ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

124

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2022 ευρώ 3,5

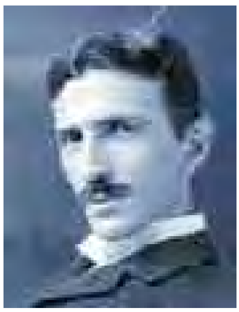
EGMO Hungary 2022 Eger

όταν

το σκοτάδι

έγινε

φώς



Nicola Tesla

ΕΛΤΑ Hellenic Post

ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 124 - Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2022 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη

Γενικά Θέματα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

πολλές ευχές
για καλή διάθεση
... και πείσμα
για όλους αυτούς
που προσπαθούν,
που ελπίζουν ...
για αυτούς που δεν τα παρατάνε,

που βλέπουν μακριά ...
και ζουν την κάθε στιγμή ...
τους ευχόμαστε καλή δύναμη
και καλή επιτυχία

Και όπως λέει και ο ποιητής

... με το ένα χέρι στο όνειρο
και με το άλλο στο σταυρό ...
καλή ανάσταση
λαϊκό τραγούδι

Καλό
Καλοκαίρι

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, η **επικαιρότητα**, μαζί με τις **δυσκολίες** της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται όλο και πιο μακρινή ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	5 Νοεμβρίου	2021
Ευκλείδης:	Δεν έγινε	
Αρχιμήδης:	26 Φεβρουαρίου	2022

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Εμμανουήλ Ιωάννης
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη “Για τον Ευκλείδη Β΄”. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Πως φωτίστηκε το σκοτάδι

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Νίκολα Τέσλα (1856 – 1943)

Από καλλιτέχνη του δρόμου

Οι θεοί είχαν τη φωτιά, έλεγαν οι αρχαίοι Έλληνες και την έκλεψε ο Προμηθέας από τους θεούς (τον Ήφαιστο), με τη βοήθεια της Αθηνάς. Ο Προμηθέας έδωσε τη φωτιά στους ανθρώπους αλλάζοντας ριζικά τη ζωή τους. Με τη φωτιά μπορούσαν να επεξεργάζονται το σίδερο, να μαγειρεύουν το φαγητό τους, να θερμαίνονται, να δημιουργούν εργαλεία και πολλά άλλα. Πέρασαν πολλά χρόνια από τότε και οι άνθρωποι είχαν τη φωτιά αλλά δεν είχαν φως. Το μόνο φως που είχαν ήταν το φως του Ήλιου. Με τη φωτιά είχαν το φως του λίχνου, του φαναριού, της δάδας, αργότερα το φως από τη λάμπα πετρελαίου, από την ασετιλίνη, από το λούξ, κλπ. Σε όλη τη Γη **μετά τη δύση του Ηλίου** επικρατούσε μόνο **σκοτάδι**. Το σκοτάδι μόνο η Πανσέληνος λίγες φορές το χρόνο το αραίωνε.

Οι άνθρωποι από την αρχαιότητα αναζητούσαν τρόπους για περισσότερο φως, αλλά για χιλιάδες χρόνια έμεναν στο σκοτάδι.Ο χρόνος δεν είχε ώρες, ήταν μόνο ημέρα και νύχτα. Την ημέρα έκαναν όλες τις εργασίες, την νύχτα κοιμόντουσαν ή έκαναν κάποιες μικρές εργασίες στο σπίτι δίπλα στο ημίφως που έδινε η φωτιά. Όλα αυτά μέχρι που στις **10-Ιουλίου-1856** στη Σερβία γεννήθηκε ο νέος Προμηθέας, ο **Νίκολα Τέσλα**. Ο σύγχρονος αυτός Προμηθέας έκλεψε το μυστικό για το φως από τη Φύση και το χάρισε στην ανθρωπότητα. Ο Τέσλα φώτισε τη Γη, εξαφάνισε το σκοτάδι, άλλαξε την **έννοια του χρόνου**, βελτιώνοντας τις συνθήκες ζωής δισεκατομμυρίων ανθρώπων και μας οδήγησε στον σημερινό πολιτισμό. Η σημερινή εποχή θα μπορούσε να ονομαστεί, **εποχή Τέσλα**.

Τα πετραδάκια στην εικόνα είναι κεχριμπάρι (ήλεκτρο). Το κεχριμπάρι είναι απολιθωμένη **ρητίνη**. Με την τριβή το κεχριμπάρι δίνει στατικά ηλεκτρικά φορτία. Τα ηλεκτρικά φαινόμενα, όπως οι αστραπές, ο στατικός ηλεκτρισμός αλλά και ο μαγνητισμός, είχαν αρχίσει να μελετώνται από την αρχαιότητα. Πρώτος **ο Θαλής ο Μιλήσιος** 600 π.Χ., παρατήρησε ότι όταν ένα κομμάτι ήλεκτρου τρίβεται σε ξηρό ύφασμα έλκει μικρά κομμάτια άχυρου.

Στα σύνορα της Αυστροουγγαρίας στην πόλη **Σμίλιαν το 1856** γεννήθηκε ο Νίκολα Τέσλα. Ήταν το τέταρτο παιδί του Μιλούτιν Τέσλα και της Γεωργίας(Τζούκα). Ο πατέρας του και ο παππούς του από τη μητέρα του ήταν **ορθόδοξοι ιερείς**. Ο πατέρας του ήταν πολύ καλλιεργημένος άνθρωπος. Το παιδί γεννήθηκε αδύνατο και ο πατέρας του φοβήθηκε ότι δεν θα ζήσει, γι’ αυτό την επόμενη μέρα το βάφτισε με το όνομα Νίκολα. Ο Νίκολα όμως μεγάλωσε και έγινε ένα έξυπνο και ζωηρό παιδί.

Σε ηλικία έξι ετών ο Νίκολα αντιμετώπισε ένα τραγικό περιστατικό, που του άλλαξε τη ζωή. Μπροστά στα μάτια του έπεσε από το άλογο ο μεγαλύτερος αδελφός του και σκοτώθηκε. Το περιστατικό αυτό δημιούργησε φοβίες και εφιάλτες στον μικρό Τέσλα. Τον επόμενο χρόνο η οικογένειά του μετακόμισε στο Γκόσπιτς της Κράινα γεγονός που τον στεναχώρησε ακόμα περισσότερο.

Η περιοχή της Κράινα που μεγάλωσε ήταν στα σύνορα της Αυστροουγγρικής Αυτοκρατορίας με Οθωμανούς και οι Σέρβοι της Κράινα ήταν **ατρόμητοι πολεμιστές** κατά των Οθωμανών.

Ο μικρός Νίκολα πηγαίνει στο 4τάξιο δημοτικό σχολείο του Γκόσπιτς και το 1864 τελειώνοντας το δημοτικό γράφεται στο κατώτερο γυμνάσιο του Γκόσπιτς. Ενθουσιάζεται με τις συλλογές των σέρβικων λαϊκών ποιημάτων του Βουκ Στεφάνοβιτς Κάραζιτς και με το Πέτρινο Στεφάνι του Πέταρ Πέτροβιτς

Νιέγκο, που θεωρούνται δυο από τα μεγαλύτερα ονόματα της Σέρβικης λογοτεχνίας. Ο Νίκολα ήταν άριστος μαθητής, χωρίς πολύ διάβασμα, ήταν αρκετά **ονειροπόλος και εφευρετικός**. Το ταλέντο αυτό για εφευρέσεις είχε η μητέρα του και η οικογένειά της.

Το 1871 πήγε στο σπίτι της θείας του στο Ράκοβατς και φοίτησε στο ανώτερο τεχνικό γυμνάσιο. Εκεί περνάει πολλές ώρες στο εργαστήριο του σχολείου όπου δείχνει μεγάλο ενδιαφέρον για τον ηλεκτρισμό. Πήρε το απολυτήριό του (26/06/1873) με βαθμό «πολύ καλά». Ο φίλος του και συμμαθητής του Ιούλιος Μπαρτόκοβιτς είχε πει: «Οι περισσότεροι από εμάς πιστεύαμε ότι κάποτε αυτός **θα γινόταν σπουδαίος άνθρωπος**. Δεν διάβαζε πολύ τα σχολικά βιβλία αλλά παρακολουθούσε πολύ προσεκτικά τα μαθήματα και ιδιαίτερα τη φυσική, στην οποία συμμετείχε ενεργά». Έλεγαν ακόμα οι συμμαθητές του ότι ήταν άτομο ανήσυχο και διάβαζε ότι έπεφτε στα χέρια του. Ιδιαίτερα διάβαζε Ιούλιο Βερν, Εμίλ Ζολά και ποίηση.

Μετά το Ράκοβατς επιστρέφει στους γονείς του και ο πατέρας του τον παρακαλεί να ακολουθήσει την οικογενειακή παράδοση και να πάει σε ιερατική σχολή. Ο Νίκολα αρνήθηκε, αλλά τη χρονιά εκείνη αρρώστησε βαριά από χολέρα. Κάποια στιγμή όταν ήταν άρρωστος τον πλησίασε ο πατέρας του και του είπε όταν γίνει καλά θα τον βοηθήσει να σπουδάσει ότι θέλει. Ευτυχώς γίνεται καλά και ο πατέρας του δεν επιμένει πλέον για την ιερατική σχολή, έτσι το **1875** με **μια υποτροφία**, βρίσκεται στην Ανώτατη Τεχνική Σχολή του Γκρατς της Αυστρίας. Εκεί ήταν ευτυχισμένος. Διάβαζε πάρα πολύ και έγινε πρώτος μεταξύ των πολυεθνικής καταγωγής συμμαθητών του. Οι καθηγητές του θαύμαζαν τις ικανότητες του, αλλά ενημέρωναν τον πατέρα του ότι κάνει υπερβολικό διάβασμα.

Το 1876 ως μέλος της λέσχης των Σέρβων φοιτητών στο Γκρατς, δίνει την πρώτη του διάλεξη με τίτλο **Περί Τριχοειδών Σωλήνων**, αλλά και μια χιουμοριστική διάλεξη με τίτλο **Περί Μυτών** που ήταν πολύ αστεία και όλοι έκλαιγαν από τα γέλια.

Το 1877 στο δεύτερο έτος σπουδών συλλαμβάνει για πρώτη φορά την ιδέα μιας μεγάλης εφεύρεσης, την οποία θα πραγματοποιήσει αργότερα. Οι καθηγητές του στο Γκρατς μένουν **έκπληκτοι για τις γνώσεις του** και το ζήλο του για τα πειράματα αλλά και πάλι συμβουλεύουν τον πατέρα του να μην τον αφήσει να συνεχίσει τις σπουδές του, επειδή πιστεύουν ότι οι υπερβολικές του **φιλοδοξίες** θα μπορούσαν να τον καταστρέψουν.

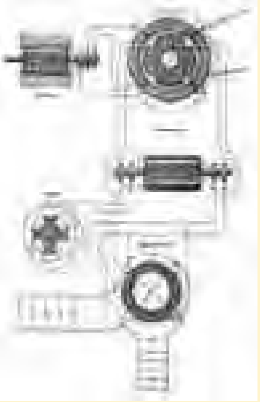

Από επίσκεψη στην Ακρόπολη

Επειδή η υποτροφία του Τέσλα ήταν μικρή το 1878 είχε δημιουργήσει οικονομικά προβλήματα με χρέη. Ζήτησε τη βοήθεια από τη Μάτιτσα Σέρπσκα οργάνωση που προωθούσε τη Σέρβικη παιδεία αλλά μάταια. Απογοητευμένος άρχισε **να πίνει, να ξενυχτάει, να παίζει χαρτιά,** και δεν έδωσε εξετάσεις στα μαθήματα που απαιτούνταν για να ολοκληρώσει το τρίτο έτος σπουδών. Έτσι χάνει την υποτροφία, διακόπτει τις σπουδές του και εξαφανίζεται. Ο πατέρας του ανησύχησε και άρχισε να τον αναζητάει, κάποιος φίλος του Νίκολα που ήξερε τον πληροφόρησε και τον βρήκε να εργάζεται ως βοηθός μηχανικού στο Μάριμπορ. Ο πατέρας του φεύγοντας από το Μάριμπορ του έδωσε την συμβουλή να πάει στην Πράγα και να ολοκληρώσει τις σπουδές του. Αμέσως μετά το 1879 ο αιφνίδιος θάνατος του πατέρα του τον αναγκάζει να επιστρέψει στο Γκόσπιτς. Μένει για λίγο κοντά στη μητέρα του και τις δύο αδελφές του ενώ παράλληλα διδάσκει για λίγους μήνες, στο κατώτερο γυμνάσιο της πόλης. Το 1880 ακολούθησε τη συμβουλή του πατέρα του, πήγε στην Πράγα και συνέχισε τις σπουδές του.

Εκεί γράφτηκε στην Φυσικομαθηματική σχολή και έδειξε **τη μαθηματική** του ιδιοφυία στην **Αναλυτική Γεωμετρία** και τις **ασκήσεις** πειραματικής **φυσικής**.

Η Πράγα ήταν πόλη που έδινε ζωή στους νέους και ο 24ων χρόνων Τέσλα που ήταν ψηλός, ευπαρουσίαστος και **ευγενικός** είχε πολλούς φίλους. Ήταν αγαπητός στις παρέες και έδειχνε ενδιαφέρον για την κοινωνική ζωή. Ήταν **σεμνός**, γενναιόδωρος, του άρεσε το μπιλιάρδο αλλά και η ποίηση, η μουσική και το καλό φαγητό. Ήξερε να απαγγέλει απ' έξω όλο το έργο του Μπαϊρον. Στην Πράγα προσπαθούσε να πραγματοποιήσει την ιδέα για μια εφεύρεση ηλεκτροκινητήρα χωρίς συλλέκτη. «Κάθε μέρα έκανα ένα βήμα μπροστά, ανακατασκεύαζα το σχέδιο χωρίς αποτέλεσμα, αλλά ένιωθα ότι πλησίαζα όλο και πιο κοντά στο στόχο μου» είχε πει. Η νέα ευρεσιτεχνία του τηλεφώνου τότε κατέκλυζε την Ευρώπη και σε κάποιες πόλεις άρχισαν να εγκαθιστούν τηλεφωνικά κέντρα.

Για τον Τέσλα ήταν μια ιδανική ευκαιρία να εργαστεί στο αντικείμενο των σπουδών του. Αφού αποφοίτησε πήγε στην Ουγγαρία, που τότε εγκαθιστούσε το **νέο σύστημα επικοινωνίας**, για να εργαστεί ως τεχνικός σχεδιαστής στην Κρατική Τηλεγραφική Εταιρεία. Σε λίγους μήνες χάρη στις ικανότητές του, γίνεται προϊστάμενος στο νέο τηλεφωνικό κέντρο της Βουδαπέστης. Παίρνει μεγάλη ικανοποίηση. Εκεί εφευρίσκει κάτι που ενισχύει τις φωνές των χρηστών των τηλεφωνικών συσκευών, ε**φεύρεση** που ποτέ **δεν κατοχύρωσε**.



Σχέδιο ευρεσιτεχνίας του Τέσλα γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος το 1888 με αριθμό US 390.721.

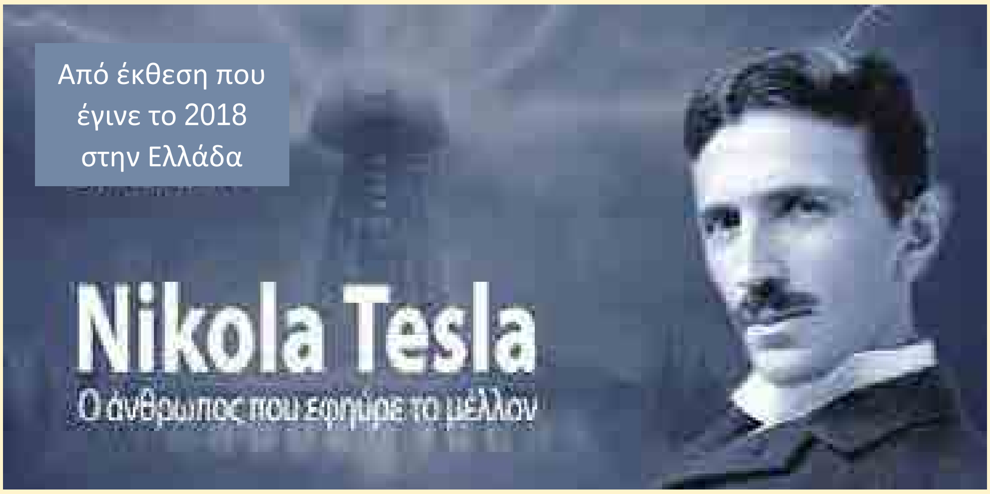
Για ένα διάστημα είχε μια σοβαρή νευρική κατάπτωση(οξυμένες αισθήσεις) που του δημιουργούσε προβλήματα. Η υγεία του αποκαταστάθηκε με τις συμβουλές κάποιου φυσικού που του έδωσε μια ουσία για θεραπεία.

Ένα απόγευμα σε μια βόλτα με τον φίλο του και απαγγέλοντας στίχους από το Φάουστ του Γκαίτε, ήρθε στο μυαλό του σαν **λάμψη** η λύση στο **πρόβλημα** που είχε για τον ηλεκτροκινητήρα και τον **επαγωγικό κινητήρα**. Τη στιγμή εκείνη, ο Τέσλα ως άλλος Προμηθέας, **έκλεψε το μυστικό για το Φως** από τη φύση για να το χαρίσει στην ανθρωπότητα. Αμέσως ζωγράφησε τα διαγράμματα τα οποία έξι χρόνια αργότερα παρουσίασε στο Αμερικανικό Ινστιτούτο Ηλεκτρικής Μηχανικής.

Αναγνωρίζοντας τις σημαντικές του υπηρεσίες η εταιρεία του προσέφερε μια θέση στο Παρίσι, την οποία δέχτηκε με μεγάλη ευχαρίστηση. Το Παρίσι «η πόλη του φωτός» ήταν κοσμοπολίτικος παράδεισος ιδανικός για έναν **μποέμ τύπο** σαν τον Τέσλα.

Στο Παρίσι ο Τέσλα κάθε πρωί πριν από τη δουλειά του έκανε έντονη γυμναστική(περπατούσε και κολυμπούσε) και στη συνέχεια εργαζόταν σκληρά. Προϊστάμενος του ήταν ο Τσαρλς Μπάτσελορ, **φίλος** του **Έντισον**. Γρήγορα ο Τέσλα διακρίνεται για τις μεγάλες βελτιώσεις των μηχανημάτων του Αμερικανού επιχειρηματία Έντισον. Οι παρέες του ήταν Αμερικανοί με τους οποίους έπαιζε μπιλιάρδο. Σε αυτή την παρέα Αμερικανών παρουσίασε την εφεύρεσή του και του πρότειναν να συνεταιριστούν για την εκμετάλλευσή της, αλλά μη γνωρίζοντας τότε από μετοχές και εταιρείες του φάνηκε αστείο.

Ταξίδευε συνέχεια στη Γαλλία και στη Γερμανία να επισκευάζει διάφορες μηχανές της εταιρείας μέχρι που με εντολή του Έντισον πήγε στο Στρασβούργο (τότε ήταν στη Γερμανία και ο Τέσλα ήξερε άπταιστα Γερμανικά) να επισκευάσει το ηλεκτρικό κέντρο της πόλης, που είχε εκραγεί κατά την στιγμή των εγκαινίων. Οι Γερμανοί δεν το παρέλαβαν, η εταιρεία δυσφημίστηκε και αντιμετώπιζε οικονομική καταστροφή. Ο Τέσλα αφού το επισκεύασε και βελτίωσε την λειτουργία του επέστρεψε στο Παρίσι αλλά η εταιρεία αρνήθηκε να του δώσει την ειδική αμοιβή, που του είχε υποσχεθεί. Απογοητευμένος φεύγει για την Νέα Υόρκη. Ο Μπάτσελορ, ο φίλος του Έντισον, του έδωσε μια επιστολή για τον Έντισον στην οποία τον ενημέρωνε, ότι αυτός που στέκεται μπροστά του είναι ισάξιος του. Ο Τέσλα θαύμαζε το Έντισον και τώρα βλέπει ότι έχει να κάνει με έναν έξυπνο επιχειρηματία με μικρότερη μόρφωση από τη δική του, που όμως κατόρθωσε να πετύχει τόσα πολλά, πολύ νέος. Αυτός όμως ξόδεψε τα νιάτα του να μαθαίνει γλώσσες, να ασχολείται με τη λογοτεχνία, την ποίηση, τη μουσική και τόσα άλλα, χωρίς όφελος.



Όσο ο Έντισον διάβαζε την επιστολή χτύπησε το τηλέφωνο, ο εξοργισμένος πελάτης ήταν ο διευθυντής από το ατμόπλοιο Όρεγκον που ήταν καθηλωμένο πολλές μέρες, από βλάβη της γεννήτριας φωτισμού. Αναθέτει αμέσως στον Τέσλα, την επισκευή. Ο Τέσλα εργάστηκε μέχρι αργά τη νύχτα και ολοκλήρωσε την επισκευή. Ο Έντισον κατάλαβε τις ικανότητες του, αλλά δεν είπε τίποτα. Πρότεινε στον Τέσλα να εργαστεί στην εταιρεία του και του έδωσε απόλυτη ελευθερία. Ο Τέσλα εργαζόταν πολλές ώρες την ημέρα και κάποια στιγμή είπε στον Έντισον ότι έχει σχέδια για επαγωγικό κινητήρα εναλλασσόμενου ρεύματος, «ανοησίες» του είπε και τον διέκοψε εκνευρισμένος. Αυτό είναι επικίνδυνο εδώ χρησιμοποιούμε μονοφασικό ρεύμα. Από τη στιγμή εκείνη ο Έντισον καταλαβαίνει ότι κινδυνεύει η επιχείρησή του από κάτι καινούργιο, που όμως δεν θέλει να μάθει. Ο Τέσλα του πρότεινε ότι μπορεί να βελτιώσει τις πρωτόγονες μηχανές του. Ο Έντισον δέχθηκε λέγοντας, ότι αν κάνει κάτι τέτοιο θα έχει μια μεγάλη αμοιβή. Όταν τελείωσε, περί τις 25 μηχανές, του αρνήθηκε την αμοιβή. Ο Τέσλα κατάλαβε ότι καμία συνεργασία δεν θα μπορούσε να υπάρξει μεταξύ τους, έφυγε για να **κυνηγήσει το όνειρό του** και χώρισαν οι δρόμοι τους για πάντα.

Κάποιοι επενδυτές χρηματοδότησαν τον Τέσλα, έστησε το εργαστήριό του και κατασκεύασε ένα λαμπτήρα ασφαλή, απλό και οικονομικό. Το **1886** ο λαμπτήρες αυτοί φώτιζαν τους δρόμους της πόλης αφού **πουλήθηκε**, η παραγωγή του, **στον Έντισον**. Εκεί κατασκευάζει και το πρώτο μοντέλο του δικού του επαγωγικού κινητήρα. Ζήτησε από τους χρηματοδότες την στήριξη για τον κινητήρα του, δεν του την έδωσαν και για να επιβιώσει έγινε εργάτης στους δρόμους της Νέας Υόρκης. Ο Τέσλα αν και δεν εντυπωσιάστηκε από την Αμερική κατάλαβε, ότι έχει περισσότερες ευκαιρίες από την Ευρώπη. Ως εργάτης γνώρισε κάποιον, που ήξερε τον Α. Μπράουν, διευθυντή της τηλεγραφικής εταιρείας. Ο Μπράουν όταν άκουσε για εναλλασσόμενο ρεύμα τον χρηματοδότησε με ένα μεγάλο ποσό και **άνοιξε** το νέο του **εργαστήριο.** Δούλευε νυχθημερόν και σε λίγους μήνες τον Οκτώβρη του 1887 κατοχύρωσε στην Αμερικανική Επιτροπή Ευρεσιτεχνιών ένα σύνολο από πατέντες που πήρε το όνομα **Πολυφασικό σύστημα Τέσλα**.

Αμέσως άρχισαν να ενδιαφέρονται για αυτές τις εφευρέσεις. Ο καθηγητής Γουίλιαμ Άντονι ιδρύει τμήμα **ηλεκτροτεχνικής** στο **πανεπιστήμιο του Κόρνελ**, όλοι ήθελαν να μάθουν περισσότερα και ο Άντονι κάλεσε τον Τέσλα το Μάη του 1888 να δώσει διάλεξη. Η διάλεξη αυτή του Τέσλα, εντυπωσίασε τόσο με τις **εφευρέσεις** του, όσο και με τη **ρητορική του δεινότητα**.

Το μονοφασικό ρεύμα δεν μπορεί να μεταφερθεί σε μεγάλες αποστάσεις, η κάθε γειτονιά έπρεπε να έχει το δικό της εργοστάσιο παραγωγής, έτσι ο Έντισον κατάλαβε ότι κινδύνευε η επιχείρησή του και εξαπέλυσε πόλεμο κατά του εναλλασσόμενου ρεύματος του Τέσλα. Οργάνωσε εκστρατεία δυσφήμισης, έπαιρνε ζώα τα θανάτωνε μπροστά σε κοινό, δημοσίευε φωτογραφίες νεκρών ζώων, προσπαθούσε να πείσει την κυβέρνηση να απαγορεύσει το εναλλασσόμενο ρεύμα. Ακόμα έβαλε ανθρώπους του και έκαψαν το εργαστήριο του Τέσλα, δύο φορές και τόσα άλλα για τα οποία μετά από χρόνια δήλωσε ότι μετάνιωσε. Αυτός ήταν ο **πόλεμος των ρευμάτων** στην Αμερική εκείνα τα χρόνια. Οι εφαρμογές διαφόρων εφευρέσεων ήταν πολλές και πολύ προσοδοφόρες, σε μια αναπτυσσόμενη αγορά της βιομηχανικής εποχής που ψάχνει για κάτι νέο, για κάτι άλλο.

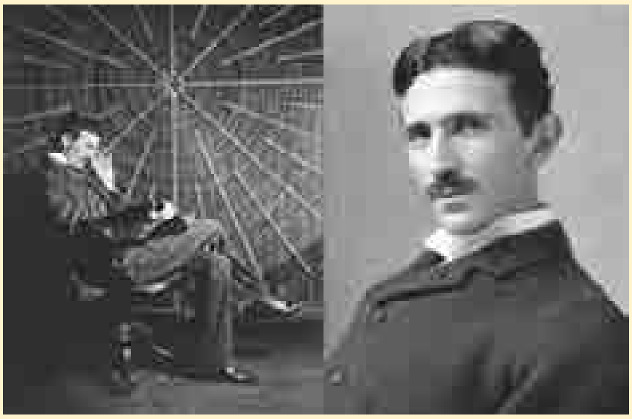
Το εργαστήριο και ο γιγαντιαίος πύργος του πρώτου παγκόσμιου ραδιοσταθμού του Tesla Λονγκ Αϊλαντ (1902)

Ο εφευρέτης και επιχειρηματίας Γουέστινχάουζ, κατάλαβε ότι με τα συστήματα του Έντισον δεν μπορεί να φωτιστεί η Αμερική, επισκέφτηκε τον Τέσλα και υπέγραψαν συμφωνία συνεργασίας πολλών εκατομμυρίων, αφού πρώτα **ο Τέσλα τους έπεισε** ότι η κατάλληλη συχνότητα είναι τα **60Hz** και όχι **133Hz**. Ο Τέσλα εργάστηκε σκληρά, η επιχείρηση του Γουέστινχάουζ εξαπλώθηκε, κατασκεύασε τον πρώτο υδροηλεκτρικό σταθμό στους καταρράκτες του **Νιαγάρα**. Όμως ο πόλεμος από τους αντιπάλους, ότι είναι επικίνδυνη η ενέργεια του εναλλασσόμενου ρεύματος,

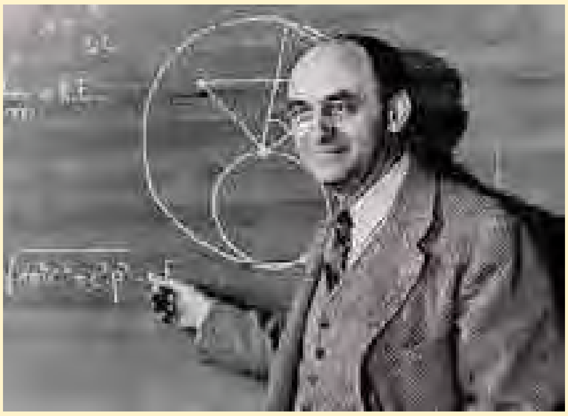
δημιούργησε οικονομικά προβλήματα στην εταιρεία, ιδιαίτερα όταν εφάρμοσαν τον ηλεκτρισμό στην ηλεκτρική καρέκλα. Ο Τέσλα στήριξε την εταιρεία, χάρισε την αμοιβή του των 12 εκατομμυρίων δολαρίων και συνέχισε το έργο της. Τη δεκαετία 1880 μέχρι τις αρχές του 1890 έκανε ένα πλήθος εφευρέσεων, κατασκεύαζε διάφορες μηχανές υψηλής συχνότητας, έκανε πολλά πειράματα που άφηνα άφωνους τους συνεργάτες του. Κατασκεύασε το **πηνίο Τέσλα** και άρχισε τα πειράματα στην **ασύρματη επικοινωνία** και **τη ραδιοφωνία**.

Οι εφημερίδες είχαν καθημερινά άρθρα, τον καλούσαν για διαλέξεις Ινστιτούτα, σχολές και Πανεπιστήμια «**Τρέχουμε όλοι μαζί μέσα σε έναν απέραντο χώρο με απίστευτη ταχύτητα και όλα γύρω μας κινούνται, γυρίζουν και περιβάλλονται από ενέργεια**» έλεγε. «**Ο ηλεκτρισμός που αντλήσαμε από το φυσικό περιβάλλον, προέρχεται από αυτή, με την ενέργεια αυτή η ανθρωπότητα θα προοδεύσει με γιγαντιαία βήματα**». Οι προσκλήσεις για διαλέξεις άρχισαν να πληθαίνουν όχι μόνο στην Αμερική αλλά και στην Ευρώπη. Επιλέγει να πάει στην Αγγλία, εκεί τον υποδέχτηκε η Βασιλική οικογένεια και στη συνέχεια πήγε στο Παρίσι, που τον υποδέχτηκαν οι Φυσικοί και ηλεκτροτεχνίτες. Πρόλαβε όμως να δει και την μητέρα του, που πέθανε, όσο ήταν ακόμα εκεί. Στο Βελιγράδι τον τίμησε η Σέρβικη Βασιλική Ακαδημία, συνέχεια πήγε στη Βουδαπέστη στο Ζάγκρεμπ και τον Αύγουστο του 1892 έφυγε πάλι για την Αμερική στην οποία του είχε δοθεί υπηκοότητα. Το Μάη του **1893** η Διεθνής Έκθεση του Σικάγου με το πάτημα ενός κουμπιού ηλεκτροφωτίστηκε με εναλλασσόμενο ρεύμα όλη η περιοχή. Εκεί ο Τέσλα **άφηνε 20.000 Volt** να περνούν από το **σώμα του** χωρίς **να τον σκοτώνουν**, όπως έλεγε ο **Έντισον**. Έβλεπαν για πρώτη φορά σε φωτογραφία το σκελετό του ανθρώπου. Όλος ο κόσμος ζητωκραύγαζε και ο **Τέσλα αποθεώθηκε**. Από την έκθεση πέρασε το 1/3 του πληθυσμού της Αμερικής και η αισιοδοξία για μεγάλα έργα, για μια άλλη ζωή στους ανθρώπους, για μια άλλη Αμερική, έφτασε στο ζενίθ. Ο πόλεμος Έντισον σταμάτησε. Το εναλλασσόμενο ρεύμα μπήκε στην υπηρεσία του ανθρώπου, **φώτισε το σκοτάδι**. Επενδυτές, εφημερίδες, επιστήμονες, αρχηγοί κρατών καθημερινά είχαν το ενδιαφέρον τους στον Τέσλα. Η δόξα δεν ήταν αρκετή για να σταματήσει τις έρευνές του. Το όνειρό του τώρα είναι η **τηλεμεταφορά ενέργειας** και **δωρεάν ενέργεια** σε όλους, αντλώντας την από τη φύση. Εφευρίσκει τον **μετασχηματιστή**, δημιουργεί συσκευές που κάνουν τρομερές λάμψεις, που τραντάζουν τα κτήρια στη γειτονιά (προκαλούν σεισμό). Το 1924 ισχυρίστηκε ότι είχε εφεύρει την περιβόητη «**ακτίνα θανάτου**», ένα υπερόπλο ικανό να καταστρέψει μεγάλες εκτάσεις δηλαδή έως και 10.000 αεροπλάνα σε απόσταση 200 μιλίων, και ότι αυτό ήταν υπεύθυνο για την **έκρηξη της Τουνγκούσκα**. Μέχρι σήμερα οι μελετητές εντάσσουν αυτή την εφεύρεση στο τομέα των ανεξήγητων φαινομένων και γεγονότων. Η Έκρηξη της Τουνγκούσκα ή «Συμβάν της Τουνγκούσκα» ήταν μια πολύ μεγάλη έκρηξη που συνέβη σε μία ακατοίκητη περιοχή κοντά στον ποταμό **Τουνγκούσκα της Σιβηρίας**, στις 30 Ιουνίου **1908**, ισοπεδώνοντας 1000 τετραγωνικά χιλιόμετρα δάσους. Νεότερες μελέτες που γίνονται μέχρι σήμερα αναφέρουν, ότι ίσως, να ήταν μετεωρίτης.

Ακόμα έκανε πειράματα με κύματα **(ραδιοσήματα)**, ετοιμάζει τον παγκόσμιο ραδιοσταθμό του Λόγκ Αϊλαντ με χρηματοδότηση του μεγαλοτραπεζίτη Μόργκαν για να στείλει το πρώτο σήμα στην Αγγλία. Η χρηματοδότηση δεν είναι αρκετή έτσι ο Μαρκόνι θα χρησιμοποιήσει τις εφευρέσεις του (την 645576 πατέντα) και θα στείλει πρώτος σήμα το Δεκέμβρη του 1901 στην άλλη πλευρά του ατλαντικού με κεραία που την **ανύψωσε** με αερόστατο. Οι ευρεσιτεχνίες του Τέσλα είναι πάρα πολλές με τις 120 από αυτές, ναναι πολύ σπουδαίες. Το 1912 προτάθηκε να μοιραστεί το βραβείο Νόμπελ με τον Έντισον αλλά αρνήθηκε. «**Οι τιμές του κόσμου αξίζουν όσο χίλια Νόμπελ**» έλεγε. Η ζωή του, το έργο του, **το όραμα** και η κοσμοθεωρία του, τον διαφοροποιούν από κάθε άλλο εφευρέτη μέχρι σήμερα. **Ο Νίκολα Τέσλα** σε συνεντεύξεις του, προβλέπει τα κινητά τηλέφωνα, τα ηλεκτρικά αεροπλάνα, τα ηλεκτρικά αυτοκίνητα και πολλά άλλα της σημερινής ζωής.



Νίκολα Τέσλα (1856 – 1943)



Ενρίκο Φέρμι (1901 – 1954)

Όταν στις 7-1-1943 πέθανε όλα τα έγγραφά του, τα πήρε για μελέτη ο καθηγητής του ΜΙΤ, Τζών Τράμπ σύμβουλος της **εθνικής άμυνας** της **Αμερικής**. Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου κατεστράφηκε το πατρικό του σπίτι. Το **1957**, οι Γιουγκοσλαβικές αρχές επισκεύασαν την εκκλησία και το πατρικό του, αλλά στη διάρκεια του τελευταίου πολέμου στη Γιουγκοσλαβία το **1992** είπαν, ότι Κροάτες εθνικιστές τα κατέστρεψαν και πάλι.

Ο κόσμος θα περιμένει πολύ καιρό ακόμη, μέχρι να εμφανιστεί ένα μυαλό ισάξιο του Τέσλα.

E. Armstrong εφευρέτης

Ο τελικός στόχος του ανθρώπου είναι να κατακτήσει απολύτως τον υλικό κόσμο και να υποτάξει τις δυνάμεις της φύσης στις ανθρώπινες ανάγκες. Οι εφευρέτες δε έχουν πάντα την κατανόηση αλλά βρίσκουν τεράστια ανταμοιβή και ευχαρίστηση στο δημιουργικό τους έργο. Χωρίς αυτούς, η ανθρωπότητα θα είχε εξαφανιστεί εδώ και πολλούς αιώνες, αγωνιζόμενη σκληρά ενάντια στις ανελέητες δυνάμεις της φύσης.

Νίκολα Τέσλα

Σημείωση: *Στην Ελλάδα έφτασε ο ηλεκτρισμός το 1889. Η Γενική Εταιρεία Εργοληψιών κατασκεύασε στην οδό Αριστείδου, την πρώτη μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και το πρώτο κτίριο που φωτίζεται είναι* ***τα Ανάκτορα****. Στη συνέχεια επεκτάθηκε ο ηλεκτροφωτισμός στο σημερινό ιστορικό κέντρο της Αθήνας και στη Θεσσαλονίκη.*

EGMO Hungary 2022 Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

11η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια

6 - 12 Απριλίου 2022

Έγκερ (υβριδικά) - Ουγγαρία

Η **11η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια** πραγματοποιήθηκε από 6 έως 12 Απριλίου 2022 **υβριδικά**, δηλαδή δια ζώσης, αλλά και διαδικτυακά. Συνολικά συμμετείχαν πενήντα επτά χώρες από όλο τον κόσμο, εκ των οποίων οι δεκαεννιά έλαβαν μέρος διαδικτυακά. Από τις πενήντα επτά χώρες, τριάντα επτά ήταν χώρες της Ευρώπης, εκ των οποίων οι έξι έλαβαν μέρος διαδικτυακά.

Η Ελλάδα συμμετείχε διαδικτυακά και το εξεταστικό κέντρο ήταν στην αίθουσα της ΕΜΕ στην Αθήνα. Οι ημερομηνίες του διαγωνισμού ήταν η Πέμπτη, 8 Απριλίου και η Παρασκευή, 9 Απριλίου 2022.

Από τις τέσσερις μαθήτριες μας, οι οποίες συμμετείχαν στην 11η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια, δύο βραβεύτηκαν με **εύφημη μνεία**. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει θερμά τις μαθήτριες της Ελληνικής ομάδας, οι οποίες δημιούργησαν προσδοκίες για μεγαλύτερες επιτυχίες τα επόμενα χρόνια. Συγκεκριμένα:

Βασιλοπούλου Αλεξάνδρα	Ελληνικό Κολλέγιο Θεσσαλονικης	Εύφημη Μνεία
Σταματέλου Βασιλική	Μουσικό Σχολείο Λευκάδας	Εύφημη Μνεία
Σπάχου Στεφανία	Εκπαιδευτήρια Αθηνά, Τρίκαλα	Συμμετοχή
Τζάρτζη Πετρούλα	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη, Θεσαλονίκη	Συμμετοχή

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος και παρατηρητής ο διδάκτωρ μαθηματικός Σιλουανός Μπραζιτίκος.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Ολλανδία). Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC τέτοιο, ώστε $BC < AB$ και $BC < CA$. Έστω σημείο P στο ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο Q στο ευθύγραμμο τμήμα AC τέτοια, ώστε $P \neq B$, $Q \neq C$ και $BQ = BC = CP$. Έστω T το περίκεντρο του τριγώνου APQ, H το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και S το σημείο τομής των ευθειών BQ και CP. Να αποδείξετε ότι τα σημεία T, H και S είναι συνευθειακά.

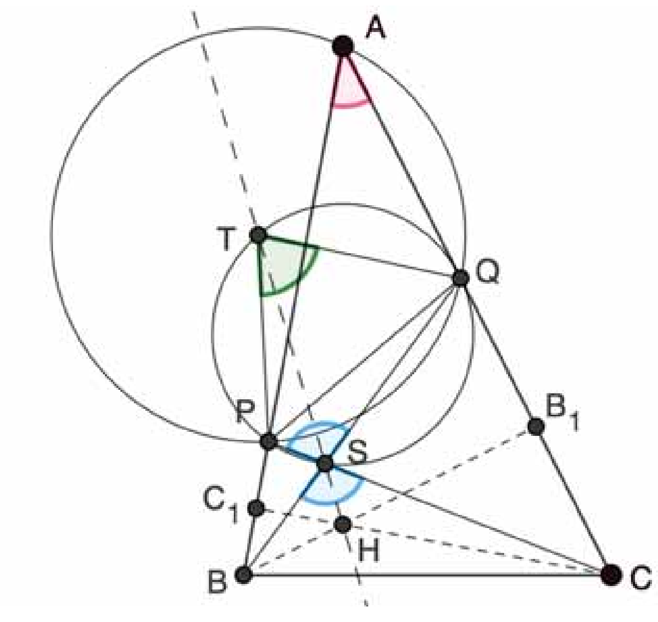
Λύση. 1ος τρόπος - (Βασισμένος στη λύση της Αλεξάνδρας Βασιλοπούλου). Έστω B_1 και C_1 τα ίχνη των υψών του τριγώνου ABC από το B και το C, αντίστοιχα. Τα ύψη BB_1 και CC_1 του τριγώνου $\triangle ABC$ τέμνονται στο ορθόκεντρο του H.

Αφού $BC = CP$, το τρίγωνο $\triangle BCP$ είναι ισοσκελές, και άρα η CC_1 είναι η διχοτόμος της γωνίας $S\widehat{C}B$. Ομοίως, αφού $BC = BQ$, το τρίγωνο $\triangle CBQ$ είναι ισοσκελές, και άρα η BB_1 είναι η διχοτόμος της γωνίας $S\widehat{B}C$. Επομένως, το H είναι το έγκεντρο του τριγώνου $\triangle SBC$, και άρα η ευθεία HS είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{S}C$, καθώς και της κατακορυφήν της γωνίας $P\widehat{S}Q$.

Στα ισοσκελή τρίγωνα $\triangle CBQ$ και $\triangle BCP$ είναι $B\widehat{Q}C = B\widehat{C}Q = \widehat{C}$ και $C\widehat{P}B = P\widehat{B}C = \widehat{B}$, αντίστοιχα. Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου, στο $\triangle CBQ$ και το $\triangle BCP$ έχουμε $S\widehat{B}C = Q\widehat{B}C = 180^\circ - 2\widehat{C}$ και $S\widehat{C}B = P\widehat{C}B = 180^\circ - 2\widehat{B}$, αντίστοιχα. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}
P\widehat{S}Q &= B\widehat{S}C && \text{(κατακορυφήν γωνίες)}\\
&= 180^\circ - S\widehat{B}C - S\widehat{C}B && \text{(άθροισμα γωνιών στο } \triangle BSC)\\
&= 180^\circ - (180^\circ - 2\widehat{C}) - (180^\circ - 2\widehat{B}) &&\\
&= 180^\circ - 2\widehat{A} && \text{(άθροισμα γωνιών στο } \triangle ABC)\\
&= 180^\circ - 2P\widehat{A}Q &&\\
&= 180^\circ - P\widehat{T}Q. && (T \text{ περίκεντρο του } \triangle APQ)
\end{aligned}$$

Άρα το τετράπλευρο $TPSQ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $P\widehat{S}T = T\widehat{Q}P$ και $Q\widehat{S}T = Q\widehat{P}T$. Αλλά στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle PTQ$ έχουμε $T\widehat{Q}P = Q\widehat{P}T$, οπότε $P\widehat{S}T = Q\widehat{S}T$. Επομένως, η ευθεία ST είναι η διχοτόμος της γωνίας $P\widehat{S}Q$, και άρα ταυτίζεται με την ευθεία HS. Συνεπώς, τα σημεία T, S και H είναι συνευθειακά.



Σχήμα 1: Πρόβλημα 1

2ος τρόπος - (Βασισμένος στη λύση του Σιλουανού Μπραζιτίκου). Έστω M, D, και K οι προβολές των σημείων H, S, και T, αντίστοιχα, στην ευθεία AB, και έστω N, E, και L οι προβολές των σημείων H, S, και T, αντίστοιχα, στην ευθεία AC.

Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία T, S και H είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{MD}{MK} = \frac{NE}{NL}.$$

Όπως στον 1ο τρόπο, παρατηρούμε ότι το M είναι το μέσο του BP και το K είναι το μέσο της χορδής PA, οπότε $MK = AB/2$. Ομοίως, το N είναι το μέσο του CQ και το L είναι το μέσο της χορδής QA, οπότε $NL = AC/2$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{MD}{AB} = \frac{NE}{AC}.$$

Από το θεώρημα του Θαλή, αφού $CM \parallel SD$, έχουμε $MD/MP = CS/CP$. Ομοίως, αφού $BN \parallel SE$, έχουμε $NE/NQ = BS/BQ$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{(MP \cdot CS)/CP}{AB} = \frac{(NQ \cdot BS)/BQ}{AC},$$

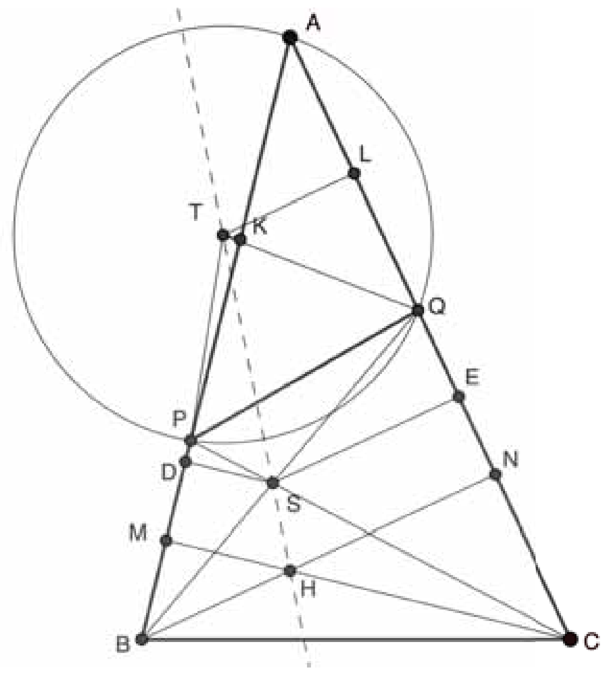
ή ισοδύναμα, αφού $MP = BP/2$, $NQ = CQ/2$ και $CP = BQ$, ότι

$$\frac{BP}{BS} \cdot \frac{CS}{CQ} = \frac{AB}{AC}.$$

Όπως στον 1ο τρόπο, είναι $S\widehat{P}B = \widehat{B}$, $S\widehat{Q}C = \widehat{C}$, και $P\widehat{S}B = Q\widehat{S}C = 180^\circ - B\widehat{S}C = 2\widehat{A}$. Έτσι, από τον νόμο ημιτόνων στο $\triangle BPS$ και το $\triangle CQS$ είναι

$$\frac{BP}{BS} = \frac{\text{ημ}\, 2A}{\text{ημ}\, B} \quad \text{και} \quad \frac{CS}{CQ} = \frac{\text{ημ}\, 2A}{\text{ημ}\, C}.$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $AB/AC = \text{ημ}\, C/\,\text{ημ}\, B$, το οποίο έπεται από τον νόμο ημιτόνων στο $\triangle ABC$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.



Σχήμα 2: Πρόβλημα 1

Πρόβλημα 2 (Ουκρανία). Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοιες, ώστε για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους a και b, ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, και

(2) τουλάχιστον δύο από τους αριθμούς $f(a)$, $f(b)$ και $f(a + b)$ είναι ίσοι.

Λύση. Θα δείξουμε ότι $f(n) = c^{v_p(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου ο c είναι ένας θετικός ακέραιος, ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $v_p(n)$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του p η οποία διαιρεί τον n.

Αρχικά παρατηρούμε η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη (1), αφού για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους a και b ισχύει $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$, αλλά και την (2), αφού, αν $v_p(a) \neq v_p(b)$, τότε $v_p(a + b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.

Έστω, λοιπόν, f μια συνάρτηση που ικανοποιεί της δοθείσες συνθήκες. Λόγω της (1), είναι $f(1) = 1$ και αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι $f(p^k) = f(p)^k$ για κάθε ακέραιο $k \geq 0$. Επιπλέον, αν η ανάλυση ενός θετικού ακέραιου n σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, τότε $f(n) = f(p_1)^{a_1} f(p_2)^{a_2} \ldots f(p_k)^{a_k}$.

Έστω S το σύνολο των πρώτων αριθμών p τέτοιων ώστε $f(p) \neq 1$. Αν το S είναι το κενό σύνολο, τότε $f(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η οποία μπορεί να γραφτεί στην παραπάνω μορφή με $c = 1$.

Έστω ότι το σύνολο S είναι μη κενό. Θα δείξουμε ότι το S περιέχει μόνο ένα στοιχείο.

Πράγματι, με απαγωγή σε άτοπο, έστω p και q οι δύο μικρότεροι πρώτοι αριθμοί που ανήκουν στο S με $p < q$. Τότε $f(p) > 1$ και $f(q) > 1$. Αφού $1 < q - p < q$, οι πρώτοι παράγοντες του $q - p$ είναι μικρότεροι του q και διαφορετικοί από τον p, οπότε $f(q - p) = 1$. Από τη δοθείσα συνθήκη (2) έπεται ότι $f(p) = f(q) = c > 1$.

Αν $p^2 < q$, τότε ο $q - p^2$ δε διαιρείται από τους p και q, οπότε, όπως παραπάνω, παίρνουμε $f(q - p^2) = 1$. Τότε, όμως, οι $f(q - p^2) = 1$, $f(p^2) = c^2$ και $f(q) = c$ είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί, γεγονός που αντιβαίνει στη (2). Άρα $q < p^2$.

Έστω $p^2 = mq + k$ με m θετικό ακέραιο και $0 < k < q$. Αφού $0 < mq = p^2 - k < p^2 < pq$, είναι $0 < m < p$, οπότε $f(m) = 1$ και $f(mq) = f(m)f(q) = c$. Επίσης, $0 < p^2 - mq < q$, οπότε $f(p^2 - mq) = 1$. Τότε, όμως οι $f(p^2 - mq) = 1$, $f(p^2) = c^2$ και $f(mq) = c$ είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί, γεγονός που αντιβαίνει και πάλι στη (2).

Σε άτοπο καταλήξαμε επειδή υποθέσαμε ότι το S έχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Επομένως, $S = \{p\}$ με p πρώτο. Συνεπώς $f(p) = c$ για κάποιον ακέραιο $c > 1$ και $f(n) = c^{v_p(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 3 (Ηνωμένο Βασίλειο). Μια άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων $a_1, a_2, \ldots$ ονομάζεται *καλή* αν

(1) το a_1 είναι τέλειο τετράγωνο, και

(2) για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, το a_n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος τέτοιος, ώστε ο

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

να είναι τέλειο τετράγωνο.

