν A,B $\nu x\nu$ πίνακες, τότε $\mathrm{AB}=I$ αν και μόνο αν $\mathrm{BA}=I$, όπου I ο μοναδιαίος $\nu x\nu$ πίνακας. Από την πρόταση αυτή προκύπτει ότι αν για τους τετραγωνικούς $\nu x\nu$ πίνακες A,B ισχύει ότι $\mathrm{AB}=I$ αυτό είναι αρκετό (δεν χρειάζεται και το $\mathrm{BA}=I$) για να συμπεράνομε ότι οι πίνακες A,B είναι αντιστρέψιμοι και ότι ο ένας είναι αντίστροφος του άλλου.

Π.χ. 11. Υπολογίστε τις ορίζουσες $\begin{vmatrix}3 & 3 & 3\\ 5 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}x & x+1 & x+4\\ y & y+1 & y+4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\alpha & 1\\ 1 & 1 & 1+\beta\end{vmatrix}$.

- Είναι $\begin{vmatrix}3 & 3 & 3\\ 5 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -6\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=6(-1)^{1+3}1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=$

Από την 1η γραμμή βγαίνει κοινός παράγοντας το 3 και στη συνέχεια η 3η γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-1) και (-5) προστίθεται στις 1η και 2η γραμμή, αντίστοιχα.

$6(-1)^{1+3}1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=6(-3+1)=-12$.

- Είναι $\begin{vmatrix}x & x+1 & x+4\\ y & y+1 & y+4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 1 & 4\\ y & 1 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$. Η 1η στήλη αφαιρείται από τις άλλες δύο.

Δύο στήλες (2η, 3η) είναι ανάλογες, άρα η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

- Είναι $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\alpha & 1\\ 1 & 1 & 1+\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{vmatrix}=\alpha\beta$. Η 1η γραμμή αφαιρείται από τις άλλες δύο γραμμές. Η ορίζουσα του άνω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Π.χ. 12. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 8,02 & 0,5 & 300 \\ 8,04 & 0,6 & 200 \\ 8,06 & 0,7 & 100 \end{vmatrix} = 0$,

Είναι $\begin{vmatrix} 8,02 & 0,5 & 300 \\ 8,04 & 0,6 & 200 \\ 8,06 & 0,7 & 100 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 8,02 & 0,5 & 3 \\ 8,04 & 0,6 & 2 \\ 8,06 & 0,7 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 8,02 & 5 & 3 \\ 8,04 & 6 & 2 \\ 8,06 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

Η $1^{η}$ γραμμή πολλαπλασιάζεται επί (-1) και προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές.

$10\begin{vmatrix} 8,02 & 5 & 3 \\ 0,02 & 1 & -1 \\ 0,04 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$, διότι η $2^{η}$ γραμμή και η $3^{η}$ γραμμή είναι ανάλογες.

Π.χ. 13. Βρείτε τον A^{-1} αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Είναι $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$. $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Π.χ. 14. Υπολογίστε τις ορίζουσες $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha+1 & \beta+1 & 1 \\ \alpha-8 & \beta-8 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \alpha & \delta & 5\alpha+\delta \\ \beta & \varepsilon & 5\beta+\varepsilon \\ \gamma & \zeta & 5\gamma+\zeta \end{vmatrix}$.

- Η $1^{η}$ γραμμή πολλαπλασιάζεται επί (-1) και προστίθενται στις άλλες δύο, οπότε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha+1 & \beta+1 & 1 \\ \alpha-8 & \beta-8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \ (2^{η} \text{ γραμμή} = 3^{η} \text{ γραμμή})$$

- Η $2^{η}$ στήλη πολλαπλασιάζεται επί (-1) και προστίθενται στην $3^{η}$ στήλη, οπότε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \delta & 5\alpha+\delta \\ \beta & \varepsilon & 5\beta+\varepsilon \\ \gamma & \zeta & 5\gamma+\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & 5\alpha \\ \beta & \varepsilon & 5\beta \\ \gamma & \zeta & 5\gamma \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \alpha \\ \beta & \varepsilon & \beta \\ \gamma & \zeta & \gamma \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 = 0 \ \ (1^{η} \text{ στήλη}=3^{η} \text{ στήλη})$$

Π.χ. 15. Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Αν η $1^{η}$ γραμμή πολλαπλασιαστεί επί (-1) και προστεθεί στις άλλες δύο γραμμές, προκύπτει

