5 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$f_1(x)=\alpha x^2,\qquad f_2(x)=\alpha x^3,\qquad f_3(x)=\frac{\alpha}{x}\qquad \text{και}\qquad f_4(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

3. Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (“οριακές τιμές” κτλ.).

4. Συντάσσουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης και, με τη βοήθεια αυτού και των προηγούμενων συμπερασμάτων, χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α είναι *άρτια,* τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι *περιττή*, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης αρκεί να περιοριστούμε στα $x\in A$, με $x\geq 0$ και να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο σύνολο αυτό. Στη συνέχεια θα πάρουμε το συμμετρικό της καμπύλης που χαράξαμε ως προς τον άξονα $y'y$ αν η συνάρτηση είναι άρτια και ως προς την αρχή των αξόνων αν η συνάρτηση είναι περιττή και θα βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα. Γι’ αυτό, συνήθως, πριν προχωρήσουμε στα βήματα 2 έως 4, ελέγχουμε από την αρχή αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

5.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x)=\alpha x^2$

Η συνάρτηση $g(x)=x^2$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2$**.** Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή**,** έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x)$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, αρχικά θα μελετήσουμε και θα παραστήσουμε γραφικά την g στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

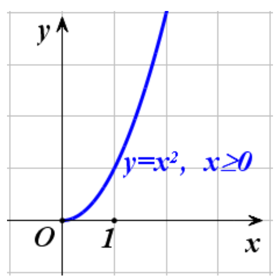
- ***Μονοτονία:*** Έστω τυχαία $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα είναι $x_1^2<x_2^2$, οπότε θα έχουμε $g(x_1)<g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x)=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- ***Ακρότατα:*** Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει:
$$g(x)=x^2\geq 0=g(0).$$
Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει στο $x_0=0$ ελάχιστο, το $g(0)=0$.

- ***Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

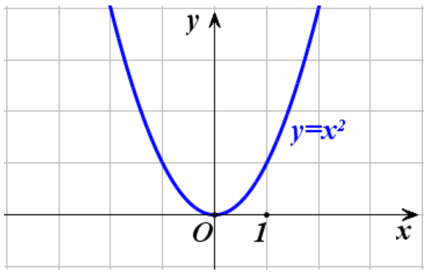
x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	$\dots$	$\to+\infty$
$g(x)=x^2$	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}	10^{2000}	$\dots$	$\to+\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, ή όπως λέμε "**τείνει στο** $+\infty$**"**, το x^2 αυξάνεται και αυτό απεριόριστα και μάλιστα γρηγορότερα και άρα "**τείνει στο** $+\infty$**".** Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x απομακρύνεται προς το $+\infty$.



Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για μη αρνητικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς τον άξονα $y'y$, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$ σε όλο $\mathbb{R}$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:



Η συνάρτηση $g(x)=x^2$:

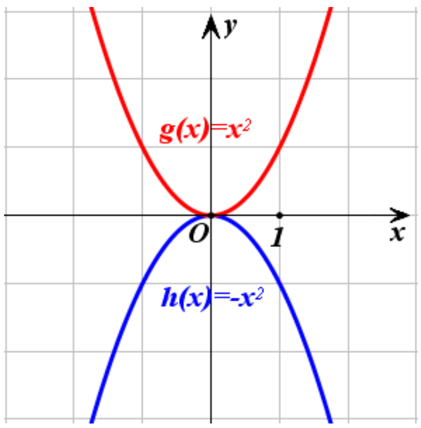
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$
- Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $g(0)=0$.
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$, είτε στο $+\infty$.

Η συνάρτηση $h(x)=-x^2$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x)=-x^2$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x)=-g(x)$$

Άρα, όπως μάθαμε στην §4.2, η γραφική παράσταση της $h(x)=-x^2$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x)=x^2$ ως προς τον άξονα $x'x$.



Επομένως η συνάρτηση $h(x)=-x^2$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- Παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$, το $h(0)=0$
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$ είτε στο $+\infty$.

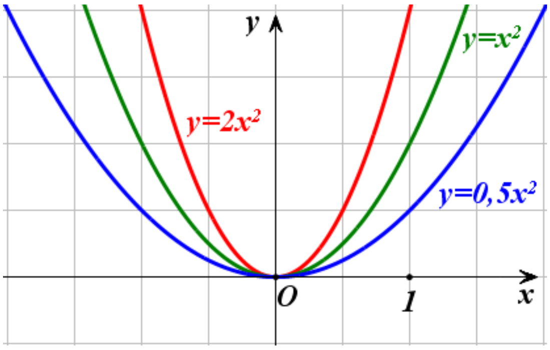
Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\boldsymbol{\alpha>0}$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x)=x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha>0$	$+\infty$ $\searrow$	0 **min**	$\nearrow$ $+\infty$

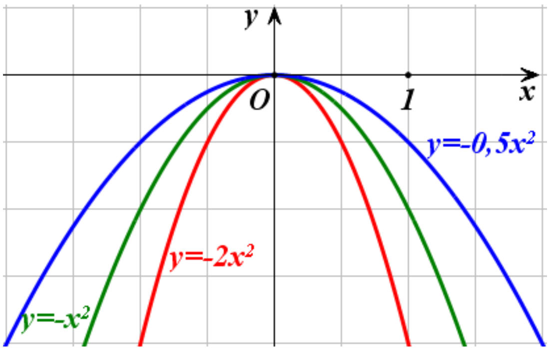
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f\left(x\right)=\alpha x^2$ για $\alpha=0{,}5$, $\alpha=1$ και $\alpha=2$.



- Αν $\boldsymbol{\alpha<0}$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h\left(x\right)=-x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha<0$	$-\infty$ $\nearrow$	**max** 0	$\searrow$ $-\infty$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f\left(x\right)=\alpha x^2$ για $\alpha=-0{,}5$, $\alpha=-1$, $\alpha=-2$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή** με **κορυφή** την αρχή των αξόνων και **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.

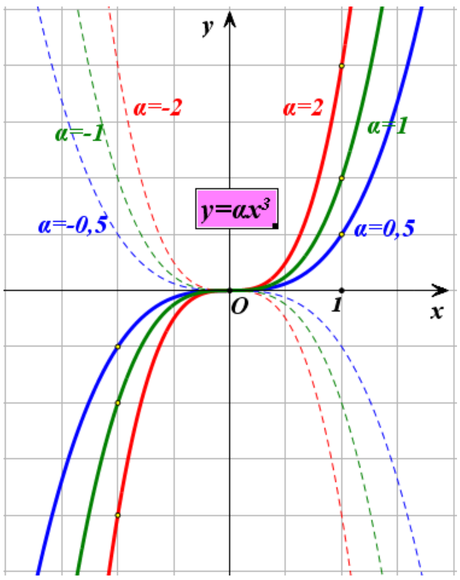
Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

- ✓ Όταν το α είναι θετικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα πάνω, ενώ όταν το α είναι αρνητικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα κάτω.
- ✓ Καθώς η $|\alpha|$ μεγαλώνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο "κλειστή", δηλαδή "πλησιάζει" τον άξονα $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $h(x)=\alpha x^3$.

ΛΥΣΗ



Η συνάρτηση $h(x)=\alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$, είναι περιττή, διότι:

$$h(-x)=(-x)^3=-x^3=-h(x)$$

Επομένως, αρκεί να τη μελετήσουμε και να την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια να βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα για όλο το $\mathbb{R}$.

Αν εργαστούμε με τρόπο ανάλογο με εκείνο με τον οποίο εργαστήκαμε για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση $h(x)=\alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$:

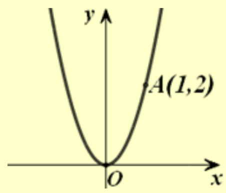
- Αν $\alpha > 0$,
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  - ✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα κάτω όταν το x τείνει στο $-\infty$.
- Αν $\alpha < 0$,
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

- ✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα πάνω όταν το x τείνει στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=0,5x^2$, $f(x)=0,5x^2+2$ και $g(x)=0,5x^2-3$

ii) $\psi(x)=-0,5x^2$, $h(x)=-0,5x^2-2$ και $q(x)=-0,5x^2+3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=0,5x^2$, $f(x)=0,5(x-2)^2$ και $g(x)=0,5(x+2)^2$

ii) $\psi(x)=-0,5x^2$, $h(x)=-0,5(x-2)^2$ και $q(x)=-0,5(x+2)^2$.

4. **i)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x^2 \quad \text{και} \quad g(x)=1$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$x^2\le 1 \quad \text{και} \quad x^2>1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=x|x|.$$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$$

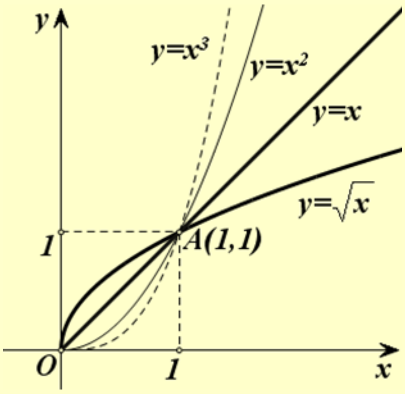
και με τη βοήθεια αυτής να βγάλετε τα συμπεράσματα τα σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης *f*.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x)=x$, $g(x)=x^2$,

$h(x)=x^3$ και $\varphi(x)=\sqrt{x}$

στο διάστημα $[0,+\infty)$, τις οποίες χαράξαμε με τη βοήθεια Η/Υ.



i) Να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις τιμές

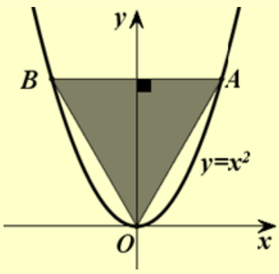
$x,\ \ x^2,\ \ x^3$ και $\sqrt{x}$

των συναρτήσεων f, g, h και φ:

α) για $0<x<1$ και β) για $x>1$.

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε προηγουμένως.

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισόπλευρο. Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου *A*.



5.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x)=\frac{\alpha}{x}$

Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι περιττή, διότι για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει :

$$g(-x)=\frac{1}{-x}=-g(x)$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Γι' αυτό αρχικά θα τη μελετήσουμε και θα την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

- ***Μονοτονία:*** Έστω τυχαία $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα ισχύει $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$, οπότε θα έχουμε $g(x_1)>g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

- ***Πρόσημο των τιμών της g:*** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $g(x)=\frac{1}{x}>0$. Επομένως, στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της g θα βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.

- ***Συμπεριφορά της g για "μικρές" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μικρές" τιμές του x:

x	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	....	$\to 0$
$g(x)=\frac{1}{x}$	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	....	$\to +\infty$

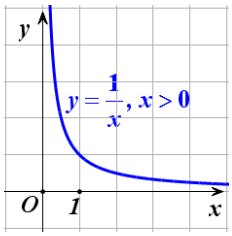
Παρατηρούμε ότι, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα και παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 0 ή, όπως λέμε, ***"τείνει στο 0"***, το $\frac{1}{x}$ αυξάνεται απεριόριστα και ***τείνει στο*** $+\infty$. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "πλησιάζει" το 0 από τα δεξιά, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy. Γι' αυτό ο άξονας $y'y$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της g προς τα πάνω.

- ***Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

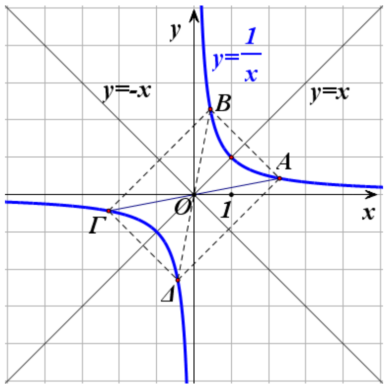
x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…….	$\to +\infty$
$g(x)=\frac{1}{x}$	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	…….	$\to 0$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα και ***τείνει στο*** $+\infty$, το $\frac{1}{x}$ μειώνεται απεριόριστα και ***τείνει στο 0.*** Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "απομακρύνεται" προς το $+\infty$, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Ox. Γι' αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της g προς τα δεξιά.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για θετικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $(0,+\infty)$.



Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς την αρχή των αξόνων, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x)=\frac{1}{x}$ σε όλο το $\mathbb{R}^*$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:



Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$:

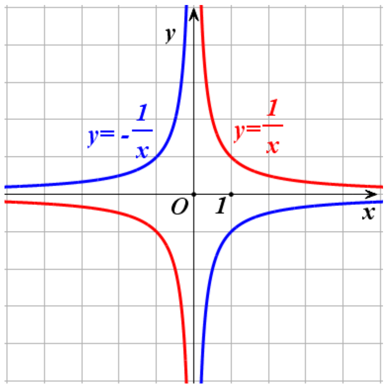
- Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:
  - ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 1^o και έναν στο 3^o τεταρτημόριο,
  - ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
  - ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος

✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

Η συνάρτηση $h(x)=-\frac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x)=-\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x)=-g(x).$$



Επομένως, η γραφική παράσταση της $h(x)=-\frac{1}{x}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x)=\frac{1}{x}$ ως προς τον άξονα $x'x$, οπότε, η συνάρτηση $h(x)=-\frac{1}{x}$:

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:
  ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο $2^{\text{ο}}$ και έναν στο $4^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο,

  ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,

  ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος

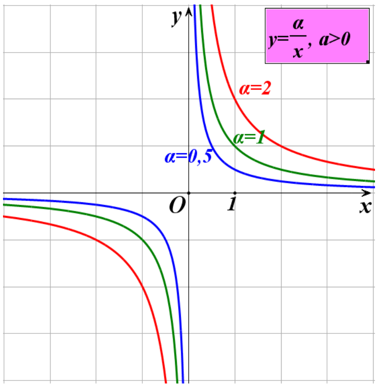
  ✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}$

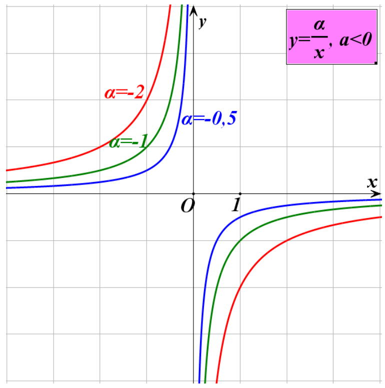
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\alpha>0$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.

  Στο σχήμα α΄ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ για $\alpha=0,5$, $\alpha=1$ και $\alpha=2$.



<u>*Σχήμα α΄*</u>



<u>*Σχήμα β΄*</u>

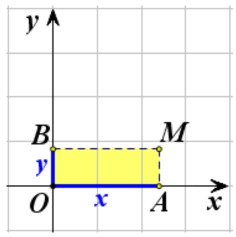
- Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -\dfrac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.

  Στο σχήμα β΄ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ για $\alpha = -0{,}5$, $\alpha = -1$ και $\alpha = -2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, λέγεται **ισοσκελής υπερβολή** με **κέντρο** την αρχή των αξόνων και **ασύμπτωτες** τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

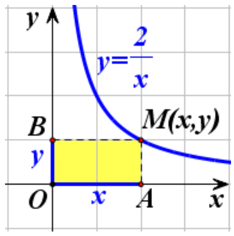
Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ κινείται στο 1ο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΑΜΒ να παραμένει σταθερό και ίσο με 2τ.μ. Να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ διαγράφει τον έναν κλάδο μιας ισοσκελούς υπερβολής.



ΛΥΣΗ

Αν με x συμβολίσουμε το μήκος και με y το πλάτος του ορθογωνίου, επειδή το εμβαδόν του είναι ίσο με 2τμ, θα ισχύει $xy = 2$ και $x, y > 0$, οπότε θα έχουμε:

$$y = \frac{2}{x}, \quad \text{με } x > 0$$

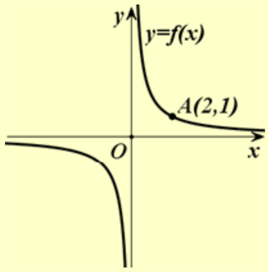


Άρα το σημείο Μ θα διαγράφει τον κλάδο της υπερβολής $y = \dfrac{2}{x}$ που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του διπλανού σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x}+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}-3$

ii) $\psi(x)=-\frac{1}{x}$, $h(x)=-\frac{1}{x}-2$ και $q(x)=-\frac{1}{x}+3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}$ και $g(x)=\frac{1}{x+3}$

ii) $\psi(x)=-\frac{1}{x}$, $h(x)=-\frac{1}{x-2}$ και $q(x)=-\frac{1}{x+3}$.

4. **i)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=1$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x}\le 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x}>1$$

ii) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.

5. Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2$ και τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x}\le x^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x}>x^2$$

6. Οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Να εκφράσετε το μήκος y της ΑΓ συναρτήσει του μήκους x της ΑΒ και στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

5.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Θα μελετήσουμε αρχικά τη συνάρτηση $g(x) = 2x^2 + 12x + 20$ που είναι ειδική περίπτωση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$.

Για τη μελέτη της συνάρτησης g μετασχηματίζουμε τον τύπο της ως εξής:

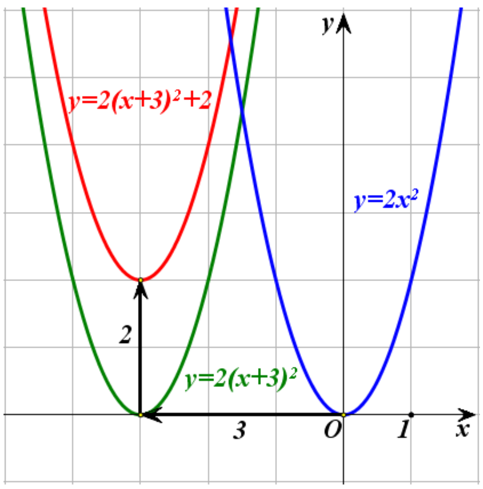
$$\begin{aligned} g(x) = 2x^2 + 12x + 20 &= 2(x^2 + 6x + 10) \\ &= 2\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10\right] \\ &= 2\left[(x+3)^2 + 1\right] \\ &= 2(x+3)^2 + 2 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$g(x) = 2(x+3)^2 + 2$$

Επομένως, για να παραστήσουμε γραφικά την g, χαράσσουμε πρώτα την $y = 2(x+3)^2$ που προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = 2x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = 2(x+3)^2 + 2$ που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = 2(x+3)^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

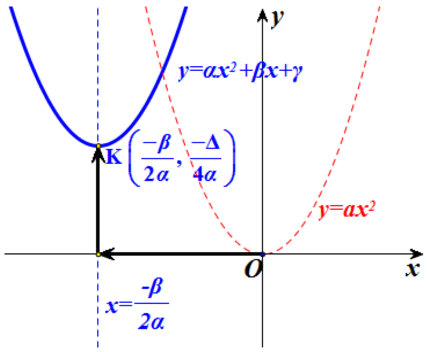
Άρα, η γραφική παράσταση της $g(x) = 2(x+3)^2 + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα άνω με κορυφή το σημείο Κ(−3,2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -3$.

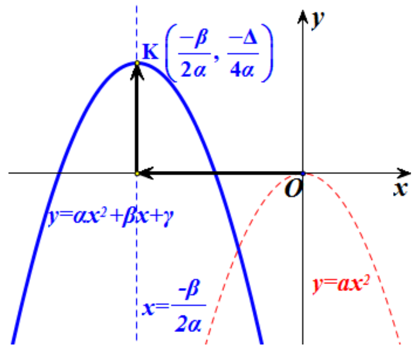


Θα μελετήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$. Όπως είδαμε στην §3.2 (μορφές τριωνύμου), η $f(x)$ παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Επομένως η γραφική της παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=\alpha x^2$, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $\mathrm{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι και αυτή μια **παραβολή**, που έχει **κορυφή** το σημείο $\mathbf{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και **άξονα συμμετρίας** την ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.





Άρα, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$:

- Αν $\alpha>0$,
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.
  - ✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha>0$	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ min	↗ $+\infty$

- Αν $\alpha<0$, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$:
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$
  - ✓ Παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

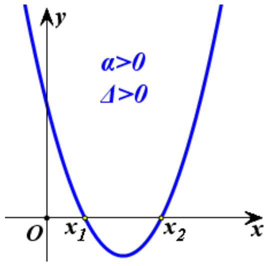
Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα.

x	$-\infty$ $\qquad \dfrac{-\beta}{2\alpha} \qquad$ $+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha<0$	$-\infty \nearrow \dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ max $\searrow -\infty$

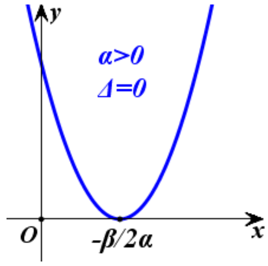
Τέλος η γραφική παράσταση της f είναι μια **παραβολή** που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,\gamma)$, διότι $f(0)=\gamma$, ενώ για τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ παρατηρούμε ότι:

- Αν $\Delta>0$, το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 και επομένως η παραβολή $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία, τα $\mathrm{A}(x_1,0)$ και $\mathrm{B}(x_2,0)$ (Σχ. α΄).
- Αν $\Delta=0$, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},0\right)$ (Σχ. β΄).
- Αν $\Delta<0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ (Σχ. γ΄).

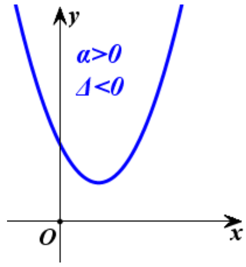
Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα παρακάτω σχήματα:



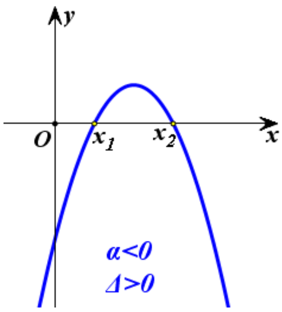
Σχήμα α΄



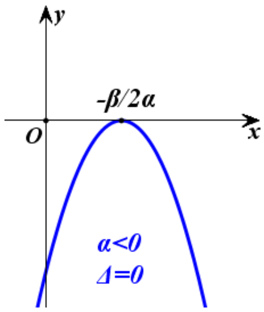
Σχήμα β΄



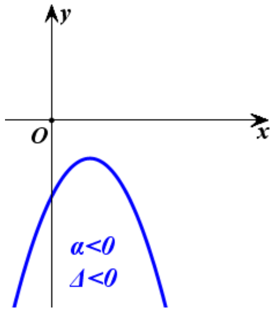
Σχήμα γ΄



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄

Τα συμπεράσματα της §3.2 για το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτουν άμεσα και με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

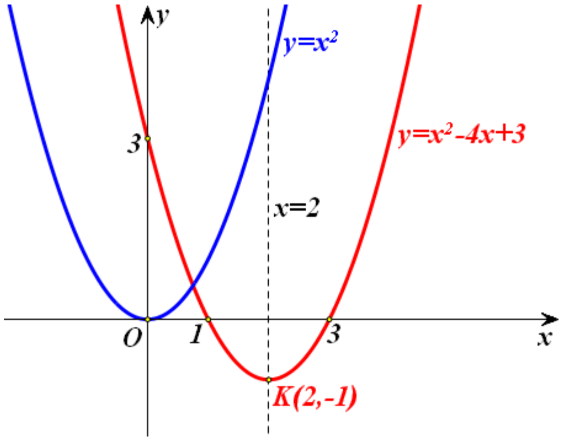
ΛΥΣΗ

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$ είναι

$$\alpha = 1 > 0, \quad \frac{-\beta}{2\alpha} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{-\Delta}{4\alpha} = f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = f(2) = -1,$$

Επομένως έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$	$+\infty$ ↘	-1 min	↗ $+\infty$



Δηλαδή η συνάρτηση *f*,

- ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$,
- ✓ Παρουσιάζει για $x=2$ ελάχιστο, το $f(2)=-1$.

Επιπλέον, η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή η οποία:

- ✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$ και
- ✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 αντιστοίχως, που είναι οι ρίζες του τριωνύμου x^2-4x+3, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)=2x^2-4x+5$ στη μορφή $f(x)=\alpha(x-p)^2+q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της *f*.

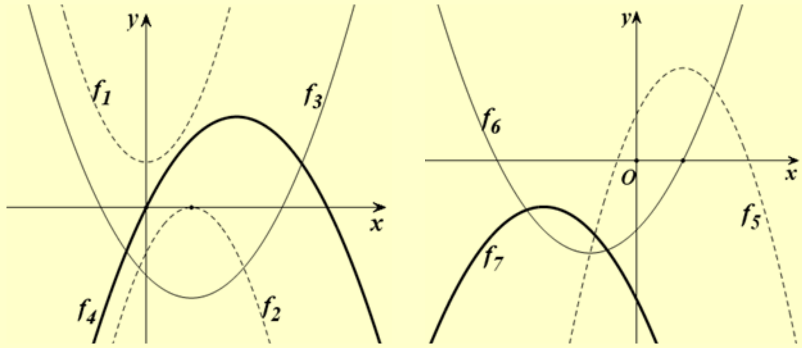
ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x)=-2x^2+8x-9$, θεωρώντας ως g την $g(x)=-2x^2$.

2. Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x^2-6x+3$ και β) $g(x)=-3x^2-5x+2$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
α) $f(x)=2x^2+4x+1$ και β) $g(x)=-2x^2+8x-9$.

4. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις επτά τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.

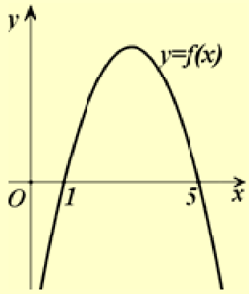


Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+						
β	0						
γ	+						
Δ	−						

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παραβολή $y=x^2+(k+1)x+k$. Να καθορίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες η παραβολή:
- **i)** Εφάπτεται του άξονα $x'x$.
- **ii)** Έχει τον $y'y$ άξονα συμμετρίας.
- **iii)** Έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη -4. Ποια είναι η τετμημένη της κορυφής;

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Να βρείτε:
- **i)** Το πρόσημο του α.
- **ii)** Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και
- **iii)** Τους συντελεστές του τριωνύμου, αν δίνεται ότι $\beta=6$.

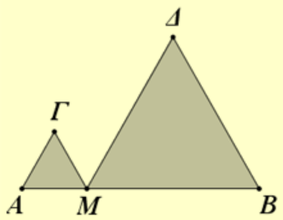


3. Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρός του να παραμένει σταθερή και ίση με 20 μ.

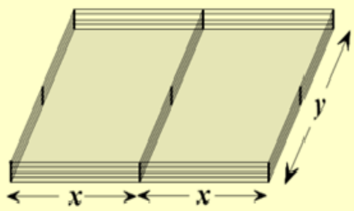
i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο $\mathrm{E}=f(x)$ που δίνει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x=5$ και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

4. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{AB}=6cm$. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;



5. Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα $200m$ και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα *Ψ*, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	Αν η παραβολή $y=\alpha x^2, \alpha\neq 0$ διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, τότε βρίσκεται στο 3^o και 4^o τεταρτημόριο.	Α	Ψ
2.	Αν το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-1$ και $x_2=3$, τότε έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$.	Α	Ψ
3.	Για οποιουσδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ η παραβολή $y=\alpha x^2$ και η υπερβολή $y=\dfrac{\beta}{x}$ έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο.	Α	Ψ
4.	Η υπερβολή $y=\dfrac{1}{x}$ και η ευθεία $y=-x$ τέμνονται.	Α	Ψ

II. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω δύο περιπτώσεις με τα σύμβολα της ισότητας ή της ανισότητας.

1. Αν το τριώνυμο $f(x)=2x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-1$ και $x_2=3$, τότε θα ισχύει:

$f(-5)\ldots 0$, $f(1)\ldots 0$, $f(5)\ldots 0$, $\gamma \ldots 0$ $\beta \ldots -4$.

2. Αν το τριώνυμο $f(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-3$ και $x_2=1$, θα ισχύει:

$f(-5)\ldots 0$, $f(-2)\ldots 0$, $f(5)\ldots 0$, $\gamma \ldots 0$, $\beta \ldots -2$.

III. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha=2$ και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $\mathrm{K}(1,-3)$, τότε

Α) $f(x)=2(x-1)^2+3$ Β) $f(x)=2(x-1)^2-3$

Γ) $f(x)=2(x+1)^2+3$ Δ) $f(x)=2(x+1)^2-3$.

2. Αν $f(1)<0$, $f(3)>0$ και $f(5)<0$, τότε

Α) $\Delta=0$ και $\alpha>0$ Β) $\Delta>0$ και $\alpha>0$ Γ) $\Delta>0$ και $\alpha<0$.

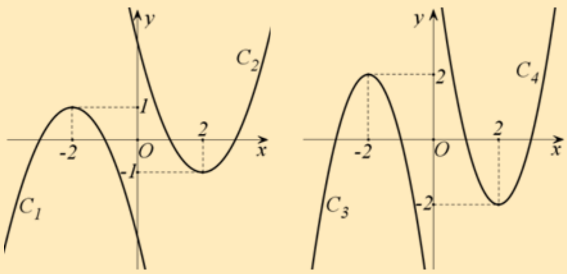
3. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $\mathrm{K}(1,2)$ και $\alpha>0$, τότε:

Α) $\Delta>0$ Β) $\Delta=0$ Γ) $\Delta<0$ Δ) $\gamma<0$.

4. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $\mathrm{K}(1,0)$, τότε

Α) $\beta=0$ Β) $\Delta<0$ Γ) $\Delta>0$ Δ) $\Delta=0$.

IV. Οι παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=x^2-4x+\gamma_1$, $f_2(x)=2x^2-8x+\gamma_2$, $f_3(x)=-x^2-4x+\gamma_3$ και $f_4(x)=-2x^2-8x+\gamma_4$, όχι όμως με την ίδια σειρά. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παραπάνω συναρτήσεις με τη γραφική της παράσταση.



f_1	f_2	f_3	f_4