Να αποδείξετε ότι για κάθε καλή ακολουθία $a_1, a_2, \ldots$, υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος, ώστε $a_n = a_k$ για όλους τους ακεραίους $n \geq k$.

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία $(s_n)_{n\geq 1}$ θετικών ακεραίων τέτοια, ώστε

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n = s_n^2$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. Τότε είναι

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = s_{n+1}^2 - s_n^2,$$

και

$$a_{n+1} = (a_1+a_2+\ldots+a_{n+1})-(a_1+a_2+\ldots+a_n) = (s_{n+1}^2-s_n^2)-(s_n^2-s_{n-1}^2) = s_{n+1}^2-2s_n^2+s_{n-1}^2,$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. Έτσι $a_{n+1} + 2s_n^2 - s_{n-1}^2 = s_{n+1}^2$, οπότε ο s_{n+1} είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος του οποίου το τετράγωνο είναι μεγαλύτερο από τον $2s_n^2 - s_{n-1}^2$.

Θεωρούμε την ακολουθία $(d_n)_{n\geq 2}$ με $d_n = s_n - s_{n-1}$ για κάθε ακέραιο $n \geq 2$. Παρατηρούμε ότι $d_n > 0$ για κάθε ακέραιο $n \geq 2$. Επίσης, είναι

$$2s_n^2 - s_{n-1}^2 = 2(s_{n-1}+d_n)^2 - s_{n-1}^2 = s_{n-1}^2 + 4s_{n-1}d_n + 2d_n^2 < (s_{n-1}+2d_n)^2 = (2s_n - s_{n-1})^2.$$

Άρα $s_{n+1} \leq 2s_n - s_{n-1}$ ή ισοδύναμα $d_{n+1} \leq d_n$ για κάθε ακέραιο $n \geq 2$. Έτσι η $(d_n)_{n\geq 2}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία θετικών ακεραίων, οπότε πρέπει να είναι τελικά σταθερή. Άρα υπάρχουν ακέραιοι $N \geq 2$ και $d > 0$ τέτοιοι ώστε $d_n = d$ για κάθε $n \geq N$. Τότε, όμως, είναι

$$a_{n+1} = s_{n+1}^2 - 2s_n^2 + s_{n-1}^2 = (s_n + d_{n+1})^2 - 2s_n^2 + (s_n - d_n)^2 = 2d^2$$

για κάθε ακέραιο $n \geq N$. Συνεπώς, με $k = N+1$, είναι $a_n = a_k$ για κάθε $n \geq k$.

Πρόβλημα 4 (Ρουμανία). Αν $n \geq 2$ θετικός ακέραιος, να βρείτε τον μέγιστο θετικό ακέραιο N για τον οποίο υπάρχουν $N+1$ πραγματικοί αριθμοί $a_0, a_1, \ldots, a_N$ τέτοιοι, ώστε

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$, και

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ για $1 \leq k \leq N-1$.

Λύση. Με πεπερασμένη επαγωγή επί του k δείχνουμε εύκολα ότι

$$a_k + a_{k+1} = -\frac{1}{n-k},$$

για $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Πράγματι, για $k = 0$ είναι η δοθείσα σχέση (1). Έστω ότι ισχύει

$$a_{k-1} + a_k = -\frac{1}{n-k+1},$$

για κάποιο $1 \leq k < n$. Τότε έχουμε $-(n-k+1)a_{k-1} = (n-k+1)a_k + 1$, οπότε

$$\begin{aligned}
a_k + a_{k+1} &= (n-k+1)(a_{k+1} - a_{k-1}) \\
&= (n-k+1)a_{k+1} - (n-k+1)a_{k-1} \\
&= (n-k+1)a_{k+1} + (n-k+1)a_k + 1 \\
&= (n-k)(a_{k+1} + a_k) + a_{k+1} + a_k + 1,
\end{aligned}$$

και άρα

$$a_k + a_{k+1} = -\frac{1}{n-k},$$

ολοκληρώνοντας την πεπερασμένη επαγωγή. Αν ορίσουμε αναδρομικά την ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, παίρνουμε

$$\begin{aligned}(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1}) &= \frac{-1}{n-(k-1)} \cdot \frac{-1}{n-k} \\ &= \frac{1}{(n-(k-1))(n-k)} \\ &= \frac{1}{n-k} - \frac{1}{n-(k-1))} \\ &= (a_{k-1}-a_k) - (a_k - (a_{k+1}) \\ &= a_{k+1} - a_{k-1},\end{aligned}$$

για $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Άρα η μέγιστη δυνατή τιμή του N είναι ο αριθμός n.

Πρόβλημα 5 (ΗΠΑ). Για n, k θετικούς ακεραίους, έστω $f(n, 2k)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας $n \times 2k$ πίνακας μπορεί να καλυφθεί με nk ντόμινο μεγέθους 2×1. (Π.χ. $f(2,2) = 2$ και $f(3,2) = 3$.)
Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n τέτοιους, ώστε για κάθε θετικό ακέραιο k, ο αριθμός $f(n, 2k)$ να είναι περιττός.

Λύση. Οι αριθμοί n με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι αυτοί της μορφής $2^k - 1$. Έστω $f(m, n)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας $m \times n$ πίνακας μπορεί να καλυφθεί με ντόμινο μεγέθους 2×1. Για ευκολία, επιτρέπουμε να είναι $m = 0$ και $n = 0$, οπότε $f(m, n) = 1$.

Ισχυρισμός 1. Ισχύει $f(m, 2n+1) \equiv f(m, n) \pmod 2$ για κάθε n και κάθε άρτιο m.

Απόδειξη. Αν αντανακλάσουμε τις καλύψεις με ντόμινο ενός $m \times (2n+1)$ πίνακα ως προς την κεντρική στήλη, τότε οι καλύψεις ομαδοποιούνται σε μεμονωμένα κελιά και ζεύγη κελιών, οπότε ο αριθμός $f(m, 2n+1)$ είναι ισοϋπόλοιπος modulo 2 με το πλήθος των μεμονωμένων κελιών.

Αν μια κάλυψη με ντόμινο μεγέθους 2×1 είναι αναλλοίωτη ως προς την κεντρική στήλη, τότε κάθε ντόμινο μεγέθους 2×1 με ένα κελί στην κεντρική στήλη θα έχει και τα δύο κελιά σε αυτή. Με άλλα λόγια, η κεντρική στήλη καλύπτεται με $\frac{m}{2}$ κατακόρυφα ντόμινο, διαιρώντας τον υπόλοιπο πίνακα σε δύο $m \times n$ υποπίνακες. Λόγω συμμετρίας, υπάρχουν $f(m, n)$ τρόποι κάλυψης: κάθε κάλυψη με ντόμινο του $m \times n$ υποπίνακα στα αριστερά της κεντρικής στήλης καθορίζει την κάλυψη με ντόμινο του $m \times n$ υποπίνακα στα δεξιά της κεντρικής στήλης. □

Ισχυρισμός 2. Ισχύει $f(n, n) \equiv 0 \pmod 2$ για κάθε άρτιο $n \geq 2$.

Απόδειξη. Αν αντανακλάσουμε τις καλύψεις με ντόμινο ενός $m \times (2n+1)$ πίνακα ως προς την κύρια διαγώνιο, τότε οι καλύψεις αυτές ομαδοποιούνται σε ζεύγη. Δεν υπάρχει κάλυψη που να ομαδοποιείται με τον εαυτό της. Επομένως, ο αριθμός $f(n, n)$ είναι άρτιος. □

Για να ολοκληρώσουμε τη λύση παρατηρούμε ότι αν ο αριθμός n είναι περιττός, τότε από τον πρώτο ισχυρισμό έπεται ότι ο n ικανοποιεί τη ζητούμενη συνθήκη αν και μόνο αν την ικανοποιεί ο $\frac{1}{2}(n-1)$. Αν ο αριθμός n είναι άρτιος και $n \geq 2$, τότε από το δεύτερο ισχυρισμό έπεται ότι ο n δεν ικανοποιεί τη ζητούμενη συνθήκη. Αν $n = 0$, τότε ο n ικανοποιεί τη ζητούμενη συνθήκη, αφού $f(m, 0) = 1$ πάντοτε, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Σχόλιο. Τα προβλήματα επικαλύψεων πινάκων με ντόμινο είναι αρκετά δημοφιλή τελευταία στους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Υπάρχει ένας αξιοθαύμαστος τύπος, ο οποίος επινοήθηκε ανεξάρτητα από τον Kasteleyn και τους φυσικούς Temperley και Fisher, ο οποίος δίνει τον αριθμό των επικαλύψεων ενός $m \times n$ πίνακα με ντόμινο:

$$\prod_{j=1}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \prod_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} 4 \left(\text{συν}^2 \frac{\pi j}{m+1} + \text{συν}^2 \frac{\pi i}{n+1} \right).$$

Το ερώτημα για το αν το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο του Kasteleyn τέθηκε στον ιστότοπο δημόσιας συζήτησης του Art of Problem Solving https://artofproblemsolving.com/community/c6t1587056f6h2820488 από το δημιουργό του. Όπως προέκυψε, κάποιες ιδέες που οδήγησαν στον παραπάνω τύπο μπορούν να φανούν χρήσιμες. Το πρόβλημα μπορεί να μεταφραστεί σε ισοδύναμο πρόβλημα τέλειων αντιστοιχίσεων ενός διμερούς γραφήματος. Δείτε, επίσης, το άρθρο https://arxiv.org/abs/1911.08102.

Πρόβλημα 6 (Αυστραλία). Έστω εγγράψιμο τετράπλευρο $ABCD$ με περίκεντρο O. Έστω ότι οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών A και B τέμνονται στο X, οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και C τέμνονται στο Y, οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών C και D τέμνονται στο Z και οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών D και A τέμνονται στο W. Έστω επίσης P το σημείο τομής των AC και BD. Έστω ότι τα X, Y, Z, W, O και P είναι διαφορετικά ανά δύο. Να δείξετε ότι τα O, X, Y, Z και W είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν τα σημεία P, X, Y, Z και W είναι ομοκυκλικά.

Λύση. Έστω Ω ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετράπλευρου $ABCD$ και έστω r η ακτίνα του.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι τα σημεία X, Y, Z, W είναι ομοκυκλικά. Πράγματι, χρησιμοποιώντας προσανατολισμένες γωνίες (modulo 180°) έχουμε

$$(\widehat{XW, XY}) + (\widehat{ZY, ZW}) = (\widehat{XA, XB}) + (\widehat{ZC, ZD}) = -\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2} = 0.$$

Έστω ω ο κύκλος στον οποίο ανήκουν τα σημεία X, Y, Z, W. Θέλουμε να δείξουμε ότι το σημείο O ανήκει στον ω αν και μόνο αν το σημείο P ανήκει στον ω.

Έπειτα, απορρίπτουμε την περίπτωση το $ABCD$ να είναι τραπέζιο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι είναι $AB \parallel CD$. Τότε, λόγω συμμετρίας, τα σημεία X, Z, O και P θα ανήκουν στην μεσοκάθετο των βάσεων AB και CD του $ABCD$, οπότε είναι συνευθειακά. Από τα δεδομένα του προβλήματος, όμως, αυτά τα τέσσερα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους, και τα σημεία X και Z ανήκουν στον ω. Επομένως, ούτε το O ούτε το P ανήκει στον ω, και ο ισχυρισμός του προβλήματος είναι προφανής. Από εδώ και στο εξής, θεωρούμε ότι $AB \nparallel CD$ και $BC \nparallel AD$.

Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών AB και CD, και έστω R το σημείο τομής των ευθειών BC και AD. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το B είναι μεταξύ του A και του Q, και ότι το D είναι μεταξύ του A και του R. Θα δείξουμε ότι η ευθεία QR είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων Ω και ω.

Το W είναι το σημείο τομής των εσωτερικών διχοτόμων των γωνιών $\widehat{A}$ και $\widehat{D}$, οπότε είναι το έγκεντρο του τριγώνου $\triangle ADQ$. Ομοίως, το Y είναι το σημείο τομής των εξωτερικών διχοτόμων των γωνιών $Q\widehat{B}C$ και $B\widehat{C}Q$, οπότε το Y είναι το παράκεντρο του $\triangle BCQ$ απέναντι από το C. Άρα, και τα δύο ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας $D\widehat{Q}A$.

Αφού $D\widehat{Q}A = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{A} = \widehat{B} - \widehat{A}$ έχουμε

$$B\widehat{Y}Q = Y\widehat{B}A - Y\widehat{Q}B = \frac{B}{2} - \frac{D\widehat{Q}A}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{B} - \widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} = B\widehat{A}W,$$

οπότε τα σημεία A, B, Y, W είναι ομοκυκλικά. Επομένως, $QA \cdot QB = QY \cdot QW$, οπότε η δύναμη του σημείου Q ως προς τον Ω είναι ίση με τη δύναμη του ως προς τον ω.

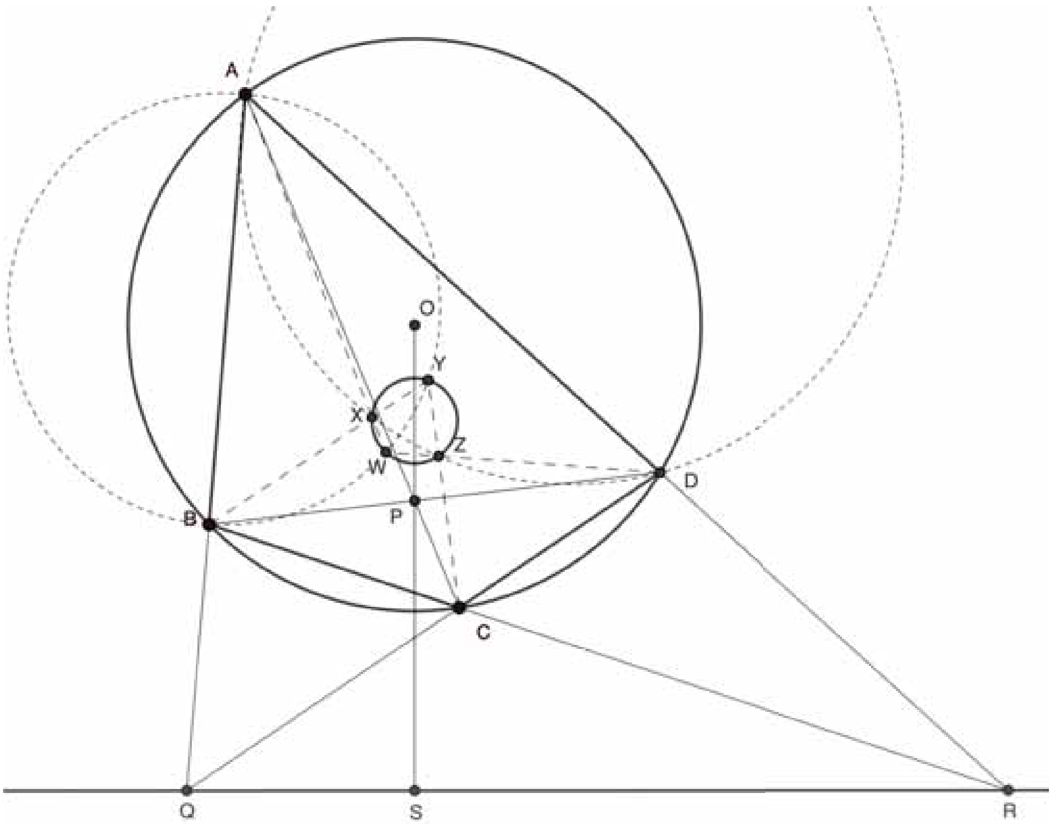
Ομοίως, δείχνουμε ότι η δύναμη του σημείου P ως προς τον Ω είναι ίση με τη δύναμη του ως προς τον ω. Συνεπώς, η ευθεία QR είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων Ω και ω.

Έστω ότι οι ευθείες OP και OS τέμνονται στο S. Είναι γνωστό ότι το τρίγωνο $\triangle PQR$ είναι αυτοπολικό ως προς τον κύκλο Ω, δηλ. κάθεμια από τις κορυφές του είναι ο πόλος της απέναντι πλευράς ως προς τον Ω. Συνεπώς, $OP \perp QR$ και τα σημεία P και S είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο Ω, οπότε $SO \cdot PO = r^2$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία P και O βρίσκονται στο εσωτερικό του Ω, οπότε η πολική ευθεία QR βρίσκεται στο εξωτερικό του, και άρα το S είναι διαφορετικό από το P και ο O. Επιπλέον,

$$SO \cdot SP = SO \cdot (SO - PO) = SO^2 - SO \cdot PO = SO^2 - r^2,$$

οπότε το γινόμενο $SO \cdot SP$ ισούται με τη δύναμη του σημείου S ως προς τον κύκλο Ω. Αφού το S ανήκει στο ριζικό άξονα των κύκλων Ω και ω, η δύναμη του ως προς τον Ω είναι ίση με τη δύναμη του ως προς τον ω. Έτσι, το γινόμενο $SO \cdot SP$ ισούται με τη δύναμη του σημείου S ως προς τον κύκλο ω. Συνεπώς, έπεται ότι το σημείο O ανήκει στον ω αν και μόνο αν το σημείο P ανήκει στον ω, όπως θέλαμε.



Σχήμα 3: Πρόβλημα 6

Προκριματικός Διαγωνισμός 2022

16 Απριλίου 2022

Λύσεις Θεμάτων μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1.

Να προσδιορίσετε όλους τους ακεραίους $n \geq 1$, για τους οποίους υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος θετικών ακεραίων (a, b), ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) O ακέραιος $a^2 + b + 3$ δεν διαιρείται από κύβο πρώτου αριθμού

(ii) $\dfrac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n.$

Λύση. Ονομάζουμε $N = a^2 + b + 3$ και θα δουλέψουμε modulo N. Πράγματι, έχουμε ότι

$$b \equiv -a^2 - 3 \pmod N \tag{1}$$

και $N \mid ab + 3b + 8$, άρα

$$ab + 3b + 8 \equiv 0 \pmod N \tag{2}$$

Με την βοήθεια της (1), η (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} a(-a^2 - 3) + 3(-a^2 - 3) + 8 \equiv 0 \pmod N &\iff -a^3 - 3a^2 - 3a - 1 \equiv 0 \pmod N \\ &\iff (a + 1)^3 \equiv 0 \pmod N. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $N \mid (a + 1)^3$. Από την εκφώνηση, δεν υπάρχει κύβος πρώτου που να διαιρεί τον N, άρα αν $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, τότε $p_j \mid a + 1$ για κάθε j, και επιπλέον $a_i \leq 2$, για κάθε i. Επομένως,

$$N \mid (a + 1)^2.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο θετικός ακέραιος $\frac{(a+1)^2}{N}$ είναι ίσος με 1. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι είναι τουλάχιστον 2, τότε

$$\frac{(a + 1)^2}{N} \geq 2 \iff (a + 1)^2 \geq 2(a^2 + b + 3) \iff 2a \geq a^2 + 2b + 5 \iff 0 \geq (a - 1)^2 + 2b + 4,$$

άτοπο. Επομένως, $(a + 1)^2 = N$, οπότε $2a = b + 2$. Αντικαθιστώντας στην αρχική, παίρνουμε

$$n = \frac{a(2a - 2) + 3(2a - 2) + 8}{a^2 + 2a - 2 + 3} = 2.$$

Τελικά, η μόνη τιμή του n είναι 2 και επιτυγχάνεται για όλα τα ζεύγη της μορφής $(a, b) = (k + 1, 2k)$, για τα οποία επιπλέον ισχύει ότι ο αριθμός $a^2 + b + 3 = (k + 2)^2$, δεν διαιρείται από κύβο πρώτου. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ο $k+2$ είναι ελεύθερος τετραγώνου. Ειδικά, η τιμή $(a, b) = (2, 2)$, είναι αρκετή για την επαλήθευση για $n = 2$.

$2^{ος}$ Τρόπος. Εναλλακτικά μπορούμε να φτάσουμε στην σχέση $N \mid (a+1)^3$, χωρίς τη βοήθεια των ισοτιμιών, ως εξής:
Από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε

$$3 - \frac{ab+3b+8}{a^2+b+3} = 3-n,$$

ή ισοδύναμα

$$3a^2+1-ab = (3-n)(a^2+b+3).$$

(Για $n=3$ παίρνουμε $ab = 1+3a^2$, οπότε $b = \frac{1}{a}+3a$. Αφού a, b θετικοί ακέραιοι, έχουμε $a=1$ και $b=4$. Τότε όμως $a^2+b+3 = 8 = 2^3$, μη δεκτό.)
Προσθέτοντας το $a^3+3a+ab = a(a^2+b+3)$ και στα δύο μέλη παίρνουμε

$$(a^3+3a+ab)+(3a^2+1-ab) = (3-n)(a^2+b+3)+a(a^2+b+3)$$

ή ισοδύναμα

$$(a+1)^3 = (a^2+b+3)(a+3-n).$$

Πρόβλημα 2.

Θεωρούμε τρίγωνο ABC, με $AB < AC < BC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ_1 και τους κύκλους $\Gamma_2(B, AC)$ και $\Gamma_3(C, AB)$. Ένα κοινό σημείο των κύκλων Γ_2 και Γ_3 είναι το σημείο E, ένα κοινό σημείο των κύκλων Γ_1 και Γ_3 είναι το σημείο F και ένα κοινό σημείο των κύκλων Γ_1 και Γ_2 είναι το σημείο G, όπου τα σημεία E, F, G ανήκουν στο ημιεπίπεδο που ορίζει η BC, στο οποίο δεν ανήκει η κορυφή A. Να αποδείξετε ότι το περίκεντρο του τριγώνου EFG ανήκει στον κύκλο Γ_1.
Σημείωση. Με τον συμβολισμό $\Gamma(K, R)$, εννοούμε ότι ο τυχών κύκλος Γ έχει κέντρο K και ακτίνα R.

Λύση. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι οι κύκλοι Γ_1, Γ_2, Γ_3 περνάνε από το ίδιο σημείο, έστω D και ότι το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Έστω ότι οι κύκλοι Γ_2 και Γ_3 τέμνονται στο σημείο D, διαφορετικό από το άλλο κοινό τους σημείο E. Θα αποδείξουμε ότι το D ανήκει στο κύκλο Γ_1. Εφόσον το τμήμα CD είναι ακτίνα του κύκλου Γ_3, θα ισχύει:

(1) $$CD = AB$$

Εφόσον το τμήμα BD είναι ακτίνα του κύκλου Γ_2, θα ισχύει:

(2) $$BD = AC$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η BC είναι κοινή πλευρά των τριγώνων ABC και DBC) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ABC και DBC είναι ίσα, άρα $\angle BAC = \angle BDC$, οπότε το τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγράψιμο στον κύκλο Γ_1. Έστω K το αντιδιαμετρικό του A στον κύκλο Γ_1. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία D, K, E είναι συνευθειακά και στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι και τα σημεία B, F, E είναι συνευθειακά.

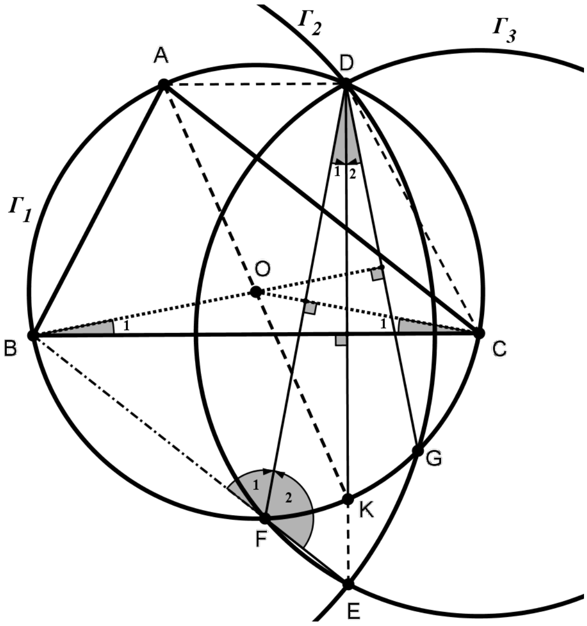
Η DE είναι κοινή χορδή των κύκλων Γ_2 και Γ_3 και BC η διάκεντρός τους, άρα $DE \perp BC$. Εφόσον K είναι το αντιδιαμετρικό του A στο κύκλο Γ_1, θα ισχύει $DA \perp DK$ και από την $DA \parallel BC$ παίρνουμε ότι $DK \perp BC$, άρα τα σημεία D, K, E βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Η DF είναι κοινή χορδή των κύκλων Γ_1 και Γ_3 και OC η διάκεντρός τους, άρα $DF \perp OC$. Έπεται ότι οι γωνίες $\angle FDK$ και $\angle OCB$ είναι οξείες με πλευρές κάθετες, άρα

(3) $$\angle FDK = \angle OCB.$$

Ομοίως, συμπεραίνουμε ότι

(4) $$\angle GDK = \angle OBC.$$



Από τις (3) και (4), παίρνουμε ότι

$$\angle GDK = \angle FDK,$$

οπότε $KF = KG$.

Η γωνία $\angle F_1$ είναι εγγεγραμμένη στον Γ_1, άρα $\angle F_1 = \angle BCD$. Η γωνία $\angle F_2$ είναι εγγεγραμμένη στον Γ_3, άρα

$$\angle F_2 = 180^\circ - \frac{\angle DCE}{2} = 180^\circ - \angle DCB,$$

οπότε τα σημεία B, F, E είναι συνευθειακά.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο KFE είναι ισοσκελές, δηλαδή $\angle KFE = \angle KEF$. Πράγματι, από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABFK, (εδώ χρησιμοποιούμε ότι τα B, F, E είναι συνευθειακά) έχουμε ότι

$$\angle KFE = \angle BAK = \angle BAO.$$

Επιπλέον, από τον κύκλο Γ_3 παίρνουμε

$$\angle DEF = \frac{\angle DCF}{2} = \angle DCO.$$

Όμως, από το ισοσκελές τραπέζιο ABCD, τα τρίγωνα ABO και COD είναι ίσα, άρα $\angle BAO = \angle DCO$. Συμπερασματικά, $\angle KFE = \angle KEF$, οπότε $KF = KE$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $KF = KG$, άρα το ζητούμενο έπεται.

2ος Τρόπος. Έστω K το αντιδιαμετρικό του A στον κύκλο Γ_1. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα σημεία B, F, E είναι συνευθειακά. Από τον κύκλο Γ_2 παίρνουμε $BE = AC$ και από τον κύκλο Γ_1 παίρνουμε ότι $CE = AB$. Επομένως, στο τετράπλευρο ABEC οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως,

(1) $$BE \parallel AC.$$

Από τον κύκλο Γ_3, παίρνουμε $CF = AB$, επομένως το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABFC είναι ισοσκελές τραπέζιο, άρα

(2) $$BF \parallel AC.$$

Από τις (1) και (2), παίρνουμε ότι τα B, F και E είναι συνευθειακά. Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι τα σημεία C, G, E είναι συνευθειακά. Πράγματι, από το παραλληλόγραμμο ABEC παίρνουμε ότι

$$CE \parallel AB. \tag{3}$$

Από τον κύκλο Γ_2, παίρνουμε $BG = AC$, επομένως το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ACGB είναι ισοσκελές τραπέζιο, άρα

$$CG \parallel AB. \tag{4}$$

Από τις (3) και (4), παίρνουμε ότι τα C, G και E είναι συνευθειακά.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το K είναι στη μεσοκάθετο του FE. Πράγματι, έχουμε ότι $CK \perp AC$ και $AC \parallel FE$, άρα $CK \perp FE$. Όμως το τρίγωνο CFE είναι ισοσκελές, άρα το ύψος του είναι μεσοκάθετος, δηλαδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο του FE.

Όμοια, δουλεύοντας στον Γ_2, το τρίγωνο EBG είναι ισοσκελές και $BK \perp EG$, άρα το K είναι στη μεσοκάθετο του EG. Τελικά, το K είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων στο τρίγωνο FGE και το ζητούμενο έπεται.

3ος Τρόπος. Έστω K το αντιδιαμετρικό σημείο του A στον Γ_1. Θα δείξουμε ότι το K είναι το περίκεντρο του $\triangle FEG$.

Αφού $BE = AC$ και $AB = CE$, το ABEC είναι παραλληλόγραμμο, κι άρα οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Έστω D το κέντρο του παραλληλογράμμου. Τότε η OD συνδέει τα μέσα στο τρίγωνο AEK, άρα $KE \parallel OD \perp BC$ και $OD = \frac{KE}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ODC είναι

$$OD^2 = OC^2 - DC^2 = R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{BC^2}{4}. \tag{5}$$

Έστω F' το σημείο τομής της BE με τον $\Gamma_3(C, AB)$. Από το ισοκελές τρίγωνο $CF'E$ παίρνουμε $\angle CF'E = \angle CEB = \angle BAC$, οπότε το F' ανήκει στον Γ_1. Έτσι, το F' ταυτίζεται με το F. Παρατηρούμε ότι το ABFC είναι ισοσκελές τραπέζιο με $BF \parallel AC$ και $FC = AB$, οπότε $AF = BC$.

Επιπλέον, στο ορθογώνιο τρίγωνο AFK, το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει

$$FK^2 = AK^2 - AF^2 = (2R)^2 - BC^2 = 4R^2 - BC^2, \tag{6}$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του $\triangle ABC$.

Ομοίως, αν G' το σημείο τομής της CE με τον $\Gamma_2(B, AC)$, από το ισοκελές τρίγωνο $BG'E$ παίρνουμε $\angle BG'E = \angle BEC = \angle BAC$, οπότε το G' ανήκει στον Γ_1. Έτσι, το G' ταυτίζεται με το G. Αφού $BG = AC$ και $CG \parallel AB$, το ABGC είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AG = BC$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο AGK, το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει

$$GK^2 = AK^2 - AG^2 = (2R)^2 - BC^2 = 4R^2 - BC^2. \tag{7}$$

Άρα, από (5), (6), και (7) έχουμε

$$KE^2 = 4OD^2 = 4R^2 - BC^2 = FK^2 = GK^2,$$

οπότε $KE = FK = GK$, δηλαδή το K είναι το περίκεντρο του $\triangle FEG$.

4ος Τρόπος. Έστω K το περίκεντρο του FEG. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα σημεία B, F, E είναι συνευθειακά. Από τον κύκλο Γ_2 παίρνουμε $BE = AC$ και από τον κύκλο Γ_1 παίρνουμε ότι $CE = AB$. Επομένως, στο τετράπλευρο ABEC οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως,

$$BE \parallel AC. \tag{8}$$

Από τον κύκλο Γ_3, παίρνουμε $CF = AB$, επομένως το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABFC είναι ισοσκελές τραπέζιο, άρα

$$BF \parallel AC. \tag{9}$$

Από τις (8) και (9), παίρνουμε ότι τα B, F και E είναι συνευθειακά. Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι τα σημεία C, G, E είναι συνευθειακά. Πράγματι, από το παραλληλόγραμμο ABEC παίρνουμε ότι

$$CE \parallel AB. \tag{10}$$

Από τον κύκλο Γ_2, παίρνουμε $BG = AC$, επομένως το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ACGB είναι ισοσκελές τραπέζιο, άρα

$$CG \parallel AB. \tag{11}$$

Από τις (10) και (11), παίρνουμε ότι τα C, G και E είναι συνευθειακά.

Αφού το K είναι το περίκεντρο του FEG έχουμε ότι

$$\angle FKG = 2\angle BEC = 2\angle CAB, \tag{12}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το παραλληλόγραμμο EBAC.

Τώρα έχουμε ότι

$$\angle BAF = \frac{\overset{\frown}{BF}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CF}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{2} = \angle BAC - \angle ACB,$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το ισοσκελές τραπέζιο ACFB.

Ομοίως, έχουμε ότι

$$\angle CAG = \frac{\overset{\frown}{CG}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BG}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \angle BAC - \angle ABC,$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το ισοσκελές τραπέζιο ACGB.

Τελικά, έχουμε ότι

$$\angle FAG = \angle BAC - \angle CAG - \angle BAF = 180^\circ - 2\angle BAC \tag{13}$$

Από τις (12) και (13) παίρνουμε ότι το τετράπλευρο FAGK είναι εγγράψιμο, άρα το K ανήκει στον Γ_1.

Πρόβλημα 3.

Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή σταθερά M τέτοια, ώστε για οποιαδήποτε ακολουθία a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, πραγματικών αριθμών, που ικανοποιεί τις συνθήκες:

(α) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ και

(β) $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \geq 3a_n - a_{n+1}$, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$,

να ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > M,$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Λύση. Πρώτα, θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι

$$a_{n+1} > 2a_n > 0$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Πράγματι, για $n = 0$ ισχύει προφανώς και από το β) έχουμε $a_2 \geq 3a_1 - a_0 = 8 > 2a_1 > 0$. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $n = 0, 1, \ldots, k$ και θα το αποδείξουμε για $n = k + 1$. Πράγματι, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$a_k > 2^2 a_{k-1} > 2^2 a_{k-2} > \ldots > 2^j a_{k-j},$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Τότε από την συνθήκη β), για $n = k$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2^k} a_k + \frac{1}{2^{k-1}} a_k + \ldots + \frac{1}{2} a_k \geq 3a_k - a_{k+1} \iff a_{k+1} \geq a_k \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{2^k}\right) > 2a_k,$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

Για να αποδείξουμε ότι η μεγαλύτερη δυνατή σταθερά είναι η $M = 2$, θα βρούμε μια ακολουθία που να ισχύει η ισότητα στη συνθήκη β). Τότε

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-2}$$

και λύνοντας την αναδρομική βρίσκουμε

$$a_n = 2^{n-1}(n + 2),$$

οπότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n(n+3)}{2^{n-1}(n+2)} = 2\frac{n+3}{n+2} = 2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right),$$

που γίνεται όσο κοντά στο 2 θέλουμε, άρα η σταθερά $M = 2$, δεν μπορεί να βελτιωθεί.

$2^{ος}$ Τρόπος. Θεωρούμε την ακολουθία (b_n) με $b_n = (n+2)2^{n-1}$ για $n \geq 0$. Είναι

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^k + \sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1} = (2^{n+2} - 1) + (2^{n+1}n + 1) = 2^{n+1}(n+2) = 4b_n.$$

για κάθε $n \geq 0$. Έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ μια ακολουθία που ικανοποιεί τις αρχικές δοθείσες συνθήκες. Θα δείξουμε με επαγωγή επί του n ότι ισχύουν

(I) $na_n \geq (n+2)(a_{n-1} + \cdots + a_0) > 0$ για κάθε $n \geq 1$, και

(II) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2\dfrac{n+3}{n+2}$, για κάθε $n \geq 0$.

Απόδειξη της (I). Πράγματι για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 3 \geq 3a_0 > 0$. Έστω ότι

$$na_n \geq (n+2)(a_{n-1} + \cdots + a_0) > 0$$

για κάποιον $n \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας την

$$a_{n+1} \geq 3a_n - (a_{n-1} + \cdots + a_0),$$

με $n + 1$ παίρνουμε

$$(n+1)a_{n+1} \geq 3(n+1)a_n - (n+1)(a_{n-1} + \cdots + a_0)$$

Παρατηρούμε ότι για να ισχύει η

$$(n+1)a_{n+1} \geq (n+3)(a_n + \cdots + a_0) > 0$$

αρκεί να ισχύει

$$3(n+1)a_n - (n+1)(a_{n-1} + \cdots + a_0) \geq (n+3)(a_n + \cdots + a_0)$$

ή ισοδύναμα,

$$[3(n+1) - (n+3)]a_n \geq (2n+4)(a_n + \cdots + a_0)$$

δηλ.

$$2na_n \geq 2(n+2)(a_{n-1} + \cdots + a_0)$$

η οποία ισχύει από την επαγωγική υπόθεση. Η απόδειξη της (Ι) ολοκληρώθηκε.

Απόδειξη της (ΙΙ) Αφού $na_n \geq (n+2)(a_{n-1} + \cdots + a_0)$ για κάθε $n \geq 1$, έχουμε

$$(n+2)a_{n+1} \geq 3(n+2)a_n - (n+2)(a_{n-1} + \cdots + a_0) \geq 3(n+2)a_n - na_n = (2n+6)a_n$$

και αφού $a_n > 0$ έπεται ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2\frac{n+3}{n+2}.$$

Παρατηρούμε ότι η (c_n) με

$$c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2\frac{n+3}{n+2} = 2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)$$

είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία κάτω φραγμένη από το 2, με όριο το 2. Άρα η ζητούμενη τιμή για το M είναι 2, αφού για μεγαλύτερη τιμή, θα μπορούσαμε να βρούμε N αρκούντως μεγάλο ώστε $M > c_N = \frac{b_{N+1}}{b_N} > 2$.

Πρόβλημα 4.

Κάθε μαθητής μιας τάξης έχει πεπερασμένο αριθμό από κάρτες. Καθεμιά από τις κάρτες έχει γραμμένο έναν πραγματικό αριθμό από το διάστημα $[0, 1]$. Να βρείτε την μικρότερη δυνατή τιμή της σταθεράς $c > 0$, ώστε να ισχύει το ακόλουθο, ανεξάρτητα από την κατανομή των καρτών στους μαθητές:
Κάθε μαθητής που το συνολικό άθροισμα των αριθμών στις κάρτες του είναι μικρότερο από 1000, μπορεί να μοιράσει τις κάρτες του σε 100 κουτιά, ώστε το άθροισμα των καρτών σε κάθε κουτί να είναι το πολύ c.

Λύση. Από όλες τις πιθανές τοποθετήσεις σε κουτιά, διαλέγουμε εκείνη, ώστε η μέγιστη τιμή αθροίσματος που βρίσκεται σε κάποιο κουτί να είναι η ελάχιστη δυνατή. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες τοποθετήσεις, διαλέγουμε εκείνη που το πλήθος των κουτιών, που επιτυγχάνεται αυτή η μέγιστη τιμή, είναι το μικρότερο δυνατό. Υποθέτουμε ότι στα κουτιά το συνολικό άθροισμα είναι

$$10 + x_1 \geq 10 + x_2 \geq \ldots \geq 10 + x_{100},$$

αντίστοιχα. Ξέρουμε ότι το συνολικό άθροισμα είναι μικρότερο από 1000, οπότε

$$10 + x_1 + 10 + x_2 + \ldots + 10 + x_{100} \leq 1000 \iff x_1 + \ldots + x_{100} \leq 0.$$

Επιπλέον, αφού ο x_{100} είναι ο μικρότερος, έχουμε

$$x_1 + 99x_{100} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} \leq 0.$$

Αφού το συνολικό άθροισμα στο πρώτο κουτί είναι μεγαλύτερο από 10, το πρώτο κουτί πρέπει να έχει τουλάχιστον 11 κάρτες, αφού κάθε κάρτα έχει γραμμένο αριθμό από το διάστημα $[0, 1]$. Επομένως, θα έχει μια κάρτα με τιμή t το πολύ $\frac{10+x_1}{11}$. Αφαιρούμε τώρα από το πρώτο κουτί αυτή την κάρτα και την βάζουμε στο 100-οστό κουτί. Τότε το 100-οστό κουτί θα πρέπει να έχει άθροισμα μεγαλύτερο ή ίσο από $10 + x_1$, αλλιώς θα έχουμε φτιάξει μια τοποθέτηση που θα έχει μικρότερο μέγιστο άθροισμα, που είναι αδύνατο από τον ελαχιστικό χαρακτήρα της αρχικής τοποθέτησης. Το 100-οστό κουτί όμως μετά την μετακίνηση έχει συνολικό άθροισμα $10 + x_{100} + t$, οπότε πρέπει

$$10 + x_{100} + t \geq 10 + x_1 \iff x_{100} + t \geq x_1. \tag{1}$$

Όμως, $t \leq \frac{10+x_1}{11}$ και $x_{100} \leq -\frac{x_1}{99}$, επομένως η (1) δίνει

$$-\frac{x_1}{99} + \frac{10 + x_1}{11} \geq x_1 \iff \frac{10}{11} \geq \frac{91x_1}{99},$$

οπότε $x_1 \leq \frac{90}{91}$. Επομένως, κάθε κουτί έχει άθροισμα καρτών το πολύ

$$10 + x_1 \leq 10 + \frac{90}{91} = \frac{1000}{91}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η απάντηση είναι όντως $c = \frac{1000}{91}$, δηλαδή ότι κάθε αριθμός $c = 11 - 11a$, με $1 > a > \frac{1}{1001}$, δεν ικανοποιεί τις συνθήκες για όλες τις πιθανές κατανομές των καρτών. Επιλέγουμε $r \in \left[\frac{1}{1001}, a\right)$ και θέτουμε $n = \lfloor\frac{1000}{1-r}\rfloor$. Αφού $r \geq \frac{1}{1001}$, θα έχουμε ότι $\frac{1000}{1-r} \geq 1001$, άρα $n \geq 1001$. Επιλέγουμε τώρα n κάρτες με τιμή $1 - r$ η καθεμιά. Το συνολικό άθροισμα στις κάρτες είναι

$$n(1 - r) \leq \frac{1000}{1 - r} \cdot (1 - r) = 1000.$$

Τώρα, όπως και να τοποθετήσουμε τις κάρτες στα 100 κουτιά, από την αρχή της περιστεροφωλιάς, θα υπάρχει ένα κουτί με 11 κάρτες. Αλλά $11(1 - r) = 11 - 11r > 11 - 11a$, άρα η σταθερά $c = 11 - 11a$, δεν μπορεί να ικανοποιεί το ζητούμενο.

2^{ος} Τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι ο $c = \frac{1000}{91}$ ικανοποιεί τις συνθήκες. Ξεκινάμε πρώτα με 100 άδεια κουτιά και θεωρούμε όλες τις κάρτες που η καθεμιά έχει αριθμό μεγαλύτερο από $\frac{1000}{1001}$. Αφού το άθροισμά τους δεν ξεπερνάει το 1000, θα πρέπει να υπάρχουν το πολύ 1000 τέτοιες κάρτες. Επομένως, μπορούμε να βάλουμε (το πολύ) 10 κάρτες σε καθένα από από τα 100 κουτιά γιατί τότε κάθε κουτί έχει άθροισμα $10 \cdot \frac{1000}{1001} < 10 < c$.

Στη συνέχεια, σε κάθε βήμα παίρνουμε μία από τις υπόλοιπες κάρτες και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί που μπορεί να μπει. Ας υποθέσουμε πως αυτό δεν είναι δυνατό. Επομένως, σε κάποιο βήμα θα έχουμε τα 100 κουτιά με συνολικά αθροίσματα x_1, x_2,..., x_{100} και όπου και αν προσθέσουμε την κάρτα με τιμή $x \leq \frac{1000}{1001}$, το συνολικό άθροισμα θα γίνει πάνω από c. Επομένως,

$$x_i + x > c = 11 - \frac{11}{1001},$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, 100$. Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} + 100x > 100\left(11 - \frac{11}{1001}\right).$$

Όμως, $1000 \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} + x$ και $\frac{1000}{1001} \geq x$, οπότε παίρνουμε ότι

$$1000 + 99 \cdot \frac{1000}{1001} > 100\left(11 - \frac{11}{1001}\right),$$

άτοπο. Η κατασκευή για το ότι κάθε μικρότερο c δεν ικανοποιεί τις συνθήκες, γίνεται όπως στον πρώτο τρόπο.

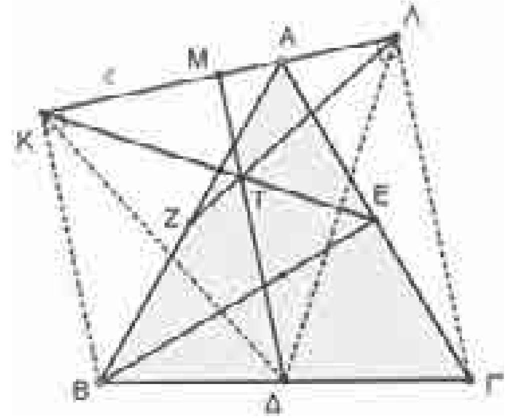
Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 123

Γ59. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ, αντίστοιχα. Η ευθεία ε περνάει από το Α και είναι τέτοια ώστε, αν Κ και Λ οι ορθές προβολές των Β και Γ πάνω στην ε, αντίστοιχα, το Α να βρίσκεται μεταξύ των Κ και Λ.
Έστω Τ το σημείο τομής των ευθειών ΚΕ και ΖΛ. Να αποδείξετε ότι $\Delta T \perp \varepsilon$.

ΜΟ Ουκρανίας 2014

Λύση

Επειδή $A\hat{K}B = 90^0 = B\hat{E}A$, το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι εγγράψιμο, οπότε: $T\hat{K}A = E\hat{K}A = A\hat{B}E = 30^0$.
Ομοίως, προκύπτει ότι $T\hat{\Lambda}K = 30^0$. Επομένως το τρίγωνο ΤΚΛ είναι ισοσκελές με $TK = T\Lambda$. Φέρουμε από το Δ κάθετη προς την ευθεία ε και έστω ότι την τέμνει στο σημείο Μ.
Επειδή το Δ είναι το μέσο της ΒΓ και $\Delta M \parallel BK \parallel \Gamma\Lambda$ έπεται ότι η ΓΜ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΚΒΓΛ, οπότε η ΔΜ είναι η μεσοκάθετη της ΚΛ. Επειδή $TK = T\Lambda$, έπεται ότι το Τ ανήκει στη μεσοκάθετη ΔΜ της ΚΛ, δηλαδή $\Delta T \perp \varepsilon$.



Σχήμα 1

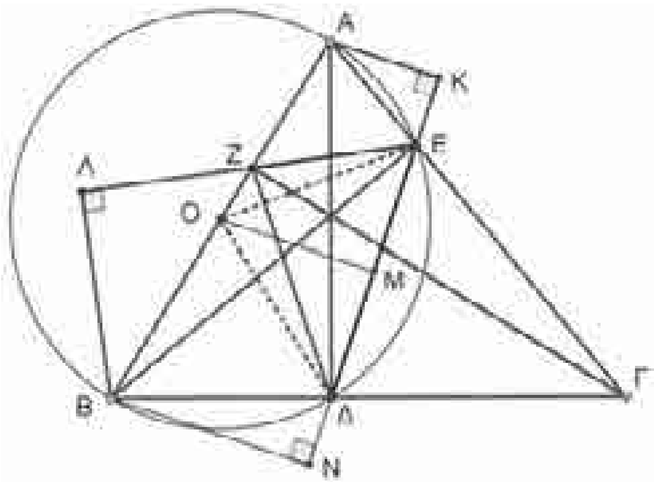
Γ60. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Έστω Κ η ορθή προβολή του Α στην ευθεία ΔΕ και Λ η ορθή προβολή του Β στην ευθεία ΕΖ. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ = ΕΛ.

ΜΟ Ουκρανίας 2014

Λύση

Φέρουμε και τη $BN \perp \Delta E$, οπότε ΑΚΝΒ είναι τραπέζιο.
Θυμίζουμε ακόμη ότι τα ύψη ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμοι των γωνιών του ορθικού του τριγώνου ΔΕΖ, οπότε το Β ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $Z\hat{E}\Delta$, δηλαδή $B\Lambda = BN$ και από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΛ και ΕΒΝ προκύπτει ότι $E\Lambda = EN$.
Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\Delta K = EN \Leftrightarrow \Delta E + EK = \Delta E + \Delta N \Leftrightarrow EK = \Delta N.$$



Σχήμα 2

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ περνάει από τα σημεία Δ και Ε, οπότε $O\Delta = OE$. Επομένως η διάμεσος ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΟΔΕ είναι και ύψος, οπότε είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου ΑΚΝΒ, δηλαδή είναι και διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΝΒ. Άρα έχουμε $MN = MK$ και $M\Delta = ME$, οπότε θα είναι και $MN - M\Delta = MK - ME \Rightarrow \Delta N = EK$.

Α65. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y) για τα οποία:

$$\mathbf{2^x + \log_3 x = y^2 \text{ και } 2^y + \log_3 y = x^2.}$$

ΜΟ Ρουμανίας 2017

Λύση

Από τις εξισώσεις $2^x + \log_3 x = y^2$ και $2^y + \log_3 y = x^2$ προκύπτει η εξίσωση:

$$2^x + \log_3 x + x^2 = 2^y + \log_3 y + y^2. \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=2^t+\log_3 t+t^2, t\in(0,+\infty)$ η οποία είναι αύξουσα, ως άθροισμα τριών συναρτήσεων που είναι αύξουσες. Επομένως η f είναι 1-1, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει η ισότητα: $x=y$. Έτσι προκύπτει η εξίσωση: $2^x+\log_3 x=x^2$ (2)

Παρατηρούμε ότι $x=3$ είναι λύση της (2), ενώ οι 1, 2 και 4 δεν είναι λύσεις της.

Για $x=\kappa\geq 5$, με επαγωγή αποδεικνύουμε εύκολα ότι: $2^\kappa>\kappa^2$, οπότε $2^\kappa+\log_3\kappa>\kappa^2$.

Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(x,y)=(3,3)$.

Α66. Έστω $\alpha>0$ πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^{\sin x}\cdot(\alpha+1)^{\cos x}\geq\alpha,\ \text{για κάθε}\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

ΜΟ Ρουμανίας 2017

Λύση

Για $\alpha>1$, παίρνοντας λογαρίθμους με βάση α των δύο μελών της δεδομένης σχέσης λαμβάνουμε την ισοδύναμη ανισότητα:

$$\sin x+(\cos x)\log_a(\alpha+1)\geq 1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (1).$$

Επειδή για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει ότι $\sin x\geq\sin^2 x$, $\cos x\geq\cos^2 x$ και αφού $\log_\alpha(\alpha+1)>1$, έχουμε:

$$\sin x+(\cos x)\log_\alpha(\alpha+1)\geq\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Για $\alpha=1$ η δεδομένη ανισότητα γίνεται $2^{\cos x}\geq 1$, που ισχύει.

Για $\alpha\in(0,1)$, η δεδομένη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$\sin x+(\cos x)\log_\alpha(\alpha+1)\leq 1,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

η οποία ισχύει γιατί $\sin x\leq 1$, $\cos x\geq 0$ και $\log_\alpha(\alpha+1)<0$.

Ασκήσεις για λύση

Α67. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους n που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\sqrt{n+3}+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ να είναι ακέραιος.

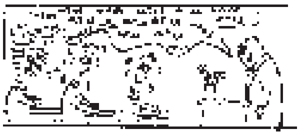
Α68. Αν x,y θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\frac{2010}{2011}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{2011}{2012}$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x+y$.

