Περιεχόμενα

4.1 Εισαγωγή 4
4.2 Ορισμοί φανταστικών και μιγαδικών 4
Εφαρμογή 1 5
Εφαρμογή 2 6
Εφαρμογή 3 6
Εφαρμογή 4 6
Εφαρμογή 5 6
Εφαρμογή 6 6
Εφαρμογή 7 6
Εφαρμογή 8 7
Εφαρμογή 9 7
Εφαρμογή 10 7
Εφαρμογή 11 7
Παρατήρηση 1 7
Εφαρμογή 12 7
4.3 Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών 8
Εφαρμογή 13 8
Εφαρμογή 14 9
Εφαρμογή 15 9
Εφαρμογή 16 9
Εφαρμογή 17 10
4.4 Ισότητα των μιγαδικών 10
4.3.1 Ιδιότητες της ισότητας των μιγαδικών 10
Εφαρμογή 18 10
Εφαρμογή 19 11
Παρατήρηση 2 11
4.5 Μέτρο των μιγαδικών 11
Εφαρμογή 20 12
Εφαρμογή 21 12
Εφαρμογή 22 12
Εφαρμογή 23 13
Εφαρμογή 24 13
Εφαρμογή 25 13
Εφαρμογή 26 13
4.6 Συζυγείς μιγαδικοί 13
Εφαρμογή 27 14
Εφαρμογή 28 14
Εφαρμογή 29 14
Εφαρμογή 30 14
Εφαρμογή 31 15
Εφαρμογή 32 15
Εφαρμογή 33 15
4.6.1 Ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών 15
4.7 Πρόσθεση των μιγαδικών 17
4.7.1 Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος των μιγαδικών 17
Εφαρμογή 34 18
Εφαρμογή 35 18
Εφαρμογή 36 18
Εφαρμογή 37 18

4.7.2 Ιδιότητες της πρόσθεσης των μιγαδικών..19
4.8 Αφαίρεση των μιγαδικών...19
4.8.1 Γεωμετρική παράσταση της διαφοράς των μιγαδικών 19
Εφαρμογή 38...20
4.9 Πολλαπλασιασμός των μιγαδικών...20
4.9.1 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών 20
4.10 Πηλίκο των μιγαδικών...22
Εφαρμογή 39...22
Εφαρμογή 40...22
Εφαρμογή 41...22
Εφαρμογή 42...22
Εφαρμογή 43...23
Εφαρμογή 44...23
Εφαρμογή 45...23
Εφαρμογή 46...23
Εφαρμογή 47...24
Εφαρμογή 48...24
Εφαρμογή 49...25
Εφαρμογή 50...25
Εφαρμογή 51...25
Εφαρμογή 52...25
Εφαρμογή 53...25
Εφαρμογή 54...25
Εφαρμογή 55...26
4.11 Τριγωνομετρική (ή πολική) μορφή των μιγαδικών 26
Παρατηρήσεις 1 26
Παραδείγματα 28
Εφαρμογή 56...29
Εφαρμογή 57...30
4.12 Πρωτεύον όρισμα και όρισμα..32
Παρατηρήσεις 2 33
4.13 Ισότητα των μιγαδικών..33
4.13.1 Κριτήριο ισότητας των μιγαδικών 33
4.14 Μέτρο και όρισμα του γινομένου των μιγαδικών...33
Θεώρημα 1 34
Πόρισμα 1 34
Παρατήρηση 3..34
4.15 Μέτρο και όρισμα του πηλίκου των μιγαδικών...34
Θεώρημα 2 34
Πόρισμα 2 35
Παρατήρηση 4..35
4.16 Δύναμη με εκθέτη ακέραιο 35
Θεώρημα 3 35
Τύπος του De Moivre...35
Θεώρημα 4 35
Υπόδειξη 1 36
Εφαρμογή 58...36
Εφαρμογή 59...38
Εφαρμογή 60...39
Παρατήρηση 5 39

Εφαρμογή 61 39
Εφαρμογή 62 40
Εφαρμογή 63 41
Εφαρμογή 64 41
Εφαρμογή 65 41
4.17 Ρίζες των μιγαδικών 42
4.17.1 Νιοστές ρίζες της μονάδας 42
Θεώρημα 5 42
4.17.2 Ιδιότητες των νιοστών ριζών της μονάδας 42
4.17.3 Νιοστές ρίζες των μιγαδικών 43
4.17.4 Παρατηρήσεις 43
Εφαρμογή 66 43
Υπόδειξη 2 44
Εφαρμογή 67 44
Υπόδειξη 3 45
Εφαρμογή 68 45
Υπόδειξη 4 46
Εφαρμογή 69 46
Υπόδειξη 5 47
Εφαρμογή 70 47
Εφαρμογή 71 47
Υπόδειξη 6 48
Εφαρμογή 72 48
Υπόδειξη 7 49
Εφαρμογή 73 49
Εφαρμογή 74 49
Εφαρμογή 75 49
Εφαρμογή 76 50
Εφαρμογή 77 50
Εφαρμογή 78 50
Εφαρμογή 79 51
Παρατήρηση 6 52
4.18 Εκθετική μορφή των μιγαδικών 52
4.18.1 Νεπέρειος λογάριθμος των μιγαδικών 52
Εφαρμογή 80 52
Εφαρμογή 81 52

4.1 Εισαγωγή

Η προσπάθεια επίλυσης των:

- εξισώσεων $3^{ου}$ βαθμού $\left(ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0\right)$, με πραγματικούς συντελεστές και
- των δευτεροβάθμιων εξισώσεων $\left(ax^2+\beta x+\gamma=0\right)$, με πραγματικούς συντελεστές και αρνητική διακρίνουσα,

οδήγησε τους μαθηματικούς (S.Del Ferro, N. Tartaglia, R. Bombelli), στα μέσα του $16^{ου}$ αιώνα, στο να διευρύνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τη δημιουργία νέων αριθμών, της μορφής $a+\beta i$ στο υπερσύνολο $\mathbb{C}$, τους μιγαδικούς αριθμούς (complex numbers). Στο $\mathbb{C}$ οι πράξεις, οι ιδιότητες τους και η επίλυση των εξισώσεων, ταυτίζονται με αυτές του $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}=\mathbb{R}\cup \mathrm{I}$

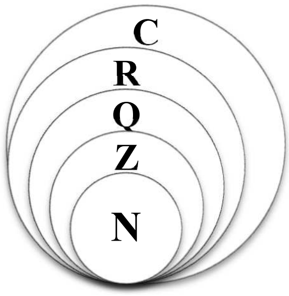
$\mathbb{R}=Q\cup\{άρρητοι\ αριθμοί\}$

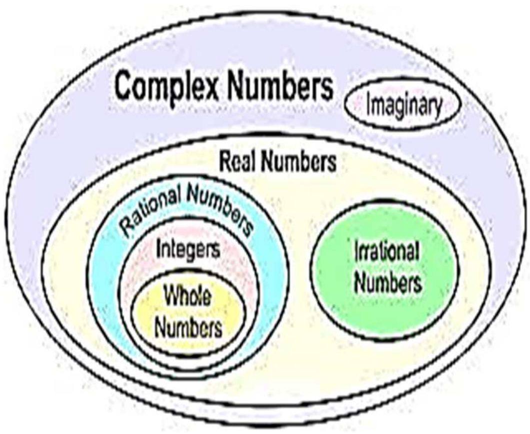
$Q=\left\{\dfrac{m}{n}: m\in Z,\ n\in Z^*\right\}$

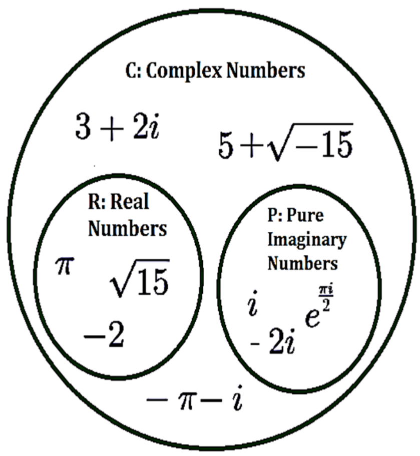
$Z=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ ...\}$

$\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{...,-3,-2,-1\}$

$N=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$,







4.2 Ορισμοί φανταστικών και μιγαδικών

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$:

- έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, όταν $\Delta>0$
- έχει μία διπλή πραγματική ρίζα, όταν $\Delta=0$
- είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, όταν $\Delta<0$

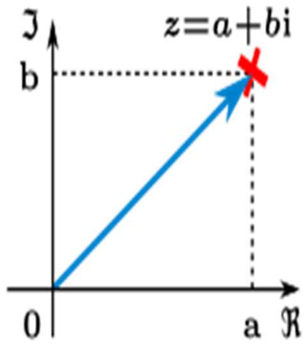
Δηλαδή, $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} & ,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0 \\ x_1=x_2=\dfrac{-\beta}{2\alpha} & ,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0 \\ \text{αδύνατη στο } \mathbb{R} & ,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0 \end{cases}$

Η εξίσωση $x^2=-1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, διότι πάντα $x^2\geq 0$. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτή η αδυναμία, έγινε διεύρυνση του $\mathbb{R}$ σε ένα νέο σύνολο, το $\mathbb{C}$. Το νέο υπερσύνολο έχει τις ίδιες πράξεις και ιδιότητες πράξεων με το γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αλλά περιέχει επιπλέον τουλάχιστον μία λύση της $x^2=-1$

Το $\mathbb{C}$ περιέχει ως στοιχείο του τον αριθμό i, για τον οποίο ισχύει ότι $i^2=-1$ και ονομάζεται **φανταστική μονάδα**. Κάθε αριθμός της μορφής ai, με $a\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **φανταστικός αριθμός**. Πρώτος ο Gauss εισήγαγε τον συμβολισμό $i=\sqrt{-1}$, αλλά ο Euler τον εισήγαγε οριστικά.

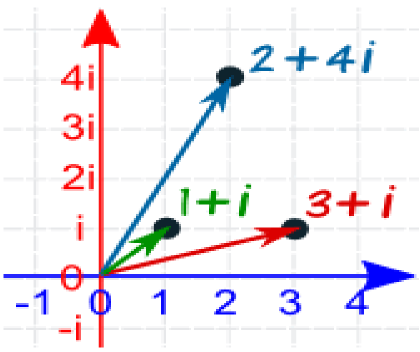
Κάθε αριθμός της μορφής $z=a+bi$, με $a,b\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **μιγαδικός**. Ο αριθμός a ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται ως $\mathrm{Re}(z)$, ενώ ο αριθμός b ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζεται ως $\mathrm{Im}(z)$ Άρα, $z=a+b\cdot i=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)\cdot i$ Κάθε $a\in\mathbb{R}$ είναι μιγαδικός αριθμός, διότι $a=a+0i$ Κάθε φανταστικός αριθμός bi είναι μιγαδικός αριθμός, διότι $bi=0+bi$ Άρα, $z\in I\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ και $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$

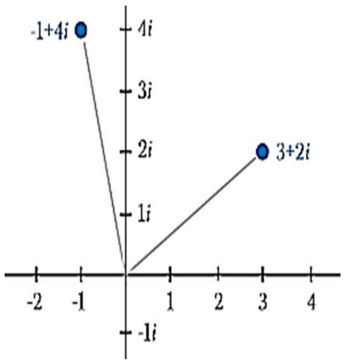
Είναι $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και $\mathbb{C}=\mathbb{R}\cup I$, όπου I το σύνολο των φανταστικών αριθμών. Αν $ab\neq 0$, τότε ο z λέγεται **καθαρός** ή **γνήσιος μιγαδικός**. Είναι $(0,b)=0+bi=bi$ και $(a,b)=a+bi$



Εφαρμογή 1

Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο, οι $1+i$, $3+i$, $2+4i$, $3+2i$, $-1+4i$





Εφαρμογή 2

Να υπολογισθούν οι δυνάμεις της μορφής i^k, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Είναι $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

Αν ο ακέραιος $k = 4\lambda + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 4$, τότε $i^k = i^{4\lambda} i^{\upsilon} = (i^4)^{\lambda} i^{\upsilon} = i^{\upsilon} = \begin{cases} 1, & \upsilon=0 \\ i, & \upsilon=1 \\ -1, & \upsilon=2 \\ -i, & \upsilon=3 \end{cases}$

Είναι $i^5 = i^{4+1} = i^4 i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^{4+2} = i^4 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$, κλπ

Εφαρμογή 3

Χαρακτηρίστε ως αληθή ή ψευδή την παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας την απάντηση σας. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$

Η πρόταση είναι αληθής, διότι αν $z_1 = z_2 = 0$, τότε $z_1 \cdot z_2 = 0$

Αν $z_1 \ne 0$, τότε $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} \cdot z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{z_1} \cdot 0 \Leftrightarrow 1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$

Ομοίως ενεργώ, όταν $z_2 \ne 0$

Εφαρμογή 4

Χαρακτηρίστε ως αληθή ή ψευδή την παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας την απάντηση σας. Η εξίσωση $x^2 + \alpha^2 = 0$ έχει λύση στο $\mathbb{C}$

Η πρόταση είναι αληθής διότι, $x^2 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-1)\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - i^2 \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - (i\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - i\alpha) \cdot (x + i\alpha) = 0 \Leftrightarrow x = i\alpha$ ή $x = -i\alpha$

Παράδειγμα $x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm 3i$

Εφαρμογή 5

Χαρακτηρίστε ως αληθή ή ψευδή την παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας την απάντηση σας. Αν $x, y \in \mathbb{C}$: $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Η πρόταση είναι ψευδής διότι, αν $\begin{cases} x = 1 \ne 0 \\ y = i \ne 0 \end{cases}$ τότε $x^2 + y^2 = 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$ ή

επίσης αν $\begin{cases} x = 3 + i \ne 0 \\ y = -1 + 3i \ne 0 \end{cases}$ τότε $x^2 + y^2 = \cancel{9} + 6i - \cancel{1} + \cancel{1} - 6i - \cancel{9} = 0$

Εφαρμογή 6

Για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό z, ισχύει ότι $z^2 > 0$. Η πρόταση είναι ψευδής διότι, αν $z = 1 + 2i \in \mathbb{C}^*$ τότε $z^2 = (1 + 2i)^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$ Δεν μπορώ να ισχυρισθώ ότι $z^2 = -3 + 4i > 0$, διότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο (όπως ήταν το $\mathbb{R}$).

Εφαρμογή 7

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$, η $x^2 - 6x + 10 = 0$

Είναι $a = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = 10$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$

Άρα, $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} = \frac{6 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$

Επίσης,
$$ax^2-\beta x+\gamma=\alpha\left(x-z_1\right)\left(x-z_2\right)=\left(x-\left(3+i\right)\right)\left(x-\left(3-i\right)\right)=\ldots=x^2-6x+10$$

Εφαρμογή 8

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$, η $3x^2-3x+1=0$

Είναι $a=3$, $\beta=-3$, $\gamma=1$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-3\right)^2-4\cdot3\cdot1=9-12=-3<0$

Άρα, $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ Επίσης, ισχύει ότι
$$ax^2-\beta x+\gamma=\alpha\left(x-z_1\right)\left(x-z_2\right)=3\left(x-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)=\ldots=3x^2-3x+1$$

Εφαρμογή 9

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$, η $4x^2-12x+13=0$

Έχω $a=4$, $\beta=-12$, $\gamma=13$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-12\right)^2-4\cdot4\cdot13=144-208=-64<0$

Άρα, $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{12\pm i\sqrt{64}}{8}=\dfrac{12\pm i8}{8}=\dfrac{3}{2}\pm i$. Επίσης,
$$ax^2-\beta x+\gamma=\alpha\left(x-z_1\right)\left(x-z_2\right)=4\left(x-\left(\frac{3}{2}+i\right)\right)\left(x-\left(\frac{3}{2}-i\right)\right)=\ldots=4x^2-12x+13$$

Εφαρμογή 10

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$, η $z^2+4z+8=0$

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot1\cdot8=16-32=-16<0$

Άρα, $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-4\pm i\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm4i}{2}=-2\pm2i$

Εφαρμογή 11

Βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η $x^2+ax+\beta=0$ έχει ρίζα τον $5-i$

Η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές και ρίζα τον $5-i$, άρα έχει και άλλη μία ρίζα, τον συζυγή του $5-i$ δηλαδή τον $5+i$

Είναι $\begin{array}{r} 5-i \\ +\ 5+i \\ \hline 10 \end{array}$, άρα $a=-10$

Είναι $\left(5-i\right)\left(5+i\right)=5^2-i^2=25-\left(-1\right)=26$, άρα $\beta=26$

Παρατήρηση 1

Για το τριώνυμο $x^2-Sx+P=0$, ισχύει ότι $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$

Εφαρμογή 12

Να βρεθεί η εξίσωση $az^2+\beta z+\gamma=0$ όπου $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $a\neq0$ αν μία λύση της είναι η $z_1=1+i$

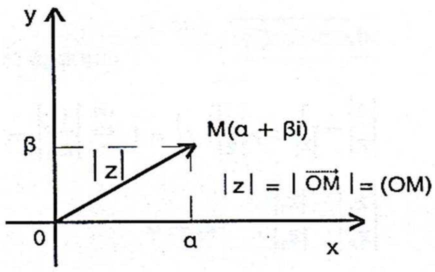
Αφού το τριώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, έχει ως μία λύση τον $z_1=1+i$ θα έχει ως 2^η λύση και τον συζυγή του, δηλαδή τον $z_2=\overline{z_1}=\overline{1+i}=1-i$

Είναι $\begin{cases} S = \dfrac{-\beta}{\alpha} = z_1 + z_2 = 1+i+1-i = 2 \\ P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = z_1 \cdot z_2 = (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta = 2\alpha \\ \gamma = 2\alpha \end{cases}$

Άρα, $az^2 + \beta z + \gamma = 0 \Leftrightarrow az^2 - 2az + 2a = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0 \overset{\alpha \neq 0}{\Longleftrightarrow} z^2 - 2z + 2 = 0$

4.3 Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών

Κάθε μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μπορώ να τον αντιστοιχίσω στο σημείο $\mathrm{M}(a, \beta)$ του επιπέδου. Αντιστρόφως, κάθε σημείο $\mathrm{M}(a, \beta)$ του επιπέδου μπορώ να το αντιστοιχίσω στον μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Το M ονομάζεται **εικόνα** του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και συμβολίζεται ως $\mathrm{M}(z)$

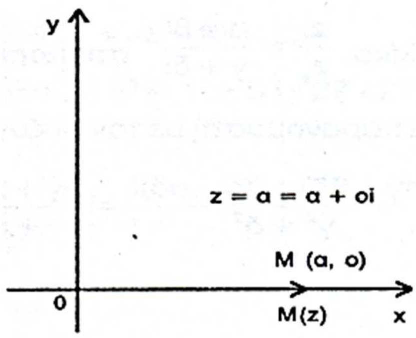


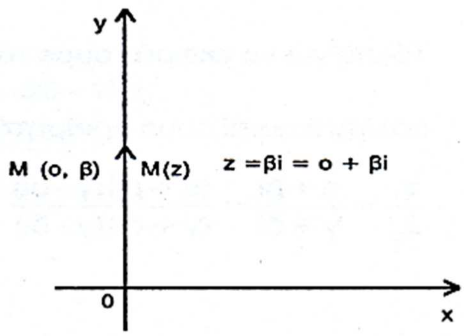
Με αυτή την απεικόνιση:

1 Ο μιγαδικός $z = 0$ απεικονίζεται στην αρχή Ο του ορθοκανονικού συστήματος των αξόνων.