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \alpha^2 - x^2 & \alpha - x & 0 \\ \beta^2 - x^2 & \beta - x & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - x^2)(\beta - x) - (\beta^2 - x^2)(\alpha - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - x)(\beta - x)\left[(a + x) - (\beta + x)\right] = 0 \Leftrightarrow (a - x)(\beta - x)(\alpha - \beta) = 0$$

Π.χ. 16. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \log 36 & \log 75 & \log 72 \\ \log 64 & \log 27 & \log 8 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = 0$

Υπενθύμιση. Είναι $\log\theta_1 - \log\theta_2 = \log\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ & $\log\theta_1 + \log\theta_2 = \log(\theta_1 \cdot \theta_2)$ & $\log\theta^k = k\cdot\log\theta$.

Η $3^η$ γραμμή πολλαπλασιάζεται επί (-1) και προστίθενται στην $1^η$ γραμμή, οπότε

$$\begin{vmatrix} \log 36 & \log 75 & \log 72 \\ \log 64 & \log 27 & \log 8 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 12 & \log 15 & \log 12 \\ \log 4^3 & \log 3^3 & \log 2^3 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 12 & \log 15 & \log 12 \\ 3\cdot\log 4 & 3\cdot\log 3 & 3\cdot\log 2 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix}$$

Η $3^η$ γραμμή πολλαπλασιάζεται επί (-1) και προστίθενται στην $1^η$ γραμμή, οπότε

$$\begin{vmatrix} \log 12 & \log 15 & \log 12 \\ 3\cdot\log 4 & 3\cdot\log 3 & 3\cdot\log 2 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 4 & \log 3 & \log 2 \\ 3\cdot\log 4 & 3\cdot\log 3 & 3\cdot\log 2 \\ \log 3 & \log 5 & \log 6 \end{vmatrix} = 0$$ διότι οι γραμμές $1^η$ & $2^η$ είναι ανάλογες.

Π.χ. 17. Υπολογίστε τις (α) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$, (β) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, (γ) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$,

(δ) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, (ε) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$, (στ) $\begin{vmatrix} 25424 & 25436 \\ 25423 & 25435 \end{vmatrix}$.

Λύση.

(α) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 13\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$

Η $1^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-4) και (-2) αντίστοιχα, προστίθεται στις άλλες δύο γραμμές. Στη συνέχεια από τη $2^η$ γραμμή βγαίνει κοινός παράγοντας το 13.

Η $2^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-7) προστίθεται στην $3^η$ γραμμή. Η ορίζουσα που προκύπτει ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου της.

$$13\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot 13(-5) = -65.$$

(β) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ διότι όλα τα στοιχεία της 2ης στήλης είναι 0.

(γ) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} 9 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$

Η $2^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-2) και (-3) προστίθεται στην $3^η$ και $1^η$ γραμμή, αντίστοιχα. Ακολούθως, η $3^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-2) και 2 προστίθεται στις $2^η$ και $1^η$ γραμμή, αντίστοιχα. Τέλος, υπολογίζεται η τιμή της ορίζουσας από το ανάπτυγμα των στοιχείων της $1^{ης}$ γραμμής.

(δ)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} -13 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-13) = -26$$

Η $1^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-2) προστίθεται στη $2^η$ γραμμή. Ακολούθως, η $3^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί 10, προστίθεται στη $2^η$ γραμμή. Τέλος, υπολογίζεται η τιμή της ορίζουσας με βάση το ανάπτυγμα της $1^{ης}$ στήλης της.

(ε) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (Βασική τριγωνομετρική ταυτότητα).

(στ) $\begin{vmatrix} 25424 & 25436 \\ 25423 & 25435 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 25423 & 25435 \end{vmatrix} = 25435 - 25423 = 12$

Από την $1^η$ γραμμή αφαιρείται η $2^η$ γραμμή.

Π.χ. 18. Δείξτε ότι αν $A_{\nu x \nu}$, $|A| = 1$ τότε $|A^\nu| = 1$. Είναι $|A^\nu| = |A|^\nu = 1^\nu = 1$

Π.χ. 19. Αν A_{3x3}, $B = (x+2)A$, λύστε ως προς $x \in \mathbb{R}$ την $|B| = 2^6 |A|$.

Από $B = (x+2)A$ είναι $|B| = |(x+2)A| = (x+2)^3 |A|$.

Συνεπώς, $2^6 |A| = (x+2)^3 |A| \Leftrightarrow 2^6 = (x+2)^3 \Leftrightarrow 4^3 = (x+2)^3 \Leftrightarrow 4 = x+2 \Leftrightarrow 2 = x$

Π.χ. 20. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} 1-\alpha-\beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & 1-\beta-\gamma & \alpha \\ \beta & \beta & 1-\gamma-\alpha \end{vmatrix} \geq 0$

Προσθέτω στην $1^η$ γραμμή αρχικά τη $2^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί ένα και στη συνέχεια την $3^η$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί ένα, οπότε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1-\beta-\gamma & \alpha \\ \beta & \beta & 1-\gamma-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-a-\beta-\gamma & 0 \\ \beta & 0 & 1-\gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (1-a-\beta-\gamma)^2 \geq 0$$

Π.χ. 21. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ x+4\alpha & x+5\alpha & x+6\alpha & x+7\alpha \\ x+8\alpha & x+9\alpha & x+10\alpha & x+11\alpha \\ x+12\alpha & x+13\alpha & x+14\alpha & x+15\alpha \end{vmatrix} = 0$.

Είναι $\begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ x+4\alpha & x+5\alpha & x+6\alpha & x+7\alpha \\ x+8\alpha & x+9\alpha & x+10\alpha & x+11\alpha \\ x+12\alpha & x+13\alpha & x+14\alpha & x+15\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha \\ 7\alpha & 8\alpha & 8\alpha & 8\alpha \\ 11\alpha & 12\alpha & 12\alpha & 12\alpha \end{vmatrix} =$

Από τον πολλαπλασιασμό της $1^{ης}$ γραμμής επί (-1) και ακολούθως την πρόσθεση της σε όλες τις άλλες γραμμές. Η $2^{η}$ γραμμή πολλαπλασιασμένη επί (-1) προστίθεται στην $3^{η}$ και στην $4^{η}$ γραμμή, οπότε προκύπτει

$$= \begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha & 4\alpha & 4\alpha \\ 7\alpha & 8\alpha & 8\alpha & 8\alpha \end{vmatrix} = 4\alpha^3 \begin{vmatrix} x & x+\alpha & x+2\alpha & x+3\alpha \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

Η $1^{η}$ στήλη πολλαπλασιασμένη επί (-1), προστίθενται σε όλες τις άλλες στήλες, άρα

$$= 4\alpha^3 \begin{vmatrix} x & \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\alpha^3 (-1)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\alpha^3 \cdot 0 = 0$$

Π.χ. 22. Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x^2 & 3x & 1 \\ 1 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

Είναι $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x^2 & 3x & 1 \\ 1 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ και αφαιρώντας την $1^{η}$ στήλη από τις άλλες είναι

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x-x^2 & 1-x^2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} x-x^2 & 1-x^2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} x-x^2 & 1-x^2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$6\left[3\left(x-x^2\right)-2\left(1-x^2\right)\right] = 6(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Άλυτες ασκήσεις.

1. Υπολογίστε το γινόμενο $\Delta_1 \cdot \Delta_2$ όταν $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

2. Δείξτε ότι η τιμή της $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1+\kappa+4\lambda \\ 2 & 1 & 2+2\kappa+\lambda \\ 0 & 3 & 4+3\lambda \end{vmatrix}$ είναι ανεξάρτητη των τιμών των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

3. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \beta_1+\gamma_1 & \gamma_1+\alpha_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ \beta_2+\gamma_2 & \gamma_2+\alpha_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ \beta_3+\gamma_3 & \gamma_3+\alpha_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

4. Βρείτε τις τιμές της γωνίας θ ώστε $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 0$.

5. Αν $\mathrm{A}_{\nu x\nu}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $|\lambda\cdot\mathrm{A}| = \lambda^{\nu}\cdot|\mathrm{A}|$.

6. Αν $\mathrm{A}_{\nu x\nu}$ δείξτε ότι $|\mathrm{A}|=0$ αν και μόνο αν ο Α έχει περισσότερα από $\left(\nu^2-\nu\right)$ μηδενικά στοιχεία.

7. Αν Α αντιστρέψιμος $\nu x\nu$ πίνακας δείξτε ότι
(**i**) $|\mathrm{A}^{-1}| = |\mathrm{A}|^{-1}$,
(**ii**) Αν $|\mathrm{A}|=2$ βρείτε την τιμή της $|\lambda\mathrm{A}^{-1}|$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$
(**iii**) Αν $\mathrm{A}^3=4\mathrm{A}$ βρείτε την τιμή της $|\mathrm{A}|$.

Λύση.

(**i**) Είναι $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{I}_{\nu} \Leftrightarrow |\mathrm{AA}^{-1}|=|\mathrm{I}_{\nu}| \Leftrightarrow |\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{A}^{-1}|=1 \Leftrightarrow |\mathrm{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\mathrm{A}|}=|\mathrm{A}|^{-1}$

(**ii**) Είναι $|\lambda\mathrm{A}^{-1}|=\lambda^{\nu}|\mathrm{A}^{-1}|=\dfrac{\lambda^{\nu}}{2}$

(**iii**) Είναι $\mathrm{A}^3=4\mathrm{A} \Leftrightarrow |\mathrm{A}^3|=|4\mathrm{A}| \Leftrightarrow |\mathrm{A}|^3=4^{\nu}|\mathrm{A}| \Leftrightarrow |\mathrm{A}|^2=4^{\nu} \Leftrightarrow |\mathrm{A}|=\sqrt{4^{\nu}}$

8. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda+1 \\ 2 & \lambda+6 \end{bmatrix}, \mathrm{B}=\begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda+1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}$, βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $|\mathrm{AB}|=0$.

9. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ βρείτε τους adjA, A^{-1}.

10. Αν για τον A_{2x2} ισχύει $|\mathrm{A}+\mathrm{I}|=|\mathrm{A}-\mathrm{I}|$, δείξτε ότι $|\mathrm{A}-2\mathrm{I}|=4+|\mathrm{A}|$.

11. Σε ορίζουσα D, τάξης ν>1 υπάρχουν $\mu\in\mathbb{N}^*$ μηδενικά στοιχεία ώστε $\dfrac{1}{\nu}+\dfrac{1}{\mu}<\dfrac{1}{\nu-1}$. Δείξτε ότι D=0.

12. Λύστε τις εξισώσεις (**α**) $\begin{vmatrix} 6-x & 3 & 5 \\ 2 & 5-x & 7 \\ 6 & 6 & 2-x \end{vmatrix}=0$, (**β**) $\begin{vmatrix} x-5 & x+4 & x-3 \\ x+4 & x-2 & x-6 \\ x-2 & x-3 & x+1 \end{vmatrix}=0$

(**γ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta-3x \\ \beta & \alpha & \gamma-3x \\ \gamma & \beta & \alpha-3x \end{vmatrix}=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, (**δ**) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & x & x^2 \\ x^2+x & x^2+5 & x+5 \end{vmatrix}=0$,

(**ε**) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}=0$ (**στ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+9 & \alpha \\ \alpha+x & \alpha & \alpha+12 \\ \alpha & \alpha+x & \alpha \end{vmatrix}=0,\ \alpha\neq 0$

13. Δείξτε ότι: (**α**) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \sin x \\ \beta & \cos x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \sin\omega \\ \beta & \cos\omega \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \gamma & \sin y \\ \delta & \cos y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma & \sin\varphi \\ \delta & \cos\varphi \end{vmatrix} \end{vmatrix}^2 \leq \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)^2$,

(**β**) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin(2\alpha) \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin(2\alpha) \\ 1+\sin(2\alpha) & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\cos^3(2\alpha)$, (**γ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \leq (\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)$.

(**δ**) $\begin{vmatrix} 1+\alpha^3 & \alpha & \alpha^2 \\ 1+\beta^3 & \beta & \beta^2 \\ 1+\gamma^3 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(1+\alpha\beta\gamma)$, (**ε**) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix}=-(\alpha-\beta)^4$,

(**στ**) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix}=(\alpha+3\beta)(\alpha-\beta)^3$

14. Υπολογίστε τις $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4\alpha \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+4x & \alpha+8x & \alpha+12x \\ \alpha+x & \alpha+5x & \alpha+9x & \alpha+13x \\ \alpha+2x & \alpha+6x & \alpha+10x & \alpha+14x \\ \alpha+3x & \alpha+7x & \alpha+11x & \alpha+15x \end{vmatrix}$$

15. Λύστε τις εξισώσεις $\begin{vmatrix} x & 1 & -7 \\ 4x+6 & -x^2 & x \\ -2x & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

16. Με τη βοήθεια γραμμοπράξεων βρείτε τον A^{-1} αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