Α69. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$, $\nu\geq 2$, είναι τέτοιοι ώστε:

$$\alpha_1\leq\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2\leq\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leq\alpha_4,\ldots,\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu-1}\leq\alpha_\nu.$$

Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}+\ldots+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\leq\frac{\nu}{2}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Γ61. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ορθόκεντρο Η διαφορετικό των κορυφών του Α,Β,Γ και του περικέντρου του Ο. Αν Μ,Ν,Ρ είναι τα περίκεντρα των τριγώνων ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ και ΟΗ συντρέχουν.



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά

πρόλογος, στα επόμενα τεύχη θα σας παρουσιάζουμε την απάντηση σπουδαίων επιστημόνων, μαθηματικών και μη, στο ερώτημα «τί είναι τα Μαθηματικά». Στο προηγούμενο τεύχος παραθέσαμε την άποψη του Αριστοτέλη. Σε τούτο το τεύχος παραθέτουμε την άποψη του Γαλιλαίου.

2η άποψη: Στο έργο Il Sagiatore που εκδόθηκε το 1623 περιγράφεται η αντίληψη του Γαλιλαίου για τη σχέση φιλοσοφίας-Μαθηματικών. Σύμφωνα μ' αυτή την άποψη «η Φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του σύμπαντος, το οποίο είναι ανοικτό μπροστά στο βλέμμα μας. Όμως το βιβλίο δεν μπορεί να γίνει κατανοητό, εκτός αν μάθουμε να κατανοούμε τη γλώσσα και να διαβάζουμε το αλφάβητο στο οποίο έχει γραφτεί. ***Είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών και οι γλωσσικοί χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μια λέξη. Χωρίς αυτά κανείς περιπλανιέται σε ένα αναφέρεται στο σκοτεινό λαβύρινθο***»*(Λιόση, p26)* (*ΣΤ. Ντρέϊκ, «Γαλιλαίος», σελ. 103, Παν. Εκδ. Κρήτης*)

II. Γεωμετρία αγάπη μου

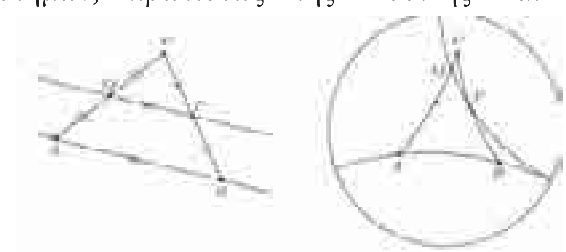
προλεγόμενα κατά καιρούς αρκετοί καλοί φίλοι της στήλης, μας υπέδειξαν την αναγκαιότητα να παρουσιάσει η στήλη μας, τα επιχειρήματα εκείνα που χαρακτηρίζουν την *"Ευκλείδεια Γεωμετρία" (Ε.Γ.)*, ως το κατ' εξοχή *παιδευτικό μάθημα*. Αποφασίσαμε, λοιπόν, να αφιερώσουμε (από το τεύχος τούτο), μια σειρά σημειωμάτων με τα οποία τεκμηριώνουμε αυτόν τον ισχυρισμό μας.

1ο σημείωμα

ένας ορισμός (01). Η Ε.Γ. είναι η πιο στοιχειώδης των επιστημών, που επιτρέπουν στον άνθρωπο, με καθαρά διανοητικές διεργασίες, να κάνει προβλέψεις για το φυσικό κόσμο (βασίζεται στην παρατήρηση). Η δύναμη της Ε.Γ., με την έννοια της ακρίβειας και της χρησιμότητας αυτών των συμπερασμάτων, είναι εντυπωσιακή και έχει ένα ισχυρό κίνητρο για τη μελέτη της Λογικής στη Γεωμετρία

αιτία που γέννησε την ΕΓ. Ζώντας στον τρισδιάστατο χώρο, έχουμε ανάγκη να γνωρίσουμε τα στερεά που υπάρχουν σ' αυτόν (σχήμα, επιφάνεια, όγκος, διάταξη αυτών στο χώρο, ομοιότητες, διαφορές μεταξύ τους). Η διαχείριση αυτής της ανάγκης έγινε εφικτή με τη βοήθεια της Ε.Γ. και των νεώτερων τέκνων της (02).

Η εμφάνιση της Ε.Γ. συνδέεται στενά με τις διαισθητικές αντιλήψεις του ανθρώπου για τον κόσμο που τον περιβάλλει (ευθείες - τεντωμένες χορδές, ακτίνες φωτός κτλ.). Ή παρατεταμένη διαδικασία εμβάθυνσης στις έννοιες αυτές οδήγησε σε μία πιο αφηρημένη αντίληψη της Γεωμετρίας. Η ανακάλυψη από τον N. I. Lobachevski μιας Γεωμετρίας διαφορετικής από την *Ευκλείδεια*, απόδειξε ότι **οι ιδέες μας** για το χώρο δεν είναι **a priori.** Με άλλα λόγια δεν είναι δυνατό να ισχυριστεί κανείς ότι η Ε.Γ. είναι η μόνη Γεωμετρία, που περιγράφει τις ιδιότητες του χώρου που μας περιβάλλει. Η ανάπτυξη των φυσικών επιστημών, πρωτίστως της Φυσικής και της



Αστρονομίας, απόδειξε ότι η Ε.Γ. περιγράφει τη δομή του χώρου που μας περιβάλλει με ακρίβεια που φτάνει μόνο μέχρι ενός ορισμένου βαθμού, ενώ **δεν μπορεί** να **περιγράψει** ικανοποιητικά τις ιδιότητες **του χώρου ως προς** τις μετακινήσεις των σωμάτων και ως προς τις ταχύτητες που προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός. Έτσι, η Ε.Γ. μπορεί να θεωρηθεί σαν μια πρώτη προσέγγιση μιας περιγραφής της δομής του πραγματικού φυσικού κόσμου (χώρου)

παραπομπές

(1) σημειώσαμε τον όρο «ένας ορισμός» γιατί εμείς διαβάσαμε πολλούς ορισμούς διαφορετικούς μεταξύ τους

(2) τέκνα της Ε.Γ. είναι οι παντοειδείς γεωμετρίες που προέκυψαν απ' αυτήν σαν ανάγκη για την βαθύτερη σπουδή του χώρου και όσων εξαρτώνται απ' αυτόν.

III. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. Αλέξης Παπαϊωάννου: Ο Σέρλοκ Χολμς κι η αναφορά του στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

προλεγόμενα. ο Αλέξης Παπαϊωάννου, είναι ομότιμος καθηγητής της Σχολής ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ και φίλος της στήλης. Του Αλέξη του θέσαμε το ερώτημα για την παιδευτική αξία της *"Ευκλείδειας Γεωμετρίας"*, *κι αυτός* αντί άλλης απάντησης μας έστειλε ένα πολύ σύντομο σημείωμα, με το οποίο απαντά στο ερώτημά μας.

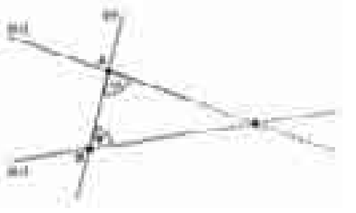
Arthur Conan Doyl και Γεωμετρία

«Στη νουβέλα του Arthur Conan Doyle, «Σπουδή σε άλικο» («A study in scarlet») που εκδόθηκε το 1887, πρωτοεμφανίζονται ο διάσημος ντετέκτιβ **Sherlock Holmes** και ο δόκτορ **Ουάτσον** που διηγείται τι επιτυχίες του ντετέκτιβ. Τα δύο πρώτα κεφάλαιά της, αναφέρονται στην γνωριμία του Χολμς με τον Ουάτσον, ενώ η υπόλοιπη περιγράφει μια συναρπαστική αστυνομική ιστορία. Σ' αυτήν δύο Αμερικανοί Μορμόνοι δολοφονούνται στο Λονδίνο…κι ο Σέρλοκ Χολμς με τη βοήθεια των **αρχών της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας***, λύνει το μυστήριο. Στη νουβέλα οι ήρωες αναφέρονται στην *Ευκλείδεια Γεωμετρία.*

Στο δεύτερο κεφάλαιο *"Η επιστήμη της συνεπαγωγής"* ("the science of deduction") έχουμε την πρώτη αναφορά: «*τα συμπεράσματα του άρθρου*», που έχει γράψει ο Σ. Χολμς, «*ήταν τόσο αλάνθαστα όσο και οι προτάσεις του Ευκλείδη*» (*"his conclusions were as so many propositions of Euclid"*).

Η δεύτερη αναφορά, στο 7ο και τελευταίο κεφάλαιο του ΙΙ μέρους, περιγράφει την Αναλυτική και Συνθετική μέθοδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, χωρίς όμως να αναφέρεται ρητά σε αυτήν.

Στη λύση ενός προβλήματος το κύριο είναι να μπορεί κάποιος να σκέφτεται προς τα "πίσω" (ανάποδα). Αυτό είναι ένα πολύ χρήσιμο και εύκολο επίτευγμα, αλλά οι άνθρωποι δεν το εφαρμόζουν συχνά... Υπάρχουν 50 άνθρωποι που μπορούν να σκέφτονται συνθετικά, για έναν που σκέφτεται αναλυτικά…»



Οι περισσότεροι άνθρωποι, αν τους περιγράψει κάποιος **την ακολουθία γεγονότων**, θα μπορέσουν να προβλέψουν ποιο θα είναι το αποτέλεσμα. Μπορούν **να συνθέσουν** τα γεγονότα αυτά στο μυαλό τους και βάσει αυτών να προβλέψουν ποιο θα είναι το αποτέλεσμα. Μπορούν να συνθέσουν τα γεγονότα αυτά στο μυαλό τους και βάσει αυτών να συμπεράνουν ότι κάτι θα συμβεί. Όμως υπάρχουν λίγοι άνθρωποι, που αν τους δώσεις ένα αποτέλεσμα, έχουν τη δυνατότητα, συνειδητά, **να ανασυνθέσουν** ποια βήματα έλαβαν χώρα, βήματα που οδήγησαν στο αποτέλεσμα αυτό. Αυτή τη δυνατότητα εννοώ όταν μιλώ για *"σκέψη προς τα πίσω"*.

2ο θέμα. "Αρχή της περιστεροφωλιάς" (του Θεμιστοκλή Κόγια)

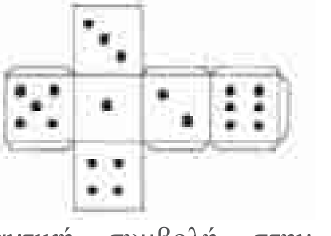
προλεγόμενα. Ο φίλος της στήλης Θεμιστοκλής Κόγιας, μας έστειλε ένα σημείωμα με το οποίο αναφέρεται στον σημαντικό μαθηματικό Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Στον Dirichlet οφείλουμε πολλά και σπουδαία μαθηματικά επιτεύγματα.

«Σαν σήμερα το 1805, γεννήθηκε στο Duren, ο Γερμανός μαθηματικός ***Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet***. Η οικογένειά του καταγόταν από την Βελγική πόλη Richelet και αυτό εξηγεί και το επίθετο που του αποδόθηκε, "le jeune de Richelet", που σημαίνει "**ο νέος του Richelet**". Από μικρό παιδί ακόμα, σε ηλικία μόλις δώδεκα χρονών, είχε φανεί η μεγάλη κλίση του στα Μαθηματικά. Τόσο πολύ τον ενδιέφεραν, που ξόδευε σχεδόν ολόκληρο το χαρτζιλίκι του σε βιβλία Μαθηματικών. Λέγεται ότι, η όλη παρουσία του στο Γυμνάσιο ήταν τόσο εξαιρετική, που τον καθιστούσε παράδειγμα προς μίμηση για κάθε συμμαθητή του. Συνεχίζοντας τις σπουδές του μετά το Γυμνάσιο στη Γερμανία και τη Γαλλία, ο Dirichlet είχε την τύχη να διδαχθεί από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς εκείνης της εποχής όπως τον Ohm, τον Fourier, τον Laplace, τον Legendre και τον Poisson.

Ο ίδιος υπήρξε **εξαίρετος δάσκαλος** που εκφραζόταν πάντα με πολύ μεγάλη σαφήνεια. Το 1855 μετά το θάνατο του Gauss, είχε την τιμή να τον διαδεχθεί στο Göttingen. Υπήρξε ο πρώτος που κατάφερε να αφομοιώσει το μνημειώδες έργο του δασκάλου και φίλου του Gauss, το "*Disquisitiones Arithneticae*" (*"αριθμητικές έρευνες"*), το βιβλίο τον συνόδευε σε όλα του τα ταξίδια **και κοιμόταν με αυτό** κάτω από το μαξιλάρι του. Πριν πάει στο κρεβάτι, συνήθιζε **να παλεύει** με κάποια **δύσκολη παράγραφο** ελπίζοντας, όπως και συχνά συνέβαινε, ότι θα ξυπνούσε την νύχτα και μια εκ νέου ανάγνωση **θα ξεκαθάριζε** τα πράγματα. Ο Dirichlet περιγράφεται όχι απλώς ως αφηρημένος αλλά ως «διαβόητα αφηρημένος». Λέγεται ότι ήταν τόσο απορροφημένος στις σκέψεις του που ξέχασε να γνωστοποιήσει στα πεθερικά του την γέννηση του πρώτου τους εγγονιού. Ο παππούς, όταν τελικά έμαθε τα νέα με εξοργιστική καθυστέρηση σχολίασε ότι ο Dirichlet δεν θα μπορούσε τουλάχιστον να γράψει 2+1=3. Μετά τον θάνατο του Dirichlet, ο εγκέφαλος του αφαιρέθηκε για να μελετηθεί, έτσι, η φράση «έχει το μυαλό του κάπου αλλού» **που χαρακτηρίζει την αφηρημάδα** απέκτησε ένα ακραία κυριολεκτικό νόημα. Ένα από τα εντυπωσιακότερα (κυρίως για την απλότητα του), εργαλεία που μας κληροδότησε είναι η *"Αρχή της Περιστεροφωλιάς"*

Η "Αρχή της περιστεροφωλιάς". Ένα από τα αγαπημένα παιχνίδια σε πολλές παρέες που συνδυάζει κίνηση, ευελιξία, αντανακλαστικά και σκέψη είναι οι μουσικές καρέκλες. Σε αυτό τα παιδιά που συγκροτούν την παρέα τοποθετούν καρέκλες σε κύκλο με την πλάτη προς το εσωτερικό του κύκλου. Το **πλήθος τους** είναι **αρχικά κατά** ένα **μικρότερο από το πλήθος των παικτών.** Οι παίκτες αρχίζουν να τρέχουν γύρω από τις καρέκλες, ακούγοντας μουσική. Κάποια στιγμή η μουσική σταματά και όλοι πρέπει να κάτσουν σε μία καρέκλα. Χάνει όποιος δεν προλάβει να καθίσει. Θα υπάρχει ηττημένος ; Στη συνέχεια του παιχνιδιού η μουσική ξαναρχίζει και οι παίκτες και πάλι αρχίζουν να τρέχουν γύρω γύρω από τις καρέκλες, οι οποίες αυτήν τη φορά έχουν μειωθεί κατά μία, ενώ και στις επόμενες φορές μειώνονται κατά μία κάθε φορά. Κερδίζει αυτός **που θα προλάβει να καθίσει πρώτος** στον τελευταίο γύρο του παιχνιδιού στην τελευταία καρέκλα που θα έχει απομείνει. Θα υπάρχει νικητής ; Πέρα από την εμπειρία μας, η απάντηση επιβεβαιώνεται και από μία παρατήρηση που πρώτος συστηματοποίησε και κατέγραψε αυστηρά ο P.G.L. Dirichlet περί το 1834 κι από τότε φέρει το όνομά του (*"Αρχή της περιστεροφωλιάς"*). Ο P.G.L. Dirichlet (1805-1859) υπήρξε σημαντικός Γερμανός μαθηματικός, που σπούδασε στο Παρίσι και θήτευσε ως καθηγητής και συνεχιστής του C.F. Gauss στο διάσημο Πανεπιστήμιο του Göttingen

Μεταξύ άλλων στο ίδιο Πανεπιστήμιο φοίτησαν ή δίδαξαν προσωπικότητες όπως οι: Arthur Schopenhauer, οι αδελφοί Grimm, Otto von Bismarck, Edmund Husserl, Max Weber, Jurgen Habermas, Gerhard Schröder, Max Planck, Werner Heisenberg, J. Robert Oppenheimer, Enrico Fermi, Wolfgang Pauli και μαθηματικοί όπως οι: Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, David Hilbert, Felix Klein, Richard Courant, Emmy Noether, Constantin Caratheodory, John von Neumann, Bolyai, Freudenthal, Haar, Hamel, Hecke, Hurwitz, κ.ά. Έως σήμερα 45 βραβεία Nobel είχαν συμμετοχή αποφοίτων ή καθηγητών του. Τα περισσότερα από αυτά στο πρώτο μισό του 20ου αιώνα.



Είχε σημαντική συμβολή στην **αναλυτική θεωρία αριθμών,** στις σειρές Fourier και στην ανάλυση γενικότερα» ***(στο επόμενο η συνέχεια)***

3ο θέμα. ο Αθανάσιος Φωκάς κι η "υπόθεση Lindelöf" - Η λύση σε ένα από τα μεγαλύτερα ανοιχτά προβλήματα των Μαθηματικών (από τον Κώστα Μπουραζάνα)

Με υπόδειξη φίλου της στήλης δημοσιεύουμε, ένα σημείωμα του έγκυρου μαθηματικού σχολιαστή Κώστα Μπουραζάνα, σχετικά με έναν μεγάλο μαθηματικό της εποχής μας, τον Θανάση Φωκά. Μια εντελώς νέα προσέγγιση, από μέρους του, υποδηλώνει την εγκυρότητα της "υπόθεσης Lindelöf ", ανοίγοντας τις δυνατότητες νέων ανακαλύψεων στην κβαντική πληροφορική, τη θεωρία αριθμών και την ασφάλεια στον κυβερνοχώρο

Ο Αθανάσιος Φωκάς, μαθηματικός από το Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Θεωρητικής Φυσικής του Πανεπιστημίου του Κέμπριτζ και επισκέπτης καθηγητής στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών του Ming Hsieh στη Σχολή Μηχανικών του USC Viterbi, ανακοίνωσε μια νέα μέθοδο που προτείνει μια λύση σε ένα από τα μακροχρόνια, εκκρεμή προβλήματα στην ιστορία των Μαθηματικών, την "υπόθεση Lindelöf ".

Το αποτέλεσμα, που ανακοινώθηκε στις 25 Ιουνίου 2018 (σε Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στην Αθήνα), έχει εκτεταμένες επιπτώσεις σε τομείς όπως η κβαντική υπολογιστική, η θεωρία αριθμών και η κρυπτογράφηση που σχηματίζουν τη βάση για την κυβερνοασφάλεια.

Το 1908 διατυπώθηκε από τον Φιλανδό τοπολόγο Ernst Leonard Lindelöf, η γνωστή ως *"υπόθεση Lindelöf "* (είναι μια εικασία σχετικά με τον ρυθμό ανάπτυξης της συνάρτησης "Zeta Riemann", στο εξής: "R zeta").

Το "Lindelöf " υπονοεί το μεγαλύτερο μέρος των ισχυρισμών του Riemann και το "Riemann" υπονοεί πλήρως το "Lindelöf ", επομένως μια απόδειξη του Lindelöf ισοδυναμεί με μια σημαντική ανακάλυψη στον τομέα των μαθηματικών.

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

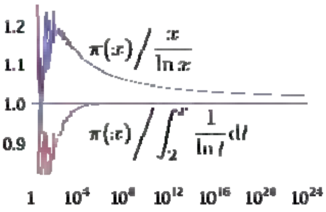
Οι πρωταρχικοί αριθμοί – αριθμοί όπως τα 2, 3, 5, 7 και 11 που διαιρούνται μόνο από το 1 και το ίδιο – είναι ιδανικοί για πράγματα όπως η κρυπτογράφηση RSA, η οποία προστατεύει τις πολλές διαδικτυακές μας αγορές. Οι πρωταρχικοί αριθμοί είναι κυριολεκτικά τα **μυστικά «κλειδιά»** που κρύβουν την τελευταία σας αγορά από αδιάκριτα μάτια.

Η συνάρτηση "R zeta" είναι ένα σχεδόν μαγικό εργαλείο στη θεωρία αριθμών που χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση των ιδιοτήτων των πρώτων αριθμών. Έχει ωθήσει την επιστημονική κατανόηση σε πολλούς τομείς, συμπεριλαμβανομένης της Βιολογίας, της Χημείας και της Φυσικής, όλα χωρίς επίσημη απόδειξη της διάσημης υπόθεσης του Ρίμαν. «Η αποτυχία της υπόθεσης Ρίμαν,» έγραψε ο θεωρητικός αριθμού Enrico Bombieri, «**θα δημιουργούσε χάος στη διανομή των πρώτων αριθμών**».

Από τη δημοσίευσή του, το έγγραφο του Riemann υπήρξε το κύριο επίκεντρο της θεωρίας πρωταρχικού αριθμού και ο κύριος λόγος για την απόδειξη κάτι που ονομάζεται θεώρημα πρωταρχικού αριθμού το 1896. Έκτοτε, έχουν βρεθεί αρκετές νέες αποδείξεις, συμπεριλαμβανομένων των στοιχειωδών αποδείξεων από τους Selberg και **Erdós**. Ωστόσο, η υπόθεση του Riemann σχετικά με τις ρίζες της συνάρτησης "R zeta" παραμένει μυστήριο. Το μυστήριο του επιδεινώνεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση "R zeta" εξαρτάται από μια σύνθετη μεταβλητή και δεν έχει έκφραση κλειστής μορφής – δηλαδή δεν μπορεί να εκφραστεί ως ένας μοναδικός τύπος που περιέχει άλλες τυπικές συναρτήσεις.

Εάν η υπόθεση Riemann αποδειχθεί σωστή, θα επιτρέψει στους μαθηματικούς να περιγράψουν καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο τοποθετούνται οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ ολόκληρων αριθμών.

«Στην κρίσιμη γραμμή, η συνάρτηση Riemann εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή t», είπε ο Fokas που πέρασε σχεδόν εννέα χρόνια παλεύοντας με τον Lindelöf. «Η υπόθεση Riemann μπορεί να επαληθευτεί με τον σημερινό υπολογιστή για πολύ μεγάλους αριθμούς, αλλά εξακολουθεί να είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με το άπειρο. Αυτό δείχνει ότι πρέπει να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης "R zeta" όταν το t είναι πολύ μεγάλο. Εδώ μπαίνει η υπόθεση **Lindelöf**, η οποία λέει ότι «*η συνάρτηση "R zeta" έχει μια συγκεκριμένη μορφή καθώς το t γίνεται πολύ μεγάλο*».



Ο Fokas είναι παγκόσμιος εμπειρογνώμονας στα ασυμπτωτικά, ένας εφαρμοσμένος μαθηματικός τομέας που βοηθά τους επιστήμονες να απαντήσουν σε ερωτήσεις σχετικά με τη συμπεριφορά των λειτουργιών όταν μια παράμετρος είναι πολύ μεγάλη. Το έργο του Lindelöf μπορεί να σημαίνει μια σημαντική ανακάλυψη στην κατανόηση της αλγοριθμικής πολυπλοκότητας, ένα πολύ σημαντικό θέμα στην επιστήμη των υπολογιστών. Η γνώση της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων μας επιτρέπει να απαντήσουμε σε ερωτήσεις όπως το πόσο καιρό θα εκτελείται ένα πρόγραμμα σε μια είσοδο; Πόσος χώρος θα πάρει; Είναι το πρόβλημα επιλύσιμο;

«Η προσέγγισή μου ήταν εντελώς διαφορετική από τις συνηθισμένες προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται», είπε ο Φωκάς. «Ενσωμάτωσα πρώτα τη συνάρτηση "**R zeta**", μέσα σε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα, δηλαδή βρίσκω ότι η συνάρτηση "R zeta" ικανοποιεί ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα σε πολύπλοκη ανάλυση που ονομάζεται πρόβλημα Riemann-Hilbert.

Στη συνέχεια, υπολογίζω τη μεγάλη συνεισφορά αυτού του προβλήματος. Εκτός από το ότι είναι εννοιολογικά καινοτόμο, αυτή η προσέγγιση είναι τεχνικά πολύ δύσκολη λόγω της ανάλυσης του προαναφερθέντος προβλήματος Riemann-Hilbert.

Από πολλές απόψεις, ο **Φωκάς** είναι ο **πνευματικός κληρονόμος** του Ρώσου-Αμερικανού μαθηματικού και βιολόγου Ισραήλ Γκελφάντ, που θεωρείται ένα από τα μεγαλύτερα μαθηματικά μυαλά του 20ού αιώνα, ο οποίος είπε: *«Ο Φωκάς είναι τώρα ένα πολύ σπάνιο παράδειγμα ενός επιστήμονα στο ύφος της Αναγέννησης.»*

Πράγματι, ο Φωκάς κέρδισε το πτυχίο του στην αεροναυτική από το Imperial College, Ph.D. στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά από το Caltech και MD από το Πανεπιστήμιο του Μαϊάμι. Κατέχει την Προεδρεία της Μη Γραμμικής Μαθηματικής Επιστήμης στο Πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ και είναι επί του παρόντος ανώτερος συνεργάτης του

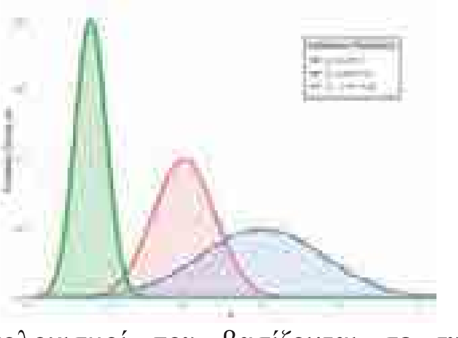
Συμβουλίου Έρευνας Μηχανικών και Φυσικών Επιστημών του Ηνωμένου Βασιλείου.
Το 2000, στον Φωκά απονεμήθηκε το Βραβείο Naylor, ένα χρόνο μετά την απονομή του ίδιου βραβείου στον Stephen Hawking. Είναι επίσης πλήρες μέλος της Ακαδημίας Αθηνών και συνεργάτης του Guggenheim. Η «*Μέθοδος Fokas*», για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων έχει αντικαταστήσει πλήρως τις μεθόδους μετασχηματισμού που ανακαλύφθηκαν τον 18ο αιώνα και χρησιμοποιούνταν για πάνω από 250 χρόνια. Ένα πρόσφατο άρθρο στο «Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Review», συγκρίνει τον αντίκτυπο της "μεθόδου Fokas" στα Μαθηματικά με εκείνη του «Fosbury flop» στο άλμα.
Πηγή: https://viterbischool.usc.edu/

3ο θέμα. Εφαρμογές της "Μεθόδου του Μόντε Κάρλο", του Δημ. Κάβουρα

προλεγόμενα. Από τον φίλο της στήλης Δημ. Κάβουρα, λάβαμε ένα μικρό σημείωμα με αντικείμενο μια εφαρμογή της λεγόμενης: «*Μέθοδος του Μόντε Κάρλο*».

εισαγωγικά. Ο υπολογισμός ορισμένων ποσοτήτων, όπως οι πιθανότητες πραγματοποίησης ορισμένων γεγονότων σε καθορισμένο τμήμα του χώρου ή/και του χρόνου, σε πολλές περιπτώσεις είναι είτε δύσκολος ή αδύνατος με μια *ντετερμινιστική* (deterministic=προκαθορισμένος) μέθοδο, δηλ. με χρήση καθορισμένων εξισώσεων που περιγράφουν το εξεταζόμενο φαινόμενο, οι οποίες ενδεχομένως δεν υπάρχουν ή είναι αδύνατο να εξαχθούν. Στις περιπτώσεις αυτές εξετάζεται η δυνατότητα εφαρμογής μιας "*μη ντετερμινιστικής*" ή "*στοχαστικής*" (*stochastic*) μεθόδου.

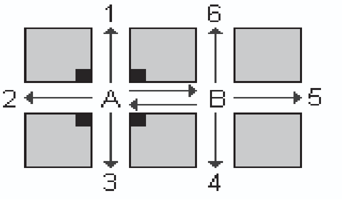
Προϋπόθεση για την εφαρμογή μιας στοχαστικής μεθόδου είναι η διαθεσιμότητα ενός ταχύτατου υπολογιστή, με τον οποίο θα πραγματοποιηθεί μεγάλος αριθμός τυχαίων δοκιμών, που είναι γνωστές ως "*προσομοιώσεις*" (*simulations*) και στη συνέχεια επεξεργασία πλήθους αριθμητικών δεδομένων. Μια δεύτερη προϋπόθεση είναι να διατίθεται ένα μεγάλος αριθμός "*τυχαίων αριθμών*" (random numbers) με γνωστή συνάρτηση πιθανοκατανομής.



Οι υπολογισμοί που βασίζονται σε τυχαίους αριθμούς είναι γενικά γνωστοί (για προφανείς λόγους) ως ***πειράματα Monte Carlo***. Οι υπολογισμοί αυτοί δεν περιορίζονται μόνο σε υπολογισμούς πιθανοτήτων, αλλά εφαρμόζονται ακόμη σε μαθηματικούς υπολογισμούς, όπως η ολοκλήρωση πολύπλοκων συναρτήσεων, οι οποίοι είναι αδύνατον να πραγματοποιηθούν με τις συμβατικές τεχνικές.

Το πρόβλημα του "μεθυσμένου ναύτη"

προλεγόμενα. Το πρόβλημα πιθανοτήτων, που είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως *"πρόβλημα του μεθυσμένου ναύτη"* (*"drunken sailor" problem*) μπορεί να χρησιμεύσει ως εισαγωγικό παράδειγμα στα πειράματα Monte Carlo. Το πρόβλημα αυτό έχει ως εξής: Ας θεωρήσουμε μια πόλη που αποτελείται από έξη (3x2) οικοδομικά τετράγωνα, σαν αυτή που δείχνεται στο σχήμα.



Ένας *"μεθυσμένος ναύτης"* στέκεται στο ένα από τα δύο σταυροδρόμια και θέλει να βγει έξω από τη πόλη. Επειδή ο ναύτης είναι αρκετά μεθυσμένος, οι πιθανότητες να κινηθεί προς οποιαδήποτε από τις τέσσερις κατευθύνσεις είναι ίδιες. Ποια είναι η πιθανότητα να φθάσει ο ναύτης σε κάθε μία από τις έξη εξόδους της πόλης;Το πρόβλημα λύνεται με **ντετερμινιστικό τρόπο** εύκολα, επειδή ο αριθμός των σταυροδρόμιων και των εξόδων είναι μικρός.

Ξεκινώντας από το σταυροδρόμι A η πιθανότητα να κινηθεί προς κάθε μία από τις εξόδους 1, 2, 3, όπως επίσης και προς το σταυροδρόμι B, είναι προφανώς 1/4. Αν ο ναύτης κινηθεί προς το σταυροδρόμι B, η πιθανότητα να κινηθεί από εκεί προς κάθε μία από τις εξόδους 4, 5, 6, όπως επίσης πάλι πίσω προς το σταυροδρόμι A είναι ίση προς το 1/4 της αρχικής πιθανότητας να βρεθεί στο B, είναι δηλαδή $(1/4)(1/4) = 1/4^2$. Πάλι, υποθέτοντας ότι επέστρεψε στο σταυροδρόμι A, η πιθανότητα να κινηθεί προς κάθε μία από τις εξόδους 1, 2, 3, όπως επίσης και πάλι πίσω προς το σταυροδρόμι B είναι $(1/4)(1/4^2) = 1/4^3$ κ.ο.κ. Επομένως, αθροίζοντας τις πιθανότητες που έχει ο ναύτης να φθάσει σε κάθε έξοδο, θα έχουμε τελικά:

Πιθανότητα άφιξης σε κάθε μία από τις εξόδους 1, 2, 3:

$$\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+\ldots=\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{1}{4^{2i-1}}\right)=0.2666\ldots$$

Πιθανότητα άφιξης σε κάθε μία από τις εξόδους 4, 5, 6:

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{1}{4^{2i}}\right)=0.0666\ldots$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί ανάλογα, αλλά με αρκετά πιο επίπονους υπολογισμούς και για μια πόλη 4x2 ή 3x3, αλλά τι θα μπορούσαμε να κάνουμε για μια ακόμη μεγαλύτερη πόλη με οικοδομικά τετράγωνα διατεταγμένα σε κανονικό (ορθογώνιου σχήματος) ή (ακόμη χειρότερα) σε ακανόνιστο σχηματισμό; Η μόνη λύση πλέον είναι το πείραμα **Monte Carlo** με τη βοήθεια υπολογιστή. Το πρόγραμμα **προσομοιώνει** την "πόλη" και το προς τα πού θα κινηθεί ο ναύτης από κάθε σταυροδρόμι επιλέγεται κατά τρόπο τυχαίο, αξιοποιώντας τη συνάρτηση παραγωγής τυχαίων αριθμών της προγραμματιστικής πλατφόρμας. Στην πραγματικότητα οι αριθμοί αυτοί είναι "ψευδοτυχαίοι", επειδή δεν υπάρχει τίποτα το μη-ντετερμινιστικό στα προγράμματα υπολογιστών.

Χιλιάδες ή εκατομμύρια *"περιπάτων"* (N) πραγματοποιούνται με προσομοίωση και απαριθμούνται οι αφίξεις (nj) του ναύτη σε κάθε έξοδο j. Το πηλίκο nj/N αποτελεί μια εκτίμηση της πιθανότητας άφιξης στην έξοδο j. Αυτή η εκτίμηση αρχικά είναι πολύ χονδρική, αλλά γίνεται ακριβέστερη, όσο αυξάνει ο αριθμός N. Βέβαια, θα κατέληγε στην πραγματική τιμή μόνο μετά από άπειρο αριθμό προσομοιώσεων.

επέκταση

Η προσομοίωση μπορεί να επεκταθεί και σε μία "τρισδιάστατη πόλη", δηλ. στο χώρο. Στη χημεία, ο "ναύτης" μπορεί να είναι ένα μόριο που κινείται με μια καθορισμένη μέση ταχύτητα, υπό την επίδραση π.χ. της διάχυσης. Αντί για "πόλη" θα μπορούσαμε να έχουμε ένα θάλαμο ή ένα πορώδες υλικό καθορισμένης γεωμετρίας. Το πρόβλημα θα μπορούσε να είναι ο υπολογισμός της συγκέντρωσης ενός αερίου, το οποίο διαχέεται από ένα σημείο ή μια περιοχή προς ένα δεδομένο τμήμα του χώρου και μετά από ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Το μοντέλο μπορεί να επεκταθεί και να γίνει "ρεαλιστικότερο" αν ληφθούν υπόψη φαινόμενα όπως οι συγκρούσεις μεταξύ των μορίων ή/και η προσρόφηση (μέχρι κάποιο βαθμό) των μορίων στα τοιχώματα του θαλάμου ή του πορώδους υλικού.

Εάν διαθέτουμε το κατάλληλο πρόγραμμα για την προσομοίωση, το μόνο που μας στοιχίζει αυτός υπολογισμός είναι ο χρόνος υπολογιστή. Όσο περισσότερος χρόνος διατίθεται, τόσο ακριβέστερα θα είναι τα λαμβανόμενα αποτελέσματα.

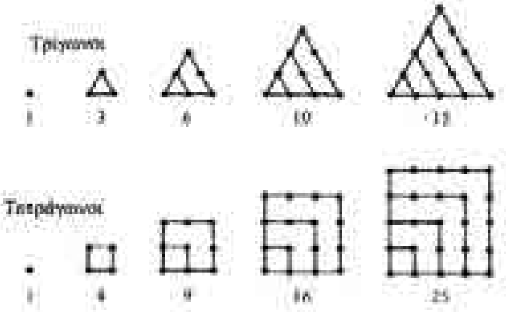
IV. ειδήσεις και...ειδήσεις

1. προαγγελία εκδήλωσης

από την Αγγελική Ζούπα, μαθηματικό του Γυμνασίου του Κολεγίου Ψυχικού, λάβαμε την παρακάτω προαγγελία για το "2ο Πανελλήνιο Διαδικτυακό Μαθητικό Μαθηματικό Φεστιβάλ", που θα πραγματοποιηθεί στις 6 & 7 Απριλίου 2022, υπό την αιγίδα του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων. [www.ekete,"Ελληνικό Κέντρο Επιστημών και Τεχνών"]

2. αναμνήσεις από τα...παλιά...

Ένας καλός φίλος, μας έστειλε μια παλιά πραγματεία με τίτλο «Πολύγωνοι και πολυεδρικοί αριθμοί», και υπότιτλο "scholia codicis Vat. Gr. 1038 fol. 129^v sub fine datorum in mg. Inferiore".



Η πραγματεία υπογράφεται υπό: *Ιωάννου Σπ. Παπαδάτου*, Επιτ. Γενικού Επιθεωρητού Μαθηματικών.

Φαίνεται ότι η **θεωρία των πολύγωνων αριθμών**, οφείλεται στη μελέτη αριθμητικών προόδων και σειρών η δε γεωμετρική τους ονομασία έγινε για λόγους παραστατικούς. Ο **Νικόμαχος,** όπως θα δούμε, επεκτείνοντας τους πολύγωνους, ασχολείται και με πυραμοειδείς.

Τους πολύγωνους και πυραμοειδείς αριθμούς πήρε για βάση ο Descart και στο posthume έργο του, που βρέθηκε μετά το θάνατό του «De solidorum elementis» ασχολείται με τους πολυεδρικούς αριθμούς. Οι πολύγωνοι κι οι πολυεδρικοί αριθμοί είναι το αντικείμενο τούτης της μελέτης.

Επαναληπτικές ασκήσεις Άλγεβρας

Ντόρβας Νίκος – Τσιφάκης Χρήστος

Για τα παιδιά που προσπαθούν,
για τα παιδιά που ονειρεύονται …

Άσκηση 1η. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{2x^2-2x+\alpha}$$

i) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$, ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού όλο το R.

ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$, να βρεθεί η τιμή του α.

iii) Για την τιμή του α που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

Λύση: i) Πρέπει και αρκεί $2x^2-2x+\alpha\geq 0$ για κάθε $x\in R$, το οποίο συμβαίνει όταν

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow 4-8\alpha\leq 0\Leftrightarrow \alpha\geq\frac{1}{2}.$$

ii) Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ έχουμε $f(0)=2\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}=2\Leftrightarrow\alpha=4$.

iii) Για $\alpha=4$ έχουμε:

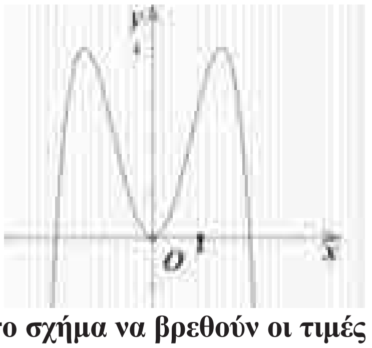
$$f(x)=3\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-2x+4}=3\Leftrightarrow$$

$$2x^2-2x+4=9\Leftrightarrow 2x^2-2x-5=0\overset{\Delta=44>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1=\frac{2+\sqrt{44}}{4}=\frac{2+2\sqrt{11}}{4}=\frac{1+\sqrt{11}}{2}\text{ ή}$$

$$x_2=\frac{2-\sqrt{44}}{4}=\frac{2-2\sqrt{11}}{4}=\frac{1-\sqrt{11}}{2}.$$

Άσκηση 2η. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^4+4x^2$.



Με βάση το σχήμα να βρεθούν οι τιμές του $m\in R$ ώστε η εξίσωση $x^4-4x^2+1-m=0$, να έχει 4 ρίζες και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση.

α. $-5<m<1$ **β.** $0\leq m\leq 4$

γ. $-5\leq m\leq -1$ **δ.** $-3\leq m\leq 1$

Λύση: Η εξίσωση γίνεται: $x^4-4x^2+1-m=0\Leftrightarrow -x^4+4x^2=1-m\Leftrightarrow f(x)=1-m$. Για να έχει η εξίσωση 4 ρίζες, πρέπει και αρκεί η ευθεία με εξίσωση $y=1-m$ να τέμνει 4 φορές την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Άρα πρέπει και αρκεί $0\leq y\leq 4\Leftrightarrow 0\leq 1-m\leq 4\Leftrightarrow -1\leq -m\leq 3\Leftrightarrow -3\leq m\leq 1$. Οπότε κυκλώνουμε το δ.

Άσκηση 3η. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0,\ \lambda\in R\quad (1)$$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in R$.

iii) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει: $(x_1-2)\cdot(x_2-2)=-4$

iv) Να σχηματίσετε μία εξίσωση που έχει ρίζες τις $\rho_1=\frac{1}{x_1+2}$ και $\rho_2=\frac{1}{x_2+2}$, όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) με $x_1,x_2\neq -2$.

Λύση. i) $\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot\left[-(\lambda^2+5)\right]=5(\lambda^2+4)$

ii) Αφού $\Delta>0$ για κάθε $\lambda\in R$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

iii) Η σχέση γίνεται: $(x_1-2)(x_2-2)=-4\Leftrightarrow$

$$x_1x_2-2x_1-2x_2+4=-4\Leftrightarrow$$

$$x_1x_2-2(x_1+x_2)+8=0\underset{P=x_1x_2=-(\lambda^2+5)}{\overset{\Sigma=x_1+x_2=\lambda}{\Leftrightarrow}}$$

$$-(\lambda^2+5)-2\lambda+8=0\Leftrightarrow -\lambda^2-2\lambda+3=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda^2+2\lambda-3=0\Leftrightarrow\lambda^2+2\lambda+1=4\Leftrightarrow(\lambda+1)^2=4\Leftrightarrow$$

$\lambda+1=\pm 2\Leftrightarrow\lambda=-3$ ή $\lambda=1$.

iv) Η εξίσωση είναι $x^2-S'x+P'=0$

Αν $x_1=-2$ τότε έχουμε

$$4+2\lambda-(\lambda^2+5)=0\Leftrightarrow -\lambda^2+2\lambda-1=0\Leftrightarrow$$

$(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=1$. Άρα για $\lambda\neq 1$ έχουμε ότι:

$$S'=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}=$$

$$\frac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{-\lambda+4}{-(\lambda^2+5)+2\lambda+4}=$$

$$\frac{-\lambda+4}{-\lambda^2+2\lambda-1}=\frac{\lambda-4}{(\lambda-1)^2}$$

$$P'=\frac{1}{x_1+2}\cdot\frac{1}{x_2+2}=\frac{1}{(x_1+2)\cdot(x_2+2)}=$$

$$\frac{1}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=-\frac{1}{(\lambda-1)^2}.$$

Άρα είναι $x^2-\frac{\lambda-4}{(\lambda-1)^2}x-\frac{1}{(\lambda-1)^2}=0$ με $\lambda\neq 1$

Άσκηση 4η. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:
$$|2x+y|<|x+2y|\Leftrightarrow |x|<|y| \text{ με } y\cdot(x+2y)\neq 0$$

Λύση: Έχουμε ότι: $|2x+y|<|x+2y|\Leftrightarrow$

$|2x+y|^2<|x+2y|^2\Leftrightarrow(2x+y)^2<(x+2y)^2\Leftrightarrow$

$4x^2+4xy+y^2<x^2+4xy+4y^2\Leftrightarrow 3x^2<3y^2\Leftrightarrow$

$x^2<y^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2}<\sqrt{y^2}\Leftrightarrow|x|<|y|$.

Β΄ τρόπος:

$|2x+y|<|x+2y|\Leftrightarrow -x-2y<2x+y<x+2y\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix}-x-2y<2x+y\\ 2x+y<x+2y\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}-3y<3x\\ x<y\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}-y<x\\ x<y\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$-y<x<y\Leftrightarrow|x|<|y|$.

Άσκηση 5η. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο
$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+2x}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση
$$K=\frac{f(3)-f(1)}{\sqrt{f(4)}-2}.$$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $|f(4)\cdot x-1|=|2-f(3)\cdot x|$.

Λύση.

α) Πρέπει και αρκεί $x^2+2x\neq 0\Leftrightarrow$ $x(x+2)\neq 0\Leftrightarrow$ $x\neq 0$ και $x\neq -2$, άρα $A_f=R-\{-2,0\}$ και ο τύπος της γίνεται:

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+2x}=\frac{x(x^2-4)}{x(x+2)}=x-2$$

β) $K=\frac{f(3)-f(1)}{\sqrt{f(4)}-2}=\frac{1-(-1)}{\sqrt{2}-2}=\frac{2}{\sqrt{2}-2}=$

$$\frac{2(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}^2-2^2}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{2-4}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{-2}=-(\sqrt{2}+2)$$

γ) $|f(4)\cdot x-1|=|2-f(3)\cdot x|\Leftrightarrow|2x-1|=|2-x|\Leftrightarrow$

$2x-1=2-x$ ή $2x-1=-2+x\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

Άσκηση 6η. α) Να λυθούν οι ανισώσεις
$$4-|x|>0 \text{ και } |x|-1>0.$$

β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο
$$f(x)=\frac{|x-2|-|3x+4|}{\sqrt{4-|x|}}+\frac{\alpha}{\sqrt{|x|-1}}.$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

γ) Αν το σημείο $A(3,-12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι $\alpha=0$.

δ) Για $\alpha=0$, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση.

α) $4-|x|>0\Leftrightarrow|x|<4\Leftrightarrow -4<x<4$

$|x|-1>0\Leftrightarrow|x|>1\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

β) Πρέπει και αρκεί $\left.\begin{matrix}4-|x|>0\\ |x|-1>0\end{matrix}\right\}\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}\left.\begin{matrix}-4<x<4\\ x<-1 \text{ ή } x>1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$-4<x<-1$ ή $1<x<4$. Άρα $A_f=(-4,-1)\cup(1,4)$.

γ) Αφού το σημείο

$A\in C_f\Leftrightarrow f(3)=-12\Leftrightarrow\frac{1-13}{1}+\frac{\alpha}{1}=-12\Leftrightarrow$

$-12+\alpha=-12\Leftrightarrow\alpha=0$.

δ) Για $\alpha=0$ είναι $f(x)=\frac{|x-2|-|3x+4|}{\sqrt{4-|x|}}$

$f(x)=0\Leftrightarrow|x-2|-|3x+4|=0\Leftrightarrow$

$|3x+4|=|x-2|\Leftrightarrow|3x+4|^2=|x-2|^2\Leftrightarrow$

$(3x+4)^2=(x-2)^2\Leftrightarrow 8x^2+28x+12=0\overset{:4}{\Leftrightarrow}$

$2x^2+7x+3=0\Leftrightarrow x=-3\in A_f$ ή $x=-\frac{1}{2}\notin A_f$.

Άρα $x=-3$.

Άσκηση 7η. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ ορίζεται και κατόπιν να απλοποιήσετε την παράσταση
$$K=\frac{2x+\sqrt{16x}+6}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2.$$

β) Να λυθεί η εξίσωση $K=4$

Λύση: α) Πρέπει και αρκεί

$$\left.\begin{matrix}x\geq 0\\ x+2\sqrt{x}-3\neq 0\\ \sqrt{x}-1\neq 0\\ \sqrt{x}+3\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\geq 0\\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)\neq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$\left.\begin{matrix}x\geq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι

$x+2\sqrt{x}-3=x-\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)$,

άρα η παράσταση γίνεται:

$$K=\frac{2x+\sqrt{16x}+6}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2=$$

$$=\frac{2x+4\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}+\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+$$

$$+\frac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}-\frac{2(x+2\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=$$

$$=\frac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{(\sqrt{x}+1)\cancel{(\sqrt{x}+3)}}{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+3)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x-1}$$

β) $K=4\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x-1}=4\Leftrightarrow(\sqrt{x}+1)^2=4x-4\Leftrightarrow$ $x+2\sqrt{x}+1=4x-4\Leftrightarrow 3x-2\sqrt{x}-5=0\Leftrightarrow$ $3(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-5=0\overset{\Delta=64}{\Leftrightarrow}\sqrt{x}=\frac{5}{3}$ ή $\sqrt{x}=-1\Leftrightarrow$

$\sqrt{x}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow x=\frac{25}{9}$.

Άσκηση 8η. **Δίνονται οι εξισώσεις $x^2+\alpha x+\beta=0$ (I) και $x^2+\gamma x+\delta=0$ (II) $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισχύουν οι σχέσεις: $(\beta^2+2\beta+10)(\gamma^2+6\gamma+13)=36$ (1)**

$\left|(\alpha+4)^{2022}-\alpha^{2022}\right|+(\alpha+\delta+7)^4=0$ (2) τότε:

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, δ.

β. Αν $\alpha=-2,\ \beta=-1,\ \gamma=-3,\ \delta=-5$, να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις εξισώσεις (I), (II) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

γ. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (I) να υπολογίσετε (χωρίς να βρείτε τις x_1, x_2) τις παραστάσεις: i) $A=x_1^6+x_2^6$ ii) $B=x_2^3-4x_2^2+3x_2+2$

iii) $\Gamma=\frac{2x_1^2-3x_1x_2^2+2x_2^2-3x_1^2x_2}{4x_1^3-5x_1x_2+4x_2^3}$

δ) Αν επιπλέον x_3 και x_4 οι ρίζες της εξίσωσης (II), να κατασκευασθεί η εξίσωση με ρίζες τις $\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_4}$ και $\frac{x_1}{x_4}+\frac{x_2}{x_3}$.

Λύση: α) Έχουμε ότι $\beta^2+2\beta+10=(\beta+1)^2+9\geq 9$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\beta=-1$. Αναλόγως $\gamma^2+6\gamma+13=(\gamma+3)^2+4\geq 4$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\gamma=-3$. Άρα, $(\beta^2+2\beta+10)(\gamma^2+6\gamma+13)\geq 36$ όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\beta=-1$ και $\gamma=-3$.

Από την σχέση (2) έχουμε ότι:

$(2)\Leftrightarrow\left((\alpha+4)^{2022}=\alpha^{2022}\text{ και }\alpha+\delta+7=0\right)\Leftrightarrow$

$\left(|\alpha+4|=|\alpha|\text{ και }\alpha+\delta+7=0\right)\Leftrightarrow$

$(\alpha=-2\text{ και }\delta=-5)$.