2 Οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή οι μιγαδικοί της μορφής $z = a + 0i$, απεικονίζονται στον οριζόντιο άξονα xx' (άξονας των πραγματικών αριθμών). Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, απεικονίζονται στον θετικό ημιάξονα $\mathrm{O}x$ ενώ οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, απεικονίζονται στον αρνητικό ημιάξονα $\mathrm{O}x'$

3 Οι φανταστικοί αριθμοί, δηλαδή οι μιγαδικοί της μορφής $z = 0 + \beta i$, απεικονίζονται στον κατακόρυφο άξονα yy' (άξονας των φανταστικών αριθμών). Οι έχοντες $\beta > 0$, απεικονίζονται στον θετικό ημιάξονα Oy ενώ οι έχοντες $\beta < 0$, απεικονίζονται στον αρνητικό ημιάξονα Oy'

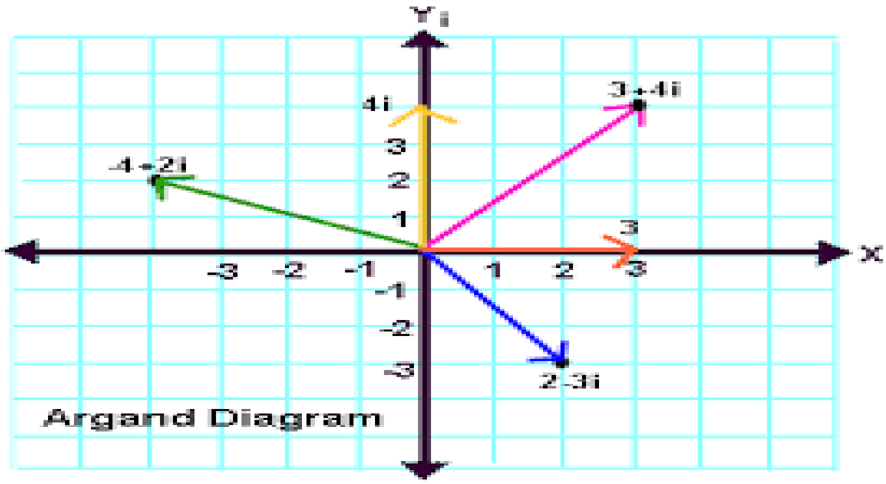




4 Οι αντίθετοι μιγαδικοί απεικονίζονται στο επίπεδο, σε σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

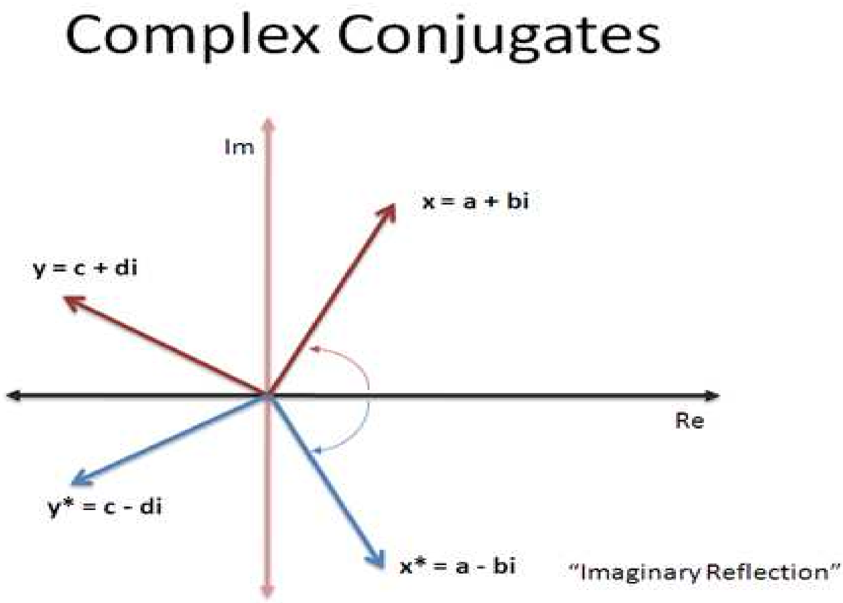
Εφαρμογή 13

Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο (ή επίπεδο Gauss) οι 3, $4i$, $3+4i$, $2-3i$, $-4+2i$



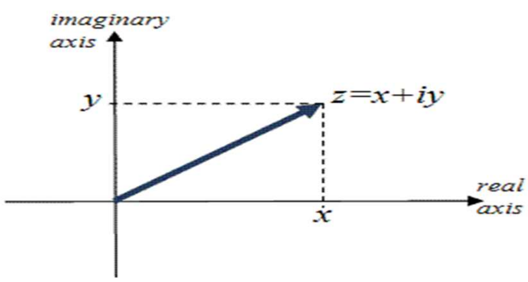
Εφαρμογή 14

Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι $x = a + bi$, $x^* = a - bi$, $y = c + di$, $y^* = c - di$, αν $a, b, c, d > 0$



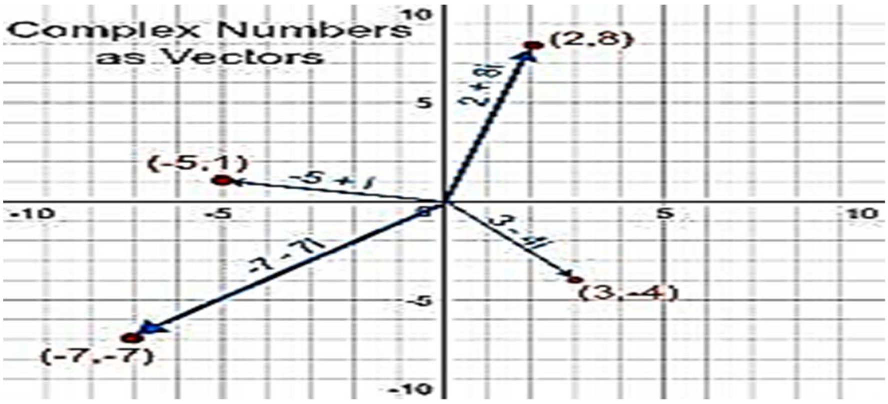
Εφαρμογή 15

Να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο $z = x + yi$ αν $x, y > 0$



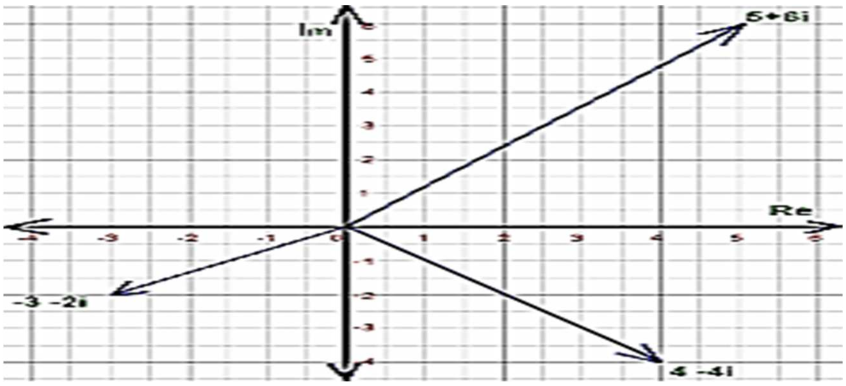
Εφαρμογή 16

Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι $2+8i$, $-5+i$, $-7-7i$, $3-4i$



Εφαρμογή 17

Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι $5+6i$, $4-4i$, $-3-2i$



4.4 Ισότητα των μιγαδικών

Επειδή κάθε μιγαδικός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $a+\beta i$, δύο μιγαδικοί $z_1=a+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι, αντίστοιχα, ίσα μεταξύ τους.

Δηλαδή, $z_1=z_2 \Leftrightarrow a+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\gamma \\ \beta=\delta \end{cases}$

Οι μιγαδικοί δεν διατάσσονται, δηλαδή δεν έχει νόημα να λέμε ότι ο z_1 είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος του z_2

4.3.1 Ιδιότητες της ισότητας των μιγαδικών

Ανακλαστική Κάθε μιγαδικός είναι ίσος με τον εαυτό του. $(z=z)$

Συμμετρική Αν ο z_1 ισούται με τον z_2, τότε και ο z_2 είναι ίσος με τον z_1 Άρα, $(z_1=z_2 \Leftrightarrow z_2=z_1)$

Μεταβατική Αν $z_1=z_2$ και $z_2=z_3$, τότε $z_1=z_3$

Εφαρμογή 18

Να λυθεί η $(3+i)z+(4-2i)=(1-i)$

Είναι $(3+i)z+(4-2i)=(1-i) \Leftrightarrow$

$(3+i)z=(1-i)-(4-2i) \Leftrightarrow$

$(3+i)z=-3+i \Leftrightarrow$

$$z=\frac{-3+i}{(3+i)}=\frac{(-3+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{-9+3i+3i+1}{9+1}=\frac{-8+6i}{10}=\frac{-4+3i}{5}=\frac{-4}{5}+\frac{3}{5}i$$

2ος τρόπος Θέτω $z=a+bi$ και η εξίσωση ισοδυνάμως γράφεται

$$(3+i)(a+bi)+(4-2i)=(1-i)\Leftrightarrow$$

$$3a+3bi+ai-b=-3+i\Leftrightarrow$$

$$(3a-b)+(3b+a)i=-3+i\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}3a-b=-3\\3b+a=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a=\frac{-4}{5}\\b=\frac{3}{5}\end{matrix}\right.$$ Άρα, $z=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

Εφαρμογή 19

Να γραφεί στη μορφή $a+bi$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$ ο $\dfrac{1+2i}{3+7i}$

Είναι $\dfrac{1+2i}{3+7i}=\dfrac{(1+2i)\cdot(3-7i)}{(3+7i)\cdot(3-7i)}=\dfrac{(3+14)+(6-7)i}{9+49}=\dfrac{17-i}{58}=\dfrac{17}{58}-\dfrac{1}{58}i$

Παρατήρηση 2

Επειδή $0=0+0i$, έπεται ότι $a+\beta i=0\Leftrightarrow\alpha=0$ και $\beta=0$

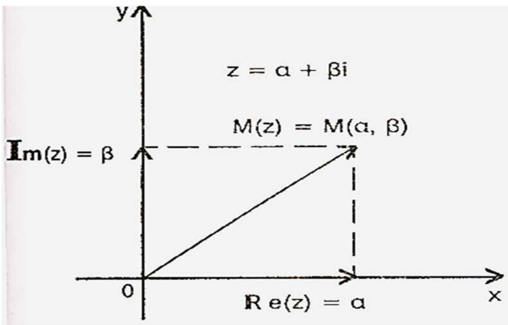
Απόδειξη

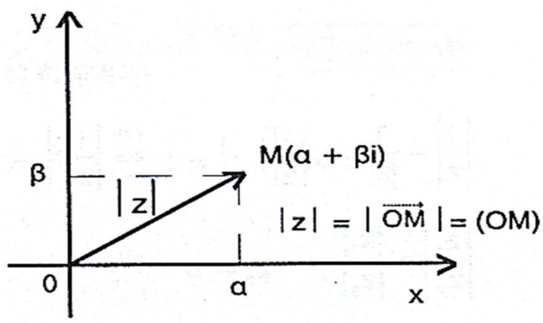
$a+\beta i=0\Leftrightarrow\alpha=-\beta i\Leftrightarrow\alpha^2=(-\beta i)^2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$

Το αντίστροφο είναι προφανές.

4.5 Μέτρο των μιγαδικών

Μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού $z=a+\beta i$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ο οποίος είναι η απόσταση από την αρχή του συστήματος των αξόνων, της εικόνας του z, δηλαδή του σημείου Μ





Εξ ορισμού προκύπτουν:

1 $z=0\Leftrightarrow|z|=0$

2 Το μέτρο ενός πραγματικού αριθμού, είναι η απόλυτη τιμή του.

3 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ και $\forall z\in\mathbb{C}$, ισχύει ότι $|\lambda z|=|\lambda|\cdot|z|$

4 $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$, ισχύει ότι $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

5 $\forall z\in\mathbb{C}$ και $\forall\nu\in\mathbb{N}$, ισχύει ότι $|z^\nu|=|z|^\nu$

6 $\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C}^*$, ισχύει ότι $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

7 $\forall z \in \mathbb{C}^*$, ισχύει ότι $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, δηλαδή $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

8 $\forall z \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι $\left\|z\right\| = |z|$

9 Η $|z|^2 = z^2$ ισχύει μόνο για τους πραγματικούς αριθμούς.

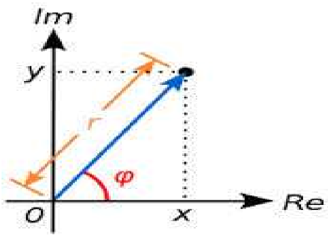
Αν $z = 3+4i$ τότε $|z| = 5$ άρα, $|z|^2 = 25$

Επίσης $z^2 = z \cdot z = (3+4i)(3+4i) = -7+24i$

10 Το μέτρο ενός φανταστικού αριθμού ai, με $a \in \mathbb{R}$ είναι $|a|$

Αν $z_1 = 5i \Rightarrow |z_1| = 5$

Αν $z_1 = -4i \Rightarrow |z_1| = 4$

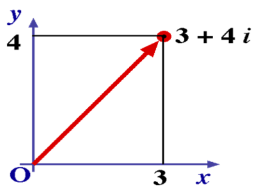


11 Ισχύει ότι $|z| = r > 0$ αν και μόνο αν η εικόνα του z, δηλαδή το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$

12 Έστω ο $z = a + bi$ Είναι $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{|z|^2} - \dfrac{b}{|z|^2} i = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} i$

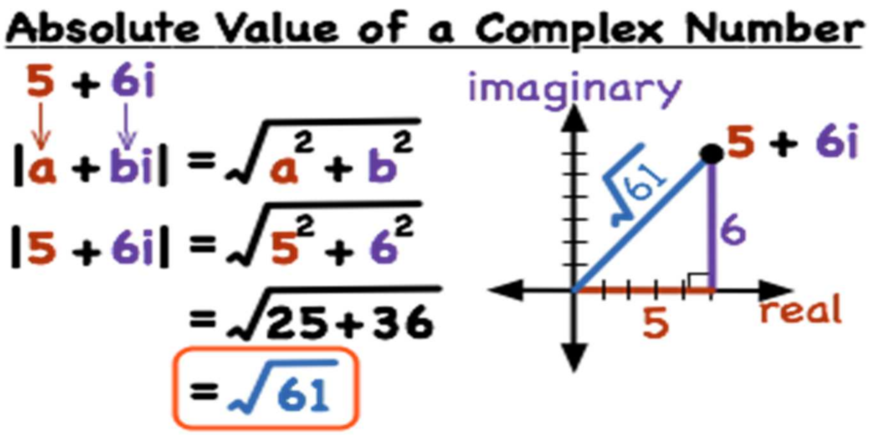
Εφαρμογή 20

Αν $z = 3+4i$ τότε $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$



Εφαρμογή 21

Υπολογίστε το $|5+6i|$



Εφαρμογή 22

Γράψτε στη μορφή $\alpha + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$, τους $(1-2i)^3$, $(2+i)^{-1}$

Είναι $(1-2i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 2i + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 - (2i)^3 = 1 - 6i - 12 + 8i = -11 + 2i$

και $(2+i)^{-1} = \dfrac{1}{2+i} = \dfrac{1 \cdot (2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \dfrac{2-i}{4-i^2} = \dfrac{2-i}{4+1} = \dfrac{2-i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5} i$

Εφαρμογή 23

Αν $z=2+i$ να γραφεί ο z^{-1} στη μορφή $a+bi$

Είναι $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

Εφαρμογή 24

Βρείτε το μέτρο του $z_1=\frac{2+i}{1-3i}$

Είναι $z_1=\frac{2+i}{1-3i}=\frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{2+6i+i-3}{1^2-9i^2}=\frac{-1+7i}{10}=\frac{-1}{10}+\frac{7}{10}i$

Άρα, $|z_1|=\sqrt{\left(\frac{-1}{10}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{49}{100}}=\sqrt{\frac{5\cancel{0}}{10\cancel{0}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Εφαρμογή 25

Βρείτε τα μέτρα των $z=(1+i)^2$, $w=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$, $u=-1+i$ και $v=(1-2i)^2+(2+5i)$

Είναι $|z|=\left|(1+i)^2\right|=|(1+i)|^2=\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

Είναι $|w|=\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3\right|=\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\right|^3=\frac{|1-i|^3}{|1+i|^3}=\left(\frac{|1-i|}{|1+i|}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3=1^3=1$

Είναι $|u|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

Είναι $v=(1-2i)^2+(2+5i)=1^2+4i^2-2\cdot1\cdot2i+2+5i=1-4-4i+2+5i=-1+i=u$

Συνεπώς, $|v|=|u|=\sqrt{2}$

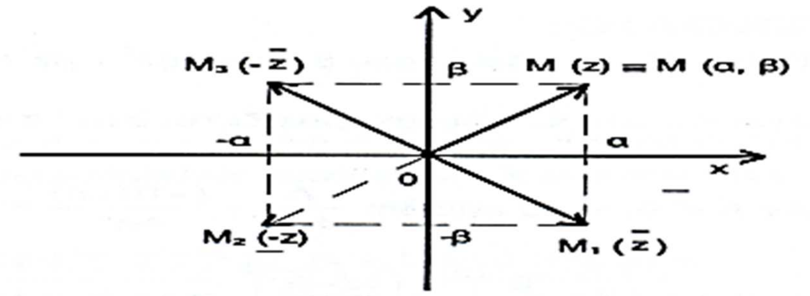
Εφαρμογή 26

Δείξτε ότι $|z|=|-z|$

Έστω $z=a+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ Εξ ΄ ορισμού είναι $|z|=\sqrt{a^2+\beta^2}$ Επίσης είναι $-z=-a-\beta i$, άρα $|-z|=\sqrt{(-a)^2+(-\beta)^2}=\sqrt{a^2+\beta^2}=|z|$ Δύο αντίθετοι μιγαδικοί, απεικονίζονται σε σημεία με αντίθετες συντεταγμένες, άρα σε σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,\ 0)$

4.6 Συζυγείς μιγαδικοί

Συζυγής του $z=a+\beta i$ είναι ο $a-\beta i$ και συμβολίζεται ως $\bar{z}$ δηλαδή, $\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i$ Δύο συζυγείς μιγαδικοί, απεικονίζονται σε σημεία με την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες, άρα σε σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα xx'



Εφαρμογή 27

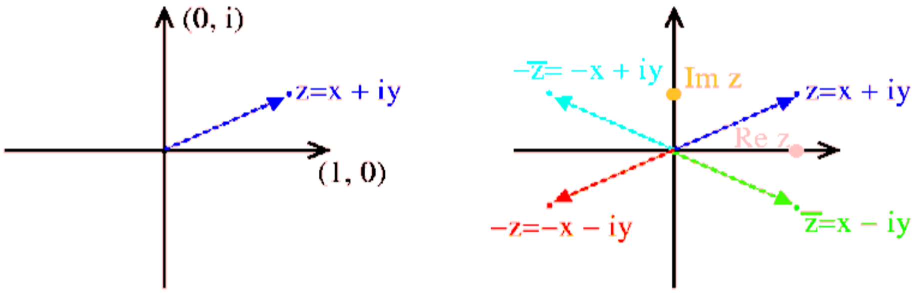
Να βρεθούν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $z_1 = z_2$ αν $z_1 = (x+2y) - i$ και $z_2 = 16 - (4x - y)i$

Πρέπει

$$\begin{cases} x+2y=16 \\ -1=-(4x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=16 \\ 1=4x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2(4x-1)=16 \\ y=4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=18 \\ y=4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$$

Εφαρμογή 28

Αν $z = x + yi$ με $x, y > 0$ αποτυπώστε στο επίπεδο τους $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$



Εφαρμογή 29

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα

z	$3+4i$	$-3+4i$	$3-4i$	$-3-4i$	5	$2i$
$\bar{z}$						
$\lvert\bar{z}\rvert$						

Είναι

z	$3+4i$	$-3+4i$	$3-4i$	$-3-4i$	5	$2i$
$\bar{z}$	$3-4i$	$-3-4i$	$3+4i$	$-3+4i$	5	$-2i$
$\lvert\bar{z}\rvert$	5	5	5	5	5	2

Εφαρμογή 30

Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε οι $z_1 = (x+2y) + i$ και $z_2 = 16 - (4x - y)i$ να είναι συζυγείς.

Πρέπει

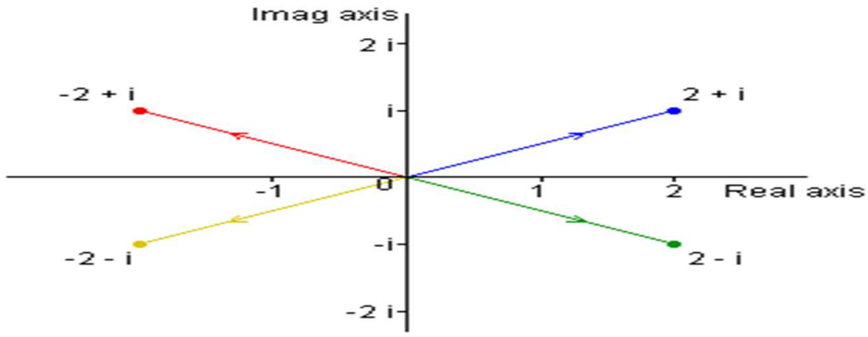
$$\begin{cases} x+2y=16 \\ 1=4x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=16 \\ 4x-1=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2(4x-1)=16 \\ y=4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=18 \\ y=4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$$

Άρα, $z_1 = (2+14) + i = 16 + i$ και $z_2 = 16 - (8-7)i = 16 - i$

Εφαρμογή 31

Αν $z=2+i$, να παρασταθούν στο επίπεδο οι $z,\ -z,\ \bar{z},\ \overline{-z}$

Είναι $z=2+i$, $-z=-2-i$, $\bar{z}=2-i$, $\overline{-z}=-2+i$

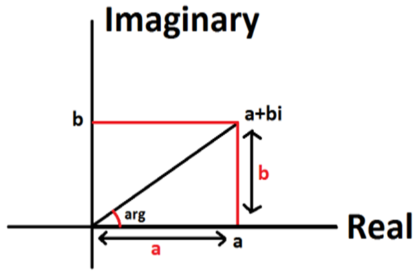


Εφαρμογή 32

Να εκφρασθούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z=a+bi$, συναρτήσει του z

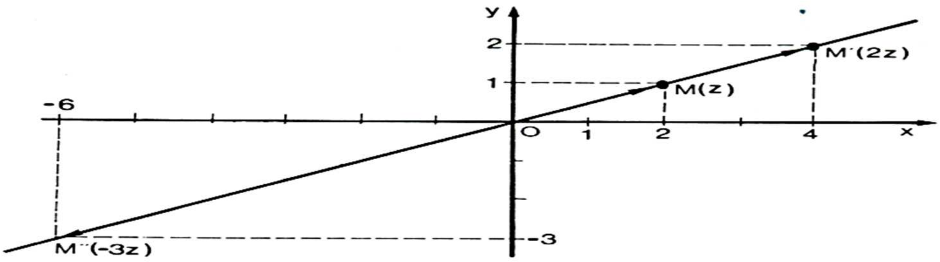
$$\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ \bar{z}=a-bi \end{array}\right\} \Rightarrow z+\bar{z}=2a \Rightarrow a=\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ -\bar{z}=-a+bi \end{array}\right\} \Rightarrow z-\bar{z}=2bi \Rightarrow b=\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$



Εφαρμογή 33

Να παρασταθούν στο επίπεδο, οι $z=2+i$, $2z$, $-3z$



4.6.1 Ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών

1 Από τον ορισμό προκύπτει ότι $\overline{(\bar{z})}=z$, δηλαδή συζυγής του συζυγούς είναι ο αρχικός μιγαδικός.

2 $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $z+\bar{z}=2\alpha$, όπου $z=a+\beta i$

Απόδειξη

Αν $\left\{\begin{array}{l} z=\alpha+\beta i \\ \bar{z}=\alpha-\beta i \end{array}\right\} \Rightarrow z+\bar{z}=(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha$

3 $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $z-\bar{z}=2\beta i$, όπου $z=a+\beta i$

Απόδειξη

Αν $\left.\begin{cases} z=\alpha+\beta i \\ \bar{z}=\alpha-\beta i \end{cases}\right\} \Rightarrow z-\bar{z}=(\alpha+\beta i)-(\alpha-\beta i)=2\beta i$

4 $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $z\cdot\bar{z}=\alpha^2+\beta^2=|z|^2$, όπου $z=a+\beta i$

Απόδειξη

Είναι $z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)=\alpha^2-\alpha\beta i+\alpha\beta i-\beta^2 i^2=\alpha^2-\beta^2 i^2=\alpha^2+\beta^2$

5 Το άθροισμα και το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών, είναι πραγματικός αριθμός. Τα αντίστροφα, δεν ισχύουν.

Πράγματι, αν $\left.\begin{cases} z_1=3+4i \\ z_2=5-4i \end{cases}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=8\in\mathbb{R}$, αλλά $\overline{z_1}\neq z_2$

Επίσης, αν $\left.\begin{cases} z_1=3i \\ z_2=4i \end{cases}\right\} \Rightarrow z_1\cdot z_2=3i\cdot 4i=12i^2=-12\in\mathbb{R}$, αλλά $\overline{z_1}\neq z_2$

6 Αν $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$

Απόδειξη

Αν $z\in\mathbb{R}$ τότε είναι $z=\alpha+\beta i=\alpha+0i=\alpha$ και $\bar{z}=\alpha$ Άρα, $z=\bar{z}$

Αν $z=\bar{z}$ τότε $\cancel{\alpha}+\beta i=\cancel{\alpha}-\beta i\Leftrightarrow \beta i=-\beta i\Leftrightarrow \beta=-\beta\Leftrightarrow 2\beta=0\Leftrightarrow \beta=0$

Άρα, $z=\alpha+\beta i=\alpha+0i=\alpha$

7 Αν $z\in I\Leftrightarrow z=-\bar{z}$ όπου I το σύνολο των φανταστικών αριθμών.

Απόδειξη

Αν $z\in I$, τότε $z=\alpha+\beta i=0+\beta i=\beta i$ Επίσης $\bar{z}=-\beta i=-(\beta\, i)=-z$

Αν $z=-\bar{z}$, τότε $z+\bar{z}=0\Leftrightarrow(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=0\Leftrightarrow 2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$

Άρα, $z=\beta i$ δηλαδή $z\in I$

8 $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$

Απόδειξη

Έστω $z=a+\beta i$, τότε $|z|=\sqrt{a^2+\beta^2}$

Επίσης $\bar{z}=\alpha-\beta i$ και $|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-\beta)^2}=\sqrt{a^2+\beta^2}$ Άρα, $|z|=|\bar{z}|$

Επίσης $-\bar{z}=-\alpha+\beta i$ και $|-\bar{z}|=\sqrt{(-a)^2+\beta^2}=\sqrt{a^2+\beta^2}=|z|$

9 $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

Απόδειξη

Έστω $z=a+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ Εξ΄ ορισμού είναι $|z|=\sqrt{a^2+\beta^2}$ Άρα, $|z|^2=a^2+\beta^2$

Επίσης είναι $\bar{z}=\alpha-\beta i$ και $z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$ Άρα, $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

10 $\forall z\in\mathbb{C}$ με $z=a+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\overline{(-z)}=-\bar{z}$

11 Αν $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ τότε $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ δηλαδή, ο συζυγής του αθροίσματος δυο μιγαδικών, ισούται με το άθροισμα των συζυγών τους.

Απόδειξη

$\overline{z_1+z_2}=$

$\overline{(a_1+a_2)+(\beta_1+\beta_2)i}=(a_1+a_2)-(\beta_1+\beta_2)i=(\alpha_1-\beta_1 i)+(\alpha_2-\beta_2 i)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

12 Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_\nu}$ για $\nu\geq 2$

13 $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ δηλαδή, ο συζυγής της διαφοράς δυο μιγαδικών, ισούται με τη διαφορά των συζυγών τους.

14 $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ δηλαδή, ο συζυγής του γινομένου δυο μιγαδικών, ισούται με το γινόμενο των συζυγών τους.

15 Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_\nu}$ για $\nu\geq 2$

16 $\forall z_1\in\mathbb{C},\ \forall z_2\in\mathbb{C}^*$ ισχύει ότι $\overline{z_1:z_2}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ δηλαδή, ο συζυγής του πηλίκου δυο μιγαδικών, ισούται με το πηλίκο των συζυγών τους.

17 Από την ανωτέρω ιδιότητα για $z_1=1$ και $z_2=z\neq 0$ ισχύει ότι $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ δηλαδή, ο συζυγής του αντίστροφου ενός μιγαδικού, ισούται με τον αντίστροφο του συζυγούς του.

18 $\forall z\in\mathbb{C}$ και $\forall\,\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $\left(\overline{z^\nu}\right)=\left(\overline{z}\right)^\nu$

4.7 Πρόσθεση των μιγαδικών

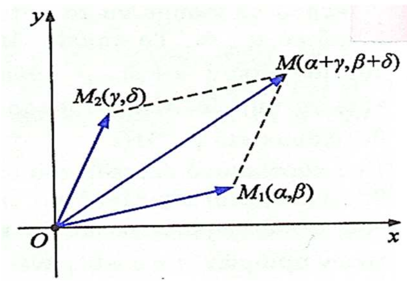
Η πρόσθεση των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ ορίζεται ως πρόσθεση των πραγματικών και των φανταστικών μερών τους, αντίστοιχα. $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

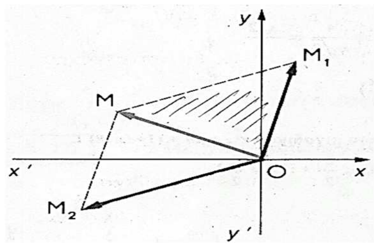
Παράδειγμα $(1+2i)+(3+7i)=4+9i$

4.7.1 Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος των μιγαδικών

Αν οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ στο επίπεδο, είναι αντίστοιχα τα σημεία $\mathrm{M}_1(\alpha,\beta)$, $\mathrm{M}_2(\gamma,\delta)$ τότε το $\mathrm{M}(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$ είναι η εικόνα του αθροίσματος τους $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

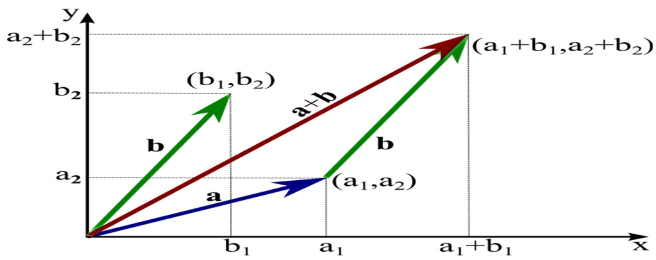
Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των $a+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων, δηλαδή $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$





Εφαρμογή 34

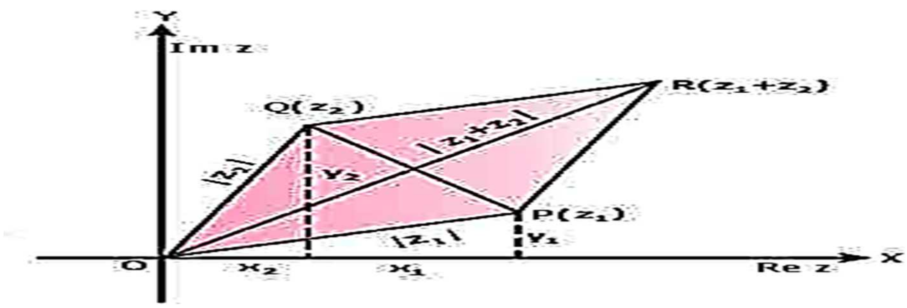
Να παρασταθεί γραφικά, η πρόσθεση των $\alpha_1 + \alpha_2 i$ και $b_1 + b_2 i$



Εφαρμογή 35

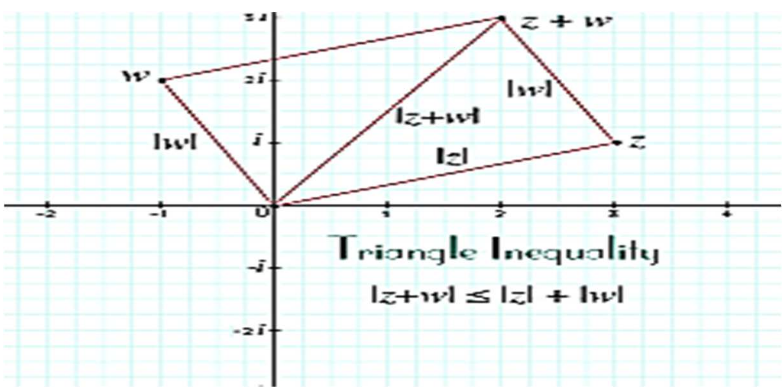
Να παρασταθούν γραφικά οι $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $-z_1 - z_2$, $z_2 - z_1$

Είναι $z_1 + z_2 = \overrightarrow{OR}$, $z_1 - z_2 = \overrightarrow{QP}$, $-z_1 - z_2 = \overrightarrow{RO}$, $z_2 - z_1 = \overrightarrow{PQ}$



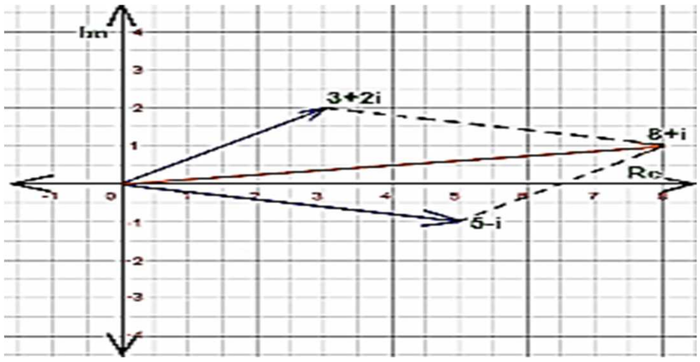
Εφαρμογή 36

Να γραφεί η τριγωνική ανισότητα για τους μιγαδικούς z, w



Εφαρμογή 37

Να παρασταθεί γραφικά, η πρόσθεση των $3+2i$ και $5-i$



4.7.2 Ιδιότητες της πρόσθεσης των μιγαδικών

1 Αντιμεταθετική $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2 Προσεταιριστική $\forall\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\left(z_1 + z_2\right) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right)$

3 Ουδέτερο στοιχείο $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists z' \in \mathbb{C}:\ z + z' = z' + z = z$

Το z' είναι το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης και έχει τη μορφή $0 + 0i$ Αποδεικνύεται ότι, το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης είναι μοναδικό.

4 Συμμετρικό στοιχείο (αντίθετος μιγαδικού αριθμού)

$\forall z \in \mathbb{C}$ υπάρχει $z' \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε να ισχύει $z + z' = z' + z = 0$ Το z' είναι ο αντίθετος του μιγαδικού z. Αποδεικνύεται ότι, κάθε μιγαδικός έχει μόνο έναν αντίθετο.

5 Διαγραφή $\forall z_1, z_2,\ z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι αν $z_1 = z_2$ τότε $z_1 + z = z_2 + z$

6 Αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με <u>πραγματικούς συντελεστές</u> $\left(\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu-1},\ \ldots,\alpha_1,\alpha_0 \in \mathbb{R}\right)$ και $\alpha_\nu \neq 0$ έχει ρίζα τον μιγαδικό z, τότε έχει ρίζα και τον $\bar{z}$ Πράγματι, αφού ο z είναι ρίζα της εξίσωσης, ισχύει ότι

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overline{\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0} = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\alpha_\nu z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}} + \ldots + \overline{\alpha_1 z} + \overline{\alpha_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overline{\alpha_\nu}\,\overline{z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1}}\,\overline{z^{\nu-1}} + \ldots + \overline{\alpha_1}\,\bar{z} + \overline{\alpha_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu\left(\bar{z}\right)^\nu + \alpha_{\nu-1}\left(\bar{z}\right)^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\bar{z} + \alpha_0 = 0$$ Άρα, ο $\bar{z}$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

4.8 Αφαίρεση των μιγαδικών

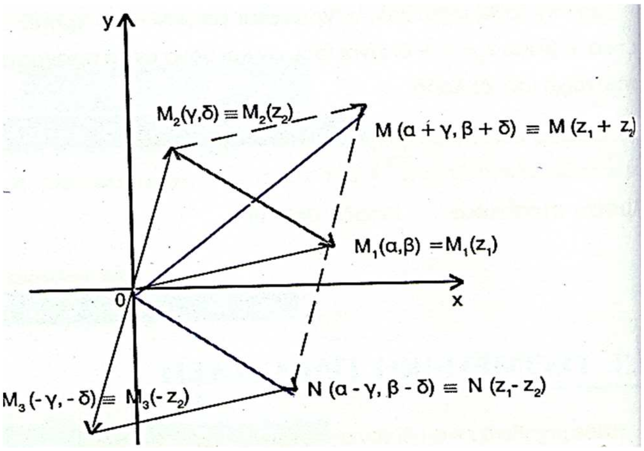
Για την αφαίρεση του $z_2 = \gamma + \delta i$ από τον $z_1 = a + \beta i$, εκτελώ πρόσθεση του z_1 με τον $-z_2 = -\gamma - \delta i$ (αντίθετος του z_2) δηλαδή, εκτελώ αφαίρεση των πραγματικών και των φανταστικών τους μερών, αντίστοιχα.

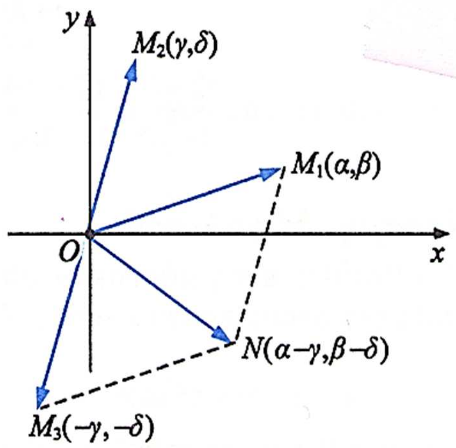
$z_1 - z_2 = (\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$

Παράδειγμα $(1 + 2i) - (3 + 7i) = (1 + 2i) + (-3 - 7i) = (1 - 3) + (2 - 7)i = -2 - 5i$

4.8.1 Γεωμετρική παράσταση της διαφοράς των μιγαδικών

Αν τα $\mathrm{M}_1\left(\alpha,\ \beta\right)$, $\mathrm{M}_2\left(\gamma,\ \delta\right)$ είναι οι εικόνες των $z_1 = a + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ αντίστοιχα, τότε εικόνα της διαφοράς τους $z_1 - z_2$ είναι το $\mathrm{N}\left(\alpha - \gamma,\ \beta - \delta\right)$





Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των $a+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους, δηλαδή $\overrightarrow{O\mathrm{N}}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$

Από την τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος z_1+z_2 και της διαφοράς z_1-z_2, προκύπτει ότι $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

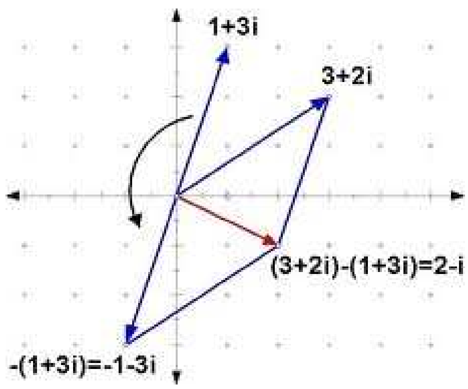
Αν αντικαταστήσω το z_2 με το $-z_2$, η ανωτέρω σχέση γράφεται $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$

Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι $|z_1+z_2+...+z_\nu| \le |z_1| + |z_2| +...+|z_\nu|$

Εφαρμογή 38

Να παρασταθεί γεωμετρικά, στο επίπεδο, η αφαίρεση $(3+2i)-(1+3i)$

Είναι $(3+2i)-(1+3i)=2-i$



4.9 Πολλαπλασιασμός των μιγαδικών

Για τον πολλαπλασιασμό των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ ισχύει ότι

$$(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=\alpha\cdot(\gamma+\delta i)+\beta i\cdot(\gamma+\delta i)=$$

$$\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

Παράδειγμα $(1+2i)\cdot(3+7i)=1\cdot(3+7i)+2i\cdot(3+7i)=3+7i+6i-14=-11+13i$

4.9.1 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών

1 **Αντιμεταθετική** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

2 **Προσεταιριστική** $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$

3 Ουδέτερο στοιχείο $\forall z\in\mathbb{C}, \exists\, z'\in\mathbb{C}:\ z\cdot z' = z'\cdot z = z$
Το z' είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού και έχει τη μορφή $1+0i$
Αποδεικνύεται ότι, το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι μοναδικό.

4 Συμμετρικό στοιχείο (αντίστροφος μιγαδικού αριθμού) $\forall\, z\in\mathbb{C}^*, \exists\, z'\in\mathbb{C}^*: z\cdot z' = z'\cdot z = 1$ Το z' είναι ο αντίστροφος του μιγαδικού z.
Αποδεικνύεται ότι, κάθε μιγαδικός έχει μόνο έναν αντίστροφο.