β) Για τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ έχουμε ότι $x^2-2x-1=0$ (I) και $x^2-3x-5=0$ (II) όπου $\Delta_1=8>0$ και $\Delta_2=29>0$ οι διακρίνουσες των εξισώσεων (I), (II) αντίστοιχα. Άρα κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Από τους τύπους του Vieta για την εξίσωση (I) προκύπτει ότι: $S_1=x_1+x_2=-\frac{-2}{1}=2$ και $P_1=x_1x_2=\frac{-1}{1}=-1$.

i) $A=(x_1^3)^2+(x_2^3)^2=(x_1^3+x_2^3)^2-2(x_1x_2)^3=$

$=\left[(x_1+x_2)\cdot\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)\right]^2-2(x_1x_2)^3=$

$\left[S_1(S_1^2-3P_1)\right]^2-2P_1^3=\ldots=198$

ii) $B=x_2^3-4x_2^2+3x_2+2=x_2^2x_2-4x_2x_2+3x_2+2$

$=x_2^2\left(-\frac{1}{x_1}\right)-4x_2\left(-\frac{1}{x_1}\right)+3\left(-\frac{1}{x_1}\right)+2=$

$\frac{-x_2^2+4x_2-3+2x_1}{x_1}=\frac{-x_2^2+4x_2-3+2(2-x_2)}{x_1}=$

$\frac{-(x_2^2-2x_2-1)}{x_1}\overset{(1)}{=}0$

iii) $\Gamma=\frac{2x_1^2-3x_1x_2^2+2x_2^2-3x_1^2x_2}{4x_1^3-5x_1x_2+4x_2^3}=$

$\frac{2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-3x_1x_2(x_1+x_2)}{4[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)]-5x_1x_2}=$

$\frac{2(S_1^2-2P_1)-3P_1S_1}{4(S_1^3-3P_1S_1)-5P_1}=\ldots=\frac{18}{61}$

δ) Από τους τύπους του Vieta για την εξίσωση (II) προκύπτει ότι $S_2=x_3+x_4=-\frac{-3}{1}=3$ και

$P_2=x_3x_4=\frac{-5}{1}=-5$. Η ζητούμενη εξίσωση θα έχει την μορφή $x^2-S_3x+P_3=0$, όπου S_3, P_3 το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών που δίνονται. Έτσι έχουμε ότι $S_3=(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_4})+(\frac{x_1}{x_4}+\frac{x_2}{x_3})=$

$\frac{x_1+x_2}{x_3}+\frac{x_1+x_2}{x_4}=(x_1+x_2)(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4})=$

$\frac{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}{x_3x_4}=\frac{S_1S_2}{P_2}=\frac{-6}{5}$ και

$P_3=(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_4})(\frac{x_1}{x_4}+\frac{x_2}{x_3})=\frac{x_1^2}{x_3x_4}+\frac{x_1x_2}{x_3^2}+\frac{x_1x_2}{x_4^2}+\frac{x_2^2}{x_3x_4}=$

$\frac{1}{x_3x_4}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+x_1x_2(\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2})=$

$=\frac{[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]}{x_3x_4}+x_1x_2\frac{[(x_3+x_4)^2-2x_3x_4]}{(x_3x_4)^2}=$

$=\frac{S_1^2-2P_1}{P_2}+P_1\frac{S_2^2-2P_2}{P_2^2}=...=\frac{-49}{25}$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2+\frac{6}{5}x-\frac{49}{25}=0$.

Άσκηση 9η. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x+\beta$ και $g(x)=|x|$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α) Αν $f(0)=-5$ και $f(f(0))=-15$, να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-5$.

β) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)f(\kappa-x)\geq 0$ να αποτελούν διάστημα μήκους 2.

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των C_f και C_g, καθώς και τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x'x και y'y.

δ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g. Αν Α το σημείο τομής των C_f, C_g, Β το σημείο τομής της C_f με τον x'x και Ο η αρχή των αξόνων, τότε:

ε) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το Α και χωρίζει το τρίγωνο ΟΑΒ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

ζ) Να βρεθεί σημείο Ε του άξονα x'x για το οποίο το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΕ.

Λύση: α) Αφού $f(0)=-5$ και $f(f(0))=-15$ έπεται αντιστοίχως ότι $f(0)=-5\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\beta=-5$ και $f(f(0))=-15\Leftrightarrow -5\alpha-5=-15\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\alpha=2$.

Άρα $f(x)=2x-5,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Η δοσμένη ανίσωση γράφεται ως $f(x)f(\kappa-x)\geq 0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow(2x-5)(2x-2\kappa+5)\leq 0$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I) Αν $\kappa=5$ τότε $x=\frac{5}{2}$ **II)** Αν $\kappa<5$ τότε έχουμε

$(2x-5)(2x-2\kappa+5)\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[\kappa-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$.

Αφού οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν σε διάστημα μήκους 2, έπεται ότι: $\frac{5}{2}-(\kappa-\frac{5}{2})=2\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\kappa=3$

III) Αν $\kappa>5$ τότε έχουμε

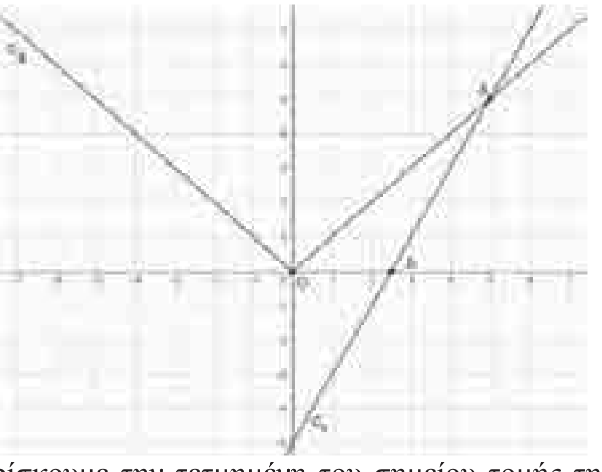
$(2x-5)(2x-2\kappa+5)\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{5}{2},\kappa-\frac{5}{2}\right]$.

Ομοίως με την περίπτωση (I) έπεται ότι:

$(\kappa-\frac{5}{2})-\frac{5}{2}=2\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\kappa=7$

γ) Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f, C_g λύνοντας την εξίσωση $f(x)=g(x)$, όπου $x\in\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$, (γιατί;) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-5=|x|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=5$ ή $x=\frac{5}{3})$, όπου η λύση $x=\frac{5}{3}$ απορρίπτεται. Το μοναδικό σημείο τομής των C_f, C_g είναι το $A(5,5)$.



Βρίσκουμε την τετμημένη του σημείου τομής της C_f με τον άξονα x'x λύνοντας την εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow 2x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$. Προκύπτει ότι η C_f τέμνει τον x'x στο $B\left(\frac{5}{2},0\right)$. Επιπλέον η C_f τέμνει τον y'y στο $\Gamma(0,f(0))$ δηλαδή το $\Gamma(0,-5)$

δ)

ε) Αναζητούμε σημείο $\Delta(x_\Delta,0)$ στον άξονα x'x, που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Β. Άρα

$0<x_\Delta<\frac{5}{2}$ Πρέπει (1): $E_{OA\Delta}=E_{AB\Delta}$, άρα:

$(1)\Leftrightarrow\frac{5(O\Delta)}{2}=\frac{5(B\Delta)}{2}\Leftrightarrow x_\Delta=\frac{5}{2}-x_\Delta\Leftrightarrow x_\Delta=\frac{5}{4}$

Τελικά $\Delta(\frac{5}{4},0)$. Η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι της μορφής $y=\lambda_{A\Delta}x+\beta$, όπου $\lambda_{A\Delta}=\frac{5-0}{5-\frac{5}{4}}=...=\frac{4}{3}$

Επίσης η (ε) διέρχεται από το σημείο Α, οπότε:

$5=\frac{4}{3}5+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{-5}{3}$. Τελικά, $(\varepsilon): y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$.

ζ) Αναζητούμε σημείο $E(x_E,0)$ δεξιά του σημείου B (άρα $x_E > \frac{5}{2}$) για το οποίο ισχύει ότι: $(AB)=(AE)$.

Από τον τύπο απόστασης σημείων έχουμε ότι:

$$\sqrt{\left(5-\frac{5}{2}\right)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(x_E-5)^2+(5-0)^2} \Leftrightarrow$$

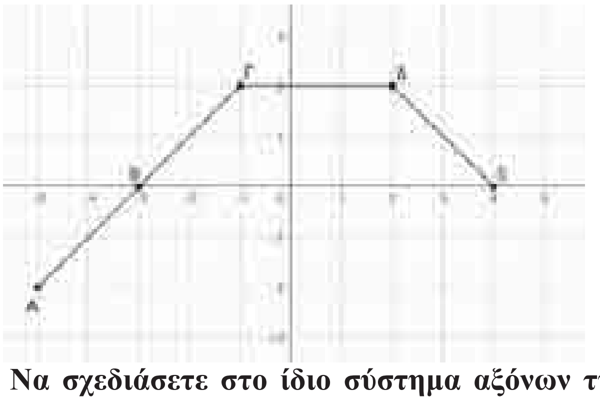
$$\left(5-\frac{5}{2}\right)^2+(5-0)^2=(x_E-5)^2+(5-0)^2 \Leftrightarrow$$

$|x_E-5|=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(x_E=\frac{15}{2} \text{ ή } x_E=\frac{5}{2}\right)$. Αφού η λύση $x_E=\frac{5}{2}$ απορρίπτεται (γιατί;), έπεται ότι $E(\frac{15}{2},0)$.

Άσκηση 10η. Θεωρούμε την συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τις ευθείς (ε_1): $y=\frac{5}{3}x+1$ και (ε_2): $y=\frac{-7}{4}x+\frac{1}{4}$.



γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2) του ερωτήματος (β).

δ) Να λυθεί γραφικά η ανίσωση
$20x+1 \le 12f(x)-3 \le -21x$

Λύση: α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τμήματα ευθειών. Επομένως, η εξίσωση της f σε καθένα από τα διαστήματα $[-5,-1]$, $(-1,2)$, $[2,4]$ είναι της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$. Αν $x\in[-5,-1]$, τότε η ευθεία $y=\alpha_1 x+\beta_1$ διέρχεται από τα σημεία $A(-5,-2)$ και $\Gamma(-1,2)$ οπότε ισχύουν τα εξής: $\alpha_1=\frac{2-(-2)}{-1-(-5)}=1$ και $2=1(-1)+\beta_1 \Leftrightarrow \beta_1=3$. Άρα όταν $x\in[-5,-1]$ είναι $y=x+3$, δηλαδή η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=x+3$. Αν $x\in(-1,2)$ η συνάρτηση f είναι σταθερή με τύπο $f(x)=2$

Αν $x\in[2,4]$ (όμοια με την περίπτωση για $x\in[-5,-1]$) προκύπτει ότι $f(x)=-x+4$. Τελικά , ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 , & -5\le x\le -1 \\ 2 , & -1<x<2 \\ -x+4 , & 2\le x\le 4 \end{cases}$$

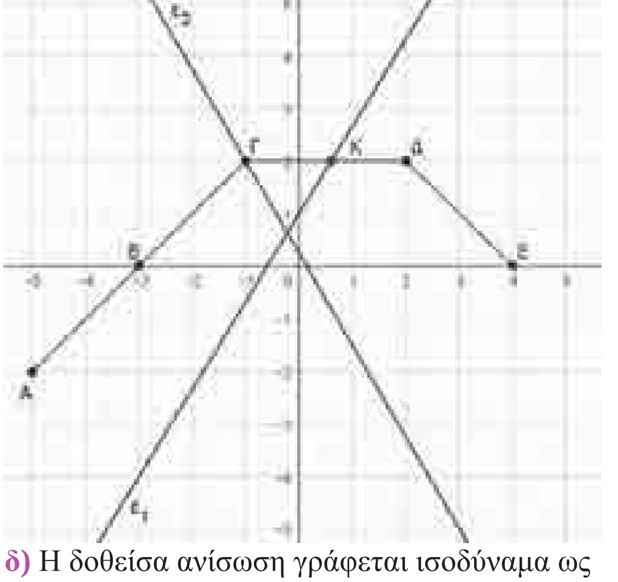
β) Θα βρούμε τα σημεία τομής της C_f με την (ε_1). Έχουμε ότι:

Αν $x\in[-5,-1]$, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=\frac{5}{3}x+1$.

Άρα $x+3=\frac{5}{3}x+1 \Leftrightarrow x=3$ όπου η ρίζα $x=3$ απορρίπτεται αφού $3\notin[-5,-1]$. Αν $x\in(-1,2)$, λύνουμε την εξίσωση $2=\frac{5}{3}x+1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$. Άρα προκύπτει το σημείο το μής $K\left(\frac{3}{5},2\right)$

Αν $x\in[2,4]$, λύνουμε την εξίσωση $-x+4=\frac{5}{3}x+1 \Leftrightarrow x=\frac{9}{8}$, όπου η ρίζα $x=\frac{9}{8}$ απορρίπτεται, αφού $\frac{9}{8}\notin[2,4]$. Όμοια με παραπάνω προκύπτει ότι το σημείο τομής της C_f με την (ε_2) είναι το $\Gamma(-1,2)$

γ)



δ) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα ως $-21x\le 12f(x)-3\le 20x+1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$$\frac{-7}{4}x+\frac{1}{4}\le f(x)\le \frac{5}{3}x+1.$$

Οι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται «κάτω» από την (ε_1): $y=\frac{5}{3}x+1$ και «πάνω» από την (ε_2): $y=\frac{-7}{4}x+\frac{1}{4}$. Όπως προκύπτει από το σχήμα του ερωτήματος (γ) η ανίσωση αληθεύει για: $x \in \left[\frac{3}{5}, 4\right]$.

Άσκηση 11η. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4,…χωρίζονται σε ομάδες χωρίς κοινά στοιχεία, έτσι ώστε το τελευταίο στοιχείο της κάθε ομάδας να είναι το μικρότερο δυνατόν τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

α) Ποιο είναι το πρώτο στοιχείο της ν-οστής ομάδας και ποιο το τελευταίο;

β) Πόσα στοιχεία έχει η ν-οστή ομάδα;

γ) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί που δηλώνουν το πλήθος της 1ης, της 2ης,…, της ν-οστής ομάδας είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

δ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S των στοιχείων της ν-οστής ομάδας είναι

$$\mathbf{S = (2\nu - 1)(\nu^2 - \nu + 1)}$$

Λύση: α) Η πρώτη ομάδα αποτελείται από τον 1,αφού $1^2 = 1$. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τους αριθμούς 2, 3, 4 αφού $2^2 = 4$. Η τρίτη ομάδα αποτελείται από τους αριθμούς 5, 6, 7, 8, 9 αφού $3^2 = 9$. Παρατηρούμε ότι η ν-1 ομάδα έχει ως τελευταίο στοιχείο το $(\nu-1)^2$ και έτσι η ν-οστή ομάδα αρχίζει από $(\nu-1)^2+1$, με τελευταίο στοιχείο το ν^2.

β) Οι αριθμοί $(\nu-1)^2+1, (\nu-1)^2+2, \ldots, \nu^2$ είναι μ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = (\nu-1)^2+1$ και διαφορά $\omega = 1$. Έτσι: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\mu-1)\omega \Leftrightarrow \nu^2 = (\nu-1)^2 + 1 + (\mu-1) \Leftrightarrow$ $\mu = 2\nu - 1$.

γ) Για την ακολουθία $\beta_\nu = 2\nu - 1$, η οποία δηλώνει το πλήθος των όρων της ν-οστής ομάδας ισχύει ότι: $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = [2(\nu+1)-1] - (2\nu-1) = 2$. Άρα, η (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = 1$ και διαφορά $\omega' = 2$.

δ) Το άθροισμα των $2\nu-1$ όρων της ν-οστής ομάδας είναι: $S = \frac{2\nu-1}{2}\left\{2\left[(\nu-1)^2+1\right] + (2\nu-1) - 1\right\} = \ldots =$ $(2\nu-1)(\nu^2-\nu+1)$

Άσκηση 12η. Για τους πληθυσμούς δύο πόλεων Α, Β , οι οποίοι μεταβάλλονται γραμμικά, γνωρίζουμε ότι:

Ι) Το έτος 2015 οι πληθυσμοί των πόλεων Α,Β ήταν 6.200 και 13.800 κάτοικοι αντιστοίχως.

ΙΙ) Το έτος 2020 οι πληθυσμοί των πόλεων Α,Β ήταν 8.100 και 12.250 κάτοικοι αντιστοίχως.

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις P_A και P_B που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου (έτους), τους πληθυσμούς των δύο πόλεων Α, Β.

β) Να βρείτε την πληθυσμιακή διαφορά των πόλεων Α, Β το έτος 2022.

γ) Να παραστήσετε σε κοινό σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων P_A και P_B.

δ) Να εκτιμηθεί ο χρόνος κατά τον οποίο οι πληθυσμοί των δύο πόλεων θα είναι ίσοι. Τι παρατηρείται;

Λύση: α) Οι πληθυσμοί των πόλεων Α,Β μεταβάλλονται γραμμικά, επομένως οι συναρτήσεις P_A και P_B θα είναι της μορφής $P_A(t) = \alpha t + \beta, P_B(t) = \gamma t + \delta$

Αφού η καταγραφή των πληθυσμών πραγματοποιήθηκε και για τις δύο πόλεις Α, Β το 2015, θα θεωρήσουμε ως «αρχικούς» πληθυσμούς, εκείνους του έτους 2015. Θα έχουμε ότι $P_A(0) = 6200$ (1) και $P_B(0) = 13800$ (2). Οι κλίσεις α, γ θα είναι ίσες με τους λόγους μεταβολής του πληθυσμού κάθε πόλης για το διάστημα ετών 2015 μέχρι 2020.

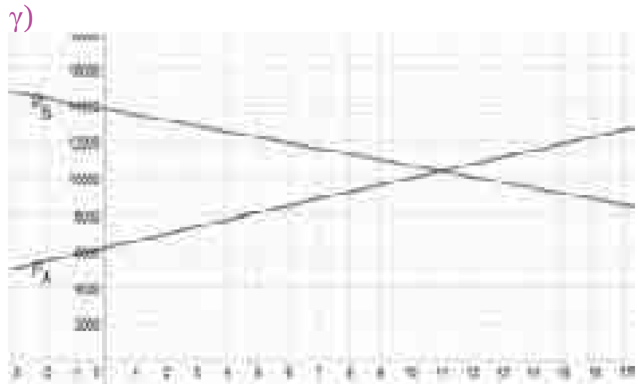
Άρα έχουμε ότι: $\alpha = \frac{8100-6200}{2020-2015} = 380$,

$\gamma = \frac{12250-13800}{2020-2015} = -310$ Βάσει των παραπάνω προκύπτει ότι: $P_A(t) = 6200 + 380t$, $P_B(t) = 13800 - 310t$

β) Υπολογίζουμε τους πληθυσμούς των πόλεων Α, Β το έτος 2022 (7 χρόνια ύστερα του 2015) και έχουμε: $P_A(7) = 8860$ και $P_B(7) = 11630$.

Άρα, $P_B(7) - P_A(7) = 2770$.

γ)



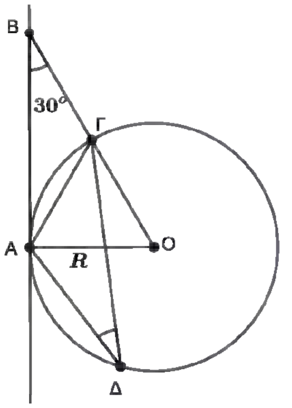
δ) Θα λύσουμε την εξίσωση $P_A(t) = P_B(t)$ και έχουμε $P_A(t) = P_B(t) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t \simeq 11{,}01$. Έπεται ότι οι πληθυσμοί των πόλεων Α, Β θα είναι ίσοι στις αρχές του 2026 (περίπου 11 χρόνια μετά το έτος 2015). Παρατηρούμε ότι η τιμή $t \simeq 11{,}01$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής των ευθειών $y = 6200 + 380t$, $y = 13800 - 310t$, όπως αυτές αναπαρίστανται στο γράφημα του ερωτήματος (γ).

Επαναληπτικές Ασκήσεις στη Γεωμετρία

Παρουσιάζουμε μια σειρά επαναληπτικών θεμάτων σε όλη της ύλη για την **καλύτερη προετοιμασία** για τις εξετάσεις των μαθητών της Ά τάξης για το μάθημα της γεωμετρίας. Η εφαρμογή της τράπεζας θεμάτων για το μάθημα της γεωμετρίας δίνει το **έναυσμα** για την αναβάθμιση του μαθήματος.

Καρδαμίτσης Σπύρος

Άσκηση 1η: Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,R) στο σημείο του Α, η γωνία $\hat{B}$ είναι 30^o και η γωνία $Α\hat{Δ}Γ$ είνει εγγεγραμμένη στο τόξο ΑΓ.



α) Να αποδείξετε ότι ΟΒ=2R.

β) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΟΑΒ.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$.

Λύση: α) Επειδή η εφαπτομένη ΑΒ του κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα του ΟΑ=R, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Α. Η γωνία $\hat{B}=30^o$, επομένως η απέναντι πλευρά του ορθογωνίου ΟΑΒ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσάς του ΟΒ, δηλαδή $ΟΑ=\frac{ΟΒ}{2}$ ή $ΟΒ=2ΟΑ$ ή $ΟΒ=2R$.

β) Είναι $ΟΑ=ΟΓ=R$ ως ακτίνες του κύκλου και $ΒΓ=ΟΒ-ΟΓ=2R-R=R$, άρα $ΒΓ=ΟΓ$ δηλαδή η ΑΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΟΑΒ.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ οι οξείες γωνίες του $\hat{B}$ και $Α\hat{Ο}Γ$ είναι συμπληρωματικές, άρα

$\hat{B}+Α\hat{Ο}Γ=90^o$ ή $30^o+Α\hat{Ο}Γ=90^o$ ή $Α\hat{Ο}Γ=60^o$

Η γωνία $Α\hat{Ο}Γ$ είναι επίκεντρη στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$ με αντίστοιχη εγγεγραμμένη την $Α\hat{Δ}Γ$, επομένως

$$Α\hat{Δ}Γ=\frac{1}{2}\cdot Α\hat{Ο}Γ=\frac{1}{2}\cdot 60^o=30^o.$$

Άσκηση 2η: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το μέσο Ε της πλευράς ΑΓ, φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο, που τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ στα Ζ, Η αντίστοιχα. Από το σημείο Γ φέρνουμε την ΓΡ κάθετη στη ΒΔ που τέμνει την ΑΒ στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

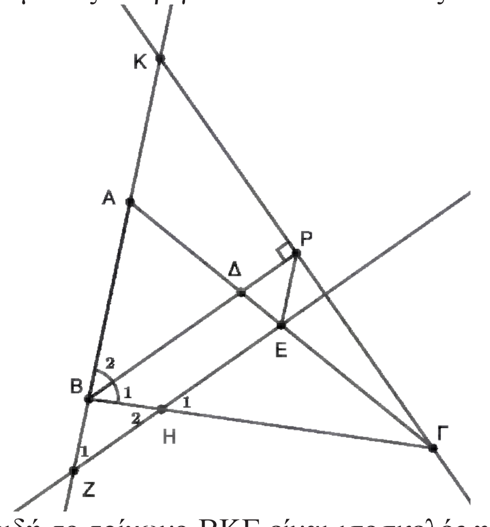
β) Το τμήμα $ΡΕ=//\frac{ΑΚ}{2}$

γ) Το ΖΒΡΕ είναι παραλληλόγραμμο.

δ) ΑΚ=2ΖΒ

ε) Το τρίγωνο ΒΖΗ είναι ισοσκελές.

Λύση: α) Στο τρίγωνο ΒΚΓ η διχοτόμος του ΒΡ είναι και ύψος του εφόσον η ΓΡ είναι κάθετη στην ΒΔ, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Επειδή το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές η διχοτόμος του ΒΡ είναι και διάμεσός του. Στο τρίγωνο ΓΑΚ είναι το Ε μέσο της πλευράς του ΑΓ και το Ρ το μέσον της πλευράς του ΚΓ, επομένως $ΡΕ=//\frac{ΑΚ}{2}$.

γ) Το τετράπλευρο ΖΒΡΕ έχει ΒΡ//ΖΕ από κατασκευή και $ΡΕ=//\frac{ΑΚ}{2}//ΒΖ$, δηλαδή οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Από το (β) ερώτημα είναι $ΡΕ=//\frac{ΑΚ}{2}$ και από το παραλληλόγραμμο ΖΒΡΕ είναι ΖΒ = ΡΕ. Επομένως έχουμε: $ΖΒ=//\frac{ΑΚ}{2}\Rightarrow ΑΚ=2ΖΒ$.

ε) Είναι $\hat{Z}_1=\hat{B}_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΖΕ, ΒΔ που τέμνονται από την ΒΔ. Ακόμα $\hat{B}_1=\hat{H}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖΕ, ΒΔ που τέμνονται από την ΒΔ. Αλλά $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, άρα $\hat{Z}_1=\hat{B}_2$, επομένως το τρίγωνο ΒΖΗ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 3η: Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και προεκτείνουμε την ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ = ΒΓ. Αν Κ είναι το μέσο του

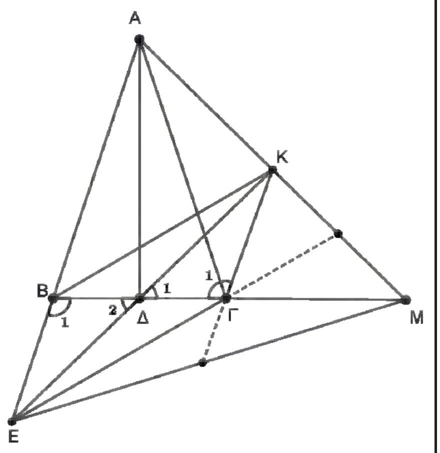
ΑΜ και η ΔΚ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Ε, να δείξετε:

α) Το ΒΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $E\Delta = \dfrac{AM}{2}$.

γ) Το σημείο Γ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΚΕΜ.

Λύση: α) Στο τρίγωνο ΑΒΜ τα σημεία Κ και Γ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΜ και ΒΜ, τότε είναι $K\Gamma = // \dfrac{AB}{2}$ ή $K\Gamma // AB$. Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΔΚΓ είναι ίσα γιατί $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ (ως κατακορυφήν), ΒΔ=ΔΓ (γιατί στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος του ΑΔ είναι και διάμεσός του) και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (ως εντός εναλλάξ), αφού ΚΓ//ΑΒ, άρα ΔΕ=ΔΚ. Στο τετράπλευρο ΒΚΓΕ είναι ΔΕ=ΔΚ και ΒΔ=ΔΓ δηλαδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ η ΔΚ είναι διάμεσος, τότε $\Delta K = \dfrac{AM}{2}$. Αλλά ΔΚ=ΕΔ, άρα $E\Delta = \dfrac{AM}{2}$.

γ) Από το παραλληλόγραμμο ΒΚΓΕ έχουμε ΔΚ=ΕΔ, άρα στο τρίγωνο ΚΕΜ η ΜΔ είναι διάμεσος και ΜΓ=ΒΓ=2ΓΔ. Συνεπώς το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΚΕΜ.

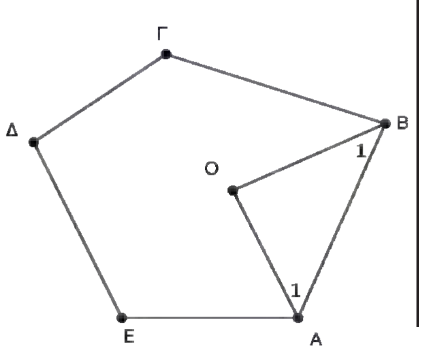
Άσκηση 4η: Δίνεται κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, όπου οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β τέμνονται στο Ο και οι υπόλοιπες γωνίες Γ, Δ και Ε είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4.

α) Να υπολογίσετε σε μοίρες το άθροισμα των γωνιών του κυρτού πενταγώνου.

β) Αν οι γωνίες Α και Β είναι παραπληρωματικές να βρείτε σε μοίρες το μέτρο των γωνιών Γ, Δ και Ε.

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της κυρτής γωνίας ΑΟΒ.

Λύση: α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές ισούται με 2·ν–4 ορθές. Έτσι στο πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι: 2·5–4 = 10–4 = 6 ορθές ή $6 \cdot 90^0 = 54\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^0$.



β) Οι γωνίες Α και Β είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = 180^o$, επομένως το άθροισμα των γωνιών $\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^o - 180^o = 360^o$. Αφού οι γωνίες Γ, Δ και Ε είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4, ισχύει: $\dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = \dfrac{\hat{\Delta}}{3} = \dfrac{\hat{E}}{4} = \dfrac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E}}{2+3+4} = \dfrac{360^o}{9} = 40^o$

τότε $\dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = 40^o \Rightarrow \hat{\Gamma} = 80^o$ και ανάλογα $\hat{\Delta} = 120^o$, $\hat{E} = 160^o$.

γ) Οι ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα: $\hat{A}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \dfrac{\hat{B}}{2}$.

Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + A\hat{O}B = 180^o \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + A\hat{O}B = 180^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B = 180^o - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 180^o - \frac{180^o}{2} = 90^o.$$

Άσκηση 5η: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα σημεία επαφής του κύκλου με τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα και ΕΡ η κάθετη στην ΖΔ, να αποδείξετε ότι:

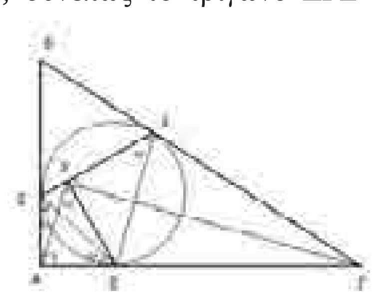
α) Η γωνία ΑΡΕ είναι 45°.

β) Η ευθεία ΡΓ είναι μεσοκάθετος της ΔΕ.

γ) Το τρίγωνο ΑΡΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση: α) Τα ΑΖ και ΑΕ είναι εφαπτόμενα στο κύκλο τμήματα, συνεπώς είναι ίσα, άρα το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Το τετράπλευρο ΑΕΡΖ είναι εγγράψιμο γιατί $\hat{A} + \hat{P} = 180^o$ άρα $A\hat{E}Z = A\hat{Z}E = A\hat{P}E = \hat{\omega} = 45^o$.

β) Είναι $A\hat{E}Z = E\hat{\Delta}Z = \hat{\omega} = 45^o$ (από θεώρημα χορδής και εφαπτομένης), συνεπώς το τρίγωνο ΔΡΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα ΡΕ=ΡΔ. Είναι και ΓΕ=ΓΔ γιατί είναι εφαπτόμενα τμήματα άρα τα σημεία Ρ και Γ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΕΔ, συνεπώς η ευθεία ΡΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΕΔ.



γ) Επειδή το τρίγωνο ΔΡΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές η ΡΓ ως μεσοκάθετος είναι και διχοτόμος της γωνίας $E\hat{P}\Delta$ άρα $E\hat{P}\Gamma = 45^o$.

Τάξη: Β΄

Λογαριθμικές Εξισώσεις

Διονύσης Φ. Αρβανιτάκης, Παράρτημα **Ε.Μ.Ε. Ηλείας**

Παραθέτουμε ανά κατηγορίες μορφές εκθετικών εξισώσεων.

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

ΜΟΡΦΗ 1Η: $\alpha^{f(x)} = \beta$

1. $\mathbf{e^{x+1} = 3}$

Λύση: $x+1=\ln 3 \Leftrightarrow x=-1+\ln 3$.

2. $\mathbf{5^{x+1} = 3^x}$

Λύση: $(x-1)\ln 5 = x\ln 3 \Leftrightarrow x\ln 5 - \ln 5 = x\ln 3 \Leftrightarrow$
$x\ln 5 - x\ln 3 = \ln 5 \Leftrightarrow (\ln 5 - \ln 3)x = \ln 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{\ln 5 - \ln 3}$.

3. $\mathbf{2^{x-1} + 5^x = 6\cdot 5^{x-1} - 2^{x+1}}$

Λύση: $\dfrac{2^x}{2} + 5^x = 6\cdot\dfrac{5^x}{5} - 2\cdot 2^x \Leftrightarrow$
$5\cdot 2^x + 10\cdot 5^x = 12\cdot 5^x - 20\cdot 2^x \Leftrightarrow$
$25\cdot 2^x = 2\cdot 5^x \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{5^x} = \dfrac{2}{25} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \dfrac{2}{5^2} \Leftrightarrow$
$\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \ln\left(\dfrac{2}{5^2}\right) \Leftrightarrow (\ln 2 - \ln 5)x = \ln 2 - 2\ln 5 \Leftrightarrow$
$x = \dfrac{\ln 2 - 2\ln 5}{\ln 2 - \ln 5}$.

4. $\mathbf{e^{e^x} = 2}$

Λύση: $e^x = \ln 2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x = \ln(\ln 2)$. (1): $\ln 2 > 0$.

ΜΟΡΦΗ 2Η: $\kappa\cdot\ln(\alpha\cdot x+\beta)+\lambda = 0$ ή $\kappa\cdot\log(\alpha\cdot x+\beta)+\lambda = 0$

5. $\mathbf{2\ln x - 3 = 0}$

Λύση: $2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$.

6. $\mathbf{\ln x - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2 = 0}$

Λύση: $\ln x - \ln x^{-1} = 2 \Leftrightarrow \ln x + \ln x = 2 \Leftrightarrow$
$2\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

7. $\mathbf{\ln x + \log x = 0}$

Λύση: $(\ln 10)\cdot\ln x + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x + \dfrac{\ln x}{\ln 10} = 0 \Leftrightarrow$
$(\ln 10 + 1)\cdot\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

8. $\mathbf{2\log(2x-1) - 1 = 0}$

Λύση: $2\log(2x-1) = 1 \Leftrightarrow \log(2x-1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$2x - 1 = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x = 1+\sqrt{10} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{10}}{2}$.

9. $\mathbf{e^{\log x} = 1}$

Λύση: $\log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

10. $\mathbf{\eta\mu(\ln x) = 0}$

Λύση: $\ln x = \kappa\pi \Leftrightarrow x = e^{\kappa\pi}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

11. $\mathbf{2^{\ln x} = 3}$

Λύση: $\ln x\cdot\ln 2 = \ln 3 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$x = \ln\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right)$. (1): $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} > 0$.

12. $\mathbf{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log x - 3} = 4^{\log x}}$

Λύση: $2^{-\log x + 3} = 2^{2\log x} \Leftrightarrow -\log x + 3 = 2\log x \Leftrightarrow$
$-3\log x = -3 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$.

ΜΟΡΦΗ 3Η: $f(\ln x) = 0$ ή $f(\log x) = 0$

Ισχύει: $(\log x)^\kappa = \log^\kappa x$, $(\ln x)^\kappa = \ln^\kappa x$, $\kappa\in\mathbb{Z}$. Στις μορφές αυτές αντικαθιστούμε την λογαριθμική συνάρτηση με βοηθητικό άγνωστο και αναγόμαστε σε επίλυση γνωστών μορφών εξισώσεων.

13. $\mathbf{4\ln^2 x - 1 = 0}$

Λύση: Πρέπει $x>0$. Θέτουμε $\ln x = y$. Άρα η εξίσωση γίνεται $4y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2y-1)(2y+1) = 0 \Leftrightarrow$
$y = \dfrac{1}{2}$ ή $y = -\dfrac{1}{2}$. Συνεπώς:

- $\ln x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
- $\ln x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

14. $\mathbf{\ln^2 x - \ln x^3 - 4 = 0}$

Λύση: Πρέπει $x>0$. Διαμορφώνουμε την εξίσωση: $\ln^2 x - 3\ln x - 4 = 0$. Θέτουμε $\ln x = y$. Άρα η εξίσωση γίνεται $y^2 - 3y - 4 = 0$. Έχουμε: $\Delta = 25$, άρα $y = 4$ ή $y = -1$. Συνεπώς:

- $\ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$.
- $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

15. $\mathbf{6(\log x + 1)^2 + 6\log^2 x = 13\cdot\log x\cdot(\log x + 1)}$

Λύση: Πρέπει $x>0$. Θέτουμε $\log x = y$. Άρα

$6(y+1)^2+6y^2=13y(y+1) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$

$-y^2-y+6=0 \Leftrightarrow y^2+y-6=0$.

Έχουμε: $\Delta=25$, άρα $y=2$ ή $y=-3$. Συνεπώς:

- $\log x=2 \Leftrightarrow x=10^2=100$.
- $\log x=-3 \Leftrightarrow x=10^{-3}=\dfrac{1}{1000}$.

16. $\mathbf{\log^4 x+2\cdot\log x = \log^2 x\cdot\log\left(10x^2\right)}$

Λύση: Πρέπει $x>0$. Διαμορφώνουμε την εξίσωση:

$\log^4 x+2\cdot\log x=\log^2 x\cdot\left(\log 10+\log x^2\right) \Leftrightarrow$

$\log^4 x+2\cdot\log x=\log^2 x\cdot\left(1+2\log x\right)$.

Θέτουμε $\log x = y$. Άρα η εξίσωση γίνεται

$$y^4+2y=y^2(1+2y) \Leftrightarrow y^4-2y^3-y^2+2y=0 \Leftrightarrow$$

$$y\left(y^3-2y^2-y+2\right)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή}$$

$$y^3-2y^2-y+2=0 \Leftrightarrow y^2(y-2)-(y-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(y-2)\left(y^2-1\right)=0 \Leftrightarrow y-2=0 \text{ ή}$$

$$y^2-1=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ ή } y=1 \text{ ή } y=-1.$$

Συνεπώς:

- $\log x=0 \Leftrightarrow x=1$.
- $\log x=2 \Leftrightarrow x=10^2=100$.
- $\log x=1 \Leftrightarrow x=10$
- $\log x=-1 \Leftrightarrow x=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$.

17. $\mathbf{4^{\log x}=2^{\log^2 x+1}}$

Λύση: Πρέπει να ισχύει $x>0$. Θέτουμε $\log x = y$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $2^{2y}=2^{y^2+1} \Leftrightarrow 2y=y^2+1 \Leftrightarrow$

$$(y-1)^2=0 \Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1.$$

Συνεπώς: $\log x=1 \Leftrightarrow x=10$.

18. $\mathbf{\dfrac{4}{1-\log^2 x}+\dfrac{\log x+1}{\log x-1}=\dfrac{1}{\log x+1}}$

Λύση: Πρέπει να ισχύουν: $x>0$, $\log x+1\neq 0$ και $1-\log x\neq 0$. Θέτουμε $\log x = y$. Άρα η εξίσωση γίνεται $\dfrac{4}{1-y^2}+\dfrac{y+1}{y-1}=\dfrac{1}{y+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{4}{(1-y)(1+y)}-\frac{y+1}{1-y}=\frac{1}{y+1}.$$

Ε.Κ.Π $=(1-y)(1+y)\neq 0 \Rightarrow 1-y\neq 0$ και $1+y\neq 0 \Leftrightarrow y\neq 1$ και $y\neq -1$. Άρα:

$(1-y)(1+y)\dfrac{4}{(1-y)(1+y)}-(1-y)(1+y)\dfrac{y+1}{1-y}=$

$=(1-y)(1+y)\dfrac{1}{y+1} \Leftrightarrow 4-(1+y)^2=1-y \Leftrightarrow$

$4-1-2y-y^2-1+y=0 \Leftrightarrow -y^2-y+2=0$. Έχουμε $\Delta=9$, άρα $y=-2$ ή $y=1$, απορρίπτεται.

Συνεπώς: $\log x=-2 \Leftrightarrow x=10^{-2}=\dfrac{1}{100}$.

ΜΟΡΦΗ 4Η: $\mathbf{\ln(f(x))=\ln(g(x))}$ ή $\mathbf{\log(f(x))=\log(g(x))}$

Αν $f(x)>0$ και $g(x)>0$, τότε:

$$\ln(f(x))=\ln(g(x)) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

$$\log(f(x))=\log(g(x)) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

Στα πρώτα δύο παραδείγματα κάνουμε επαλήθευση των ριζών που βρίσκουμε. Στα υπόλοιπα την αφήνουμε στον αναγνώστη.

19. $\mathbf{\ln\left(x^3+1\right)=\ln(x+1)}$

Λύση: Πρέπει $x^3+1>0$ και $x+1>0$. Άρα:

$$x^3+1=x+1 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$x=0$, δεκτή ή $x=1$, δεκτή ή $x=-1$, απορρίπτεται, αφού $-1+1=0$.

20. $\mathbf{\dfrac{\ln(4-x)}{\ln x}=1}$

Λύση: Πρέπει $x>0$, $4-x>0$ και $\ln x\neq 0$. Άρα:

$\ln(4-x)=\ln x \Leftrightarrow 4-x=x \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow \mathbf{x=2}$, δεκτή, γιατί $2>0$, $4-2=2>0$ και $\ln 2\neq 0$.

21. $\mathbf{\log x+\log(x-1)=2\cdot\log 2+\log 3}$

Λύση: Πρέπει $x>0$ και $x-1>0$. Άρα:

$\log[x(x-1)]=2\cdot\log\left(2^2\cdot 3\right) \Leftrightarrow x^2-x-12=0$.

$\Delta=49$, άρα $x=4$, δεκτή ή $x=-3$, απορρίπτεται.

22. $\mathbf{\log\left(x^2+7x\right)=1+\log(x+1)}$

Λύση: Πρέπει $x>0$, $x^2+7x>0$ και $x+1>0$.

Άρα: $\log\left(x^2+7x\right)=\log 10+\log(x+1) \Leftrightarrow$

$$\log\left(x^2+7x\right)=\log[10(x+1)] \Leftrightarrow$$

$$x^2+7x=10x+10 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0.$$

$\Delta=49$, άρα $x=5$, δεκτή ή $x=-2$, απορρίπτεται.

23. $\mathbf{\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\ln x}{2}}$

Λύση: Πρέπει $x>0$. Άρα

$2\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)=\ln x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\ln x \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2}{4}=x \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$, απορρίπτεται ή $x=4$, δεκτή.

24. $\mathbf{\log\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)-2\log\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\log 2}$

Λύση: Πρέπει $\frac{x-2}{x-1}>0$ και $\frac{1}{x-1}>0$. Άρα

$$\log\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+\log\left(\frac{1}{x-1}\right)^{-2}=\log 2 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+\log(x-1)^2=\log 2 \Leftrightarrow$$

$$\log\left[\frac{x-2}{x-1}\cdot(x-1)^2\right]=\log 2 \Leftrightarrow$$

$$\log(x^2-3x+2)=\log 2 \Leftrightarrow$$

$x^2-3x+2=2 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow$
$x=0$, απορρίπτεται ή $x=3$, δεκτή.

25. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 2$

Λύση: Πρέπει $\frac{x+1}{x-1}>0$. Άρα:

$\frac{x+1}{x-1}=2 \Leftrightarrow 2x-2=x+1 \Leftrightarrow x=3$, δεκτή.

26. $\ln(1+\eta\mu x)=0$

Λύση: Πρέπει $1+\eta\mu x>0$. Άρα:
$1+\eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, δεκτές.

27. $\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)=\ln x$

Λύση: Πρέπει $x-1\geq 0$ και $x>0$. Άρα:
$3+\sqrt{x-1}=x \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x-3 \overset{x-3\geq 0}{\Leftrightarrow}$
$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^2-7x+10=0$. Έχουμε:
$\Delta=9$, άρα $x=5$, δεκτή ή $x=2$, απορρίπτεται.

28. $\ln(\log x)=0$

Λύση: Πρέπει $x>0$ και $\log x>0$. Άρα:
$\log x=1 \Leftrightarrow x=10$, δεκτή.

29. $\log\left[\log\left(\frac{4x-3}{2-5x}\right)\right]=0$

Λύση: Πρέπει $\log\left(\frac{4x-3}{2-5x}\right)>0$, $\frac{4x-3}{2-5x}>0$ και $2-5x\neq 0$. Άρα: $\log\left(\frac{4x-3}{2-5x}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{4x-3}{2-5x}=10 \Leftrightarrow$

$20-50x=4x-3 \Leftrightarrow -46x=-23 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, δεκτή.

30. $\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)+\ln 3=0$

Λύση: Πρέπει $e^x-e^{-x}>0$. Άρα: $\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)=-\ln 3 \Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3e^x-3e^{-x}=e^x+e^{-x} \Leftrightarrow 2e^x=4e^{-x} \Leftrightarrow$$

$\frac{e^x}{e^{-x}}=\frac{2}{4} \Leftrightarrow e^{2x}=2 \Leftrightarrow 2x=\ln 2 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{2}$, δεκτή.

31. $\log(11-10^x)=1-x$

Λύση: Πρέπει $11-10^x>0$. Άρα:

$$\log(11-10^x)=\log 10^{1-x} \Leftrightarrow$$

$$11-10^x=10^{1-x} \Leftrightarrow 11-10^x=\frac{10}{10^x}.$$

Θέτουμε $10^x=y>0$. Άρα η εξίσωση γίνεται
$11-y=\frac{10}{y} \Leftrightarrow -y^2+11y-10=0$. Έχουμε
$\Delta=81$, άρα $y=1$ ή $y=10$. Συνεπώς:

- $10^x=1 \Leftrightarrow x=0$, δεκτή ή
- $10^x=10 \Leftrightarrow x=1$, δεκτή.

32. $\log(3^{x-1}+1)=\log(3^{2x-2}+7)-3^{\log_3(\log 4)}$

Λύση: $\log(3^{x-1}+1)=\log(3^{2x-2}+7)-\log 4 \Leftrightarrow$

$\log(3^{x-1}+1)=\log\left(\frac{3^{2x-2}+7}{4}\right) \Leftrightarrow 3^{x-1}+1=\frac{3^{2x-2}+7}{4} \Leftrightarrow$

$4\cdot 3^{x-1}+4=3^{2x-2}+7 \Leftrightarrow 3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+3=0$.
Θέτουμε $3^{x-1}=y>0$. Τότε $3^{2(x-1)}=y^2$. Άρα η εξίσωση γίνεται $y^2-4y+3=0$. Έχουμε $\Delta=4$, άρα $y=3$ ή $y=1$. Συνεπώς:

- $3^{x-1}=3 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$ ή
- $3^{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

33. $x-\ln(e^x-1)=\frac{\ln 4}{2}$

Λύση: Πρέπει $e^x-1>0$. Άρα: $\ln e^x-\ln(e^x-1)=\ln 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)=\ln\sqrt{4} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x-1}=2 \Leftrightarrow e^x=2e^x-2 \Leftrightarrow$

$-e^x=-2 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$, δεκτή.

34. $x+\log\left(1+\left(\frac{5}{2}\right)^x\right)=\log 2+2x\cdot\log 2$

Λύση: $\log 10^x+\log\left(1+\frac{5^x}{2^x}\right)=\log 2+\log 2^{2x} \Leftrightarrow$

$\log\left[10^x(1+5^x\cdot 2^{-x})\right]=\log 2^{2x+1} \Leftrightarrow$

$\log(10^x+25^x)=\log(2\cdot 4^x) \Leftrightarrow$

$10^x+25^x=2\cdot 4^x \Leftrightarrow 25^x+10^x-2\cdot 4^x=0 \Leftrightarrow$

$\frac{25^x}{4^x}+\frac{5^x\cdot 2^x}{4^x}-\frac{2\cdot 4^x}{4^x}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-2=0$.

Θέτουμε $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=y>0$. Επίσης: $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}=y^2$. Άρα η εξίσωση γίνεται $y^2+y-2=0$. Έχουμε $\Delta=9$, άρα: $y=1$ ή $y=-2$, απορρίπτεται.

Συνεπώς: $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

35. $\log^2(x-1)-\log^2(x+1)+2\cdot\log 2\cdot\log\left(x^2-1\right)=0$

Λύση: Πρέπει $x-1>0$, $x+1>0$ και $x^2-1>0$.

$\log^2(x-1)-\log^2(x+1)+$
$+2\cdot\log 2\cdot\log\left[(x-1)(x+1)\right]=0 \Leftrightarrow$
$\log^2(x-1)-\log^2(x+1)+$
$+2\cdot\log 2\cdot\left[\log(x-1)+\log(x+1)\right]=0 \Leftrightarrow$
$\log^2(x-1)-\log^2(x+1)+$
$2\cdot\log 2\cdot\log(x-1)+2\cdot\log 2\cdot\log(x+1)=0 \Leftrightarrow$
$\left[\log(x-1)+\log 2\right]^2-\left[\log(x+1)-\log 2\right]^2=0 \Leftrightarrow$
$\left(\log(x-1)+\log 2+\log(x+1)-\log 2\right)\cdot$
$\left(\log(x-1)+\log 2-\log(x+1)+\log 2\right)=0 \Leftrightarrow$

- $\log(x-1)+\log(x+1)=0 \Leftrightarrow$
$\log\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x^2-1=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$, δεκτή ή $x=-\sqrt{2}$, απορρίπτεται.
- $\log(x-1)+\log 2-\log(x+1)+\log 2=0 \Leftrightarrow$
$\log\left(\frac{4x-4}{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{4x-4}{x+1}=1 \Leftrightarrow$
$4x-4=x+1 \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$, δεκτή.

ΜΟΡΦΗ 5$^{\text{Η}}$: Παραγοντοποίηση

36. $x\cdot\log x-\log x^2-x+2=0$

Λύση: Πρέπει $x>0$.

$x\cdot\log x-2\log x-x+2=0 \Leftrightarrow$
$\log x\cdot(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$(x-2)(\log x-1)=0 \Leftrightarrow$
$x-2=0$ ή $\log x-1=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=10$.

ΜΟΡΦΗ 6$^{\text{Η}}$: Μεταβλητή Βάση

Στη μορφή αυτή, αφού γνωρίζουμε ότι η μεταβλητή βάση είναι θετική λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας.

37. $x^{\log 2}=\sqrt[3]{4}$, $x\in(0,+\infty)$

Λύση: $\log x^{\log 2}=\log 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow (\log 2)\cdot\log x=\frac{2}{3}\cdot\log 2 \Leftrightarrow$

$\log x=\frac{\frac{2}{3}\cdot\log 2}{\log 2} \Leftrightarrow \log x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=10^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{100}$.

38. $x^{x-2}=1$, $x\in(0,+\infty)$

Λύση: $\log x^{x-2}=\log 1 \Leftrightarrow (x-2)\log x=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $\log x=0 \Leftrightarrow x=1$.

39. $x^{\log x}=100\cdot x$

Λύση: Πρέπει $x>0$.

$$\log x^{\log x}=\log(100\cdot x) \Leftrightarrow$$

$$\log x\cdot\log x=\log 100+\log x \Leftrightarrow \log^2 x-\log x-2=0.$$

Θέτουμε $\log x=y$. Άρα η εξίσωση γίνεται $y^2-y-2=0$. Έχουμε $\Delta=9$, άρα $y=3$ ή $y=-1$.

Συνεπώς:
- $\log x=2 \Leftrightarrow x=10^2=100$ ή
- $\log x=2 \Leftrightarrow x=10^{-1}=\frac{1}{10}$.

40. $\left(x^2\right)^{1+\log x^4}=10^6$, $x\in(0,+\infty)$

Λύση: Μετασχηματίζουμε την εξίσωση:
$x^{2(1+4\log x)}=10^6 \Leftrightarrow x^{2+8\log x}=10^6$. Άρα:
$\log x^{2+8\log x}=\log 10^6 \Leftrightarrow (2+8\log x)\log x=0 \Leftrightarrow$
$2+8\log x=0 \Leftrightarrow \log x=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=10^{-\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}$ ή
$\log x=0 \Leftrightarrow x=1$.

41. Δείξτε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $5^{\ln x}=x^{\ln 5}$ και να λυθεί η εξίσωση: $5^{\ln x^2}=5+4\cdot x^{\ln 5}$.

Λύση: Λογαριθμίζοντας κατά μέλη έχουμε:
$5^{\ln x}=x^{\ln 5} \Leftrightarrow \ln 5^{\ln x}=\ln x^{\ln 5} \Leftrightarrow \ln x\cdot\ln 5=\ln x\cdot\ln 5$.

Άρα: $5^{\ln x^2}=5+4\cdot x^{\ln 5} \Leftrightarrow 5^{2\ln x}-4\cdot 5^{\ln x}-5=0$

Θέτουμε $5^{\ln x}=y>0$. Επίσης: $5^{2\ln x}=y^2$. Άρα η εξίσωση γίνεται $y^2-4y-5=0$. Έχουμε $\Delta=36$, άρα $y=5$ ή $y=-1$, απορρίπτεται. Συνεπώς:
$5^{\ln x}=5 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$.

ΜΟΡΦΗ 7$^{\text{Η}}$: Προφανής Ρίζα

Χρησιμοποιούμε την **πρόταση 1** (τεύχος 123).

42. $\ln x+x=1$

Λύση: ◈ Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος κι έχουμε ισοδύναμα την εξίσωση

$$\ln x+x-1=0.$$

◈ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=1$, αφού $\ln 1+1-1=0$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση
f με $f(x)=\ln x+x-1$, με $x\in(0,+\infty)$,

η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Πράγματι αν $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι: $\left.\begin{matrix}\ln x_1<\ln x_2\\ x_1-1<x_2-1\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

✓ Άρα από την **πρόταση 1** η $x=1$ είναι μοναδική.

43. $\mathbf{e^{x-1}+\ln x=1}$

Λύση ◈Διαμορφώνουμε την εξίσωση μεταφέροντας όλους τους όρους στο πρώτο μέλος $e^{x-1}+\ln x-1=0$.

◈ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=1$, αφού $e^{1-1}+\ln 1-1=0$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

f με $f(x)=e^{x-1}+\ln x-1$, με $x\in(0,\ +\infty)$,

η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Πράγματι αν $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύουν ότι: $\ln x_1<\ln x_2$ (1)

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Rightarrow-\frac{e}{x_1}<-\frac{e}{x_2}\ (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\ln x_1-\dfrac{e}{x_1}<\ln x_2-\dfrac{e}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

✓ Άρα από την **πρόταση 1** η $x=e$ είναι μοναδική.

44. $\mathbf{e^{\frac{1-x}{x}}=x,\ x\in(0,+\infty)}$

Λύση: ◈ Λογαριθμίζοντας κατά μέλη έχουμε ισοδύναμα

$$e^{\frac{1-x}{x}}=x\Leftrightarrow\ln e^{\frac{1-x}{x}}=\ln x\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}=\ln x\Leftrightarrow\frac{1}{x}-1-\ln x=0$$

◈ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=1$, αφού $\dfrac{1}{1}-1-\ln 1=0$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

f με $f(x)=\dfrac{1}{x}-1-\ln x$, με $x\in(0,\ +\infty)$.

η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Πράγματι αν $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύουν ότι: $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\Rightarrow\dfrac{1}{x_1}-1>\dfrac{1}{x_2}-1$ (1)

$$\ln x_1<\ln x_2\Rightarrow-\ln x_1>-\ln x_2\ (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι

$$\frac{1}{x_1}-1-\ln x_1<\frac{1}{x_2}-1-\ln x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

✓ Άρα από την **πρόταση 1** η $x=e$ είναι μοναδική.

45. $\mathbf{x^x=e^e,\ x\in(0,+\infty)}$

Λύση: ◈ Λογαριθμίζοντας κατά μέλη έχουμε ισοδύναμα $x^x=e^e\Leftrightarrow\ln x^x=\ln e^e\Leftrightarrow x\ln x=e\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$$\ln x=\frac{e}{x}\Leftrightarrow\ln x-\frac{e}{x}=0.$$

◈ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=0$, αφού $\ln e-\dfrac{e}{e}=1-1=0$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

f με $f(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}$, με $x\in(0,+\infty)$

η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Πράγματι αν $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύουν ότι: $\ln x_1<\ln x_2$ (1)

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Rightarrow-\frac{e}{x_1}<-\frac{e}{x_2}\ (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι

$$\ln x_1-\frac{e}{x_1}<\ln x_2-\frac{e}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

✓ Άρα από την **πρόταση 1** η $x=e$ είναι μοναδική.

ΜΟΡΦΗ 8$^{\text{Η}}$: $\mathbf{f(A(x))=f(B(x))}$

Χρησιμοποιούμε την **πρόταση 2** (τεύχος 123).

46. $\mathbf{\ln(\varepsilon\varphi x)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{\eta\mu x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$

Λύση: ◈ Μετασχηματίσουμε την εξίσωση κι έχουμε: $\ln\left(\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{\eta\mu x}\Leftrightarrow$

$$\ln(\eta\mu x)-\ln(\sigma\upsilon\nu x)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{\eta\mu x}\Leftrightarrow$$
$$\ln(\eta\mu x)+\sqrt{\eta\mu x}=\ln(\sigma\upsilon\nu x)+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$$

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

f με $f(x)=\ln x+\sqrt{x}$, με $x\in(0,+\infty)$,

η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Πράγματι αν $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε έχουμε ότι $\left.\begin{matrix}\ln x_1<\ln x_2\\ \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$\ln x_1+\sqrt{x_1}<\ln x_2+\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

◈ Άρα: $f(\eta\mu x)=f(\sigma\upsilon\nu x)\overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ 2}}{\Leftrightarrow}$

$$\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}.$$

47. $\mathbf{\ln\left(\dfrac{e^{-x^4}+1}{e^{-2-x^2}+1}\right)=x^4-x^2-2}$

Λύση: ◈ Διαμορφώνουμε την εξίσωση:

$$\ln\left(\frac{e^{-x^2}+1}{e^{-2-x^2}+1}\right)=x^4-x^2-2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{-x^4}+1)-\ln(e^{-2-x^2}+1)=x^4-x^2-2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{-x^4}+1)-x^4=\ln(e^{-2-x^2}+1)-x^2-2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{-x^4}+1)-x^4=\ln(e^{-2-x^2}+1)-(x^2+2).$$

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f \text{ με } f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)-x, \text{ με } x\in\mathbb{R}.$$

την οποία αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Πράγματι αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε έχουμε ότι $-x_1>-x_2 \Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Rightarrow$

$$e^{-x_1}+1>e^{-x_2}+1 \Rightarrow \ln(e^{-x_1}+1)>\ln(e^{-x_2}+1) \overset{-x_1>-x_2}{\Rightarrow}$$

$$\ln(e^{-x_1}+1)-x_1>\ln(e^{-x_2}+1)-x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

◈ Άρα: $f\left(x^4\right)=f\left(x^2+2\right) \overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ 2}}{\Leftrightarrow} x^4=x^2+2 \Leftrightarrow$

$x^4-x^2-2=0$.

Θέτουμε $x^2=y\geq 0$. Επίσης: $x^4=y^2$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $y^2-y-2=0$. Έχουμε $\Delta=9$, άρα $y=2$ ή $y=-1$, απορρίπτεται.

Συνεπώς: $x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ ή $x=\sqrt{2}$.

ΜΟΡΦΗ 9$^{\text{Η}}$: $f(x)\leq \kappa \leq g(x)$

1. $\mathbf{\log^2 x-2\log x+2=\eta\mu\left(\frac{\pi x}{20}\right)}$

Λύση: ◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f \text{ με } f(x)=\log^2 x-2\log x+2,$$

με $x\in(0,+\infty)$. Επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\log^2 x-2\log x+2=(\log x-1)^2+1\geq 1$, έπεται ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=10$ το $f(10)=1$.

◈ Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{\pi x}{20}\right)\leq 1$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για

$$\frac{\pi x}{20}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=40\kappa\pi+10, \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}.$$

◈ Άρα για κάθε $x\in(0,10)\cup(10,+\infty)$ ισχύει ότι $\log^2 x-2\log x+2>1\geq \eta\mu\left(\frac{\pi x}{20}\right)$.

✓ Συνεπώς η εξίσωση

$$\log^2 x-2\log x+2=\eta\mu\left(\frac{\pi x}{20}\right)$$

έχει μοναδική προφανή ρίζα τη $x=10$, αφού

$$\log^2 10-2\log 10+2=1=\eta\mu\left(\frac{10\pi}{20}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

ΜΟΡΦΗ 10$^{\text{Η}}$: Μεταβλητός Δείκτης

Ισχύει ότι: $\alpha^x=\theta \Leftrightarrow x=\log_\alpha \theta$, όπου $\theta\in(0,+\infty)$ και $\alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

2. $\mathbf{\log_x 25=2}$.

Λύση: Πρέπει $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. $x^2=25 \Leftrightarrow x=5$.

3. $\mathbf{\log_x(2\cdot\sqrt[3]{2})=-2}$.

Λύση: Πρέπει $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Άρα:

$$\log_x\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)=-2 \Leftrightarrow \log_x\left(2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)=-2 \Leftrightarrow$$

$$\log_x\left(2^{\frac{5}{3}}\right)=-2 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\cdot\log_x 2=-2 \Leftrightarrow$$

$$\log_x 2=-\frac{6}{5} \Leftrightarrow x^{-\frac{6}{5}}=2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^{-\frac{6}{5}}\right)^{-\frac{5}{6}}=2^{-\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}.$$

4. Αφού αποδείξετε ότι $\mathbf{\log_x 10=\frac{1}{\log x}}$, για κάθε $\mathbf{x\in(0,1)\cup(1,+\infty)}$, έπειτα να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{\log x+\log_x 10=2}$.

Λύση: Έχουμε με βάση την αλλαγή του λογαρίθμου έχουμε ότι: $\log_x 10=\frac{\log 10}{\log x}=\frac{1}{\log x}$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\log x+\log_x 10=2 \Leftrightarrow \log x+\frac{1}{\log x}=2$$

Θέτουμε $\log x=y$. Άρα

$$y+\frac{1}{y}=2 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$y-1=0 \Leftrightarrow y=1$.

Συνεπώς: $\log x=1 \Leftrightarrow x=10$.

5. $\mathbf{\log_{x+2}\left(17x^2-6x+8\right)=3}$.

Λύση

Πρέπει $x+2\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $18x^2-7x+8>0$. Τότε

$$(x+2)^3=17x^2-6x+8 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^3=17x^2-6x+8 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$x^3-11x^2+18x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-11x+18\right)=0 \Leftrightarrow$$

$x=0$ ή $x^2-11x+18=0$. Έχουμε $\Delta=49$, άρα $x=9$, δεκτή ή $x=2$, δεκτή.

Κανονικά πολύγωνα – κύκλος

Σπύρος Γιαννακόπουλος – Παράρτημα **Ε.Μ.Ε. Ηλείας**

Β΄ Μέρος

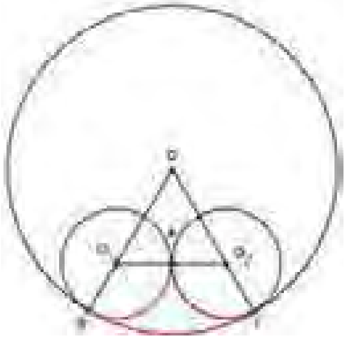
Θέμα 12ο: Δίνεται κύκλος (O,R) και στο εσωτερικό του κατασκευάζουμε δύο ίσους κύκλους $C_1:\left(O_1,\frac{1}{3}R\right)$, $C_2:\left(O_2,\frac{1}{3}R\right)$ με $O_1O_2=\frac{2}{3}R$ και $OO_1=OO_2=\frac{2}{3}R$.

i. Να βρείτε τη σχετική θέση των τριών κύκλων.

ii. Αν E είναι το εμβαδόν των κύκλων C_1,C_2 δείξτε ότι $(OO_1O_2)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}E$.

iii. Να βρείτε ως συνάρτηση του R την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου που περιέχεται στο ημιεπίδο που ορίζεται από την O_1O_2 και στο ημιεπίπεδο αυτό δεν βρίσκεται το σημείο O.

Λύση: i. $O_1O_2=\frac{1}{3}R+\frac{1}{3}R$. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι C_1,C_2 εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. $OO_1=OO_2=R-\frac{1}{3}R$. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι C_1,C_2 εφάπτονται εσωτερικά με τον κύκλο (O,R) στα σημεία B,Γ.



ii. Το τρίγωνο OO_1O_2 είναι ισόπλευρο, οπότε

$$(OO_1O_2)=\frac{OO_1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\frac{2}{3}R\right)^2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow$$

$$(OO_1O_2)=\frac{R^2\sqrt{3}}{9}.\ E=\pi\left(\frac{1}{3}R\right)^2=\frac{1}{9}\pi R^2$$

$$\frac{(OO_1O_2)}{E}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\Leftrightarrow(OO_1O_2)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}E.$$

iii. Με βάση το παραπάνω σχήμα:

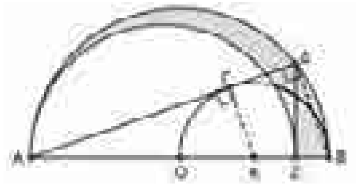
- Είναι $B\hat{O_1}A=\Gamma\hat{O_2}A=120^0$. Τα τόξα των κύκλων C_1,C_2 που αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες $B\hat{O_1}A$ και $\Gamma\hat{O_2}A$ έχουν ίσα μήκη $l_1=\frac{\pi\frac{1}{3}R120}{180}=\frac{2\pi R}{9}$. Το τόξο του κύκλου (O,R) που αντιστοιχεί στην κυρτή επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ έχει μήκος $l_2=\frac{\pi R60}{180}=\frac{\pi R}{3}$. Άρα η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\Pi=2l_1+l_2=\frac{4\pi R}{9}+\frac{\pi R}{3}\Leftrightarrow\Pi=\frac{7\pi R}{9}$.
- Για τα εμβαδά των κυκλικών τομέων που περιέχονται στις κυρτές επίκεντρες γωνίες $B\hat{O_1}A$, $\Gamma\hat{O_2}A$ έχουμε: $(O_1\widehat{AB})=(O_2\widehat{A\Gamma})=\frac{\pi\left(\frac{1}{3}R\right)^2\cdot120}{360}=\frac{\pi R^2}{27}$. Έστω E_1 το εμβαδόν του ζητούμενου καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$, τότε: $E_1=(O\widehat{B\Gamma})-2(O_1\widehat{AB})-(OO_1O_2)=\frac{\pi R^2 60}{360}-\frac{2\pi R^2}{27}-\frac{R^2\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow E_1=\frac{R^2}{54}\left(5\pi-6\sqrt{3}\right)$.

Θέμα 13: Θεωρούμε ημικύκλιο με κέντρο O και διάμετρο $AB=2r$. Με διάμετρο το OB κατασκευάζουμε ημικύκλιο κέντρου K μέσα στο ημικύκλιο κέντρου O. Από το A φέρουμε εφαπτομένη στο ημικύκλιο κέντρου K που εφάπτεται του ημικυκλίου στο σημείο Γ και τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο σημείο Δ. Φέρουμε $\Delta Z\perp AB$. Μέσα στο ημικύκλιο κέντρου O κατασκευάζουμε ημικύκλιο με διάμετρο AZ.

Να βρείτε ως συνάρτηση του r το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα ημικύκλια διαμέτρων AB, AZ και το τμήμα ZB.

Λύση: Έχουμε $OA=r$, $KO=\frac{r}{2}$, $K\Gamma\perp A\Delta$ και $A\hat{\Delta}B=90^0$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Θέτουμε $ZB=x$. $Z\hat{\Delta}B=\hat{A}$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $Z\Delta B$ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{ZB}{\Delta B}=\frac{\Delta B}{AB}\Leftrightarrow\frac{x}{\Delta B}=\frac{\Delta B}{2r}\Leftrightarrow\Delta B^2=2rx\ \ (1).$$



Επίσης τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΓΑΚ είναι όμοια, οπότε $\frac{\Delta B}{K\Gamma}=\frac{AB}{AK}\Leftrightarrow\frac{\Delta B}{\frac{r}{2}}=\frac{2r}{r+\frac{r}{2}}\Leftrightarrow\Delta B=\frac{2}{3}r$ (2).

Από τις (1), (2) παίρνουμε $x=\frac{2}{9}r$. Έτσι έχουμε:

$AZ=2r-\frac{2}{9}r\Leftrightarrow AZ=\frac{16}{9}r$. Η ακτίνα του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΖ είναι $r_1=\frac{AZ}{2}\Leftrightarrow r_1=\frac{8}{9}r$. Το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ είναι $E_1=\frac{1}{2}\pi r^2$ και το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΖ είναι $E_2=\frac{1}{2}\pi r_1^2=\frac{1}{2}\pi\frac{64}{81}r^2\Leftrightarrow E_2=\frac{32}{81}\pi r^2$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=E_1-E_2\Leftrightarrow$

$E=\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{32\pi r^2}{81}\Leftrightarrow E=\frac{17}{162}\pi r^2$.

Θέμα 14^o: Θεωρούμε ημικύκλιο (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ. Στο ημικύκλιο παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ να είναι το ένα τρίτο του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Γ τέμνει τις εφαπτομένες του ημικυκλίου στα σημεία Α,Β, στα σημεία P, Q αντίστοιχα. Γράφουμε τους κύκλους (P,PA) και (Q,QB). Αν το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΓΑΒ που ορίζεται από τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma},\overset{\frown}{B\Gamma}$ των κυρτών επίκεντρων γωνιών $A\hat{P}\Gamma$, $B\hat{Q}\Gamma$ και της διαμέτρου ΑΒ είναι $E=24\sqrt{3}-11\pi$, να βρείτε το εμβαδόν E_1 του ημικυκλίου (O,R).

Λύση: Οι κύκλου $(P,PA),(Q,QB)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Γ. Το τετράπλευρο ABQP είναι τραπέζιο με βάσεις AP,BQ και ύψος AB. Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΓΑΒ προκύπτει αν από το εμβαδόν του τραπεζίου ABQP αφαιρέσουμε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $P\overset{\frown}{A\Gamma}$, $Q\overset{\frown}{B\Gamma}$ που αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες $A\hat{P}\Gamma$ και $B\hat{Q}\Gamma$ αντίστοιχα.

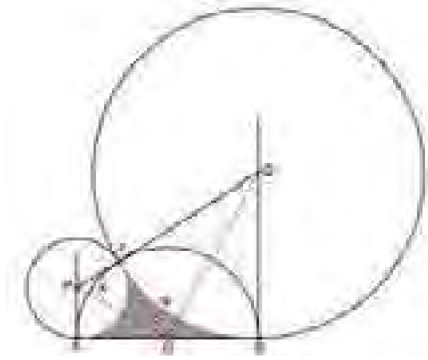
$\overset{\frown}{AX\Gamma}=60^0\Rightarrow A\hat{O}\Gamma=60^0$. Το OP ως τμήμα διακεντρικής ευθείας διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο APO είναι:

$A\hat{O}P=30^0\Leftrightarrow PA=\frac{OP}{2}\Leftrightarrow OP=2PA$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$OP^2=OA^2+PA^2\Leftrightarrow 4PA^2=R^2+PA^2\Leftrightarrow$

$PA^2=\frac{1}{3}R^2\Leftrightarrow PA=\frac{R\sqrt{3}}{3}$. Είναι $\Gamma\hat{O}B=120^0$. Η OQ ως διακεντρική, διχοτομεί την γωνία $\Gamma\hat{O}B$, οπότε $Q\hat{O}B=60^0\Rightarrow O\hat{Q}B=30^0\Leftrightarrow OB=\frac{1}{2}OQ\Leftrightarrow OQ=2R$.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο BOQ έχουμε:
$OQ^2=OB^2+BQ^2\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow BQ=R\sqrt{3}$.

$$(APQB)=\frac{(AP+BQ)\cdot AB}{2}=\frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}+R\sqrt{3}\right)\cdot 2R}{2}\Leftrightarrow$$

$$(APQB)=\frac{4R^2\sqrt{3}}{3}.$$

$A\hat{O}\Gamma=60^0\Rightarrow A\hat{P}\Gamma=120^0$, οπότε $\left(P\overset{\frown}{A\Gamma}\right)=$

$$\frac{\pi PA^2 120}{360}=\frac{\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2}{3}\Leftrightarrow\left(P\overset{\frown}{A\Gamma}\right)=\frac{\pi R^2}{9}.$$

$\Gamma\hat{O}B=120^0\Rightarrow\Gamma\hat{Q}B=60^0$, οπότε $\left(Q\overset{\frown}{B\Gamma}\right)=$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{3}R\right)^2 60}{360}=\frac{3\pi R^2}{6}\Leftrightarrow\left(Q\overset{\frown}{B\Gamma}\right)=\frac{\pi R^2}{2}.$$

$$E=(APQB)-\left(P\overset{\frown}{A\Gamma}\right)-\left(Q\overset{\frown}{B\Gamma}\right)=$$

$$\frac{4R^2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi R^2}{9}-\frac{\pi R^2}{2}\Leftrightarrow E=\frac{R^2\left(24\sqrt{3}-11\pi\right)}{18}\Leftrightarrow$$

$$24\sqrt{3}-11\pi=\frac{R^2\left(24\sqrt{3}-11\pi\right)}{18}\Leftrightarrow R^2=18.$$

Άρα $E_1=\frac{1}{2}\pi R^2=9\pi$ τετρ. μονάδες.

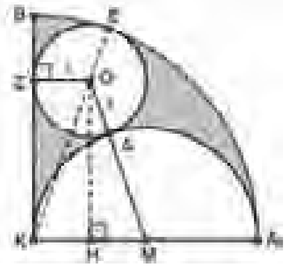
Θέμα 15^o: Δίνεται τεταρτοκύκλιο $K\overset{\frown}{AB}$. Με διάμετρο την $KA=R$ γράφουμε ημικύκλιο εντός του τεταρτοκυκλίου.

α. Να κατασκευάσετε κύκλο ο οποίος να εφάπτε-

ται της KB, του ημικυκλίου και του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

β. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του κύκλου του ερωτήματος α είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του μικτόγραμμου τριγώνου, με πλευρές την KB, το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ και το ημικύκλιο $K\Delta A$.

Λύση: Ας είναι M το κέντρο του ημικυκλίου διαμέτρου KA.



α. Έστω ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο κύκλο και είναι ο (O,x). Ο κύκλος αυτός θα εφάπτεται της KB στο σημείο Z, του ημικυκλίου στο σημείο Δ και του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ στο σημείο E. Φέρουμε $OH \perp KA$. Είναι $OZ \perp KB$. Η KO διέρχεται από το σημείο επαφής E και η MO διέρχεται από το σημείο επαφής Δ.

Είναι $OM = \frac{R}{2} + x$, $KH = OZ = x$, $KO = R - x$ και $HM = \frac{R}{2} - x$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο HOK έχουμε: $HO^2 = KO^2 - KH^2 \Leftrightarrow HO^2 = (R-x)^2 - x^2$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο HMO έχουμε: $OM^2 = HO^2 + HM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R}{2}+x\right)^2 = (R-x)^2 - x^2 + \left(\frac{R}{2}-x\right)^2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \frac{R}{4}$.

Άρα $MO = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}$ και $KO = R - \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}$.

Με κέντρο το σημείο K και ακτίνα $r_1 = KO = \frac{3R}{4}$ γράφουμε κύκλο C_1. Επίσης με κέντρο το M και ακτίνα $r_2 = MO = \frac{3R}{4}$ γράφουμε κύκλο C_2. Οι κύκλοι C_1, C_2 τέμνονται, αφού $|r_1 - r_2| < KM < r_1 + r_2$. Το σημείο τομής των κύκλων C_1, C_2 μας δίνει το κέντρο O του ζητούμενου κύκλου. Οπότε ο ζητούμενος κύκλος είναι ο $\left(O, \frac{R}{4}\right)$.

β. Έστω E_1 το εμβαδόν του κύκλου $\left(O, \frac{R}{4}\right)$ και E_2 το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου, τότε

$E_1 = \pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 \Leftrightarrow E_1 = \frac{\pi R^2}{16}$ και

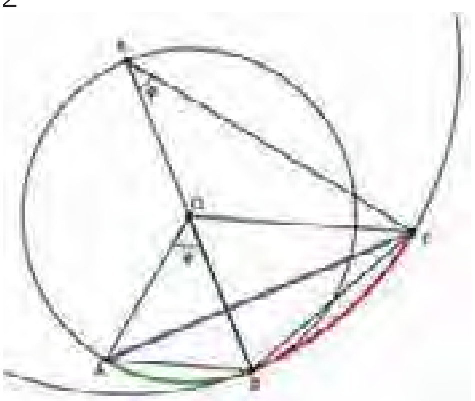
$E_2 = \left(K\overset{\frown}{AB}\right) - \left(M\overset{\frown}{KA}\right) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{8} \Leftrightarrow E_2 = 2\frac{\pi R^2}{16} \Leftrightarrow E_2 = 2E_1 \Leftrightarrow E_1 = \frac{1}{2}E_2$.

Θέμα 16^ο: Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε κυκλικό τομέα $O\overset{\frown}{AB}$ κεντρικής γωνίας φ. Η προέκταση της BO τέμνει τον κύκλο στο σημείο K. Με κέντρο το K και ακτίνα KB κατασκευάζουμε έξω από τον κυκλικό τομέα νέο κυκλικό τομέα $K\overset{\frown}{B\Gamma}$ κεντρικής γωνίας φ. Αν η γωνία φ είναι τέτοια, ώστε $O\Gamma // AB$, να βρείτε:

i. Το συνφ.

ii. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος $AB\Gamma A$ που περιέχεται μεταξύ των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ που αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ και του τμήματος $A\Gamma$, ως συνάρτηση της ακτίνας R και του μέτρου της γωνίας φ.

Λύση: **i.** Επειδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και $A\hat{O}B = \varphi$, προκύπτει ότι $2O\hat{A}B = 180^0 - \varphi \Leftrightarrow O\hat{A}B = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$. Άρα $O\hat{A}B = O\hat{B}A = B\hat{O}\Gamma = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$, αφού $O\Gamma // AB$.



Επίσης το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $2K\hat{B}\Gamma = 180^o - \varphi \Leftrightarrow K\hat{B}\Gamma = 90^o - \frac{\varphi}{2}$.

Άρα το τρίγωνο ΓOB είναι ισοσκελές με $\Gamma O = \Gamma B$.

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $KO\Gamma$ έχουμε: $O\Gamma^2 = OK^2 + K\Gamma^2 - 2OK \cdot K\Gamma \cdot \text{συν}\varphi \Leftrightarrow O\Gamma^2 = R^2 + (2R)^2 - 4R^2 \cdot \text{συν}\varphi \Leftrightarrow O\Gamma^2 = 5R^2 - \Leftrightarrow O\Gamma^2 = 5R^2 - 4R^2 \cdot \text{συν}\varphi$ (1).

Όμοια από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΚΒΓ έχουμε: $\text{Β}\Gamma^2=\text{ΚΒ}^2+\text{Κ}\Gamma^2-2\text{ΚΒ}\cdot \text{Κ}\Gamma\cdot συνφ \Leftrightarrow$ $\text{Β}\Gamma^2=4R^2+4R^2-8R^2\cdot συνφ \Leftrightarrow \text{Β}\Gamma^2=8R^2-8R^2\cdot συνφ$ (2).
Επειδή $\text{Ο}\Gamma=\text{Β}\Gamma$ από τις (1), (2) έχουμε: $5R^2-4R^2\cdot συνφ=8R^2-8R^2\cdot συνφ\Leftrightarrow συνφ=\frac{3}{4}$

ii. Αφού $συνφ=\frac{3}{4}$, $(1)\Rightarrow \text{Ο}\Gamma^2=2R^2\Leftrightarrow \text{Ο}\Gamma=R\sqrt{2}$.

$\hat{\text{ΑΟ}\Gamma}=φ+90^0-\frac{φ}{2}\Leftrightarrow \hat{\text{ΑΟ}\Gamma}=90^0+\frac{φ}{2}$.

$(\text{ΟΑ}\Gamma)=\frac{1}{2}\text{ΟΑ}\cdot\text{Ο}\Gamma\cdot ημ\left(90+\frac{φ}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}R^2συν\frac{φ}{2}$.

$(\text{Ο}\widehat{\text{ΑΒ}})=\frac{πR^2φ}{360}$, $(\text{Κ}\widehat{\text{Β}\Gamma})=\frac{π(2R)^2φ}{360}\Leftrightarrow(\text{Κ}\widehat{\text{Β}\Gamma})=\frac{πR^2φ}{90}$.

$(\text{ΚΟ}\Gamma)=\frac{1}{2}\text{ΚΟ}\cdot\text{Κ}\Gamma ημφ\Leftrightarrow(\text{ΚΟ}\Gamma)=R^2ημφ$.

Όμως $ημφ=\sqrt{1-συν^2φ}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}\Leftrightarrow ημφ=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Άρα $(\text{ΚΟ}\Gamma)=\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E=(\text{Ο}\widehat{\text{ΑΒ}})+(\text{Κ}\widehat{\text{Β}\Gamma})-(\text{ΟΑ}\Gamma)-(\text{ΚΟ}\Gamma)\Leftrightarrow$

$E=\frac{πR^2φ}{360}+\frac{4πR^2φ}{360}-\frac{\sqrt{2}}{2}R^2συν\frac{φ}{2}-\frac{R^2\sqrt{7}}{4}\Leftrightarrow$

$E=\frac{R^2}{2}\left(\frac{πφ}{36}-\sqrt{2}συν\frac{φ}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Θέμα 17ο: Δύο ίσοι κύκλοι $(K,R),(Λ,R)$ τέμνονται στα σημεία Α,Β, έτσι, ώστε ΑΒ=R. Γράφουμε κύκλο με διάμετρο το τμήμα ΑΒ και από το Β φέρουμε παράλληλο στην ΚΛ που τέμνει τον κύκλο (Κ,R) στο σημείο P και τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Q. Έστω Ε το εμβαδόν του κύκλου (K,R) και E_1 το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου APQ.

i. Δείξτε ότι $E_1=4E$

ii. Να βρείτε ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του χωρίου του τριγώνου APQ που δεν περιέχεται στον κυκλικό δίσκο διαμέτρου ΑΒ.

Λύση: i. Η διάκεντρος ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ. Επειδή PQ//ΚΛ, θα είναι $PQ\perp AB$. Άρα οι AP,AQ είναι διάμετροι των κύκλων.

Το τρίγωνο APQ είναι ισοσκελές με AP=AQ=2R και το σημείο Β είναι μέσο του PQ. Αφού AB=R, τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΛΑΒ είναι ισόπλευρα, οπότε $\hat{\text{ΚΑΒ}}=\hat{\text{ΛΑΒ}}=60^0$.

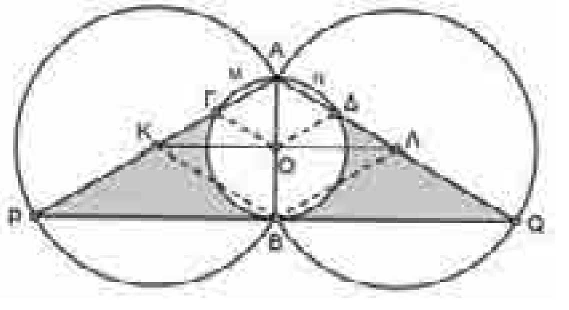
$PB^2=AP^2-AB^2=4R^2-R^2=3R^2\Leftrightarrow$ $PB=R\sqrt{3}$. Άρα $PB=BQ=R\sqrt{3}$ και $PQ=2R\sqrt{3}$. (Το PB μπορούμε να το βρούμε και ως εξής: $\hat{PKB}=120^o$, οπότε το PB είναι πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Κ,R), άρα $PB=R\sqrt{3}$).

$(APQ)=\frac{1}{2}PQ.AB=R^2\sqrt{3}$.

Έστω R_1 η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου APQ, τότε

$(APQ)=\frac{AP.AQ.PQ}{4R_1}\Leftrightarrow R^2\sqrt{3}=\frac{2R^3\sqrt{3}}{R_1}\Leftrightarrow R_1=2R$

Άρα $E_1=πR_1^2=4πR^2\Leftrightarrow E_1=4E$.



ii. Έστω Γ, Δ τα σημεία τομής του κύκλου διαμέτρου ΑΒ με τις AP, AQ αντίστοιχα. Το Ο είναι το κέντρο του κύκλου αυτού. Τα τρίγωνα $\text{ΟΑ}\Gamma,\text{ΟΑ}\Delta$ είναι ισόπλευρα. Έχουμε τα παρακάτω εμβαδά.

$E_{κύκλου\left(O,\frac{AB}{2}\right)}=π\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{πR^2}{4}$ $E_{κυκλ.τμ.ΑΜ\Gamma}=(\text{Ο}\widehat{\text{ΑΜ}\Gamma})-(\text{ΟΑ}\Gamma)=$

$\frac{π\left(\frac{R}{2}\right)^2 60}{360}-\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{πR^2}{24}-\frac{R^2\sqrt{3}}{16}$.

Τα κυκλικά τμήματα ΑΜΓΑ, ΑΝΔΑ είναι ισεμβαδικά, οπότε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου διαμέτρου ΑΒ που περιέχεται μέσα στο τρίγωνο APQ είναι:

$E_2=E_{κύκλου\left(O,\frac{AB}{2}\right)}-2E_{κυκλ.τμ.ΑΜ\Gamma}=$

$\frac{πR^2}{4}-\frac{πR^2}{12}+\frac{R^2\sqrt{3}}{8}=\frac{πR^2}{6}+\frac{R^2\sqrt{3}}{8}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν Ε θα το βρούμε αν από το εμβαδόν του τριγώνου APQ αφαιρέσουμε το E_2.

Άρα $E=(APQ)-E_2=R^2\sqrt{3}-\frac{πR^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{8}=$

$=\frac{7R^2\sqrt{3}}{8}-\frac{πR^2}{6}\Leftrightarrow E=\frac{R^2}{24}(21\sqrt{3}-4π)$.

Τάξη: Β΄

Αναλυτική γεωμετρία

Τσόπελας Γιάννης – Δεδότση Βασιλική, Παράρτημα Ε.Μ.Ε **Ν. Ηλείας**

Θέμα 1: Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=5$, $\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=2$

α) Δείξτε ότι $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|$ και στη συνέχεια ότι:

$$|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=1$$

β) Αν $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta},\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ να βρείτε

i) Τα μέτρα $|\vec{u}|,|\vec{v}|$

ii) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$

iii) Το συνημίτονο της γωνίας $(\vec{u},\vec{v})$

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=5\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+\dfrac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}{2}=5$

$\Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=10\qquad(1)$

$\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=2\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=2\Leftrightarrow\dfrac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}{2}+|\vec{\beta}|^2=2$

$\Leftrightarrow 2|\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=4\qquad(2)$

Από τις (1) , (2) προκύπτει ότι

$4|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=10|\vec{\beta}|^2+5|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow4|\vec{\alpha}|^2-3|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|-10|\vec{\beta}|^2=0$

$\Leftrightarrow4|\vec{\alpha}|^2-8|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|+5|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|-10|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$

$(|\vec{\alpha}|-2|\vec{\beta}|)(4|\vec{\alpha}|+5|\vec{\beta}|)=0$

$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|-2|\vec{\beta}|=0(3)$ ή $4|\vec{\alpha}|+5|\vec{\beta}|=0\quad(4)$

Η (3) δεκτή και η (4) απορρίπτεται, τελικά $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|$ και αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει $4|\vec{\beta}|^2=4$ οπότε $|\vec{\beta}|=1$ και $|\vec{\alpha}|=2$.

β) Από το (α) ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$.

i) $|\vec{u}|^2=|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|^2=4|\vec{\alpha}|^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9|\vec{\beta}|^2=37\Leftrightarrow|\vec{u}|=\sqrt{37}$

$|\vec{v}|^2=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2=4\Leftrightarrow|\vec{v}|=2$

ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=2|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-6|\vec{\beta}|^2=1$

iii) $\text{συν}(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{1}{2\sqrt{37}}=\dfrac{\sqrt{37}}{74}$

Θέμα 2: Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0},\ |\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\gamma}|=\sqrt{7},\ (\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$$

α) Δείξτε ότι $|\vec{\beta}|=1$.

β) Δείξτε ότι $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\perp(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma})$

γ) Βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε

$$|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=|2\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}|\qquad(1)$$

Λύση: α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Οπότε :

$|\vec{\gamma}|^2=|-\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\Leftrightarrow$

$7=4+2\cdot2\cdot|\vec{\beta}|\cdot\dfrac{1}{2}+|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\beta}|-3=0\Leftrightarrow$

$(|\vec{\beta}|-1)\cdot(|\vec{\beta}|+3)=0\overset{|\vec{\beta}|>0}{\Leftrightarrow}|\vec{\beta}|=1$

Επιπλέον προκύπτει και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}\dfrac{\pi}{3}=1$

β) Επειδή: $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=$ $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-4\vec{\beta}^2=4-4=0$

προκύπτει το ζητούμενο $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\perp(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma})$

γ) Η (1) ισοδύναμα γράφεται: $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|^2=|2\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})+\lambda^2\vec{\beta}^2=4\vec{\alpha}^2-2(2\vec{\alpha})\cdot(\lambda\vec{\beta})+\lambda^2\vec{\beta}^2\Leftrightarrow$

$4+2\lambda=16-4\lambda\Leftrightarrow6\lambda=12\Leftrightarrow\lambda=2$

Θέμα 3: Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και $|\overrightarrow{AM}|=\frac{15}{2}$.

α) Υπολογίστε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και στη συνέχεια δείξτε ότι $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{4}$

β) Δείξτε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=3\vec{\alpha}+2\sqrt{2}\vec{\beta}$ διχοτομεί την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ) Αν για το σημείο Ν του επιπέδου ισχύει $\overrightarrow{NM}\cdot(\overrightarrow{NM}-2\overrightarrow{NA})=50$, να δείξετε ότι το Ν ανήκει σε κύκλο κέντρου Α και ακτίνας $\rho=\frac{5}{2}$.

Λύση: (α) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\dfrac{6\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$ άρα:

$|\overrightarrow{AM}|^2=\dfrac{|6\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2}{4}=\dfrac{36\vec{\alpha}^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2}{4}\Leftrightarrow$

$$\frac{225}{4}=\frac{288-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9}{4}\Leftrightarrow 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=72\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=6$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{4}$$

(β) $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{u})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{|\vec{\alpha}||\vec{u}|}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\left(3\vec{\alpha}+2\sqrt{2}\vec{\beta}\right)}{|\vec{\alpha}||\vec{u}|}=\dfrac{24+12\sqrt{2}}{2\sqrt{2}|\vec{u}|}=\dfrac{6\sqrt{2}+6}{|\vec{u}|}$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{u}}{|\vec{\beta}||\vec{u}|}=\frac{\vec{\beta}\cdot\left(3\vec{\alpha}+2\sqrt{2}\vec{\beta}\right)}{|\vec{\beta}||\vec{u}|}=\frac{18+18\sqrt{2}}{3|\vec{u}|}=\frac{6\sqrt{2}+6}{|\vec{u}|}$$

Τελικά $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{u}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha},\vec{u}\right)=\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)$

οπότε ο φορέας του $\vec{u}$ διχοτομεί τη γωνία $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$

(γ) $\overrightarrow{NM}\cdot\left(\overrightarrow{NM}-2\overrightarrow{NA}\right)=50\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=50$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\left|\overrightarrow{AN}\right|^2=50\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AN}\right|^2=\dfrac{225}{4}-50\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AN}\right|^2=\dfrac{25}{4}$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{5}{2}$ Άρα το Ν ανήκει σε κύκλο κέντρου Α

και ακτίνας $\rho=\dfrac{5}{2}$

Θέμα 4: Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\mathbf{x^2-\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)x+7=0\qquad(1)}$$

και τα σημεία $A\left(x_1,\lambda-1\right)$, $B\left(x_2,\lambda+1\right)$ όπου $x_1<x_2$ οι ρίζες της (1). Το σημείο Β δεν ανήκει στον xx΄ και το μέσο Μ του ΑΒ έχει τετμημένη 4.

(α) Δείξτε ότι λ = 5 και βρείτε τα σημεία Α, Β.

(β) Βρείτε σημεία Γ, Δ τέτοια ώστε το Γ να ανήκει στον x΄x και ΑΓΒΔ ρόμβος.

(γ) Αν Κ(0,5) να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{KA}$ με τον x΄x.

Λύση: (α) Αφού $x_1<x_2$ οι ρίζες της (1) από το τύπο Vieta για το άθροισμα των ριζών της (1):

$$x_1+x_2=\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{1}=\lambda^2-4\lambda+3$$

Το μέσο Μ του ΑΒ έχει $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\lambda^2-4\lambda+3}{2}$

άρα $\dfrac{\lambda^2-4\lambda+3}{2}=4\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda-5=0\Leftrightarrow\lambda=-1$ ή $\lambda=5$.

Όμως το $B\left(x_2,\lambda+1\right)$ δεν ανήκει στον x΄x οπότε $\lambda\neq-1$.Τελικά λ = 5. Για λ = 5 η εξίσωση (1) γίνεται: $x^2-8x+7=0$ και έχει ρίζες $x_1=1$, $x_2=7$. Έτσι προκύπτουν τα σημεία $A\left(1,4\right)$, $B\left(7,6\right)$

(β) Οι διαγώνιοι ΑΒ και ΓΔ του ρόμβου διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα οπότε η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το μέσο Μ(4,5) του ΑΒ και είναι κάθετη στην ΑΒ.

$$\lambda_{AB}=\frac{6-4}{7-1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow\lambda_{\Gamma\Delta}=-3$$

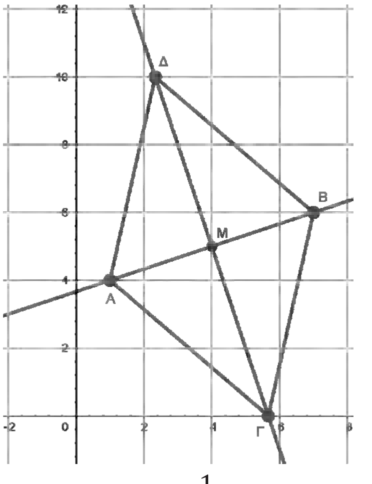
Άρα η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση

$$y-5=-3\left(x-4\right)\Leftrightarrow y=-3x+17.$$

Η ευθεία ΓΔ τέμνει τον άξονα x΄x στο $\Gamma\left(\dfrac{17}{3},0\right)$

και επειδή Μ μέσο ΓΔ:

$$\begin{cases}x_\Delta=2x_M-x_\Gamma=8-\dfrac{17}{3}=\dfrac{7}{3}\\ y_\Delta=2y_M-y_\Gamma=10-0=10\end{cases}\text{ Άρα }\Delta\left(\frac{7}{3},10\right)$$



(γ) $\overrightarrow{KA}=\left(1,-1\right)\Rightarrow\lambda_{\overrightarrow{AK}}=\dfrac{-1}{1}=-1\Rightarrow\varepsilon\varphi\omega=-1$

$\Rightarrow\omega=135^0$ ή $\omega=315^0$

και επειδή το $\overrightarrow{KA}$ έχει θετική τετμημένη και αρνητική τεταγμένη θα ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο δηλαδή $\omega=315^0$.

Θέμα 5: (Α) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δείξτε ότι: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2\right)$

(Κανόνας του παραλληλογράμμου)

(Β) Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Αν ισχύουν: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{7}$, $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{7}$, $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

α) Δείξτε ότι $\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{\beta}\right|=1$

β) Βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

γ) Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύουν $\left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{7}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-\dfrac{5}{2}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=-\dfrac{9}{2}$, να δείξετε ότι $\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Λύση

(Α) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2=$
$2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2\right)$

(Β) Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου και με δεδομένο ότι

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{7}$, $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{7}$ προκύπτει :

$2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2\right)=8 \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2=4(1)$

Επιπλέον $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\dfrac{\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|}=\dfrac{\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2}{\sqrt{7}}=2\dfrac{\sqrt{7}}{7}\Leftrightarrow$

$\left|\vec{\alpha}\right|^2-\left|\vec{\beta}\right|^2=2(2)$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) παίρνουμε:

$\left|\vec{\alpha}\right|^2=3,\left|\vec{\beta}\right|^2=1 \Rightarrow \left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{3},\left|\vec{\beta}\right|=1$

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=7 \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2=7 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\dfrac{3}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{6}$$

(Γ)

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\gamma}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+2\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

Θέμα 6: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ⊥ΑΒ. Αν Α(2,3), Γ(–3,–2) και η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση y = – 3x+9 :

(α) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ και να δείξετε ότι Β(1,6).

(β) Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών ΑΒ, ΒΓ.

(γ) Βρείτε ευθεία παράλληλη της ΒΓ η οποία τέμνει τον x΄x στο Κ, τον y΄y στο Λ και ισχύει

$$\mathbf{x_K - y_\Lambda = -4044}\ .$$

(δ) βρείτε τις εφαπτόμενες της παραβολής $(C): y^2 = 20x$ που διέρχονται από το Β.

Λύση: $\lambda_{AM}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow AM: y-3=\dfrac{1}{3}(x-2)\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$

Έστω $M\left(\mu,\dfrac{\mu+7}{3}\right)$ και $B(\beta,-3\beta+9)$ αφού Μ μέσο ΒΓ

$\beta-3=2\mu$

$9-3\beta-2=2\dfrac{\mu+7}{3}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\beta=1,\mu=-1$. Τελικά Β(1,6).

(β) η ευθεία ΒΓ έχει κλίση λ=2 και εξίσωση $y-6=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x+4$

$\vec{\delta}_1=(1,2)//Β\Gamma$ και $\vec{\delta}_2=(-1,3)//AB$

$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2\right)=\dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{\left|\vec{\delta}_1\right|\left|\vec{\delta}_2\right|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε η ζητούμενη γωνία είναι $\dfrac{\pi}{4}$.

(γ) έστω $y=2x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία τότε $\Lambda(0,\beta)$

$$K\left(-\frac{\beta}{2},0\right).$$

Ισχύει $x_K-y_\Lambda=-4044\Rightarrow\ldots\beta=2022$ άρα η ζητούμενη ευθεία είναι $y=2x+2022$.

(δ) Αν $N(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής τότε $y_1^2=20x_1$ (1) και η εφαπτομένη $yy_1=10(x+x_1)$ διέρχεται από το Β(1,6) οπότε $6y_1=10(1+x_1)$ (2) από το σύστημα των (1), (2) προκύπτουν τα σημεία επαφής $N_1\left(\dfrac{1}{5},2\right)$, $N_2(5,10)$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες $y=5x+1, y=x+5$

Θέμα 7: Δίνονται τα σημεία Ε΄(–2,0) και Ε(2,0)

(α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει $(ME)^2+(ME')^2=5(MEE')$

(β) Θεωρούμε τους κύκλους $C_1: x^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

$$\mathbf{C_2: x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.}$$

(i) Βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_1, C_2 .

(ii) Αν ε_1, ε_2 οι εφαπτόμενες του (i) ερωτήματος οι οποίες διέρχονται από την αρχή Ο των αξόνων να βρείτε την υπερβολή με εστίες Ε, Ε΄ και ασύμπτωτες τις ε_1, ε_2 .

Λύση: (α) $(ME)^2+(ME')^2=5(MEE')\Leftrightarrow$

$(2-x)^2+y^2+(-2-x)^2+y^2=\dfrac{5}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{EE'},\overrightarrow{EM}\right)\right|\Leftrightarrow$

$2x^2+2y^2+8=\dfrac{5}{2}|-4y|\Leftrightarrow x^2+y^2+4=5|y|\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l}x^2+y^2-5y+4=0, y>0\\ x^2+y^2+5y+4=0, y<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}, y>0\\ x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}, y<0\end{array}\right.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι οι κύκλοι

$$C_1: x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4},\ C_2: x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

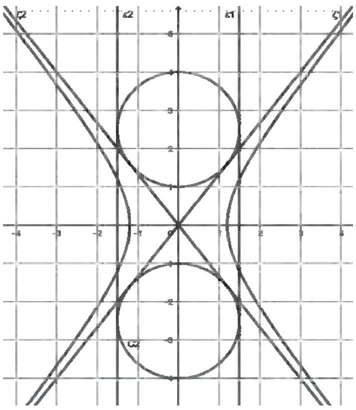
β) Έστω $K\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$, $K\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ τα κέντρα και $\rho_1=\rho_2=\dfrac{3}{2}$ οι ακτίνες των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Επειδή (ΚΛ) > $\rho_1+\rho_2$, οι κύκλοι είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου επομένως έχουν 4 κοινές εφαπτόμενες .Οι δύο από αυτές είναι οι κατακόρυφες $(\varepsilon_1) x=\dfrac{3}{2}$, $(\varepsilon_2) x=-\dfrac{3}{2}$. Αναζητούμε κοινές εφαπτόμενες (ζ) με εξίσωση: $y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow\lambda x-y+\beta=0$.

$$d\left(K,(\zeta)\right)=\rho_1 \Leftrightarrow \frac{\left|\beta-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{3}{2}(1)$$

$$d\left(K,(\zeta)\right)=\rho_1 \Leftrightarrow \frac{\left|\beta+\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{3}{2}(2)$$

Από (1) και (2) : $\left|\beta-\frac{5}{2}\right|=\left|\beta+\frac{5}{2}\right| \Leftrightarrow \beta=0$

Για β = 0: $(1)\Leftrightarrow 3\sqrt{\lambda^2+1}=5 \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{4}{3}$. Τελικά οι άλλες δύο κοινές εφαπτόμενες είναι οι $y=\pm\frac{4}{3}x$



(ii) Αναζητούμε υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου: $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{4}{3}$ και $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2=4$. Τελικά προκύπτει $\alpha^2=\frac{36}{25}$ και $\beta^2=\frac{64}{25}$ και η υπερβολή $\frac{x^2}{\frac{36}{25}}-\frac{y^2}{\frac{64}{25}}=1$.