5 Διαγραφή $\forall z_1, z_2,\ z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$, αν $z_1\cdot z = z_2\cdot z$ τότε $z_1 = z_2$

6 Επιμεριστική $\forall z_1, z_2,\ z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $z_1\cdot(z_2+z_3) = z_1\cdot z_2 + z_1\cdot z_3$

7 Αν $z_1 = \alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2 = \alpha_2+\beta_2 i$ τότε $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

Απόδειξη

$$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{(a_1+\beta_1 i)\cdot(a_2+\beta_2 i)} = \overline{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i}$$

$$=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$$

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \left(\overline{\alpha_1+\beta_1 i}\right)\cdot\left(\overline{\alpha_2+\beta_2 i}\right) = (\alpha_1-\beta_1 i)\cdot(\alpha_2-\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)i$$

άρα, $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

8 Αν $z_2\neq 0$ τότε $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Απόδειξη

Θέτω $z = \dfrac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z\cdot z_2 = z_1 \Leftrightarrow \overline{z\cdot z_2} = \overline{z_1} \Leftrightarrow \overline{z}\cdot\overline{z_2} = \overline{z_1} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ άρα, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Αν στην ανωτέρω σχέση θέσω $z_1 = 1,\ z_2 = z\neq 0$ τότε $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ άρα, $\left(\overline{z^{-1}}\right) = \left(\overline{z}\right)^{-1}$

9 Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι $\forall\,\nu\geq 2$ είναι $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu} = \overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_\nu}$ και $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_\nu}$

Αν στην τελευταία ισότητα θέσω $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu$ προκύπτει ότι $\left(\overline{z^\nu}\right) = \left(\overline{z}\right)^\nu$

10 $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow z_2\cdot\overline{z_1}\geq 0\left(\text{ή } z_1\cdot\overline{z_2}\geq 0\right)$

11 $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z_1-z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow z_2\cdot\overline{z_1}\leq 0\left(\text{ή } z_1\cdot\overline{z_2}\leq 0\right)$

12 $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $\big||z_1|-|z_2|\big| = |z_1+z_2| \Leftrightarrow z_2\cdot\overline{z_1}\leq 0\left(\text{ή } z_1\cdot\overline{z_2}\leq 0\right)$

13 $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $\big||z_1|-|z_2|\big| = |z_1-z_2| \Leftrightarrow z_2\cdot\overline{z_1}\geq 0\left(\text{ή } z_1\cdot\overline{z_2}\geq 0\right)$

14 $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $z+\overline{z}\leq 2|z|$

Πράγματι, αν $z = a+bi$ τότε $\overline{z} = a-bi$, άρα $z+\overline{z} = 2a$

Είναι $2|z| = 2\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{a^2} = 2|a|\geq 2a = z+\overline{z}$

Είναι $z+\overline{z} = 2|z|$ όταν $2a = 2|z| \Leftrightarrow a = |z| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow a\geq 0$ και $b = 0$

4.10 Πηλίκο των μιγαδικών

Προκειμένου να ορίζεται το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, πρέπει $\gamma+\delta i\neq 0$. Για την απαλοιφή από τον παρονομαστή, του κλάσματος της φανταστικής μονάδας, πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή. Έτσι, $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)\cdot(\gamma-\delta i)}=\dfrac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$

Εφαρμογή 39

Αν $z\neq 0$, δείξτε ότι ο αριθμός $w=\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z}$ είναι φανταστικός.

Είναι $\left.\begin{cases} w=\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z} \\ \bar w=\overline{\left(\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z}\right)}=\overline{\left(\dfrac{z}{\bar z}\right)}-\overline{\left(\dfrac{\bar z}{z}\right)}=\dfrac{\bar z}{z}-\dfrac{z}{\bar z}=-\left(\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z}\right)=-w \end{cases}\right\} w\in I$

Εφαρμογή 40

Βρείτε τον z αν $|z-1|=|z^2|=1$

Αν $z=x+yi$ είναι $|z^2|=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

Επίσης $|z-1|=1\Leftrightarrow|(x-1)+yi|=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2=1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=1\Leftrightarrow$

$x^2+\cancel{1}-2x+y^2=\cancel{1}\Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0\Leftrightarrow 1-2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Αφού $x=\dfrac{1}{2}$ από τη $x^2+y^2=1$ έπεται $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Άρα, $z=x+yi=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

Εφαρμογή 41

Ποιες είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z_1\pm z_2|$ αν $z_1=3-4i$ και $|z_2|=2$;

Από τη θεωρία ισχύει ότι $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

Είναι $|z_1|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$

Άρα, $|5-2|\leq|z_1\pm z_2|\leq 5+2\Leftrightarrow 3\leq|z_1\pm z_2|\leq 7$

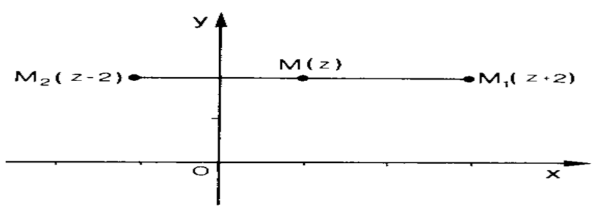
Εφαρμογή 42

Αν $z=1+2i$ να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο, οι z, $z_1=z+2$, $z_2=z-2$, $z_3=z-i$, $z_4=z+i$

Είναι $z=1+2i$

$z_1=z+2=(1+2i)+2=3+2i$

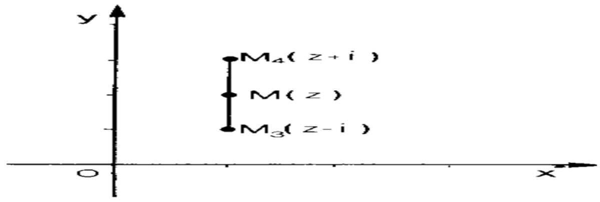
$z_2=z-2=(1+2i)-2=-1+2i$



Είναι $z = 1 + 2i$

$z_3 = z - i = (1 + 2i) - i = 1 + i$

$z_4 = z + i = (1 + 2i) + i = 1 + 3i$



Εφαρμογή 43

Αν το άθροισμα και το γινόμενο δυο μη πραγματικών μιγαδικών z_1, z_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι οι z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί.

Είναι $z_1 = a + bi,\ b \neq 0$ και $z_2 = c + di,\ d \neq 0$

Άρα,

$$\begin{array}{r} z_1 = a + bi \\ +\ \ z_2 = c + di \\ \hline z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{r} z_1 = a + bi \\ \cdot\ \ z_2 = c + di \\ \hline z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{array}$$

Για να είναι $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ πρέπει $b + d = 0 \Leftrightarrow b = -d$

Για να είναι $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$ πρέπει $ad + bc = 0 \Leftrightarrow ad - dc = 0 \Leftrightarrow d(a - c) = 0$

Επειδή είναι $d \neq 0$ πρέπει $a - c = 0 \Leftrightarrow a = c$

Άρα, $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di = a - bi = \overline{z_1}$

Εφαρμογή 44

Αν $|z + i| = |z - i|$ δείξτε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Αρκεί να δειχθεί ότι $z = \overline{z}$ Είναι $|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow |z + i|^2 = |z - i|^2 \Leftrightarrow$

$(z + i)\left(\overline{z + i}\right) = (z - i)\left(\overline{z - i}\right) \Leftrightarrow$

$(z + i)\left(\overline{z} - i\right) = (z - i)\left(\overline{z} + i\right) \Leftrightarrow$

$z\overline{z} - zi + i\overline{z} - i^2 = z\overline{z} + zi - i\overline{z} - i^2 \Leftrightarrow$

$-zi + i\overline{z} = zi - i\overline{z} \Leftrightarrow$

$-z + \overline{z} = z - \overline{z} \Leftrightarrow$

$-2z = -2\overline{z} \Leftrightarrow\ z = \overline{z}$

Εφαρμογή 45

Αν $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_k| = 1$, δείξτε ότι $|z_1 + z_2 + \ldots + z_k| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_k}\right|$

Από $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_k| = 1$ προκύπτει ότι $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}, \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}, \ldots, \overline{z_k} = \frac{1}{z_k}$

Άρα, $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_k}\right| = \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_k}\right| = \left|\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_k}\right| = |z_1 + z_2 + \ldots + z_k|$

Εφαρμογή 46

Αν $z \in \mathbb{C},\ z \neq ai,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$, δείξτε ότι $w = \frac{z + ai}{iz + a}$ φανταστικός $\Leftrightarrow z$ φανταστικός

Είναι $w=\dfrac{z+ai}{iz+a}$ φανταστικός $\Leftrightarrow \overline{w}=-w \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z}-ai}{-i\overline{z}+a}=\dfrac{-(z+ai)}{iz+a} \Leftrightarrow$

$(\overline{z}-ai)(iz+a)=-(z+ai)(-i\overline{z}+a) \Leftrightarrow$

$\cancel{\overline{z}iz}+a\overline{z}-ai^2z\cancel{-a^2i}=\cancel{zi\overline{z}}-az+ai^2\overline{z}\cancel{-a^2i} \Leftrightarrow$

$a\overline{z}+az=-az-a\overline{z}\overset{a\neq 0}{\Longleftrightarrow}$

$\overline{z}+z=-z-\overline{z} \Leftrightarrow$

$2\overline{z}+2z=0 \Leftrightarrow$

$\overline{z}+z=0 \Leftrightarrow z=-\overline{z}$

άρα, ο z είναι φανταστικός

Εφαρμογή 47

Αν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$. Είναι η γνωστή πρόταση της γεωμετρίας ότι «*Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του*».

Είναι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=$

$(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=$

$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=$

$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=$

$2z_1\overline{z_1}+2z_2\,\overline{z_2}=$

$2|z_1|^2+2|z_2|^2$

Εφαρμογή 48

Δείξτε ότι $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ με $|z_1|<1$ και $|z_2|<1$ είναι $|z_1-z_2|<|1-\overline{z_1}z_2|$

$|z_1-z_2|<|1-\overline{z_1}z_2| \Leftrightarrow$

$|z_1-z_2|^2<|1-\overline{z_1}z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})<(1-\overline{z_1}z_2)(1-z_1\overline{z_2}) \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1}-\cancel{z_1\overline{z_2}}-\cancel{z_2\overline{z_1}}+z_2\overline{z_2}<1-\cancel{z_1\overline{z_2}}-\cancel{\overline{z_1}z_2}+\overline{z_1}z_2z_1\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}<1+\overline{z_1}z_2z_1\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$|z_1|^2+|z_2|^2<1+|z_1|^2\cdot|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2+|z_2|^2-1-|z_1|^2\cdot|z_2|^2<0 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2(1-|z_2|^2)-(1-|z_2|^2)<0 \Leftrightarrow$

$(1-|z_2|^2)(|z_1|^2-1)<0 \quad$ (**1**)

Από $|z_1|<1 \Rightarrow |z_1|^2<1 \Rightarrow |z_1|^2-1<0$ και από την (**1**) προκύπτει ότι $(1-|z_2|^2)>0 \Leftrightarrow$

$1>|z_2|^2$ ή $|z_2|^2<1$ που ισχύει

Εφαρμογή 49

Αν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2| \Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_2|$

Αφού $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$, η ανωτέρω σχέση γράφεται ως

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2\ |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_2|^2+2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1-z_2|^2=3|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_2|$$

Εφαρμογή 50

Αν $|z|=1$, δείξτε ότι $\bar{z}=\frac{1}{z}$

Είναι $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

Εφαρμογή 51

Αν $z\neq 0$, δείξτε ότι $\overline{\left(z^{-1}\right)}=\left(\bar{z}\right)^{-1}$, δηλαδή $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$

Είναι $z\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \overline{z\frac{1}{z}}=\bar{1} \Leftrightarrow \bar{z}\cdot\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=1 \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \overline{\left(z^{-1}\right)}=\left(\bar{z}\right)^{-1}$

Εφαρμογή 52

Δείξτε ότι ισχύει πάντα η $z+\bar{z}\leq 2|z|$. Εξετάστε πότε ισχύει η ισότητα.

Αν $z=a+bi$, τότε $\bar{z}=a-bi$, άρα $z+\bar{z}=2a$ Επίσης είναι $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Άρα, $2|z|=2\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{a^2}=2|a|\geq 2a=z+\bar{z}$

Η $z+\bar{z}=2|z|$ ισχύει όταν $2a=2|z|$, δηλαδή $a=|z|$ άρα $Re(z)=|z|$

Άρα, η $z+\bar{z}=2|z|$ ισχύει όταν $a\geq 0$ και $b=0$

Εφαρμογή 53

Αν $z=\frac{2i}{1-i}$ δείξτε ότι $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=0$

Είναι $z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{1^2-i^2}=\frac{2i-2}{2}=-1+i$

Άρα, $z^2=(-1+i)^2=\cancel{1}-\cancel{1}-2i=-2i=0-2i$ Συνεπώς, $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=0$

Εφαρμογή 54

Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\alpha+\beta i=(1+i)^{10}$

Είναι $(1+i)^{10}=\left[(1+i)^2\right]^5=\left(\cancel{1}+\cancel{i^2}+2i\right)^5=(2\cdot i)^5=2^5\cdot i^5=32\cdot i^4\cdot i=32i$

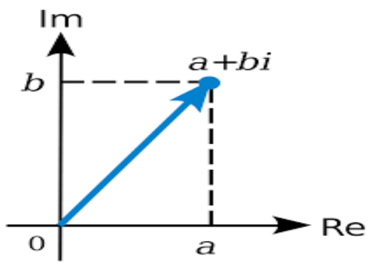
Άρα, $\alpha = 0$ και $\beta = 32$

Εφαρμογή 55

Δείξτε ότι $\forall z \in \mathbb{C}$ υπάρχουν μοναδικοί $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $z = a + bi$.

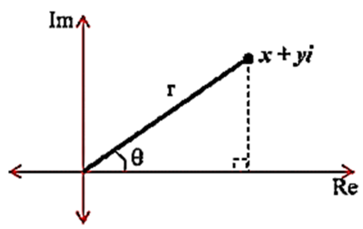
Αν η γραφή του (a,b) ως $a+bi$ δεν είναι μοναδική αλλά το (a,b) γράφεται και ως $a'+b'i$, τότε

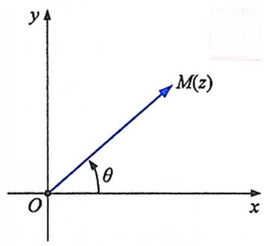
$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$



4.11 Τριγωνομετρική (ή πολική) μορφή των μιγαδικών

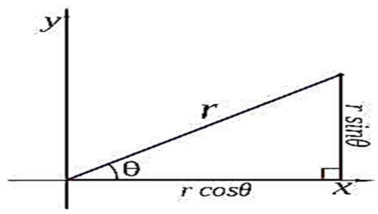
Έστω $z = x + yi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός και $\overrightarrow{OM}$ η διανυσματική ακτίνα του. **Όρισμα** του z ονομάζεται κάθε μια από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM. Το μέτρο του z είναι $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$





Εξ΄ ορισμού, ισχύουν

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot cos\theta \\ sin\theta = \dfrac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot sin\theta \end{cases}$$



Άρα, ο $z = x + yi$ γράφεται και ως $z = r \cdot cos\theta + r \cdot sin\theta \cdot i = r \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$

Αυτός ο τρόπος γραφής του z λέγεται **τριγωνομετρική** (ή **πολική**) **μορφή** του z. Αντιστρόφως, έστω $z = \lambda(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$. Τότε, αν $\lambda > 0$ το 2^o μέλος της ανωτέρω σχέσης είναι η τριγωνομετρική μορφή του z, δηλαδή λ είναι το μέτρο και φ είναι το όρισμα του z. Πράγματι $|z|^2 = \lambda^2 (cos^2\varphi + sin^2\varphi)$ και επειδή $\lambda > 0$ είναι $|z| = \lambda$. Επίσης, αν θ είναι ένα όρισμα του z τότε $z = \lambda \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$

Άρα, πρέπει $\left.\begin{cases} cos\theta = cos\varphi \\ sin\theta = sin\varphi \end{cases}\right\} \Rightarrow υπάρχει\ k \in \mathbb{Z}{:}\ \varphi = \theta + 2k\pi$

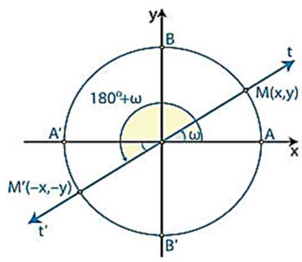
Συνεπώς, ο θ είναι ένα όρισμα του z

Παρατηρήσεις 1

1 Αν $\lambda < 0$ τότε ο $z = \lambda \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$ γράφεται ως

$z = -\lambda(-cos\theta - i \cdot sin\theta) = -\lambda\left[cos(\pi + \theta) + i \cdot sin(\pi + \theta)\right]$

άρα, ο z έχει μέτρο $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι $(\pi + \theta)$



Π.χ. $z=-5\left(cos30^0+i\cdot sin30^0\right)=$

$5\left(-cos30^0-i\cdot sin30^0\right)=$

$5\left(cos210^0+i\cdot sin210^0\right)$

2 Ένας μιγαδικός έχει μέτρο 1 αν $\exists\theta\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $z=cos\theta+i\cdot sin\theta$

Π.χ. $1=1\left(cos0^0+i\cdot sin0^0\right)=cos0^0+i\cdot sin0^0=1+0i$

$-1=1\left(cos\pi+i\cdot sin\pi\right)=cos\pi+i\cdot sin\pi=-1+0i$

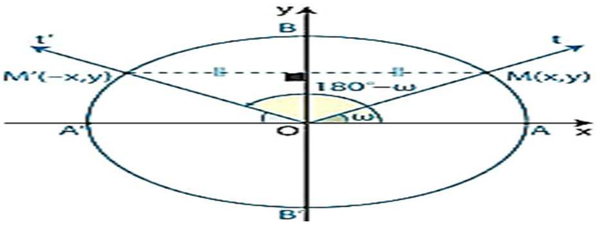
$i=1\left(cos\frac{\pi}{2}+i\cdot sin\frac{\pi}{2}\right)=cos\frac{\pi}{2}+i\cdot sin\frac{\pi}{2}=0+1i$

$-i=1\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot sin\frac{3\pi}{2}\right)=cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot sin\frac{3\pi}{2}=cos\frac{-\pi}{2}+i\cdot sin\frac{-\pi}{2}=0-1i$

3 Αν $\lambda>0$ τότε ο $z=\lambda(-cos\theta+i\cdot sin\theta)$ γράφεται $z=\lambda\left[cos\left(\pi-\theta\right)+i\cdot sin\left(\pi-\theta\right)\right]$ άρα, ο z έχει μέτρο λ και ένα όρισμα του είναι $\left(\pi-\theta\right)$

Π.χ. $z=5\left(-cos30^0+i\cdot sin30^0\right)=$

$5\left(cos150^0+i\cdot sin150^0\right)$

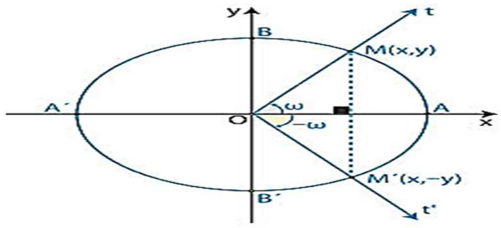


4 Αν $\lambda<0$ τότε ο $z=\lambda(-cos\theta+i\cdot sin\theta)$ γράφεται ως $z=\lambda(-cos\theta+i\cdot sin\theta)=-\lambda(cos\theta-i\cdot sin\theta)=-\lambda\left[cos\left(-\theta\right)+i\cdot sin\left(-\theta\right)\right]$ άρα, ο z έχει μέτρο $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι $-\theta$

Π.χ. $z=-5\left(-cos30^0+i\cdot sin30^0\right)=$

$5\left(cos30^0-i\cdot sin30^0\right)=$

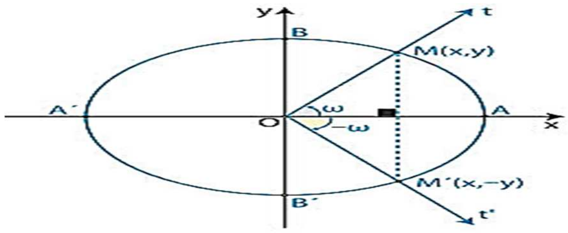
$5\left[cos\left(-30^0\right)+i\cdot sin\left(-30^0\right)\right]$



5 Αν $\lambda>0$ τότε ο $z=\lambda(cos\theta-i\cdot sin\theta)$ γράφεται ως $z=\lambda(cos\theta-i\cdot sin\theta)=\lambda\left[cos\left(-\theta\right)+i\cdot sin\left(-\theta\right)\right]$ άρα, ο z έχει μέτρο λ και ένα όρισμα του είναι $-\theta$

Π.χ. $z=5\left(cos30^0-i\cdot sin30^0\right)=$

$5\left[cos\left(-30^0\right)+i\cdot sin\left(-30^0\right)\right]$

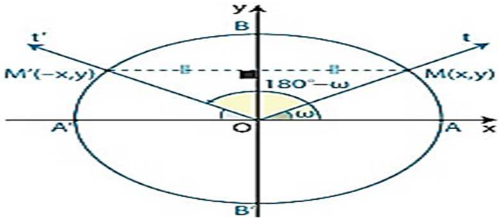


6 Αν $\lambda<0$, τότε ο $z=\lambda(cos\theta-i\cdot sin\theta)$ γράφεται ως $z=-\lambda(-cos\theta+i\cdot sin\theta)=-\lambda\left[-cos\left(\pi-\theta\right)+i\cdot sin\left(\pi-\theta\right)\right]$ άρα, ο z έχει μέτρο $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι $\left(\pi-\theta\right)$

Π.χ. $z=-5\left(cos30^0-i\cdot sin30^0\right)=$

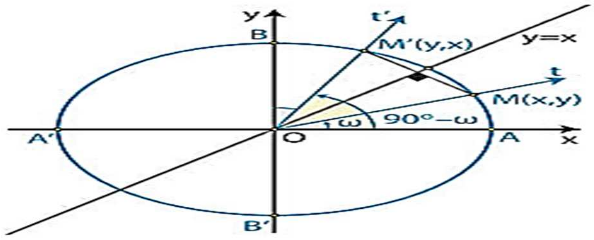
$5\left(-cos30^0+i\cdot sin30^0\right)=$

$5\left(cos150^0+i\cdot sin150^0\right)$



7 Αν $\lambda>0$ τότε ο $z=\lambda(sin\theta+i\cdot cos\theta)$ γράφεται ως

$z=\lambda(sin\theta+i\cdot cos\theta)=\lambda\left[cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$ άρα, ο z έχει μέτρο λ και ένα όρισμα του είναι $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$



Π.χ. $z=5\left(sin30^0+i\cdot cos30^0\right)=$

$5\left(cos60^0+i\cdot sin60^0\right)$

8 Αν $\lambda<0$, τότε ο $z=\lambda(sin\theta+i\cdot cos\theta)$ γράφεται ως

$$z=-\lambda(-sin\theta-i\cdot cos\theta)=-\lambda\left[sin\left(\pi+\theta\right)+i\cdot cos\left(\pi+\theta\right)\right]=$$

$$-\lambda\left[cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

Άρα, ο z έχει μέτρο $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι $\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Π.χ. $z=-5\left(sin30^0+i\cdot cos30^0\right)=-5\left(cos60^0+i\cdot sin60^0\right)=$

$5\left(-cos60^0-i\cdot sin60^0\right)=5\left(cos240^0+i\cdot sin240^0\right)$

9 Αν $\lambda>0$, τότε ο $z=\lambda(-sin\theta+i\cdot cos\theta)$ γράφεται ως

$$z=\lambda(-sin\theta+i\cdot cos\theta)=\lambda\left[-cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=$$

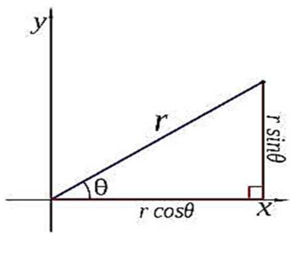
$$\lambda\left[cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$$

Άρα, ο z έχει μέτρο λ και ένα όρισμα του είναι $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

Π.χ. $z=5\left(-sin30^0+i\cdot cos30^0\right)=5\left(-cos60^0+i\cdot sin60^0\right)=5\left(cos120^0+i\cdot sin120^0\right)$

Παραδείγματα

1 Αν $z=\sqrt{3}+i$ τότε $|z|=\sqrt{3+1}=2$, $\left.\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta\;=\dfrac{1}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\pi}{6}$



άρα, $z=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)$

2 Αν $z=5$ τότε $Argz=0$ και $|z|=\sqrt{5^2+0^2}=5$ άρα, $z=5(cos0+i\cdot sin0)$

3 Αν $z=-5$ τότε $Argz=\pi$ και $|z|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$ άρα, $z=5(cos\pi+i\cdot sin\pi)$

4 Αν $z=5i$ τότε $Argz=\frac{\pi}{2}$ και $|z|=\sqrt{0^2+5^2}=5$ άρα, $z=5\left(cos\frac{\pi}{2}+i\cdot sin\frac{\pi}{2}\right)$

5 Αν $z=-5i$ τότε $Argz=\frac{-\pi}{2}$, $|z|=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5$, $z=5\left[cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

6 Αν $z=\frac{4+12i}{1-2i}$ τότε $z=\frac{(4+12i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-20+20i}{1+4}=-4+4i$, άρα $|z|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

Αν $\varphi=Argz$ τότε $\left.\begin{cases} cos\varphi=\frac{-4}{4\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \\ sin\varphi=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow\hat{\varphi}=135^0=\frac{3\pi}{4}$

Άρα, $z=4\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot sin\frac{3\pi}{4}\right)$

7 Αν $z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ τότε

$$z=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(cos225^0+i\cdot sin225^0\right)=2\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\cdot sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

8 Αν $z=-1+i\sqrt{3}$ τότε

$$z=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(cos120^0+i\cdot sin120^0\right)=2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

9 Αν $z=2\left(cos\frac{\pi}{4}-i\cdot sin\frac{\pi}{4}\right)$ τότε $z=2\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

10 Αν $z=-4\left(cos\frac{\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi}{5}\right)$ τότε

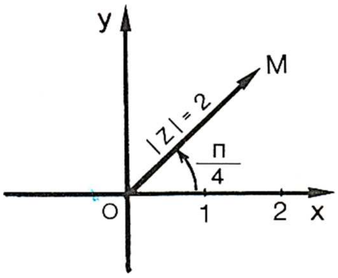
$$z=4\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+i\cdot sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right]=4\left(cos\frac{6\pi}{5}+i\cdot sin\frac{6\pi}{5}\right)$$

11 Αν $z=cos\frac{\pi}{6}-i\cdot sin\frac{\pi}{6}$ τότε $z=1\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

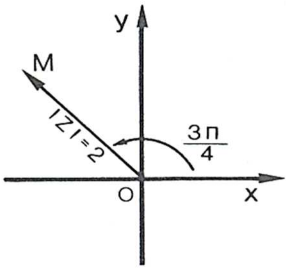
12 Αν $z=1-i$ τότε $z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Εφαρμογή 56

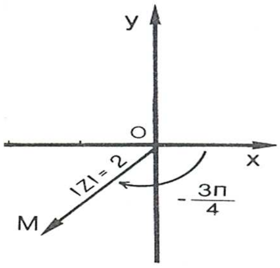
Ποιές είναι οι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών που οι γεωμετρικές παραστάσεις τους φαίνονται στα παρακάτω σχήματα;



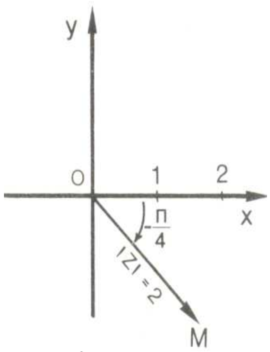
$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}$$



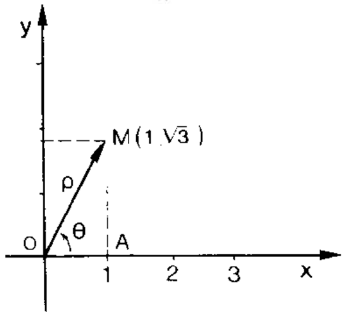
$$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$2\left(\cos 135^0 + i\cdot\sin 135^0\right) =$$
$$2\left(-\cos 45^0 + i\cdot\sin 45^0\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}$$



$$z = 2\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{-3\pi}{4}\right) =$$
$$2\left[\cos\left(-135^0\right) + i\cdot\sin\left(-135^0\right)\right] =$$
$$2\left(-\cos 45^0 - i\cdot\sin 45^0\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\cdot\sqrt{2}$$



$$z = 2\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{-\pi}{4}\right) =$$
$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\cdot\sqrt{2}$$

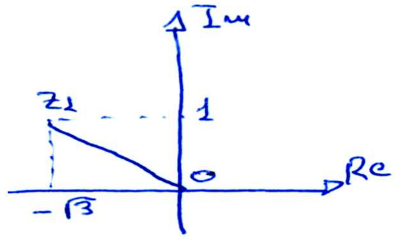


$$\rho = \sqrt{1^2 + 3} = 2, \quad \theta = 60^0 = \frac{\pi}{3}$$
$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$2\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\cdot\sqrt{3}$$

Εφαρμογή 57

Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή των $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ και να υπολογισθούν οι $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$

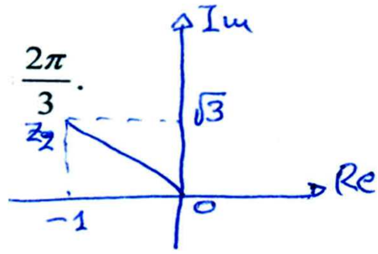
• Είναι $|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$ και



$$\left.\begin{cases}\cos\theta_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2mm] \sin\theta_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow \widehat{\theta}_1=150^0=\frac{5\pi}{6}$$

Άρα, $z_1=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

• Είναι $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$ και



$$\left.\begin{cases}\cos\theta_2=-\dfrac{1}{2}\\[2mm] \sin\theta_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow \widehat{\theta}_2=120^0=\frac{2\pi}{3}$$

Άρα, $z_2=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

• Είναι $z_1\cdot z_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=$

$$4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$

$$4\left[\cos\frac{9\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{9\pi}{6}\right]=$$

$$4\left[\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right]=4(0-i)=-4i$$

• Είναι $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}=$

$$\frac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}=$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

4.12 Πρωτεύον όρισμα και όρισμα

Έστω $z \neq 0$, με $|z| = \rho$. Αφού $\rho \neq 0$, η εικόνα M του z στο επίπεδο είναι ένα σημείο του κύκλου (O, ρ). Η θέση του σημείου M καθορίζεται πλήρως, όταν δοθεί η κυρτή προσανατολισμένη γωνία $(\widehat{\mathrm{O}x, \mathrm{OM}})$, η αλγεβρική τιμή φ_0 της οποίας, ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται ως Arg (Argument). Κάθε πραγματικός αριθμός $\varphi = Argz + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ονομάζεται **όρισμα** του z

Δηλαδή, η θέση του M καθορίζεται από το ζεύγος των αριθμών $\rho = |z|$ και $\varphi = Argz$ που λέγονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου M. Ισχύει ότι $z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $\mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2$

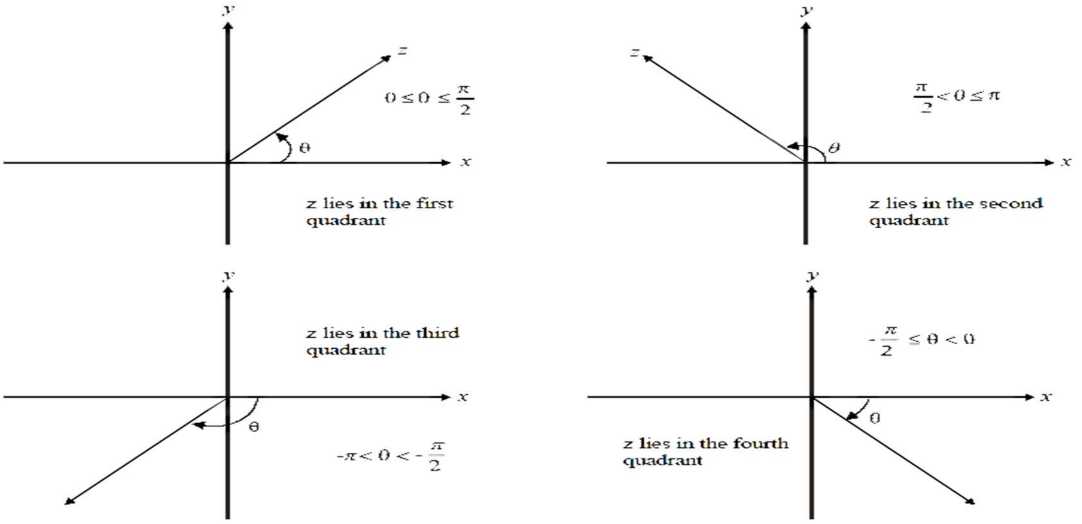
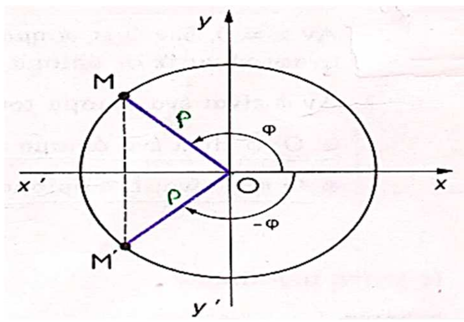


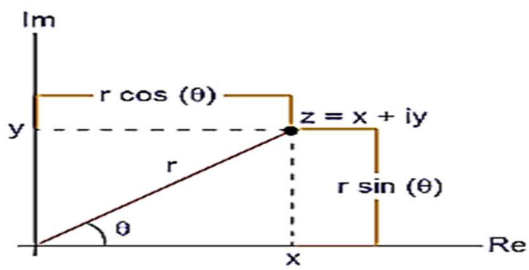
Fig - 5

Από τον ορισμό του $Argz$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

- αν $z \neq 0$, τότε $-\pi < Argz \le \pi$
- αν $z \in \mathbb{R}^*_+$, τότε $Argz = 0$
- αν $z \in \mathbb{R}^*_-$, τότε $Argz = \pi$
- αν $z = \beta i \begin{cases} \text{με } \beta > 0, \text{ τότε } Argz = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{με } \beta < 0, \text{ τότε } Argz = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$



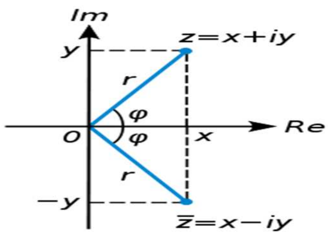
- Ισχύει ότι $Arg\overline{z} = -Argz$ εκτός από την περίπτωση που $z \in \mathbb{R}^*_-$ οπότε είναι $Arg\overline{z} = Argz = \pi$
- Αν ο $z = x + yi$ έχει για εικόνα το σημείο M, τότε ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το σημείο, το πρωτεύον όρισμα του z λαμβάνει τις τιμές που φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.



Τεταρτημόριο	Πρωτεύον όρισμα	Τιμές του x	Τιμές του y
1ο	$0 < Argz < \frac{\pi}{2}$	$x > 0$	$y > 0$
2ο	$\frac{\pi}{2} < Argz < \pi$	$x < 0$	$y > 0$
3ο	$\pi < Argz < \frac{3\pi}{2}$	$x < 0$	$y < 0$
4ο	$\frac{3\pi}{2} < Argz < 2\pi$	$x > 0$	$y < 0$

Παρατηρήσεις 2

- Αν $z = 0$, τότε δεν έχει νόημα ο όρος όρισμα.
- Αν φ είναι ένα όρισμα του z, τότε:
  - Ο $-\varphi$ είναι ένα όρισμα του $\bar{z}$
  - Ο $(\pi+\varphi)$ είναι ένα όρισμα του $-z$



- Αν για το τυχόν όρισμα φ του z ισχύει ότι $\varphi = Argz \notin [0,\ 2\pi)$ τότε από την $\varphi = Argz + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ προκύπτει ότι $Argz = \varphi - 2k\pi = argz - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4.13 Ισότητα των μιγαδικών

Αν φ_1, φ_2 είναι ορίσματα των z_1, z_2 αντιστοίχως, τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε $\left.\begin{cases} \varphi_1 = Argz_1 + 2k_1\pi \\ \varphi_2 = Argz_2 + 2k_2\pi \end{cases}\right\} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = Argz_1 - Argz_2 + 2k\pi,\ k = k_1 - k_2$

- Αν $Argz_1 = Argz_2$ τότε $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$
- Αν $Argz_1 \neq Argz_2$ τότε $-2\pi < Argz_1 - Argz_2 < 2\pi$ και δεν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$: $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$

Άρα, $Argz_1 = Argz_2 \Leftrightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{Z},\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$

Η σχέση $z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $Argz_1 = Argz_2$ γίνεται

$z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$ Έτσι, προκύπτει το κριτήριο ισότητας των μιγαδικών αριθμών.

4.13.1 Κριτήριο ισότητας των μιγαδικών

Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί είναι ίσοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

4.14 Μέτρο και όρισμα του γινομένου των μιγαδικών

Έστω z_1, z_2 με φ_1, φ_2 ορίσματα και $r_1,\ r_2$ τα μέτρα τους, αντίστοιχα. Τότε

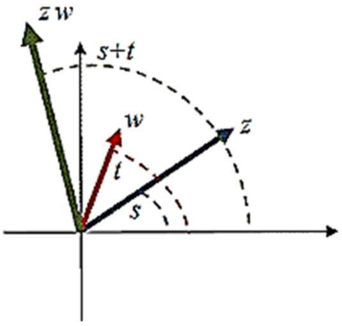
$$z_1 \cdot z_2 = r_1\left(cos\varphi_1 + i \cdot sin\varphi_1\right) r_2\left(cos\varphi_2 + i \cdot sin\varphi_2\right) =$$

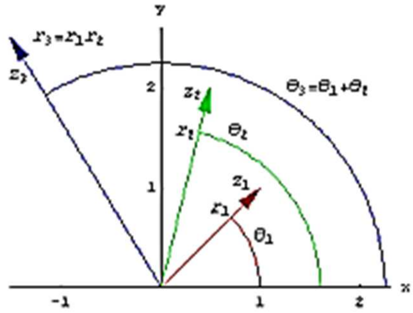
$$r_1 \cdot r_2\left[\left(cos\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 - sin\varphi_1 \cdot sin\varphi_2\right) + i\left(sin\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 + sin\varphi_2 \cdot cos\varphi_1\right)\right] =$$

$r_1 \cdot r_2 \left[cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \cdot sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) \right]$

Επειδή $r_1 \cdot r_2 > 0$, μέτρο του $z_1 \cdot z_2$ είναι το $r_1 \cdot r_2$ και ένα όρισμα του είναι $\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$

Το παραπάνω συμπέρασμα γενικεύεται με χρήση της επαγωγής, για $\nu > 2$





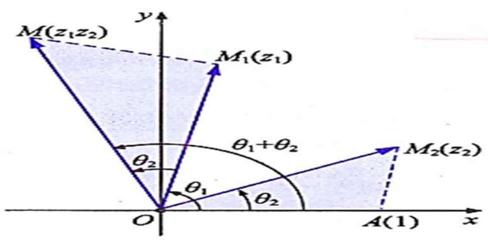
Θεώρημα 1

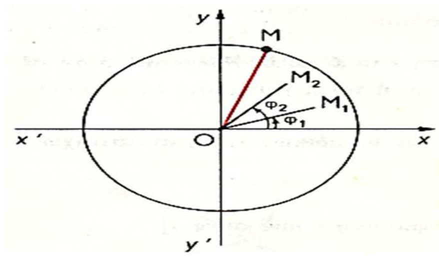
Έστω οι μη μηδενικοί $z_1, z_2, ..., z_\nu$ και φ_i ένα όρισμα του z_i, όπου $i = 1, 2, ...\nu$. Το γινόμενο $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_\nu$ έχει:

- μέτρο, ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους, $\left|z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_\nu\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right| ... \left|z_\nu\right|$
- όρισμα, το άθροισμα $\left(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_\nu\right)$

Πόρισμα 1

Αν $z_1 = z_2 = ... = z_\nu = z$ και φ ένα όρισμα του z, τότε $\left|z^\nu\right| = \left|z\right|^\nu$ και το $\left(\nu\varphi\right)$ είναι όρισμα του z^ν





Παρατήρηση 3

Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού z επί οποιονδήποτε μιγαδικό της μορφής $cos\theta + i \cdot sin\theta$ (που έχει μέτρο 1), στρέφει τη διανυσματική του ακτίνα, κατά γωνία θ

4.15 Μέτρο και όρισμα του πηλίκου των μιγαδικών

Έστω $z \neq 0$, φ ένα όρισμα του και θ ένα όρισμα του $\frac{1}{z}$ Επειδή $z\frac{1}{z} = 1$, από το προηγούμενο θεώρημα, το $\left(\theta + \varphi\right)$ είναι ένα όρισμα του 1. Άρα, $\exists k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε

$\theta + \varphi = Arg1 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta + \varphi = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta + \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = -\varphi + 2k\pi$

Αν $k = 0$, τότε είναι $\theta = -\varphi$ Είναι $\left|z\frac{1}{z}\right| = \left|1\right| \Leftrightarrow \left|z\right| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{\left|z\right|}$

Θεώρημα 2

Ο αντίστροφος του $z \neq 0$ έχει μέτρο τον αντίστροφο του μέτρου του z, ενώ ένα όρισμα του είναι ο αντίθετος ενός οποιουδήποτε ορίσματος του z

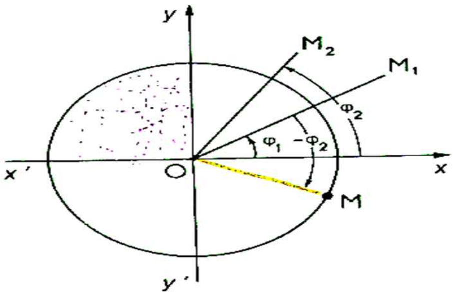
Πόρισμα 2

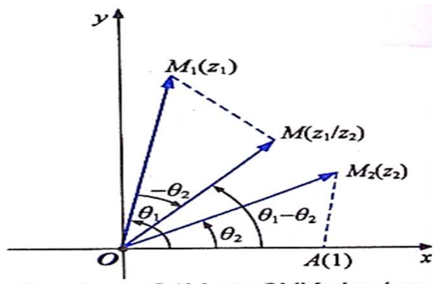
Αν οι $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ έχουν ορίσματα φ1, φ2 αντιστοίχως, τότε:

• $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ • το $(\varphi_1 - \varphi_2)$ είναι ένα όρισμα του $\frac{z_1}{z_2}$

Παρατήρηση 4

Το ανωτέρω πόρισμα, ισχύει προφανώς και όταν $z_1 = 0$ Στο σχήμα που ακολουθεί, εικόνα του πηλίκου είναι το σημείο Μ στο οποίο τέμνει τον κύκλο $\left(O, \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$ η τελική πλευρά της γωνίας $\left(\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}\right)$





Τα τρίγωνα OAM_2 και OMM_1 είναι όμοια

4.16 Δύναμη με εκθέτη ακέραιο

Θεώρημα 3

Έστω $z \neq 0$ και φ ένα όρισμα του. Τότε, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ισχύουν • $|z^k| = |z|^k$

• Το $(k\varphi)$ είναι ένα όρισμα του z^k

Τύπος του De Moivre

Για τον $z = r(cos\theta + i \cdot sin\theta)$ ισχύει ότι

• $z^2 = z \cdot z = r(cos\theta + i \cdot sin\theta)r(cos\theta + i \cdot sin\theta) =$

$r^2(cos\theta + i \cdot sin\theta)(cos\theta + i \cdot sin\theta) =$

$r^2(cos\theta \cdot cos\theta + cos\theta \cdot i \cdot sin\theta + i \cdot sin\theta \cdot cos\theta + i \cdot sin\theta \cdot i \cdot sin\theta) =$

$r^2(cos^2\theta + 2 \cdot cos\theta \cdot sin\theta \cdot i - sin^2\theta) =$

$r^2(cos^2\theta - sin^2\theta + 2 \cdot cos\theta \cdot sin\theta \cdot i) = r^2[cos(2\theta) + i \cdot sin(2\theta)]$

• $z^3 = z \cdot z \cdot z = \ldots = r^3[cos(3\theta) + i \cdot sin(3\theta)]$

• $z^4 = z \cdot z \cdot z \cdot z = \ldots = r^4[cos(4\theta) + i \cdot sin(4\theta)]$ κ.τ.λ.

Δηλαδή, $(cos\theta + i \cdot sin\theta)^k = cos(k\theta) + i \cdot sin(k\theta)$ Αυτή η ισότητα, είναι γνωστή ως τύπος του Abraham De Moivre (1667–1754).

Θεώρημα 4

Αν $z = r(cos\theta + i \cdot sin\theta)$ και $\nu \in \mathbb{Z}$, τότε $z^\nu = r^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i \cdot \eta\mu(\nu\theta)]$

Απόδειξη

<u>Μέθοδος εργασίας</u> Αποδεικνύω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για τη μικρότερη τιμή του ν, δηλαδή για $\nu = 1$. Δέχομαι ότι ισχύει για $\nu = k$ και αποδεικνύω ότι ισχύει για $\nu = k+1$

- Αν $\nu = 1$, η προς απόδειξη σχέση γίνεται $z^1 = r^1\left[cos(1\cdot\theta) + i\cdot sin(1\cdot\theta)\right]$, ισχύει.
- Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu = k$, δηλαδή έστω ότι $z^k = r^k\left[cos(k\theta) + i\cdot sin(k\theta)\right]$
- Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu = k+1$, δηλαδή θα δειχθεί ότι $z^{k+1} = r^{k+1}\left[cos(k+1)\theta + i\cdot sin(k+1)\theta\right]$

Πράγματι, $z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k\left[cos(k\theta) + i\cdot sin(k\theta)\right]r(cos\theta + i\cdot sin\theta) =$

$$r^{k+1}\left[cos(k+1)\theta + i\cdot sin(k+1)\theta\right]$$

Άρα, η προς απόδειξη σχέση ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους αριθμούς.
Αποδεικνύεται ότι, ο τύπος του De Moivre ισχύει για όλους τους ακεραίους αριθμούς.

Π.χ. Αν $z = 3\left(cos10^0 + i\cdot sin10^0\right)$ τότε:

$$z^2 = 3^2\left(cos20^0 + i\cdot sin20^0\right),\quad z^3 = 3^3\left(cos30^0 + i\cdot sin30^0\right),$$

$$z^4 = 3^4\left(cos40^0 + i\cdot sin40^0\right),\quad z^5 = 3^5\left(cos50^0 + i\cdot sin50^0\right).$$

Υπόδειξη 1

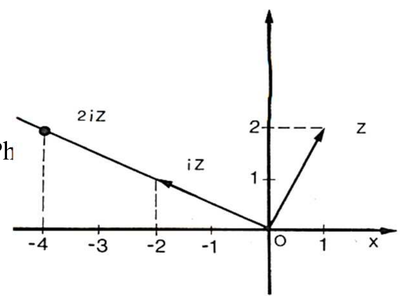
Από την τριγωνομετρία είναι

- $cos(a+b) = cosa\cdot cosb - sina\cdot sinb$
- $cos(a-b) = cosa\cdot cosb + sina\cdot sinb$
- $cos(2a) = cos(a+a) = cosa\cdot cosa - sina\cdot sina = cos^2a - sin^2a$
- $sin(a+b) = sina\cdot cosb + cosa\cdot sinb$,
- $sin(a-b) = sina\cdot cosb - cosa\cdot sinb$
- $sin(2a) = sin(a+a) = sina\cdot cosa + cosa\cdot sina = 2\cdot sina\cdot cosa$

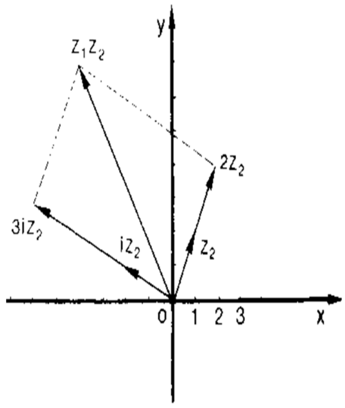
Εφαρμογή 58

Αν $z_1 = r_1(cos\theta_1 + i\cdot sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(cos\theta_2 + i\cdot sin\theta_2)$, $z_3 = r_3(cos\theta_3 + i\cdot sin\theta_3)$ είναι

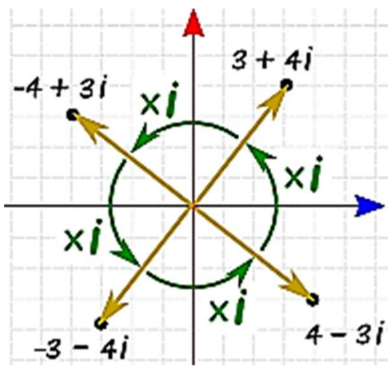
- $z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\left[cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot sin(\theta_1+\theta_2)\right]$
- $z_1\cdot z_3 = r_1\cdot r_3\left[cos(\theta_1+\theta_3) + i\cdot sin(\theta_1+\theta_3)\right]$
- $z_2\cdot z_3 = r_2\cdot r_3\left[cos(\theta_2+\theta_3) + i\cdot sin(\theta_2+\theta_3)\right]$
- $z_1\cdot z_2\cdot z_3 = r_1\cdot r_2\cdot r_3\left[cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + i\cdot sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\right]$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[cos(\theta_1-\theta_2) + i\cdot sin(\theta_1-\theta_2)\right]$
- $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2}{r_1}\left[cos(\theta_2-\theta_1) + i\cdot sin(\theta_2-\theta_1)\right]$



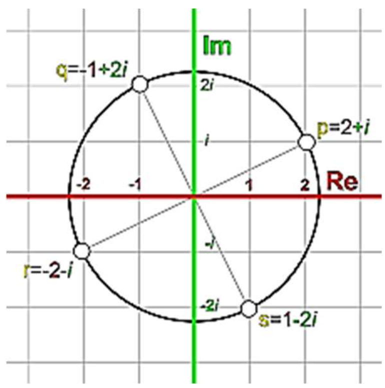
- $\dfrac{z_1}{z_3} = \dfrac{r_1}{r_3}\left[cos\left(\theta_1 - \theta_3\right) + i \cdot sin\left(\theta_1 - \theta_3\right)\right]$
- $\dfrac{z_3}{z_1} = \dfrac{r_3}{r_1}\left[cos\left(\theta_3 - \theta_1\right) + i \cdot sin\left(\theta_3 - \theta_1\right)\right]$
- $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{r_2}{r_3}\left[cos\left(\theta_2 - \theta_3\right) + i \cdot sin\left(\theta_2 - \theta_3\right)\right]$
- $\dfrac{z_3}{z_2} = \dfrac{r_3}{r_2}\left[cos\left(\theta_3 - \theta_2\right) + i \cdot sin\left(\theta_3 - \theta_2\right)\right]$
- $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1\left(cos0 + i \cdot sin0\right)}{r_1\left(cos\theta_1 + i \cdot sin\theta_1\right)} = \dfrac{1}{r_1}\left[cos\left(-\theta_1\right) + i \cdot sin\left(-\theta_1\right)\right]$
- $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1\left(cos0 + i \cdot sin0\right)}{r_2\left(cos\theta_2 + i \cdot sin\theta_2\right)} = \dfrac{1}{r_2}\left[cos\left(-\theta_2\right) + i \cdot sin\left(-\theta_2\right)\right]$



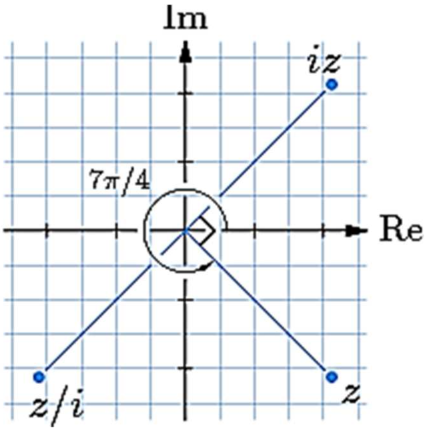
- $\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{1\left(cos0 + i \cdot sin0\right)}{r_3\left(cos\theta_3 + i \cdot sin\theta_3\right)} = \dfrac{1}{r_3}\left[cos\left(-\theta_3\right) + i \cdot sin\left(-\theta_3\right)\right]$
- $z_1 \cdot i = r_1\left[cos\left(\theta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$
- $z_2 \cdot i = r_2\left[cos\left(\theta_2 + \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_2 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$
- $z_3 \cdot i = r_3\left[cos\left(\theta_3 + \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_3 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$
- $\dfrac{i}{z_1} = \dfrac{1}{r_1}\left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right) + i \cdot sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right]$

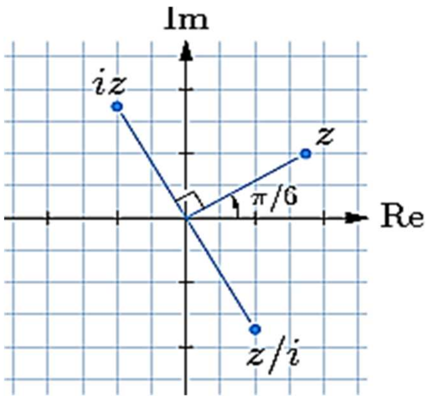


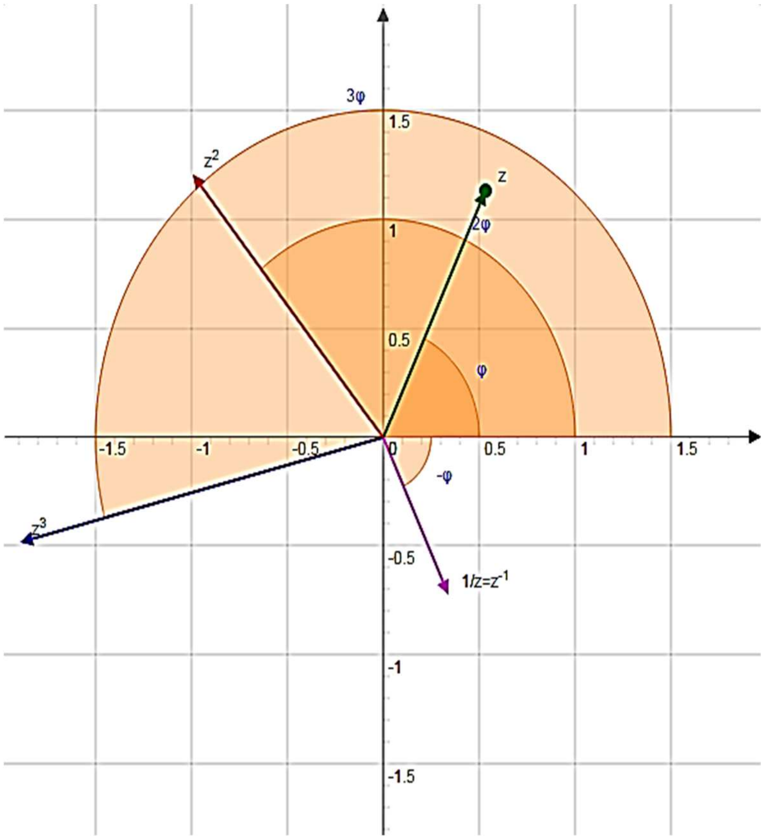
- $\dfrac{i}{z_2} = \dfrac{1}{r_2}\left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_2\right) + i \cdot sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_2\right)\right]$
- $\dfrac{i}{z_3} = \dfrac{1}{r_3}\left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_3\right) + i \cdot sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_3\right)\right]$
- $\dfrac{z_1}{i} = r_1\left[cos\left(\theta_1 - \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_1 - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$



- $\dfrac{z_2}{i} = r_2\left[cos\left(\theta_2 - \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_2 - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$
- $\dfrac{z_3}{i} = r_3\left[cos\left(\theta_3 - \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_3 - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$







Εφαρμογή 59

Υπολογίστε μέτρο και πρωτεύον όρισμα του $z=1-i$ και βρείτε τον z^{2016}

Είναι $|z|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ και $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{\theta}=-45^0=\dfrac{7\pi}{4}$

Άρα, $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

Είναι $z^{2016}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)\right]^{2016}=$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{2016}=$$
$$2^{1008}\left(\cos\frac{7\pi 2016}{4}+i\sin\frac{7\pi 2016}{4}\right)=$$
$$2^{1008}\left[\cos\left(7\pi 504\right)+i\sin\left(7\pi 504\right)\right]=$$
$$2^{1008}\left[\cos\left(3.528\pi\right)+i\sin\left(3.528\pi\right)\right]=$$
$$2^{1008}\left[\cos\left(2\pi\cdot 1.764\right)+i\sin\left(2\pi\cdot 1.764\right)\right]=$$
$$2^{1008}\left[\cos\left(2\pi\right)+i\sin\left(2\pi\right)\right]=2^{1008}\left(1+0i\right)=2^{1008}$$

Εφαρμογή 60

Να υπολογισθεί το άθροισμα τριών μονοφασικών αρμονικών ρευμάτων, ίδιας κυκλικής συχνότητας ω και ίδιου πλάτους I_0, που έχουν διαφορά φάσης $\frac{2\pi}{3}$ μεταξύ τους.

Οι στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων, δίνονται από τους παρακάτω τύπους.

$$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_0\cdot sin\omega t\,,\quad \mathrm{I}_2=\mathrm{I}_0\cdot sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right),\quad \mathrm{I}_3=\mathrm{I}_0\cdot sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$$

Τα ρεύματα, παριστάνονται με τη μιγαδική τους μορφή, ως ακολούθως.

$$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_0\left(cos0+i\cdot sin0\right),\quad \mathrm{I}_2=\mathrm{I}_0\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad \mathrm{I}_3=\mathrm{I}_0\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

Αθροίζοντας τις στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων, προκύπτει ότι

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3=\mathrm{I}_0\left(cos0+i\cdot sin0\right)+\mathrm{I}_0\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{I}_0\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=\mathrm{I}_0\left(1+i\cdot 0\right)+\mathrm{I}_0\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{I}_0\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\mathrm{I}_0\left[\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=\mathrm{I}_0\cdot 0=0$$

Παρατήρηση 5

Από τη θεωρία, ισχύει ότι $X\cdot sin\left(\omega t+\varphi\right)=X\left(cos\varphi+i\cdot sin\varphi\right)$

Εφαρμογή 61

Τα εναλλασσόμενα ρεύματα περιγράφονται με τη χρήση περιοδικών συναρτήσεων του χρόνου. Τα αρμονικά μεγέθη (αρμονική ταλάντωση, αρμονική τάση, αρμονικό ρεύμα) περιγράφονται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, της μορφής $f\left(t\right)=a\cdot sin\left(\omega t+\varphi\right)$, όπου:

$a>0$ το πλάτος,
ω η κυκλική συχνότητα (ή γωνιακή ταχύτητα) και
φ η αρχική φάση του αρμονικού μεγέθους.

Ευθύγραμμος χάλκινος αγωγός διαρρέεται από δυο αρμονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά ρεύματα, της ιδίας κυκλικής συχνότητας ω. Οι στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων είναι $I_1 = 2\cdot sin\omega t$ και $I_2 = 2\cdot sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$. Ποια είναι η συνολική τιμή I του ρεύματος;

$$I = I_1 + I_2 = 2\cdot sin(\omega t) + 2\cdot sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left[sin(\omega t)+sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

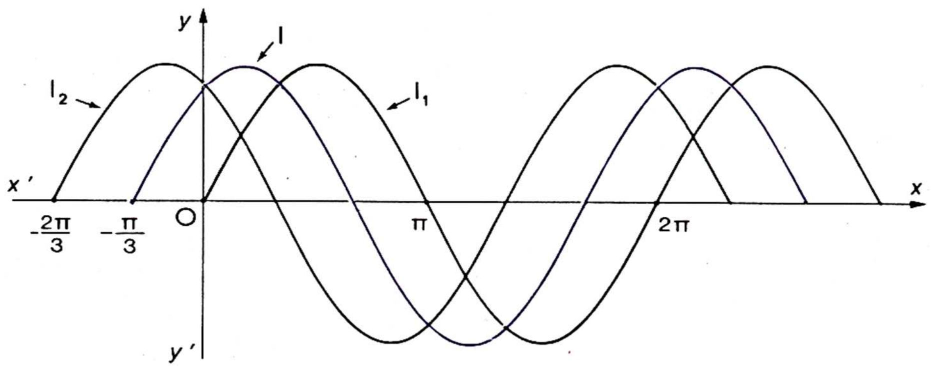
$$2\left(sin(\omega t)+sin(\omega t)\cdot cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot cos(\omega t)\right) =$$

$$2\left(sin(\omega t)-\frac{1}{2}sin(\omega t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot cos(\omega t)\right) =$$

$$2\left(\frac{1}{2}sin(\omega t)+\frac{\sqrt{3}}{2}cos(\omega t)\right) =$$

$$2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot sin(\omega t)+sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot cos(\omega t)\right) =$$

$$2sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$$



Εφαρμογή 62

Αν $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 0$, $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 0$ δείξτε ότι

(**α**) $cos(3\alpha)+cos(3\beta)+cos(3\gamma) = 3cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

(**β**) $sin(3\alpha)+sin(3\beta)+sin(3\gamma) = 3sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Έστω $\begin{cases} x = cos\alpha + i\cdot sin\alpha \Rightarrow x^3 = cos(3\alpha)+i\cdot sin(3\alpha) \\ y = cos\beta + i\cdot sin\beta \Rightarrow y^3 = cos(3\beta)+i\cdot sin(3\beta) \\ z = cos\gamma + i\cdot sin\gamma \Rightarrow z^3 = cos(3\gamma)+i\cdot sin(3\gamma) \end{cases}$

Τότε $x+y+z = (cos\alpha+cos\beta+cos\gamma)+i(sin\alpha+sin\beta+sin\gamma) = 0$

Από την ταυτότητα $x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$

αν $\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ ή \\ x=y=z=0 \end{matrix}\right\}$ οπότε μηδενίζεται το 2ο μέλος, είναι $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$

- $x^3+y^3+z^3 = \left[cos(3\alpha)+cos(3\beta)+\sigma\upsilon\nu(3\gamma)\right]+i\left[sin(3\alpha)+sin(3\beta)+sin(3\gamma)\right]$

- $3xyz = 3(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)(cos\beta + i \cdot sin\beta)(cos\gamma + i \cdot sin\gamma) =$

$$3\left[cos(\alpha+\beta+\gamma) + i \cdot sin(\alpha+\beta+\gamma)\right]$$

Άρα, $\begin{cases} cos(3\alpha)+cos(3\beta)+cos(3\gamma) = 3cos(\alpha+\beta+\gamma) \\ sin(3\alpha)+sin(3\beta)+sin(3\gamma) = 3sin(\alpha+\beta+\gamma) \end{cases}$

Εφαρμογή 63

Δείξτε ότι $cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta$ και $sin(2\theta) = 2cos\theta \cdot sin\theta$

Έστω $z = cos\theta + i \cdot sin\theta$. Από τον τύπο του De Moivre ισχύει ότι $z^2 = cos(2\theta) + i \cdot sin(2\theta)$. Επίσης από την $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, ισχύει ότι $z^2 = (cos\theta + i \cdot sin\theta)^2 = cos^2\theta - sin^2\theta + 2 \cdot i \cdot cos\theta \cdot sin\theta$

Άρα, $\left\{\begin{matrix} cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta \\ sin(2\theta) = 2cos\theta \cdot sin\theta \end{matrix}\right\}$

Εφαρμογή 64

Δείξτε ότι $cos(3\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\theta$ και $sin(3\theta) = 3sin\theta - 4sin^3\theta$

Έστω $z = cos\theta + i \cdot sin\theta$. Από τον τύπο του De Moivre ισχύει ότι $z^3 = cos(3\theta) + i \cdot sin(3\theta)$. Επίσης από την $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} z^3 &= (cos\theta + i \cdot sin\theta)^3 = \\ &cos^3\theta + 3cos^2\theta \cdot i \cdot sin\theta + 3cos\theta(i \cdot sin\theta)^2 + (i \cdot sin\theta)^3 = \\ &cos^3\theta + 3cos^2\theta \cdot i \cdot sin\theta - 3cos\theta \cdot sin^2\theta - i \cdot sin^3\theta = \\ &cos^3\theta - 3cos\theta \cdot sin^2\theta + (3cos^2\theta \cdot sin\theta - sin^3\theta)i \end{aligned}$$

Άρα, $\left\{\begin{matrix} cos(3\theta) = cos^3\theta - 3cos\theta \cdot sin^2\theta \\ sin(3\theta) = 3cos^2\theta \cdot sin\theta - sin^3\theta \end{matrix}\right\}$ και από $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ προκύπτει ότι

$cos(3\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\theta$ και $sin(3\theta) = 3sin\theta - 4sin^3\theta$

Εφαρμογή 65

Υπολογίστε τα $sin(4\theta)$ και $cos(4\theta)$

Από τον τύπο του De Moivre είναι $(cos\theta + i \cdot sin\theta)^4 = cos(4\theta) + i \cdot sin(4\theta)$

Αναπτύσσω το 1^o μέρος της ισότητας και μετά από τις πράξεις έχω $(cos\theta + i \cdot sin\theta)^4 = (8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1) + i \cdot 4cos\theta(sin\theta - 2sin^3\theta)$

Άρα, $(8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1) + i \cdot 4cos\theta(sin\theta - 2sin^3\theta) = cos(4\theta) + i \cdot sin(4\theta)$

Άρα, $\begin{cases} cos(4\theta) = 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1 \\ sin(4\theta) = 4cos\theta(sin\theta - 2sin^3\theta) \end{cases}$

4.17 Ρίζες των μιγαδικών

Νιοστή ρίζα του a ονομάζεται κάθε μιγαδικός z, τέτοιος ώστε $z^{\nu}=a$

4.17.1 Νιοστές ρίζες της μονάδας

Θα βρω τις ρίζες της εξίσωσης $z^{\nu}=1$. Ο $\zeta=|\zeta|(cos\theta+i\cdot sin\theta)$ για να είναι νιοστή ρίζα της μονάδας πρέπει $\zeta^{\nu}=1$, δηλαδή, $\zeta^{\nu}=|\zeta|^{\nu}\left[cos(\nu\theta)+i\cdot sin(\nu\theta)\right]=1$

Επειδή $|1|=1$ και $Arg1=0$, ο ζ είναι ρίζα του 1 αν και μόνο αν $\exists k\in\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $|\zeta^{\nu}|=1$ και $\nu\theta-0=2k\pi$ δηλαδή, $|\zeta|=1$ και $\theta=\dfrac{2k\pi}{\nu}$

Άρα, νιοστή ρίζα της μονάδας είναι κάθε αριθμός της μορφής $\zeta=|\zeta|(cos\theta+i\cdot sin\theta)$

Π.χ. νιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι αριθμοί $\zeta_0=cos0+i\cdot sin0=1$, $\zeta_1=cos\dfrac{2\pi}{\nu}+i\cdot sin\dfrac{2\pi}{\nu}$ Παρατηρώ ότι $\zeta_k=\zeta_1^k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ δηλαδή $\zeta_2=\zeta_1^2$, $\zeta_3=\zeta_1^3$, ….

Θεώρημα 5

Οι νιοστές ρίζες της μονάδας, είναι ν το πλήθος αριθμοί.

4.17.2 Ιδιότητες των νιοστών ριζών της μονάδας

1 Ο αντίστροφος της ρίζας ζ_λ, είναι η ρίζα $\zeta_{\nu-\lambda}$ Πράγματι, $\zeta_\lambda\cdot\zeta_{\nu-\lambda}=\zeta_1^{\lambda}\cdot\zeta_1^{\nu-\lambda}=\zeta_1^{\nu}=1$

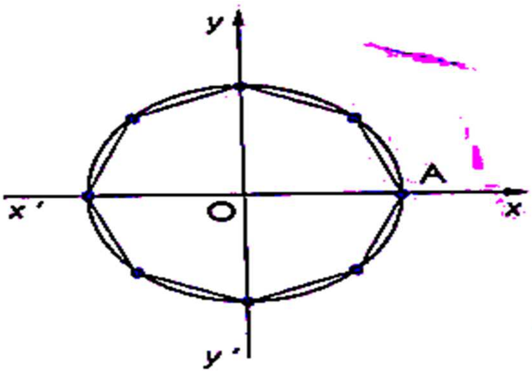
2 Είναι $\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{\nu-1}=1+\zeta_1+\zeta_1^{2}+\zeta_1^{3}+\ldots+\zeta_1^{\nu-1}=\dfrac{\zeta_1^{\nu}-1}{\zeta_1-1}$ και επειδή $\zeta_1^{\nu}=1$, έπεται ότι $\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{\nu-1}=0$

3 Ισχύει ότι $\zeta_0\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2\cdot\ldots\cdot\zeta_{\nu-1}=1\cdot\zeta_1\cdot\zeta_1^2\cdot\zeta_1^3\cdot\ldots\cdot\zeta_1^{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}=(-1)^{\nu+1}$

4 Όλες οι ρίζες, έχουν το ίδιο μέτρο $(=1)$

5 Τα ορίσματα δύο διαδοχικών ριζών, διαφέρουν κατά $\dfrac{2\pi}{\nu}$

6 Οι εικόνες των ριζών στο επίπεδο, είναι κορυφές κανονικού ν– γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1.



7 Αν ζ είναι η νιοστή ρίζα της μονάδας με $\zeta\neq1$, τότε $1+2\zeta+3\zeta^2+\ldots+\nu\zeta^{\nu-1}=\dfrac{\nu}{\zeta-1}$

και $1+4\zeta+9\zeta^2+\ldots+\nu^2\zeta^{\nu-1}=-\dfrac{\nu^2(1-\zeta)+2\nu}{(1-\zeta)^2}$

4.17.3 Νιοστές ρίζες των μιγαδικών

Θα υπολογίσω τις νιοστές ρίζες ενός μιγαδικού a, δηλαδή θα βρω τις ρίζες της εξίσωσης $z^{\nu}=a$. Διακρίνω τις περιπτώσεις:

- Αν $a=0$, τότε η μοναδική νιοστή ρίζα του a είναι το 0, διότι $z^{\nu}=0 \Leftrightarrow z=0$
- Αν $a\neq 0$ και φ είναι ένα όρισμα του a, τότε $\alpha=|\alpha|(cos\varphi+i\cdot sin\varphi)$

Για να είναι ο $\zeta=|\zeta|(cos\theta+i\cdot sin\theta)$ νιοστή ρίζα του a, πρέπει $\alpha=|\zeta|^{\nu}\left[cos(\nu\theta)+i\cdot sin(\nu\theta)\right]$ άρα, $|z|^{\nu}=|\alpha| \Leftrightarrow |z|=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$ και $\exists k\in\mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\nu\theta-\varphi=2k\pi$ δηλαδή $\theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}$

Άρα, νιοστή ρίζα του a είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$z_k=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

$$z_k=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left[cos\left(\frac{\varphi}{\nu}+\frac{2k\pi}{\nu}\right)+i\cdot sin\left(\frac{\varphi}{\nu}+\frac{2k\pi}{\nu}\right)\right]$$

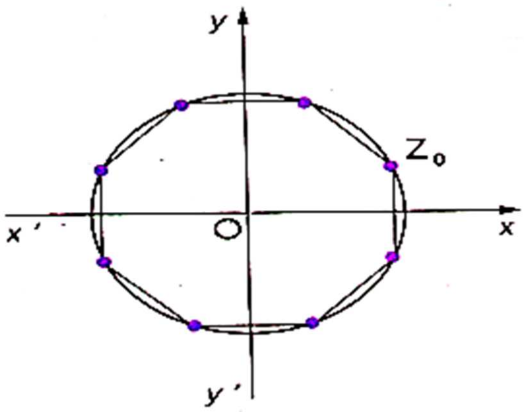
$$=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\frac{\varphi}{\nu}+i\cdot sin\frac{\varphi}{\nu}\right)\cdot\left(cos\frac{2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\frac{2k\pi}{\nu}\right)$$

$$=\underbrace{\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\frac{\varphi}{\nu}+i\cdot sin\frac{\varphi}{\nu}\right)}_{z_o}\cdot\underbrace{\left(cos\frac{2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\frac{2k\pi}{\nu}\right)}_{\zeta_k}=z_o\cdot\zeta_k$$

Από αυτή την ισότητα συμπεραίνω ότι ο a έχει ν νιοστές ρίζες, που τις βρίσκω αν πολλαπλασιάσω τη z_0 με τις νιοστές ρίζες της μονάδας.

4.17.4 Παρατηρήσεις

1 Οι εικόνες των νιοστών ριζών του a στο επίπεδο, είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.



2 Οι νιοστές ρίζες του a, προκύπτουν όταν μία οποιαδήποτε νιοστή του ρίζα (όχι υποχρεωτικά η z_0) πολλαπλασιασθεί με τις νιοστές ρίζες της μονάδας. Πράγματι $\forall\lambda\in\{0,\ 1,\ 2,...,\nu-1\}$ είναι $(z_k\cdot\zeta_\lambda)^{\nu}=(z_k)^{\nu}(\zeta_\lambda)^{\nu}=a\cdot 1=a$ άρα, ο $z_k\cdot\zeta_\lambda$ είναι μία ρίζα του a

Εφαρμογή 66

Να υπολογισθούν οι κυβικές ρίζες της μονάδας.

- $\zeta_0 = cos\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{3} = cos0 + i\cdot sin0 = 1 + i\cdot 0 = 1$
- $\zeta_1 = cos\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{3} = cos\dfrac{2\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\pi}{3} = cos120^0 + i\cdot sin120^0 =$

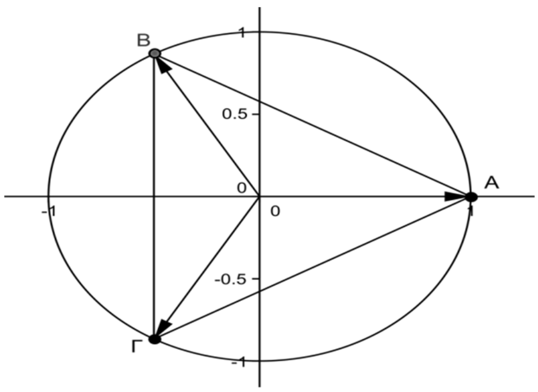
  $-cos60^0 + i\cdot sin60^0 = -sin30^0 + i\cdot cos30^0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\zeta_2 = cos\dfrac{2\cdot 2\cdot \pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 2\cdot \pi}{3} = cos\dfrac{4\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{4\pi}{3} = cos240^0 + i\cdot sin240^0 =$

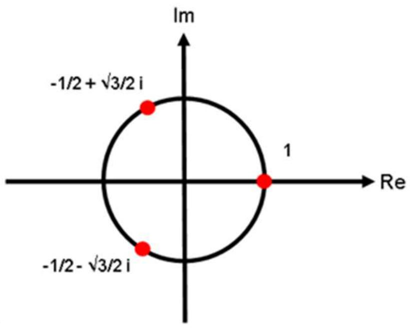
  $-cos60^0 - i\cdot sni60^0 = -\eta\mu 30^0 - i\cdot cos30^0 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

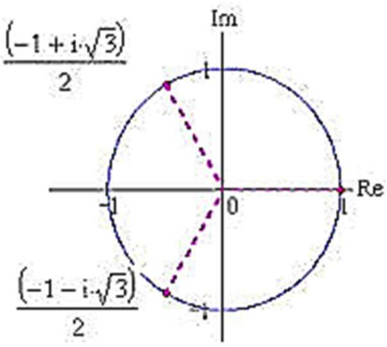
Υπόδειξη 2

Έγινε χρήση του τύπου $\zeta_\upsilon = cos\dfrac{2\upsilon\pi}{\nu} + i\cdot sin\dfrac{2\upsilon\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...,\nu - 1$

- $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 = 0$
- $\zeta_2 = \zeta_1^2$
- $\zeta_0\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2 = (-1)^{\nu-1} = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1$







Εφαρμογή 67

Να υπολογισθούν οι τέταρτης τάξης ρίζες της μονάδας.

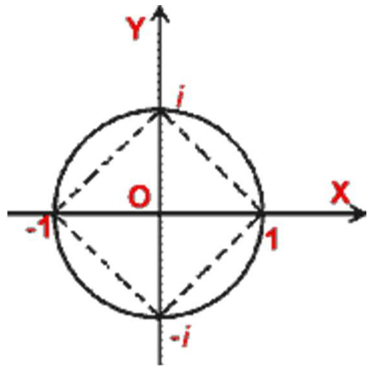
- $\zeta_0 = cos\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{4} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{4} = cos0 + i\cdot sin0 = 1 + i\cdot 0 = 1$
- $\zeta_1 = cos\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{4} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{4} = cos\dfrac{\pi}{2} + i\cdot sin\dfrac{\pi}{2} = 0 + 1\cdot i = i$

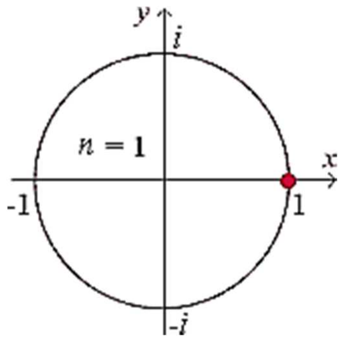
- $\zeta_2 = cos\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\pi}{\cancel{4}} + i\cdot sin\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\pi}{\cancel{4}} = cos\pi + i\cdot sin\pi = -1 + i0 = -1$
- $\zeta_3 = cos\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{4} + i\cdot sin\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{4} = cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot sin\frac{3\pi}{2} =$

  $cos270^0 + i\cdot sin270^0 = 0 + i(-1) = -i$

Υπόδειξη 3

Έγινε χρήση του τύπου $\zeta_\upsilon = cos\frac{2\upsilon\pi}{\nu} + i\cdot sin\frac{2\upsilon\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3,...,\nu-1$





- $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0$
- $\zeta_2 = \zeta_1^2$
- $\zeta_3 = \zeta_2\cdot\zeta_1 = \zeta_1^3$
- $\zeta_0\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2\cdot\zeta_3 = (-1)^{\nu-1} = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$

Εφαρμογή 68

Να υπολογισθούν οι πέμπτης τάξης ρίζες της μονάδας.

- $\zeta_0 = cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{5} = cos0 + i\cdot sin0 = 1 + i\cdot 0 = 1$
- $\zeta_1 = cos\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{5} = cos\frac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot\pi}{5} = cos72^0 + i\cdot sin72^0$
- $\zeta_2 = cos\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{5} = cos\frac{4\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{4\cdot\pi}{5} = cos144^0 + i\cdot sin144^0$

ή με 2^o τρόπο:

$\zeta_2 = \zeta_1^2 = \left(cos\frac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot\pi}{5}\right)^2 = cos\frac{4\pi}{5} + i\cdot sin\frac{4\pi}{5} = cos144^0 + i\cdot sin144^0$

- $\zeta_3 = cos\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{5} = cos\frac{6\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{6\cdot\pi}{5} = cos216^0 + i\cdot sin216^0$

ή με 2^o τρόπο:

$\zeta_3 = \zeta_1^3 = \left(cos\frac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot\pi}{5}\right)^3 = cos\frac{6\pi}{5} + i\cdot sin\frac{6\pi}{5} = cos216^0 + i\cdot sin216^0$

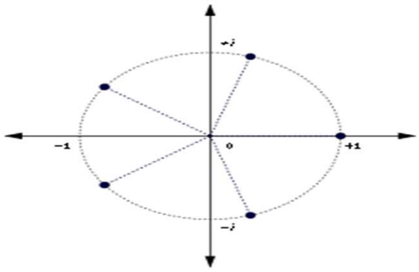
- $\zeta_4 = cos\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{5} = cos\frac{8\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{8\cdot\pi}{5} = cos288^0 + i\cdot sin288^0$

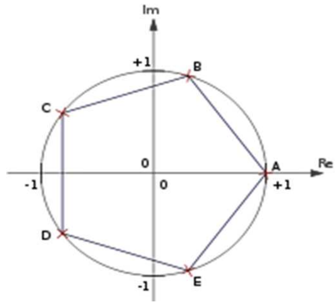
ή με 2^o τρόπο:

$\zeta_4 = \zeta_1^4 = \left(cos\frac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot\pi}{5}\right)^4 = cos\frac{8\pi}{5} + i\cdot sin\frac{8\pi}{5} = cos288^0 + i\cdot sin288^0$

Υπόδειξη 4

Έγινε χρήση του τύπου $\zeta_{\upsilon} = cos\frac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu} + i\cdot sin\frac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3, ..., \nu - 1$





- $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 0$
- $\zeta_2 = \zeta_1^2$
- $\zeta_3 = \zeta_2 \cdot \zeta_1 = \zeta_1^3$
- $\zeta_4 = \zeta_3 \cdot \zeta_1 = \zeta_1^3 \cdot \zeta_1 = \zeta_1^4$
- $\zeta_0 \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 \cdot \zeta_4 = (-1)^{\nu-1} = (-1)^{5-1} = (-1)^4 = 1$

Εφαρμογή 69

Να υπολογισθούν οι έκτης τάξης ρίζες της μονάδας.

- $\zeta_0 = cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{6} + i\cdot sin\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{6} = cos0^0 + i\cdot sin0^0 = 1 + i\cdot 0 = 1$
- $\zeta_1 = cos\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{6} + i\cdot sin\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{6} = cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\zeta_2 = cos\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{6} + i\cdot sin\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{6} = cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

ή με 2ο τρόπο:

$$\zeta_2 = \zeta_1^2 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot sin\frac{2\pi}{3} = cos120^0 + i\cdot sin120^0 =$$

$$-cos60^0 + i\cdot sin60^0 = -sin30^0 + i\cdot cos30^0 = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\zeta_3 = cos\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{6} + i\cdot sin\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{6} = cos\pi + i\cdot sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$

ή με 2ο τρόπο:

$$\zeta_3 = \zeta_1^3 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = cos\frac{3\pi}{3} + i\cdot sin\frac{3\pi}{3} = cos\pi + i\cdot sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

- $\zeta_4 = cos\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{6} + i\cdot sin\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{6} = cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

ή με 2ο τρόπο:

$$\zeta_4 = \zeta_1^4 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^4 = cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot sin\frac{4\pi}{3} = cos240^0 + i\cdot sin240^0 =$$

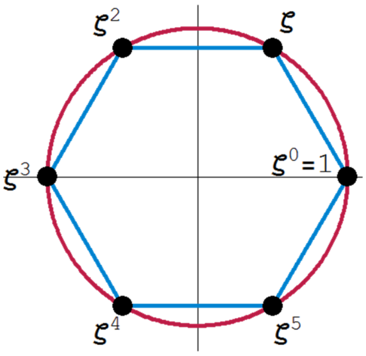
$$-cos60^0 - i\cdot sin60^0 = -sin30^0 - i\cdot cos30^0 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

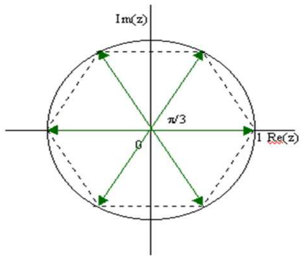
- $\zeta_5 = cos\frac{2\cdot 5\cdot \pi}{6} + i\cdot sin\frac{2\cdot 5\cdot \pi}{6} = cos\frac{5\pi}{3} + i\cdot sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

ή με 2^o τρόπο:

$$\zeta_5 = \zeta_1^5 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^5 = cos\frac{5\pi}{3} + i\cdot sin\frac{5\pi}{3} = cos300^0 + i\cdot sin300^0 =$$

$$cos60^0 - i\cdot sin60^0 = sin30^0 - i\cdot cos30^0 = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$





Υπόδειξη 5

Έγινε χρήση του τύπου $\zeta_\upsilon = cos\frac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu} + i\cdot sin\frac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...,\nu-1$

- $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 = 0$
- $\zeta_2 = \zeta_1^2$
- $\zeta_3 = \zeta_2\cdot\zeta_1 = \zeta_1^2\cdot\zeta_1 = \zeta_1^3$
- $\zeta_4 = \zeta_3\cdot\zeta_1 = \zeta_1^3\cdot\zeta_1 = \zeta_1^4$
- $\zeta_5 = \zeta_4\cdot\zeta_1 = \zeta_1^4\cdot\zeta_1 = \zeta_1^5$
- $\zeta_0\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2\cdot\zeta_3\cdot\zeta_4\cdot\zeta_5 = (-1)^{\nu-1} = (-1)^{6-1} = (-1)^5 = -1$

Εφαρμογή 70

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η $8z^3 = 1$

Είναι $8z^3 = 1 \Leftrightarrow (2z)^3 = 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2z = \zeta_0 \\ 2z = \zeta_1 \\ 2z = \zeta_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2z = 1 \\ 2z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \end{matrix}\right\}$

Εφαρμογή 71

Εύρεση των τετραγωνικών ριζών του $z = -3 + 4i$

Έστω ότι η ζητούμενη τετραγωνική ρίζα είναι η $x + yi$

Είναι $(x + yi)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow x^2 + (yi)^2 + 2xyi = -3 + 4i \Leftrightarrow$

$$\left(x^2 - y^2\right) + 2xyi = -3 + 4i \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 - y^2 = -3 \\ y = \frac{2}{x} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x^2-\left(\dfrac{2}{x}\right)^2=-3 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-\dfrac{4}{x^2}=-3 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^4-4=-3x^2 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\pm 1 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x,y)=(1,\ 2) \\ (x,y)=(-1,\ -2) \end{Bmatrix}$$

Άρα, η ζητούμενη τετραγωνική ρίζα είναι $x+yi=\begin{cases} 1+2i \\ -1-2i \end{cases}$

Υπόδειξη 6

$x^4-4=-3x^2 \Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0$ (διτετράγωνη εξίσωση) θέτω $x^2=\omega$, οπότε η ανωτέρω εξίσωση γράφεται $\omega^2+3\omega-4=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \omega=1 \\ \omega=-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \\ x^2=-1 \text{ Απορρίπτεται} \end{Bmatrix}$

Εφαρμογή 72

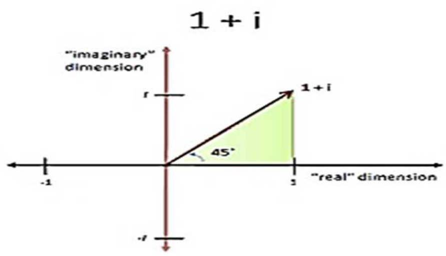
Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η $z^3=1+i$

$$z^3=1+i \Leftrightarrow z^3=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- $z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos 15^0+i\cdot\sin 15^0\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$



- $z_1=z_0\zeta_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{8\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{8\pi}{12}\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{12}-\sin\dfrac{8\pi}{12}\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}+i\left(\sin\dfrac{8\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{8\pi}{12}\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right]=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{9\pi}{12}\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos 135^0+i\cdot\sin 135^0\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(-\cos 45^0+i\cdot\sin 45^0\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- $z_2=z_0\zeta_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{16\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{16\pi}{12}\right)=$

$$\sqrt[6]{2}\left[cos\frac{\pi}{12}\cdot cos\frac{16\pi}{12}-sin\frac{\pi}{12}\cdot sin\frac{16\pi}{12}+i\left(sin\frac{\pi}{12}\cdot cos\frac{16\pi}{12}+cos\frac{\pi}{12}\cdot sin\frac{16\pi}{12}\right)\right]=$$
$$\sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{16\pi}{12}\right)+i\cdot sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{16\pi}{12}\right)\right]=$$
$$\sqrt[6]{2}\left(cos\frac{17\pi}{12}+i\cdot sin\frac{17\pi}{12}\right)=$$
$$\sqrt[6]{2}\left[cos(17\cdot 15)+i\cdot sin(17\cdot 15)\right]=$$
$$\sqrt[6]{2}\left(cos255^0+i\cdot sin255^0\right)=$$
$$\sqrt[6]{2}\left[cos\left(180^0+75^0\right)+i\cdot sin\left(180^0+75^0\right)\right]=$$
$$\sqrt[6]{2}\left(-cos15^0-i\cdot sin15^0\right)=$$
$$\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

Υπόδειξη 7

- $cos15^0=cos\left(45^0-30^0\right)=cos45^0\cdot cos30^0+sin45^0\cdot sin30^0=$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
- $sin15^0=sin\left(60^0-45^0\right)=sin60^0\cdot cos45^0-sin45^0\cdot cos60^0=$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Εφαρμογή 73

Να δειχθεί ότι αν ο a είναι μία νιοστή ρίζα του z, τότε ο $\bar{a}$ είναι νιοστή ρίζα του $\bar{z}$

Αφού ο a είναι μία νιοστή ρίζα του z, ισχύει ότι $a^\nu=z\Leftrightarrow\overline{\left(a^\nu\right)}=\bar{z}\Leftrightarrow\left(\bar{a}\right)^\nu=\bar{z}$

Εφαρμογή 74

Με χρήση της προηγούμενης εφαρμογής, δείξτε ότι οι μη πραγματικές νιοστές ρίζες της μονάδας είναι ανά δυο συζυγείς.

Έστω ότι ο ζ_λ είναι μία νιοστή ρίζα του 1. Τότε ο $\overline{\zeta_\lambda}$ θα είναι μία νιοστή ρίζα του $\bar{1}$ δηλαδή του 1

Εφαρμογή 75

Δείξτε ότι αν ζ_λ είναι μία νιοστή ρίζα της μονάδας $(0<\lambda<\nu)$, τότε $\overline{\zeta_\lambda}=\zeta_{\nu-\lambda}$

Είναι $\zeta_\lambda\cdot\zeta_{\nu-\lambda}=\zeta_1^\lambda\cdot\zeta_1^{\nu-\lambda}=\zeta_1^\nu=1$, άρα $\zeta_{\nu-\lambda}=\frac{1}{\zeta_\lambda}$

Είναι $|z|=1\Rightarrow z\cdot\bar{z}=1\Rightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}$ άρα, από την $\zeta_{\nu-\lambda}=\frac{1}{\zeta_\lambda}$ προκύπτει ότι $\zeta_{\nu-\lambda}=\overline{\zeta_\lambda}$

Εφαρμογή 76

Αν $\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2$ είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας, δείξτε ότι $\zeta_1\cdot\zeta_2=1$ και $\zeta_2^2=\zeta_1$

Είναι $\zeta_1\cdot\zeta_2=\zeta_1\cdot\zeta_1^2=\zeta_1^3=1$ και $\zeta_2^2=\left(\zeta_1^2\right)^2=\zeta_1^4=\zeta_1^3\cdot\zeta_1=1\cdot\zeta_1=\zeta_1$

Εφαρμογή 77

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η $z^3=-64$

$z^3=-64\Leftrightarrow z^3=64\left(cos\pi+i\cdot sin\pi\right)$

Από τη θεωρία ισχύει ότι $z_k=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \nu-1$

Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση

$z_k=\sqrt[3]{64}\cdot\left(cos\dfrac{\pi+2k\pi}{3}+i\cdot sin\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right),\ k=0,\ 1,\ 2$

Δηλαδή, $z_k=4\left(cos\dfrac{\pi+2k\pi}{3}+i\cdot sin\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right),\ k=0,\ 1,\ 2$

Συνεπώς:

- $z_0=\sqrt[3]{64}\left(cos\dfrac{\pi}{3}+i\cdot\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\right)=4\left(cos\dfrac{\pi}{3}+i\cdot\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\right)=4\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+2i\sqrt{3}$
- $z_1=4\left(cos\dfrac{\pi+2\pi}{3}+i\cdot sin\dfrac{\pi+2\pi}{3}\right)=4\left(cos\pi+i\cdot sin\pi\right)=4\left(-1+i\cdot 0\right)=-4$
- $z_2=4\left(cos\dfrac{\pi+4\pi}{3}+i\cdot sin\dfrac{\pi+4\pi}{3}\right)=4\left(cos\dfrac{5\pi}{3}+i\cdot sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=2-2i\sqrt{3}$

Εφαρμογή 78

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η $z^5=-1$

Είναι $z^5=-1\Leftrightarrow z^5=cos\pi+i\cdot sin\pi$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $z_k=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \nu-1$

που στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται

$z_k=\sqrt[5]{1}\cdot\left(cos\dfrac{\pi+2k\pi}{5}+i\cdot sin\dfrac{\pi+2k\pi}{5}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

δηλαδή $z_k=\left(cos\dfrac{\pi+2k\pi}{5}+i\cdot sin\dfrac{\pi+2k\pi}{5}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ προκύπτει ότι

- $z_0=\sqrt[5]{1}\left(cos\dfrac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{5}+i\cdot sin\dfrac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{5}\right)=cos\dfrac{\pi}{5}+i\cdot sin\dfrac{\pi}{5}=cos36^0+i\cdot sin36^0$

- $z_1=\sqrt[5]{1}\left(cos\dfrac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{5}+i\cdot sin\dfrac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{5}\right)=cos\dfrac{3\pi}{5}+i\cdot sin\dfrac{3\pi}{5}=cos108^0+i\cdot sin108^0$

$$z_1=z_0\zeta_1=\left(cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{2\pi}{5}+isin\frac{2\pi}{5}\right)=cos\frac{3\pi}{5}+isin\frac{3\pi}{5}$$
$$=cos108^0+isin108^0$$

- $z_2=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{5}\right)=cos\frac{\cancel{5}\pi}{\cancel{5}}+i\cdot sin\frac{\cancel{5}\pi}{\cancel{5}}=-1+i\cdot 0=-1$

ή με 2ο τρόπο

$$z_2=z_0\cdot\zeta_2=\left(cos\frac{\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{4\pi}{5}+i\cdot sin\frac{4\pi}{5}\right)=cos\frac{5\pi}{5}+i\cdot sin\frac{5\pi}{5}=-1$$

- $z_3=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 3\pi}{5}+isin\frac{\pi+2\cdot 3\pi}{5}\right)=cos\frac{7\pi}{5}+isin\frac{7\pi}{5}=cos228^0+i\cdot sin228^0$

ή με 2ο τρόπο $z_3=z_0\zeta_3=\left(cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{6\pi}{5}+isin\frac{6\pi}{5}\right)=cos\frac{7\pi}{5}+isin\frac{7\pi}{5}$

$$=cos228^0+isin228^0$$

- $z_4=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 4\pi}{5}+isin\frac{\pi+2\cdot 4\pi}{5}\right)=cos\frac{9\pi}{5}+isin\frac{9\pi}{5}=cos324^0+isin324^0$

ή με 2ο τρόπο $z_4=z_0\zeta_4=\left(cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{8\pi}{5}+isin\frac{8\pi}{5}\right)=cos\frac{9\pi}{5}+isin\frac{9\pi}{5}$

$$=cos324^0+isin324^0$$

Εφαρμογή 79

Να βρεθούν οι τρίτης τάξης (ή κυβικές) ρίζες του i

Είναι $i=0+1i$, $Argi=\frac{\pi}{2}$ και $|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$

- $z_0=\sqrt[3]{|i|}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}+i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3}+i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)=$

$$1\left(cos\frac{\pi}{6}+i\cdot sin\frac{\pi}{6}\right)=cos30^0+i\cdot sin30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

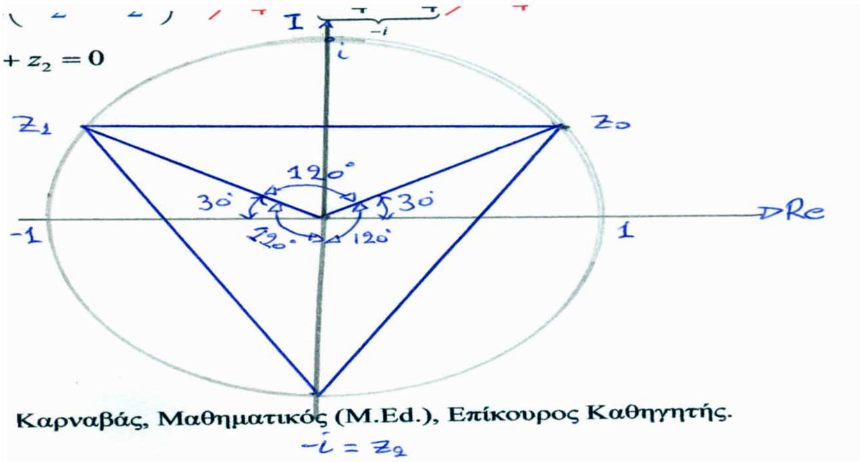
- $z_1=\sqrt[3]{|i|}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}+i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}+i\cdot sin\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right)=$

$cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot sin\frac{5\pi}{6}=cos150^0+i\cdot sin150^0=-cos30^0+i\cdot sin30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ ή με 2ο τρόπο $z_1=z_0\zeta_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\underbrace{i\frac{\sqrt{3}^2}{4}-\frac{i}{4}}_{\frac{2}{4}i}+i^2\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

- $z_2=\sqrt[3]{|i|}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}+i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}+i\cdot sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right)=$

$$cos\frac{9\pi}{6}+i\cdot sin\frac{9\pi}{6}=cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot sin\frac{3\pi}{2}=cos270^0+i\cdot sin270^0=0+i\cdot(-1)=-i$$

ή με 2^o τρόπο $z_2=z_0\zeta_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cancel{-\frac{\sqrt{3}}{4}}\underbrace{-i\frac{\sqrt{3}^2}{4}-\frac{i}{4}}_{-i}\cancel{-i^2\frac{\sqrt{3}}{4}}=-i$



Παρατήρηση 6

• $z_0+z_1+z_2=0$

4.18 Εκθετική μορφή των μιγαδικών

Κάθε μιγαδικός γράφεται στην εκθετική του μορφή, δηλαδή $z=\rho\left(cos\theta+i\cdot sin\theta\right)=\rho\cdot e^{i\theta}$

Σημείωση Από τον Euler πως ισχύει ότι $e^{i\theta}=\left(cos\theta+i\cdot sin\theta\right)$

4.18.1 Νεπέρειος λογάριθμος των μιγαδικών

Έστω ο μη μηδενικός $z=\rho\left(cos\theta+i\cdot sin\theta\right)=\rho e^{i\theta}$

Είναι $lnz=lnp+lne^{i\theta}=lnp+i\theta lne=lnp+i\theta$ όπου $\theta\in\left(-\pi,\ \pi\right)$ πρωτεύον όρισμα.

Αν δεν είναι πρωτεύον όρισμα, τότε $lnz=lnp+i\left(2\nu\pi+\theta\right),\ \nu=0,\pm1,\pm2,...$

Ορίζω τη λογαριθμική συνάρτηση ως

$$logz=lnp+i\left(2\nu\pi+\theta\right),\ \nu=0,\pm1,\pm2,...\text{ ή }\ logz=ln|z|+i\cdot Arg(z)$$

Εφαρμογή 80

Να υπολογισθεί ο $log\left(1+i\sqrt{3}\right)$

Είναι $|z|=2$ και $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$, άρα $logz=ln2+i\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

Εφαρμογή 81

Παραγοντοποιήστε το άθροισμα $\alpha^2+\ \alpha\beta+\ \beta^2$

Είναι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=$

$\alpha^2+2\alpha\frac{\beta}{2}+\beta^2=$

$$\underbrace{\alpha^2+2a\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}}_{\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2}-\frac{\beta^2}{4}+\beta^2=$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}+\frac{4\beta^2}{4}=$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{3\beta^2}{4}=$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{3\beta^2}{4}i^2=$$

$$\left(\frac{2a+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta i\sqrt{3}}{2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{2a+\beta}{2}-\frac{\beta i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2a+\beta}{2}+\frac{\beta i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Εφαρμογή 82

Δείξτε ότι η $x^2+px+q=0$, με $p,q\in\mathbb{R}$ και $p^2-4q<0$ έχει λύση στο $\mathbb{C}$

Πράγματι, $x^2+px+q=0\Leftrightarrow$

$$x^2+\cancel{2}\frac{p}{\cancel{2}}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}=0$$

Θέτω $\frac{p}{2}=-a$ και $\frac{4q-p^2}{4}=\beta^2$ Το β∈$\mathbb{R}$, διότι είναι $4q-p^2>0$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως $\left(x-\alpha\right)^2+\beta^2=0\Leftrightarrow$

$$\left(x-a\right)^2-(\beta i)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x-\alpha-\beta i\right)\left(x-\alpha+\beta i\right)=0$$

Άρα, η αρχική εξίσωση έχει στο $\mathbb{C}$, λύσεις $x=a+\beta i$ και $x=a-\beta i$