ΘΕΜΑ 8: Δίνεται η παραβολή $(C): y^2=4x$ και το σημείο της $A(4,-4)$

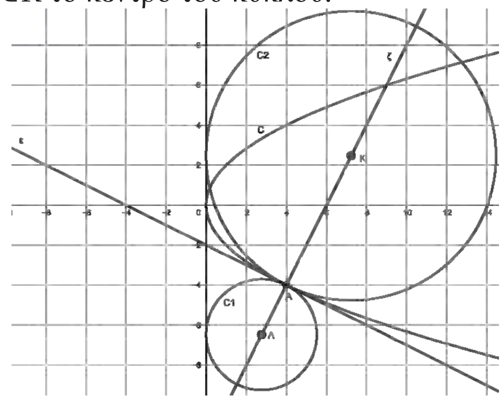
(α) Βρείτε την εφαπτομένη της (C) στο A.
(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται της παραβολής (C) στο A αλλά και του άξονα yy΄.
(κύκλος και παραβολή εφάπτονται όταν έχουν στο κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη).
(γ) Αν (ζ) η ευθεία της διακέντρου των κύκλων του β) ερωτήματος να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $C_3: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ που είναι παράλληλες στην (ζ) .

Λύση: (α) Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$$y(-4)=2(x+4) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-2$$

(β) Έστω (C_1) κύκλος που εφάπτεται της παραβολής (C) στο A.

Τότε η (ε): $y=-\frac{1}{2}x-2$ είναι εφαπτόμενη και του κύκλου στα A, οπότε η κάθετη της (ε) στο A διέρχεται από το κέντρο του κύκλου δηλαδή η ευθεία $y+4=2(x-4)\Leftrightarrow y=2x-12$ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Έστω λοιπόν K(κ, 2κ–12) κ∈R το κέντρο του κύκλου.



Πρέπει:

$$d(K,yy')=d(K,A)\Leftrightarrow|\kappa|=\sqrt{(4-\kappa)^2+(-4-2\kappa+12)^2}$$

$$\Leftrightarrow 5(\kappa-4)^2=\kappa^2 \Leftrightarrow \kappa=5\pm\sqrt{5}$$

Για $\kappa=5+\sqrt{5}$ ο κύκλος έχει κέντρο

- $K\left(5+\sqrt{5},2\sqrt{5}-2\right)$ και ακτίνα $\rho_1=5+\sqrt{5}$
- Για $\kappa=5+\sqrt{5}$ ο κύκλος έχει κέντρο $\Lambda\left(5-\sqrt{5},-2\sqrt{5}-2\right)$ και ακτίνα $\rho_2=5-\sqrt{5}$

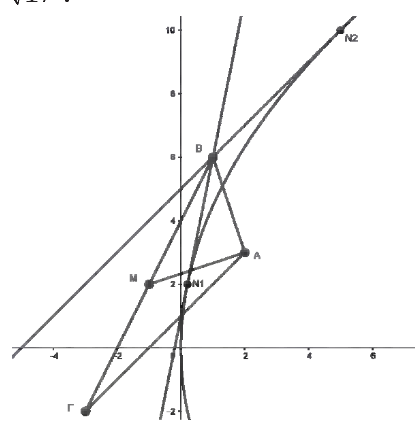
(γ) Η ευθεία της διακέντρου (ζ) έχει εξίσωση y=2x–12 οπότε αναζητούμε εφαπτόμενη παράλληλη της (ζ) δηλαδή της μορφής (η):

y = 2x + β.

Θεωρούμε το σύστημα $\frac{x^2}{4}+y^2=1,\ y=2x+\beta$ και αντικαθιστώντας το y προκύπτει η παρακάτω εξίσωση: $17x^2+16\beta x+4\beta^2-4=0$ (1)

Οι (C_3) και (η) εφάπτονται αν και μόνο αν η (1) έχει Δ = 0. $\Delta=0\Leftrightarrow\beta^2=17\Leftrightarrow\beta=\pm\sqrt{17}$

Τελικά οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι $y=2x\pm\sqrt{17}$.



Τάξη: Γ΄

Γενικά Θέματα Ανάλυσης

Σπύρος Γιαννακόπουλος

**"εγώ θα σας πω
πόσο αγάπησα τη θάλασσα,
τα καράβια
θα τα ζωγραφίσετε εσείς".**

*Η μελέτη των παρακάτω θεμάτων απαιτεί πολύ **καλή γνώση** του θεωρητικού υπόβαθρου. Έγινε προσπάθεια να συμπεριληφθούν όσο το δυνατόν **περισσότερες λεπτομέρειες** που πρέπει να είναι γνωστές για την αντιμετώπιση των εξετάσεων.*

Θέμα 1ο: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:R\to R$, $g:R\to R$ για τις οποίες έχουμε $f(x)-e^{-f(x)}=$ $=x-1$ (1) για κάθε $x\in R$ και η g είναι αντιστρέψιμη με $g(R)=R$

α. i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφή της συνάρτηση.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. i. Να δείξετε ότι $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$, όταν το σύνολο τιμών της gof είναι το R.

ii. Αν $(gof)(R)=R$ και $(gof)^{-1}(x^3+1)=f^{-1}(x+1)$ για κάθε $x\in R$ να βρείτε τον τύπο της g και να λύσετε την εξίσωση:

$$g^2\left(\left|ημx+\sqrt{3}συνx\right|+1\right)+\left|ημ\left(ημx+\sqrt{3}συνx\right)\right|^6-$$
$$2g\left(\left|ημx+\sqrt{3}συνx\right|+1\right)+2\left|ημ\left(ημx+\sqrt{3}συνω\right)\right|^3=$$
$$-1+2g\left(\left|ημx+\sqrt{3}συνx\right|+1\right)\left|ημ\left(ημx+\sqrt{3}συνx\right)\right|^3 \quad (2).$$

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx\ge \frac{1}{4}$.

Λύση: α. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $φ(x)=x-e^{-x}, x\in R$. Η $φ$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $φ'(x)=1+e^{-x}>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η $φ$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι "1−1". Η (1) γράφεται $φ(f(x))=x-1$ (3) για κάθε $x\in R$. Έστω τυχαίο $y_0\in R$, τότε θα υπάρχει $x_0\in R$ με $x_0=y_0-e^{-y_0}+1$.

Για $x=x_0$ $(3)\Rightarrow φ(f(x_0))=x_0-1=y_0-e^{-y_0}\Leftrightarrow$

$φ(f(x_0))=φ(y_0)\overset{φ\ "1-1"}{\Leftrightarrow} f(x_0)=y_0$. Άρα για κάθε $y\in R$ υπάρχει $x\in D_f=R$, ώστε $f(x)=y$.

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το R. Για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$

$φ(f(x_1))=φ(f(x_2))\overset{(3)}{\Leftrightarrow}x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα η f είναι "1−1", οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το R. Αντικαθιστούμε στην (1) το x με το $f^{-1}(x)\in R$ και παίρνουμε:

$f(f^{-1}(x))-e^{-f(f^{-1}(x))}=f^{-1}(x)-1\Leftrightarrow$

$x-e^{-x}=f^{-1}(x)-1\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x-e^{-x}+1, x\in R.$

ii. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $(f^{-1})'(x)=1+e^{-x}$.

Άρα $(f^{-1})'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Συνεπώς η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.Για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με

$x_1<x_2\Rightarrow f^{-1}(f(x_1))<f^{-1}(f(x_2))\overset{f^{-1}\ γν.αυξ.}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. i. Έχουμε $f^{-1}:R\to R$ και $g^{-1}:R\to R$.

Για κάθε $x\in D_f=R$ έχουμε $f(x)\in D_g=R$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση gof με πεδίο ορισμού το R. Η g ως αντιστρέψιμη είναι "1−1".

Για κάθε $x_1,x_2\in D_{gof}=R$ με $(gof)(x_1)=$

$(gof)(x_2)\Leftrightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))\overset{g\ "1-1"}{\Leftrightarrow}$

$f(x_1)=f(x_2)\overset{f\ "1-!"}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$.

Άρα η συνάρτηση gof είναι "1−1", οπότε είναι αντιστρέψιμη και έχουμε $(gof)^{-1}:R\to R$.

Για κάθε $x\in D_{g^{-1}}=R$ έχουμε $g^{-1}(x)\in D_{f^{-1}}=R$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}og^{-1}$ με πεδίο ορισμού το R.

- $D_{(gof)^{-1}}=D_{f^{-1}og^{-1}}=R$ (*)
- Έστω $z\in R$, τότε $(gof)^{-1}(z)=ω\in R$ (4).

$(4)\Leftrightarrow z=(gof)(ω)\Leftrightarrow g(f(ω))=z\Leftrightarrow$

$f(ω)=g^{-1}(z)\Leftrightarrow ω=f^{-1}(g^{-1}(z))\Leftrightarrow ω=(f^{-1}og^{-1})(z)$ (5).

Για κάθε $z\in R$ από τις (4), (5) έχουμε

$(gof)^{-1}(z)=(f^{-1}og^{-1})(z)$ (**)

Άρα από τις (*), (**) προκύπτει ότι $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$.

ii. Με βάση το ερώτημα β i έχουμε

$(gof)^{-1}(x^3+1)=f^{-1}(x+1)\Leftrightarrow$

$(f^{-1}og^{-1})(x^3+1)=f^{-1}(x+1)\Leftrightarrow$

$f^{-1}(g^{-1}(x^3+1))=f^{-1}(x+1)\overset{f^{-1}\ "1-1"}{\Leftrightarrow}$

$g^{-1}(x^3+1)=x+1\Leftrightarrow g(x+1)=x^3+1$.

Θέτουμε $x+1=t\Leftrightarrow x=t-1$ και έχουμε

$g(t)=(t-1)^3+1\Leftrightarrow g(x)=(x-1)^3+1, x\in R$.

Θέτουμε $\eta\mu x+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=\omega$ και η (2) γράφεται

$g^2(|\omega|+1)+|\eta\mu\omega|^6-2g(|\omega|+1)+2|\eta\mu\omega|^3=$

$-1+2g(|\omega|+1)|\eta\mu\omega|^3\Leftrightarrow$

$g^2(|\omega|+1)+(|\eta\mu\omega|^3)^2+1-2g(|\omega|+1)|\eta\mu\omega|^3-$

$-2g(|\omega|+1)+2|\eta\mu\omega|^3=0\Leftrightarrow$

$(g(|\omega|+1)-|\eta\mu\omega|^3-1)^2=0\Leftrightarrow$

$g(|\omega|+1)-|\eta\mu\omega|^3-1=0\Leftrightarrow$

$g(|\omega|+1)=|\eta\mu\omega|^3+1\Leftrightarrow|\omega|^3+1=|\eta\mu\omega|^3+1\Leftrightarrow$

$|\eta\mu\omega|=|\omega|\Leftrightarrow\omega=0\Leftrightarrow\eta\mu x+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ (6). Αν για κάποια ρίζα ρ της (6) είναι $\sigma\upsilon\nu\rho=0$, τότε $(6)\Rightarrow\eta\mu\rho=0$. Άτοπο. Άρα για τα x που ζητάμε είναι $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$, οπότε

$(6)\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3},\kappa\in Z$.

γ. Αρχικά θα δείξουμε ότι $e^{-f(x)}\geq -f(x)+1$ για κάθε $x\in R$. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\ln x\leq x-1$. Αντικαθιστούμε το x με το $e^{-f(x)}>0$ και παίρνουμε $\ln e^{-f(x)}\leq e^{-f(x)}-1\Leftrightarrow -f(x)\leq e^{-f(x)}-1\Leftrightarrow$ $e^{-f(x)}\geq -f(x)+1$ για κάθε $x\in R$.

Αφού η f είναι συνεχής από την τελευταία σχέση έχουμε $\int_0^1 e^{-f(x)}dx\geq -\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 1dx\Leftrightarrow$

$\int_0^1 e^{-f(x)}dx\geq -\int_0^1 f(x)dx+1$ (7). Επίσης από την (1) παίρνουμε $\int_0^1\left(f(x)-e^{-f(x)}\right)dx=$

$\int_0^1(x-1)dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 e^{-f(x)}dx=$

$\left[\dfrac{x^2}{2}-x\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 e^{-f(x)}dx=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\int_0^1 e^{-f(x)}dx=\int_0^1 f(x)dx+\dfrac{1}{2}\overset{(7)}{\Rightarrow}$

$\int_0^1 f(x)dx+\dfrac{1}{2}\geq -\int_0^1 f(x)dx+1\Leftrightarrow$

$2\int_0^1 f(x)dx\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\geq\dfrac{1}{4}$.

Θέμα 2ο: Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και οι ευθείες $\varepsilon_1:y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, $\varepsilon_2:y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

i. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)+1=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

ii. Αν $f(-1)=3$ και $f(2)=5$, να δείξετε ότι υπάρχουν $r_1\in(-3,0)$, $r_2\in(0,3)$ με $r_2-r_1=3$ ώστε να ισχύει $f'(r_1+2)=f'(r_2-1)$.

Λύση: i. Αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f. Η ευθεία ε_1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$. Επίσης η ευθεία ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$.

$f(x)=(f(x)-2x)+2x\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(2,+\infty)$.

$f(x)+1=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha-1$.

- Αν $\alpha-1\leq 2\Leftrightarrow\alpha\leq 3$, το $\alpha-1$ δεν είναι τιμή της f, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha-1>2\Leftrightarrow\alpha>3$, το $\alpha-1$ είναι τιμή της f, οπότε η εξίσωση έχει ρίζα στο R η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(-1)}{3}\Leftrightarrow$

$f'(\xi)=\dfrac{2}{3}$ (1).

$-1<\xi<2\Leftrightarrow -3<\xi-2<0$. Υπάρχει $r_1\in(-3,0)$ τέτοιο ώστε $\xi-2=r_1\Leftrightarrow\xi=r_1+2$, οπότε

$(1)\Rightarrow f'(r_1+2)=\dfrac{2}{3}$. Επίσης $-1<\xi<2\Leftrightarrow 0<\xi+1<3$.

Υπάρχει $r_2 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $\xi+1=r_2 \Leftrightarrow \xi = r_2 - 1$, οπότε $(1) \Rightarrow f'(r_2-1)=\frac{2}{3}$.

Είναι $r_1+2=r_2-1 \Leftrightarrow r_2-r_1=3$ και $f'(r_1+2)=f'(r_2-1)$.

Θέμα 3°: α. Αν $\alpha \in R\text{-}\{0\}$ και ν θετικός ακέραιος άρτιος, δείξτε ότι η ισότητα $x^\nu+\alpha^\nu=(x+\alpha)^\nu$ (1) ισχύει μόνο όταν $x=0$.

β. Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ έχουμε ότι:

$$\left[f(x)-(e^x+1)(x^3-3x+1)\right]^4+16=\left[f(x)-(e^x+1)(x^3-3x+1)+2\right]^4 \quad (2).$$

i. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με τον άξονα $x'x$ ακριβώς τρία κοινά σημεία.

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Λύση: α. Προφανώς η (1) ισχύει για $x=0$. Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει και για $x=\rho$ με $\rho\neq 0$ δηλαδή $\rho^\nu+\alpha^\nu=(\rho+\alpha)^\nu$. Έστω ότι είναι $\rho<0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=(x+\alpha)^\nu-x^\nu-\alpha^\nu, x\in R$.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[\rho,0]$, παραγωγίσιμη στο $(\rho,0)$ με $\varphi'(x)=\nu(x+\alpha)^{\nu-1}-\nu x^{\nu-1}$ και $\varphi(\rho)=\varphi(0)=0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho,0)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi)=0 \Leftrightarrow (\xi+\alpha)^{\nu-1}=\xi^{\nu-1}$ (3). Αφού ο ν είναι άρτιος, ο $\nu-1$ είναι περιττός , οπότε $(3)\Leftrightarrow \xi+\alpha=\xi \Leftrightarrow \alpha=0$. Άτοπο. Όμοια αν $\rho>0$. Άρα η ισότητα $x^\nu+\alpha^\nu=(x+\alpha)^\nu$ ισχύει μόνο όταν $x=0$.

β. Με βάση το ερώτημα α και την (2) έχουμε

$f(x)-(e^x+1)(x^3-3x+1)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)=(e^x+1)(x^3-3x+1), x\in R$.

i. Ζητάμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow (e^x+1)(x^3-3x+1)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3-3x+1$, $x\in R$. Η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Έχουμε $g(-2)=-1$, $g(0)=1$ και $g(1)=-1$, $g(2)=3$, οπότε $g(-2)g(0)=-1<0$, $g(0)g(1)=-1<0$ και $g(1)g(2)=-3<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$. Όμως η εξίσωση είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού. Συνεπώς οι ρίζες που υπάρχουν είναι μοναδικές.

ii. Σύμφωνα με το ερώτημα β i υπάρχουν μοναδικά $\rho_1\in(-2,0)$, $\rho_2\in(0,1)$ και $\rho_3\in(1,2)$ τέτοια ώστε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη. Άρα εφαρμόζεται για την f το θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Επίσης η f' είναι παραγωγίσιμη, οπότε εφαρμόζεται για την f' το θεώρημα του Rolle στο $[\xi_1,\xi_2]$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $r\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(r)=0$. Συνεπώς η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R.

iii. Έστω τυχαίο $y_0\in R$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-y_0, x\in R$. Η συνάρτηση h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$, οπότε υπάρχει τέτοιο ώστε $h(\kappa)<0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

Έτσι έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$, οπότε υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $h(\lambda)>0$.

$h(\kappa)h(\lambda)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,\lambda)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=y_0$. Άρα για κάθε $y\in R$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x\in D_f=R$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το R.

Θέμα 4°: Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} \ln x, & 0<x<1 \\ e^x-e, & x\ge 1 \end{cases}.$$

α. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

β. Θέτουμε $$\varphi(x)=(f+g)(x)=\begin{cases} \ln x+\sqrt{x}, & 0<x<1 \\ \sqrt{x}+e^x-e, & x\ge 1 \end{cases}.$$

i. Να μελετήσετε την φ ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της φ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

γ. Για τη συνάρτηση φ του ερωτήματος β.

i. **Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha>1$.**

ii. **Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του ερωτήματος γ i να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha)$ και να εξετάσετε αν είναι καλά ορισμένο το όριο**

$$A=\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{E(\alpha)\eta\mu\frac{1}{E(\alpha)}+\alpha e^{-\alpha}-\frac{1+2\alpha}{\alpha}}.$$

Λύση: α. $D_f=R$, $D_g=(0,+\infty)$, $D_f\cap D_g=(0,+\infty)$.

Ορίζεται η συνάρτηση $f+g$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.

- Αν $0<x<1$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\ln x+\sqrt{x}$.
- Αν $x\ge 1$,$(f+g)(x)=\sqrt{x}+e^x-e$.

Άρα ο τύπος της συνάρτησης $f+g$ είναι

$$(f+g)(x)=\begin{cases}\ln x+\sqrt{x}\ ,0<x<1\\ \sqrt{x}+e^x-e, x\ge 1\end{cases}.$$

β. i. Η φ στο διάστημα $(0,1)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$. Όμοια στο διάστημα $(1,+\infty)$ η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^x>0$. Θα εξετάσουμε αν η φ είναι συνεχής στο 1.

$\varphi(1)=1$. $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\ln x+\sqrt{x}\right)=1=\varphi(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}+e^x-e\right)=1=\varphi(1)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\varphi(1)$, οπότε η φ είναι συνεχής στο 1. Έτσι έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,1)\cup(1,+\infty)\\ \qquad\varphi \text{ συνεχής στο } 1\end{array}\right.\Rightarrow \varphi \text{ γνη-}$$

σίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Επειδή $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ πιθανό κρίσιμο σημείο της φ στο $(0,+\infty)$ είναι το 1.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x+\sqrt{x}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\left(\ln x+\sqrt{x}-1\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{3}{2}\ .$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x}+e^x-e-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\left(\sqrt{x}+e^x-e-1\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^x\right)=\frac{1}{2}+e$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\ne\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}$ η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1, οπότε το 1 είναι το μόνο κρίσιμο σημείο της φ στο $(0,+\infty)$·

γ. i. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[1,\alpha]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\alpha)=\int_1^\alpha|\varphi(x)|dx$.

Για κάθε $x\in[1,\alpha]\Rightarrow x\ge1\overset{\varphi \text{ γν.αύξ}}{\Rightarrow}\varphi(x)\ge\varphi(1)\Leftrightarrow$ $\varphi(x)\ge1\Rightarrow\varphi(x)>0$.

Άρα $E(\alpha)=\int_1^\alpha\varphi(x)dx=\int_1^\alpha\left(\sqrt{x}+e^x-e\right)dx=$

$$\int_1^\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}+e^x-e\right)dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+e^x-ex\right]_1^\alpha=$$

$\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+e^\alpha-e\alpha-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(\alpha\sqrt{\alpha}-1\right)+e^\alpha-e\alpha$ τετρ. μονάδες.

ii. $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{2}{3}\left(\alpha\sqrt{\alpha}-1\right)+e^\alpha-e\alpha\right]=$

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left[\alpha\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}-e\right)-\frac{2}{3}+e^\alpha\right]$.

Είναι $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left[\alpha\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}-e\right)\right]=+\infty$ και $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}e^\alpha=+\infty$, άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=+\infty$.

Το όριο Α είναι καλά ορισμένο όταν κοντά στο $+\infty$ είναι $E(\alpha)\eta\mu\frac{1}{E(\alpha)}+\alpha e^{-\alpha}-\frac{1+2\alpha}{\alpha}\ge0$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(E(\alpha)\eta\mu\frac{1}{E(\alpha)}\right)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{E(\alpha)}}{\frac{1}{E(\alpha)}}\underset{u\to0^+}{\overset{\frac{1}{E(\alpha)}=u}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\alpha e^{-\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{e^\alpha}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(\alpha)'}{\left(e^\alpha\right)'}=$$

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{e^\alpha}=0$. $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1+2\alpha}{\alpha}=2$.

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(E(\alpha)\eta\mu\frac{1}{E(\alpha)}+\alpha e^{-\alpha}-\frac{1+2\alpha}{\alpha}\right)=-1$, οπότε κοντά στο $+\infty$ είναι $E(\alpha)\eta\mu\frac{1}{E(\alpha)}+\alpha e^{-\alpha}-\frac{1+2\alpha}{\alpha}<0$, που σημαίνει ότι το όριο Α δεν είναι καλά ορισμένο.

Θέμα 5ο: α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει: $xe^{x}\left(e^{\eta\mu x}+2\right)\ge e^{\eta\mu x}\left(e^{x}+2\right)\eta\mu x$ (1).

β. Δείξτε ότι η εξίσωση $xe^{x}\left(e^{\eta\mu x}+2\right)=e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xe^{x}\left(e^{\eta\mu x}+2\right)$ και x_0 η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος β. Δείξτε ότι:

i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x_0)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)>3e^{x_0}$.

ii. $e^{\frac{\pi}{2}}+2>3x_0e^{x_0-1}$.

δ. Αν x_0 η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος β, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{x_0} e^{\eta\mu x}\left(e^{x}+2\right)\eta\mu x\,dx< ex_0\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right).$$

Λύση: α. • Αν $x=0$ η (1) ισχύει ως ισότητα.

• Αν $x\in(0,\pi]$ τότε : $e^{\eta\mu x}>0, e^{x}>0$ και

$(1)\Leftrightarrow x\dfrac{e^{\eta\mu x}+2}{e^{\eta\mu x}}\ge\dfrac{e^{x}+2}{e^{x}}\eta\mu x$ (2) .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{x}, x\in(0,+\infty)$ και η (2) γράφεται $xf\left(e^{\eta\mu x}\right)\ge f\left(e^{x}\right)\eta\mu x$ (3). Αρκεί να δείξουμε την (3). Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$,οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x\in(0,\pi]$ είναι $|\eta\mu x|<|x|\Leftrightarrow\eta\mu x<x$ $\Leftrightarrow e^{\eta\mu x}<e^{x}\Leftrightarrow f\left(e^{\eta\mu x}\right)>f\left(e^{x}\right)$. Επίσης $f\left(e^{\eta\mu x}\right)>0$ και $f\left(e^{x}\right)>0$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις $x>\eta\mu x$, $f\left(e^{\eta\mu x}\right)>f\left(e^{x}\right)$ και παίρνουμε $xf\left(e^{\eta\mu x}\right)>f\left(e^{x}\right)\eta\mu x$. Στη περίπτωση αυτή η (3) ισχύει ως ανισοτική σχέση. Συνοψίζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε την (1) για κάθε $x\in[0,\pi]$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=xe^{x}\left(e^{\eta\mu x}+2\right)-e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right), x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

• Η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

• $g(0)=-e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)<0$.

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}(e+2)-e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ από τη σχέση (1) του ερωτήματος α έχουμε $\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}(e+2)-e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)>0\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

Άρα $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow$

$x_0e^{x_0}\left(e^{\eta\mu x_0}+2\right)=e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$g'(x)=e^{x}\left(e^{\eta\mu x}+2\right)+xe^{x}\left(e^{\eta\mu x}+2\right)+xe^{x}e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x$

Είναι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η g είναι γνησίως αύξουσα και επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

γ. i. $D_h=R$. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,x_0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,x_0)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων. Σύμφωνα με θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x_0)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x_0)-h(0)}{x_0-0}=$

$\dfrac{x_0e^{x_0}\left(e^{\eta\mu x_0}+2\right)}{x_0}\Leftrightarrow h'(\xi)=e^{x_0}\left(e^{\eta\mu x_0}+2\right)$ (4) .

$\eta\mu x_0>0\Leftrightarrow e^{\eta\mu x_0}>1\Leftrightarrow e^{\eta\mu x_0}+2>3\overset{e^{x_0}>0}{\Leftrightarrow}$

$e^{x_0}\left(e^{\eta\mu x_0}+2\right)>3e^{x_0}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}h'(\xi)>3e^{x_0}$.

ii. Από το ερώτημα β έχουμε $h(x_0)=e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)$. Άρα για το ξ του γ i έχουμε

$$h'(\xi)=\frac{h(x_0)}{x_0}\Leftrightarrow h'(\xi)=\frac{e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)}{x_0}\overset{\gamma i}{>}3e^{x_0}\Leftrightarrow$$

$$e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)>3x_0e^{x_0}\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}}+2>3x_0e^{x_0-1}.$$

δ. Η συνάρτηση $h(x)=xe^x\left(e^{\eta\mu x}+2\right)$ του ερωτήματος γ είναι συνεχής στο $[0,x_0]$. Η (1) ισχύει ως ισότητα μόνο για $x=0$, οπότε:

$(1)\Rightarrow \int_0^{x_0} e^{\eta\mu x}\left(e^x+2\right)\eta\mu x dx<\int_0^{x_0} h(x)dx$ (5).

$h'(x)=e^x\left(e^{\eta\mu x}+2\right)+xe^x\left(e^{\eta\mu x}+2\right)+xe^x e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x\in[0,x_0]$ $h'(x)>0$, οπότε η h στο $[0,x_0]$ είναι γνησίως αύξουσα.

$$0\le x\le x_0 \Rightarrow h(x)\le h(x_0)\overset{(\beta)}{=}e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)\Leftrightarrow$$

$h(x)\le e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)$. Το "=" ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Έτσι έχουμε $\int_0^{x_0} h(x)dx<\int_0^{x_0} e\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right)\Leftrightarrow$

$$\int_0^{x_0} h(x)dx<ex_0\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right) \quad (6)$$

$$(5)\overset{(6)}{\Rightarrow}\int_0^{x_0} e^{\eta\mu x}\left(e^x+2\right)\eta\mu x dx<ex_0\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2\right).$$

Θέμα 6^o: Θεωρούμε την παραβολή $C: y=x^2$ και το σημείο $A(0,1)$.

i. Να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν ελάχιστη απόσταση από το A.

ii. Έστω M,N τα σημεία του ερωτήματος i και $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία M,N αντίστοιχα. Αν K το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής C που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=(KMN)$.

iii. Έστω ένα σημείο $T(x,y)$ πάνω στην παραβολή C με $x>\frac{\sqrt{2}}{4}$ και ζ η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο T. Όταν το T κινείται πάνω στην παραβολή προς την αρχή των αξόνων η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 0,5 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η ζ με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή που η ζ θα ταυτιστεί με την εφαπτομένη ε του ερωτήματος ii.

iv. Ας είναι E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις εφαπτομένες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και την παραβολή και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή και την ευθεία MN Να δείξετε ότι $E_2=2E_1$.

Λύση: i. Έστω η συνάρτηση $y(x)=x^2, x\in R$ με $y'(x)=2x$ και το σημείο $(x,y)\in C_y$. Η απόσταση του σημείου (x,y) από το σημείο A είναι $d=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow d(x)=\sqrt{x^2+\left(x^2-1\right)^2}, x\in R$. Η d γίνεται ελάχιστη όταν το υπόριζο γίνει ελάχιστο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2+\left(x^2-1\right)^2, x\in R$. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=2x+4x\left(x^2-1\right)=2x\left(2x^2-1\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης f.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
x		−		−	0	+		+	
$2x^2-1$		+	0	−		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		>	$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ολ.ελάχ.	<	$f(0)$ τοπ.μέγ.	>	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ολ.ελάχ.	<	

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}$. Άρα για $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, οπότε έχουμε δύο σημεία της C_y που έχουν ελάχιστη απόσταση από το A και αυτά είναι τα $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

ii. $y'(x)=2x$.

$$\varepsilon_1: y-y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=y'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

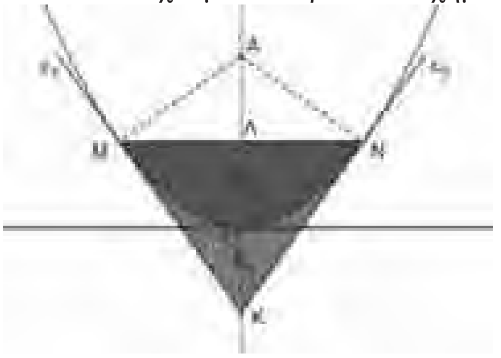
$$y-\frac{1}{2}=-\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\sqrt{2}x-\frac{1}{2}.$$

$$\varepsilon_2: y-y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$y-\frac{1}{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{2}x-\frac{1}{2}.$$

Για $x=0$ από τις εξισώσεις των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ παίρνουμε $y=-\frac{1}{2}$. Δηλαδή οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ στο σημείο $K\left(0,-\frac{1}{2}\right)$. Είναι

$MN//x'x$. Έτσι έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχ.1

$(MN)=\sqrt{2}$ και $(K\Lambda)=1$.

$(KMN)=\frac{1}{2}(MN)(K\Lambda)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ τετρ. μονάδες.

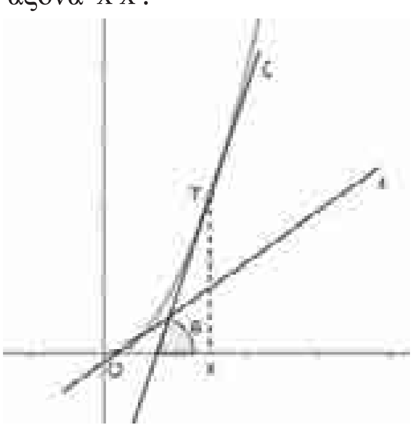
Έστω ότι η εφαπτομένη ε εφάπτεται της C στο σημείο $\Sigma\left(x_0 x_0^2\right)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon=\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε ε: $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\kappa$.

Πρέπει $y'(x_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x_0=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\Sigma\in\varepsilon\Leftrightarrow x_0^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x_0+\kappa\Leftrightarrow\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\kappa\Leftrightarrow\kappa=-\frac{1}{8}$.

Άρα $\varepsilon: y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{1}{8}$.

iii. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη ζ με τον άξονα $x'x$.



Σχ.2

Πρέπει $\varepsilon\varphi\theta=y'(x)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\theta=2x,\ x>\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Την τυχαία χρονική στιγμή t είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=2x(t)$ (1). Παραγωγίζουμε την (1) με μεταβλητή παραγώγισης το t και έχουμε $\theta'(t)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=2x'(t)\Leftrightarrow\theta'(t)\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)=2x'(t)$ (2).

Είναι $x'(t)=-0{,}5$, οπότε από την (2) έχουμε $\theta'(t)\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)=-1$ (3).

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που η ζ θα ταυτιστεί με την ε, τότε είναι $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\lambda_\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Για $t=t_0$ $(3)\Rightarrow\theta'(t_0)\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)=-1\Leftrightarrow$

$\frac{3}{2}\theta'(t_0)=-1\Leftrightarrow\theta'(t_0)=-\frac{2}{3}$ rad/sec, που είναι ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

iv. Είναι $E_2=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{2}-y(x)\right)dx=$

$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$

$\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{12}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{12}\right)\Leftrightarrow E_2=\frac{\sqrt{2}}{3}$ τετρ. μονάδες

$E_1=(KMN)-E_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow$

$E_1=\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow E_1=\frac{1}{2}E_2\Leftrightarrow E_2=2E_1$.

Θέμα 7ο: Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει: $x^2\ln x\geq\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$.

Β. Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $xf'(x)=2x\ln x-f(x)$ (1) για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Αν $f(1)=-\frac{1}{2}$ τότε:

α. i. Να δείξτε ότι $f(x)=x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $xf(x)=-\frac{1}{2}$.

β. i. Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $g(x)=\ln x$, $h(x)=\frac{\alpha}{x}+\frac{1}{2}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

ii. Αν $\alpha=-\frac{\sqrt{e}}{e}$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_g, C_h των συναρτήσεων του ερωτήματος β i και τον άξονα $x'x$.

Λύση: Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}, x\in(0,+\infty)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=2x\ln x$.

$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow 2x\ln x=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

$\varphi'(x)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>0\Leftrightarrow x>1$.

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$ 0 $+$	
$\varphi(x)$		$>$ $\varphi(1)$ $<$ ολ. ελαχ.	

Για $x=1$ η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\varphi(1)=-\frac{1}{2}$. Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε

$$\varphi(x)\ge\varphi(1)\Leftrightarrow x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\ge-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$x^2\ln x\ge\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$. Το "$=$" ισχύει μόνο για $x=1$

Β. α. i. $(1)\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=2x\ln x\Leftrightarrow$

$$\left(xf(x)\right)'=2x\ln x\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=$$

$$\left(x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\right)'\Leftrightarrow xf(x)=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+c\ \ (2)$$

όπου $c\in R$ σταθερά. Για $x=1$ από την (2) παίρνουμε $c=0$. Άρα $(2)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)=x\ln x-\frac{x}{2}\Leftrightarrow$

$$f(x)=x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right),x>0.$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται στο $(0,+\infty)$.

$$xf(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2\ln x-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2\ln x=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ \ (3).$$

Με βάση το Α η (3) ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 1.

β. i. $D_g=(0,+\infty)$ και $D_h=R-\{0\}$.

Για $x>0$ $g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\ln x-\frac{x}{2}=\alpha\Leftrightarrow$

$f(x)=\alpha$ (4). Άρα οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_g,C_h αν υπάρχουν είναι οι ρίζες της εξίσωσης (4) στο $(0,+\infty)$. Είναι $f'(x)=\ln x+\frac{1}{2}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{e}}{e}.$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\frac{\sqrt{e}}{e}.$$

x	$-\infty$ 0	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	$+\infty$
$f(x)$		$-$ 0 $+$	
$f'(x)$		$>$ $f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ $<$ ολ. ελαχ.	

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

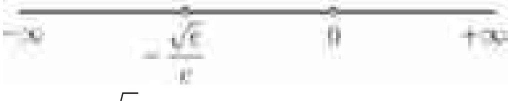
- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right]$, οπότε: $f\left(\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right]\right)=$

$$\left[f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=\left[-\frac{\sqrt{e}}{e},0\right).$$

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]=+\infty$. Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$ οπότε:

$$f\left(\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)\right)=\left[f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$$

Αν το α βρίσκεται σε κάποιο από τα παραπάνω σύνολα τιμών, τότε η εξίσωση (4) έχει ακριβώς μια ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα μονοτονίας.



— Αν $\alpha<-\frac{\sqrt{e}}{e}$, το α δεν είναι τιμή της f οπότε η εξίσωση (4) είναι αδύνατη και άρα οι C_g,C_h δεν έχουν κοινά σημεία.

— Αν $\alpha=-\frac{\sqrt{e}}{e}$ τότε η εξίσωση (4) έχει ακριβώς μια ρίζα την $\frac{\sqrt{e}}{e}$ και άρα οι C_g,C_h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $K\left(\frac{\sqrt{e}}{e},-\frac{1}{2}\right)$.

— Αν $-\frac{\sqrt{e}}{e}<\alpha<0$, τότε $\alpha\in f\left(\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right]\right)$ και $\alpha\in f\left(\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)\right)$, οπότε η εξίσωση (4) έχει ακριβώς δύο ρίζες μία στο κάθε διάστημα $\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$ και άρα οι C_g,C_h έχουν δύο κοινά σημεία.

— Αν $\alpha = 0$,τότε $0 \in f\left(\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)\right)$,οπότε η εξίσωση (4) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$ και άρα οι C_g, C_h έχουν ένα κοινό σημείο.

— Αν $\alpha > 0$,τότε $\alpha \in f\left(\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)\right)$, οπότε η εξίσωση (4) έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$ και άρα οι C_g, C_h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

ii. Αν $\alpha = -\frac{\sqrt{e}}{e}$ $h(x) = -\frac{\sqrt{e}}{e}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}, x \in R-\{0\}$

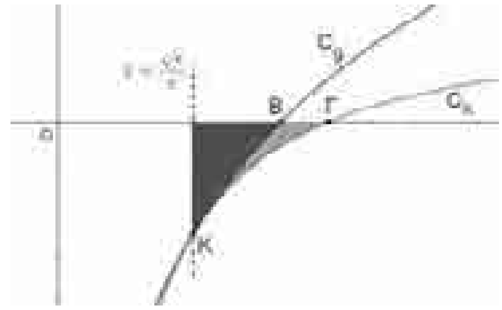
$h(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{e}}{ex}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{e}}{e}$. Η C_h με τον άξονα $x'x$ έχει ένα κοινό σημείο το $\Gamma\left(\frac{2\sqrt{e}}{e},0\right)$.

Η C_g με τον άξονα $x'x$ έχει κοινό σημείο το $B(1,0)$.Το σημείο Γ στον άξονα $x'x$ είναι μετά το σημείο B. Οι C_g, C_h με βάση το ερώτημα β i έχουν ένα κοινό σημείο το $K\left(\frac{\sqrt{e}}{e},-\frac{1}{2}\right)$. Η γραφική παράσταση της h στο $(0,+\infty)$ είναι η γραφική παράσταση της $h_1(x)=\frac{\alpha}{x}, x>0$ με $\alpha=-\frac{\sqrt{e}}{e}$, μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά $\frac{1}{2}$ της μονάδας. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=g(x)-h(x)=$ $\ln x+\frac{\sqrt{e}}{e}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}, x \geq \frac{\sqrt{e}}{e}$. Η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη με $t'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{e}}{e}\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$t'(x)=\frac{ex-\sqrt{e}}{ex^2}$. Για κάθε $x \in \left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$ είναι $t'(x)>0$. Επιπλέον η t είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$. Άρα για κάθε $x>\frac{\sqrt{e}}{e} \Rightarrow$

$t(x)>t\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) \Leftrightarrow t(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>h(x)$.

Έτσι στο $\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$ έχουμε το παρακάτω σχήμα



Σχ.3

Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , την ευθεία $x=\frac{\sqrt{e}}{e}$ και τον άξονα $x'x$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{e}}{e},1\right]$,οπότε

$$E_1=\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{1}|g(x)|dx=-\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{1}\ln x dx=-\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{1}(x)'\ln x dx=$$

$$-[x\ln x]_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{1}+\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{1}1dx=\frac{\sqrt{e}}{e}\ln\frac{\sqrt{e}}{e}+1-\frac{\sqrt{e}}{e} \Leftrightarrow$$

$E_1=1-\frac{3\sqrt{e}}{2e}$ τετρ. μονάδες. Έστω E_2 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_h , την ευθεία $x=\frac{\sqrt{e}}{e}$ και τον άξονα $x'x$. Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{e}}{e},\frac{2\sqrt{e}}{e}\right]$, οπότε

$$E_2=\int_{\frac{\sqrt{e}}{\varepsilon}}^{\frac{2\sqrt{e}}{e}}|h(x)|=-\int_{\frac{\sqrt{e}}{\varepsilon}}^{\frac{2\sqrt{e}}{e}}\left(-\frac{\sqrt{e}}{ex}+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$\frac{\sqrt{e}}{e}\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{\frac{2\sqrt{e}}{e}}\frac{1}{x}dx-\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{\frac{2\sqrt{e}}{e}}\frac{1}{2}dx=\frac{\sqrt{e}}{e}\left[\ln|x|\right]_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{\frac{2\sqrt{e}}{e}}-$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{e}}{e}-\frac{\sqrt{e}}{e}\right)=\frac{\sqrt{e}}{e}\ln 2-\frac{\sqrt{e}}{2e}$ τετρ. μονάδες .

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=E_2-E_1=$

$\frac{\sqrt{e}}{e}\ln 2+\frac{\sqrt{e}}{e}-1=\frac{\sqrt{e}}{e}\ln 2e-1$ τετρ. μονάδες .

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta}f(x)g(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx}=f(\xi) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$.

Έφυγε ένας μεγάλος μαθηματικός
Richard S. Varga (1928-2022)

Ο Richard S. Varga, απεβίωσε ειρηνικά τις πρωινές ώρες της **25ης Φεβρουαρίου**, 2022. Ήταν 93 ετών, με ιδιαίτερους δεσμούς με την Ελλάδα και την Κύπρο**.** Έβαλε το στίγμα του στη μαθηματική επιστήμη, με αρκετούς τρόπους, σε πολλές ερευνητικές περιοχές: Θεωρία Ανάλυσης Πινάκων, Αριθμητικές Μεθόδους, Θεωρία Προσεγγίσεων, κ.ά. Το πρώτο βιβλίο του, Iterative Matrix Analysis (Επαναληπτική Ανάλυση Πινάκων), που έγραψε όταν ήταν **32 ετών** και παραμένει από τότε κλασικό. Δημοσίευσε επτά Βιβλία, πάνω από **230 ερευνητικές εργασίες**. Έλαβε πολλές τιμητικές διακρίσεις και βραβεία, συμπεριλαμβανομένων ενός Senior von **Hum-boldt** Βραβείο, το **Hans Schneider** βραβείο, δυο Επίτιμα Διδακτορικά από τα Πανεπιστήμια της Karsruhe και της Lille, και έγινε Εταίρος των SIAM και AMS. Αλλά όλα τα παραπάνω αποτελούν μόνο ένα μικρό μέρος της ιστορίας του. Ήταν ένας κύριος (gentleman) με μεγάλη αίσθηση του χιούμορ και **γενναιόδωρος άνθρωπος**. Υπήρξε Συντάκτης (Editor) σε πολλά σπουδαία περιοδικά σε Γραμμική Άλγεβρα, Αριθμητική Ανάλυση και Θεωρία Προσεγγίσεων.

Επισκέφτηκε πολλές φορές την Ελλάδα και την Κύπρο. Ήταν Προσκεκλημένος Ομιλητής σε τουλάχιστον **τρία Διεθνή Συνέδρια** που έγιναν **στη χώρα μας**. Όπως στο Hercma, που διοργανωνόταν επί σειρά ετών από τον Καθηγητή του Οικονομικού Πανεπιστημίου Ηλία Λυπιτάκη και **πρώην Πρόεδρο** της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, στο IMACS **2001** που διοργανώθηκε στο **Ηράκλειο** και στο 2ο NUMAN το **2008**, που διοργανώθηκε στην **Καλαμάτα** (και εορτάστηκαν τα 80χρονα του Καθηγητή Varga). Υπήρξε επίσης Προσκεκλημένος Ομιλητής από το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, όπου μίλησε για τη " Riemann Hypothesis" πάνω στην οποία εργάζονταν αυτός κι οι συνεργάτες του. Τέλος, επισκέφτηκε τον Βόλο και τα Ιωάννινα όπου είχε ερευνητικές συνεργασίες με τους Δημήτριο Νούτσο, Ομ. Καθηγητή Αριθμητικής Ανάλυσης Παν. Ιωαννίνων (σε **θέματα** Perron-Frobenius στη Θεωρία του Διαχωρισμού Πινάκων για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων Αλγεβρικών Εξισώσεων) και Απόστολο Χατζηδήμο, Ομ. Καθηγητή Αριθμητικής Ανάλυσης Παν. Ιωαννίνων και Κρήτης (με **θέμα**: Application of the Schur-Cohn Theorem to the precise convergence domain for the p-cyclic SOR iteration matrix).

Έφυγαν από κοντά μας

† Βαγγέλης Ψύχας

Η Ε.Μ.Ε. αποχαιρέτησε (21/4/2022) με μεγάλη λύπη της τον Βαγγέλη Ψύχα. Έναν εκλεκτό συνάδελφο που για πάνω από είκοσι χρόνια αποτέλεσε έναν από τους βασικούς στυλοβάτες των διαγωνισμών της ΕΜΕ. Μέλος της Επιτροπής διαγωνισμών της ΕΜΕ, από τους βασικούς συνθέτες- δημιουργούς πρωτότυπων θεμάτων του, τόσο στους **εθνικούς** όσο και στους Διεθνείς διαγωνισμούς. Καθόλου τυχαίο δεν είναι το γεγονός ότι τρία δικά του προβλήματα, **θέματα Γεωμετρίας**, τέθηκαν στις **Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες** τις χρονιές 2012, 2015, 2018 αντίστοιχα. Επίτευγμα **σπάνιο**, δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε ακόμη και σε παγκόσμιο επίπεδο. Συμμετείχε στην Επιτροπή Βαθμολογητών στην 16η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων στη Βέροια τον Ιούνιο του 2012, στην 22η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων στη Ρόδο το 2018 και στην 32η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα στην Αθήνα τον Μάιο του 2015. Ο **Βαγγέλης** ήταν **Δάσκαλος**. Ήταν παρών στα μαθήματα που διοργάνωνε η ΕΜΕ κάθε Σάββατο για τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, ήταν από τους βασικούς προπονητές των μαθητών που μας εκπροσωπούσαν στις Βαλκανικές και Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες. **Δίδαξε Γεωμετρία** σε μαθητές από όλη την Ελλάδα στο πλαίσιο των Μαθηματικών Καλοκαιρινών Σχολείων που πραγματοποίησε η ΕΜΕ στον Άγιο Νικόλαο Ημαθίας και στη Λεπτοκαρυά Πιερίας. Ήταν εκεί σε όλα, από το 1ο το 2007, έως το 13ο το 2019, το τελευταίο πριν την πανδημία. **Δίδαξε Γεωμετρία** και στους νέους συναδέλφους στο Σεμινάριο Γεωμετρίας της ΕΜΕ το 2013 αλλά και στα **σεμινάρια επιμόρφωσης** για τους **νέους μαθηματικούς** που επιθυμούσαν να απασχοληθούν στην εκπαίδευση το **2008** και το **2015**. Ήταν επίσης μέλος της Συντακτικής Επιτροπής του Ευκλείδη Β και της Μαθηματικής Επιθεώρησης.

Το Δ.Σ. της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στη γυναίκα του **Τίμη** και στα παιδιά του **Κωνσταντίνο και Αλέξανδρο**.

† Δημοσθένης Βαρόπουλος

Με μεγάλη θλίψη πληροφορηθήκαμε την απώλεια του εκλεκτού συναδέλφου Δημοσθένη Βαρόπουλου (**17/4/2022**). Ήταν ενεργό μέλος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Υπήρξε **Ταμίας** του Διοικητικού Συμβουλίου της ΕΜΕ τη διετία **2011-2013** και μέλος της Εξελεγκτικής Επιτροπής της ΕΜΕ την περίοδο 2016-2017. Επίσης ήταν συντονιστής της Συντακτικής Επιτροπής του περιοδικού της ΕΜΕ για το Γυμνάσιο **Ευκλείδης Α,** από το 2007 έως το 2013 και συνεργάτης στην επιτροπή της **Τράπεζας Θεμάτων** της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Δίδαξε στη Μαθηματική Καλοκαιρινή Κατασκήνωση για μαθητές Δημοτικού της ΕΜΕ και ήταν υπεύθυνος του Προγράμματος «**Μαθηματικά και Τέχνη**» που διοργάνωσε η ΕΜΕ σε συνεργασία με τον Δήμο Αθηναίων στις Κατασκηνώσεις του Αγ. Ανδρέα τον Ιούλιο του 2011.

Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Η συμμετρία στην Άλγεβρα

Γιώργος Τσαπακίδης-Αγρίνιο

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ: Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται συμμετρική , όταν δεν αλλάζει για οποιαδήποτε μετάθεση των μεταβλητών της.

Παραδείγματα: Η παράσταση:

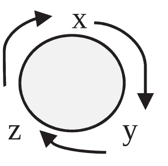
*$\mathrm{P}(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ είναι συμμετρική, γιατί:

$P(x,y,z)=P(x,z,y)=P(y,x,z)=P(y,z,x)=P(z,x,y)=P(z,y,x)$.

*$\mathrm{Q}(\alpha,\beta,\gamma)=\ \dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta}$ είναι συμμετρική.

* $R(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ δεν είναι συμμετρική, γιατί

$R(y,x,z)=y^2x+x^2z+z^2y\neq x^2y+y^2z+z^2x=R(x,y,z)$.



*$\mathrm{F}(x,y,z)=\dfrac{x^3y^2}{z}+\dfrac{y^3z^2}{x}+\dfrac{z^3x^2}{y}$ δεν είναι συμμετρική, γιατί

$\mathrm{F}(y,x,z)=\dfrac{y^3x^2}{z}+\dfrac{x^3z^2}{y}+\dfrac{z^3y^2}{x}\neq \mathrm{F}(x,y,z)$.

• Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **κυκλικά συμμετρική**, όταν δεν μεταβάλλεται για οποιαδήποτε κυκλική μετάθεση των μεταβλητών της .

π.χ. Η παράσταση $G(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ είναι κυκλικά συμμετρική, γιατί $G(y,z,x)=y^2z+z^2x+x^2y=G(x,y,z)$, ενώ δεν είναι συμμετρική , γιατί $G(x,z,y)=x^2z+z^2y+y^2x\neq G(x,y,z)$, έτσι:

Μια αλγεβρική παράσταση συμμετρική είναι και κυκλικά συμμετρική, ενώ δεν ισχύει το αντίστροφο.

• Στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα τριών μεταβλητών λέμε τα: $S_1=x+y+z$, $S_2=xy+yz+xz$ και $S_3=xyz$.

Πρόταση: Κάθε συμμετρική αλγεβρική παράσταση μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των στοιχειωδών συναρτήσεων.

Εφαρμογές: Εκφράστε τις παρακάτω συμμετρικές αλγεβρικές παραστάσεις ως συναρτήσεις των στοιχειωδών συμμετρικών πολυώνυμων :

1. $\mathrm{P}(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ (ταυτότητα Eüler)

$=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)]=S_1({S_1}^2-3S_2)={S_1}^3-3S_1S_2$.

2. $\mathrm{Q}(x,y,z)=(x+y)(y+z)(z+x)=(S_1-z)(S_1-x)(S_1-y)={S_1}^3-(x+y+z){S_1}^2+$

$+(xy+yz+zx)S_1-xyz={S_1}^3-S_1{S_1}^2+S_2S_1-S_3=S_1S_2-S_3$.

3. $R(x,y,z)=\ \frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}=\frac{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)}{xyz}$

$$=\frac{xy(S_1-z)+yz(S_1-x)+zx(S_1-y)}{xyz}=\frac{(xy+yz+zy)S_1-3xyz}{S_3}=\frac{S_1S_2-3S_3}{S_3}$$

Β. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Η εξίσωση $(t-x)(t-y)(t-z)=0\ \Leftrightarrow\ t^3-(x+y+z)\,t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$

$t^3-S_1\,t^2+S_2t-S_3=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x,y,z, οπότε: $\left.\begin{matrix}x^3-S_1x^2+S_2x-S_3=0\\ y^3-S_1y^2+S_2y-S_3=0\\ z^3-S_1z^2+S_2z-S_3=0\end{matrix}\right\}$

πολλαπλασιάζουμε κατά σειρά με $x^{(n-3)},y^{(n-3)},z^{(n-3)}$ τις παραπάνω ισότητες και παίρνουμε:

$x^n=S_1x^{(n-1)}-S_2x^{(n-2)}+S_3x^{(n-3)}\ =0$

$y^n=S_1y^{(n-1)}-S_2y^{(n-2)}+S_3y^{(n-3)}\ =0$ με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε:

$z^n=S_1z^{(n-1)}-S_2z^{(n-2)}+S_3z^{(n-3)}\ =0$

$x^n + y^n + z^n = S_1(x^{(n-1)} + y^{(n-1)} + z^{(n-1)}) - S_2(x^{(n-2)} + y^{(n-2)} + z^{(n-2)}) + S_3(x^{(n-3)} +$
$+y^{(n-3)} + z^{(n-3)})$. Αν θέσουμε $\Sigma_n = x^n + y^n + z^n$ η προηγουμένη ισότητα γράφεται :

$$\Sigma_n = S_1\Sigma_{n-1} - S_2\Sigma_{n-2} + S_3\Sigma_{n-3}$$

Εφαρμογές

4. Αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, $\alpha^3 + \alpha\mu + \nu = 0$, $\beta^3 + \beta\mu + \nu = 0$ και $\gamma^3 + \gamma\mu + \nu = 0$ εκφράστε τις ποσότητες $\alpha + \beta + \gamma$,$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ ως συναρτηση των μ και ν.

Λύση: Τα α,β,γ είναι ρίζες της $x^3 + \mu x + \nu = 0$, άρα $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \mu$ και $\alpha\beta\gamma = -\nu$

5. Αν $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}\right\}$ **τότε $x^4 + y^4 + z^4 =$;**

Λύση: Είναι $\Sigma_4 = S_1\Sigma_3 - S_2\Sigma_2 + S_3\Sigma_1 = S_1(x^3 + y^3 + z^3) - S_2(x^2 + y^2 + z^2) + S_3(x + y + z)=$
$= 1.3 - 2S_2 + S_3.1 = 3 - 2S_2 + S_3 (1)$

$x + y + z = 1 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1 \Rightarrow 2 + 2S_2 = 1 \Leftrightarrow S_2 = -\frac{1}{2} (2)$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)[x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)]$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3 - 3S_3 = 1\left[2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \Leftrightarrow 3 - 3S_3 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3S_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_3 = \frac{1}{6}$ (3)

$(1) \overset{(2),(3)}{\Longleftrightarrow} \Sigma_4 = 3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$.

6. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, δείξτε ότι: i) $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2} \cdot \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3} = \frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}$ ii) $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2} \cdot \frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5} = \frac{\alpha^7+\beta^7+\gamma^7}{7}$.

Λύση: $S_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma_2 + 2\,S_2 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{\Sigma_2}{2} (1)$

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \Sigma_3 = 3\,S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{\Sigma_3}{3} (2)$

i) Είναι : $\Sigma_5 = S_1\Sigma_4 - S_2\Sigma_3 + S_3\Sigma_2 \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} 0.\Sigma_4 - (-\frac{\Sigma_2}{2})\Sigma_3 + \frac{\Sigma_3}{3}\Sigma_2 = \frac{5\Sigma_2.\Sigma_3}{6} \Rightarrow \frac{\Sigma_5}{5} = \frac{\Sigma_2}{2} \cdot \frac{\Sigma_3}{3}$.

ii) $\Sigma_7 = S_1\Sigma_6 - S_2\Sigma_5 + S_3\Sigma_4 (4)$, $\Sigma_4 = S_1\Sigma_3 - S_2\Sigma_2 + S_3\Sigma_1 = \frac{(\Sigma_2)^2}{2} (5)$ (γιατί $S_1 = \Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0$)

Η (4) λόγω των (1),(2),(3) και (5) γίνεται:

$$\Sigma_7 = 0.\Sigma_6 - (-\frac{\Sigma_2}{2})\Sigma_5 + \frac{\Sigma_3}{3}\frac{(\Sigma_2)^2}{2} = \frac{\Sigma_2.\Sigma_5}{2} + \frac{\Sigma_2}{2} \cdot \frac{\Sigma_3}{3}\Sigma_2 \overset{(i)}{=} \frac{\Sigma_2.\Sigma_5}{2} + \frac{\Sigma_5}{5}\Sigma_2 = 7\frac{\Sigma_2.\Sigma_5}{2.5}.\ \text{άρα}\ \frac{\Sigma_7}{7} = \frac{\Sigma_2}{2} \cdot \frac{\Sigma_5}{5}.$$

Γ. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Όπως είδαμε στην προηγουμένη παράγραφο η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι η $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$ (1) $\mu\varepsilon$ $S_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, $S_2 = \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1$ και $S_3 = \rho_1\rho_2\rho_3$. Υποθέτουμε ότι η τριτοβάθμια εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x + \frac{\delta}{\alpha} = 0$ (2) έχει ρίζες τους ρ_1, ρ_2, ρ_3. Επειδή οι (1) και (2) έχουν τις ίδιες ρίζες, είναι :

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= -\frac{\alpha}{\beta} \\ S_2 &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ S_3 &= -\frac{\delta}{\alpha} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= -\frac{\alpha}{\beta} \\ \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2\rho_3 &= -\frac{\delta}{\alpha} \end{aligned}\right\}$$

Οι προηγούμενες ισότητες γενικεύονται για τις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ της πολυωνυμικής εξίσωσης βαθμού n≥1 : $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$. Οι γενικευμένες αυτές ισότητες είναι οι:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \rho_1 + \rho_2 + + \cdots \rho_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 &= \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_1\rho_n + \cdots + \rho_{n-1}\rho_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 &= \rho_1\rho_2\rho_3 + \cdots + \rho_1\rho_2\rho_n + \cdots + \rho_{n-2}\rho_{n-1}\rho_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ S_n &= \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{aligned}\right\} \text{τύποι Vieta.}$$

Οι ισότητες αυτές ειδικεύονται για τις ρίζες x_1, x_2 της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με τις σχέσεις: $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ $, x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$. Επομένως κάθε συμμετρική παράσταση των ριζών μια πολυωνυμικής εξίσωσης εκφράζεται ως συνάρτηση των συντελεστών της και αντίστροφα .

Εφαρμογές

7. Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ριζες της $x^3-\rho x^2+qx-r=0$ με $r\neq 0$,να εκφράσετε τις παραστάσεις: $A=\frac{1}{{\rho_1}^2}+\frac{1}{{\rho_2}^2}+\frac{1}{{\rho_3}^2}$ και $B=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3}+\frac{\rho_2\rho_3}{\rho_1}+\frac{\rho_3\rho_1}{\rho_2}$ ως συνάρτηση των ρ,q,r .

Λύση: Είναι : $S_1=\rho_1+\rho_2+\rho_3=\rho \quad (1)$

$S_2=\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=q \quad (2)$

$S_3=\rho_1\rho_2\rho_3=r \quad (3)$

$(2)\Longrightarrow(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)^2=\ q^2\Longrightarrow {\rho_1}^2{\rho_2}^2+{\rho_2}^2{\rho_3}^2+{\rho_3}^2{\rho_1}^2+2\rho_1\rho_2\rho_3(\rho_1+\rho_2+\rho_3)=q^2$

$\Longrightarrow {\rho_1}^2{\rho_2}^2+{\rho_2}^2{\rho_3}^2+{\rho_3}^2{\rho_1}^2+2r\rho=q^2\Longrightarrow {\rho_1}^2{\rho_2}^2+{\rho_2}^2{\rho_3}^2+{\rho_3}^2{\rho_1}^2=q^2-2r\rho \ \ (4)$

- $A=\frac{1}{{\rho_1}^2}+\frac{1}{{\rho_2}^2}+\frac{1}{{\rho_3}^2}=\frac{{\rho_1}^2{\rho_2}^2+{\rho_2}^2{\rho_3}^2+{\rho_3}^2{\rho_1}^2}{{\rho_1}^2{\rho_2}^2{\rho_3}^2}=\frac{q^2-2r\rho}{r^2}$
- $B=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3}+\frac{\rho_2\rho_3}{\rho_1}+\frac{\rho_3\rho_1}{\rho_2}=\frac{{\rho_1}^2{\rho_2}^2+{\rho_2}^2{\rho_3}^2+{\rho_3}^2{\rho_1}^2}{\rho_1\rho_2\rho_3}=\frac{q^2-2r\rho}{r}$.

8. Αν α,β,γ ρίζες της $x^3-x-1=0$, τοτε $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}=;$ [Καναδάς1996]

Λύση: $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}=\frac{(1-\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)+(1-\beta)(1+\alpha)(1+\gamma)+(1-\gamma)(1+\alpha)(1+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}=$

$=\frac{3+(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma}{1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma}=\frac{3+0-(-1)-3.1}{1+0-1+1}=1$.

Δ. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_1\\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_2\\ .\quad .\quad .\quad .\\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_n\end{array}\right\}(\Sigma)$

λέγεται συμμετρικό, όταν για οποιαδήποτε μετάθεση των αγνώστων οι αλγεβρικές παραστάσεις $f_1, f_2, \dots, f_n$ δεν αλλάζουν. Για την λύση του (Σ) υπολογίζουμε τις τιμές των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων με την βοήθεια των εξισώσεων του συστήματος, οπότε οι τιμές των αγνώστων το (Σ) είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $t^n\ -\ S_1\,t^{n-1}\ +\ S_2\,t^{n-2}+\ldots+(-1)^n\,S_n\ =\ 0$

Εφαρμογές Να λυθούν τα συστήματα :

9. $\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x+y+z=2} & \mathbf{(1)}\\ \mathbf{x^2+y^2+z^2=6} & \mathbf{(2)}\\ \mathbf{x^3+y^3+z^3=8} & \mathbf{(3)}\end{array}\right\}\mathbf{(\Sigma)}$

Λύση: Είναι $S_1=x+y+z=2$ (4)

$(1)\Rightarrow\ (x+y+z)^2=4\ \Rightarrow\ x^2+y^2+z^2 2(xy+yz+zx)=4\ \Rightarrow 6+2S_2=4\ \Rightarrow S_2=-1\,(3)$

$x^3+\ y^3\ +\ z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ \underset{(3)}{\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}}\ 8-3\,S_3=2\big(6-(-1)\big)\Rightarrow S_3=-2$.

Άρα τα x,y,z είναι ρίζες της $t^3-S_1\,t^2\ +\ S_2\,t-\ S_3=0\ \Leftrightarrow\ t^3\ -\ 2\,t^2\ -\ t+2=0\ \Leftrightarrow$ $t^2\,(t-2)-(t-2)=0\ \Leftrightarrow\ (t-2)(t^2\ -1)=0\ \Leftrightarrow\ t=2$ ή $t=\pm1$. Έτσι $(\Sigma)\Leftrightarrow\ x=2\,,y=1\,,z=-1$ ή $x=2\,,y=-1\,,z=1$ ή $x=1\,,y=2\,,z=-1$ ή $x=1\,,y=-1\,,z=2$ ή $x=-1\,,y=2,z=1$ ή $x=-1,y=1,z=2$.

10. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x+\sqrt{xy}+y=19}\\ \mathbf{x^2+xy+y^2=133}\end{array}\right\}\mathbf{(\Sigma)}$

Λύση: Περιορισμοί : $xy\geq 0$, $(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=19\\ (x+y)^2-xy=133\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} S_1+\sqrt{S_2}=19 & (1)\\ S_1^2-S_2=133 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{S_2}=19-S_1\Rightarrow S_2=(19-S_1)^2\ \ (3)$

$(2)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} S_1^2-(19-S_1)^2=133\ \Leftrightarrow\ S_1^2-361+38\,S_1-{S_1}^2=133\ \Leftrightarrow 38\,S_1=494\ \Leftrightarrow\ S_1=13$, οπότε $(2)\Leftrightarrow S_2=36$. Έτσι τα x,y είναι ρίζες της εξίσωσης: $t^2-\ S_1t+S_2=0\Leftrightarrow t^2-13t+36=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{13\pm5}{2}\begin{array}{l}\nearrow 9\\ \searrow 4\end{array}$, άρα $(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases} x=9 \text{ και } y=4\\ \quad\quad ή\\ x=4 \text{ και } y=9\end{cases}$

Ε. ΚΥΚΛΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_1 \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_2 \\ .\quad .\quad .\quad . \\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_n \end{array}\right\}(\Sigma)$

λέγεται κυκλικά συμμετρικό αν οι αλγεβρικές παραστάσεις $f_1, f_2, \dots, f_n$ είναι κυκλικά συμμετρικές.

Η λύση του (Σ) γίνεται με :

- Πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων τους
- Αφαίρεση κατά μέλη ανά δύο των εξισώσεων του (Σ)
- Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των εξισώσεων του, εφόσον τα πρώτα μέλη τους είναι παραγοντοποιημένα.

Εφαρμογές: Λύστε τα συστήματα:

11. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x+y=\alpha\ (1)} \\ \mathbf{y+z=\beta\ (2)} \\ \mathbf{z+x=\gamma\ (3)} \end{array}\right\}\mathbf{(\Sigma)}$

Λύση: $(1)+(2)+(3): 2(x+y+z)=\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow x+y+z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ (4)

$(4)-(1): z=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$ $(4)-(2): y=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}$ $(4)-(3): x=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$.

12. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{3x+y+z=8\quad (1)} \\ \mathbf{x+3y+z=10\ (2)} \\ \mathbf{x+y\,3z=12\quad (3)} \end{array}\right\}\mathbf{(\Sigma)}$

Λύση: $(1)+(2)+(3): 5(x+y+z)=30 \Leftrightarrow x+y+z=6$ (4),$(1)\overset{(4)}{\Rightarrow} x=1$, $(2)\overset{(4)}{\Rightarrow} y=2$, $(3)\overset{(4)}{\Rightarrow} z=3$.

13. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x(x+y+z)=\alpha^2\ (1)} \\ \mathbf{y(x+y+z)=\beta^2\ (2)} \\ \mathbf{z(x+y+z)=\gamma^2\ (3)} \end{array}\right\}\mathbf{(\Sigma)}$ **με $\alpha\beta\gamma\neq 0$.**

Λύση: $(1)+(2)+(3): (x+y+z)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow x+y+z=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ (4). Με διαίρεση των (1),(2),(3) με την (4) παίρνουμε : $(\Sigma)\Leftrightarrow x=\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad y=\frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad z=\frac{\gamma^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$ ή τα x,y,z είναι οι αντίθετοι των προηγουμένων.

14. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x^2+xy+xz-x=2\ (1)} \\ \mathbf{y^2+xy+yz-y=4\ (2)} \\ \mathbf{z^2+xz+yz-z=6\ (3)} \end{array}\right\}\mathbf{(\Sigma)}$

Λύση: $(1)+(2)+(3): (x+y+z)^2-(x+y+z)=12 \Leftrightarrow S_1^2-S_1-12=0 \Leftrightarrow S_1=-3$ ή $S_1=-4$

- Για $S_1=-3$, $(1)\Leftrightarrow xS_1-x=2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, $(2)\Leftrightarrow y=-1$, $(3)\Leftrightarrow z=-\frac{3}{2}$
- Για $S_1=-4$, όμοια: $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, $z=2$.

15. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x+y=\sqrt{4z-1}\ (1)} \\ \mathbf{y+z=\sqrt{4x-1}\ (2)} \\ \mathbf{z+x=\sqrt{4y-1}\ (3)} \end{array}\right\}$

Λύση: Περιορισμοί : $x,y,z\geq\frac{1}{4}$, $(1)+(2)+(3): 2x+2y+2z-\sqrt{4z-1}-\sqrt{4x-1}-\sqrt{4y-1}=0$

$\Leftrightarrow x+y+z-\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\sqrt{y-\frac{1}{4}}=0 \Leftrightarrow [\left(x-\frac{1}{4}\right)-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}]+$

$+[\left(y-\frac{1}{4}\right)-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{y-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}]+[\left(z-\frac{1}{4}\right)-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{z-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}]=0 \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ και $\sqrt{y-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ και $\sqrt{z-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. T Andreescu, B. Enescu, Mathematical Olympiad Treasures, Brikhauser, Boston 2006.
2. V. Govorov κ.α., Problems in Mathematics, Mir Publishers, Moscow 1986.
3. Σ. Κανέλλου, Άλγεβρα, Δεύτερη Έκδοση, Παπαδημητρόπουλος, τόμος Ι (1969), ΙΙ (1970), Αθήνα.
4. V.A. Krechmar, A Problem Book in Algebra, Mir Publishers, Moscow 1974.
5. Θ. Καζαντζή, Άλγεβρα , τόμοι Ι,ΙΙ, εκδοτικός οίκος Μαστορίδη, Θεσσαλονίκη 1974.
6. V. Lidsky κ.α., Problems in Elementary Mathematics, Mir Publishers, Moscow 1973.
7. Α. Πάλλα, Μεγάλη Άλγεβρα, τόμος Ι (τέταρτη έκδοση, Παπαζήσης 1963), τόμος ΙΙ (τρίτη έκδοση, Παπαδημητρόπουλος 1963), Αθήνα.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου

Παναγιώτης Μουρούκος – Αγρίνιο

Α. Επίλυση εξισώσεων στους πραγματικούς

1. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $2x^2+y^2+7=2(x+1)(y+1)$.

Λύση: Πρόκειται για μια εξίσωση με δύο αγνώστους, η οποία λύνεται αν τη γράψουμε ισοδύναμα ως άθροισμα τετραγώνων ίσο με 0: $2x^2+y^2+7=2(xy+x+y+1)\Leftrightarrow 2x^2+y^2-2xy-2x-2y+5=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+1-2xy+2x-2y+x^2-4x+4=0\Leftrightarrow (x-y+1)^2+(x-2)^2=0\Leftrightarrow \boxed{x=2} \text{ και } \boxed{y=3}.$$

Τι κάνουμε όμως αν δεν παρατηρήσουμε αυτή τη διάσπαση; Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο τον x και παράμετρο τον y:

$$2x^2+y^2-2xy-2x-2y+5=0\Leftrightarrow 2x^2-2(y+1)x+y^2-2y+5=0,$$ η οποία έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4(y+1)^2-8(y^2-2y+5)=4y^2+8y+4-8y^2+16y-40=-4y^2+24y-36=-4(y-3)^2\le 0.$$

Για να έχει λύσεις η εξίσωση, πρέπει $\Delta=0\Leftrightarrow y=3$, επομένως έχουμε τη διπλή ρίζα:

$$x_0=\frac{2(y+1)}{4}=\frac{2\cdot 4}{4}=2\Leftrightarrow \boxed{x=2}.$$

Και στους δύο τρόπους επίλυσης, βρίσκουμε τη μοναδική λύση $(x,y)=(2,3)$.

2. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$: $x^4-2\alpha x^2+x+\alpha^2-\alpha=0$.

Λύση: Η εξίσωση αυτή είναι $4^{ου}$ βαθμού ως προς x και η επίλυσή της με τις συνηθισμένες μεθόδους φαίνεται δύσκολη. Όμως, παρατηρούμε ότι είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς α, οπότε γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha^2-(2x^2+1)\alpha+x^4+x=0 \quad (*)$$

και έχει διακρίνουσα . $\Delta_\alpha=(2x^2+1)^2-4(x^4+x)=4x^4+4x^2+1-4x^4-4x=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$.

Το τριώνυμο έχει ρίζες $\alpha_1=\dfrac{2x^2+1+2x-1}{2}=x^2+x$ και $\alpha_2=\dfrac{2x^2+1-2x+1}{2}=x^2-x+1$.

Άρα, η $(*)$ παραγοντοποιείται ως εξής: $\left(\alpha-(x^2+x)\right)\left(\alpha-(x^2-x+1)\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-\alpha)(x^2-x+1-\alpha)=0\Leftrightarrow \left((x^2+x-\alpha=0) \text{ ή } (x^2-x+1-\alpha=0)\right).$$

Οι δύο εξισώσεις έχουν διακρίνουσες Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα, οι οποίες πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός: $\Delta_1\ge 0\Leftrightarrow 4\alpha\ge -1\Leftrightarrow \alpha\ge -\dfrac{1}{4}$ και $\Delta_2\ge 0\Leftrightarrow 1-4(1-\alpha)\ge 0\Leftrightarrow \alpha\ge\dfrac{3}{4}$. Επομένως, διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha<-\dfrac{1}{4}$, η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $\alpha=-\dfrac{1}{4}$, η εξίσωση έχει τη διπλή λύση $x=\dfrac{1}{2}$
- Αν $-\dfrac{1}{4}<\alpha<\dfrac{3}{4}$, η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\alpha}}{2}$
- Αν $\alpha=\dfrac{3}{4}$, η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\frac{3}{4}}}{2}=\dfrac{-1\pm 2}{2}=\dfrac{1}{2}$ και $-\dfrac{3}{2}$

  και $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (διπλή λύση)
- Αν $\alpha>\dfrac{3}{4}$, η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ και $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4\alpha-3}}{2}$.

Β. Επίλυση Συστημάτων στους πραγματικούς

3. Να λύσετε το σύστημα στο $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{matrix} x+y+z=\sqrt{3} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{matrix}\right\}$

Λύση: Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς z και αντικαθιστούμε στη δεύτερη:

$$z=\sqrt{3}-x-y \Rightarrow x^2+y^2+\left(\sqrt{3}-x-y\right)^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+3+x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y+2xy-1=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)x+y^2-\sqrt{3}y+1=0 \quad (1)$$

Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=\left(y-\sqrt{3}\right)^2-4\left(y^2-\sqrt{3}+1\right)=-3y^2+2\sqrt{3}y-1$, η οποία πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός: $-3y^2+2\sqrt{3}y-1\geq 0 \Leftrightarrow 3y^2-2\sqrt{3}y+1\leq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}y-1\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\Delta=0$.

Επομένως, η εξίσωση έχει μία διπλή λύση: $x=-\frac{y-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ακόμα, $z=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και συμπεραίνουμε ότι $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Σημείωση: Το σύστημα λύνεται και ως άμεση εφαρμογή της ανισότητας Τετραγωνικού – Αριθμητικού Μέσου.

4. Για ποιες τιμές του α το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2=z \\ x+y+z=\alpha \end{matrix}\right\}$ έχει μοναδική λύση; Να βρείτε τη λύση αυτή.

Λύση: Αντικαθιστούμε τον z από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη, οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x: $x^2+x+y^2+y-\alpha=0$ (1). Για να έχει μοναδική λύση το σύστημα, θα πρέπει και η (1) να έχει μοναδική λύση, άρα: $\Delta_x=0 \Leftrightarrow 1-4\left(y^2+y-\alpha\right)=0 \Leftrightarrow 4y^2+4y-1-4\alpha=0 \quad (2)$

Η (2) πρέπει επίσης να έχει μοναδική λύση, άρα: $\Delta_y=16-16(-1-4\alpha)=0 \Leftrightarrow 64\alpha=-32 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-\frac{1}{2}}$.

Για $\alpha=-\frac{1}{2}$, η (2) έχει τη μοναδική λύση $y=-\frac{1}{2}$, οπότε η (1) έχει τη μοναδική λύση $x=-\frac{1}{2}$.

Τελικά, το δοσμένο σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Γ. Απόδειξη Ανισοτήτων

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ ισχύει $6\alpha+4\beta+5\gamma\geq 5\sqrt{\alpha\beta}+3\sqrt{\beta\gamma}+7\sqrt{\gamma\alpha}$.

Λύση: Θέτουμε $x=\sqrt{\alpha}$, $y=\sqrt{\beta}$, $z=\sqrt{\gamma}$, οπότε η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$6x^2+4y^2+5z^2\geq 5xy+3yz+7zx \Leftrightarrow 6x^2-(5y+7z)x+\left(4y^2-3yz+5z^2\right)\geq 0.$$

Έχουμε ότι $\Delta_x=(5y+7z)^2-4\cdot 6\cdot\left(4y^2-3yz+5z^2\right)=25y^2+70yz+49z^2-96y^2+72yz-120z^2=$ $=-71\left(y^2-2yz+z^2\right)=-71(y-z)^2\leq 0$, οπότε το $f(x)=6x^2-(5y+7z)x+\left(4y^2-3yz+5z^2\right)$ είναι μη αρνητικό, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το ίσον ισχύει αν και μόνο αν $\Delta_x=0 \Leftrightarrow y=z$, οπότε $x=\frac{5y+7z}{12}=y=z$.

6. Αν $x,y\in\mathbb{R}$ με $x^2+3xy+4y^2\leq\frac{7}{2}$, να αποδείξετε ότι $x+y\leq 2$.

Λύση: Θέτουμε $s=x+y$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $s\leq 2$. Είναι $y=s-x$, οπότε η δοσμένη συνθήκη γράφεται ισοδύναμα: $2x^2+6x(s-x)+8(s-x)^2\leq 7 \Leftrightarrow 2x^2+6sx-6x^2+8s^2-16sx+8x^2-7\leq 0 \Leftrightarrow$ $4x^2-10sx+8s^2-7\leq 0$. Επειδή το τριώνυμο $f(x)$ είναι ίσο με 0 ή ετερόσημο του $\alpha=4$, θα πρέπει $\Delta_f\geq 0$. Δηλαδή πρέπει $100s^2-4\cdot 4\cdot\left(8s^2-7\right)\geq 0 \Leftrightarrow 100s^2-128s^2\geq 112 \Leftrightarrow 28s^2\leq 112 \Leftrightarrow s^2\leq 4$, άρα $|s|\leq 2$, άρα και $s\leq 2$, δηλαδή $x+y\leq 2$ το ζητούμενο.

Δ. Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων

7. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $x^6+3x^3+1=y^4$.

Λύση: Θέτουμε $\omega=x^3$, οπότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς ω: $\omega^3+3\omega^2+1-y^4=0 \quad :(1)$ και έχει διακρίνουσα $\Delta=3^2-4\left(1-y^4\right)=9-4+4y^4=5+4y^4>0$. Για να έχει η (1) ακέραια ρίζα ω, θα πρέπει η διακρίνουσα Δ να είναι **τέλειο τετράγωνο** ακεραίου, δηλαδή να υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ τέτοιος, ώστε $5+4y^4=\kappa^2 \Leftrightarrow \kappa^2-4y^4=5 \Leftrightarrow \left(\kappa-2y^2\right)\left(\kappa+2y^2\right)=5$, οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις, αφού $\kappa-2y^2\le\kappa+2y^2$: **i)** $\begin{cases}\kappa-2y^2=1\\ \kappa+2y^2=5\end{cases}$, οπότε με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $\begin{cases}\kappa=-3\\ y=\pm1\end{cases}$

ii) $\begin{cases}\kappa-2y^2=-5\\ \kappa+2y^2=-1\end{cases}$, οπότε με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $\begin{cases}\kappa=3\\ y=\pm1\end{cases}$.

Σε κάθε περίπτωση ισχύει $y^2=1$, οπότε η αρχική εξίσωση γράφεται: $x^6+3x^3+1=1\Leftrightarrow x^3\left(x^3+3\right)=0\overset{x\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}x=0$.

Ώστε, η δοσμένη εξίσωση έχει τις λύσεις: $(x,y)=(0,1)$, $(x,y)=(0,-1)$.

8. Να λυθεί η εξίσωση στο $\mathbb{Z}^*$: $\left(x^2+y\right)\left(x+y^2\right)=(x-y)^3$

Λύση: Κάνουμε τις πράξεις και έχουμε:

$$x^3+x^2y^2+xy+y^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \Leftrightarrow 2y^3+x^2y^2+xy+3x^2y-3xy^2=0\Leftrightarrow$$

$$\overset{y\neq0}{\Leftrightarrow}2y^2+x^2y+x+3x^2-3xy=0\Leftrightarrow 2y^2+\left(x^2-3x\right)y+3x^2+x=0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Θεωρούμε την **(1)** ως εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς y. Τότε, η διακρίνουσά της θα είναι

$\boldsymbol{\Delta}=\left(x^2-3x\right)^2-4\cdot2\cdot\left(3x^2+x\right)=x^4-6x^3+9x^2-24x^2-8x=x^4-6x^3-15x^2-8x==x\left(x^3-6x^2-15x-8\right)$.

Σύμφωνα με το Σχήμα Horner, η διακρίνουσα παραγοντοποιείται ως εξής: $\boldsymbol{\Delta}=x(x+1)^2(x-8)$ και για να έχει λύση στους ακεραίους πρέπει να ισούται με k^2, $k\in\mathbb{Z}$. Αφού το $(x+1)^2$ είναι ήδη τέλειο τετράγωνο πρέπει $x(x-8)=\lambda^2\ge0$, $\lambda\in\mathbb{N}$. Άρα, έχουμε: $x(x-8)=\lambda^2\Leftrightarrow x^2-8x+16=\lambda^2+16\Leftrightarrow$ $(x-4)^2-\lambda^2=16\Leftrightarrow(x-4+\lambda)(x-4-\lambda)=16$. Επειδή $x-4+\lambda\ge x-4-\lambda$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) $\begin{cases}x-4+\lambda=16\\ x-4-\lambda=1\end{cases}$ **ii)** $\begin{cases}x-4+\lambda=-1\\ x-4-\lambda=-16\end{cases}$ **iii)** $\begin{cases}x-4+\lambda=8\\ x-4-\lambda=2\end{cases}$ **iv)** $\begin{cases}x-4+\lambda=-2\\ x-4-\lambda=-8\end{cases}$ **v)** $\begin{cases}x-4+\lambda=4\\ x-4-\lambda=4\end{cases}$ **vi)** $\begin{cases}x-4+\lambda=-4\\ x-4-\lambda=-4\end{cases}$

, από τις οποίες οι **i)** , **ii)** δεν δίνουν ακέραια τιμή για το x, ενώ η **vi)** δίνει την τιμή $x=0$. Επομένως, από τις άλλες περιπτώσεις έχουμε τα ζεύγη λύσεων: $(x,y)=(9,-6)$, $(x,y)=(-1,-1)$, $(x,y)=(8,-10)$.

9. Βρείτε όλα τα ζεύγη ακεραίων (m,n) που ικανοποιούν την $\left(2n^2+5m-5n-mn\right)^2=m^3n$. (Κύπρος TST–2022)

Λύση: Η εξίσωση γράφεται: $4n^4+25(m-n)^2+m^2n^2+20(m-n)n^2-10(m-n)mn-4mn^3-m^3n=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4n^4+m^2n^2-4mn^3-m^3n+5(m-n)\left[5(m-n)+4n^2-2mn\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(m-n)\left(-4n^3-m^2n\right)+5(m-n)\left[5(m-n)+4n^2-2mn\right]=0\Leftrightarrow(m-n)\left[nm^2+5(2n-5)m+4n^3-20n^2+25n\right]=0.$$

Έχουμε την προφανή λύση $\boxed{m=n}$. Αν $m\neq n$, τότε $nm^2+5(2n-5)m+4n^3-20n^2+25n=0 \quad (1)$.

Αν $n=0$, τότε και $m=0$. Αν $n\neq0$, τότε η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς m, με διακρίνουσα $\Delta=25(2n-5)^2-4n\left(4n^3-20n^2+25\right)=(2n-5)^2\left(25-4n^2\right)$. Πρέπει $\Delta\ge0\Leftrightarrow25-4n^2\ge0\Leftrightarrow n\in\{-2,-1,1,2\}$

Επειδή η διακρίνουσα Δ πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, έχουμε ότι $n\in\{-2,2\}$.

Για $n=2$, η (1) δίνει ότι $m=2$, ενώ για $n=-2$, η .(1). δίνει ότι $m=-18$.

Επομένως, οι λύσεις είναι τα ζεύγη $(m,n)=(k,k)$, με $k\in\mathbb{Z}$ και το ζεύγος $(m,n)=(-18,-2)$.

Ε. Τέλεια Τετράγωνα

10. Έστω x,y φυσικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $3x^2+x=4y^2+y$. Δείξτε ότι ο $x-y$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση: Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $4y^2-3x^2-x+y=0 \Leftrightarrow x^2+4\left(y^2-x^2\right)-(x-y)=0 \Leftrightarrow$
$x^2+4(y-x)(y+x)-(x-y)=0 \Leftrightarrow x^2+4(y-x)(y-x+2x)-(x-y)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+8(y-x)x+\left[4(y-x)^2-(x-y)\right]=0$. Το τριώνυμο $t^2+8(y-x)t+\left[4(y-x)^2-(x-y)\right]$ έχει ακέραιες ρίζες $x_1=x$ και $x_2=8(x-y)-x=7x-8y$, άρα η διακρίνουσά του Δ πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου: $\Delta=64(y-x)^2-4\left[4(y-x)^2-(x-y)\right]=48(y-x)^2+4(x-y)=4(x-y)\left[12(x-y)+1\right]=k^2$, με $k\in\mathbb{N}$. Επειδή ο ΜΚΔ των $x-y$ και $12(x-y)+1$ είναι η μονάδα, πρέπει καθένας από τους αριθμούς αυτούς να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

ΣΤ. Μέγιστα – Ελάχιστα

11. Αν $x,y\in\mathbb{R}$ με $16x^2+36y^2=9$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $x-2y$.

Λύση: Θέτουμε $\alpha=x-2y$, οπότε $x=2y-\alpha$, και αντικαθιστούμε στη δοθείσα:

$$16(2y+\alpha)^2+36y^2=9 \Leftrightarrow 16\left(4y^2+4y\alpha+\alpha^2\right)+36y^2=9 \Leftrightarrow 100y^2+64y\alpha+16\alpha^2-9=0 \quad (*)$$

Η $(*)$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(64\alpha)^2-4\cdot100\cdot\left(16\alpha^2-9\right)=-2304\alpha^2+3600$, η οποία πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός: $-2304\alpha^2+3600\geq0 \Leftrightarrow 2304\alpha^2\leq3600 \Leftrightarrow (48\alpha)^2\leq60^2 \Leftrightarrow 48|\alpha|\leq60 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}\leq\alpha\leq\frac{5}{4}$.

Επομένως, η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $\frac{5}{4}$ και η ελάχιστη $-\frac{5}{4}$.

Προβλήματα για εξάσκηση

1. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^4+4x^2y-11x^2+4xy-8x+8y^2-40y+52=0$.
2. Να λυθεί η εξίσωση $x^3-2\alpha x^2+\left(\alpha^2+1\right)x+2-2\alpha=0$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$.
3. Να λυθεί η εξίσωση . $x=\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha+x}}$. για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha>0$.
4. Να βρείτε όλες τις τιμές του α για τις οποίες το σύστημα $\begin{Bmatrix} x^2+y^2+2x\leq1 \\ x-y+\alpha=0 \end{Bmatrix}$ έχει μοναδική λύση. Για τις τιμές του α που θα βρείτε, να προσδιορίσετε την αντίστοιχη λύση.
5. Αν για τους $x,y,x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x+y+z=xy+yz+zx=4$, να αποδείξετε ότι $x,y,x\in\left[0,\frac{8}{3}\right]$.
6. Αν $x^2-xy+y^2-x+y-1=0$, να αποδείξετε ότι: $-1\leq x\leq\frac{5}{3}$ και $-\frac{5}{3}\leq y\leq1$.
7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα $\left(\alpha^3-\alpha+2\right)^2>4\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)(\alpha-2)$.
8. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.
9. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{Z}$ ο αριθμός x^2+2x+6 είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;
10. Να βρείτε όλες τις τιμές του κλάσματος $\frac{3x^2-2x+4}{x^2+x+2}$, με $x\in\mathbb{R}$.
11. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{2}$, με $x\in\mathbb{R}$.

Βιβλιογραφία

1. T. Andreescu, *105 Algebra Problems*, XYZ Press, 2013
2. T. Andreescu, B. Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures* (2nd ed.), Birkhäuser, 2011
3. T. Andreescu, A. Ganesh, *108 Algebra Problems*, XYZ Press, 2014
4. T. Andreescu, V. Vale, *111 Algebra Problems*, XYZ Press, 2016
5. T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu, *An Introduction to Diophantine Equations*, Birkhäuser, 2010
6. J. H. Santiago, *Solving Problems by Looking at a Discriminant*, Math. Reflections 4 (2020)
7. Θ. Μάγκος, *Η μέθοδος του τριωνύμου δευτέρου βαθμού για την απόδειξη ανισοτήτων*, Περιοδικό Μελέτη, τ. 5, σελ. 5-15, Νοέμβριος 2019 (ιστότοπος www.mathematica.gr)
8. Γ. Τσαπακίδης, *Μέγιστο – Ελάχιστο του Τριωνύμου*, Ευκλείδης Β΄, τ. 9, (ΕΜΕ)
9. Ιστότοπος www.mathematica.gr και www.artofproblemsolving.com/community

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 377 (ΤΕΥΧΟΣ 121)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ ισχύει

$$\frac{2\upsilon_\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}\le 1+\sqrt{2}.$$

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ Αποστολόπουλος Γιώργος- Μεσολόγγι

Είναι: $(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)=(\beta+\gamma)^2-\alpha^2$

$$=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma-\alpha^2=2\beta\gamma$$

αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Έχουμε λοιπόν, $\beta+\gamma-\alpha=\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$. Επίσης από την βασική ισότητα $\beta\gamma=\alpha\upsilon_\alpha$ προκύπτει ότι $\upsilon_\alpha=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Έτσι, το πρώτο μέλος της αποδεικτέας γράφεται

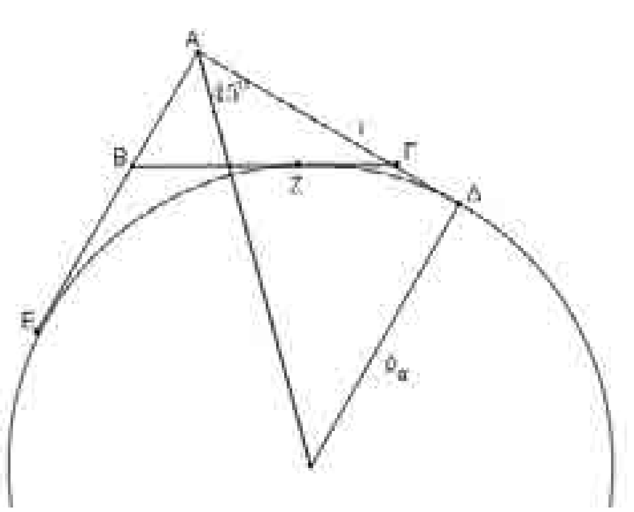
$$\frac{2\upsilon_\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha}}{\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}$$

Επιπλέον, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα α ισχύει $\beta+\gamma\le\alpha\sqrt{2}$, οπότε

$$\frac{2\upsilon_\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}\le\frac{\alpha+\alpha\sqrt{2}}{\alpha}=1+\sqrt{2}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

2η ΛΥΣΗ Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη



Η αποδεικτέα γράφεται

$\dfrac{2\upsilon_\alpha}{\beta+\gamma+\alpha-2\alpha}\le 1+\sqrt{2}$ ή $\dfrac{2\upsilon_\alpha}{2(\tau-\alpha)}\le 1+\sqrt{2}$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{\upsilon_\alpha}{\tau-\alpha}\le 1+\sqrt{2},\ (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ εύκολα βρίσκουμε ότι $\beta+\gamma\le\alpha\sqrt{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\beta=\gamma$. Από αυτή παίρνουμε

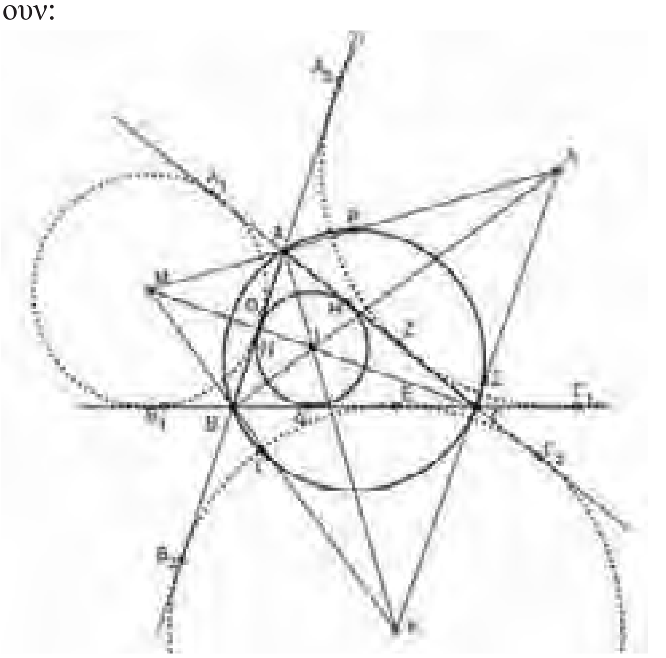
$$\alpha+\beta+\gamma\le\alpha\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow 2\tau\le\alpha\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{2\tau}{\alpha}\le 1+\sqrt{2},\ (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι για την απόδειξη του ζητούμενου, αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{\upsilon_\alpha}{\tau-\alpha}=\dfrac{2\tau}{\alpha}$, ή αρκεί $2\tau=\dfrac{\alpha\upsilon_\alpha}{\tau-\alpha}$, ή αρκεί $2\tau=\dfrac{2E}{\dfrac{E}{\rho_\alpha}}$ ή αρκεί, $\tau=\rho_\alpha$ που ισχύει όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Σημείωση σύνταξης

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ, ο εγγεγραμμένος, ο περιγεγραμμένος και οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι του. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν:



- $AN=AH=\tau-\alpha$
- $BN=B\Delta=\tau-\beta$

- $\Gamma\Delta = \Gamma H = \tau - \gamma$
- $AA_1 = A\Theta = \tau - \beta$, $AA_2 = AZ = \tau - \gamma$
- $BB_1 = B\Theta = \tau - \alpha$, $BB_2 = BE = \tau - \gamma$
- $\Gamma\Gamma_1 = \Gamma Z = \tau - \alpha$, $\Gamma\Gamma_2 = \Gamma E = \tau - \beta$
- $A\Theta = BN$, $B\Delta = \Gamma E$, $\Gamma Z = AH$
- $P\Lambda = PM$, $\Sigma\Lambda = \Sigma K$, $TK = TM$
- $K\Lambda \perp \Lambda M$, $\Lambda B \perp KM$, $M\Gamma \perp K\Lambda$

Από τα παραπάνω προκύπτουν εύκολα διάφορα συμπεράσματα όπως:

- $A\Gamma_2 = A\Gamma + \Gamma\Gamma_2 = \beta + \tau - \beta = \tau$ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.
- Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ο κύκλος του Euler του τριγώνου που σχηματίζουν τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων του.
- Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ διχοτομεί τα τμήματα ΙΚ, ΙΛ, ΙΜ.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο και Νερούτσος Κων/νος – Γλυφάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 378 (ΤΕΥΧΟΣ 121)

Έστω $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$$\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ διαφορετικοί μεταξύ τους, ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Έστω ότι η f δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0,\pi)$. Αυτό, σε συνδυασμό με την συνέχειά της σημαίνει ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Αν υποθέσουμε ότι $f(x)>0$ στο διάστημα $(0,\pi)$, οπότε $f(0)\geq 0$ και $f(\pi)\geq 0$, τότε $\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx > 0$, που είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $f(x)<0$ στο $(0,\pi)$. Επομένως η f έχει ρίζα $\alpha\in(0,\pi)$. Αν υποθέσουμε ότι δεν έχει άλλη ρίζα, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,\alpha),(\alpha,\pi)$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x)<0$ για $x<\alpha$ και $f(x)>0$ για $x>\alpha$, ή $f(x)>0$ για $x<\alpha$ και $f(x)<0$ για $x>\alpha$. Επιπλέον, $\eta\mu(x-\alpha)>0$ για $x>\alpha$ και $\eta\mu(x-\alpha)<0$ για $x<\alpha$. Επομένως η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)\eta\mu(x-\alpha),\ x\in(0,\pi)$$

είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $A=(0,\alpha)\cup(\alpha,\pi)$ οπότε:

$$\int_0^\pi g(x)dx>0 \text{ ή } \int_0^\pi g(x)dx<0$$

Όμως, $\int_0^\pi g(x)dx = \int_0^\pi f(x)\eta\mu(x-\alpha)dx$

$$=\int_0^\pi f(x)(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu x)dx$$

$$=\sigma\upsilon\nu\alpha\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx - \eta\mu\alpha\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 0$$

που είναι άτοπο. Άρα η f έχει δυο τουλάχιστον ρίζες, οπότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ διαφορετικοί μεταξύ τους, ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$

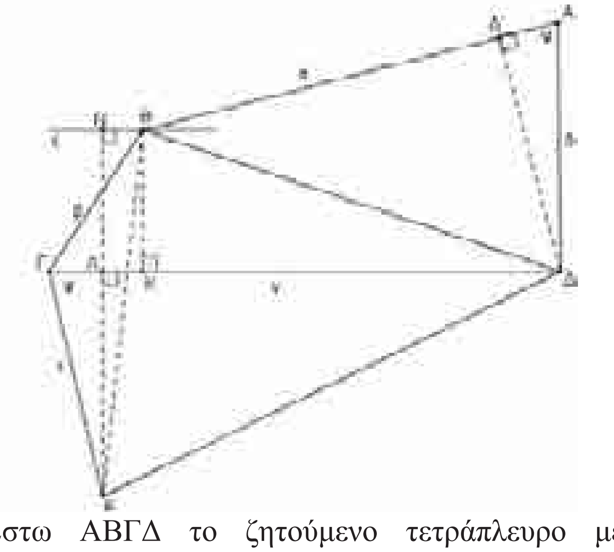
Σημείωση. Στην πρόταση της άσκησης (Τ. 121) αντί του ορθού $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, από παραδρομή γράφτηκε $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 379 (ΤΕΥΧΟΣ 121)

Να κατασκευάσετε κυρτό τετράπλευρο, όταν δίνονται οι πλευρές και το εμβαδόν του.

Το θέμα προτείνουν ο συνάδελφος Τσιλιακός Λευτέρης και ο τοπογράφος Τσαλίκης Μανώλης – Αθήνα.

ΛΥΣΗ (Από τους ίδιους)



Έστω ΑΒΓΔ το ζητούμενο τετράπλευρο με $(AB\Gamma\Delta)=\lambda^2$, (1)

Θεωρούμε τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E = B\hat{A}\Delta = \varphi$ με

$\Gamma E = x = \dfrac{\alpha\delta}{\gamma}$ Είναι:

$$(\Delta\Gamma E) = \frac{1}{2}x\gamma\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\delta}{\gamma}\cdot\gamma\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}\alpha\delta\eta\mu A = (AB\Delta)$$

$$\Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta) = (\Delta\Gamma E) + (B\Gamma\Delta)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot E\Lambda + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot BK = \frac{1}{2}\Gamma\Delta(E\Lambda + BK)$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\cdot(E\Lambda + BK)$$

οπότε λόγω της (1) παίρνουμε

$$E\Lambda + BK = \frac{2\lambda^2}{\gamma},\ (2)$$

όπου Κ, Λ οι προβολές των Β και Ε στην ΓΔ.

Φέρνουμε το ύψος ΔΔ΄ του τριγώνου ΑΒΔ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΔ΄ και ΕΓΛ είναι όμοια. Άρα, $\dfrac{A\Delta'}{\delta} = \dfrac{\Gamma\Lambda}{x} \Rightarrow \dfrac{A\Delta'}{\delta} = \dfrac{\gamma\Gamma\Lambda}{\alpha\delta} \Rightarrow \alpha A\Delta' = \gamma\Gamma\Lambda$, (3)

Επίσης, $B\Delta^2 = \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\cdot\Delta\Delta'$ και

$$\Delta E^2 = \gamma^2 + x^2 - 2\gamma\cdot\Gamma\Lambda$$

απ' όπου με αφαίρεση, σε συνδυασμό με την (3) παίρνουμε

$$B\Delta^2 - \Delta E^2 = \alpha^2 + \delta^2 - \gamma^2 - x^2,\ (4)$$

Ακόμα: $B\Delta^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma\cdot\Gamma K$, οπότε

$$\Delta E^2 - B\Delta^2 = \gamma^2 + x^2 - 2\gamma\Gamma\Lambda - \beta^2 - \gamma^2 + 2\gamma\Gamma K$$

$$= x^2 - \beta^2 + 2\gamma(\Gamma K - \Gamma\Lambda) = x^2 - \beta^2 + 2\gamma(K\Lambda),\ (5)$$

Από τις (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι

$$-\alpha^2 - \delta^2 + \gamma^2 + x^2 = x^2 - \beta^2 + 2\gamma K\Lambda$$

$$\Rightarrow K\Lambda = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2}{2\gamma} = BN$$

που είναι κατασκευάσιμο τμήμα.

- Η τομή της ευθείας ΕΛ και της παράλληλης ε από το Β στην ΔΓ είναι το σημείο Ν.
- Το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΝ κατασκευάζεται γιατί $(EN) = (E\Lambda) + (\Lambda N) = (E\Lambda) + (BK) \overset{(2)}{=} \dfrac{2\lambda^2}{\gamma}$ και

$$BN = K\Lambda = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2}{2\gamma}$$

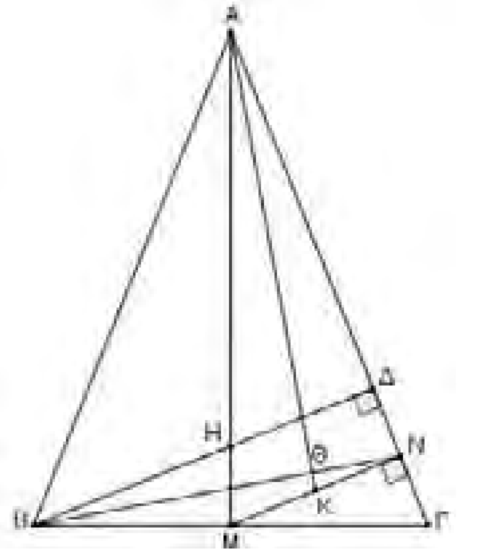
- Το σημείο Γ είναι η τομή των κύκλων (B, β) και (E, x).
- Το Δ είναι η τομή του κύκλου (Γ, γ) και της ευθείας ΓΛ που είναι κάθετη από το Γ στην ΕΝ.
- Το Α είναι η τομή των κύκλων (Δ, δ) και (B, α).
- Το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΝ κατασκευάζεται όταν $BN > 0$, δηλαδή $\beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2 + \delta^2$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Παπαδόπουλος Δήμος - Έδεσα.

ΑΣΚΗΣΗ 380 (ΤΕΥΧΟΣ 121)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της βάσης ΒΓ. Από το Μ φέρουμε την ΜΝ κάθετη στη ΑΓ. Η κάθετη από το Α στην ΒΝ τέμνει την ΒΝ στο Θ και την ΜΝ στο Κ. Να αποδείξετε ότι $MK = KN$ Φρουντζής Βασίλης – Αγρίνιο.

ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.



Αν ΑΜ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΑ ισχύει

$$\frac{1}{MN^2} = \frac{1}{M\Gamma^2} + \frac{1}{MA^2} = \frac{4}{\alpha^2} + \frac{1}{\upsilon_\alpha^2} \Rightarrow MN^2 = \frac{\alpha\upsilon_\alpha^2}{4\upsilon^2 + \alpha^2},\ (1)$$

Αλλά, $\Gamma N^2 = M\Gamma^2 - MN^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \Gamma N^2 = \dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\alpha^2\upsilon_\alpha^2}{4\upsilon_\alpha^2 + \alpha^2}$

$$\Rightarrow \Gamma N^2 = \frac{\alpha^4}{16\upsilon_\alpha^2 + 4\alpha^2},\ (2)$$

Από το Β φέρουμε το ύψος ΒΔ και από την ομοιότητα των τριγώνων ΝΜΓ και ΔΒΓ ισχύουν

$$B\Delta = 2MN \Rightarrow B\Delta^2 = 4MN^2 = \frac{4\alpha\upsilon_\alpha^2}{4\upsilon_\alpha^2 + \alpha^2},\ (3)$$

και $\Gamma\Delta = 2\Gamma N \Rightarrow N\Delta^2 = \Gamma N^2 = \dfrac{\alpha^4}{16\upsilon_\alpha^2 + 4\alpha^2}$, (4)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΝΑΜ έχουμε

$$AN^2 \overset{(1)}{=} \upsilon_\alpha^2 - \frac{\alpha^2\upsilon_\alpha^2}{4\upsilon_\alpha^2 + \alpha^2} \Rightarrow AN^2 = \frac{4\upsilon_\alpha^4}{4\upsilon_\alpha^2 + \alpha^2},\ (5)$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ΝΒΔ και ΑΝΚ είναι όμοια, οπότε $\dfrac{KN}{\Delta N} = \dfrac{AN}{B\Delta} \Rightarrow KN^2 = \Delta N^2\cdot\dfrac{AN^2}{B\Delta^2}$

και λόγω των (3), (4) και (5) παίρνουμε:

$$KN^2 = \frac{\alpha^4}{16\upsilon_\alpha^2 + 4\alpha^2}\cdot\frac{4\upsilon_\alpha^4}{4\upsilon_\alpha^2 + \alpha^2}\cdot\frac{4\upsilon_\alpha^2 + \alpha^2}{4\alpha^2\upsilon_\alpha^2} = \frac{\alpha^2\upsilon_\alpha^2}{16\upsilon_\alpha^2 + 4\alpha^2}$$

η οποία σε συνδυασμό με την (1) γράφεται

$$KN^2 = \frac{MN^2}{4} \Rightarrow KN = \frac{MN}{2}$$

οπότε το Κ είναι το μέσο του ΜΝ.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη και Παπαδόπουλος Δήμος - Έδεσα.

ΑΣΚΗΣΗ 381 (ΤΕΥΧΟΣ 121)

381. Αν οι αριθμοί x, y, z περιέχονται στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ να αποδείξετε ότι

$$2\le\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}\le 3$$

Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$2\le\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}$$

Είναι: $\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}$

$$=\frac{x+1+y+1}{1+z}-\frac{2}{1+z}+\frac{y+1+z+1}{1+x}-\frac{2}{1+x}+\frac{z+1+x+1}{1+y}-\frac{2}{1+y}$$

$$=\frac{x+1}{1+z}+\frac{z+1}{1+x}+\frac{y+1}{1+x}+\frac{x+1}{1+y}+\frac{z+1}{1+y}+\frac{y+1}{1+z}.$$

$$-2\left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)$$

Αλλά, λόγω της $\alpha+\frac{1}{\alpha}\ge 2$ για κάθε $\alpha>0$, έχουμε:

$$\frac{x+1}{1+z}+\frac{z+1}{1+x}+\frac{y+1}{1+x}+\frac{x+1}{1+y}+\frac{z+1}{1+y}+\frac{y+1}{1+z}\ge 6$$

και $1+x\ge\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{1+x}\le\frac{2}{3}\Rightarrow -2\frac{1}{1+x}\ge-\frac{4}{3}$

Η τελευταία μαζί με τις κυκλικές της δίνει

$$-2\left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)\ge -3\frac{4}{3}=-4.$$

Επομένως,

$$\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}\ge 6-4=2$$

Απομένει να δείξουμε ότι

$$\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}\le 3$$

Ισχύουν:

$$\left.\begin{matrix}x\le 1\\ z\le 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+y\le 1+y\\ z+y\le 1+y\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\frac{1}{1+y}\le\frac{1}{x+y}\\ \frac{1}{1+y}\le\frac{1}{z+y}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\frac{x}{1+y}\le\frac{x}{x+y}\\ \frac{z}{1+y}\le\frac{z}{z+y}\end{matrix}\right\}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\frac{y}{1+y}\le\frac{y}{x+y},\ \frac{z}{1+y}\le\frac{z}{z+y}$$

και $$\frac{x}{1+z}\le\frac{x}{x+z},\ \frac{y}{1+z}\le\frac{y}{y+z}$$

Με πρόσθεση των 6 τελευταίων ανισοτήτων παίρνουμε: $\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}\le\frac{x+y}{x+y}+\frac{z+x}{z+x}+\frac{z+y}{y+z}$

$$\Rightarrow\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}\le 3$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη και Δελησταθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια.

Προτεινόμενα Θέματα

392. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του AH_1, BH_2, ΓH_3. Αν B_1, Γ_1 οι προβολές των Β και Γ στην ευθεία H_2H_3, να αποδείξετε ότι:

α. $H_3B_1=H_2\Gamma_1$. **β.** $B_1\Gamma_1=H_1H_2+H_1H_3$.

Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία

393. Δίνεται κύβος ΑΒΓΔΕΖΗΘ με ακμή $\alpha=1$, απέναντι έδρες τις ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ και με κατακόρυφες ακμές τις ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ και ΔΘ. Στην ακμή ΑΔ θεωρούμε τμήμα $\Delta K=\frac{1}{4}$, στην ΒΑ τμήμα $B\Lambda=\frac{1}{4}$, στη ΖΗ τμήμα $ZM=\frac{1}{4}$ και στην ΗΘ τμήμα $\Theta N=\frac{1}{4}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ. Φρουντζής Βασίλης - Αγρίνιο

394. Να βρείτε όλους τους ακέραιους κ ώστε ο αριθμός $A=\frac{3\kappa+17}{7\kappa-31}$ να είναι ακέραιος.

Τσιλιακός Λευτέρης - Γαλάτσι

395. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

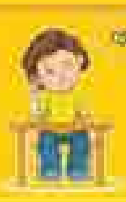
$(y^2+xz)(z^2+xy)(x^2+yz)\ge 4xyz(x^2z+z^2y+y^2x-xyz)$

και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=y=z$.

Νικητάκης Γιώργος – Σητεία.

396. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν $\alpha>0$ και $\beta^2\le\alpha(\gamma-\alpha)$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3+2\alpha\beta+\gamma\ge\alpha$ Αντωνόπουλος Νίκος - Ίλιον

Μια ενδιαφέρουσα πρόταση που σχετίζει τα τέλεια τετράγωνα με το πλήθος των διαιρετών τους πήραμε από τον Σιγανό Γρηγόρη - Κόρινθος.



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

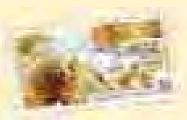
> **«Όποιος διαβάζει τα έργα του Αρχιμήδη, θαυμάζει λιγότερο τα επιτεύγματα των νεοτέρων»**
> **G. Leibnitz**

> «Παρ' όλη την μεγαλειώδη θέαση τους, την αποτίμηση της ομορφιάς και την ενόραση νέων οντοτήτων, τα Μαθηματικά έχουν μια επηρεαστική ιδιότητα, λιγότερο εμφανή ή υγιή. Η ιδιότητα αυτή συγγενεύει, ίσως, με την επίδραση ορισμένων χημικών φαρμάκων. Ο παραμικρός γρίφος, έστω και άμεσα αναγνωρίσιμος ως τετριμμένος η επαναληπτικός, μπορεί να ασκήσει υπνωτική επιρροή. Μπορεί κανείς να απορροφηθεί αρχίζοντας να λύνει τέτοιους γρίφους». **Stanisław Marcin Ulam**

Ο Πολωνός μαθηματικός **Stanisław Marcin Ulam,** έγραψε **αυτό**, στο βιβλίο του, ***"Οι περιπέτειες ενός μαθηματικού"*** το 1976 για τους Γρίφους και τα **ανοικτά προβλήματα** στα Μαθηματικά γιατί τότε τους βασάνιζε το τελευταίο θεώρημα του Fermat, που ήταν ακόμα ένας γρίφος.

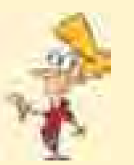
Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το λάθος: Ο ταμίας της τράπεζας εξαργύρωσε την επιταγή του Γιώργου, αλλά το ακέραιο μέρος του ποσού το πλήρωσε σε λεπτά και το δεκαδικό σε Ευρώ. Ο Γιώργος ξόδεψε 15,07 Ευρώ και διαπίστωσε ότι του έμεινε το ένα πέμπτο του ποσού που έγραφε η επιταγή του. Τι ποσό έγραφε η επιταγή;



Το λαχείο: Οι μαθητές και μαθήτριες μιας τάξης αγόρασαν ένα λαχείο το οποίο όταν έγινε η κλήρωση ήταν το τυχερό. Ο Τάκης που είναι καλός μαθητής τους πρότεινε να μοιράσουν τα χρήματα ως εξής: ο πρώτος θα πάρει 1000 € και 1/10 από τα υπόλοιπα, ο δεύτερος 2000€ και 1/10 από τα υπόλοιπα, ο τρίτος 3000€ και 1/10 από τα υπόλοιπα, κοκ. Έτσι στο τέλος θα πάρουν όλοι τα ίδια χρήματα χωρίς να περισσέψει τίποτα. Πόσα ήταν τα χρήματα και πόσα τα παιδιά;

Οι κοπέλες ή τα αγόρια: Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Γ΄ τάξης πήγαν την Κυριακή μια βόλτα στην πλατεία και αγόρασαν παγωτό, βανίλια τα αγόρια, γρανίτα οι κοπέλες. Την επόμενη Κυριακή που ξαναπήγαν στην πλατεία, οι κοπέλες πήραν βανίλια παγωτό και τα αγόρια γρανίτα. Όμως έδωσαν ένα Ευρώ λιγότερα από την προηγούμενη Κυριακή. Η γρανίτα είναι πιο φτηνή από το παγωτό βανίλια. Περισσότερα ήταν τα αγόρια ή οι κοπέλες;



Ο τυχερός: Ένας τυχερός που κέρδισε το λαχείο αποφάσισε αυτά τα λεφτά να τα παίξει σε μια λέσχη μήπως πάρει περισσότερα. Την Πέμπτη έδωσε 10 € για να φάει κάτι πρόχειρο, έπαιξε τα μισά από αυτά που του είχαν μείνει, έχασε, πήγε στο Parking έδωσε 7 € πήρε το αυτοκίνητό του και έφυγε. Την Παρασκευή έκανε το ίδιο. Το Σάββατο επίσης μόνο που για να πάρει το αυτοκίνητο δανείστηκε ένα Ευρώ από το φίλο του. Πόσα χρήματα είχε κερδίσει;

Ο αριθμός: Έχουμε δημιουργήσει αυτή τη σειρά 9 6 4 8 2 4 1 2 0 6 0 3, μπορείτε με το ίδιο μοτίβο να συμπληρώσετε τα κενά στην πιο κάτω σειρά;

6	4		2		6	0			4	0	

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν του τεύχους 123

Η διαφορά: Σ3-Σ1=21

Τα πολλαπλάσια: peta(P, 1015), exa(E, 1018), zetta(Z, 1021), Yotta(Y, 1024) τα αντίστοιχα των υποδιαιρέσεων είναι Milli (m, 10-3), Micro (μ, 10-6), Nano (n, 10-9), Pico (p, 10-12), femto (f, 10-15), atto (a, 10-18), zepto (z, 10-21), yocto (y, 10-24).

Αγώνας δρόμου: Αν Δ είναι η απόσταση τότε ο χρόνος του Πέτρου είναι $Δ:υ_π$ που είναι ίδιος με $2500:υ_Ι$ και ίδιος με $2000:υ_Ε$ δηλαδή $2500:2000= υ_Ι: υ_Ε$. Όταν τερμάτισε η Ιωάννα έχουμε $Δ:υ_Ι =2800:υ_Ε$ ή $Δ:2800=υ_Ι:υ_Ε$ Άρα Δ:2800=2500:2000 ή Δ=3500 μέτρα.

Τέλειο τετράγωνο: Η λύση Διόφαντου είναι οι αριθμοί: 1201/2, 8401/2, 1560½ και 120½ +840½ =961=312 ομοίως.

Οι κύβοι: Η λύση του Διόφαντου είναι οι αριθμοί: 5/7, 8/7. με 5/7+8/7=13/7 και (5/7)3 +(8/7)3 =(13/7)3.

Το τρίγωνο: Η λύση του Διόφαντου είναι οι πλευρές: β=40, γ=96, α=104. 104-96=8=23 και 104-40=64=43.

Τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ των άλλων Μαθηματικών

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

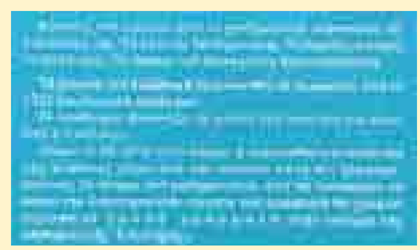
Οι Πρώτοι αριθμοί

- Ο **Ερατοσθένης** είχε παρουσιάσει στο βασιλιά της Αιγύπτου Πτολεμαίο Γ΄, ένα τραπέζι που επάνω είχε μια μεταλλική πλάκα που ήταν χαραγμένοι οι πρώτοι αριθμοί αλλά και οι σύνθετοι που σημειώνονταν με μια τρύπα. Η κατασκευή ονομάστηκε «**κόσκινο του Ερατοσθένη**».

Ξέρουμε από την ιστορία για τους ανθρώπους εκείνους, όπως τον Μπασέ, τον Fermat και πολλούς ακόμα, πού ενώ δεν ήταν μαθηματικοί, είχαν αντιληφθεί την μαγεία που κρύβουν τα Μαθηματικά και μας έδωσαν την δική τους ματιά, για αυτά και ένα σπουδαίο έργο.

Με αφορμή τα άρθρα που δημοσιεύσαμε στα περιοδικά της ΕΜΕ και ιδιαίτερα για τους αριθμούς και τους πρώτους αριθμούς, ήρθα σε επαφή, με πολλούς συναδέλφους που έστειλαν αξιόλογες εργασίες τους για δημοσίευση. Ακόμα με μαθητές, αλλά και με χαρισματικούς ανθρώπους, που έχουν μέσα τους τη μαθηματική ομορφιά, αλλά δεν είναι μαθηματικοί. Αυτοί είναι πάρα πολλοί, θα αναφέρουμε ενδεικτικά μερικούς: Ιπποκράτης Δάκογλου πολιτικός Μηχανικός, Μαρίνος Σπηλιόπουλος Βιολόγος, Τάσος Ιωσήφ Μηχανολόγος, Νίκος Πελεκανάκης, Δημήτρης Καρβελάς, Χημικός. Πρότασή μου, προς την ΕΜΕ, θα ήταν καλό να οργανωθεί μια ημερίδα για να τιμήσει αυτούς τους «**άλλους μαθηματικούς**» και να τους γνωρίσει η μαθηματική κοινότητα.

Θα αναφερθούμε εδώ, σε δύο από αυτούς τους ερευνητές της μαγείας των Μαθηματικών. Όταν στο τεύχος **91** του Ευκλείδη Β΄ έγραψα για τους πρώτους αριθμούς, ο Ιπποκράτης Δάκογλου σε ηλικία κοντά στα **100** (σήμερα, δυστυχώς δεν ζει) ανταποκρίθηκε, επικοινώνησε μαζί μας και έγραψε στα τέλη της ζωής του βιβλίο με τις εργασίες του, ψάχνοντάς την αλήθεια στους πρώτους αριθμούς και το οποίο μας έστειλε.



Το κείμενό μας, που τον κέντρισε, ήταν στο τεύχος** 91 **του Ευκλείδη Β΄

Τα άλυτα προβλήματα, οι εικασίες και τα θεωρήματα.

Του Παναγιώτη Χριστόπουλου

*Ο κόσμος των μαθηματικών είναι πραγματικά μαγικός. Τα Μαθηματικά κρύβουν μεγάλη μαγεία. Η μαγεία όμως αυτή δεν γίνεται αντιληπτή στους περισσότερους. Όταν ένας μαθηματικός προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα προκύπτουν άλλα και αυτό είναι το αιώνιο παιχνίδι που προκαλεί το μυαλό των Μαθηματικών. Η ενεργή ενασχόληση με τους αριθμούς μπορεί να προσφέρει μια αίσθηση απόλυτης ελευθερίας και σου δίνει κάθε δικαίωμα να **πιστεύεις**, να **ρωτάς**, να **αμφισβητείς**. Το βάθος του κόσμου των αριθμών είναι τεράστιο και όπως συνήθιζε να λέει ο γνωστός Βρετανός μαθηματικός Γ.Χ. Χάρντι «Οποιοσδήποτε μπορεί να κάνει ερωτήσεις σχετικές με τους πρώτους αριθμούς που και ο πιο σοφός άνθρωπος αδυνατεί να απαντήσει». Θα λέγαμε ότι τα λόγια του Χάρντι τα επιβεβαιώνει η εικασία του Γκόλντμπαχ : **«Κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του** 2 **μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών»**. Πρώτοι είναι οι αριθμοί που οι μόνοι τους διαιρέτες είναι ο αριθμός **ένα** και ο εαυτός τους. Όταν το 1742 ο Γκόλντμπαχ έστειλε την επιστολή στον φίλο του τον Leonard Eüler, δεν φαντάστηκε πως το περιεχόμενο της θα συζητιέται τόσα χρόνια παραμένοντας ένα **ανοιχτό πρόβλημα**. Η εικασία φαντάζει αρκετά εύκολη, όμως οι παγίδες που κρύβει είναι αδιανόητες. Ένα πρόβλημα που θεωρητικά ανάγεται στην πιο απλή πράξη των Μαθηματικών, τη πρόσθεση βασανίζει τα «μεγαλύτερα» μυαλά του πλανήτη για παραπάνω από δυόμιση αιώνες. Ο Πιέτ Χέιν, ένας από τους μαθηματικούς που έχουν ασχοληθεί με την εικασία, μιλώντας για το φαινομενικά απλό ερώτημα του Γκόλντμπαχ είχε πει πως: **«Είναι ένα πρόβλημα που αξίζει να του επιτεθείς, αλλά αποδεικνύει την αξία του, όταν σου αντεπιτεθεί»**.*

*Τώρα τι θα χαρίσει στον κόσμο η πολυπόθητη ανακάλυψη της αλήθειας γύρω από την εικασία αυτή δεν ξέρουμε. Πάντως το όνομα του μαθηματικού που θα καταφέρει να δώσει την απάντηση στην εικασία του Γκόλντμπαχ, θα γραφτεί σίγουρα με **χρυσά γράμματα** στην ιστορία της μαθηματικής επιστήμης.*

Γράφει ο Ιπποκράτης Δάκογλου (απόσπασμα από το βιβλίο του)

Επίσης ή εικασία του Γκόλτνμπαχ μέ την λέξη «δύναται» μας προδιαθέτει, πράγμα πού άλλωστε είναι γνωστό, οτι κάθε Άρτιος αριθμός αναλύεται επίσης καί σέ δύο άλλους αριθμούς, μή κατ' ανάγκην Πρώτους αριθμούς καί άρα από την εικασία αύτή ζητείται νά εύρεθή ή μαθηματική επαλήθευση καί των άνω δύο θεμάτων, δηλαδή άφ' ενός μέν οτι «κάθε Άρτιος αριθμός άναλύεται σέ δύο Πρώτους αριθμούς» καί άφ' ετέρου ό αυτός Άρτιος αριθμός δύναται επίσης νά αναλύεται συγχρόνως καί σέ δύο άλλους αριθμούς, μή κατ' ανάγκην Πρώτους».

Επέκταση της πρώτης εικασίας του Γκόλτνμπαχ

Ή άνω, όμως, εικασία Γκόλτνμπαχ έχει διαπιστωθεί, κατά τήν παρούσα μελέτη, οτι είναι μόνον ένα μικρό τμήμα μεγαλύτερης καί γενικώτερης εικασίας, ή οποία έπεκτείνεται καί γενικεύεται ώς κατωτέρω, καί τής οποίας επίσης ζητείται ενταύθα ή απόδειξή της Άλήθειάς της.

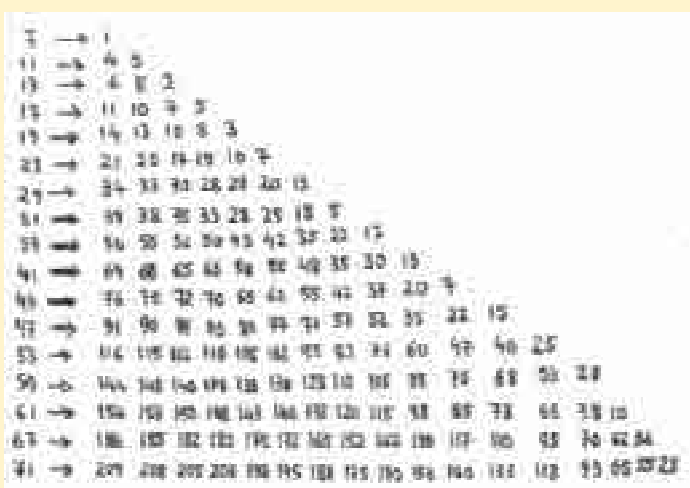
Διατύπωση της επέκτασης της πρωτογενούς εικασίας του Γκόλτνμπαχ

«Κάθε ένας Άρτιος αριθμός, μέ εξαίρεση τούς Ανηλίκους Άρτιους (2, 4, 6), ΔΥΝΑΤΑΙ νά αναλυθεί, άναλόγως τού μεγέθους τού πλήθους των μονάδων του σέ ένα (Κ) τό πλήθος αθροιστικών δυάδων Πρώτων αριθμών», ήτοι:

(2Κ) = (ρι+ρ2) + (ρ3+ρΆ + ... + +(ρπι+ρη)

όπου Κ = (1, 2, 3), 4, 5, 6, 7 .... κλπ.

Στο βιβλίο του ο Δάκογλου έχει ένα μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων στους πρώτους αριθμούς και λέει « Ή παρούσα μελέτη χρησιμοποιεί νέες άγνωστες άλήθειες στις ιδιότητες των Πρώτων άριθμών οί όποιες παρουσιάζονται και έπεξηγούνται, μαθηματικά, κατωτέρω και βοηθάνε στην αλήθεια τής εικασίας του Γκόλτνμπαχ καθώς και σέ όλες τις επεκτάσεις και γενικεύσεις της». Με κάποια καθυστέρηση έφτασαν στα χέρια μου, οι επιστολές του **Μαρίνου Σπηλιόπουλου** που είχε στείλει αρκετό καιρό πριν και ο οποίος είναι ένα καλός και ανήσυχος ερευνητής των πρώτων αριθμών. Η εργασία του είναι: Παίρνει τη **σχέση $(P_1^2-P_2^2)/24=k$** όπου P_1 , P_2 περιττοί αριθμοί $P_1>=5$, $P_2>=7$, και διαπιστώνει ότι ο k είναι πάντα ακέραιος όταν οι P_1 , P_2 είναι πρώτοι αριθμοί. Δηλαδή η διαφορά τετραγώνων πρώτων αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 24. Ύστερα δημιουργεί τον πίνακα ως εξής: Στη 2η γραμμή π.χ. τα $P_1=11$, $P_2=7$ δίνουν 4 και $P_1=11$, $P_2=5$ δίνει 3 ,ομοίως δημιουργεί και τις άλλες γραμμές.

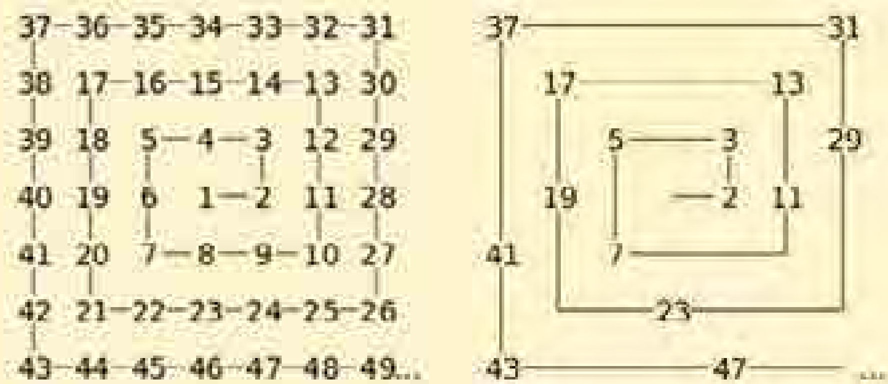


Παρατηρεί ότι:

- Αν πάρουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο από τον πίνακα η κορυφή είναι το άθροισμα των αριθμών της βάσης (υποτείνουσας) π.χ. 11=1+3+2+5
- Κάθε αριθμός μιας στήλης ισούται με το άθροισμα του αριθμού που είναι προηγούμενος του στη στήλη και του τελευταίου αριθμού της σειράς, που ανήκει ο αριθμός, π.χ. 21=14+7
- Σε κάθε σειρά οι διαφορές του δεύτερου αριθμού από τον πρώτο, του τρίτου από το δεύτερο, κοκ είναι ίση με την αλληλουχία των αριθμών της υποτείνουσας που αντιστοιχεί στην προηγούμενη σειρά π.χ. 34-33=1, 33-30=3 .
- Σε δύο διαδοχικές σειρές οι διαφορές των αριθμών που ανήκουν στην ίδια στήλη είναι ίσες μεταξύ τους και ίση με τον τελευταίο αριθμό της μεγαλύτερης σειράς
  π.χ. 56-39=55-38=52-35=... =17.

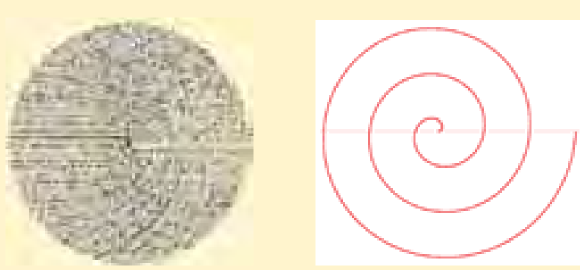
Ακόμα ο ίδιος, παρατηρεί ότι έχει την τρίτου βαθμού εξίσωση:
$48P^3-(144a-7)P^2+(144a^2-14a-2050)P-48a^3+7a^2+2050a+4791=0$ η οποία όπως αναφέρει ισχύει πάντα για οποιονδήποτε πρώτο αριθμό P>=3 και το a είναι η «απόσταση» του πρώτου αριθμού P από το 3 (a=P-3). Ο πρώτος αριθμός P είναι οποιοσδήποτε πρώτος εκτός από το 2, και προκύπτει η πιο κάτω γραφική παράσταση.

Άλλα σχήματα για τους πρώτους



Σπείρα Stanisław Marcin Ulam

Τρίγωνο του **Klaunter** με τους πρώτους αριθμούς να σχηματίζουν κάθετη γραμμή στο αριστερό τμήμα του τριγώνου βάσει του $x^2 - x + 41$.



Σπείρα του **Sacks** βασιζόμενη στην **σπείρα του Αρχιμήδη**

αφορμές ...
και στιγμιότυπα

Το βραβείο Abel 2022 στον Dennis Sullivan

Στις **23 Μαρτίου 2022**, η Νορβηγική Ακαδημία των Επιστημών και των Γραμμάτων, ανακοίνωσε την απονομή του βραβείου Abel 2022 και γνωστό ως Nobel Μαθηματικών στον **Dennis Parnell Sullivan** "για τις πρωτοποριακές του συμβολές, στην **Τοπολογία** με την πιο ευρεία έννοια και ειδικά στις αλγεβρικές, γεωμετρικές και δυναμικές της πτυχές". Ο Dennis Sullivan γεννήθηκε στις 12 Φεβρουαρίου 1941 στο Michigan (ΗΠΑ) και κατέχει την έδρα Albert Einstein στο City University of New York. Είναι μέλος της **Ακαδημίας** επιστημών των **ΗΠΑ**. Είναι ειδικός στην Τ**οπολογία**, έναν κλάδο των Μαθηματικών, που έχει απαρχές στο Erlangen Program του **Felix Klein** (1872), ενώ θεμελιώθηκε και εδραιώθηκε από τον **Henri Poincare** το 1894. Η Τοπολογία εμφανίστηκε στο τέλος του 19^{ου} αιώνα ως μια ποσοτική **προσέγγιση** στη **γεωμετρία,** ερευνώντας τις ιδιότητες των αντικειμένων που **δεν αλλάζουν** όταν αυτά **παραμορφώνονται**. Έτσι, ένας κύκλος και ένα τετράγωνο είναι το ίδιο, αλλά η επιφάνεια μίας σφαίρας και ενός «ντόνατ» είναι διαφορετική. Η Τοπολογία έχει σημαντικές εφαρμογές σε διάφορα πεδία, από την φυσική και τα οικονομικά μέχρι την επιστήμη των Δεδομένων.

Ο Dennis Sullivan άλλαξε επανειλημμένα το τοπίο της Τοπολογίας, εισάγοντας νέες έννοιες, αποδεικνύοντας θεωρήματα ορόσημα, απαντώντας σε παλιές εικασίες και αναδεικνύοντας νέα προβλήματα, που έχουν δώσει ώθηση στο πεδίο αυτό. Το έργο του Sullivan άρχισε **στο τέλος** της δεκαετίας του **1970** και έκτοτε επεκτάθηκε και διακλαδώθηκε σε πολλά διαφορετικά θέματα. Ένα από τα πιο πρόσφατα επιτεύγματα του είναι η δημιουργία του «**Λεξικού Sallivan**», το οποίο συνδέει τη δυναμική με την τρισδιάστατη γεωμετρία. Αυτό επέτρεψε να αποδείξει μια **μαθηματική εικασία,** που παρέμενε άλυτη από τη δεκαετία του **1920**.

Η πρώτη συμβολή του Sullivan στην Τοπολογία πραγματοποιήθηκε στο Πανεπιστήμιο Princeton, απ' όπου ανακηρύχθηκε διδάκτορας το 1966, και αφορά στην **ταξινόμηση των γεωμετρικών** αντικειμένων που είναι γνωστά ως **manifolds** (πολλαπλότητες). Πρόκειται για γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία είναι **τοπικά** Ευκλείδεια, αλλά **ολικά** παρουσιάζουν **καμπυλότητα**. (Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η **Γη**: Ζώντας πάνω σε αυτήν, έχουμε την αίσθηση ότι πρόκειται για **δίσκο**. Όμως, όταν τη δούμε απο το διάστημα αντιλαμβανόμαστε ότι είναι **σφαιρική**). Κατόπιν έλαβε μεταδιδακτορικές θέσεις στα Πανεπιστήμια Warwick, Berkeley και MIT. Την περίοδο αυτή, **ανέπτυξε ιδέες και λεξιλόγιο** που άλλαξαν τη γενική θεώρηση της Μαθηματικής κοινότητας για την αλγεβρική και Γεωμετρική Τοπολογία. Στη θεωρία **ομοτοπίας**, εισήγαγε την ριζοσπαστική έννοια της "**τοπικοποίησης**". Κατά το τέλος της δεκαετίας του 1960, και σε όλη την δεκαετία του 1970, ο Sullivan εργάστηκε στην **ρητή θεωρία** ομοτοπίας, που εισήγαγε ο Daniel Quillen. Η συμβολή του ήταν καθοριστική, καθώς αντικατέστησε τις πλήρως αλγεβρικές μεθόδους του Quillen με εργαλεία από την Ανάλυση (**διαφορικές μορφές**), απλοποιώντας τους υπολογισμούς. Το 1974 προσκλήθηκε στο Διεθνές Κονγκρέσο Μαθηματικών, μία από τις υψηλότερες τιμές που μπορεί να δεχθεί ένας μαθηματικός. Κατά το τέλος της δεκαετίας του 1970, και στην αρχή της δεκαετίας του 1980, συνεργάστηκε με τον William Thurston στην γενίκευση της εικασίας του Lipman Bers. Το 1981 κατέλαβε την έδρα Albert Einstein στο CUNY. Τη δεκαετία του 1980, διατυπώθηκε και το **θεώρημα δείκτη** των Connes, Donaldson, Sullivan και Teleman, το οποίο αποτελεί μία βαθιά σύνδεση της Τοπολογίας με την **Ανάλυση**.

Η Τοπολογία και τα Δυναμικά Συστήματα κατοικούν σε **διακριτές** περιοχές των Μαθηματικών. Ωστόσο, η πνευματική **ευρύτητα** του Sullivan έχει καταφέρει να αντιμετωπίσει τα **γεωμετρικά αντικείμενα** με τον ίδιο τρόπο, είτε αυτά είναι **manifolds**, είτε **fractals**.

Έχει κερδίσει πολλά διεθνή βραβεία όπως τα Steel Prize, Wolf Prize (2010) και Balran Prize (2014).

Η απονομή του Abel Prize **θα γίνει στο Όσλο στις 24 Μαΐου 2022.**

Πηγές: TechWar.gr, Paratiritis-news.gr, emea.gr, lifo.gr, abelprize.no, nytimes.com, thales and friendes.org, cyprusnews.eu, Ιακ. Ανδρουλιδάκης από Hub του ΕΚΠΑ, phys.org, thehindu.com

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

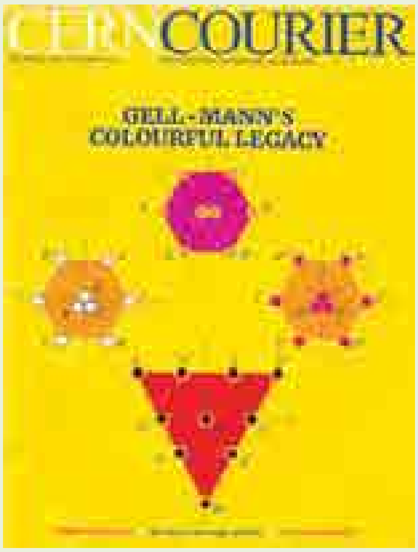
Η αλήθεια είναι πώς αυτές, οι μαθηματικές βιβλιοθήκες, θαναι λειτουργικές; Πρόσφατα, έγιναν πολλές ενέργειες, για **το πώς** το «βιβλίο» δεν πρέπει να χαθεί. Πολλοί οι θιασώτες της **αγάπης** αυτής, στο βιβλίο, που δεν θέλουν αυτή η βιωμένη εμπειρία της **ανάγνωσης**, του **ξεφυλίσματος** και της **μάθησης**, να χαθεί. Πιο συγκεκριμένα για τα **Μαθηματικά,** τα τελευταία χρόνια, τουλάχιστον της εποχής (**1960-2020**) υπήρξαν αρκετές διαδρομές σε συγκεκριμένη μαθηματική ύλη (σχολική, πανελλαδικές εξετάσεις, Μαθηματικά ανωτάτων σχολών, κλπ) αλλά και σε άλλα θέματα με μαθηματικό περιεχόμενο, επίκαιρα και ενδιαφέροντα. Πολλοί μαθηματικοί και όχι μόνο, που έζησαν από κοντά, όλο αυτό το **μαθησιακό** γεγονός, με αρκετό μαθηματικό υλικό (βιβλία, περιοδικά) **νιώθουν** λίγο άσχημα, κάποια στιγμή που **αναγκάζονται** να αποχωριστούν όλο αυτό τον πλούτο. Αρκετά και σπάνια βιβλία, φτάνουν κατά καιρούς στην ΕΜΕ, αλλά δεν είναι εύκολο, να υπάρξει σωστή συγκέντρωση όλου αυτού του υλικού, στην καλύτερη δυνατή εκδοχή. Πρόσφατα, σε μια συζήτηση με συνάδελφο **μαθηματικό** υποστήριξε και υπήρξε και **πρόταση** να γίνει με **χορηγία** ή από **φορείς της πολιτείας**, μια συγκέντρωση αυτού του πλούσιου υλικού (χώρος, εξειδικευμένο προσωπικό). Έτσι δεν θα χαθεί τίποτα και θα είναι χρηστικό, όλο το υλικό αυτό για τις επόμενες γενιές και θα βοηθάει μαθητές, φοιτητές, μελετητές, ερευνητές και εκπαιδευτικούς. Μάλιστα ο συγκεκριμένος μαθηματικός, που είχε υλικό 50 χρόνων με όλα τα φροντιστηριακά, σχολικά, πανεπιστημιακά βιβλία δεν ήθελε αυτό το υλικό να πάει χαμένο (**3000 βιβλία**), αλλά και για άλλους μαθηματικούς, που έχουν παρόμοιο πρόβλημα, με τις προσωπικές βιβλιοθήκες τους, που θέλουν και θάταν χρήσιμο, να μην χαθούν όλα αυτά τα βιβλία.

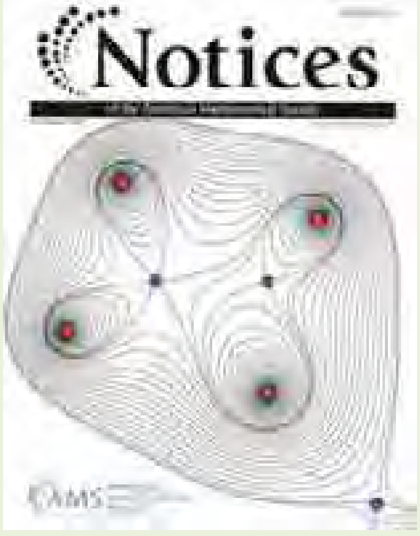
Σκεφτόμαστε πως σπάνιες και καλές βιβλιοθήκες, μεγάλων Ελλήνων μαθηματικών* που έχουν «χαθεί» ή δεν βρίσκονται ή δεν υπάρχουν. Σε μια **πρόσφατη** εκδήλωση για τον **Νικόλαο Νικολάου** που έκανε η ΕΜΕ, προς τιμή του, (υπήρξε πληροφόρηση, για τον μαθηματικό πλούτο αυτής της βιβλιοθήκης) που στην πορεία του χρόνου, αρκετά από αυτά που **υπάρχουν τώρα, δεν βρίσκονται** σε εύκολη χρήση ή έχουν «χαθεί». Η πρόταση θάταν **βέλτιστη**, αν υπήρχε **χορηγός** που **αγαπάει** και νιώθει πόσο σημαντική είναι, η σημασία των Μαθηματικών, σε συγκεκριμένο οίκημα, με έμπειρο προσωπικό, να λειτουργήσει μαθηματική βιβλιοθήκη και όλοι αυτοί που θάθελαν να δωρίσουν αυτά τα βιβλία, να μπορούσαν να το κάνουν, έτσι ώστε μαθητές, φοιτητές, εκπαιδευτικοί να έχουν πρόσβαση, σ' αυτό το μαθηματικό υλικό των τελευταίων **100** χρόνων, (ενδεικτική η χρονολογική αναφορά). Η πρόταση ασφαλώς και δεν υποκαθιστά άλλους λειτουργικούς φορείς με σχετικά μαθηματικά βιβλία. Νιώθεις, όμως κάπως άβολα, που η **ζωή παρασύρει** στο διάβα της, όλο αυτό τον σπάνιο πλούτο, που θα μπορούσε να φανεί πολύτιμος και χρήσιμος στους νέους ανθρώπους.

Βέβαια υπάρχουν και διάφορα **sites** με **σκαναρισμένα** μαθηματικά βιβλία και περιοδικά με χρονολογική αναφορά τουλάχιστον 100 χρόνων (π.χ. ″οι ρομαντικοί της γεωμετρίας″, ″για την Αγάπη των Μαθηματικών″ κλπ) που βοηθάει και συμπληρώνει αυτή την προσπάθεια, ύπαρξης και διατήρησης, αυτού του μαθηματικού υλικού.

*Κλασικό το παράδειγμα του μουσείου Καραθεωδορή στην Κομοτηνή με το πλούσιο μαθηματικό υλικό.

Περιοδικά που λάβαμε





Κ. Καραθεοδωρή [1873-1950] 72 χρόνια από τον θάνατό του

Η δημινιαία έκδοση της εφημερίδας του συνδέσμου φίλων Κ. Καραθεοδωρή, ήρθε πάλι στη στήλη του περιοδικού, που **έφτασε** αισίως στα **83^{o}** φύλλο της, (**32^{o}** σε ηλεκτρονική έκδοση). Ευχόμαστε να συνεχίσει απρόσκοπτα το έργο της και να μας δίνει πολλές αφορμές για σκέψεις και ιδέες για τα Μαθηματικά*****, την εκπαίδευση, τον Ελληνισμό, την Ιστορία και τόσες άλλες δραστηριότητες από την ακριτική Θράκη μας.


Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

***** Στο **YouTube** και στο **instagram** υπάρχουν πολλές πληροφορίες για το Μουσείο Καραθεοδωρή και τις δράσεις του, όπως και για την έκδοση της εφημερίδας. Επίσης στο info@karatheodori.gr , και για τη **διατριβή** του Καραθεοδωρή στο youtu.be/iyjHJUDbYml τόσο για τη ζωή του όσο και για το έργο του στο youtu.be/80wOuXgd7cA. Πρόσφατα παίχτηκε θεατρική παράσταση στην Αθήνα (11 Μάρτη 2022 - για 16 παραστάσεις) «*Το τελευταίο θεώρημα*» του Κ. Καραθεοδωρή, με μεγάλη επιτυχία.

Αθλητική Ολυμπιάδα Τόκιο 2021

πέρασαν απαρατήρητα … αλλά εντυπωσίασαν

"νους υγιής
εν σώματι υγιεί"
Ιούνιος Ιουβενάλης[1]
Θαλής ο Μιλήσιος[2]

1. Προέρχεται από τα Λατινικά από τον ποιητή Ιούνιο Ιουβενάλη (127 μ.Χ.) στο έργο του «Σάτιρες» (orandum est ut sitmens sana in corporesano) και το είπε για να πείσει τους Ρωμαίους να ακολουθήσουν τον δρόμο της αρετής
2. Υπάρχει και η αναφορά, ότι τόχει πει και ο Θαλής ο Μιλήσιος όταν ρωτήθηκε "πότε κάποιος είναι ευτυχισμένος" … "το μεν σώμα υγιής, την δε ψυχή εύπορος, τη δε φύσιν ευπαίδευτος"

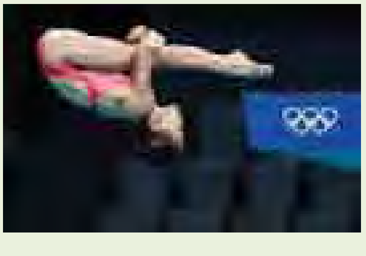
Με master στα Μαθηματικά

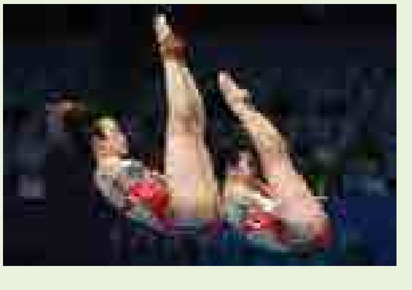
Η αυστριακή **Άννα Κισενχοφερ** ήταν το πιο απρόσμενο χρυσό μετάλλιο, στην ποδηλασία γυναικών, στο Τόκιο 2021, καθώς πρόκειται για μια αθλήτρια **ερασιτέχνη**, η οποία δεν είχε ούτε σύλλογο, ούτε προπονητή. Η προπόνηση της ήταν ερασιτεχνική και είχε **δικό της πρόγραμμα**. Δεν είχε προπονηθεί καν, για να κάνει διαδρομές, σε ανηφόρες. Κι όμως άντεξε στην πίεση του αθλήματος και κατάκτησε το χρυσό πήγε στο Τόκιο στα 30 της χρόνια. Είχε σε μικρότερη ηλικία ασχοληθεί με το τρίαθλον. Το 2019 επιστρέφει στους αγώνες και κερδίζει το εθνικό πρωτάθλημα της Αυστρίας. Έχει τελειώσει το **διδακτορικό της στα Μαθηματικά** στη Βιέννη και στο Cambridge. Τώρα εργάζεται στο Πανεπιστήμιο της Λωζάνης και κάνει έρευνα σε θέματα διδακτικής των Μαθηματικών.

Τα Μαθηματικά **την βοήθησαν**, όπως ή ίδια αποκάλυψε, να κερδίσει τέτοιο αγώνα, μια και δεν είχε την **κατάλληλη προετοιμασία** και **προπόνηση**. Ένα μήνα πριν δημοσίευσε ένα **γράφημα** με μαθηματικούς **τύπους**, που έδειχνε τη διαδικασία του **εγκλιματισμού της θερμότητας** και τον τρόπο αντίδρασης στις **διαφοροποιήσεις**, στις τοπικές θερμοκρασίας του Τόκιο της Ιαπωνίας. Μ' αυτές τις προβλεπτικές συμπεριφορές και τη δύναμη της ψυχής της, πήρε το χρυσό μετάλλιο.

Χρυσό στις καταδύσεις και αγάπη στα Μαθηματικά

Η μικρόσωμη κινέζα Κουάν Χουγκτσαν κέρδισε το χρυσό μετάλλιο, στις καταδύσεις στην Ολυμπιάδα του Τόκιο. Βλοσυρή κατά τη διάρκεια του αγώνα αλλά πολύ **συγκροτημένη**, το κορίτσι **φαινόμενο,** γελούσε αργότερα, σαν να έκανε το πιο **απλό πράγμα** στον κόσμο … Χρυσό μετάλλιο από βατήρα 14 μέτρων στα 14 της, … με **άριστες** επιδόσεις. Η ίδια δήλωνε αργότερα. «Θέλω να αποκτήσω **χρήματα** και να βοηθήσω τους οικείους μου … Άκουσα τον προπονητή μου πολύ προσεκτικά …»



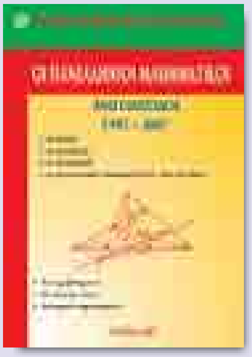


Η Κουάν, που λατρεύει τα **Μαθηματικά** και διακρίνεται σ' αυτά, θα γιόρταζε την επιτυχία της τρώγοντας λατιάο, (κινέζικο σνακ), που τόσο της είχε λείψει.

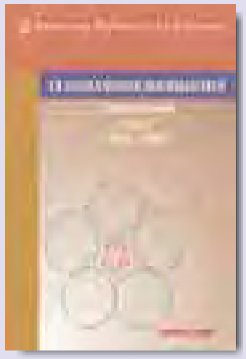
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Νέα τιμή βιβλίου: 15€

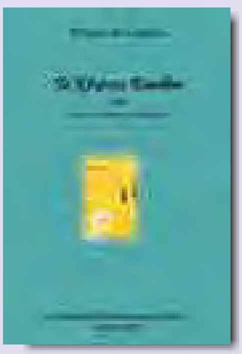
Διαγωνισμοί

Τιμή βιβλίου: 12€

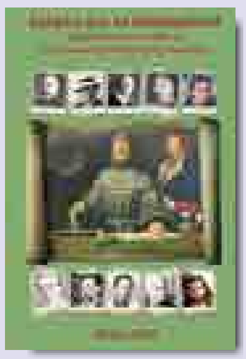
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ



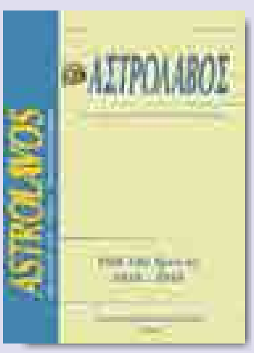
Τιμή βιβλίου: 18€



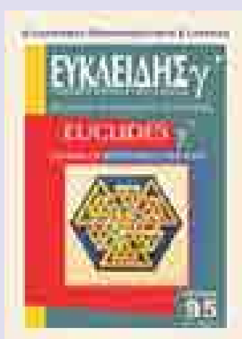
Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

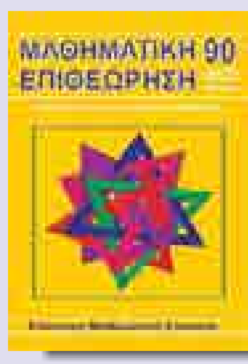
Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr