**Περιεχόμενα**

## 7.1 Αόριστο ολοκλήρωμα

### 7.1.1 Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

- $\int \left( f(x)+g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\int \left( f(x)-g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$
- $\int \left( cf(x) \right) dx = c\int f(x)\, dx, \ c \in \mathbb{R}$
- $\int dx = \int 1\, dx = x + c, \ c \in \mathbb{R}$ διότι $1 = \left( x+c \right)'$
- $\int 0\, dx = c, \ c \in \mathbb{R}$ διότι $0 = c'$

### 7.1.2 Ολοκλήρωση απλών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\int sinx\, dx = -cosx + c, \ c \in \mathbb{R}$ διότι $sinx = \left( -cosx + c \right)'$
- $\int cosx\, dx = sinx + c, \ c \in \mathbb{R}$ διότι $cosx = \left( sinx + c \right)'$
- $\int \left( 5sinx \right) dx = 5\int sinx\, dx = -5cosx + c, \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \left( 3cosx \right) dx = 3\int cosx\, dx = 3sinx + c, \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tanx + c, \ c \in \mathbb{R}$ διότι $\frac{1}{cos^2 x} = \left( tanx + c \right)'$
- $\int \frac{-dx}{sin^2 x} = \sigma\varphi x + c, \ c \in \mathbb{R}$ διότι $\frac{-1}{sin^2 x} = \left( \sigma\varphi x + c \right)'$
- $\int tanx\, dx = \int \frac{sinx}{cosx}\, dx = -\int \frac{\left( cosx \right)'}{cosx}\, dx = -ln\left| cosx \right| + c, \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \sigma\varphi x\, dx = \int \frac{cosx}{sinx}\, dx = \int \frac{\left( sinx \right)'}{sinx}\, dx = ln\left| sinx \right| + c, \ c \in \mathbb{R}$
- $\int sin\left( ax \right) dx = -\frac{1}{a} cos\left( ax \right) + c, \ a,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
- $\int sin\left( ax + \beta \right) dx = -\frac{1}{a} cos\left( ax + \beta \right) + c, \ a,\beta,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
- $\int cos\left( ax \right) dx = \frac{1}{a} sin\left( ax \right) + c, \ a,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
- $\int cos\left( ax + \beta \right) dx = \frac{1}{a} sin\left( ax + \beta \right) + c, \ a,\beta,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
- $\int \frac{1}{cos^2\left( ax \right)}\, dx = \frac{1}{a}\ tan\left( ax \right) + c, \ a,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
- $\int \frac{1}{sin^2\left( ax \right)}\, dx = -\frac{1}{a}\ \sigma\varphi\left( ax \right) + c, \ a,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
- $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c, \ a,b,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
- $\int \left[ 3sin\left( 2x \right) - 4cos\left( 3x \right) \right] dx = 3\int sin\left( 2x \right) dx - 4\int cos\left( 3x \right) dx =$

$$3\left[-\frac{1}{2}cos(2x)\right]-4\left[\frac{1}{3}sin(3x)\right]=\frac{-3\cdot cos(2x)}{2}-\frac{4\cdot sin(3x)}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

- $\int\left(e^{3x}-5e^{-x}+6\right)\ dx=\int e^{3x}\ dx-5\int e^{-x}\ dx+\int 6\ dx=$

$$\frac{1}{3}e^{3x}+5e^{-x}+x+c,\ c\in\mathbb{R}$$

- $\int\left[sin(3x+2)+e^{2x+1}\right]dx=\int sin(3x+2)dx+\int e^{2x+1}dx=$

$$-\frac{1}{3}cos(3x+2)+\frac{1}{2}e^{2x+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

### 7.1.3 Ολοκλήρωση εκθετικών συναρτήσεων

- $\int e^x\ dx=e^x+c,\ c\in\mathbb{R}$ διότι $e^x=\left(e^x+c\right)'$
- $\int 2e^x\ dx=2\int e^x\ dx=2e^x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
- $\int 2^x\ dx=\frac{2^x}{ln2}+c,\ c\in\mathbb{R}$ διότι $2^x=\left(\frac{2^x}{ln2}+c\right)'$
- $\int x\ e^{x^2}dx=\int\frac{1}{2}2x\ e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\ \int\left(x^2\right)'\ e^{x^2}\ dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c,\ c\in\mathbb{R}$

**Επεξήγηση** Ισχύει ότι $\int e^{f(x)}\ f'(x)\ dx=e^{f(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$

- $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}}\ dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}}\ dx=2\int\left(\sqrt{x}\right)'\ e^{\sqrt{x}}\ dx=2e^{\sqrt{x}}+c,\ c\in\mathbb{R}$

**Επεξήγηση** Ισχύει ότι $\int e^{f(x)}\ f'(x)\ dx=e^{f(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$

### 7.1.4 Ολοκλήρωση μονωνύμων

- $\int x\ dx=\frac{x^2}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}$ διότι $x=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)'$
- $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}$ διότι $x^2=\left(\frac{x^3}{3}+c\right)'$
- $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+c,\ c\in\mathbb{R}$ διότι $x^3=\left(\frac{x^4}{4}+c\right)'$
- $\int x^{-3}\ dx=\frac{x^{-2}}{-2}+c,\ c\in\mathbb{R}$ διότι $x^{-3}=\left(\frac{x^{-2}}{-2}+c\right)'$
- $\int 4x^7\ dx=4\int x^7\ dx=4\frac{x^8}{8}+c=\frac{x^8}{2}+c,\ \ c\in\mathbb{R}$

### 7.1.5 Ολοκλήρωση πολυωνύμων

- $\int\left(x^2-5x+6\right)\ dx=\int x^2\ dx-\int 5x\ dx+\int 6\ dx=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+6x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$

- $\int \frac{1}{sin^2x \cdot cos^2x}\,dx = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x}\,dx = \int \frac{sin^2x}{sin^2x \cdot cos^2x}\,dx + \int \frac{cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x}\,dx =$

$$\int \frac{1}{cos^2x}\,dx + \int \frac{1}{sin^2x}\,dx = \text{εφ}x - \text{σφ}x + c,\quad c \in \mathbb{R}$$

- $\int (3x-2)^5\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-2)^5\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)'(3x-2)^5\,dx =$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^6}{6} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

### 7.1.6 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

- $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = ln(x^2+1) + c,\quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{1}{x-5}\,dx = \int \frac{(x-5)'}{x-5}\,dx = ln|x-5| + c,\quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x+2}\,dx = \int \frac{(x+2)'}{x+2}\,dx = ln|x+2| + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{5}{3x-4}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{3}{3x-4}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{(3x-4)'}{3x-4}\,dx = \frac{5}{3}ln|3x-4| + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx =$
  $\frac{1}{2}ln|x^2+3| + c = \frac{1}{2}ln(x^2+3) + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x \cdot lnx}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{lnx}\,dx = \int \frac{(lnx)'}{lnx}\,dx = ln|lnx| + c,\ c \in \mathbb{R}$

**Επεξήγηση** $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = ln|f(x)| + c,\ c \in \mathbb{R}$

### 7.1.7 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

- Βρείτε το $\int sin(3x)\,dx$

Θέτω $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

Είναι $\int sin(3x)\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = \frac{-1}{3}\cos t + c,\quad c \in \mathbb{R}$

Άρα $\int sin(3x)\,dx = \frac{-1}{3}\cos(3x) + c,\quad c \in \mathbb{R}$

- Βρείτε το $\int cos(2x+3)\,dx$

Θέτω $t = 2x+3 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

Είναι $\int cos(2x+3)\ dx = \int cost\ \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}sint + c,\ \ c \in \mathbb{R}$

Άρα $\int cos(2x+3)\ dx = \frac{1}{2}sin(2x+3) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$

### 7.1. 8 Παραγοντική ολοκλήρωση

- $\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx$
- $\int xe^x\ dx = \int x(e^x)'\ dx = xe^x - \int x'e^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx = xe^x - e^x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$
- $\int x \cdot cosx\ dx = \int x(sinx)'\ dx = x \cdot sinx - \int x'sinx\ dx =$

  $x \cdot sinx - \int sinx\ dx = x \cdot sinx + cosx + c,\ \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{ln^2 x}{x}\ dx = \int \frac{1}{x}\ ln^2 x\ dx = \int (lnx)'\ ln^2 x\ dx = \frac{(lnx)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{ln^3 x}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int cos^4 x \cdot sinx\ dx = -\int cos^4 x \cdot (cosx)'\ dx = -\frac{(cosx)^{4+1}}{4+1} + c = -\frac{cos^5 x}{5} + c,\ c \in \mathbb{R}$

**Επεξήγηση** Ισχύει ότι $\int f^{\nu}(x) \cdot f'(x)\ dx = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

### 7.1.9 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

- Ο αριθμητής έχει μικρότερο βαθμό από τον παρονομαστή.

Έστω κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό πολυωνύμου $P(x)$ < από βαθμό πολυωνύμου $Q(x)$ ή συμβολικά $\partial P(x) < \partial Q(x)$

Αν το $Q(x)$ έχει ως απλές του ρίζες τους $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ..., \rho_\nu \in \mathbb{R}$ δηλαδή $Q(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)...(x-\rho_\nu)$ τότε υπάρχουν $c_1, c_2, c_3, ..., c_\nu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x-\rho_1} + \frac{c_2}{x-\rho_2} + \frac{c_3}{x-\rho_3} + ... + \frac{c_\nu}{x-\rho_\nu}$

### Εφαρμογή 1

Βρείτε το $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\ dx$

Είναι $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$

Προσδιορισμός των $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{(x-1)(x+1)}$$

Συνεπώς, $\left.\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Άρα, $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx =$

$$\int_2^3 \left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right]dx =$$

$$\int_2^3 \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right]dx =$$

$$\int_2^3 \left[\frac{1}{2}\frac{(x-1)'}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{(x+1)'}{x+1}\right]dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x-1)'}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x+1)'}{x+1}dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}ln|x-1|\right]_2^3-\left[\frac{1}{2}ln|x+1|\right]_2^3 =$$

$$\frac{1}{2}ln2-\cancel{\frac{1}{2}ln1}-\frac{1}{2}ln4+\frac{1}{2}ln3 =$$

$$\frac{1}{2}(ln2-ln4+ln3) =$$

$$\frac{1}{2}ln\frac{2\cdot 3}{4}=\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(ln3-ln2)$$

### Εφαρμογή 2

Βρείτε το $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

Είναι $\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$ όπου $a,b\in\mathbb{R}$

Προσδιορισμός των $a,b\in\mathbb{R}$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\frac{b(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

Συνεπώς, $\left.\begin{cases} a+b=1 \\ -2a-b=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$

Άρα, $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx =$

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx =$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{-2}{x-1}\,dx+\int_{-1}^{0}\frac{3}{x-2}\,dx=$$

$$-2\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)'}{x-1}\,dx+3\int_{-1}^{0}\frac{(x-2)'}{x-2}\,dx=$$

$$-2\Big[ln|x-1|\Big]_{-1}^{0}+3\Big[ln|x-2|\Big]_{-1}^{0}=$$

$$\cancel{-2ln1}+2ln2+3ln2-3ln3=5ln2-3ln3=ln32-ln27=ln\frac{32}{27}$$

**Εφαρμογή 3**

Βρείτε το $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x^3-x}\,dx$

Είναι $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x^3-x}\,dx=\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

Ισχύει ότι $\displaystyle\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$ όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$

Προσδιορισμός των $a,b,c\in\mathbb{R}$

$$\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}=$$

$$\frac{a(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{bx(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$\frac{(a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x(x-1)(x+1)}$$

Συνεπώς, $\left\{\begin{matrix}a+b+c=1\\ b-c=1\\ -a=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a=-1\\ b=\dfrac{3}{2}\\ c=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right.$

Άρα, $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x^3-x}\,dx=$

$$\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx=$$

$$\int_{2}^{3}\left[\frac{-1}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right]dx=$$

$$\int_2^3 \frac{-1}{x}\,dx + \frac{3}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$\left[-ln|x|\right]_2^3 + \frac{3}{2}\left[ln|x-1|\right]_2^3 + \frac{1}{2}\left[ln|x+1|\right]_2^3 =$$

$$-ln3 + ln2 + \frac{3}{2}ln2 - \cancel{\frac{3}{2}ln1} + \frac{1}{2}ln4 - \frac{1}{2}ln3 = \frac{7}{2}ln2 - \frac{3}{2}ln3$$

• Αν ο παρονομαστής $Q(x)$ έχει ως ρίζα πολλαπλότητας $k$ τον $\rho \in \mathbb{R}$, τότε στον παράγοντα $(x-\rho)^k$ αντιστοιχούν τα κλάσματα $\frac{c_1}{x-\rho}$, $\frac{c_2}{(x-\rho)^2}$, …, $\frac{c_k}{(x-\rho)^k}$, όπου $c_1, c_2, \ldots, c_k$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

**Εφαρμογή 4**

Βρείτε το $\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3+x^2}\,dx$

Είναι $\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2(2x+1)}\,dx = \int_1^2 \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{2x+1}\right]dx$

Προσδιορισμός των $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{2x+1} =$$

$$\frac{ax(2x+1)}{x^2(2x+1)} + \frac{b(2x+1)}{x^2(2x+1)} + \frac{cx^2}{x^2(2x+1)} =$$

$$\frac{(2a+c)x^2 + (a+2b)x + b}{x^2(2x+1)}$$

Συνεπώς $\left\{\begin{matrix} 2a+c=0 \\ a+2b=1 \\ b=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a=3 \\ b=-1 \\ c=-6 \end{matrix}\right.$

Άρα, $\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3+x^2}\,dx =$

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x^2(2x+1)}\,dx =$$

$$\int_1^2 \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{2x+1}\right]dx =$$

$$\int_1^2 \left[\frac{3}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-6}{2x+1}\right]dx =$$

$$3\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx - 3\int_1^2 \frac{2}{2x+1}\,dx =$$

$$3\left[ln|x|\right]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 - 3\left[ln|2x+1|\right]_1^2 =$$

$$3\cdot ln2 \cancel{-3\cdot ln1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}-3\cdot ln5+3\cdot ln3=$$

$$3ln2-\frac{1}{2}-3ln5+3ln3=$$

$$ln2^3-\frac{1}{2}-ln5^3+ln3^3=$$

$$-\frac{1}{2}+ln\frac{(2\cdot 3)^3}{5^3}=-\frac{1}{2}+ln\left(\frac{6}{5}\right)^3=-\frac{1}{2}+3ln\left(\frac{6}{5}\right)=-\frac{1}{2}+3(ln6-ln5)$$

**Εφαρμογή 5**

Βρείτε το $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{3x^3+x^2-11x-3}{x^4-2x^2+1}dx$

Είναι $x^4-2x^2+1=(x^2-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)^2$

Άρα $\frac{3x^3+x^2-11x-3}{x^4-2x^2+1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}$, όπου $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Κατά τα γνωστά, αποδεικνύεται ότι $a=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$, $c=\frac{1}{2}$, $d=-\frac{3}{2}$

Συνεπώς, $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{3x^3+x^2-11x-3}{x^4-2x^2+1}dx=$

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}\right]dx=$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{5}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{5}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{(x+1)^2}\right]dx=$$

$$\frac{5}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-1}dx-\frac{5}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x+1}dx-\frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}dx=$$

$$\frac{5}{2}\Big[ln|x-1|\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}\left[\frac{1}{x-1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\Big[ln|x+1|\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\ldots=-2ln3-\frac{4}{3}$$

**Εφαρμογή 6**

Βρείτε το $\int\frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3}dx$

$$\frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3}=$$

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{d}{(x+1)^3}=$$

$$\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}+\frac{-5}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}$$

Άρα, $\int\frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3}dx=$

$$\int\frac{1}{x-2}\,dx+3\int\frac{1}{x+1}\,dx-5\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx+2\int\frac{1}{(x+1)^3}\,dx=$$

$$ln|x-2|+3ln|x+1|+5\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

• Ο αριθμητής έχει βαθμό $\geq$ από το βαθμό του παρονομαστή. Έστω το κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό $P(x)$ $\geq$ από βαθμό $Q(x)$ ή συμβολικά $\partial P(x)\geq\partial Q(x)$

Εκτελώ τη διαίρεση $P(x):Q(x)$ και έστω ότι $\begin{array}{r|l} P(x) & \underline{Q(x)} \\ & \\ \upsilon(x) & \Pi(x) \end{array}$ δηλαδή

$$P(x)=Q(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)$$

Άρα, $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)}{Q(x)}=\Pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$

Το $\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$ ολοκληρώνεται σύμφωνα με την $1^{\eta}$ περίπτωση διότι $\partial\upsilon(x)<\partial Q(x)$

**Εφαρμογή 7**

Βρείτε το $\int\frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}\,dx$

Είναι $x^3-3x+2=(x^2-5x+6)(x+5)+16x-28$

Άρα, $\frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}=$

$$\frac{(x^2-5x+6)(x+5)+16x-28}{x^2-5x+6}=$$

$$\frac{(x^2-5x+6)(x+5)}{x^2-5x+6}+\frac{16x-28}{x^2-5x+6}=$$

$$(x+5)+\frac{16x-28}{x^2-5x+6}=(x+5)+\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}$$

Είναι $\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}=$

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}=$$

$$\frac{a(x-3)}{(x-2)(x-3)}+\frac{b(x-2)}{(x-2)(x-3)}=$$

$$\frac{(a+b)x-(3a+2b)}{(x-2)(x-3)}$$

Συνεπώς, $\left.\begin{cases} a+b=16 \\ 3a+2b=28 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=20 \end{cases}$

Άρα, $\int \frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}\,dx =$

$$\int\left[(x+5)+\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}\right]dx=$$

$$\int(x+5)\,dx+\int\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+5x+\int\left[\frac{-4}{x-2}+\frac{20}{x-3}\right]dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+5x+\int\frac{-4}{x-2}dx+\int\frac{20}{x-3}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+5x-4\int\frac{1}{x-2}dx+20\int\frac{1}{x-3}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+5x-4\cdot ln|x-2|+20\cdot ln|x-3|+c,\ c\in\mathbb{R}$$

**Εφαρμογή 8**

Βρείτε το $\int\sqrt[3]{2x+1}\,dx$

$$\int\sqrt[3]{2x+1}\,dx=$$

$$\int(2x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\int(2x+1)'\cdot(2x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c=$$

$$\frac{3(2x+1)^{\frac{4}{3}}}{8}+c=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^4}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

**Εφαρμογή 9**

Βρείτε το $\int 2^x \cos\left(2^x+1\right)\, dx$

$$\int 2^x \cos\left(2^x+1\right)\, dx = \int \frac{1}{ln2}\left(2^x+1\right)' \cos\left(2^x+1\right)\, dx =$$

$$\frac{1}{ln2}\underbrace{\int \left(2^x+1\right)' \cos\left(2^x+1\right)\, dx}_{\text{ΒΛΕΠΕ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ}} = \frac{1}{ln2}\sin\left(2^x+1\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

**Επεξήγηση** Ισχύει ότι $\int \cos\left[f(x)\right]\cdot f'(x)\, dx = \sin\left[f(x)\right]+c,\ c\in\mathbb{R}$

Ισχύει ότι $\int \sin\left[f(x)\right]\cdot f'(x)\, dx = -\cos\left[f(x)\right]+c,\ c\in\mathbb{R}$

**Εφαρμογή 10**

Βρείτε το $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx$

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx = \int \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\, dx = \int \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}\, dx =$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \int \frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}\, dx = ln\left|e^x+1\right|+c,\ c\in\mathbb{R}$$

**Επεξήγηση** Ισχύει ότι $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln\left|f(x)\right|+c,\ c\in\mathbb{R}$

**Εφαρμογή 11**

Βρείτε το $\int x\sqrt{x^2+4}\, dx$

$$\int x\sqrt{x^2+4}\, dx =$$

$$\int x\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\int \left(x^2+4\right)'\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\, dx}_{\text{ΒΛΕΠΕ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ}} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c =$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+c =$$

$$\frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+c=$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

**Επεξήγηση** Ισχύει ότι $\int f^{\nu}(x)\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$

### 7.1.10 Μορφή $\int R(\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)dx$, με R ρητή συνάρτηση των ημx, συνx

**Μέθοδος εργασίας**

Εκφράζω τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, συναρτήσει της εφ$\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Δηλαδή, κάνω εφαρμογή των τύπων $\eta\mu x=\dfrac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Θέτω εφ$\left(\dfrac{x}{2}\right)=\omega$ οπότε έχω $\eta\mu x=\dfrac{2\omega}{1+\omega^2}$, $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$. Η εφ$\left(\dfrac{x}{2}\right)=\omega$ δίνει

$$\frac{x}{2}=\tau o\xi\varepsilon\varphi\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)'dx=\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\right)'d\omega\Rightarrow\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{1+\omega^2}d\omega\Rightarrow dx=\frac{2d\omega}{1+\omega^2}$$

**Ειδικές περιπτώσεις**

- Αν η συνάρτηση $R$ είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$, θέτω $\sigma\upsilon\nu x=\omega$
- Αν η συνάρτηση $R$ είναι περιττή ως προς το $\sigma\upsilon\nu x$ , θέτω $\eta\mu x=\omega$
- Αν η συνάρτηση $R$ είναι άρτια ως προς το $\eta\mu x$ και το $\sigma\upsilon\nu x$, θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega$

**Εφαρμογή 12**

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\dfrac{1}{5\eta\mu^2x-3\sigma\upsilon\nu^2x+4}dx$ **β)** $I=\int\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx$

**α)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση είναι άρτια ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$

Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega\Rightarrow x=\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\Rightarrow dx=\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\right)'d\omega\Rightarrow dx=\dfrac{1}{1+\omega^2}d\omega$

Ισχύει ότι $\eta\mu^2x=\dfrac{\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x}=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2x=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}=\dfrac{1}{1+\omega^2}$

Άρα, $I=\int\dfrac{\frac{1}{1+\omega^2}}{5\frac{\omega^2}{1+\omega^2}-3\frac{1}{1+\omega^2}+4}=$

$$\int\frac{\frac{1}{1+\omega^2}d\omega}{\frac{5\omega^2-3+4+4\omega^2}{1+\omega^2}}=$$

$$\int\frac{d\omega}{9\omega^2+1}=$$

$\frac{1}{3}\int \frac{d(3\omega)}{(3\omega)^2+1} =$

$\frac{1}{3}\tau o\xi \varepsilon \varphi\left(3\omega\right)+c =$

$\frac{1}{3}\tau o\xi \varepsilon \varphi\left(3\varepsilon\varphi x\right)+c$

**β)** Θέτω εφ$\left(\frac{x}{2}\right)=\omega$ οπότε $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ και $dx=\frac{2d\omega}{1+\omega^2}$

Έτσι, είναι $I=\int \frac{\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}\frac{2}{1+\omega^2}}{1+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}}d\omega =$

$\int \frac{\frac{2\left(1-\omega^2\right)}{\left(1+\omega^2\right)^2}}{\frac{2}{1+\omega^2}}d\omega \int \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}d\omega =$

$\int \left(-1+\frac{2}{1+\omega^2}\right)d\omega =$

$-\int d\omega + 2\int \frac{d\omega}{1+\omega^2} =$

$-\omega + 2\tau o\xi\varepsilon\varphi + c =$

$-\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+x+c$

### 7.1.11 Μορφή $\int \eta\mu^{\mu}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\, dx,\ \mu,\nu\in\mathbb{Z}^*$

**Μέθοδος εργασίας**

**α)** Αν οι αριθμοί $\mu,\nu$ είναι φυσικοί και ο ένας τουλάχιστον είναι περιττός π.χ. $\mu=2\kappa+1,\ k\in\mathbb{N}$ τότε εργάζομαι ως εξής $\int \eta\mu^{\mu}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\, dx =$

$\int (\eta\mu^{2k}x)(\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu^{\nu}x)\, dx =$

$-\int \left(\eta\mu^2 x\right)^k \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\ d\left(\sigma\upsilon\nu x\right) =$

$-\int \left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^k \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\ d\left(\sigma\upsilon\nu x\right)$

Αναπτύσσω το $\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^{\kappa}$ και το χωρίζω σε άθροισμα ολοκληρωμάτων. Με τον ίδιο τρόπο εργάζομαι αν ο $\nu$ είναι περιττός.

**Εφαρμογή 13**

Υπολογίστε το $I=\int \eta\mu^{10}x\cdot\sigma\upsilon\nu^3 x\, dx$

Είναι $I=\int \eta\mu^{10}x\sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu x\, dx =$

$\int \eta\mu^{10}x\left(1-\eta\mu^2 x\right)\, d\left(\eta\mu x\right) =$

$$\int \eta\mu^{10} x d(\eta\mu x) - \int \eta\mu^{12} x d(\eta\mu x) =$$

$$\frac{\eta\mu^{11}x}{11} - \frac{\eta\mu^{13}x}{13} + c$$

**β)** Αν οι αριθμοί $\mu, \nu$ είναι φυσικοί και άρτιοι, τότε κάνω χρήση των τύπων

$$\eta\mu^2 \mathrm{A} = \frac{1}{2}\left(1 - \sigma\upsilon\nu(2\mathrm{A})\right),\ \sigma\upsilon\nu^2(2\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\left(1 + \sigma\upsilon\nu(2\mathrm{A})\right),\ \eta\mu\mathrm{A} \cdot \sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \frac{1}{2}\eta\mu(2\mathrm{A})$$

### Εφαρμογή 14

Υπολογίστε το $\int \sigma\upsilon\nu^2(3x)\eta\mu^4(3x)\ dx$

Είναι $\int \sigma\upsilon\nu^2(3x)\eta\mu^4(3x)dx =$

$$\int \left(\sigma\upsilon\nu(3x)\eta\mu(3x)\right)^2 \eta\mu^2(3x)\ dx =$$

$$\int \frac{\eta\mu^2(6x)}{4}\frac{1-\sigma\upsilon\nu(6x)}{2}dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \left(\eta\mu^2(6x) - \eta\mu^2(6x)\sigma\upsilon\nu(6x)\right)\ dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(12x)}{2} - \eta\mu^2(6x)\sigma\upsilon\nu(6x)\right)dx =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int \frac{dx}{2} - \int \frac{\sigma\upsilon\nu(12x)}{2}dx - \frac{1}{6}\int \eta\mu^2(6x)\ d\left(\eta\mu(6x)\right)\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{24}\sigma\upsilon\nu(12x)\ d(12x) - \frac{1}{6}\int \eta\mu^2(6x)\ d(\eta\mu 6x)\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{24}\eta\mu(12x) - \frac{1}{18}\eta\mu^3(6x)\right] + c$$

**γ)** Αν οι αριθμοί $\mu, \nu$ είναι αρνητικοί και συγχρόνως άρτιοι ή περιττοί, τότε εργάζομαι ως εξής $\int \eta\mu^{\mu} x \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx = \int \frac{dx}{\eta\mu^{-\mu}x\sigma\upsilon\nu^{-\nu}x} =$

$$\int \left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)^{-\mu}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^{-\nu} dx =$$

$$\int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^{-\mu}(\tau\epsilon\mu x)^{-\nu}\ dx =$$

$$\int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^{-\mu}(\tau\epsilon\mu x)^{-\nu-2}(\tau\epsilon\mu x)^2\ dx =$$

$$\int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^{-\mu}(\tau\epsilon\mu x)^{-\nu-2}(\epsilon\varphi x)'\ dx =$$

$\int \left(1 + \frac{1}{\epsilon\varphi^2 x}\right)^{-\mu/2}\left(1 + \epsilon\varphi^2 x\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} d\epsilon\varphi x$ Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα

**Εφαρμογή 15**

Υπολογίστε το $\int \eta\mu^{-2}x\sigma\upsilon\nu^{-4}x\, dx$

$$\int \eta\mu^{-2}x\sigma\upsilon\nu^{-4}xdx = \int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x}dx =$$

$$\int \left(\sigma\tau\varepsilon\mu x\right)^2 \left(\tau\varepsilon\mu x\right)^4 dx =$$

$$\int \left(\sigma\tau\varepsilon\mu x\right)^2 \left(\tau\varepsilon\mu x\right)^2 \left(\tau\varepsilon\mu x\right)^2 dx =$$

$$\int \left(\sigma\tau\varepsilon\mu x\right)^2 \left(\tau\varepsilon\mu x\right)^2 d\left(\varepsilon\varphi x\right) =$$

$$\int \left(1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2}\right)^{2/2} \left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)^{2/2} d\left(\varepsilon\varphi x\right) =$$

$$\int \left(1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x}\right)\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)d(\varepsilon\varphi x) =$$

$$\int \left(1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x}+\varepsilon\varphi^2 x+1\right) d\left(\varepsilon\varphi x\right) =$$

$$2\int d\left(\varepsilon\varphi x\right)+\int \frac{d\left(\varepsilon\varphi x\right)}{\varepsilon\varphi^2 x}+\int \varepsilon\varphi^2 x\; d\left(\varepsilon\varphi x\right) =$$

$$2\varepsilon\varphi x+\frac{\varepsilon\varphi^{-2+1}x}{-2+1}+\frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3} =$$

$$2\varepsilon\varphi x-\frac{1}{\varepsilon\varphi x}+\frac{1}{3}\varepsilon\varphi^3 x+c$$

## 7.1.12 Μορφή $I = \int \eta\mu^{\mu}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\; dx$, μ, ν ρητοί αριθμοί

**Μέθοδος εργασίας**

Υπολογίζονται ως εξής:

**α)** Αν ο $\mu$ είναι ακέραιος περιττός, τότε κάνω την αντικατάσταση $\sigma\upsilon\nu x = t$

**β)** Αν ο $\nu$ είναι ακέραιος περιττός, τότε κάνω την αντικατάσταση $\eta\mu x = t$

**γ)** Αν ο $\mu+\nu$ είναι άρτιος, τότε κάνω την αντικατάσταση $\varepsilon\varphi x = t$ ή $\sigma\upsilon\nu x = t$

**Εφαρμογή 16**

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}}dx$ **β)** $I = \int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x}dx$

**α)** Έχω $I = \int \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^{-2/3}xdx$ Είναι $\mu = 3$ περιττός, οπότε θέτω $\sigma\upsilon\nu = t$, άρα $-\eta\mu x\; dx = dt$, συνεπώς $\eta\mu x\; dx = -dt$, άρα $I = -\int \left(1-t^2\right)t^{-2/3}dt =$

$$-3t^{1/3}+\frac{3}{7}t^{7/3}+c = -3\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^7 x}+c$$

**β)** Έχω $I = \int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^{-6}xdx$ Οι αριθμοί $\mu,\nu$ είναι άρτιοι, άρα ο $\mu+\nu$ είναι άρτιος.

Θέτω $\varepsilon\varphi x = t \Rightarrow \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\sigma\upsilon\nu x} = t \Rightarrow \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = t^2 \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1+t^2$

Είναι $\left(\varepsilon\varphi x\right)' dx = t'dt \Rightarrow \dfrac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = dt$

Άρα, $I = \int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^{-4} x \dfrac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$

$$\int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$\int \varepsilon\varphi^2 x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2}\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$\int t^2\left(1+t^2\right)dt =$$

$$\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c =$$

$$\frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3}+\frac{\varepsilon\varphi^5 x}{3}+c$$

### 7.1.13 Μορφή $\int \eta\mu^{\mu} x\, dx, \mu \in Z_{-}^{*}$

Το ολοκλήρωμα της μορφής $\int \eta\mu^{\mu} x\, dx$ όπου $\mu$ είναι αρνητικός ακέραιος υπολογίζεται ως εξής $\int \eta\mu^{\mu} x\, dx = \int \dfrac{1}{(\eta\mu x)^{-\mu}}dx = \int \dfrac{1}{\left(2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{-\mu}}dx$

$= \dfrac{2}{2^{-\mu}}\int \dfrac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\eta\mu^{-\mu}\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu^{-\mu}\left(\frac{x}{2}\right)}$ ακολούθως εργάζομαι σύμφωνα με τη προηγούμενη μέθοδο.

**Εφαρμογή 17**

Υπολογίστε το $I = \int \eta\mu^{-3} x dx$

$$I = \int \frac{dx}{\eta\mu^3 x} = \int \frac{1}{\left(2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3}dx = \frac{1}{2^3}\int \frac{dx}{\eta\mu^3\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{2^3}\int \frac{1}{\eta\mu^3\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{x}{2}\right)}dx =$$

$$\frac{2}{8}\int \left(1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{3/2}\left(1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{1/2} d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{3/2}\left(1+\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{1/2}}{\left(\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{3/2}}d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{2}}{\varepsilon\varphi^{3}\left(\frac{x}{2}\right)}d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{1+2\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\varepsilon\varphi^{4}\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi^{3}\left(\frac{x}{2}\right)}d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\left(\varepsilon\varphi^{-3}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}+\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{1+2\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\varepsilon\varphi^{4}\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi^{3}\left(\frac{x}{2}\right)}d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\left(\varepsilon\varphi^{-3}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}+\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\varepsilon\varphi^{-3}\left(\frac{x}{2}\right)d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{4}\int\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\frac{\varepsilon\varphi^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)}{-2}+\frac{1}{2}1nI\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)I+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}+c=$$

$$\frac{-1}{8}\frac{1}{\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}1nI\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)I+\frac{1}{8}\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

### 7.1.14 Μορφή $\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx,\ \nu\varepsilon\mathbb{Z}_{-}^{*}$

Το ολοκλήρωμα της μορφής $\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx$ (όπου $\nu$ ακέραιος αρνητικός) υπολογίζεται μετασχηματίζοντας το συνημίτονο, σε ημίτονο. Είναι

$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\ dx = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{-\nu}x}\ dx = \int \frac{dx}{\eta\mu^{-\nu}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ Έτσι ανάγετε στη μορφή που περιγράφω στην προηγούμενη περίπτωση.

**Εφαρμογή 18**

Υπολογίστε το $\int \sigma\upsilon\nu^{-1}x\ dx$

$$\int \sigma\upsilon\nu^{-1}x dx = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx = \int \frac{dx}{\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$\int \frac{dx}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}dx =$$

$$\frac{2}{2}\int \sigma\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\ d\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\int \frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\ d\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

### 7.1.15 Μορφή $\int \varepsilon\varphi^{\nu}x\ dx, \nu \in \mathbb{N}^*$

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int \varepsilon\varphi^{\nu}x\ dx$ (ή της μορφής $\int \sigma\varphi^{\nu}x\ dx$) όπου $\nu$ είναι φυσικός αριθμός, υπολογίζονται με τη βοήθεια των τύπων $\varepsilon\varphi^2 x = \tau\varepsilon\mu^2 x - 1$, $\sigma\varphi^2 x = \sigma\tau\varepsilon\mu^2 x - 1$

**Εφαρμογή 19**

Υπολογίστε το $\int \varepsilon\varphi^4 x\ dx$

$$\int \varepsilon\varphi^4 x\ dx = \int \varepsilon\varphi^2 x\left(\tau\varepsilon\mu^2 x - 1\right)\ dx =$$

$$-\int \varepsilon\varphi x\ dx + \int \varepsilon\varphi^2 x\left(\tau\varepsilon\mu^2 x\right)dx =$$

$$-\int \varepsilon\varphi^2 x\ dx + \int \varepsilon\varphi^2 x\left(\varepsilon\varphi x\right)' dx =$$

$$-\int \varepsilon\varphi^2 x\ dx + \int \varepsilon\varphi^2 x\ d\left(\varepsilon\varphi x\right) =$$

$$-\int \varepsilon\varphi^2 x\ dx + \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3} =$$

$$-\int \left(\tau\varepsilon\mu^2 x - 1\right)\ dx + \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3} =$$

$$-\int \tau\varepsilon\mu^2 x\ dx + \int dx + \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3} =$$

$$\varepsilon\varphi x + x + \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3} + c =$$

$$-\int \left(\varepsilon\varphi x\right)'\ dx + x + \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3} =$$

$$-\varepsilon\varphi x + x + \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3}$$

**Παρατήρηση**

Τα ολοκληρώματα της προηγούμενης μορφής υπολογίζονται και με την αντικατάσταση $\varepsilon\varphi x = t$

## Εφαρμογή 20

Υπολογίστε το $\int \varepsilon\varphi^7 x dx$

Θέτω $\varepsilon\varphi x = t \Rightarrow x = \tau o\xi\varepsilon\varphi t \Rightarrow dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$ Άρα, $I = \int t^7 \dfrac{dt}{1+t^2} =$

$$\int \left( t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt =$$

$$\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c \ \text{ με } t = \varepsilon\varphi x$$

## 7.1.16 Μορφές $\int \eta\mu(\alpha x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta x)\ dx$, $\int \eta\mu(\alpha x)\cdot\eta\mu(\beta x)\ dx$, $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta x)\ dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με τη βοήθεια των γνωστών τριγωνομετρικών τύπων

- $\eta\mu(\alpha x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\eta\mu((\alpha+\beta)x) + \eta\mu((\alpha-\beta)x)\right]$
- $\eta\mu(\alpha x)\cdot\eta\mu(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu((\alpha-\beta)x) - \sigma\upsilon\nu((\alpha+\beta)x)\right]$
- $\sigma\upsilon\nu(\alpha x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu((\alpha-\beta)x) + \sigma\upsilon\nu((\alpha+\beta)x)\right]$

## Εφαρμογή 21

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \dfrac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx$ **β)** $I = \int \dfrac{dx}{5+4\sigma\upsilon\nu x}$ **γ)** $\int \eta\mu(9x)\cdot\eta\mu x\ dx$

**α)** Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) = \omega \Rightarrow \eta\mu x = \dfrac{2\omega}{1+\omega^2}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ Η $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) = \omega$ δίνει

$$\frac{x}{2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi\omega \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)' dx = \left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\right)' d\omega \Rightarrow \frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{1+\omega^2}d\omega \Rightarrow dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$$

Άρα, $I=\int \frac{\left(1+\frac{2\omega}{1+\omega^2}\right)\frac{2}{1+\omega^2}}{1+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}}d\omega=$

$\int \frac{(1+\omega^2+2\omega)(1+\omega^2)}{2(1+\omega^2)}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}d\omega$

$\int \frac{1+\omega^2+2\omega}{1+\omega^2}d\omega=\int\left(1+\frac{2\omega}{1+\omega^2}\right)d\omega=\int d\omega+\int\frac{2\omega}{1+\omega^2}d\omega=$

$\int d\omega+\int\frac{d(\omega^2+1)}{\omega^2+1}=\omega+\ln(\omega^2+1)+c=$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+c$

**β)** Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\omega\Rightarrow \mathrm{dx}=\frac{2\mathrm{d}\omega}{1+\omega^2}$ Επίσης ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$

Άρα, $I=\int\frac{\frac{2}{1+\omega^2}}{5+4\cdot\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}}d\omega=\int\frac{\frac{2}{1+\omega^2}}{\frac{5+5\omega^2+4-4\omega^2}{1+\omega^2}}d\omega=$

$\int\frac{2}{\omega^2+9}d\omega=$

$\frac{2}{3}\int\frac{d\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\left(\frac{\omega}{3}\right)^2+1}=\frac{2}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right)+c=$

$\frac{2}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{3}\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)+c$

**γ)** $\int \eta\mu(9x)\eta\mu x\ dx=\frac{1}{2}\int[\sigma\upsilon\nu(9-1)x-\sigma\upsilon\nu(9+1)x]\ dx=$

$\frac{1}{2}\int[\sigma\upsilon\nu(8x)-\sigma\upsilon\nu(10x)]dx=$

$\frac{1}{2}\int\sigma\upsilon\nu(8x)dx-\frac{1}{2}\int\sigma\upsilon\nu(10x)dx=$

$\frac{1}{2\cdot 8}\int\sigma\upsilon\nu(8x)\ d(8x)-\frac{1}{2\cdot 10}\int\sigma\upsilon\nu(10x)\ d(10x)=$

$\frac{1}{16}\eta\mu(8x)-\frac{1}{20}\eta\mu(10x)+c$

## Εφαρμογή 22

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\frac{dx}{\eta\mu x}$ **β)** $I=\int\frac{\eta\mu^3 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx$ **γ)** $\int\varepsilon\varphi^4 x\ dx$

**α)** Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)=\omega \Rightarrow dx=\dfrac{2d\omega}{1+\omega^2}$ και $\eta\mu x=\dfrac{2\omega}{1+\omega^2}$ άρα,

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\eta\mu x}=\int \frac{\dfrac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\dfrac{2\omega}{1+\omega^2}}=\int \frac{d\omega}{\omega}=\ln|\omega|+\mathrm{c}=\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

**β)** Είναι $R(-\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)=\dfrac{(-\eta\mu x)^3}{2+\sigma\upsilon\nu(-x)}=-\dfrac{\eta\mu^3 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}=-R(\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)$

Δηλαδή, η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$

Έτσι, θέτω $\displaystyle\int \frac{\eta\mu^3 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int \frac{\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx=$

$$\int \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x^2)d\left(\sigma\upsilon\nu x\right)}{2+\sigma\upsilon\nu x}=-\int \frac{1-\omega^2}{2+\omega}d\omega=$$

$$\int \frac{\omega^2-1}{\omega+2}d\omega=\int\left(\omega-2++\frac{3}{\omega+2}\right)d\omega=$$

$$\int \omega d\omega-2\int d\omega+3\int\frac{d\omega}{\omega+2}=$$

$$\frac{\omega^2}{2}-2\omega+3\int\frac{d(\omega+2)}{\omega+2}=$$

$$\frac{\omega^2}{2}-2\omega+3\ln|\omega+2|+c=$$

$$\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+3\ln|\sigma\upsilon\nu x+2|+c$$

**γ)** Είναι $\displaystyle\int \varepsilon\varphi^4 x\,dx=\int\frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}\,dx$. Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι άρτια ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$.

Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega \Rightarrow x=\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega \Rightarrow dx=\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\right)'d\omega \Rightarrow dx=\dfrac{1}{1+\omega^2}d\omega.$

Άρα, $\displaystyle\int \varepsilon\varphi^4 x\,dx=\int \omega^4\frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega=$

$$\int\frac{\omega^4}{1+\omega^2}\left(\omega^2-1+\frac{1}{\omega^2+1}\right)d\omega=$$

$$\int\omega^2 d\omega-\int d\omega+\int\frac{d\omega}{\omega^2+1}=$$

$$\frac{\omega^3}{3}-\omega+\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega+c=$$

$$\frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3}-\varepsilon\varphi x+\tau o\xi\left[\varepsilon\varphi(\varepsilon\varphi x)\right]+c=$$

$$\frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3}-\varepsilon\varphi x+x+c$$

**Εφαρμογή 23**

Υπολογίστε τα **α)** $\int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4}dx$ **β)** $I=\int \sigma\upsilon\nu^5\varphi\, d\varphi$ **γ)** $I=\int \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\sqrt[3]{\eta\mu x}}dx$

**α)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι άρτια ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$. Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega$ οπότε $dx=\frac{1}{1+\omega^2}d\omega$, $\eta\mu^2 x=\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{1}{1+\omega^2}$.

Άρα, $\int \frac{\eta\mu^2 x dx}{\sigma\upsilon\nu^4 x}=\int \frac{\frac{\omega^2}{1+\omega^2}}{\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2}\cdot\frac{d\omega}{1+\omega^2}=\int \omega^2 d\omega=\frac{\omega^3}{3}+c=\frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3}+c$

**β)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\sigma\upsilon\nu\varphi$. Πράγματι είναι $R(-\sigma\upsilon\nu\varphi)=(-\sigma\upsilon\nu\varphi)^5=-\sigma\upsilon\nu^5\varphi=-R(\sigma\upsilon\nu\varphi)$ Έτσι, θέτω $\eta\mu\varphi=\omega$. Άρα,

$\int \sigma\upsilon\nu^5\varphi\, d\varphi=$

$\int \sigma\upsilon\nu^4\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi\, d\varphi=$

$\int (1-\eta\mu^2\varphi)^2 d(\eta\mu\varphi)=$

$\int (1-\omega^2)^2 d\omega=$

$\int (1-2\omega^2+\omega^4)\, d\omega=$

$\int d\omega-2\int \omega^2 d\omega+\int \omega^4 d\omega=$

$\omega-2\frac{\omega^3}{3}+\frac{\omega^5}{5}+c=$

$\eta\mu\varphi-\frac{2}{3}\eta\mu^3\varphi+\frac{1}{5}\eta\mu^5\varphi+c$

**γ)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\sigma\upsilon\nu x$. Θέτω $\eta\mu x=\omega$

Άρα, $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\sqrt[3]{\eta\mu x}}dx=\int \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt[3]{\eta\mu x}}dx=$

$\int \frac{(1-\eta\mu^2 x)^2 d(\eta\mu x)}{\sqrt[3]{\eta\mu x}}=$

$\int \frac{(1-\omega^2)^2 d\omega}{\sqrt[3]{\omega}}=\int \frac{1-2\omega^2+\omega^4}{\omega^{1/3}}d\omega=$

$\int \frac{1}{\omega^{1/3}}d\omega-2\int \omega^{2-1/3}d\omega+\int \omega^{4-1/3}d\omega=$

$\int \omega^{-1/3}d\omega-2\int \omega^{5/3}d\omega+\int \omega^{11/3}d\omega=$

$$\frac{\omega^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1}-2\cdot\frac{\omega^{5/3+1}}{\frac{5}{3}+1}+\frac{\omega^{11/3+1}}{\frac{11}{3}+1}+c=$$

$$\frac{3}{2}\omega^{2/3}-\frac{6}{8}\omega^{8/3}+\frac{3}{14}\omega^{14/3}+c=$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\eta\mu^2 x}-\frac{6}{8}\sqrt[3]{\eta\mu^8 x}+\frac{3}{14}\sqrt[3]{\eta\mu^{14} x}+c$$

**Εφαρμογή 24**

Υπολογίστε τα **α)** $\int\frac{\eta\mu^5 y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}\,dy$ **β)** $I=\int\frac{\eta\mu^{3/2}x\,dx}{\sigma\upsilon\nu^{15/2}x}$ **γ)** $\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^5 x\,dx$ **δ)** $\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^4 x\,dx$

**α)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\eta\mu y$. Θέτω $\sigma\upsilon\nu y=\omega$

Άρα, $\int\frac{\eta\mu^5 y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}dy=$

$$\int\frac{\eta\mu^4 y\cdot\eta\mu y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}dy=$$

$$-\int\frac{(1-\sigma\upsilon\nu^2 y)^2 d(\sigma\upsilon\nu y)}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}=$$

$$-\int\frac{(1-\omega^2)^2 d\omega}{\sqrt{\omega}}=$$

$$-\int\left(\frac{1-2\omega^2+\omega^4}{\omega^{1/2}}\right)d\omega=$$

$$-\int\frac{1}{\omega^{1/2}}d\omega+2\int\omega^{2-1/2}d\omega+\int\omega^{4-1/2}d\omega=$$

$$-\int\omega^{-1/2}d\omega+2\int\omega^{3/2}d\omega-\int\omega^{7/2}d\omega=$$

$$-\frac{\omega^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}+2\cdot\frac{\omega^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1}-\frac{\omega^{7/2+1}}{\frac{7}{2}+1}+c=$$

$$-2\omega^{1/2}+\frac{4}{5}\omega^{5/2}-\frac{2}{9}\omega^{9/2}+c=$$

$$-2\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}+\frac{4}{5}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^5 y}-\frac{2}{9}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^9 y}+c$$

$$-2\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}\left(1-\frac{2}{5}\sigma\upsilon\nu^2 y+\frac{1}{9}\sigma\upsilon\nu^4 y\right)+c$$

**β)** Είναι $I=\int\frac{\sqrt{\eta\mu^3 x}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^{15}x}}dx=\int\sqrt{\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^{15}x}}dx$

Είναι $R(-\eta\mu x,-\sigma\upsilon\nu x)=\sqrt{\frac{(-\eta\mu x)^3}{(-\sigma\upsilon\nu x)^{15}}}=\sqrt{\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^{15}x}}=R(\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)$

Η συνάρτηση R, είναι άρτια ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$. Θέτω $\varepsilon\varphi x = \omega$.

Έτσι είναι $I = \int \sqrt{\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{12} x}} dx =$

$$\int \sqrt{\varepsilon\varphi^3 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\right)^6}} dx =$$

$$\int \sqrt{\varepsilon\varphi^3 x} \sqrt{\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)^6} dx =$$

$$\int \omega^{3/2}\left(1+\omega^2\right)^2 d\omega =$$

$$\int \omega^{3/2}\left(1+2\omega^2+\omega^4\right) d\omega$$

$$\int \omega^{3/2} d\omega + 2\int \omega^{7/2} d\omega + \int \omega^{11/2} d\omega =$$

$$\frac{\omega^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2\frac{\omega^{7/2+1}}{\frac{7}{2}+1} + \frac{\omega^{11/2+1}}{\frac{11}{2}+1} + c =$$

$$\frac{2}{5}\varepsilon\varphi^{5/2} x + \frac{4}{9}\varepsilon\varphi^{9/2} x + \frac{2}{13}\varepsilon\varphi^{13/2} x + c$$

**γ)** Είναι $\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \int \eta\mu^2 x (\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 d(\eta\mu x) =$

$$\int \eta\mu^2 x (1-\eta\mu^2 x)\ d(\eta\mu x) =$$

$$\int \eta\mu^2 x\ d(\eta\mu x) - 2\int \eta\mu^4 x\ d(\eta\mu x) + \int \eta\mu^6 x\ d(\eta\mu x) =$$

$$\frac{\eta\mu^3 x}{3} - 2\frac{\eta\mu^5 x}{5} + \frac{\eta\mu^7 x}{7} + c$$

**δ)** Είναι $\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x\ dx =$

$$\int \frac{1-\sigma\upsilon\nu(2x)}{2} \cdot \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \left(1+\sigma\upsilon\nu(2x) - \sigma\upsilon\nu^2(2x) - \sigma\upsilon\nu^3(2x)\right) dx =$$

$$\frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \sigma\upsilon\nu(2x)dx - \frac{1}{8}\int \sigma\upsilon\nu^2(2x)dx - \frac{1}{8}\int \sigma\upsilon\nu^3(2x)dx =$$

$$\frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{16}\int \sigma\upsilon\nu(2x)d(2x) - \frac{1}{8}\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu(4x)}{2}dx - \frac{1}{16}\int \sigma\upsilon\nu^2(2x)\ d(\eta\mu 2x) =$$

$$\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\eta\mu(2x) - \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{64}\int \sigma\upsilon\nu(4x)\ d(4x) - \frac{1}{16}\int (1-\eta\mu^2(2x))\ d(\eta\mu(2x)) =$$

$$\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\eta\mu(2x) - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\eta\mu(4x) - \frac{1}{16}\eta\mu(2x) + \frac{1}{48}\eta\mu^3(2x) + c =$$

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\eta\mu(4x) + \frac{1}{48}\eta\mu^3(2x) + c$$

**Εφαρμογή 25**

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int \frac{1}{3\varepsilon\varphi x+2}dx$ **β)** $\int \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)\,dx$

**α)** Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega \Rightarrow dx=\frac{d\omega}{1+\omega^2}$

Άρα, $I=\int \frac{1}{3\omega+2}\cdot\frac{d\omega}{1+\omega^2}=\int \frac{d\omega}{(3\omega+2)(1+\omega^2)}$

Είναι $\frac{1}{(3\omega+2)(1+\omega^2)}=\frac{A}{3\omega+2}+\frac{B\omega+\Gamma}{1+\omega^2}$ οπότε εργαζόμενος κατά τα γνωστά βρίσκω ότι $\left(A=\frac{9}{13},\quad B=-\frac{3}{13},\quad \Gamma=\frac{2}{13}\right)$

Άρα, $I=\frac{9}{13}\int\frac{d\omega}{3\omega+2}-\frac{3}{13}\int\frac{\omega d\omega}{1+\omega^2}+\frac{2}{13}\int\frac{d\omega}{1+\omega^2}=$

$$\frac{9}{13}\int\frac{d\omega}{3\left(\omega+\frac{2}{3}\right)}-\frac{3}{26}\int\frac{2\omega d\omega}{1+\omega^2}+\frac{2}{13}\int\frac{d\omega}{1+\omega^2}=$$

$$\frac{3}{13}\int\frac{d\omega}{\omega+\frac{2}{3}}-\frac{3}{26}\int\frac{d\omega^2}{1+\omega^2}+\frac{2}{13}\int\frac{d\omega}{1+\omega^2}=$$

$$\frac{3}{13}\int\frac{d\left(\omega+\frac{2}{3}\right)}{\omega+\frac{2}{3}}-\frac{3}{26}\int\frac{d(\omega^2+1)}{\omega^2+1}+\frac{2}{13}\int\frac{d\omega}{1+\omega^2}=$$

$\frac{3}{13}\ln\left|\omega+\frac{2}{3}\right|-\frac{3}{26}\ln(\omega^2+1)+\frac{2}{13}\tau o\xi\varepsilon\varphi x+c$ όπου $\omega=\varepsilon\varphi x$

**β)** $\int \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)\,dx=$

$$\frac{1}{2}\int\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)\right]dx=$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{x}{6}+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5x}{6}\right)\right)dx=$$

$$\frac{6}{2}\int\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{6}\right)\,d\left(\frac{x}{6}\right)+\frac{6}{10}\int\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5x}{6}\right)\,d\left(\frac{5x}{6}\right)=$$

$$3\eta\mu\left(\frac{x}{6}\right)+\frac{3}{5}\eta\mu\left(\frac{5x}{6}\right)+c$$

**Εφαρμογή 26**

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^3xdx$ **β)** $\int\eta\mu(3x)\sigma\upsilon\nu(5x)\,dx$

**α)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=\omega$.

Είναι $\int\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^3xdx=$

$$-\int \sigma\upsilon\nu^2 x\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\, d\left(\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$-\int(\omega^2-\omega^4)d\omega=$$

$$-\frac{\omega^3}{3}+\frac{\omega^5}{5}+c=$$

$$-\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3}+\frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5}+c$$

**β)** $\int \eta\mu\left(3x\right)\sigma\upsilon\nu\left(5x\right)\, dx=$

$$\frac{1}{2}\int\left[\eta\mu\left(8x\right)+\eta\mu(3x-5x)\right]\, dx=$$

$$\frac{1}{2}\int \eta\mu\left(8x\right)dx-\frac{1}{2}\int \eta\mu\left(2x\right)\, dx=$$

$$\frac{1}{16}\int \eta\mu\left(8x\right)\, d\left(8x\right)-\frac{1}{4}\int \eta\mu\left(2x\right)\, dx=$$

$$\frac{-1}{16}\sigma\upsilon\nu\left(8x\right)-\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)+c$$

**Εφαρμογή 27**

Υπολογίστε τα **α)** $\int \eta\mu x\cdot\eta\mu\left(2x\right)\cdot\eta\mu\left(3x\right)\, dx$ **β)** $I=\int\frac{dx}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$ **γ)** $I=\int\frac{dx}{1+\eta\mu^2 x}dx$

**α)** $\int \eta\mu x\cdot\eta\mu\left(2x\right)\cdot\eta\mu\left(3x\right)\, dx=$

$$\frac{1}{2}\int\left[\sigma\upsilon\nu(x-2x)-\sigma\upsilon\nu(x+2x)\right]\cdot\eta\mu\left(3x\right)\, dx=$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(3x\right)\right)\cdot\eta\mu\left(3x\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu x\eta\mu\left(3x\right)dx-\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu\left(3x\right)\eta\mu\left(3x\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\left[\eta\mu(3x+x)+\eta\mu(3x-x)\right]dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\left[\eta\mu(3x+3x)+\eta\mu(3x-3x)\right]dx=$$

$$\frac{1}{4}\int \eta\mu\left(4x\right)dx+\frac{1}{4}\int \eta\mu\left(2x\right)dx-\frac{1}{4}\int \eta\mu\left(6x\right)dx+\frac{1}{4}\int \eta\mu 0dx=$$

$$\frac{1}{16}\int \eta\mu\left(4x\right)\, d\left(4x\right)+\frac{1}{8}\int \eta\mu\left(2x\right)\, d\left(2x\right)-\frac{1}{24}\int \eta\mu\left(6x\right)\, d\left(6x\right)+\frac{1}{4}\int 0dx=$$

$$\frac{-1}{16}\sigma\upsilon\nu\left(4x\right)-\frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)+\frac{1}{24}\sigma\upsilon\nu\left(6x\right)+c$$

**β)** Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\omega$ οπότε $dx=\frac{2d\omega}{1+\omega^2},\eta\mu x=\frac{2\omega}{1+\omega^2},\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ Άρα,

$$I=\int\frac{2d\omega}{1+\frac{2\omega}{1+\omega^2}+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}}=$$

$$\int\frac{d\omega}{1+\omega}=\int\frac{d(1+\omega)}{1+\omega}=$$
$$\ln|1+\omega|+c=$$
$$\ln\left|1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|+c$$

**γ)** Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega\Rightarrow\eta\mu^2 x=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}$, $dx=\frac{d\omega}{1+\omega^2}$ Άρα,

$$I=\int\frac{d\omega}{\left(1+\omega^2\right)\left(1+\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right)}=$$
$$\int\frac{d\omega}{1+2\omega^2}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\omega\sqrt{2})}{1+(\omega\sqrt{2})^2}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\omega\sqrt{2})+c=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{2}\varepsilon\varphi x\right)+c$$

**Εφαρμογή 28**

Υπολογίστε τα **α)** $\int\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}\,dx$ **β)** $\int\frac{\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^3}dx$ **γ)** $\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$ **δ)** $\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$

**α)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι άρτια ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$. Πράγματι είναι $R(-\eta\mu x,-\sigma\upsilon\nu x)=\frac{1-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1+\varepsilon\varphi}{1-\varepsilon\varphi}=R(\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)$

Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega\Rightarrow x=\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\Rightarrow dx=(\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega)'d\omega\Rightarrow dx=\frac{1}{1+\omega^2}d\omega$

Άρα, $\int\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}dx=$

$\int\frac{1+\omega}{1-\omega}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}d\omega=\int\frac{1+\omega}{(1-\omega)(1+\omega^2)}d\omega$ Είναι

$$\frac{1+\omega}{(1-\omega)(1+\omega^2)}=\frac{A}{1-\omega}+\frac{B\omega+\Gamma}{1+\omega^2}\Rightarrow 1+\omega=\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)\omega^2+\left(\mathrm{B}-\Gamma\right)\omega+\mathrm{A}+\Gamma\begin{cases}A-B=0\Rightarrow A=1\\B-\Gamma=1\Rightarrow B=1\\A+\Gamma=1\Rightarrow\Gamma=0\end{cases}$$

Άρα, $\int\frac{1+\omega}{(1-\omega)(1+\omega^2)}d\omega=$

$$\int\frac{1}{1-\omega}d\omega+\int\frac{\omega}{1+\omega^2}d\omega=$$
$$-\int\frac{d\left(1-\omega\right)}{1-\omega}+\frac{1}{2}\int\frac{2\omega}{1+\omega^2}d\omega=$$

$$-\ln|1-\omega|+\frac{1}{2}\int\frac{d(\omega^2+1)}{\omega^2+1}=$$

$$-\ln|1-\omega|+\frac{1}{2}\ln\left(1+\omega^2\right)+c=$$

$$-\ln|1-\varepsilon\varphi x|+\frac{1}{2}\ln\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)+c$$

**β)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=\omega \Rightarrow (\sigma\upsilon\nu x)'dx=d\omega \Rightarrow -\eta\mu x dx=d\omega$.

Άρα, $\int\frac{\eta\mu x dx}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^3}=$

$$-\int\frac{-\eta\mu x dx}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^3}=$$

$$-\int\frac{d\omega}{(1-\omega)^3}=$$

$$\int(1-\omega)^{-3}d(1-\omega)=$$

$$\frac{(1-\omega)^{-2}}{-2}+c=$$

$$\frac{-1}{2\left(1-\omega\right)^2}+c=\frac{-1}{2(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}+c$$

**γ)** οι εκθέτες, είναι φυσικοί και ένας από αυτούς είναι περιττός.

Άρα, $\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^3 x\;dx=$

$$\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu x\;dx=$$

$$\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\;d\left(\eta\mu x\right)=$$

$$\eta\mu^2 x\left(1-\eta\mu^2 x\right)\;d\left(\eta\mu x\right)=$$

$$\int\eta\mu^2 x\;d\left(\eta\mu x\right)-\int\eta\mu^4 x\;d\left(\eta\mu x\right)=$$

$$\frac{\eta\mu^3 x}{3}-\frac{\eta\mu^5 x}{5}+c$$

**δ)** Οι εκθέτες, είναι φυσικοί άρτιοι. Έχω $\int\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x\;dx=$

$$\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)}{2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)}{2}dx=$$

$$\frac{1}{4}\int\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\left(2x\right)\right)\;dx=$$

$$\frac{1}{4}\int\eta\mu^2\left(2x\right)\;dx=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(4x\right)}{2}dx=$$

$$\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{32}\int \sigma\upsilon\nu\left(4x\right)\, d\left(4x\right)=$$
$$\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\eta\mu\left(4x\right)+c$$

## Εφαρμογή 29

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right)\, dx+\int \varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{4}\right)\, dx$ **β)** $\int \frac{\eta\mu^3 x\, dx}{\sigma\upsilon\nu x}$ **γ)** $\int \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx$

**α)** Είναι $I=\int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right)\, dx+\int \varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{4}\right)\, dx$

- Για να υπολογίσω το $\int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right)\, dx$ Θέτω

$$\varepsilon\varphi x=\omega\Rightarrow\frac{x}{3}=\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\Rightarrow\left(\frac{x}{3}\right)' dx=(\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega)' d\omega=\frac{1}{3}dx=\frac{1}{1+\omega^2}d\omega$$

Άρα, $\int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right)\, dx=$

$$3\int \frac{\omega^3}{1+\omega^2}d\omega=$$
$$3\int\left(\omega-\frac{\omega}{\omega^2+1}\right)d\omega=$$
$$3\int \omega\, d\omega-\frac{3}{2}\int \frac{2\omega}{\omega^2+1}\, d\omega=$$
$$3\cdot\frac{\omega^2}{2}-\frac{3}{2}\int \frac{d\left(\omega^2+1\right)}{\omega^2+1}=$$
$$3\cdot\frac{\omega^2}{2}-\frac{3}{2}\ln(\omega^2+1)+c=$$
$$\frac{3}{2}\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{3}{2}\ln\left(\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{3}\right)+1\right)+c$$

- Για να υπολογίσω το $\int \varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{4}\right)dx$ θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{4}\right)=\omega\Rightarrow dx=\frac{4}{1+\omega^2}d\omega$

$$\int \varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{4}\right)dx=$$
$$4\int \frac{\omega^4}{1+\omega^2}d\omega=4\int\left(\omega^2-1+\frac{1}{1+\omega^2}\right)d\omega=$$
$$4\int \omega^2 d\omega-4\int d\omega+4\int \frac{1}{1+\omega^2}d\omega=$$
$$4\frac{\omega^3}{3}-4\omega+4\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega+c=$$
$$\frac{4}{3}\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{4}\right)-4\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{4}\right)+4\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\right)+c \quad \text{Συνεπώς,}$$

$$I=\frac{3}{2}\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{3}{2}\ln\left|\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{3}\right)+1\right|+\frac{4}{3}\varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{4}\right)-4\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{4}\right)+4\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\right)+c$$

**β)** Είναι $\int\frac{\eta\mu^3x\,dx}{\sigma\upsilon\nu x}=\int\frac{\eta\mu^2x\cdot\eta\mu x\,dx}{\sigma\upsilon\nu x}=$

$$-\int\frac{(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\,d\left(\sigma\upsilon\nu(\nu x)\right)}{\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$-\int\frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu\nu x}+\int\sigma\upsilon\nu x\,d\left(\sigma\upsilon\nu(\nu x)\right)=$$

$$-\ln|\sigma\upsilon\nu x|+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2(\nu x)+c$$

**γ)** Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\omega$ οπότε $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ και

$$\frac{x}{2}=\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)'dx=\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\right)'d\omega\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}dx=\frac{1}{1+\omega^2}d\omega\Rightarrow dx=\frac{2d\omega}{1+\omega^2}$$

Έτσι, έχω $\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx=$

$$\int\frac{1-\frac{1-\omega}{1+\omega^2}}{1+\frac{1-\omega}{1+\omega^2}}\cdot\frac{2d\omega}{1+\omega^2}=$$

$$\int\frac{1+\omega^2-1+\omega}{1+\omega^2+1-\omega}\cdot\frac{2d\omega}{1+\omega^2}=$$

$$\int\frac{2\omega^2d\omega}{1+\omega^2}=2\int\frac{\omega^2+1-1}{\omega^2+1}d\omega=$$

$$2\int\frac{\omega^2+1}{\omega^2+1}d\omega-2\int\frac{d\omega}{1+\omega^2}=$$

$$2\omega-2\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega+c=$$

$$2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-2\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c=$$

$$2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-2\frac{x}{2}+c=2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-x+c$$

**Εφαρμογή 30**

Υπολογίστε τα **α)** $\int\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}dx$ **β)** $\int\frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}}dx$ **γ)** $\int\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^4x}{\left(1+\sigma\upsilon\nu^5x\right)^5}dx$

**α)** Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\omega$ οπότε $\eta\mu x=\frac{2\omega}{1-\omega^2}$ και $dx=\frac{2d\omega}{1+\omega^2}$. Άρα, $\int\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}dx=$

$$\int \frac{1+\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}}{1-\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}} \cdot \frac{2d\omega}{1+\omega^2} =$$

$$\int \frac{1+\omega^2+2\omega}{1+\omega^2-2\omega} \cdot \frac{2d\omega}{1+\omega^2} =$$

$$\int \frac{(1+\omega)^2 \cdot 2}{(1-\omega)^2(1+\omega^2)} d\omega$$

Είναι $\dfrac{(1+\omega)^2}{(1-\omega)^2(1+\omega^2)} = \dfrac{A}{1-\omega} + \dfrac{B}{(1-\omega)^2} + \dfrac{\Gamma\omega+\Delta}{1+\omega^2} \Leftrightarrow$

$$(1+\omega)^2 = A(1-\omega)(1+\omega^2) + B(1+\omega^2) + (\Gamma\omega+\Delta)(1-\omega)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+2\omega+\omega^2 = (\Gamma - \mathrm{A})\omega^3 + (\mathrm{A}+\mathrm{B}-2\Gamma+\Delta)\omega^2 + (-\mathrm{A}+\Gamma-2\Delta)\omega + (\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Delta) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma - A = 0 \\ A+B-2\Gamma+\Delta = 1 \\ -A\Gamma - 2\Delta = 2 \\ A+B+\Delta = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ \Gamma=0 \\ \Delta=-1 \end{array}\right\}$$

Άρα, $\displaystyle\int \frac{(1+\omega)^2 \cdot 2}{(1-\omega)^2(1+\omega^2)} d\omega =$

$$2\int \frac{2}{(1-\omega)^2} d\omega - 2\int \frac{1}{\omega^2+1} d\omega =$$

$$-4\int (1-\omega)^{-2} d(1-\omega) - 2\int \frac{d\omega}{\omega^2+1} =$$

$$4\frac{(1-\omega)^{-1}}{-1} - 2\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega + c =$$

$$4\frac{1}{1-\omega} - 2\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega + c =$$

$$4\frac{1}{1-\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}} - 2\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c =$$

$$4\frac{1}{1-\varepsilon\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)} - 2\frac{x}{2} + c =$$

$$4\frac{1}{1-\varepsilon\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)} - x + c$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ με $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu(2x)}}$, είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\upsilon\nu x = \omega$. Είναι $\displaystyle\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu(2x)}} dx =$

$$\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}}dx =$$

$$-\int \frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{\sqrt{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}} =$$

$$-\int \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega^2-1}} =$$

$$-\int \frac{d\omega}{\sqrt{2}\sqrt{\omega^2-\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2-\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{\left(\sqrt{\omega^2-1/2}+\omega\right)\, d\omega}{\left(\sqrt{\omega^2-1/2}+\omega\right)\left(\sqrt{\omega^2-1/2}\right)}=$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{1+\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-1/2}}}{\sqrt{\omega^2-1/2}+\omega}d\omega =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{\omega^2-1/2}+\omega\right)}{\sqrt{\omega^2-1/2}+\omega}=$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\omega+\sqrt{\omega^2-1/2}\right|+c =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x-1/2}\right|+c$$

**γ)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=\omega$

Άρα, $\int \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^4 x}{(1+\sigma\upsilon\nu^5 x)^5}dx =$

$$-\int \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x\; d(\sigma\upsilon\nu x)}{\left(1+\sigma\upsilon\nu^5 x\right)^5} =$$

$$-\int \frac{\omega^4\; d\omega}{\left(1+\omega^5\right)^5} =$$

$$\frac{-1}{5}\int \frac{5\omega^4\; d\omega}{\left(1+\omega^5\right)^5}=$$

$$\frac{-1}{5}\int \frac{d\left(\omega^5+1\right)}{\left(\omega^5+1\right)^5} =$$

$$\frac{-1}{5}\int (\omega^5+1)^{-5} d(\omega^5+1) =$$

$$\frac{-1}{5}\frac{\left(\omega^5+1\right)^{-4}}{-4}+c=$$
$$\frac{1}{20}\frac{1}{(\omega^5+1)^4}+c=$$
$$\frac{1}{20}\frac{1}{(\sin^5 x+1)^4}+c$$

**Εφαρμογή 31**

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x+\sigma\upsilon\nu^5 5x}{\eta\mu^2 x+\eta\mu^4 x}dx$ **β)** $I=\int\frac{\left(\eta\mu^2 x+\eta\mu^4 x\right)}{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^4\left(3x\right)}dx$

**α)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\sigma\upsilon\nu x$. Θέτω $\eta\mu x=\omega$. Άρα,

$$I=\int\frac{\sigma\upsilon\nu x\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^4 x\right)}{\eta\mu^2 x+\eta\mu^4 x}dx=$$
$$\int\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu^2 x+\eta\mu^4 x}\,d\left(\eta\mu x\right)=$$
$$\int\frac{(1-\eta\mu^2 x)^2+(1-\eta\mu^2 x)^2}{\eta\mu^2 x+\eta\mu^4 x}\,d\left(\eta\mu x\right)=$$
$$\int\frac{(1-\omega^2)(1-\omega^2)}{\omega^2+\omega^4}d\omega=$$
$$\int\frac{(1-\omega^2)\left[1+(1-\omega^2)\right]}{\omega^2+\omega^4}d\omega=$$
$$\int\frac{(1-\omega^2)(2-\omega^2)}{\omega^2+\omega^4}d\omega=$$
$$\int\frac{2-\omega^2-2\omega^2+\omega^4}{\omega^2(1+\omega^2)}d\omega=$$
$$\int\frac{\omega^4-3\omega^2+2}{\omega^2(1+\omega^2)}d\omega=$$
$$\int\left(1-\frac{4\omega^2-2}{\omega^2(1+\omega^2)}\right)d\omega=$$
$$\int d\omega-\int\frac{4\omega^2-2}{\omega^2(1+\omega^2)}d\omega=$$
$$\int\frac{\omega^4-3\omega^2+2}{\omega^2(1+\omega^2)}d\omega=$$
$$\int\left(1-\frac{4\omega^2-2}{\omega^2(1+\omega^2)}\right)d\omega=$$
$$\int d\omega-\int\frac{4\omega^2-2}{\omega^2(1+\omega^2)}d\omega$$

Είναι $\int \frac{4\omega^2-2}{\omega^2(1+\omega^2)} = \frac{A}{\omega}+\frac{B}{\omega^2}+\frac{\Gamma\omega+\Delta}{1+\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-2 \\ \Gamma=0 \\ \Delta=6 \end{cases}$

Άρα, $I=\int d\omega+\int \frac{2}{\omega^2}d\omega-\int \frac{6}{1+\omega^2}d\omega=\int d\omega+2\int \omega^{-2}d\omega-6\int \frac{d\omega}{1+\omega^2}=$

$\omega+2\frac{\omega^{-1}}{-1}-6\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega+c=\eta\mu x-2\frac{1}{\eta\mu x}-6\tau o\xi\varepsilon\varphi(\eta\mu x)+c$

**β)** Είναι $I=\int \frac{(\eta\mu^2 x+\eta\mu^4 x)\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^4 x}dx$. Εργαζόμενος όπως προηγουμένως, έχω

$I=\int \frac{\omega^2(1+\omega^2)}{\omega^4-3\omega^2+2}d\omega=$

$\int \left(1+\frac{4\omega^2-2}{\omega^4-3\omega^2+2}\right)d\omega=$

$\int d\omega+2\frac{2\omega^2-1}{(\omega-1)(\omega+1)(\omega-\sqrt{2})(\omega+\sqrt{2})}d\omega$

Είναι $\frac{2\omega^2-1}{(\omega-1)(\omega+1)(\omega-\sqrt{2})(\omega+\sqrt{2})}=\frac{A}{\omega-1}+\frac{B}{\omega+1}+\frac{\Gamma}{\omega-\sqrt{2}}+\frac{\Delta}{\omega+\sqrt{2}} \Rightarrow$

$2\omega^2-1=A(\omega+1)(\omega-\sqrt{2})(\omega+\sqrt{2})+B(\omega-1)(\omega+\sqrt{2})(\omega-\sqrt{2})+$
$\Gamma(\omega-1)(\omega+1)(\omega+\sqrt{2})+\Delta(\omega-1)(\omega+1)(\omega-\sqrt{2})$

- Για $\omega=1$, η ανωτέρω σχέση δίνει $A=\frac{-1}{\sqrt{2}}$
- Για $\omega=-1$, η ανωτέρω σχέση δίνει $B=\frac{1}{2}$
- Για $\omega=\sqrt{2}$, η ανωτέρω σχέση δίνει $\Gamma=\frac{3}{2\sqrt{2}}$
- Για $\omega=-\sqrt{2}$, η ανωτέρω σχέση δίνει $\Delta=\frac{-3}{2\sqrt{2}}$

Άρα, $I=\int d\omega-\int \frac{d\omega}{\omega-1}+\int \frac{d\omega}{\omega+1}+\frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{d\omega}{\omega-\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{d\omega}{\omega+\sqrt{2}}=$

$\omega-\ln|\omega-1|+\ln|\omega+1|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln|\omega-\sqrt{2}|-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln|\omega+\sqrt{2}|+c=$

$\omega+\ln\left|\frac{\omega+1}{\omega-1}\right|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\omega-\sqrt{2}}{\omega+\sqrt{2}}\right|+c$

## Εφαρμογή 32

Υπολογίστε τα **α)** $\int \eta\mu^5 x\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\ dx$ **β)** $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx$ **γ)** $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x}dx$

**α)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=\omega$. Άρα, $\int \eta\mu^5 x\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\ dx = \int \eta\mu^4 x\cdot \eta\mu x\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\ dx=$

$$-\int\left(\eta\mu^2 x\right)^2\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\ d\left(\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$-\int\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\ d\left(\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$-\int(1-\omega^2)^2\sqrt[3]{\omega}\ d\omega=$$

$$-\int(1-2\omega^2+\omega^4)\omega^{1/3}\ d\omega=$$

$$-\int\omega^{1/3}d\omega+2\int\omega^{7/3}d\omega-\int\omega^{13/3}d\omega=$$

$$\frac{\omega^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1}+2\frac{\omega^{7/3+1}}{\frac{7}{3}+1}-\frac{\omega^{13/3+1}}{\frac{13}{3}+1}+c=$$

$$\frac{-3}{4}\omega^{4/3}+\frac{4}{3}\omega^{10/3}-\frac{16}{3}\omega^{16/3}+c=$$

$$\frac{-3}{4}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^{10}x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^{16}x}+c$$

**β)** Είναι $\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx=\int\frac{dx}{\eta\mu^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=$

$$\int\frac{dx}{\left[2\eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^3}=$$

$$\frac{1}{2^3}\int\frac{dx}{\eta\mu^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{1}{\eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)^3}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)^3}dx=$$

$$\frac{1}{8}\int\left[1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{3/2}\frac{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}dx=$$

$$\frac{2}{8}\int\frac{\left[1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{3/2}\left[1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{1/2}}{\left[\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{3/2}}\ d\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{1+2\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\ d\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\int\left[\varepsilon\varphi^{-3}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]d\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon\varphi^{-2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)}{-2}+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2}+c=$$

$$\frac{-1}{8}\frac{1}{\varepsilon\varphi^{-2}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{1}{8}\varepsilon\varphi^{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c$$

**γ)** Είναι $\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x}dx=\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=$

$$\int(1+\varepsilon\varphi^2 x)\,d(\varepsilon\varphi x)=\int d(\varepsilon\varphi x)+\int\varepsilon\varphi^2 x\,d(\varepsilon\varphi x)=\varepsilon\varphi x+\frac{1}{3}\varepsilon\varphi^3 x+c$$

## Εφαρμογή 33

Υπολογίστε τα **α)** $\mathrm{I}=\int\frac{3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x}dx$ **β)** $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{1+3\sigma\upsilon\nu^2 x}$

**α)** $3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x=\alpha(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)+\beta(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)'$

$\Leftrightarrow 3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x=a(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)+\beta(2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x=(2a-3\beta)\ \eta\mu x+(3a+2\beta)\ \sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\begin{cases}3=2a-3\beta\\2=3a+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{12}{13}\\\beta=-\frac{5}{13}\end{cases}$$

Άρα, $I=\int\frac{\frac{12}{13}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)-\frac{5}{13}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)'}{2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x}dx=$

$$\frac{12}{13}\int\frac{2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x}dx-\frac{5}{13}\int\frac{(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)'}{2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x}dx=$$

$$\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\int\frac{d(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)}{2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x|+c$$

**β)** Είναι $\int\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+3}dx=$

$$\int\frac{d(\varepsilon\varphi x)}{1+\varepsilon\varphi^2 x+3}=$$

$$\int\frac{d(\varepsilon\varphi x)}{\varepsilon\varphi^2 x+4}=$$

$$\int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{4\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right)^2+1}=$$

$$\frac{2}{4}\int \frac{d\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right)}{\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right)^2+1}=$$

$$\frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right)+c$$

### Εφαρμογή 34

Υπολογίστε τα **α)** $\mathrm{I}=\int \frac{1}{3\eta\mu^2 x+5\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ **β)** $\mathrm{I}=\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x+3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x}$

**α)** Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με το $\sigma\upsilon\nu^2 x$ Έχω $\mathrm{I}=\int \frac{1}{3\eta\mu^2 x+5\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=$

$$\int \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{3\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+5}dx=$$

$$\int \frac{1}{3\varepsilon\varphi^2 x+5}d(\varepsilon\varphi x)=$$

$$\int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{5\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right)^2+1\right]}=$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right)^2+1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{15}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right)+c$$

**β)** Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με το $\sigma\upsilon\nu^2 x$ .Έχω

$$\mathrm{I}=\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x+3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\int \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\varepsilon\varphi^2 x+3\varepsilon\varphi x-1}dx=$$

$$\int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{\varepsilon\varphi^2 x+3\varepsilon\varphi x-1}=$$

$$\int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{\left[\varepsilon\varphi x-\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\right]\left[\varepsilon\varphi x-\left(-\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\right]}=$$

$$4\int \frac{d\varepsilon\varphi x}{(2\varepsilon\varphi x+3-\sqrt{13})(2\varepsilon\varphi x+3+\sqrt{13})}$$

Θέτω $\varepsilon\varphi x=\omega$, οπότε $\mathrm{I}=4\int \frac{d\omega}{(2\omega+3-\sqrt{13})(2\omega+3+\sqrt{13})}$

Είναι $\frac{1}{(2\omega+3-\sqrt{13})(2\omega+3+\sqrt{13})}=\frac{A}{2\omega+3-\sqrt{13}}+\frac{B}{2\omega+3+\sqrt{13}}\Rightarrow$

$A=\frac{1}{2\sqrt{13}},B=\frac{-1}{2\sqrt{13}}$ Συνεπώς,

$$I=\frac{2}{\sqrt{13}}\int \frac{d\omega}{2\omega+3-\sqrt{13}}-\frac{2}{\sqrt{13}}\int \frac{d\omega}{2\omega+3+\sqrt{13}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\int \frac{d(\omega+3-\sqrt{13})}{2\omega+3-\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{13}}\int \frac{d(2\omega+3+\sqrt{13})}{2\omega+3+\sqrt{13}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|2\omega+3-\sqrt{13}\right|-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|2\omega+3+\sqrt{13}\right||+c=$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\omega+3-\sqrt{13}}{2\omega+3+\sqrt{13}}\right|+c=$$

Θέτω $\omega=\varepsilon\varphi x$, οπότε $I=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\varepsilon\varphi+3-\sqrt{13}}{2\varepsilon\varphi+3+\sqrt{13}}\right|+c$

## Εφαρμογή 35

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int \frac{dx}{(2-\eta\mu x)(3-\eta\mu x)}$ **β)** $\int \sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu(2x)\;dx$

**α)** Είναι $I=\frac{1}{(2-\eta\mu x)(3-\eta\mu x)}=\frac{1}{2-\eta\mu x}-\frac{1}{3-\eta\mu x}$ Άρα, $I=\int \frac{dx}{2-\eta\mu x}-\int \frac{dx}{3-\eta\mu x}$

- Θα υπολογίσω το $\int \frac{dx}{2-\eta\mu x}$. Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\omega$ Είναι $\eta\mu x=\frac{2\omega}{1+\omega^2}$ και

$dx=\frac{2d\omega}{1+\omega^2}$. Άρα, $\int \frac{dx}{2-\eta\mu x}=$

$$\int \frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{2-\frac{2\omega}{1+\omega^2}}=$$

$$\int \frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{2+2\omega^2-2\omega}{1+\omega^2}}=$$

$$\int \frac{1}{\omega^2-\omega+1}d\omega=$$
$$\int \frac{d\omega}{\left(\omega-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$
$$\int \frac{d\omega}{\frac{3}{4}\left[\left[\frac{\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}\right]^2+1\right]}=$$
$$\frac{4\sqrt{3}}{6}\int \frac{d\left[\frac{(\omega-1/2)\cdot 2}{\sqrt{3}}\right]}{\left[\frac{(\omega-1/2)\cdot 2}{\sqrt{3}}\right]^2+1}=$$
$$\frac{4\sqrt{3}}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{(\omega-1/2)\cdot 2}{\sqrt{3}/2}+c=$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2\omega-1}{\sqrt{3}}\right)+c=$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

• Το $\int\frac{dx}{3-\eta\mu x}$ υπολογίζεται ομοίως και είναι $\int\frac{dx}{3-\eta\mu x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{3\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\sqrt{2}}+c$

Άρα, $I=\frac{2}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{3\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\sqrt{2}}+c$

**β)** $\int \sigma\upsilon\nu^3x\cdot\eta\mu(2x)dx=\int\sigma\upsilon\nu^3x\cdot 2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\ dx=$

$2\int\sigma\upsilon\nu^4x\eta\mu x dx=\int\sigma\upsilon\nu^4x\ d(\sigma\upsilon\nu x)=\frac{-2}{5}\sigma\upsilon\nu^5x+c$

### Εφαρμογή 36

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\frac{\eta\mu(2x)}{\sqrt{4\eta\mu^2x\left(9-\eta\mu^2x\right)}}dx$ **β)** $I=\int\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

**α)** Θέτω $\omega=\eta\mu^2x\Rightarrow d\omega=(\eta\mu^2x)'dx\Rightarrow$

$d\omega=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\ dx\Rightarrow$

$d\omega=\eta\mu(2x)\ dx$

Άρα, $I=\int \frac{d\omega}{\sqrt{4\omega(9-\omega)}}=\frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(9-\omega)}}$. Θέτω $\sqrt{\omega(9-\omega)}=\omega z$ οπότε

$\sqrt{\frac{9-\omega}{\omega}}=z \Rightarrow \frac{9-\omega}{\omega}=z^2 \Rightarrow 9-\omega=z^2\omega \Rightarrow 9=(z^2+1)\omega \Rightarrow \omega=\frac{9}{z^2+1}$ άρα,

$d\omega=\left(\frac{9}{z^2+1}\right)' dx=9\frac{-2z}{(z^2+1)^2}dz$ οπότε

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{9\cdot \frac{-2z}{(z^2+1)^2}}{\frac{9z}{z^2+1}}dz=-\int \frac{1}{z^2+1}dz=-\tau o\xi\varepsilon\varphi z+c$$

Από $z=\sqrt{\frac{\omega(9-\omega)}{\omega^2}}=\frac{\sqrt{\eta\mu^2 x(9-\eta\mu^2 x)}}{\eta\mu^4 x}=\frac{\sqrt{9-\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}$

προκύπτει $I=-\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{\frac{9-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}}+c$

**β)** $I=\int \tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx=\int x'\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx=$

$x\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\int x\left[\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right]' dx=$

$x\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\frac{1}{2}\int x\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx=$

$x\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$

• Θα υπολογίσω το $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$. Θέτω $t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=\left(t^2\right)' dt \Rightarrow dx=2tdt$.

Άρα, $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=\int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt=2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int\left[1-\frac{1}{t^2+1}\right]dt=2\int dt-2\int \frac{1}{t^2+1}dt=$

$2t-2\tau o\xi\varepsilon\varphi t+c=2\sqrt{x}-2\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{x}+c.$

Άρα, $I=x\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{x}+c$

### Εφαρμογή 37

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int(\sigma\upsilon\nu+\eta\mu x)\sqrt{\sigma\upsilon\nu-\eta\mu x}dx$ **β)** $I=\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi x\cdot\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu(2x)}}$

**α)** Θέτω $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=\omega \Rightarrow d\omega=(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'dx=-(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx$

Άρα, $I=-\int\sqrt{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}\left[-(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\right]dx=$

$$-\int \sqrt{\omega d\omega} = -\int \omega^{1/2} d\omega = -\frac{\omega^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c =$$

$$\frac{-2}{3}\omega^{3/2} + c = \frac{-2}{3}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^{3/2} + c$$

**β)** Είναι $I = \int \frac{dx}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\sqrt[3]{1-2\eta\mu^2 x}} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x\ dx}{\eta\mu x\sqrt[3]{1-2\eta\mu^2 x}} = \int \frac{d(\eta\mu x)}{\eta\mu x\sqrt[3]{1-2\eta\mu^2 x}}$

Θέτω $\eta\mu x = t$ οπότε $I = \int \frac{dt}{t\sqrt[3]{1-2t^2}}$

Θέτω $t^2 = z$ οπότε $t = \sqrt{z} \Rightarrow dt = \left(\sqrt{z}\right)' dz \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$

Άρα, $I = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{z}} dz}{\sqrt{z}\sqrt[3]{1-2z}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt[3]{1-2z}}$

Θέτω $\sqrt[3]{1-2z} = \omega \Rightarrow 1-2z = \omega^3 \Rightarrow z = \frac{1-\omega^3}{2} \Rightarrow dz = \left(\frac{1-\omega^3}{2}\right)' d\omega \Rightarrow dz = \frac{-3}{2}\omega^2 d\omega$

Άρα, $I = \frac{1}{2}\int \frac{-\frac{3}{2}\omega^2 d\omega}{\frac{1-\omega^3}{2}\omega} = \frac{-3}{2}\int \frac{\omega}{1-\omega^3} d\omega =$

$$\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{\omega-1} - \frac{\omega-1}{\omega^2+\omega+1}\right] d\omega =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\omega-1\right)}{\omega-1} - \frac{1}{2}\int \frac{\omega-1}{\omega^2+\omega+1} d\omega =$$

$$\frac{1}{2}\ln|\omega-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2\omega+1-3}{\omega^2+\omega+1} d\omega =$$

$$\frac{1}{2}\ln|\omega-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2\omega+1}{\omega^2+\omega+1} d\omega + \frac{3}{4}\int \frac{d\omega}{\omega^2+\omega+1} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|\omega-1| - \frac{1}{4}\int \frac{d(\omega^2+\omega+1)}{\omega^2+\omega+1} + \frac{3}{4}\cdot \frac{d\omega}{\left(\omega+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|\omega-1| - \frac{1}{4}\ln(\omega^2+\omega+1) + \frac{3}{4}\int \frac{d\omega}{\frac{3}{4}\left[\left[\frac{\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}\right]^2 + 1\right]} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|\omega-1|-\frac{1}{4}\ln(\omega^2+\omega+1)+\frac{\sqrt{3}}{4}\int\frac{d\omega\frac{(\omega+1/2)\cdot 2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}\right]^2+1}=$$

$$\frac{1}{2}\ln|\omega-1|-\frac{1}{4}\ln(\omega^2+\omega+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}+c$$

Όπου $\omega=\sqrt[3]{1-2z}=\sqrt[3]{1-2t^2}=\sqrt[3]{1-2\eta\mu^2 x}=\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu 2x}.$ Άρα,

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu(2x)}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[3]{(\sigma\upsilon\nu(2x))^2}+\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu(2x)}+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu(2x)}+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

## Εφαρμογή 38

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\sqrt{\varepsilon\varphi x}dx$ **β)** $I=\int\sqrt{\sigma\varphi x}\,dx$

**α)** Θέτω $\sqrt{\varepsilon\varphi x}=t\Rightarrow\varepsilon\varphi x=t^2\Rightarrow x=\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(t^2\right)\Rightarrow$

$dx=\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(t^2\right)\right)'dt\Rightarrow dx=\frac{2t}{1+t^4}dt$ Άρα, $I=2\int\frac{t^2}{1+t^4}dt$ Είναι

$$\frac{t^2}{1+t^4}=\frac{t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}=\frac{At+B}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{\Gamma t+\Delta}{t^2+\sqrt{2}t+1}\Rightarrow$$

$$t^2=(At+B)(t^2+\sqrt{2}t+1)+(\Gamma t+\Delta)(t^2-\sqrt{2}t+1)\Rightarrow\left(A=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad B=0,\quad \Gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \Delta=0\right)$$

Έτσι είναι $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dt=$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{tdt}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{tdt}{t^2+\sqrt{2}t+1}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2t-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int\frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(t^2-\sqrt{2}t+1)}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\int\frac{dt}{2\cdot\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(t^2+\sqrt{2}t+1)}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\int\frac{dt}{2\cdot\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2-\sqrt{2}t+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}t-1\right)}{\left(\sqrt{2}t-1\right)^2+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}t-1\right)}{\left(\sqrt{2}t-1\right)^2+1}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{2}t-1\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{2}t+1\right)+c$$

όπου $t=\sqrt{\varepsilon\varphi x}$

**β)** Θέτω $\sqrt{\sigma\varphi x}=t \Leftrightarrow \sigma\varphi x=t^2 \Leftrightarrow x=\tau o\xi\sigma\varphi t^2 \Leftrightarrow dx=\left(\tau o\xi\sigma\varphi t^2\right)' dt \Rightarrow dx=\dfrac{-2t}{1+t^4}dt$

Άρα, $I=-\int\dfrac{2t}{1+t^4}dt=-2\int\dfrac{t^2}{1+t^4}dt$ Παρατηρώ ότι το ολοκλήρωμα αυτό διαφέρει από το ολοκλήρωμα της προηγούμενης άσκησης ως προς το μείον.

## Εφαρμογή 39

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\dfrac{dx}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}$ **β)** $I=\int\dfrac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu^3 x}dx$

**α)** Είναι • $\eta\mu(3x)=3\,\eta\mu x-4\eta\mu^3 x$ και

• $\sigma\upsilon\nu(3x)=4\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu x$

Άρα, $4(\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x)=$

$3(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+\left[\sigma\upsilon\nu(3x)-\eta\mu(3x)\right]=$

$3\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{2}\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-(3x)\right)$

Θέτω $\dfrac{\pi}{4}-x=y$ άρα, $4(\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x)=$

$3\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu y-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(3y)=$

$\sqrt{2}(3\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu(3y))=$

$2\sqrt{2}(3\sigma\upsilon\nu y-2\sigma\upsilon\nu^3 y)=$

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sigma\upsilon\nu y}\left[3\sigma\upsilon\nu^2 y-2\sigma\upsilon\nu^4 y\right]=$

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sigma\upsilon\nu y}\left[3(1-\eta\mu^2 \text{y})-2(1-\eta\mu^2 \text{y})^2\right]=$

$\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sigma\upsilon\nu y}(2\eta\mu^4 y-\eta\mu^2 y-1)$

Άρα, $I=\sqrt{2}\int\dfrac{\sigma\upsilon\nu y\; d(\eta\mu y)}{2\eta\mu^4 y-\eta\mu^2 y-1}=\sqrt{2}\int\dfrac{d(\eta\mu y)}{2\eta\mu^4 y-\eta\mu^2 y-1}$

Θέτω $t=\eta\mu y$ οπότε $\sqrt{2}\int\dfrac{dt}{2t^4-t^2-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\int\dfrac{dt}{t^4-\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}}=$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\int\left(\dfrac{A}{t^2-1}+\dfrac{Bt+\Gamma}{t^2+\dfrac{1}{2}}\right)dt=$

$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\int\left(\dfrac{1}{t^2-t}-\dfrac{1}{t^2+\dfrac{1}{2}}\right)dt=$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\int\frac{dt}{t^2-t}-\frac{\sqrt{2}}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\int\frac{dt}{t^2-t}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\int\frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2+1}$$

Υπολογισμός των $\int\frac{dt}{t^2-t}$ και $\int\frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2+1}$

- $\int\frac{dt}{t^2-t}=$

$$\frac{-1}{2}\int\frac{1}{t+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}dt=$$

$$\frac{-1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln|t-1|+c$$

- $\int\frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2+1}=$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{2}t+c$$

**β)** Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=t\Rightarrow-\eta\mu x=dt$ Άρα, I=$\int\frac{\sigma\upsilon\nu^4x\cdot\eta\mu x}{\eta\mu^4x}$dx=

$$-\int\frac{t^4}{(1-t^2)^2}dt=$$

$$-\int\left[\frac{t}{(1-t^2)^2}\right]t^3dt=$$

$$-\int\left[\frac{1}{2(1-t^2)}\right]'t^3dt=$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)}+\int\frac{3t^2}{2(1-t^2)}dt=$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=$$

$$\frac{t^3}{2(1-t^2)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2-1+1}{1-t^2}dt=$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)}-\frac{3}{2}\int\frac{1-t^2}{1-t^2}dt+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\int\left[\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}\right]dt=$$

$$\frac{t^3}{2(1-t^2)}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)}-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\ln|1-t|+\frac{3}{4}\ln|1+t|+c$$

$$-\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{2\eta\mu^2 x}-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right|+c$$

**Εφαρμογή 40**

Υπολογίστε τα **α)** $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\eta\mu x(2+\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x)}$ **β)** $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\eta\mu x(2\sigma\upsilon\nu^2 x-1)}$

Θέτω εφ$\left(\frac{x}{2}\right)=t$ οπότε $\eta\mu x=\frac{2t}{1+t^2}$ $,\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ Είναι $x=2\tau o\xi\varepsilon\varphi t$ $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Άρα, $I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=$

$$\int\frac{(1+t^2)}{t(t^2-4t+3)}dt=$$

$$\int\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}dt=$$

$$\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{t-1}\right)dt=$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+c=$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-3\right|-\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+c$$

**β)** Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=t\Rightarrow dx=-\eta\mu x\ dt\Rightarrow dx=\frac{-1}{\eta\mu x}dt=\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Είναι $\eta\mu x=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=\sqrt{1-t^2}$

Άρα, $\mathrm{I}=\int\frac{-1}{(1-t^2)(2t^2-1)}dt=$

$$\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}=$$

$$\int\frac{(2-2t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)}dt=$$

$$2\int\frac{1}{1-2t^2}dt-\int\frac{1}{1-t^2}dt=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x}{1-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right|+c$$

### Εφαρμογή 41

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\eta\mu^{11}x\cdot\sigma\upsilon\nu x}}$ **β)** $\int\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu^2 x}dx$

**α)** $I=\int\eta\mu^{\frac{-11}{3}}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\frac{-1}{3}}x\ \mathrm{d}x$ Είναι $\frac{-11}{3}-\frac{1}{3}=\frac{-12}{3}=-4$ αριθμός άρτιος. Θέτω

$$\varepsilon\varphi x=t\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi x)'dx=dt\Leftrightarrow\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=dt$$

Έχω $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\eta\mu^{11}x\cdot\sigma\upsilon\nu x}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{\eta\mu^{11}x}{\sigma\upsilon\nu^{11}x}\sigma\upsilon\nu^{12}x}}=$

$$\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^4 x\cdot\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^{11}x}}=$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^{11}x}}\cdot\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\int(1+\varepsilon\varphi^2 x)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^{11}x}}\cdot\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\int\left(1+t^2\right)\frac{1}{\sqrt[3]{t^{11}}}dt=\int(1+t^2)t^{-11/3}dt=$$

$$\int\left(t^{-11/3}+t^{-5/3}\right)dt=$$

$$\frac{-3}{8}t^{-8/3}-\frac{3}{2}t^{-2/3}+c=\frac{3(1+4\varepsilon\varphi^2 x)}{8\varepsilon\varphi^2 x\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^2 x}}+c$$

**β)** Είναι $\int\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu^2 x}\ \mathrm{d}x=\int\frac{(1-\eta\mu^2 x)^2}{\eta\mu^2 x}\ \mathrm{d}x=$

$$\int\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-2+\eta\mu^2 x\right)\mathrm{d}x=$$

$$-\sigma\varphi x-2x+\frac{1}{2}\int 2\eta\mu^2 x\ \mathrm{d}x=$$

$$-\sigma\varphi x-2x+\frac{1}{2}\int(1-\sigma\upsilon\nu(2x))\ \mathrm{d}x=$$

$$-\sigma\varphi x-2x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int\sigma\upsilon\nu(2x)\ \mathrm{d}(2x)=$$

$$-\sigma\varphi\mathrm{x}-\frac{3}{2}x-\frac{\eta\mu(2x)}{4}+\mathrm{c}$$

**Εφαρμογή 42**

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int \frac{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$ **β)** $I=\int \frac{2\varepsilon\varphi x+3}{\eta\mu^2 x+2\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

**α)** Θέτω $t=\varepsilon\varphi x\Rightarrow dt=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ Άρα, $I=\int \frac{\varepsilon\varphi^2 x-\sigma\upsilon\nu^4 x}{\varepsilon\varphi x+1}\cdot\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$

$$\int \frac{t^2 dt}{(t+1)(t^2+1)^2}=$$

$$\int\left[\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+\Gamma}{t^2+1}+\frac{\Delta t+\mathrm{E}}{\left(t^2+1\right)^2}\right]dt=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}-\frac{1}{4}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{\left(t^2+1\right)^2}dt=$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right|-\frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2}+c=$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\varepsilon\varphi x}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}\right|-\frac{1}{4}\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}+c$$

**β)** Θέτω $\varepsilon\varphi x=t\Leftrightarrow \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=dt$ Άρα, $I=\int\frac{2\varepsilon\varphi x+3}{\eta\mu^2 x+2\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=$

$$\int\frac{(2\varepsilon\varphi x+3)\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\varepsilon\varphi^2 x+2}=$$

$$\int\frac{2t+3}{t^2+2}dt=\int\frac{2t}{t^2+2}dt+3\int\frac{1}{t^2+2}dt=$$

$$\int\frac{d\left(t^2+2\right)}{t^2+2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$\ln(t^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c=$$

$$\ln(\varepsilon\varphi^2 x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

### 7.1.17 Ολοκληρώματα της μορφής $\int R\left(e^{ax}\right)dx$ όπου $R$ ρητή συνάρτηση του $e^{ax}$

Τα ολοκληρώματα αυτά, υπολογίζονται με την αντικατάσταση $e^{ax}=\omega$, οπότε $a\cdot e^{ax}dx=d\omega\Leftrightarrow dx=\frac{d\omega}{a\cdot e^{ax}}=\frac{d\omega}{a\cdot\omega}$

**Εφαρμογή 43**

Υπολογίστε τα **α)** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ **β)** $\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}-e^x-2}dx$ **γ)** $I=\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3e^{2x}-4}}$

**α)** Θέτω $e^x=\omega \Leftrightarrow x=\ln\omega \Leftrightarrow dx=(1n\omega)'\,d\omega=\frac{d\omega}{\omega}$

Άρα, $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=$

$\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx=$

$\int \frac{\omega}{1+\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}d\omega=$

$\int \frac{1}{1+\omega^2}d\omega=$

$\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega+c=\tau o\xi\varepsilon\varphi(e^x)+c$

**β)** Θέτω $e^x=\omega \Leftrightarrow (e^x)'dx=d\omega \Leftrightarrow e^x dx=d\omega \Leftrightarrow\ dx=\frac{d\omega}{\omega}$

Άρα, $\int \frac{\omega^2+4\omega}{\omega^2-\omega-2}\cdot\frac{d\omega}{\omega}=$

$\int \frac{\omega+4}{(\omega+1)(\omega-2)}d\omega=$

$\int \frac{A}{\omega+1}\,d\omega+\frac{B\,d\omega}{\omega-2}=$

$-\int \frac{d\omega}{\omega+1}+2\int \frac{d\omega}{\omega-2}=$

$-\ln|1+\omega|+2\ln|\omega-2|+c=$

$-\ln(1+e^x)+2\ln|e^x-2|+c=$

$\ln\frac{(e^x-2)^2}{1+e^x}+c$

**γ)** Θέτω $e^x=\frac{2}{\sqrt{3}}\omega \Leftrightarrow (e^x)'dx=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\omega\right)'d\omega \Leftrightarrow e^x dx=\frac{2}{\sqrt{3}}d\omega$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\omega\ dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\ d\omega \Rightarrow dx=\frac{d\omega}{\omega}$

Άρα, $I=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\omega d\omega}{\sqrt{3\frac{4}{3}\omega^2-4\omega}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2-1}}$

Θέτω $\omega=\sigma\upsilon\nu t \Leftrightarrow d\omega=\eta\mu t\ dt$

Άρα $I=\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\eta\mu t\, dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\eta\mu t}{\eta\mu t}dt=$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}t+c=\frac{\sqrt{3}}{3}\arg ch\omega+c=$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\omega+\sqrt{\omega^2-1}\right|+c=$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^x+\frac{1}{2}\sqrt{3e^{2x}-4}\right)+c$$

**Εφαρμογή 44**

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ **β)** $I=\int\frac{e^{x/\sqrt{2}}-1}{e^{x\sqrt{2}}+1}dx$ **γ)** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$

**α)** Θέτω $e^{2x}=\omega\Rightarrow\left(e^{2x}\right)'dx=\omega' d\omega\Rightarrow 2e^{2x}dx=d\omega\Leftrightarrow dx=\dfrac{d\omega}{2\omega}$

Άρα, $I=\int\frac{\omega-1}{\omega+1}\cdot\frac{d\omega}{2\omega}=$
$$\frac{1}{2}\int\frac{\omega-1}{\omega(\omega+1)}d\omega=$$
$$\frac{1}{2}\int\Big(-\frac{1}{\omega}+\frac{2}{\omega+1}\Big)d\omega=$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\omega}d\omega+\frac{2}{2}\int\frac{1}{\omega+1}d\omega=$$
$$\frac{-1}{2}\ln|\omega|+\ln|\omega+1|+c=$$
$$\frac{-1}{2}\ln e^{2x}+\ln\left(e^{2x}+1\right)+c=$$
$$-x+\ln\left(e^{2x}+1\right)+c$$

**β)** Θέτω $e^{x/\sqrt{2}}=\omega\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\ln\omega\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ln\omega\Leftrightarrow dx=(\sqrt{2}\ln\omega)'d\omega=\sqrt{2}\dfrac{d\omega}{\omega}$

Άρα, $I=\sqrt{2}\int\frac{\omega^2-1}{\omega\left(\omega^2+1\right)}d\omega=$
$$\sqrt{2}\int\Big(\frac{2\omega}{\omega^2+1}-\frac{1}{\omega}\Big)d\omega=$$
$$\sqrt{2}\int\frac{2\omega}{\omega^2+1}d\omega-\sqrt{2}\int\frac{d\omega}{\omega}=$$
$$\sqrt{2}\int\frac{d(\omega^2+1)}{\omega^2+1}-\sqrt{2}\int\frac{d\omega}{\omega}=$$
$$\sqrt{2}\ln(\omega^2+1)-\sqrt{2}\ln\omega+c=$$
$$\sqrt{2}\ln\frac{\omega^2+1}{\omega}+c=$$
$$\sqrt{2}\ln\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)+c=$$

$$\sqrt{2}\ln\left(e^{x/\sqrt{2}}+\frac{1}{e^{x/\sqrt{2}}}\right)+c$$

**γ)** Θέτω $e^x=\omega \Leftrightarrow x=\ln\omega \Leftrightarrow dx=(\ln\omega)'d\omega=\frac{1}{\omega}d\omega$

Άρα, $I=\int\frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+4\omega+1}}d\omega$

Θέτω $\sqrt{\omega^2+4\omega+1}=\omega-z \Leftrightarrow$

$z=\omega-\sqrt{\omega^2+4\omega+1} \Leftrightarrow$

$z^2=\omega^2+\left(\omega^2+4\omega+1\right)-2\omega\sqrt{\omega^2+4\omega+1}=$

$2\omega z+4\omega+1$

Άρα, $z^2-1=2\omega(z+2) \Leftrightarrow \omega=\frac{z^2-1}{2(z+2)} \Leftrightarrow$

$$d\omega=\left(\frac{z^2-1}{2(z+2)}\right)'dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2+4z+1}{(z+2)^2}dz$$

Άρα, $I=\int\frac{\frac{z^4+4z+1}{2\left(z+2\right)^2}}{\frac{z^2-1}{2\left(z+2\right)}\frac{-z^2-4z-1}{2\left(z+2\right)}}dz=$

$-2\int\frac{dz}{z^2-1}=-2\int\frac{1}{z^2-1}dz=$

$-2\int\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z+1\right)}dz$

Είναι $\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z+1\right)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1} \Leftrightarrow 1=A(z+1)+B(z-1) \Leftrightarrow$

$$1=(A+B)z+(A-B)=1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} A+B=0 \\ A-B=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{-1}{2} \end{matrix}\right\}$$

Άρα, $I=-2\int\frac{\frac{1}{2}}{z-1}dz-2\int\frac{-\frac{1}{2}}{z+1}dz=$

$-\int\frac{dz}{z-1}+\int\frac{dz}{z+1}=$

$-\ln|z-1|+\ln|z+1|+c=$

$\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|+c$

Από $z=\omega-\sqrt{\omega^2+4\omega+1}=e^x-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}$ είναι $I=\ln\left|\frac{e^x-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}+1}{e^x-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}-1}\right|+c$

**Εφαρμογή 45**

Υπολογίστε τα **α)** $I=\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$ **β)** $I=\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ **γ)** $I=\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}dx$

**α)** Θέτω $e^x=\omega \Leftrightarrow e^x dx=d\omega \Leftrightarrow dx=\frac{d\omega}{e^x}=\frac{d\omega}{\omega}$

Άρα, $I=\int \frac{\omega+1}{\omega^2+1}\frac{d\omega}{\omega}=$

$\int \frac{\omega+1}{\omega(\omega^2+1)}d\omega=$

$\int\left(\frac{A}{\omega}+\frac{B\omega+\Gamma}{\omega^2+1}\right)d\omega=$

$\int\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\omega-1}{\omega^2+1}\right)d\omega=$

$\frac{1}{\omega}\int d\omega-\frac{\omega}{\omega^2+1}\int d\omega+\frac{1}{\omega^2+1}\int d\omega=$

$\ln|\omega|-\frac{1}{2}\int\frac{2\omega d\omega}{\omega^2+1}+\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega=$

$\ln|\omega|-\frac{1}{2}\ln\left(\omega^2+1\right)+\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega+c=$

$\ln e^x|\omega|-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega^x+c=$

$x-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega^x+c$

**β)** Θέτω $\sqrt[4]{e^x+1}=\omega \Rightarrow e^x+1=\omega^4 \Rightarrow e^x=\omega^4-1\Rightarrow$

$\left(e^x\right)'dx=\left(\omega^4-1\right)'d\omega\Rightarrow$

$e^x dx=4\omega^3 d\omega\Rightarrow$

$dx=\frac{4\omega^3 d\omega}{e^x}=\frac{4\omega^3}{\omega^4-1}d\omega$

Άρα, $I=\int\frac{\left(\omega^4-1\right)^2 4\omega^3}{\omega\left(\omega^4-1\right)}d\omega=$

$\int\left(\omega^4-1\right)\omega^2 d\omega=$

$\int\left(4\omega^6-4\omega^2\right)d\omega=$

$4\frac{\omega^7}{7}-4\frac{\omega^3}{3}+c=$

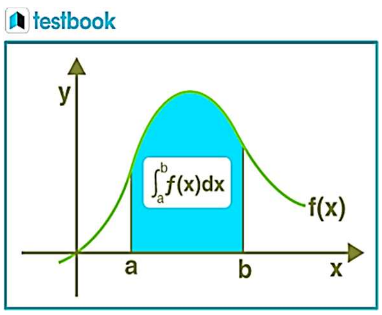
$\frac{4}{7}\left(e^x+1\right)^{7/4}-\frac{4}{3}\left(e^x+1\right)^{3/4}+c$

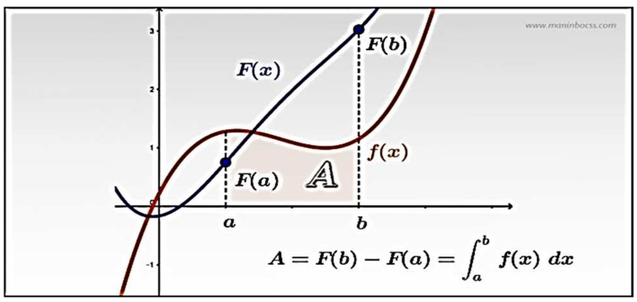
**γ)** Θέτω $e^{2x}=\omega \Leftrightarrow 2e^{2x}dx=d\omega \Leftrightarrow dx=\frac{d\omega}{2\omega}$

$$I=\int\frac{\omega-1}{\omega+3}\frac{d\omega}{2\omega}=$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{\omega-1}{\omega(\omega+3)}d\omega=$$
$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{A}{\omega}+\frac{B}{\omega+3}\right)d\omega=$$
$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{\omega}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\omega+3}\right)d\omega=$$
$$\frac{-1}{6}\int\frac{d\omega}{\omega}+\frac{2}{3}\int\frac{1}{\omega+3}=$$
$$\frac{-1}{6}\ln|\omega|+\frac{2}{3}\ln|\omega+3|+c=$$
$$\frac{-1}{6}\ln e^{2x}+\ln(e^{2x}+3)^{2/3}+c=$$
$$\frac{-1}{3}x+\ln\left(e^{2x}+3\right)^{2/3}+c$$

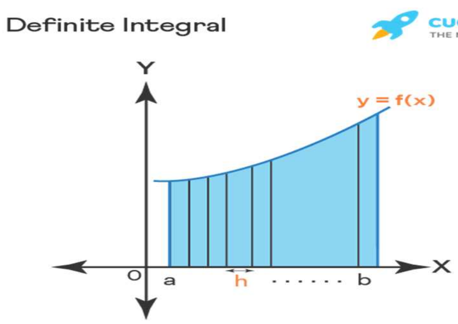
## 7.2 Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης $f$ από το σημείο $a$ ως το σημείο $b$ ονομάζεται η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$, όπου $F$ μία παράγουσα (ή αρχική συνάρτηση) της συνάρτησης $f$ στο διάστημα $[\alpha,\, b]$ και συμβολίζεται ως $\int_a^b f(x)\, dx$



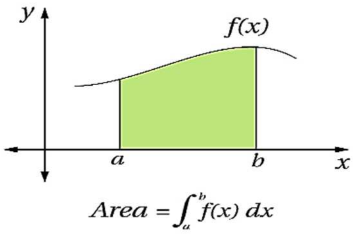




• Το ορισμένο ολοκλήρωμα ορίζεται σε διάστημα $[\alpha,\, b]$ με $a<b$. Τα $a,b$ ονομάζονται άκρα της ολοκλήρωσης.



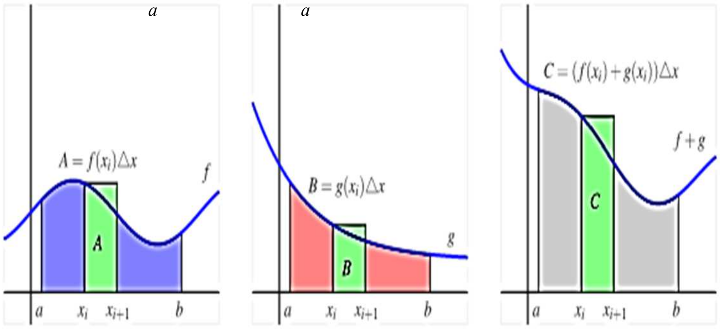
### 7.2.1 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

- Αν η $f$ είναι ορισμένη σε ένα σημείο $\alpha$, τότε $\int_{a}^{\alpha} f(x)dx = 0$



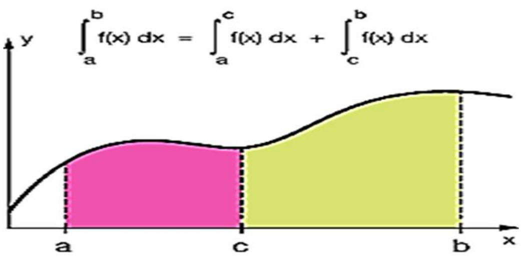

- Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$, τότε $\int_{a}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{a}^{\beta} cf(x)dx = c\int_{a}^{\beta} f(x)dx$
- Αν οι $f, g$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\ b]$, τότε

$$\int_{a}^{b} [f(x)+g(x)]\ dx = \int_{a}^{b} f(x)\ dx + \int_{a}^{b} g(x)\ dx$$

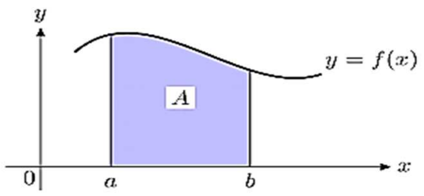



- Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ b]$ και $c \in (\alpha,\ b)$ τότε

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \int_{a}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{b} f(x)\ dx$$

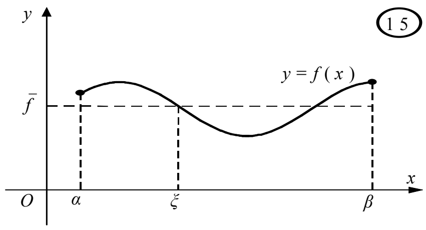


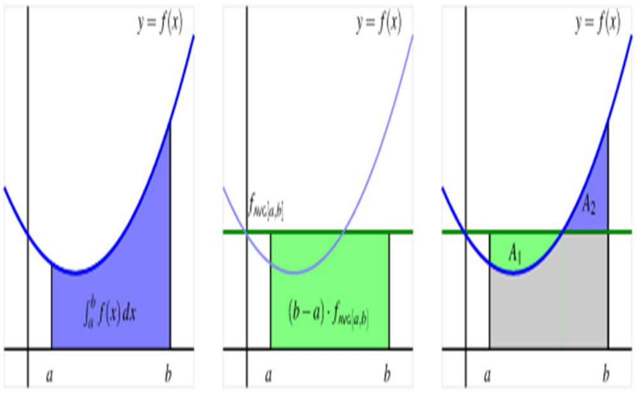

- Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ b]$ και $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [\alpha,\ b]$, τότε $\int_{a}^{b} f(x)\ dx \geq 0$



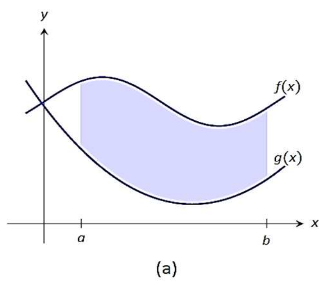

• $1^{o}$ θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ τότε $\exists \xi \in (\alpha,\ \beta)$ έτσι ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$

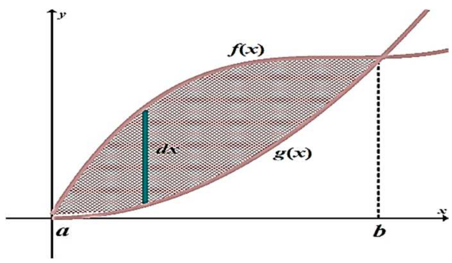


• Αν οι $f, g$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\ b]$ και $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [\alpha,\ b]$, τότε $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq \int_{a}^{b} g(x)dx$




(a)



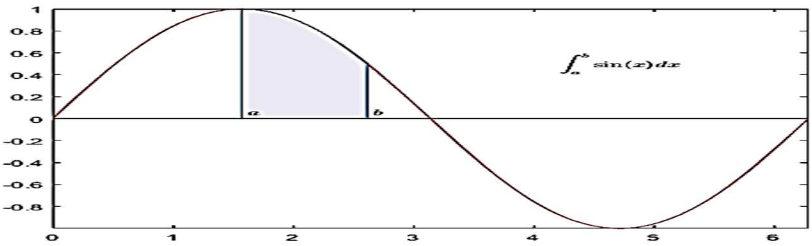

## Εφαρμογή 46

• $\int_{1}^{2} e^{x}\ dx = \left[e^{x}\right]_{1}^{2} = e^{2} - e^{1} = e(e-1)$

- $\int_5^6 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_5^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{5^3}{3}$
- $\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}$
- $\int_0^1 \left(x + e^x\right)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 e^x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} + e^1 - e^0 = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx = \left[sinx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin\left(0^0\right) = 1 - 0 = 1$
- $\int_0^1 \left(x^2 - 5x + 6\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - 5\frac{1^2}{2} + 6\cdot 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 5\frac{0^2}{2} + 6\cdot 0\right) =$

$$\frac{1}{3} - 2,5 + 6 = \frac{1}{3} + 3,5$$

- $\int_0^{\pi} sinx\,dx = \left[-cosx\right]_0^{\pi} = -cos\pi + cos0 = -(-1) + 1 = 2$




## 7.2.2 Υπολογισμός εμβαδών

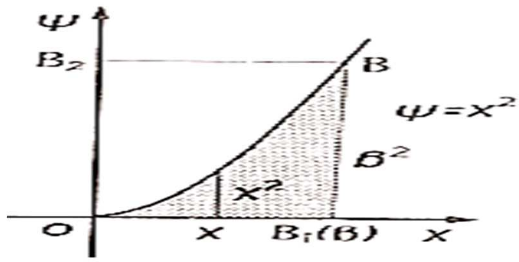
### Ιστορική αναδρομή

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, για να φτάσει στη σημερινή της μορφή, πέρασε δια μέσου των αιωνίων από διάφορα εξελικτικά στάδια. Η γέννηση της έννοιας του ολοκληρώματος τοποθετείται τον $3^{ο}$ π.Χ. αιώνα, οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και ειδικότερα στον Αρχιμήδη (287–212 πΧ).

Η μέθοδος της «εξάντλησης» που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, προκειμένου να προσδιορίσουν τον αριθμό που μετρά το εμβαδό ενός επίπεδου χωρίου, είναι ο πρόδρομος της ολοκλήρωσης. Αυτή τη μέθοδο εφάρμοσε ο Αρχιμήδης ώστε να υπολογίσει το εμβαδό του κύκλου, το εμβαδό του παραβολικού χωρίου και το εμβαδό άλλων περισσότερο πολύπλοκων επίπεδων χωρίων. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο για τον υπολογισμό μιας επίπεδης περιοχής, εγγράφω μέσα σε αυτήν μια κλειστή πολυγωνική γραμμή, που περικλείει το επίπεδο χωρίο του οποίου μπορώ εύκολα να υπολογίζω το εμβαδό. Έτσι, έχω μια πρώτη «με έλλειψη» προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Συνεχίζω όμοια, με την εγγραφή μιας δεύτερης κλειστής πολυγωνικής γραμμής που έχει περισσότερες αλλά μικρότερου μήκους πλευρές, ώστε να έχω μια καλύτερη «με έλλειψη» προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Αυτή η εργασία συνεχίζεται, με σκοπό να «εξαντλήσω» την επίπεδη περιοχή που ζητώ το εμβαδό της. Ο Αρχιμήδης, για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου, θεώρησε αρχικά εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο και είχε μια πρώτη προσέγγιση, μετά κανονικό δωδεκάγωνο κ.ο.κ. για να καταλήξει στο θεώρημα «**Πας κύκλος ίσος εστί τριγώνω ορθογώνιω ου ή μεν εκ του κέντρου ίση μια των περί**

**την ορθήν, ή δε περίμετρος τη βάσει**». Για το παραβολικό χωρίο ΟΒ, ΒΟ ο Αρχιμήδης με τη μέθοδο της «εξάντλησης», απέδειξε το καταπληκτικό για εκείνη την εποχή ότι το εμβαδό του είναι ίσο με το 1/3 του εμβαδού που έχει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $OB_1BB_2$ που η βάση του είναι β και το ύψος του είναι $\beta^2$, δηλαδή

$$\left(\mathrm{OB},\ \mathrm{BO}\right)=\frac{1}{3}\cdot\beta\cdot\beta^2=\frac{\beta^3}{3}$$

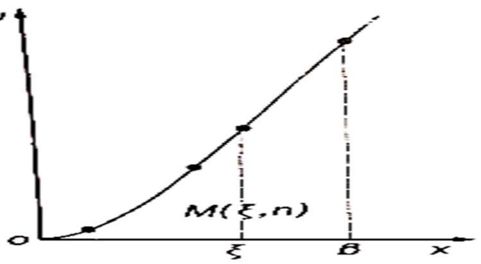



Η μέθοδος της «εξάντλησης», που έδωσε σπουδαία αποτελέσματα την εποχή του Αρχιμήδη, παρέμεινε σχεδόν στο ίδιο σημείο ανάπτυξης από τις αρχές του 16ου αιώνα. Από την περίοδο αυτή και μετά, οι ερευνητές μαθηματικοί της εποχής, έχοντας στη διάθεση τους νέα εκφραστικά μέσα (π.χ. ένα γεωμετρικό πρόβλημα μετατρέπεται σε αλγεβρικό και αντίστροφα, με την εισαγωγή από τον Cartesius των συντεταμένων), αλλά και νέα σύμβολα (π.χ. έχει γίνει αντικατάσταση των ρωμαϊκών αριθμητικών συμβόλων με τα αριθμητικά που χρησιμοποιούμε σήμερα), προχώρησαν στην αναδιατύπωση της παλαιάς μεθόδου και στην προσαρμογή της στα νέα δεδομένα. Έτσι, η μέθοδος της «εξάντλησης» άρχισε να μετασχηματίζεται σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε ολοκληρωτικό λογισμό, έναν ξεχωριστό κλάδο της μαθηματικής επιστήμης, με τον οποίο αντιμετωπίζονται γεωμετρικά προβλήματα εύρεσης εμβαδών, όγκων κτλ. και επιλύονται ποικίλα προβλήματα των άλλων επιστημών. Η αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ολοκληρώματος, έγινε κατά τα μέσα του προπερασμένου αιώνα από τους μαθηματικούς Cauchy(1789–1857) και Riemann(1826–1866). Έκτοτε, οι ερευνητές μαθηματικοί, οι σπουδαιότεροι εκ των οποίων είναι οι Stieltzes, Lebesque ασχολήθηκαν με επεκτάσεις και γενικεύσεις της θεωρίας της ολοκλήρωσης.

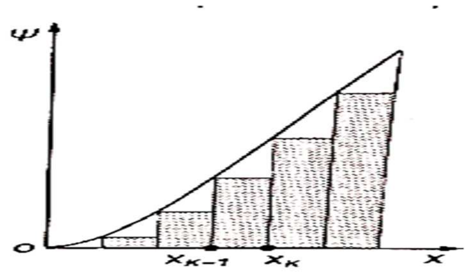
### Υπολογισμός εμβαδού του παραβολικού χωρίου

Είναι χρήσιμο, πριν ορίσω το ορισμένο ολοκλήρωμα και υπολογίσω το εμβαδό του επιπέδου χωρίου με βάση αυτό, να προσέξω μια διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού του παραβολικού χωρίου, που διατηρεί πολλά αρχικά χαρακτηριστικά της μεθόδου του Αρχιμήδη, παρά το ότι οι λεπτομέρειες στους συλλογισμούς δεν είναι ακριβώς οι ίδιες. Έστω το επίπεδο παραβολικό χωρίο που ορίζουν τα σημεία $\mathrm{M}\left(\xi,\ \eta\right)$ με $0\le\xi\le\beta$ και $0\le\eta\le\xi^2$ δηλαδή το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y=x^2$ τον άξονα $xx'$ και την ευθεία $x=\beta$ με $\beta>0$. Αν χωρίσω το διάστημα $\left[0,\ \beta\right]$ σε $\nu$ ίσα υποδιαστήματα με τα διαιρετικά σημεία $x_0=0,\ x_1,\ x_2,...,x_{\kappa-1},x_\kappa,...,x_{\nu-1},x_\nu=\beta$, το πλάτος του κάθε υποδιαστήματος θα είναι $\frac{\beta}{\nu}$, άρα τα διαιρετικά σημεία αντιστοιχούν στις τιμές

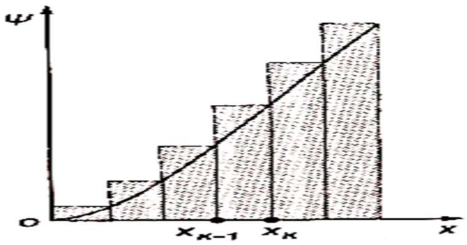
$$x_0=0,\ x_1=\frac{\beta}{\nu},\ x_2=\frac{2\beta}{\nu},...,\ x_{k-1}=\frac{\left(k-1\right)\beta}{\nu},\ x_\nu=\frac{k\beta}{\nu},....,\ x_\nu=\frac{\nu\beta}{\nu}=\beta$$




Σχ. 2α




Σχ. 2β




Σχ. 2γ

Θεωρώ τα ορθογώνια που έχουν βάση τα υποδιαστήματα $\left[x_{k-1},\, x_k\right],\ k=1,\ 2,.....,\nu$ και ύψος το $y_{k-1}=x_{k-1}^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.β) και έτσι έχω μια προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού «με έλλειψη». Όμοια, θεωρώ τα ορθογώνια που έχουν ως βάση τα υποδιαστήματα$\left[x_{k-1},\, x_k\right]$ και ύψος το $y_k=x_k^2,\ k=1,\ 2,...,\nu$ όπως φαίνεται στο σχήμα (2.γ), και έτσι έχω προσέγγιση του ζητουμένου εμβαδού «με υπεροχή». Αν αυξήσω το πλήθος των διαιρετικών σημείων, τότε το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών ορθογωνίων σχ(2.β) αυξάνει παραμένοντας μικρότερο από το ζητούμενο εμβαδό του παραβολικού χωρίου, ενώ το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών ορθογωνίων σχ(2.γ) ελαττώνεται, παραμένοντας μεγαλύτερο από το ζητούμενο εμβαδό. Αν με $\mathrm{E}_k$ συμβολίσω το μέρος του παραβολικού χωρίου που περιορίζεται από τις $x=x_{k-1}$ και $x=x_k$ τότε το $\mathrm{E}_k$ θα είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό του εσωτερικού ορθογωνίου με βάση το $x_k-x_{k-1}=\dfrac{\beta}{\nu}$ και ύψος $y_{k-1}=x_{k-1}^2=\left(k-1\right)^2\dfrac{\beta^2}{\nu^2}$ και μικρότερο από το εμβαδό του εξωτερικού ορθογωνίου με βάση το $x_k-x_{k-1}=\dfrac{\beta}{\nu}$ και το ύψος $y_k=x_k^2=k^2\dfrac{\beta^2}{\nu^2}$

Έτσι, αν $\mathrm{E}=\sum\limits_{k=1}^{\nu}\mathrm{E}_k$ είναι το ζητούμενο εμβαδό, θα έχουμε $\dfrac{\beta^3}{\nu^3}\left(k-1\right)^2<\mathrm{E}_\kappa<\dfrac{\beta^3}{\nu^3}\cdot k^3\quad \forall k\in\mathbb{N}$

Οπότε
$$\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\beta^3}{\nu^3}(k-1)^2<\sum_{k=1}^{\nu}\mathrm{E}_k<\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\beta^3}{\nu^3}k^2\Leftrightarrow\frac{\beta^3}{\nu^3}\sum_{k=1}^{\nu}(k-1)^2<\mathrm{E}<\frac{\beta^3}{\nu^3}\sum_{k=1}^{\nu}k^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{\beta^3}{\nu^3}\cdot\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6}<\mathrm{E}<\frac{\beta^3}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\Leftrightarrow \mathrm{A}_\nu<\mathrm{E}<\mathrm{B}_\nu\quad (\mathbf{1})$$

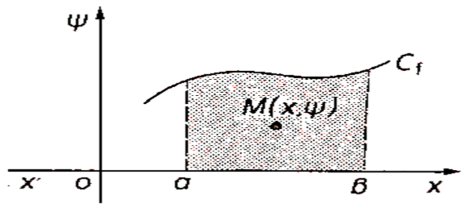
Αν το πλήθος των διαιρετικών σημείων να αυξάνει απεριόριστα δηλαδή αν $\nu\to+\infty$, τότε το πλάτος $d_\nu$, των υποδιαστημάτων τείνει στο μηδέν δηλαδή $d_\nu=\dfrac{\beta}{\nu}\to 0$ και $\lim\mathrm{A}_\nu=\dfrac{\beta^3}{3},\ \lim\mathrm{B}_\nu=\dfrac{\beta^3}{3}$ οπότε η (**1**) δίνει $\mathrm{E}=\dfrac{\beta^3}{3}$

**Εμβαδό επίπεδου χωρίου**

Για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός επίπεδου χωρίου, διακρίνω τις ακόλουθες περιπτώσεις:

**Περίπτωση 1**

Έστω ότι το χωρίο περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$, τον άξονα $xx'$ και τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, όπου $f$ συνεχής στο $[a,\ \beta]$ και $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,\ \beta]$

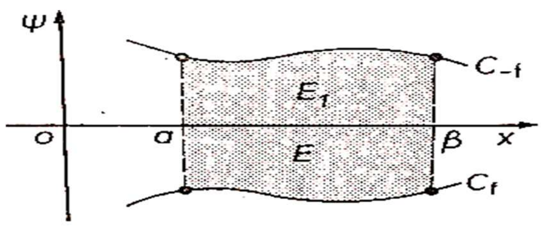


Σχ. 1

Τότε, το εμβαδό Ε αυτού του χωρίου, από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος δίνεται από τον τύπο $E=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ και είναι το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,\ y)$ με συντεταγμένες $(x,\ y)$ τέτοιες ώστε $\left\{\begin{matrix}\alpha\leq x\leq\beta \\ 0\leq y\leq f(x)\end{matrix}\right\}$

**Περίπτωση 2**

Έστω ότι το χωρίο περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$, τον άξονα $xx'$ και τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, όπου $f$ συνεχής στο $[a,\ \beta]$ και $f(x)\leq 0,\ \forall x\in[a,\ \beta]$ Τότε το εμβαδό Ε του χωρίου, από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είναι $E=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

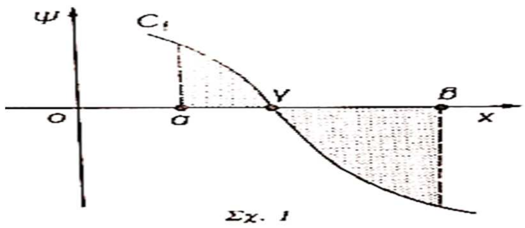


Σχ. 2

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f$, $-f$ έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα $xx'$ έτσι το εμβαδό $\mathrm{E}_1$ που περικλείεται από τις $x=a$, $x=\beta$ του άξονα $xx'$ και την $C_{-f}$ είναι ίσο με το εμβαδό Ε που περικλείεται από τις $x=a$, $x=\beta$, τον άξονα $xx'$ και την $C_f$. Αλλά $-f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,\ \beta]$, άρα, από την $1^{\eta}$ περίπτωση, το εμβαδό $\mathrm{E}_1$ δίνεται με τον τύπο $\mathrm{E}_1=\int_{\alpha}^{\beta} -f(x)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ και επειδή Ε= $\mathrm{E}_1$ έπεται ότι το εμβαδό Ε είναι $E=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ Το επίπεδο χωρίο του οποίου το εμβαδό Ε είναι $E=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ και πρόκειται για το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,\,y)$ με $\left\{\begin{array}{l}\alpha \le x \le \beta \\ f(x) \le y \le 0\end{array}\right\}$

**Περίπτωση 3**

Έστω ότι το χωρίο περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ τον άξονα $xx'$ και τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, όπου $f$ συνεχής στο $[a,\,\beta]$ και η $f$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο $\forall x\in[a,\,\beta]$ Έστω ότι $\exists \gamma\in[a,\,\beta]$ όπου $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a,\,\gamma]$ και $f(x)\le 0,\ \forall x\in[\gamma,\,\beta\,]$ Από την 1η και 2η περίπτωση, το εμβαδό Ε του επιπέδου χωρίου είναι $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx+\int_{\gamma}^{\beta} -f(x)\,dx$





Σχ. 1

Αφού $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a,\,\gamma]$, είναι $|f(x)|=f(x)$ στο $[a,\,\gamma]$ και αφού $f(x)\le 0,\ \forall x\in[\gamma,\,\beta\,]$ είναι $|f(x)|=-f(x)$ στο $[\gamma,\,\beta\,]$ Τότε, η $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx+\int_{\gamma}^{\beta} -f(x)\,dx$ γράφεται $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\gamma} |f(x)|\,dx+\int_{\gamma}^{\beta} |f(x)|\,dx$ ή $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$.

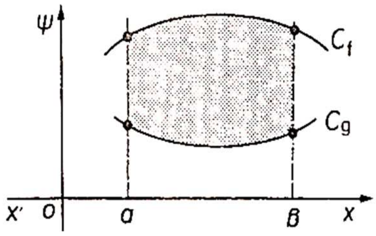
Το επίπεδο χωρίο είναι το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,\,y)$ για τα οποία $\left\{\begin{array}{l}a \le x \le \gamma \\ 0 \le y \le f(x)\end{array}\right\}$ και $\left\{\begin{array}{l}\gamma \le x \le \beta \\ f(x) \le y \le 0\end{array}\right\}$

**Παρατηρήσεις**

**1.** Αν στο $[a,\,\beta]$ η $f$ είναι συνεχής και δε διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε χωρίζω το $[a,\,\beta]$ σε υποδιαστήματα, σε κάθε ένα από τα οποία η $f$ έχει το ίδιο πρόσημο και θα υπολογίζω τα επιμέρους εμβαδά όπως στις παραπάνω περιπτώσεις. Τα υποδιαστήματα στα οποία χωρίζεται το $[a,\,\beta]$ καθορίζονται από τις ρίζες που έχει η εξίσωση $f(x)=0$ στο $(a,\,\beta)$.

**2.** Στην 3η περίπτωση το εμβαδό δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$. Αν $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a,\,\beta]$ τότε $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$ και αν $f(x)\le 0,\ \forall x\in[a,\,\beta]$ τότε $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$. Έτσι οι τύποι $E=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$, $E=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$,

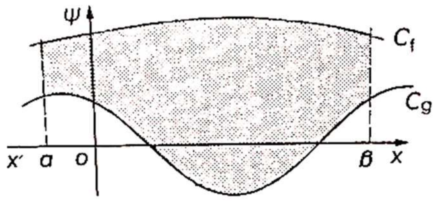
$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\, dx+\int_{\gamma}^{\beta} -f(x)\, dx$ ενοποιούνται σε έναν «*Το εμβαδό επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες* $x=a$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ *τον άξονα* $xx'$ *και τη γραφική παράσταση* $C_f$ *μιας συνάρτησης* $f$ *που είναι συνεχής στο* $[a,\ \beta]$ *δίνεται από τον τύπο* $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|\, dx$».




## Περίπτωση 4

Έστω ότι το επίπεδο χωρίο περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ και τις γραφικές παραστάσεις $C_f, C_g$ των συναρτήσεων $f$, $g$ που είναι συνεχείς $[a,\ \beta]$ και $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\in[a,\ \beta]$

Το εμβαδό Ε του επιπέδου χωρίου δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)\, dx$




Η απόδειξη του τύπου αν $f(x)\geq g(x)>0$ είναι απλή. Πράγματι, αν $\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_2$ είναι τα εμβαδά των χωρίων που ορίζουν οι ευθείες $x=a$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ ο άξονας $xx'$ και οι καμπύλες $C_f$, $C_g$ αντίστοιχα, από την 1η περίπτωση είναι $\mathrm{E}_1=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$, $E_2=\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$ και το ζητούμενο εμβαδό Ε είναι

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)\, dx$$

Αν $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\in[a,\ \beta]$ με τη $g$ να λαμβάνει αρνητικές τιμές ή και την $f$ να λαμβάνει αρνητικές τιμές θεωρώ τις συναρτήσεις $f_1(x)=f(x)-\mu$ και $g(x)=g(x)-\mu$, όπου $\mu$ η ελάχιστη τιμή της $g$ στο $[a,\ \beta]$

Τότε $\forall x\in[a,\ \beta]$ $f(x)\geq g(x)\geq\mu\Leftrightarrow f(x)-\mu\geq g(x)-\mu\geq 0\Leftrightarrow f_1(x)\geq g_1(x)\geq 0$ και το ζητούμενο εμβαδό Ε είναι αυτό που περικλείεται από τις $x=a$, $x=\beta$ και τις $C_{f_1}, C_{g_1}$, με $f_1(x)\geq g_1(x)\geq 0$ άρα

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}(f_1(x)-g_1(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-\mu)-(g(x)-\mu)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

Ομοίως, αν $f(x)\le g(x), \forall x\in[a, \beta]$ η $E=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))\,dx$ γίνεται $E=\int_{\alpha}^{\beta}(g(x)-f(x))\,dx$ δηλαδή σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει ο παρακάτω πρακτικός κανόνας «*Για να βρεθεί το εμβαδό ενός επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες* $x=a$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ *και τις γραφικές παραστάσεις* $C_f, C_g$ *των συναρτήσεων* $f, g$ *θα ολοκληρώνω από α ως β, τη διαφορά που προκύπτει αν από τη συνάρτηση που η γραφική της παράσταση περικλείει άνω το χωρίο, αφαιρέσω τη συνάρτηση που η γραφική της παράσταση περικλείει κάτω το χωρίο*».

Άρα, για την $1^{\eta}$ περίπτωση όπου $f(x)\ge 0, \ \forall x\in[a, \beta]$ έχω ότι περικλείει άνω το χωρίο η $C_f$ και κάτω ο άξονας $xx'$, άρα η $C_g$ με $g(x)=0$, $\forall x\in[a, \beta]$ οπότε $E=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$

Στη $2^{\eta}$ περίπτωση όπου $f(x)\le 0, \ \forall x\in[a, \beta]$ έχω ότι άνω περικλείει το χωρίο ο άξονας $xx'$, άρα η $C_g$ με $g(x)=0, \ \forall x\in[a, \beta]$ και κάτω η $C_f$ οπότε

$$E=\int_{\alpha}^{\beta}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}-f(x)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$$

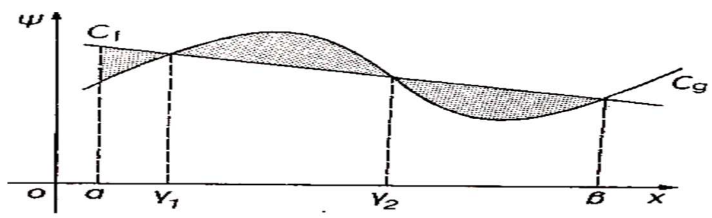
## Παρατηρήσεις

**1** Το επίπεδο χωρίο του οποίου το εμβαδό Ε προκύπτει από τη σχέση $E=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))\,dx$ είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία

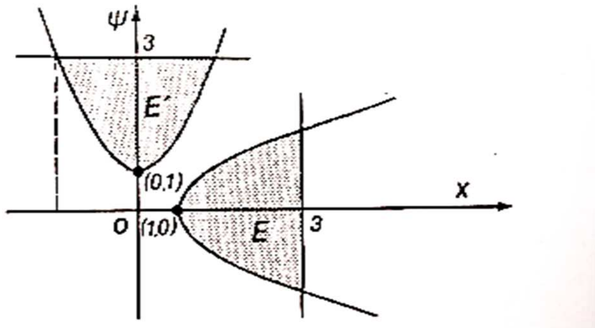
$$\begin{Bmatrix} a\le x\le \beta \\ g(x)\le y\le f(x) \end{Bmatrix}$$

**2** Αν στο διάστημα $[a, \beta]$ οι $f, g$ είναι συνεχείς και η $F$ με $F(x)=f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί πρόσημο στο $[a, \beta]$ τότε θα χωρίζω το $[a, \beta]$ σε υποδιαστήματα έτσι ώστε σε καθένα από αυτά να έχω $F(x)=f(x)-g(x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$ ή $F(x)=f(x)-g(x)\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le g(x)$ οπότε θα υπολογίσω τα επιμέρους εμβαδά όπως στην παραπάνω περίπτωση. Έτσι, για το εμβαδό του παρακάτω γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

$$E=\int_{\alpha}^{\gamma_1}(f(x)-g(x))\,dx+\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}(g(x)-f(x))\,dx+\int_{\gamma_2}^{\beta}(f(x)-g(x))\,dx$$



**3** Συχνά, το εμβαδό ενός επίπεδου χωρίου υπολογίζεται ευκολότερα αν το στρέψω περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία $90^0$. Τότε είναι γνωστό ότι αν $\mathrm{M}(x,\ y)$ είναι ένα σημείο και $\mathrm{M}'(x',\ y')$ η νέα θέση του μετά από στροφή κατά $90^0$ θα είναι $x'=-y$ και $y'=x$




Έτσι, για τον υπολογισμό του εμβαδού Ε του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y^2=x-1$ και την ευθεία $x=3$ παρατηρώ ότι το χωρίο είναι το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,\ y)$ με ($1\le x\le 3$ και $-\sqrt{x-1}\le y\le \sqrt{x-1}$) οπότε

$$E=\int_1^3\left(\sqrt{x-1}-\left(-\sqrt{x-1}\right)\right)\,dx=2\int_1^3\sqrt{x-1}\,dx=2\int_1^3(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Μπορώ να στρέψω το χωρίο κατά $90^0$, οπότε στη νέα θέση θα έχει εμβαδό $E'$, όπου $E'=E$ και για να προσδιορίσω τις γραμμές που περικλείουν το $E'$ θα θέσω στις $y^2=x-1$ και $x=3$ που περικλείουν το αρχικό χωρίο, $y=-x'$ και $x=y'$ οπότε $\left\{(-x')^2=y'-1 \text{ και } y'=3\right\}$ ή $\left\{y'=(x')^2+1 \text{ και } y'=3\right\}$ ή $\left\{y=x^2+1 \text{ και } y=3\right\}$ δηλαδή το $E'$ περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y=x^2+1$ και $y=3$, που προκύπτουν από τις αρχικές γραμμές που περικλείουν τον τόπο, αν θέσω όπου $x$ το $y$ και όπου $y$ το $-x$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα κοινά σημεία των $y=x^2+1$ και $y=3$ είναι τα $\mathrm{A}\left(-\sqrt{2},\ 3\right)$, $\mathrm{B}\left(\sqrt{2},\ 3\right)$ δηλαδή το χωρίο με εμβαδό $E'$ είναι το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}'(x,\ y)$ με $\left(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2} \text{ και } x^2+1\le y\le 3\right)$ άρα,

$$E=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(3-\left(x^2+1\right)\right)\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)\,dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Η στροφή έγινε $90^0$ διότι αν γίνει $-90^0$ τότε για τις συντεταγμένες $\left(x'',y''\right)$ της νέας θέσης του $\mathrm{M}(x,\ y)$ είναι $\left(x''=y \text{ και } y''=-x\right)$ ή $\left(y=x'' \text{ και } x=-y''\right)$ οπότε οι εξισώσεις των νέων γραμμών προκύπτουν από τις αρχικές γραμμές που περικλείουν τον τόπο, αν θέσω οπού $x$ το $-y$ και όπου $y$ το $x$.

**4** Για τον υπολογισμό του εμβαδού $E$ του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y^2=x-1$ και την ευθεία $x=3$ παρατηρώ ότι το χωρίο περικλείεται δεξιά από τη $x=3$ και αριστερά από την $x=y^2+1$ και τα κοινά τους σημεία είναι τα $\mathrm{A}\left(3,\ -\sqrt{2}\right)$, $B\left(3,\ \sqrt{2}\right)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

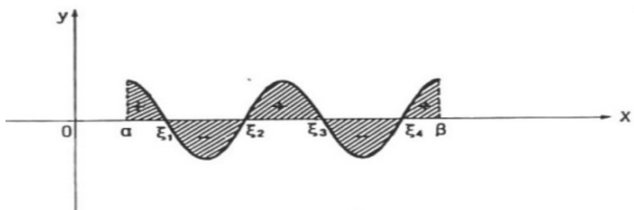
$$E=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(3-y^2-1\right)\,dy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-y^2\right)\,dy=\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Γενικά, αν ένα χωρίο περικλείεται δεξιά από την $x=\varphi(y)$, αριστερά από την $x=\sigma(y)$ και τις ευθείες $y=\gamma$, $y=\delta$ με $\gamma<\delta$ τότε το εμβαδό του είναι $\mathrm{E}=\int_{\gamma}^{\delta}(\varphi(y)-\sigma(y))\,dy$

**5** Άρα, το εμβαδό $E$ ενός επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και τις γραφικές παραστάσεις $C_f, C_g$ δύο συναρτήσεων $f, g$ που είναι συνεχείς στο $[a,\ \beta]$ είναι $E=\int\limits_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$, ενώ αν περικλείεται από τις ευθείες $y=\gamma$, $y=\delta$ $(\gamma<\delta)$ και τις $C_\varphi, C_\sigma$ με $x=\varphi(y)$, $x=\sigma(y)$ τότε είναι $E=\int\limits_{\gamma}^{\delta}|\varphi(y)-\sigma(y)|\,dy$

## Εμβαδό σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Αν μια συνάρτηση $f(x)/[a,\ \beta]$ είναι συνεχής με $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,\ \beta]$ τότε το $\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$ ισούται αριθμητικά με το εμβαδό του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από τη γραμμή $\Gamma:\{(x,\ f(x):x\in[a,\ \beta])\}$ από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και από τον $xx'$ άξονα, δηλαδή εξ ορισμού είναι $\mathrm{E}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}f(\xi_i)\Delta_i x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$




Σχ.8.1

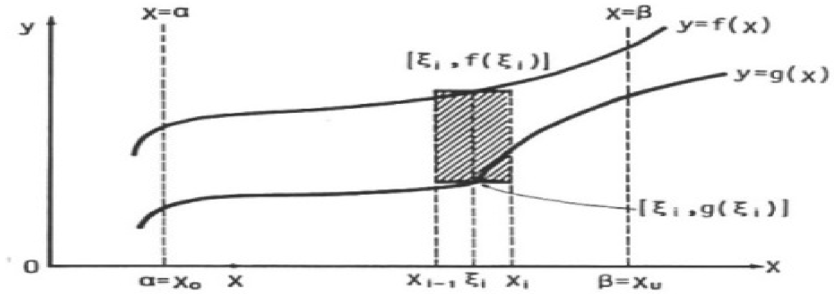
Αν η $f(x)/[a,\ \beta]$ είναι συνεχής με $f(x)<0,\ \forall x\in[a,\ \beta]$ τότε το $\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$ έχει αρνητική τιμή διότι όλα τα $f(\xi_i)$ είναι αρνητικά, άρα το επίπεδο χωρίο θα σχηματίζεται κάτω από τον $xx'$ άξονα. Επειδή τα εμβαδά, όταν δεν θεωρούνται προσημασμένα, εκφράζονται με θετικούς αριθμούς, θέτω

$$\mathrm{E}=\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{\nu}-f(\xi_i)\Delta_i x\right)=-\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx \text{ , άρα } -\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx>0$$

Αν η $f(x)/[a,\ \beta]$ είναι συνεχής, αλλά στο $[a,\ \beta]$ αλλάζει πρόσημο, δηλαδή υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών π.χ. $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ $\in[a,\ \beta]$, όπου

$f(\xi_k)=0$ με $k=1,2,3,4$ (δηλαδή ρίζες της $f(x)=0$), άρα έχω ένα πεπερασμένο πλήθος προσήμων της $f(x)$. Τότε εκτελώ έναν διαμερισμό του $[a,\ \beta]$ ώστε τα σημεία διαμέρισης να συμπίπτουν με τα $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ οπότε

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\xi_1} f(x)\,dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx + \int_{\xi_2}^{\xi_3} f(x)\,dx - \int_{\xi_3}^{\xi_4} f(x)\,dx + \int_{\xi_4}^{\beta} f(x)\,dx$$




Σχ.8.2

Για να βρω το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ των δύο καμπυλών $y=f(x)$, $y=g(x)$ και των ευθειών $x=a$, $x=\beta$ ορισμένων και συνεχών στο διάστημα $[a,\ \beta]$ με $f(x)\ge g(x)$, $\forall x\in[a,\ \beta]$ εργάζομαι ως εξής. Κάνω έναν διαμερισμό του $[a,\ \beta]$ τον $\Delta_\nu=\{\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta\}$ με $\lambda\to 0$ και έστω $[x_{i-1},\ x_i]$ το τυχόν υποδιάστημα. Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $x_i-x_{i-1}=\Delta_i x$ και ύψος $f(\xi_i)-g(\xi_i)$ όπου $\xi_i\in[x_{i-1},\ x_i]$ Το εμβαδό αυτού του στοιχειώδους ορθογωνίου είναι $E=\sum_{i=1}^{\nu}E_i=\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\,\Delta_i x$ . Αν πάρω το όριο του ανωτέρω αθροίσματος όταν $\lambda\to 0$ αυτό λαμβάνεται ως εμβαδό του επίπεδου χωρίου, δηλαδή

$E=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}E_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\,\Delta_i x=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]\,dx$ . Αυτό το όριο υπάρχει διότι αφού οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a,\ \beta]$ τότε και η $(f-g)(x)$ συνεχής στο $[a,\ \beta]$

## Παρατηρήσεις

**1** Ο τύπος $E=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]\,dx$ ισχύει αν $f(x)\ge g(x)$, $\forall x\in[a,\ \beta]$, ενώ αν $f(x)<g(x)$, $\forall x\in[a,\ \beta]$, τότε ο τύπος γράφεται ως $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}[g(x)-f(x)]\,dx$

**2** Αν δεν ισχύει η παραπάνω παρατήρηση $\forall x\in[a,\ \beta]$ αλλά π.χ. $f(x)\ge g(x)$, $\forall x\in[a,\ \gamma]$ και $f(x)<g(x)$, $\forall x\in[\gamma,\ \beta]$ τότε εφαρμόζω τους $E=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]\,dx$ και $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}[g(x)-f(x)]\,dx$ ανάλογα, δηλαδή για την συγκεκριμένη περίπτωση είναι $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\gamma}[f(x)-g(x)]dx+\int_{\gamma}^{\beta}[g(x)-f(x)]dx$

**3** Αν ζητείται το εμβαδό μεταξύ δύο καμπυλών $y=f(x)$, $y=g(x)$ αλλά δεν δίνονται τα όρια ολοκλήρωσης, τότε για να βρεθούν τις εξισώνω, δηλαδή θέτω $f(x)=g(x)$ και λύνω την εξίσωση που προκύπτει. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι τετμημένες και αν θέσω αυτές στην $y=f(x)$ ή $y=g(x)$ έχω τις τεταγμένες δηλαδή τα σημεία τομής των καμπυλών και συνεπώς τα όρια ολοκλήρωσης ως προς τον $xx'$ άξονα ή ως προς τον $yy'$ άξονα. Και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να εφαρμόζονται οι παρατηρήσεις 1 και 2.

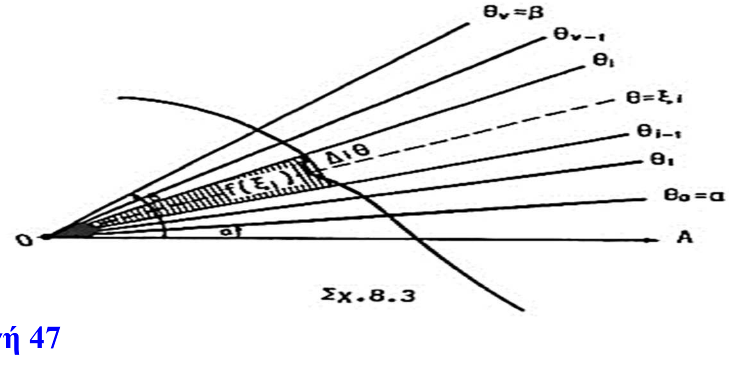
## Εμβαδό σε παραμετρικές εξισώσεις

Αν η καμπύλη $y=f(x)$ του τύπου $E=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x=\varphi(t)$, $y=\sigma(t)$, είναι $dx=\varphi'(t)\,dt$. Αν $t_1$, $t_2$ είναι οι τιμές του $t$ για τις οποίες $x=a, x=\beta$, από την 1η των ανωτέρω έπεται ότι $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{t_2}^{t_1}[\sigma(t)\ \varphi'(t)]\,dt$

## Εμβαδό σε πολικές συντεταγμένες

Για τον υπολογισμό του εμβαδού Ε που ορίζεται από τη συνεχή καμπύλη $\pi=\rho=f(\theta)/[\alpha,\ \beta]$ και τις ευθείες $\theta=a$, $\theta=\beta$ κάνω διαμερισμό του $[\alpha,\ \beta]$, δηλαδή $\Delta_\nu=\{\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_{\nu-1}<\theta_\nu=\beta\}$. Με $\lambda\to 0$, έστω $[\theta_{i-1},\ \theta_i]$ένα τυχαίο υποδιάστημα και $\xi_i\in[\theta_{i-1},\ \theta_i]$, σε αυτό αντιστοιχίζω έναν στοιχειώδη κυκλικό τομέα ακτίνας $f(\xi_i)$ και γωνίας $\theta_i-\theta_{i-1}=\Delta_i\theta$ μετρούμενη σε ακτίνια, άρα το εμβαδό είναι, $\mathrm{E}_i=\frac{1}{2}\left[f(\xi_i)^2\right]\Delta_i\theta$. Το άθροισμα όλων των στοιχειωδών κυκλικών τομέων δίνεται από το άθροισμα του Riemann $\sum_{i=1}^{\nu}E_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)^2]\Delta_i\theta$. Το όριο της ανωτέρω με $\lambda\to 0$ λαμβάνεται εξ ορισμού ως εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την ρ=f(θ)/ $[\alpha,\ \beta]$ και τις ευθείες $\theta=a$, $\theta=\beta$ δηλαδή

$$\mathrm{E}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}E_i=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)^2]\Delta_i\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2d\theta \text{ ή } \mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$$




Σχ.8.3

## Εφαρμογή 47

Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y=x^2$, τον $xx'$ άξονα και τις ευθείες $x=1$, $x=3$

$\forall x \in [1,\ 3]$ είναι $x^2 > 0$ άρα $\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right] = \left[9 - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{3}$


Σx.8.4

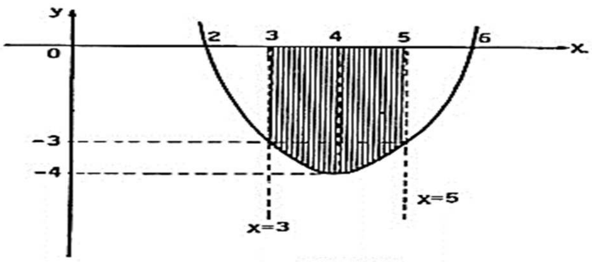
## Εφαρμογή 48

Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y = x^2 - 8x + 12$, τον $xx'$ άξονα και τις ευθείες $x = 3,\ x = 5$

Η καμπύλη τέμνει τον άξονα $xx'$ στα σημεία 2 και 6 (ρίζες του τριωνύμου). Είναι $x^2 - 8x + 12 < 0,\ \ \forall x \in [3,\ 5]$ άρα

$$\mathrm{E} = \int_1^2 \left(x^3 - 7x^2 + 10x\right)dx - \int_2^4 \left(x^3 - 7x^2 + 10x\right)dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2\right]_1^2 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x\right]_2^4 = \frac{397}{12}$$



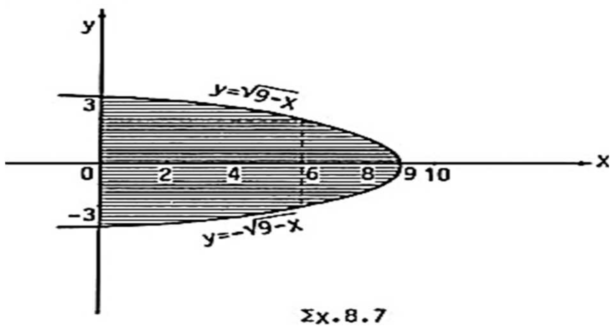

Σx.8.5

## Εφαρμογή 49

Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y^2 = 9 - x$ και τον $yy'$ άξονα

**Α΄ τρόπος**

Η καμπύλη γράφεται $x = 9 - y^2$, τέμνει τον $yy'$ άξονα στα σημεία με τεταγμένες $-3,\ 3$ και τον $xx'$ άξονα στο (9, 0) άρα $\mathrm{E} = \int_{-3}^{3} \left(9 - y^2\right)\, dy = \left[9y - \frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{3} = 36$




Σx.8.7

**Β΄ τρόπος**

Αν η ολοκλήρωση γίνει κατά μήκος του $xx'$ άξονα, η καμπύλη γράφεται y= $\pm\sqrt{9-x}$ με $9-x\geq 0 \Leftrightarrow 9\geq x$, δηλαδή χωρίζεται σε δύο κλάδους $y=\sqrt{9-x}$, $y=-\sqrt{9-x}$ με όρια του $x$ από 0 έως 9 που είναι συμμετρικοί ως προς $xx'$ άξονα.

Άρα, το εμβαδό θα βρεθεί αν διπλασιάσω το εμβαδό που περιέχεται από τον κλάδο $y=\sqrt{9-x}$, τον $xx'$ άξονα και τον $yy'$ άξονα.

$$\mathrm{E}=2\int_0^9\sqrt{9-x}dx=-2\int_0^9(9-x)^{\frac{1}{2}}d(9-x)=-\frac{4}{3}[(9-x)^{\frac{3}{2}}]_0^9=-\frac{4}{3}[(9-9)^{\frac{3}{2}}-(9-0)^{\frac{3}{2}}]=36$$

## Εφαρμογή 50

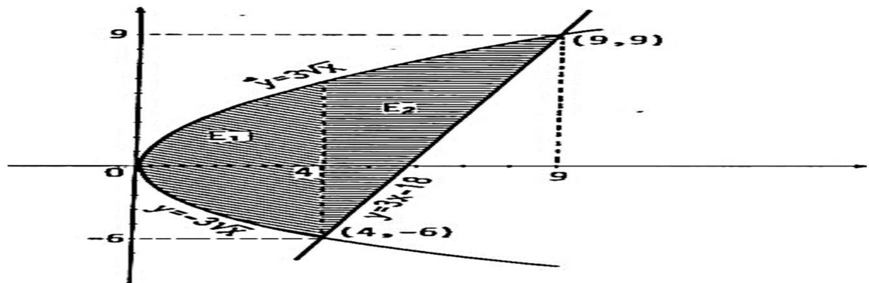
Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y^2=9x$ και την ευθεία $y=3x-18$

Από επίλυση του συστήματος των εξισώσεων, τα σημεία τομής των καμπύλων είναι (4, –6) και (9, 9) άρα είναι και τα όρια ολοκλήρωσης.

**Α΄ τρόπος**

Θα υπολογισθεί το εμβαδό κατά μήκος του $yy'$ άξονα. Οι εξισώσεις των καμπύλων γράφονται $x=\frac{y^2}{9}$, $x=\frac{18+y}{3}$. Αφού $x=\frac{18+y}{3}\geq\frac{y^2}{9}$ $\forall x\in[-6,\ 9]$ είναι

$$\mathrm{E}=\int_{-6}^{9}\left(\frac{18+y}{3}-\frac{y^2}{9}\right)dy=\frac{1}{9}\int_{-6}^{9}\left(54+3y-y^2\right)dy=\frac{1}{9}\left[54y+\frac{3y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-6}^{9}=\frac{125}{2}$$



Σχ.8.8

**Β΄ τρόπος**

Θα υπολογισθεί το εμβαδό κατά μήκος του άξονα $xx'$. Η $y^2=9x$ γράφεται $y=\pm3\sqrt{x}$, δηλαδή χωρίζεται σε δύο κλάδους (συμμετρικοί κλάδοι της παραβολής) τον $y=3\sqrt{x}$ άνω του $xx'$ άξονα και τον y=$-3\sqrt{x}$ κάτω του $xx'$ άξονα με $x\geq 0$

Επειδή $3\sqrt{x}>-3\sqrt{x},\ \forall x\in[0,\ 4]$ και $3\sqrt{x}>3x-18,\ \forall x\in[4,\ 9]$, είναι

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2=\int_0^4\left[3\sqrt{x}-\left(-3\sqrt{x}\right)\right]dx+\int_4^9\left(3\sqrt{x}-3x+18\right)dx=$$

$$6\int_0^4\left[\sqrt{x}\right]dx\qquad+\int_4^9\left(3\sqrt{x}-3x+18\right)dx=4\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4+\left[2x^{\frac{3}{2}}-\frac{3x^2}{2}+18x\right]_4^9=\frac{125}{2}$$

## Εφαρμογή 51

Βρείτε το εμβαδό του κύκλου $x^2+y^2=49$

**Α΄ τρόπος**

Η καμπύλη γράφεται ως $y = \pm\sqrt{49 - x^2}$ , δηλαδή δύο κλάδοι συμμετρικοί ως προς τον $xx'$ άξονα και είναι $\sqrt{49-x^2} \geq -\sqrt{49-x^2}$ $\forall x \in [-7,\ 7]$ αν $R = 7$ άρα,

$$\mathrm{E} = \int_{-7}^{7}\left[\sqrt{49-x^2} - \left(-\sqrt{49-x^2}\right)\right]dx = 2\int_{-7}^{7}\sqrt{49-x^2}dx$$ Θέτω $x = 7sin\theta$ άρα $dx = 7cos\theta\ d\theta$. Αφού το $x$ μεταβάλλεται από $-7$ ως $7$, το $\theta$ μεταβάλλεται από $-\frac{\pi}{2}$ ως $\frac{\pi}{2}$ οπότε $\mathrm{E} = 2\int_{-7}^{7}\sqrt{49-x^2}dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{49-49\sin^2\theta}\cdot 7\cos\theta\ d\theta =$

$$98\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\ d\theta = 98\left[\frac{\theta}{2} + \frac{sni(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 49\pi$$

**Β΄ τρόπος**

Θέτω τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου, δηλαδή $x = 7cos\theta,\ y = 7sin\theta$ και επειδή το $x$ μεταβάλλεται από $-7$ έως $7$ το $\theta$ μεταβάλλεται από $\pi$ έως $0$, οπότε είναι $\mathrm{E} = 2\int_{\pi}^{0}7sni\theta(-7sni\theta)\ d\theta = -98\int_{\pi}^{0}sni^2\theta\ d\theta = -98\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sni(2\theta)}{4}\right]_{\pi}^{0} = 49\pi$

## Εφαρμογή 52

Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη $x = \theta - sin\theta,\ y = 1 - cos\theta$ με $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Είναι $dx = (1 - cos\theta)\ d\theta$ άρα, $\mathrm{E} = \int_{0}^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta = \int_{0}^{2\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\right)\ d\theta =$

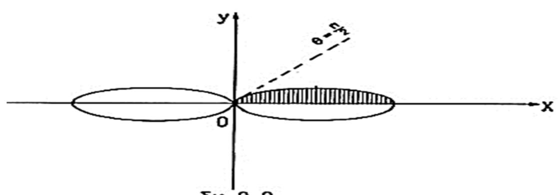
$$\left[\frac{3}{2} - 2sni\theta + \frac{sni(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = 3\pi$$

## Εφαρμογή 53

Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη $\rho^2 = \alpha^2\cos(2\theta)$

Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον $xx'$ άξονα και την αρχή τον αξόνων. Ο υπολογισμός του εμβαδού θα γίνει από 0 ως $\frac{\pi}{4}$ και θα το ληφθεί 4 φορές. Άρα,

$$\mathrm{E} = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2 d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\alpha^2\cos 2\theta\ d\theta = 2\alpha^2\left[\frac{sni(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \alpha^2$$




Σχ.8.9

**Εφαρμογή 54**

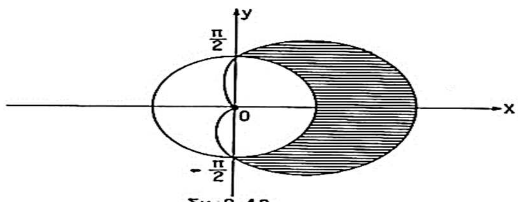
Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $\rho = 1 + cos\theta$ και του κύκλου $\rho = 1$

Ζητείται το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Η 1η καμπύλη είναι άνω του κύκλου και η ολοκλήρωση θα γίνει από $-\frac{\pi}{2}$ ως $\frac{\pi}{2}$. Τα όρια βρίσκονται αν εξισώσω τις δύο καμπύλες και λύσω την εξίσωση που θα προκύψει.

Άρα, $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (1+cos\theta)^2 - 1^2 \right] d\theta =$

$\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 2cos\theta + cos^2\theta \right) d\theta =$

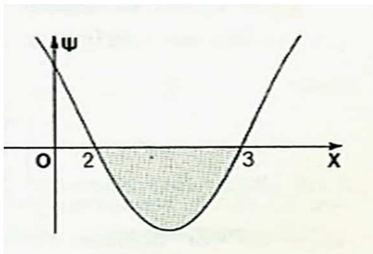
$\frac{1}{2}\left[ 2sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{sin(2\theta)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{4}$




Σx.8.10

**Εφαρμογή 55**

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και τον άξονα $xx'$




Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $xx'$ σε δυο σημεία με τετμημένες $2$ και $3$. Όταν $2 < x < 3$ είναι $f(x) < 0$, άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_2^3 -f(x)\, dx = \int_2^3 -\left(x^2 - 5x + 6\right)\, dx = \int_2^3 \left(-x^2 + 5x - 6\right)\, dx =$$

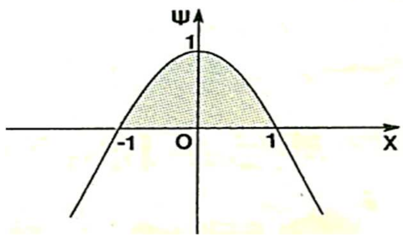
$$\left[ -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 6x \right]_2^3 = \left( -\frac{3^3}{3} + 5\frac{3^2}{2} - 6\cdot 3 \right) - \left( -\frac{2^3}{3} + 5\frac{2^2}{2} - 6\cdot 2 \right) = \ldots$$

**Εφαρμογή 56**

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + 1$ και τον άξονα $xx'$

$$E = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right)\, dx =$$

$$\left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} = \left( -\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left( -\frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right) = \frac{4}{3}$$



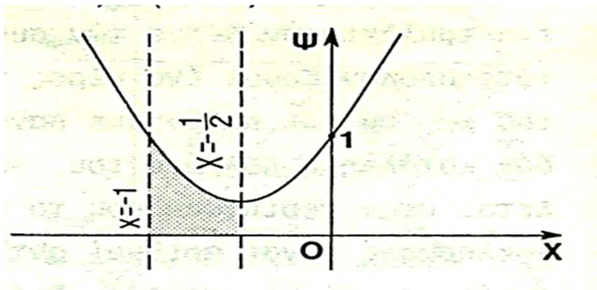
## Εφαρμογή 57

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+x+1$, τις ευθείες $x=-1$, $x=\dfrac{-1}{2}$ και τον άξονα $xx'$

Ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ ότι $x^2+x+1>0$

$$E=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+x+1\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)=\ldots$$

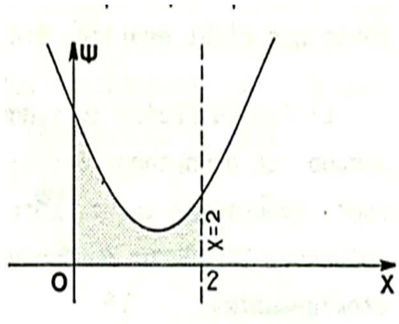



## Εφαρμογή 58

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x^2+2$ και τις ευθείες $x=0$ $y=0$ και $x=2$

$$E=\int_0^2\left(4x^2+2\right)\,dx=\left[4\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^2=$$

$$\left(4\frac{2^3}{3}+2\cdot 2\right)-\left(4\frac{0^3}{3}+2\cdot 0\right)=\frac{32}{3}+4=\frac{44}{3}$$



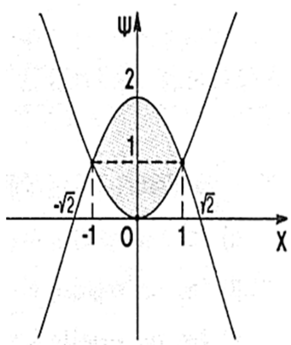

## Εφαρμογή 59

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x)=-x^2+2$ και $g(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

$$E=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\,dx=\int_{-1}^{1}\left[-x^2+2-x^{\frac{2}{3}}\right]\,dx=$$

$$\left[-\frac{x^3}{3}+2x-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_{-1}^{1}=$$

$$\left(-\frac{1^3}{3}+2\cdot 1-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)-\frac{3}{5}(-1)^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{32}{15}$$

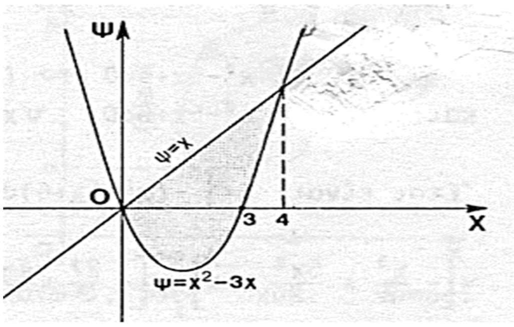


### Εφαρμογή 60

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x$ και την ευθεία $y=x$

$$E=\int_0^4 \left(x-f(x)\right)dx=\int_0^4 \left(x-\left(x^2-3x\right)\right)dx=$$

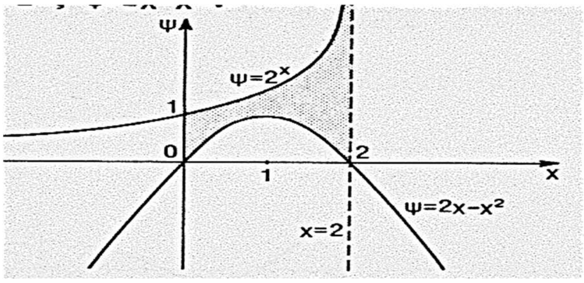
$$\int_0^4 \left(4x-x^2\right)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\left(2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}\right)-(0)=32-\frac{64}{3}$$




### Εφαρμογή 61

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=2^x$, $y=2x-x^2$ και τις ευθείες $x=2$, $x=0$

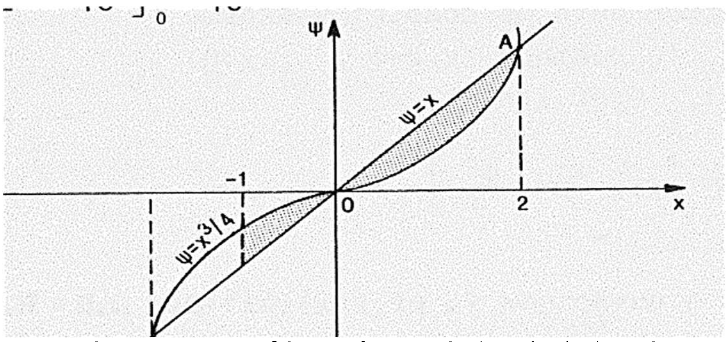
$$E=\int_0^2 \left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)\,dx=\left[\frac{2^x}{ln2}-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{3}{ln2}-\frac{4}{3}$$




### Εφαρμογή 62

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x$ και $g(x)=\frac{x^3}{4}$ στο διάστημα $[-1,\ 2]$

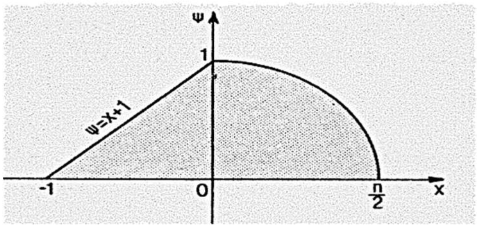
$$E=\int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{4}-x\right)dx+\int_0^2 \left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx=\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right]_0^2=\frac{23}{16}$$



### Εφαρμογή 63

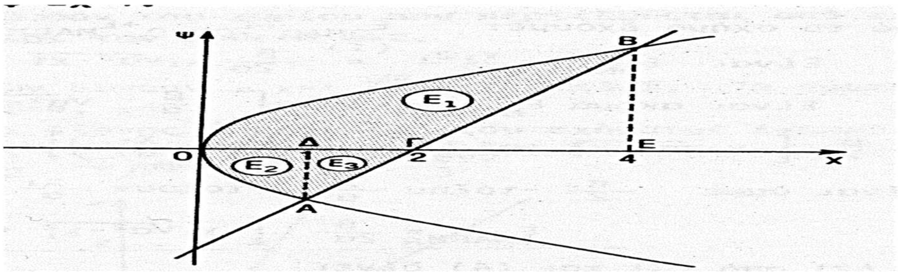
Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x+1$, $g(x)=cosx$ και τον άξονα $xx'$

$$E=\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cosx\,dx=\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[sinx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$




### Εφαρμογή 64

Βρείτε το εμβαδό $E$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής $y^2=4x$ και την ευθεία $y=2x-4$

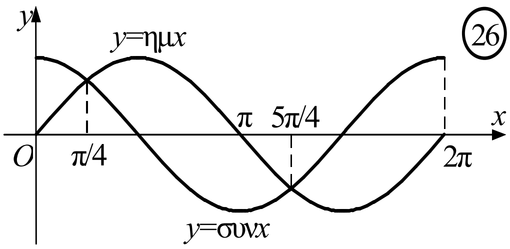



Είναι $E=E_1+E_2+E_3=\left[(\text{ΟΒΕΓΟ})-(\text{ΓΒΕΓ})\right]+(\text{ΑΔΟΑ})+(\text{ΑΓΔΑ})=$

$$\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx-\int_2^4(2x-4)\,dx+\int_0^1-\left(-2\sqrt{x}\right)dx+\int_1^2-(2x-4)\,dx=\ldots=9$$

### Εφαρμογή 65

Βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=sinx$, $g(x)=cosx$ και τις ευθείες $x=0$, $x=2\pi$




Βρίσκω τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο $[0,\ 2\pi]$. Είναι

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow sinx=cosx\Leftrightarrow tanx=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\text{ ή } x=\frac{5\pi}{4}$$

Συνεπώς, το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)=sinx-cosx$ είναι

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-g(x)$ | | – | 0 | + | 0 | – | |

Άρα $E(\Omega)=\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx$

$$=\int_0^{\pi/4}(-\sin x+\cos x)\,dx+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{5\pi/4}^{2\pi}(-\sin x+\cos x)\,dx$$

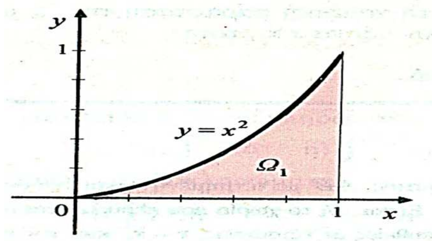
$$=[\cos x+\sin x]_0^{\pi/4}+[-\cos x-\sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4}+[\cos x+\sin x]_{5\pi/4}^{2\pi}$$

$$=\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

**Εφαρμογή 66**

Βρείτε το εμβαδό του χωρίου $\Omega_1$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα $xx'$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

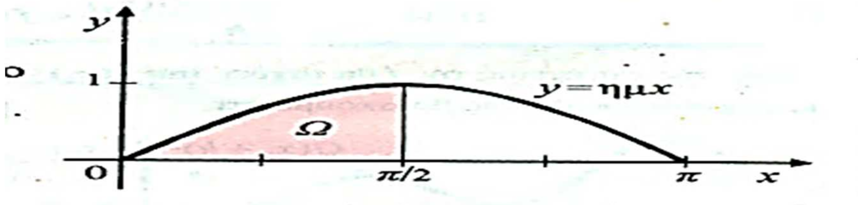
Είναι $E(\Omega_1)=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$




**Εφαρμογή 67**

Βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$, τον άξονα $xx'$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$

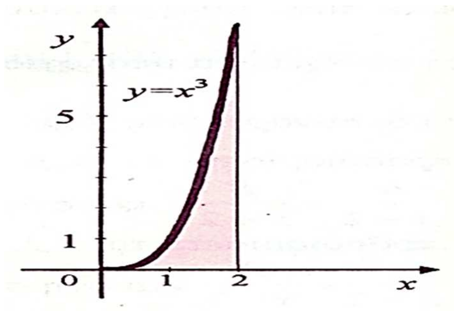
Είναι $E(\Omega)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x\,dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2}=\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)-(-\sigma\upsilon\nu 0)=0-(-1)=1$




**Εφαρμογή 68**

Βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^3$, τον άξονα $xx'$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$

Είναι $E=\int_0^2 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{16}{4}=4$



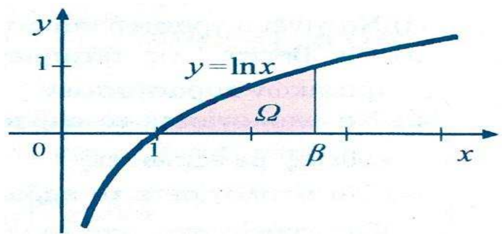
**Εφαρμογή 69**

Βρείτε τον $\beta \in \mathbb{R}$ με $\beta > 1$, ώστε το εμβαδό του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = lnx$, τον άξονα $xx'$ και από τις ευθείες $x = 1$ και $x = \beta$, να ισούται με 1

Είναι $\mathrm{E}(\Omega) = \int_1^{\beta} lnx\, dx = \left[x(lnx - 1)\right]_1^{\beta} = \beta(ln\beta - 1) - 1(\cancel{ln1} - 1) = \beta(ln\beta - 1) + 1$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\Omega) = 1 &\Leftrightarrow \beta(ln\beta - 1) + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \beta(ln\beta - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow ln\beta - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta = e \end{aligned}$$




**Εφαρμογή 70**

Βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x^2$ και $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0$

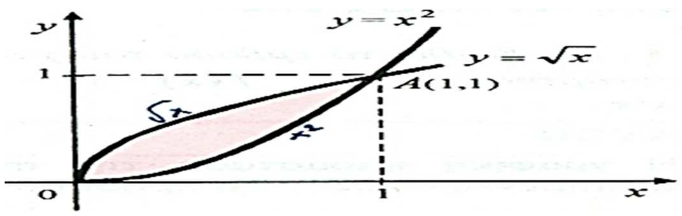
Εύρεση των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f,\ g$

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ ή \\ 1 \end{cases}$$

Είναι $f(x) > g(x) \quad \forall x \in [0,\ 1]$

Συνεπώς, $\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx =$

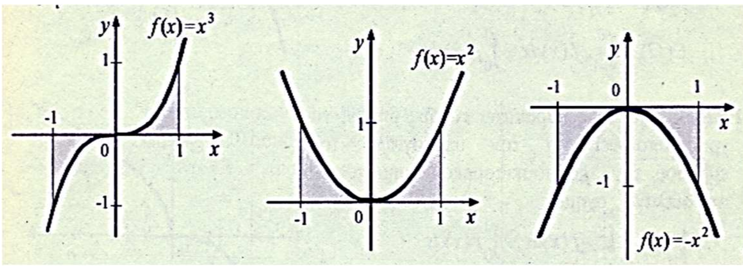
$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$




**Εφαρμογή 71**

Αντιστοιχίστε τους ακόλουθους τύπους που δίνουν το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου $\Omega$ με καθένα από τα τρία σχήματα.

**(i)** $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ **(ii)** $\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ **(iii)** $\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx$

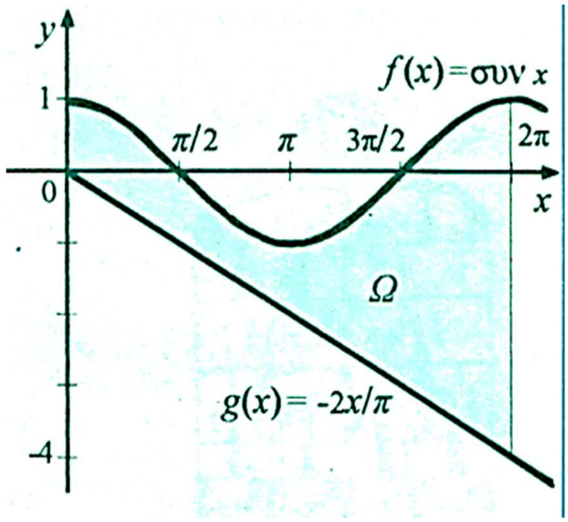



**Σχήμα I** **Σχήμα II** **Σχήμα III**

| Σχήμα I | Σχήμα II | Σχήμα III |
|---|---|---|
| iii | i | ii |

## Εφαρμογή 72

Ποιος τύπος περιγράφει το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου $\Omega$;




**(α)** $E(\Omega)=\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

**(β)** $E(\Omega)=\int_0^{2\pi} g(x)\,dx$

**(γ)** $E(\Omega)=\int_0^{2\pi} [f(x)-g(x)]\,dx$

**(δ)** $E(\Omega)=\int_0^{2\pi} [g(x)-f(x)]\,dx$

**(ε)** $E(\Omega)=\int_0^{2\pi} [f(x)-g(x)]^2\,dx$

**(στ)** $E(\Omega)=\int_0^{2\pi} [g(x)-f(x)]^2\,dx$

**(ζ)** $E(\Omega)=\int_0^{\pi/2} [f(x)-g(x)]\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2} [-f(x)-g(x)]\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi} [f(x)-g(x)]\,dx$

Σωστός είναι ο τύπος **(γ)**

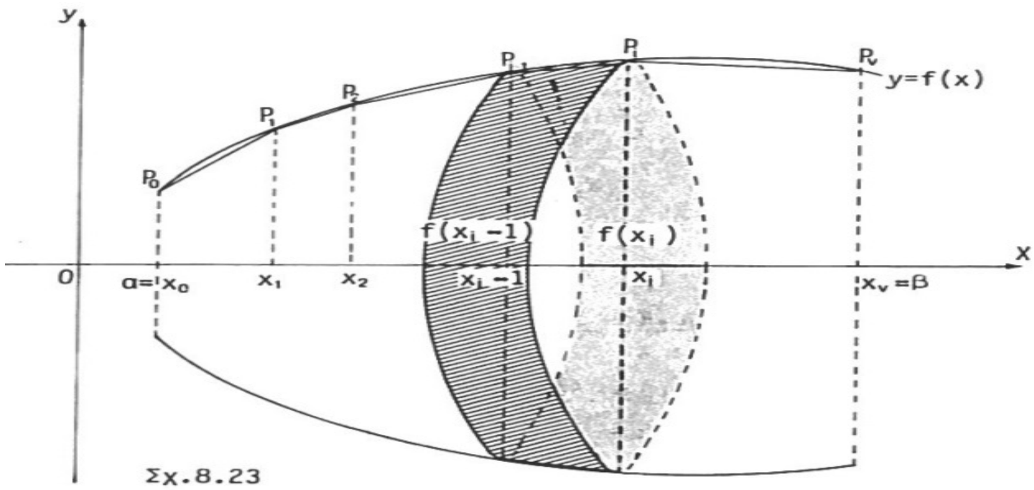
## Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής

Έστω συνάρτηση $y=f(x)/[\alpha,\ \beta]$ όπου $f(x), f'(x)$ συνεχείς στο $[a,\ \beta]$ και η $y=f(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a,\ \beta]$. Το εμβαδό της επιφάνειας που δημιουργείται από την περιστροφή του τόξου της καμπύλης $\Gamma=\{[x,\ f(x)]: x\in[a,\ \beta]\}$ περί τον $xx'$ άξονα καλείται επιφάνεια εκ περιστροφής.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας που δημιουργείται κατά την περιστροφή της $(\Gamma)$ περί τον $xx'$ άξονα, παίρνω έναν διαμερισμό του $[a,\ \beta]$ τον $\Delta_\nu=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_\nu=\beta\}$.

Από τα σημεία διαμέρισης $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$, φέρνω παράλληλες προς τον $yy'$ άξονα , που ορίζουν στο γράφημα της $y=f(x)$ τα σημεία $P_0, P_1, \ldots, P_{i-1}P_i \ldots P_\nu$

Η περιστροφή του γραφήματος $(\Gamma)$ της y=$f(x)$ περί τον $xx'$ άξονα γεννά μια επιφάνεια της οποίας το εμβαδό προσεγγίζεται από το εμβαδό της επιφανείας που γεννά η εγγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμή $P_0, P_1, ..., P_{i-1}P_i...P_\nu$ . Κάθε χορδή της τεθλασμένης γραμμής παράγει έναν κόλουρο κώνο.



Σχ.8.23

Έστω $[x_{i-1},\ x_i]$, i=1,2…ν το τυχόν υποδιάστημα της πιο πάνω διαμέρισης και $P_{i-1}P_i, i=1,2...\nu$, Η τυχούσα χορδή της εγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμής, κατά την πλήρη περιστροφή, παράγει κόλουρο κώνο με ακτίνες βάσεων $f(x_{i-1}), f(x_i)$ η δε γενέτειρα αυτού $P_{i-1}P_i$ έχει μήκος $P_{i-1}P_i = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$, $i = 1,2,3,...\nu$ το δε εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κόλουρου κώνου είναι

$\mathrm{E}_i = 2\pi \dfrac{f(x_i-1)+f(x_i)}{2}\sqrt{(\Delta_i x)^2+(\Delta_i y)^2}$, $i = 1,2,...,\nu$ ή

$\mathrm{E}_i = \pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,\Delta_i x$, $i=1,2,...,\nu$ Το άθροισμα όλων των στοιχειωδών κόλουρων κώνων

$\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{E}_i = \pi\sum_{i=1}^{\nu}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,\Delta_i x$, $i=1,2,...,\nu$ δίνει μια 1η προσέγγιση του εμβαδού της επιφάνειας που παράγει η y=$f(x)$ κατά την περιστροφή της περί τον $xx'$ άξονα. Το όριο του αθροίσματος λαμβάνεται εξ ορισμού ως εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον $xx'$ άξονα της καμπύλης y=$f(x)$. Το όριο υπάρχει διότι εξ΄ υποθέσεως οι $f(x), f'(x)$ είναι συνεχείς στο $[a,\ \beta]$, άρα

$\mathrm{E} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}E_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}\pi\sum_{i=1}^{\nu}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,\Delta_i x$ Από το θεώρημα Lagrange (ή μέσης τιμής) σε κάθε διάστημα $(x_{i-1},\ x_i)$ υπάρχει ένα $\xi_i$, $i=1,\ 2,...,\nu$ τέτοιο ώστε $\Delta_i y = f'(\xi_i)\Delta_i x$ ή $\dfrac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(\xi_i)$ και η

$$\mathrm{E}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}E_i=\lim_{\lambda\to 0}\pi\sum_{i=1}^{\nu}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,\Delta_i x$$ γράφεται ως

$$\mathrm{E}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}E_i=\lim_{\lambda\to 0}\pi\sum_{i=1}^{\nu}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\;\Delta_i x$$

Όταν $\lambda\to 0$ θεωρώ ότι $\lim_{\lambda\to 0}f\left(x_{i-1}\right)=\lim_{\lambda\to 0}f\left(x_i\right)=\lim_{\lambda\to 0}f\left(\xi_i\right)=f\left(x\right)$ $i=1,\ 2,...,\nu$ και $\lim_{\lambda\to 0}f'(\xi_i)=f'(x)$, οπότε η

$\mathrm{E}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}E_i=\lim_{\lambda\to 0}\pi\sum_{i=1}^{\nu}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\;\Delta_i x$ δίνει τον τύπο για το εμβαδόν εκ περιστροφής $\mathrm{E}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ ή

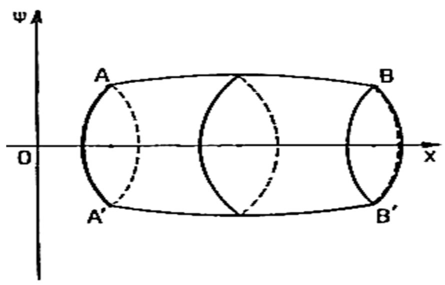
$$\mathrm{E}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}dx$$

Ο $\mathrm{E}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}dx$ γράφεται και ως $\mathrm{E}=2\pi\int_{\gamma}^{\delta}f(x)\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}dy$ όπου $\gamma=f\left(a\right)$και $\delta=f\left(\beta\right)$. Αν η καμπύλη $x=g\left(y\right)/\left[\gamma,\ \delta\right]$, όπου $g\left(y\right)$ και $g'\left(y\right)$ συνεχείς, ως προς $y$ στο $\left[\gamma,\ \delta\right]$, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον $yy'$ άξονα δίνεται με έναν από τους τύπους $\mathrm{E}=2\pi\int_{\gamma}^{\delta}g(y)\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}dy$,

$E=2\pi\int_{\gamma}^{\delta}g(y)\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}dy$ ή και $E=2\pi\int_{\gamma}^{\delta}g(y)\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}dy$ όπου $a=g\left(\gamma\right),\ \beta=g\left(\delta\right)$

**Περιπτώσεις**

**1** Το εμβαδό της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή ενός τόξου AB μίας καμπύλης c, που ορίζεται από τη συνάρτηση $y=f\left(x\right)$ περί τον άξονα $xx'$ είναι $E=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\;dx=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$ όπου α, β είναι οι τετμημένες των σημείων A,B αντίστοιχα.




**2** Το εμβαδό της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή ενός τόξου AB μίας καμπύλης c με εξίσωση $x=\varphi\left(y\right)$ περί τον άξονα $yy'$ είναι

$\mathrm{E}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(y)\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,dy$ όπου α, β είναι οι τεταγμένες των σημείων Α, Β αντίστοιχα.

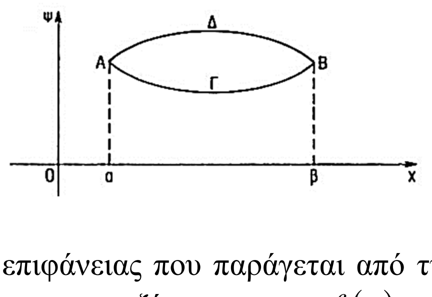
**3** Το εμβαδό της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$ ενός τόξου ΑΒ μιας καμπύλης c, που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x=\sigma(t)$, $y=\varphi(t)$ είναι

$\mathrm{E}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\sqrt{[\sigma'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\,dt=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ όπου $t_1,t_2$ είναι οι τιμές της παραμέτρου t που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β.

**4** Αν η περιστροφή γίνεται περί τον άξονα $yy'$ ισχύει ότι $E=2\pi\int_{t_1}^{t_2}x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

**5** Το εμβαδό της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$ ενός τόξου ΑΒ μίας καμπύλης c, που ορίζεται από τις εξισώσεις $x=\rho\cdot\cos\theta,\ y=\rho\cdot\sin\theta$, είναι $E=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho\cdot sin\theta\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\rho^2}d\theta$ όπου $\theta_1,\theta_2$ οι πολικές γωνίες που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Αν η περιστροφή γίνει περί τον άξονα $yy'$ το εμβαδόν είναι $E=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho\cdot\cos\theta\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\rho^2}\,d\theta$

**6** Θεωρώ κλειστή επίπεδη καμπύλη c. Όταν περιστραφεί περί άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο της και δεν την τέμνει, γράφει επιφάνεια που το εμβαδό της υπολογίζεται ως εξής. Θεωρώ ως άξονα περιστροφής τον $xx'$. Έστω Α, Β τα σημεία της c με τις μικρότερη τετμημένη α και μεγαλύτερη τετμημένη β αντίστοιχα. Έστω ότι $x=\varphi_1(y),\ y=\varphi_2(y)$ οι εξισώσεις των τόξων ΑΓΒ και ΑΔΒ αντίστοιχα. Αν οι συναρτήσεις $\varphi_1,\varphi_2$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\ \beta]$, το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται είναι $\mathrm{E}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left[\varphi_1(x)\sqrt{1+[\varphi'_1(x)]^2}+\varphi_2(x)\sqrt{1+[\varphi_2'(x)]^2}\right]dx$




**7** Το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή ενός τόξου ΑΒ μίας καμπύλης c με εξίσωση $y=f(x)$ περί ευθεία (ε) είναι

$\mathrm{E} = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left[d(M,\varepsilon)\sqrt{1+(y')^2}\right]dx$ όπου $d(M,\varepsilon)$ η απόσταση τυχαίου σημείου $M(x,\ y)$ του τόξου από την (ε) και α, β οι τετμημένες των σημείων Α, Β.

## Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής σε παραμετρικές εξισώσεις

Έστω ότι η καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = g(u),\ y = h(u)$ με $u \in [u_1,\ u_2]$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέχειας, τότε το εμβαδό δίνεται από τους τύπους $\mathrm{E} = 2\pi\int_{u1}^{u2} h(u)\sqrt{[g'(u)]^2 + [h'(u)]^2}\,du$ αν η περιστροφή γίνεται περί τον $xx'$ άξονα και $\mathrm{E} = 2\pi\int_{u1}^{u2} g(u)\sqrt{[g'(u)]^2 + [h'(u)]^2}\,du$ αν η περιστροφή γίνεται περί τον $yy'$ άξονα.

## Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής σε πολικές συντεταγμένες

Έστω $\rho = f(\theta)/[\theta_1,\ \theta_2]$ και ικανοποιείται η συνθήκη συνέχειας της $f(\theta), f'(\theta)$ στο $[\theta_1,\ \theta_2]$, τότε το εμβαδό δίνεται από τους τύπους

$$\mathrm{E} = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho\sin\theta\sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\,d\theta \quad ή \quad \mathrm{E} = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho\sin\theta\sqrt{\left[\frac{dp}{d\theta}\right]^2 + \rho^2}\,d\theta$$

## Εφαρμογή 73

Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της παραβολής $y^2 = 4x$ περί τον $xx'$ άξονα από $x = 1$ ως $x = 4$

Είναι $y = 2\sqrt{x}$ διότι είναι θετική $\forall x \in [1,\ 4]$, συνεπώς

$$\mathrm{E} = 2\pi\int_1^4 2\sqrt{x}\sqrt{1+[(2\sqrt{x})']^2}\,dx =$$

$$2\pi\int_1^4\sqrt{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx =$$

$$4\pi\int_1^4\sqrt{x+1}\,dx =$$

$$\frac{8\pi}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 =$$

$$\frac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)$$

Από $y^2 = 4x$ είναι $x = \dfrac{y^2}{4}$ και θέτοντας τα όρια μεταβολής του $x$ βρίσκω ότι το $y$ μεταβάλλεται από 2 μέχρι 4 και ο $\mathrm{E} = 2\pi\int_{\gamma}^{\delta} f(x)\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}\,dy$ δίνει (όπου $y = \varphi(x)$)

$$E = 2\pi\int_2^4 y\sqrt{1+\left[\left(\frac{y^2}{4}\right)'\right]^2}\,dy = 2\pi\int_2^4 \frac{y\sqrt{4+y^2}}{2}dy = \frac{\pi}{2}\int_2^4 \left[4+y^2\right]^{\frac{1}{2}} d\left(4+y^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\left(4+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$$

**Εφαρμογή 74**

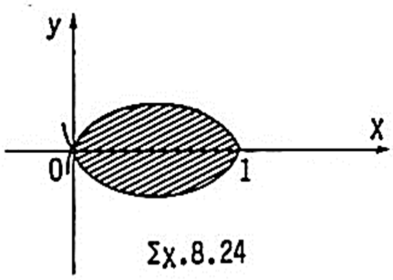
Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή του βρόγχου $8y^2 = x^2\left(1-x^2\right)$ περί τον $xx'$ άξονα με $x\in[0,\ 1]$

Παραγωγίζοντας, έχω ότι $16yy' = 2x-4x^3$ και $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2x^3}{8y}$ άρα

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{\left(x-2x^3\right)^2}{64y^2} = \frac{\left(3x-2x^3\right)^2}{64y^2}$$

Άρα, $E = 2\pi\int_0^1 y\frac{3x-2x^3}{8y}dx =$

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$




Σχ.8.24

**Εφαρμογή 75**

Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της καρδιοειδούς $\rho = \alpha\left(1-cos\theta\right)$ περί τον πολικό άξονα.

Από τον $E = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho\sin\theta\sqrt{\left[\frac{dp}{d\theta}\right]^2+\rho^2}d\theta$ είναι

$$E = 2\pi\int_0^{\pi} \rho sin\theta\sqrt{\alpha^2 sin^2\theta+\alpha^2\left(1-cos\theta\right)^2}d\theta =$$

$$2\pi\int_0^{\pi} \alpha\left(1-cos\theta\right)sin\theta\sqrt{2\alpha^2-2\alpha^2 cos\theta}\ d\theta =$$

$$2\sqrt{2}\alpha^2\pi\int_0^{\pi}\left(1-cos\theta\right)sin\theta\sqrt{1-cos\theta}\ d\theta = 2\sqrt{2}\alpha^2\pi\int_0^{\pi}(1-cos\theta)^{\frac{3}{2}}\ d\left(1-cos\theta\right) =$$

$$\frac{4\sqrt{2}\alpha^2\pi}{5}\left[\left(1-cos\theta\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\pi} = \frac{32\alpha^2\pi}{5}$$

**Εφαρμογή 76**

Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $x = \frac{t^2}{2}-3,\ y = t$ περί τον άξονα $xx'$ με $t\in[1,\ 4]$.

Από $E = 2\pi\int_{u1}^{u2} h(u)\sqrt{[g'(u)]^2+[h'(u)]^2}du$ είναι

$$\mathrm{E}=2\pi\int_{1}^{4} t\sqrt{1+t^2}dt=\frac{2\pi}{3}\left[\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2\pi}{3}\left[17^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$$

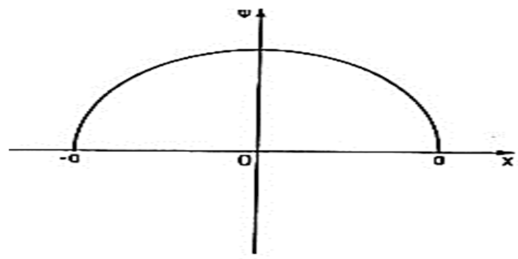
**Εφαρμογή 77**

Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που σχηματίζεται όταν το ημικύκλιο $x^2+y^2=\alpha^2$ στραφεί περί άξονα $xx'$

Η εξίσωση του άνω ημικυκλίου $y=\sqrt{\alpha^2-x^2}$ , άρα

$$\mathrm{E}=2\pi\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\right)dx=\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{\alpha^2-x^2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\right)dx=$$

$$2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(y\frac{\alpha}{y}\right)dx=2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}\alpha\ dx=2\pi a\left[x\right]_{-a}^{a}=2\pi a^2+2\pi a^2=4\pi\alpha^2$$



**Εφαρμογή 78**

Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$ ενός τόξου AB καμπύλης c με εξίσωση $y=\sin(2x)$ όταν $A(0,\ 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$

$$\mathrm{E}=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\sqrt{1+[(\sin 2x)']^2}dx=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\sqrt{1+4\cos^2(2x)}\ dx$$

θέτω $t=2\cos(2x)$ (1) άρα αν $x=\dfrac{\pi}{2}$ είναι $t=-2$ , συνεπώς

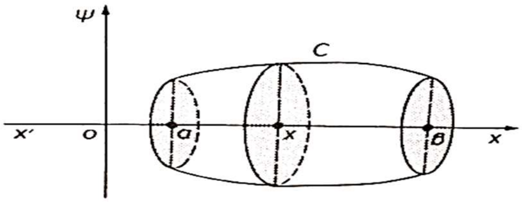
$$\mathrm{E}=2\pi\int_{2}^{-2}\sqrt{1+t^2}\left(\frac{-1}{4}\right)dt=\frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\ dt=\frac{-\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_{-2}^{2}=$$

$$\pi\left[\sqrt{5}+\frac{\pi}{2}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right]$$

### 7.2.3 Υπολογισμός όγκων

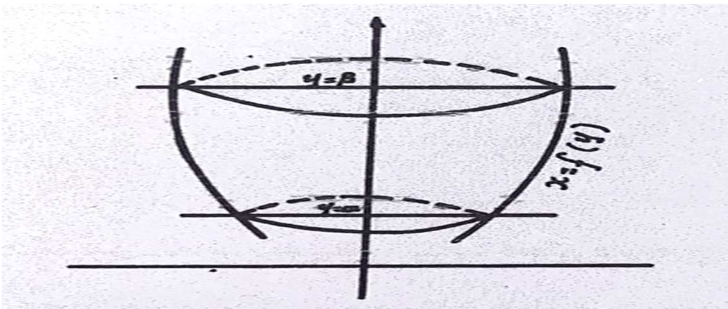
Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$, έστω η γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f$, όπου η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$. Αν η $f$ στραφεί, περί τον άξονα $xx'$, τότε το επίπεδο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x=a,\ x=\beta$ τον άξονα $xx'$ και τη C, θα σχηματίσει ένα «στερεό εκ περιστροφής». Κάθε τομή αυτού του στερεού με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα $xx'$ στο $[\alpha,\ \beta]$ είναι κύκλος ακτίνας

$y=f(x)$, άρα το εμβαδό είναι $E(x)=\pi f^2(x)$ για $x\in[\alpha,\ \beta]$. Ο όγκος αυτού του στερεού εκ περιστροφής, είναι $V=\int_\alpha^\beta \pi f^2(x)dx$



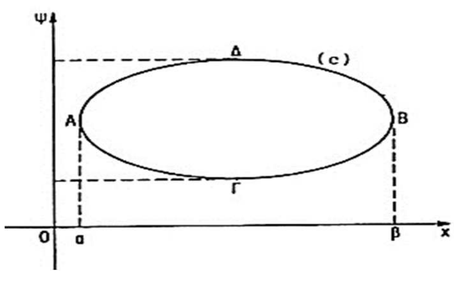

### Παρατήρηση 1

Αν το χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $x=f(y)$ και από τις ευθείες $y=a$ και $y=\beta$ περιστραφεί περί τον άξονα $yy'$, τότε σχηματίζεται ένα στερεό σώμα εκ περιστροφής με όγκο $V=\pi\int_\alpha^\beta x^2dy$



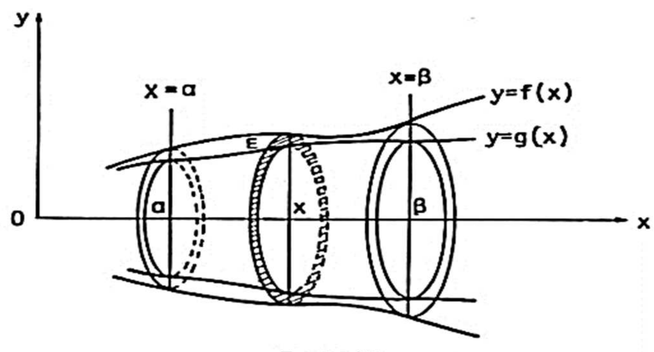

### Παρατήρηση 2

Θεωρώ το χωρίο που περικλείεται από την κλειστή επίπεδη καμπύλη C. Όταν το χωρίο περιστραφεί γύρω από τον άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο του και που δεν τέμνει την καμπύλη, τότε σχηματίζεται ένα στερεό που ο όγκος του βρίσκεται ως εξής: Θεωρώ τον άξονα περιστροφής ως άξονα $xx'$ ενός ορθογωνίου συστήματος. Έστω Α το σημείο της c με τη μεγαλύτερη τετμημένη β. Έστω $y=\varphi_1(x)$ η εξίσωση της καμπύλης γραμμής ΑΓΒ στο παρακάτω σχήμα και $y=\varphi_2(x)$ η εξίσωση της καμπύλης γραμμής ΑΔΒ. Αν οι $\varphi_1,\ \varphi_2$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\ \beta]$, τότε ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $V=\pi\int_\alpha^\beta\left[\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x)\right]dx$



**Παρατήρηση 3**

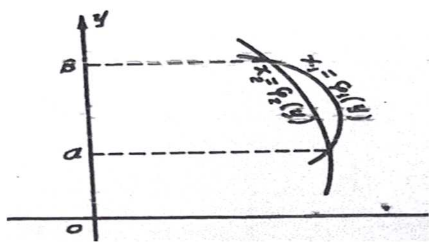
Έστω ότι ζητείται να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή, περί τον άξονα $xx'$, δύο καμπυλών $y = f(x),\ y = g(x)$ ορισμένων και συνεχών στο $[\alpha,\ \beta]$ με $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [\alpha,\ \beta]$ και από τις ευθείες $x = a,\ x = \beta$ Ο $xx'$ άξονας δεν ανήκει στο χωρίο Ε (Σχήμα 8.16) Αν φέρω ένα επίπεδο κάθετο στον $xx'$ άξονα, τότε η τομή του στερεού σώματος και του επιπέδου είναι από κυκλικός δακτύλιος εμβαδού $\mathrm{A}(x) = \pi\left(f^2(x) - g^2(x)\right)$ Άρα, $V = \pi\int_{\alpha}^{\beta}\left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx$



Σχ.8.16

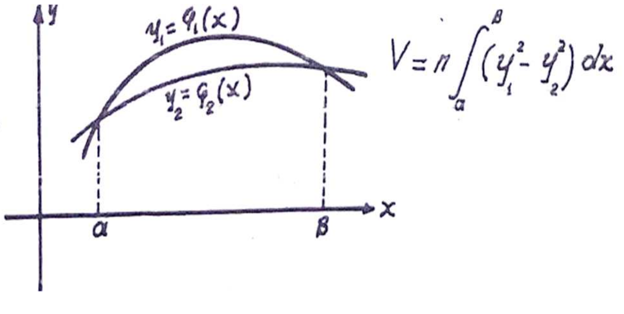
**Παρατήρηση 4**

Χωρίο που ορίζεται από δύο καμπύλες με εξισώσεις $x_1 = \varphi_1(y), x_2 = \varphi_2(y)$, περιστρέφεται περί τον άξονα $yy'$. Ο όγκος του στερεού σώματος που προκύπτει, δίνεται από τον τύπο $V = \pi\int_{\alpha}^{B}\left(x_1^2 - x_2^2\right)dy$




**Παρατήρηση 5**

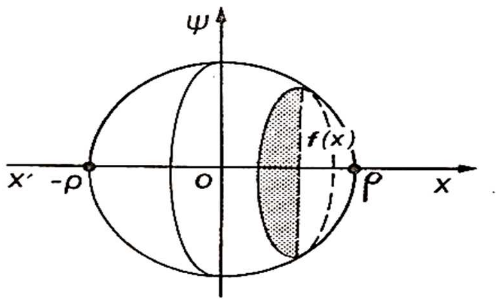
Χωρίο οριζόμενο από δύο καμπύλες με εξισώσεις $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x)$, περιστρέφεται περί τον άξονα $yy'$. Ο όγκος του στερεού σώματος που προκύπτει, είναι $V = \pi\int_{\alpha}^{\beta}\left(y_1^2 - y_2^2\right)dx$



## Όγκος της σφαίρας

Έστω ημικύκλιο με εξίσωση $f\left(x\right)=\sqrt{\rho^2-x^2}$ στο επίπεδο $Oxyz$. Αν στραφεί περί τον άξονα $xx'$, τότε το στερεό σώμα εκ περιστροφής που σχηματίζεται είναι σφαίρα, ακτίνας $\rho$ και όγκου

$$V=\int_{-p}^{p}\pi\cdot f^2(x)dx=\pi\int_{-p}^{p}\left(\rho^2-x^2\right)dx=\pi\left[\rho^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\rho}^{\rho}=\frac{4}{3}\pi\rho^3$$

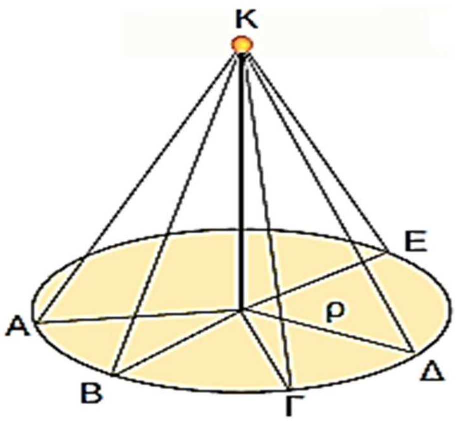


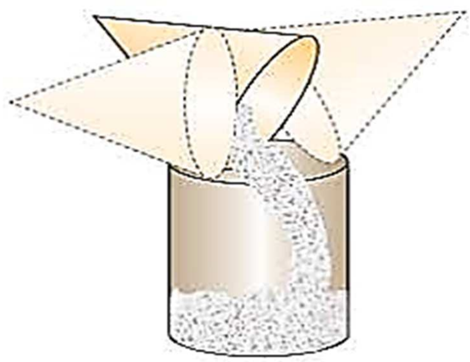

## Παρατήρηση 6

Για τον υπολογισμό του όγκου ενός ορθού κώνου με ακτίνα βάσης $\rho$ και ύψος $h$, θεωρώ ότι η ευθεία με εξίσωση $y=\frac{p}{h}x$ στρέφεται περί τον άξονα $xx'$,

οπότε ο όγκος είναι $V=\int_{0}^{h}\pi\cdot f^2(x)dx=\int_{0}^{h}\pi\cdot\frac{\rho^2}{h^2}x^2dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi\rho^2h$

Ομοίως, για τον όγκο ενός ορθού κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $\rho$ και ύψος $h$, θεωρώ ότι η ευθεία $y=\rho$ στρέφεται περί τον $xx'$, άρα είναι $V\int_{\alpha}^{a+h}\pi\cdot\rho^2dx=\pi\rho^2h$



## Εφαρμογή 79

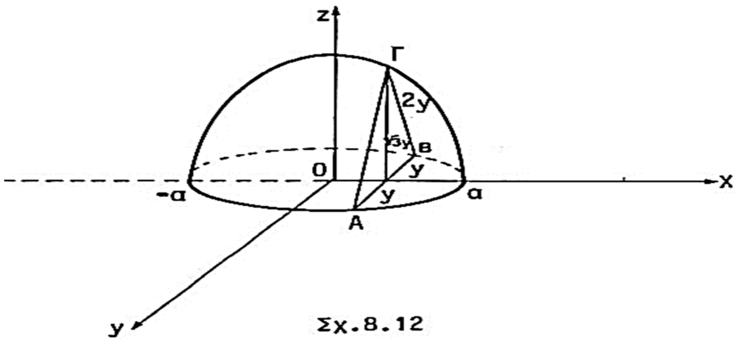
Έστω στερεό σώμα με κυκλική βάση, ακτίνας $a$. Εύρεση του όγκου του, αν κάθε κάθετη τομή του επιπέδου, σε μια σταθερή διάμετρο, είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Παίρνω ως σταθερή διάμετρο, αυτή που κείται πάνω στον άξονα $Ox$

Η εξίσωση του κύκλου, δίνεται από τη σχέση $x^2+y^2=\alpha^2$

Το ισόπλευρο τρίγωνο βάσης $2y$ και ύψους $\sqrt{3}y$, έχει εμβαδό $A(x)=\frac{1}{2}2y\sqrt{3}y=\sqrt{3}y^2$ και από την $y^2=\alpha^2-x^2$ είναι $A(x)=\sqrt{3}\left(\alpha^2-x^2\right)$

Άρα, $V=\sqrt{3}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)\,dx=\sqrt{3}\left[\alpha^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{4\sqrt{3}\alpha^3}{3}$



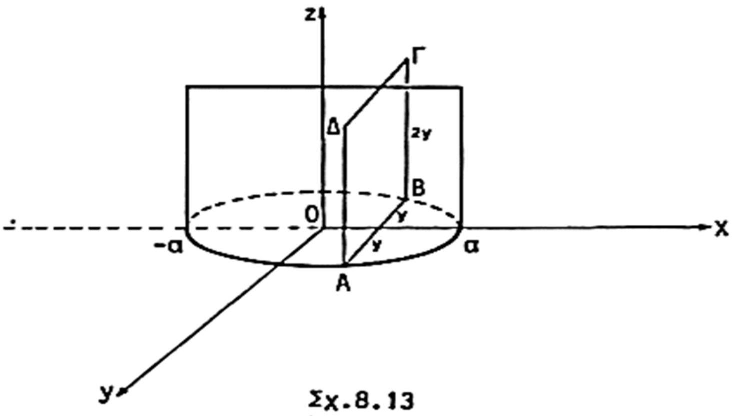

Σχ.8.12

## Εφαρμογή 80

Το προηγούμενο παράδειγμα, αν η κάθετη τομή είναι ένα τετράγωνο.
Το τετράγωνο έχει πλευρά $2y$ και εμβαδό $A(x)=4y^2$

Από την εξίσωση του κύκλου είναι $y^2=\alpha^2-x^2$, άρα( $A(x)=4\left(\alpha^2-x^2\right)$

Συνεπώς, $V=4\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\alpha^2-x^2\right)\,dx=4\left[\alpha^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{16\alpha^3}{3}$




Σχ.8.13

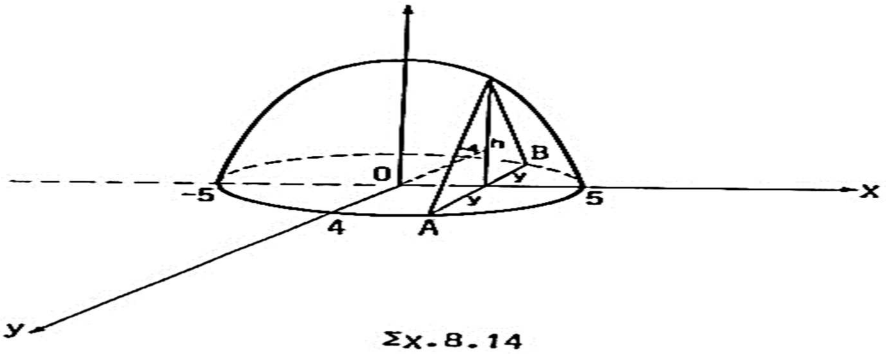
## Εφαρμογή 81

Ένα στερεό σώμα έχει ως βάση του μία έλλειψη με μικρό άξονα μήκους 8 και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{3}{5}$. Βρείτε τον όγκο του στερεού σώματος, αν κάθε τομή στον μεγάλο άξονα είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο ύψους $h$

Έστω ότι ο μεγάλος άξονας βρίσκεται στον $xx'$ άξονα. Αφού $2\beta=8\Leftrightarrow\beta=4$

Είναι $\frac{y}{\alpha}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{y^2}{\alpha^2}=\frac{9}{25}\Leftrightarrow\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\frac{9}{25}\Leftrightarrow\alpha=5$

Τότε, η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

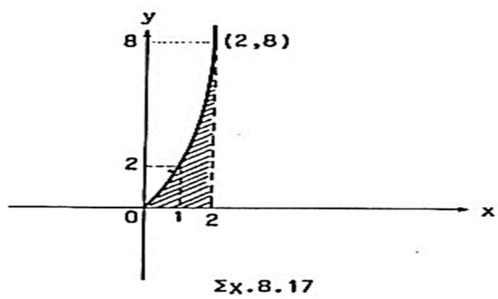



Σχ.8.14

Το ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση $2y$ και ύψος $h$. Άρα, $A(x)=\frac{1}{2}2yh=yh$ και επειδή από την εξίσωση της έλλειψης ισχύει ότι $y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$ είναι $A(x)=\frac{4h}{5}\sqrt{25-x^2}$. Ο όγκος είναι $V=\frac{4}{5}h\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx=10\pi h$

## Εφαρμογή 82

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y=2x^2$ περί τον άξονα $xx'$ και περικλείεται από τις ευθείες $x=0,\ x=2$




Σχ.8.17

Ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης περί τον $xx'$ άξονα, είναι $V=\pi\int_0^2\left(2x^2\right)^2dx=4\pi\int_0^2 x^4dx=4\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{128\pi}{5}$

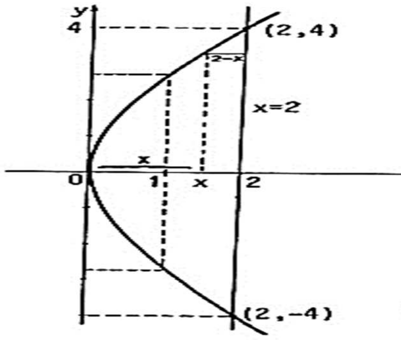
## Εφαρμογή 83

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα $yy'$, της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y^2=8x$ και από την ευθεία $x=2$

Εύρεση των σημείων τομής της καμπύλης $x=\frac{y^2}{8}$ και της ευθείας $x=2$

Αυτά είναι τα $(2,\ 4)$ και $(2,\ -4)$ Η ολοκλήρωση θα γίνει κατά μήκος του άξονα $yy'$ Επειδή $\forall x \in [4,\ -4]$, η ευθεία είναι πάνω από την παραβολή, ισχύει ότι

$$V = \pi\int_{-4}^{4}\left[4-\frac{y^4}{64}\right]dy = 2\pi\int_{0}^{4}\left[4-\frac{y^4}{64}\right]dy = 2\pi\left[4y-\frac{y^5}{320}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}$$




Σχ.8.18

## Εφαρμογή 84

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της προηγουμένης παραβολής, περί την ευθεία $x=2$

Επειδή η $x=2$ είναι παράλληλη με τον $yy'$ άξονα είναι

$$V = \int_{-4}^{4}\left[2-\frac{y^2}{8}\right]^2 dy = 2\pi\int_{0}^{4}\left[2-\frac{y^2}{8}\right]^2 dy = \frac{256\pi}{15}$$

## Εφαρμογή 85

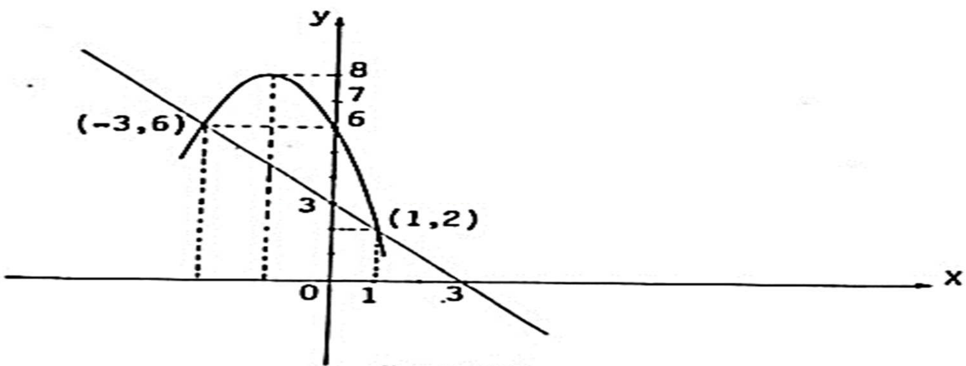
Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, περί τον άξονα $xx'$, της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y=-x^2-3x+6$ και από την ευθεία $x+y=3$

Τα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθεία είναι τα $(-3,\ 6)$ και $(1,\ 2)$

$\forall x \in [-3,\ 1]$ η παραβολή είναι πάνω από την ευθεία. Άρα,

$$V = \pi\int_{-3}^{1}\left[\left(-x^2-3x+6\right)^2-\left(x-3\right)^2\right]dx =$$

$$\pi\int_{-3}^{1}\left(x^4+6x^3-4x^2-30x+27\right)dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{30x^2}{2}+27x\right]_{-3}^{1} = 119{,}5\pi$$




Σχ.8.20

**Εφαρμογή 86**

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται όταν η κυκλοειδή καμπύλη $x = \theta - sin\theta,\ y = 1 - cos\theta$, περιστραφεί περί τον άξονα $xx'$

Η μεταβολή της γωνίας είναι από $0$ έως $2\pi$ και ο όγκος δίνεται από τον τύπο

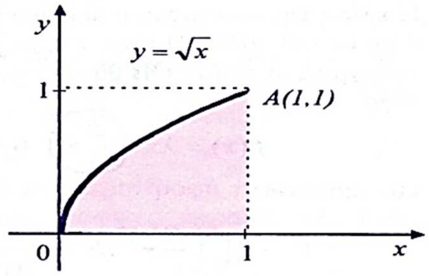
$$V = \pi\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi\int_0^{2\pi}\left(1-cos\theta\right)^2 d\left(\theta - sin\theta\right) = \pi\int_0^{2\pi}\left(1-cos\theta\right)^2(1-cos\theta)\,d\theta =$$

$$\pi\int_0^{2\pi}\left(1-cos\theta\right)^3 d\theta = \pi\int_0^{2\pi}\left(1-3cos\theta+3cos^2\theta-cos^3\theta\right)\,d\theta = 5\pi^2$$

**Εφαρμογή 87**

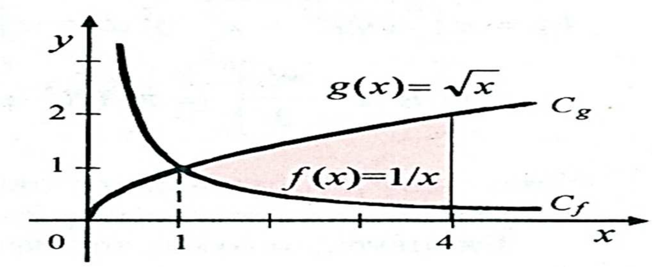
Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει όταν περιστραφεί περί τον άξονα $xx'$ το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$, τον άξονα $xx'$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$

Είναι $V = \pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$




**Εφαρμογή 88**

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει όταν περιστραφεί περί τον άξονα $xx'$ το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=4$




Ισχύει ότι $\sqrt{x} \ge \frac{1}{x} \ge 0\quad \forall x \in [1,\ 4]$

Συνεπώς, $V = \pi\int_1^4\left[g^2(x) - f^2(x)\right]dx =$

$$\pi\int_1^4\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right]dx =$$

$$\pi\int_1^4\left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$\pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right]_1^4=$$

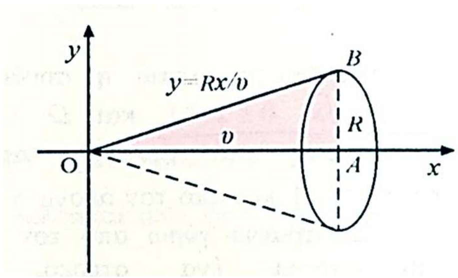
$$\pi\left[\left(\frac{4^2}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1^2}{2}+\frac{1}{1}\right)\right]=$$

$$\pi\left(8+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1\right)=\pi\left(7-\frac{1}{4}\right)=\frac{27\pi}{4}$$

**Εφαρμογή 89**

Εύρεση του όγκου $V$ του κώνου που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$ του ορθογωνίου τριγώνου $\mathrm{OAB}$, αν $\upsilon=\mathrm{OA}$ και $\mathrm{AB}=R$

Τα σημεία $\mathrm{O}(0,\ 0)$ και $\mathrm{B}(\upsilon,\ R)$ ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OB}$ που έχει κλίση $\lambda=\frac{R}{\upsilon}$ Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OB}$ περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x)=\frac{R}{\upsilon}x$ με $x\in[0,\ \upsilon]$




Άρα, $V=\pi\int_0^{\upsilon}\left(\frac{R}{\upsilon}x\right)^2 dx=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon}x^2\ dx=$

$$\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\upsilon}=\pi\frac{R^2}{\cancel{\upsilon^2}}\frac{\upsilon^3}{3}=\frac{\pi R^2\upsilon}{3}$$

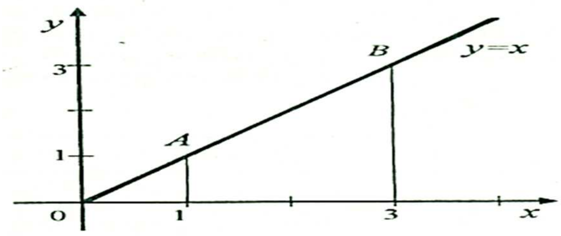
**Εφαρμογή 90**

Ποιος τύπος περιγράφει τον όγκο $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{AB}$, περί τον άξονα $xx'$;

**(α)** $V=\int_1^3 x\ dx$ **(β)** $V=\int_1^3 x^2\ dx$ **(γ)** $V=\int_1^3 x^3\ dx$ **(δ)** $V=\pi\int_1^3 x\ dx$

**(ε)** $V=\pi\int_1^3 x^2\ dx$ **(στ)** $V=\pi\int_1^3 x^3\ dx$ **(ζ)** $V=\pi^2\int_1^3 x\ dx$ **(η)** $V=\pi^2\int_1^3 x^2\ dx$

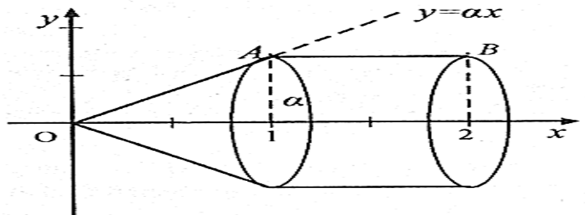
**(θ)** $V=\pi^2\int_1^3 x^3\ dx$




Σωστός, είναι ο τύπος **(ε)** $V=\pi\int_1^3 x^2\ dx$

**Εφαρμογή 91**

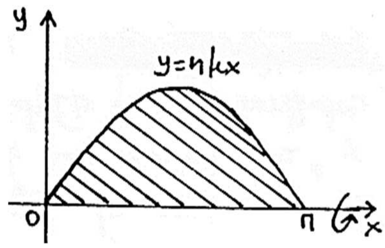
Ποιος τύπος περιγράφει τον όγκο $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, της τεθλασμένης γραμμής ΟΑΒ ;




Είναι $V=\pi\int_0^1(\alpha x)^2\,dx+\pi\int_1^2\alpha^2\,dx$

**Εφαρμογή 92**

Βρείτε τον όγκο $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει, από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\eta\mu x$ με $x\in[0,\ \pi]$ και από τον άξονα $xx'$




Είναι $V=\pi\int_0^\pi y^2\,dx=\pi\int_0^\pi \eta\mu^2 x\,dx=$

$\pi\int_0^\pi\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(1-\sigma\upsilon\nu(2x)\right)dx=$

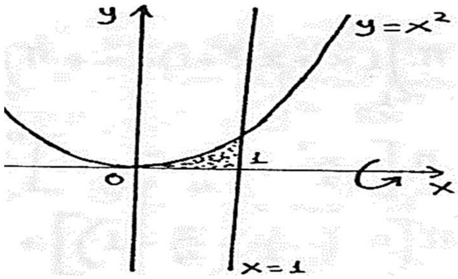
$\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\eta\mu(2x)\right]_0^\pi=$

$\frac{\pi}{2}\left[\pi-\frac{1}{2}\eta\mu(2\pi)-0+\frac{1}{2}\eta\mu 0\right]=$

$\frac{\pi}{2}\left(\pi\cancel{-\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}}0\right)=\frac{\pi^2}{2}$

**Εφαρμογή 93**

Εύρεση του όγκου $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει, από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2$, από τον θετικό ημιάξονα $Ox$ και από την ευθεία με εξίσωση $x=1$




Είναι $V=\pi\int_0^1 y^2\,dx=$

$\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx=$

$\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right)=\frac{\pi}{5}$

**Εφαρμογή 94**

Εύρεση του όγκου $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει, από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=x^3+1$, $y=1-x$ και από τον άξονα $xx'$

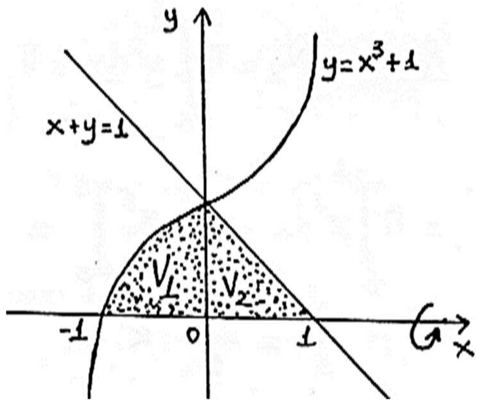
Είναι $V=V_1+V_2=$

$$\pi\int_{-1}^{0}\left(x^3+1\right)^2\,dx+\pi\int_{0}^{1}(1-x)^2\,dx=$$

$$\pi\int_{-1}^{0}\left(x^6+2x^3+1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx=$$

$$\pi\left[\frac{x^7}{7}+\frac{2x^4}{4}+x\right]_{-1}^{0}+\pi\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=$$

$$\pi\left[0-\left(-\frac{1}{7}+\frac{2}{4}-1\right)\right]+\pi\left[0-\frac{(-1)^3}{3}\right]=$$




$$\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{4}+1+\frac{1}{3}\right)=\pi\frac{6-21+42+14}{42}=\frac{41\pi}{42}$$

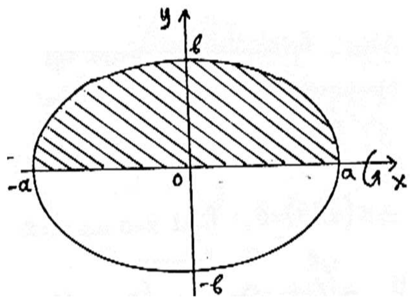
**Εφαρμογή 95**

Εύρεση του όγκου $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει όταν το χωρίο που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, περιστραφεί κατά γωνία $\pi$ περί τον άξονα: (**α**) $xx'$ (**β**) $yy'$

(**α**) Όταν η έλλειψη στραφεί περί τον οριζόντιο άξονα $xx'$ κατά γωνία $\pi$, τότε παράγει τον ίδιο όγκο που παράγεται από την περιστροφή του γραμμοσκιασμένου άνω μισού τμήματος της έλλειψης κατά γωνία $2\pi$, δηλαδή κατά μία ολόκληρη περιστροφή. Είναι $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\beta^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=\beta^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$

Συνεπώς, $V=\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}y^2\,dx=$

$$\pi\int_{-a}^{a}\beta^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$




$$\pi\beta^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

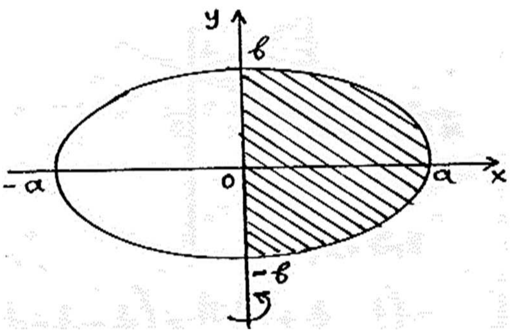
$$2\pi\beta^2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$2\pi\beta^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=$$

$$2\pi\beta^2\left[a-\frac{a^{\cancel{3}}}{3\cancel{a^2}}\right]=2\pi\beta^2\frac{2a}{3}=\frac{4\pi a\beta^2}{3}$$

(**β**) Όταν η έλλειψη στραφεί περί τον κατακόρυφο άξονα $yy'$ κατά γωνία $\pi$, τότε παράγει τον ίδιο όγκο που παράγεται από την περιστροφή του γραμμοσκιασμένου δεξιού μισού τμήματος της έλλειψης κατά γωνία $2\pi$, δηλαδή κατά μία ολόκληρη περιστροφή. Είναι $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{\beta^2} \Leftrightarrow x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{\beta^2}\right)$

Συνεπώς, $V=\pi\int_{-\beta}^{\beta} x^2\,dy=$




$$\pi\int_{-\beta}^{\beta} a^2\left(1-\frac{y^2}{\beta^2}\right)dy=$$

$$\pi a^2\int_{-\beta}^{\beta}\left(1-\frac{y^2}{\beta^2}\right)dy=$$

$$2\pi\alpha^2\int_{0}^{\beta}\left(1-\frac{y^2}{\beta^2}\right)dy=$$

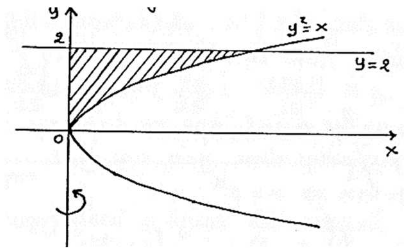
$$2\pi a^2\left[y-\frac{y^3}{3\beta^2}\right]_0^{\beta}=$$

$$2\pi\alpha^2\left[\beta-\frac{\beta^{\cancel{3}}}{3\cancel{\beta^2}}\right]=2\pi\alpha^2\frac{2\beta}{3}=\frac{4\pi a^2\beta}{3}$$

## Εφαρμογή 96

Βρείτε τον όγκο $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $yy'$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y^2=x$, την ευθεία $y=2$ και τον άξονα $yy'$

Είναι $V=\pi\int_0^2 x^2\,dy=\pi\int_0^2 y^4\,dy=\pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^5=\frac{32\pi}{5}$




## Εφαρμογή 97

Βρείτε τον όγκο $V$ του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $yy'$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y=lnx$, τον άξονα $xx'$ και την ευθεία με εξίσωση $x=e$

Λύνω το σύστημα $\left\{\begin{matrix} y=lnx \\ x=e \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y=lne=1$

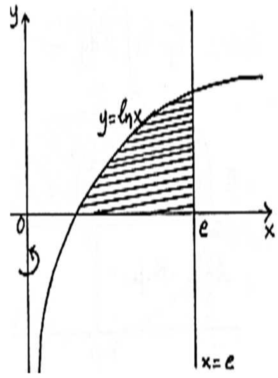
Άρα τα άκρα της ολοκλήρωσης είναι $y=0$ και $y=1$ Επίσης $y=lnx \Leftrightarrow x=e^y$

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left(x_1^2-x_2^2\right)\,dy=$$

$$\pi\int_{0}^{1}\left(e^2-e^{2y}\right)\,dy=$$

$$\pi\left[ye^2-\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1=$$

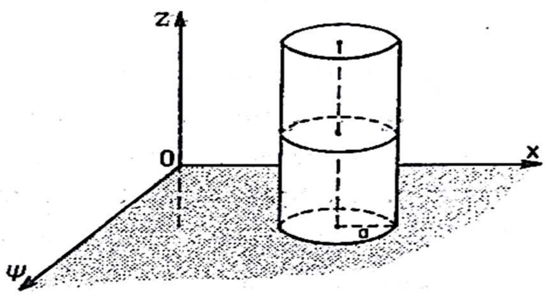
$$\pi\left[e^2-\frac{1}{2}e^2-0+\frac{1}{2}e^0\right]=\pi\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)=\pi\frac{e^2+1}{2}$$




## Όγκος κυλίνδρου

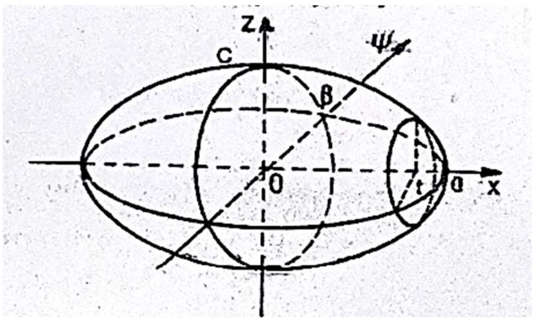
Εύρεση όγκου του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $r$ και ύψος $h$

Θεωρώ το επίπεδο $xOy$ ως επίπεδο της μιας βάσης του κυλίνδρου. Ο τύπος $V=\int_{\alpha}^{\beta}E(t)\,dt$ δίνει $V=\int_0^h \pi r^2 dt=\pi r^2\int_0^h dt=\pi r^2[t]_0^h=\pi r^2 h$




## Όγκος ελλειψοειδούς

Εύρεση όγκου του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$




Θα βρω την τομή του ελλειψοειδούς με το επίπεδο $x=t$ Η $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ γράφεται ως $\frac{t^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\Leftrightarrow\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{t^2}{a^2}\Leftrightarrow\frac{y^2}{\beta^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}=1$

Η $\frac{y^2}{\beta^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}=1$ είναι έλλειψη με ημιάξονες $\beta\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}$

Το εμβαδό της έλλειψης είναι $E=\pi\cdot\beta\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}c\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}=\pi\cdot\beta\cdot c\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)$ με $-a\le t\le a$

Ο όγκος είναι $V=\int_{-\alpha}^{\alpha}\pi\cdot\beta\cdot c\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)dt=\pi\cdot\beta\cdot y\left[t-\frac{t^3}{3\alpha^2}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{4}{3}\pi\cdot\alpha\cdot\beta\cdot c$

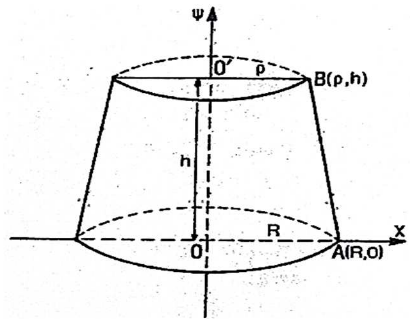
## Όγκος ορθού κόλουρου κώνου

Εύρεση όγκου του ορθού κόλουρου κώνου με ακτίνες βάσεων $R$, $r$ και ύψος $h$

Το στερεό σώμα, παράγεται από την περιστροφή του τραπεζίου ΟΑΒΟ΄ περί τον κατακόρυφο άξονα $yy'$. Είναι $A(R,0), B(\rho,h)$. Η έξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι $\frac{x-R}{\rho-R}=\frac{y-0}{h-0}\Leftrightarrow x=\frac{Rh-(\rho-R)y}{h}$ ή διαφορετικά $y=\frac{(x-R)h}{\rho-R}$ και για $y_1=0$, $y_2=h$ ισχύει ότι $V=\pi\int_0^h\frac{\left(Rh-(R-\rho)y\right)^2}{h^2}dy=$

$\frac{\pi}{h^2}\int_0^h\left(R^2h^2-2Rh(R-\rho)y+(R-\rho)^2y^2\right)\,dy=$

$=\cdots=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+\rho^2+R\rho\right)$




## Εφαρμογή 98

Εύρεση όγκου του στερεού που παράγεται με περιστροφή της επιφάνειας που ορίζεται από τον κύκλο $(x-a)^2+y^2=R^2$, περί τον άξονα $yy'$ όπου $a>R$

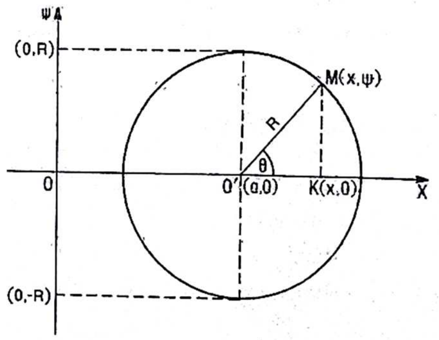
Εύρεση της εξίσωσης του κύκλου με παραμετρικές εξισώσεις. Από το σχήμα έχω ότι $x-a=R\cos\theta\Leftrightarrow x=a+R\cos\theta\Leftrightarrow x^2=\left(a+R\cos\theta\right)^2$ και $y=R\sin\theta\Leftrightarrow dy=R\cos\theta$

Όταν η γωνία $\theta$ μεταβάλλεται από 0 έως $2\pi$, το σημείο Μ διανύει έναν πλήρη κύκλο.

$V=\pi\int_{y1}^{y_2}x^2dy=$

$\pi\int_0^{2\pi}(\alpha+R\sigma\upsilon\nu\theta)^2\,R\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta=$

$\pi\int_0^{2\pi}\left(\alpha^2+2\alpha R\sigma\upsilon\nu\theta+R^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)R\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta=$




$\pi\alpha^2R\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta+2\pi\alpha R^2\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^2\theta\,d\theta+\pi R^3\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^3\theta\,d\theta=$

$\pi\alpha^2R\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta+2\pi\alpha R^2\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^2\theta\,d\theta+\pi R^3\int_0^{2\pi}\left(1-\eta\mu^2\theta\right)\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta=$

$\left[\pi\alpha^2R\eta\mu\theta+\pi\alpha R^2\left(\theta+\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\right)+\pi R^3\eta\mu\theta-\frac{\pi}{3}R^3\eta\mu^3\theta\right]_0^{2\pi}=$

$2\pi^2\alpha R^2$

### Εφαρμογή 99

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες $xx'$, $yy'$ και από την παραβολή $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}}$

Εύρεση των σημείων τομής της παραβολής με τους άξονες.

- $x=0 \Leftrightarrow 0^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y=a$
- $y=0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}}+0^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=a$ Άρα, το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $[0,a]$

Από $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y=\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2$ έπεται ότι $V=\pi\int_0^\alpha y^2dx=\pi\int_0^\alpha\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^4 dx=$

$$\pi\int_0^\alpha\left(a^2-4a^{3/2}x^{\frac{1}{2}}+6ax-4a^{\frac{1}{2}}x^{3/2}+x^2\right)dx=$$

$$\frac{\pi a^3}{15}$$

### Εφαρμογή 100

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $yy'$, του χωρίου που ορίζεται από ένα τόξο της $x=\tau o\xi\sin y$

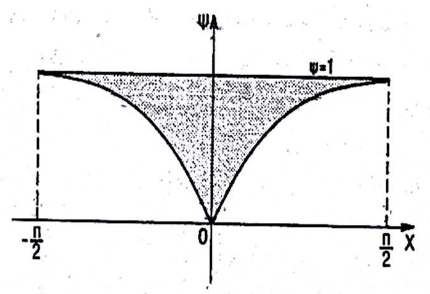
Αν $y=\sin x$ τότε $x=\tau o\xi\sin y$

Άρα, $V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy=\pi\int_0^1(\tau o\xi\sin y)^2\,dy$

Θέτω $t=\tau o\xi\sin y \Leftrightarrow y=\sin t \Leftrightarrow dy=\cos t\,dt$

- Αν $y=0$ τότε $t=0$
- Αν $y=1$ τότε $t=\dfrac{\pi}{2}$

Άρα, $V=\pi\int_0^{\pi/2}t^2\cos t\,dt=\dfrac{\pi\left(\pi^2-8\right)}{4}$




### Εφαρμογή 101

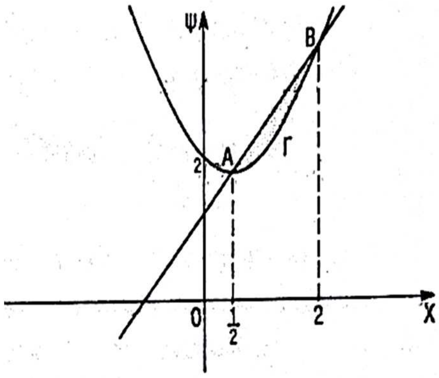
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή, $y=\dfrac{x^2}{4}+2$ και από την ευθεία $5x-8y+14=0$

Λύνοντας το $\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{4}+2 \\ 5x-8y+14=0 \end{array}\right\}$, βρίσκω τα σημεία τομής $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{33}{16}\right)$, $B(2,3)$ και χρησιμοποιώ τις τετμημένες τους $x_A=\dfrac{1}{2}$, $x_B=2$

Από $y_1(x)=\dfrac{x^2}{4}+2$ και από $y_2(x)=\dfrac{5}{8}x+\dfrac{7}{4}$ προκύπτει ότι ο ζητούμενος όγκος είναι $V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[y_2(x)^2-y_2(x)^2\right]dx=$

$$\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{5}{2}x+7\right)^2-\left(\frac{1}{4}x^2+2\right)^2\right]dx=$$

$$\frac{891}{1280}\pi$$



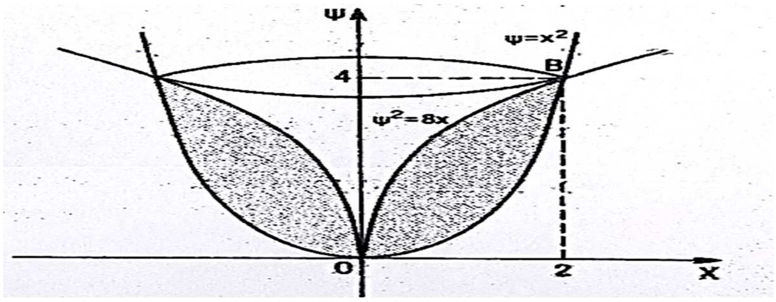

## Εφαρμογή 102

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα $yy'$, του χωρίου που ορίζεται από τις παραβολές $y=x^2$ και $y^2=8x$

**Λύση**

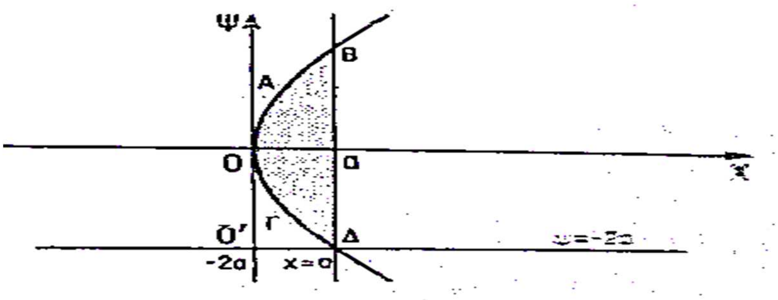
Λύνοντας το $\begin{Bmatrix} y=x^2 \\ y^2=8x \end{Bmatrix}$, βρίσκω τα σημεία τομής $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{B}(2,4)$ και χρησιμοποιώ τις τεταγμένες τους $y_1=0$ και $y_2=4$. Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν οι συναρτήσεις $x_1(y)=\sqrt{y}$, $x_2(y)=\dfrac{y^2}{8}$ και ισχύει ότι $\sqrt{y}\geq\dfrac{y^2}{8}$

Άρα, $V=\pi\int_0^4\left(y-\dfrac{y^4}{64}\right)dy=\dfrac{24\pi}{5}$




## Εφαρμογή 103

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που σχηματίζεται από την περιστροφή περί την ευθεία $y=-2a$, του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y^2=4ax$ και από την ευθεία $x=a$, με $a>0$



Θεωρώ νέο σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το σημείο $O'(0,-2a)$ οπότε η εξίσωση της παραβολής στο νέο σύστημα είναι $(y-2\alpha)^2=4\alpha x$ και δίνει τις συναρτήσεις $y_1(x)=2\alpha-\sqrt{4\alpha x}$ για την καμπύλη ΟΓΔ και

$y_2(x)=2\alpha+\sqrt{4\alpha x}$ για την καμπύλη ΟΑΒ

Ο ζητούμενος όγκος είναι $V=\pi\int_0^\alpha\left(y_2^2-y_1^2\right)dx=$

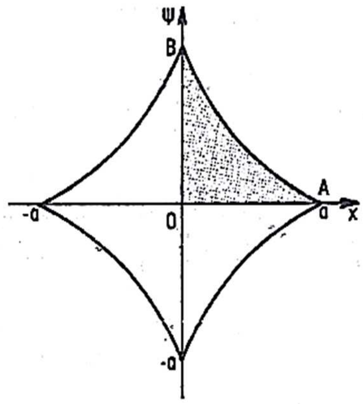
$$\pi\int_0^\alpha\left[\left(2\alpha+2\sqrt{\alpha x}\right)^2-\left(2\alpha-2\sqrt{\alpha x}\right)^2\right]dx=$$

$$\frac{32}{3}\pi\alpha^3$$

**Εφαρμογή 104**

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη (c) με παραμετρικές εξισώσεις $x=a\cos^3 t$ , $y=a\sin^3 t$ (αστροειδής).

Ο ζητούμενος όγκος $V$ ισούται με το διπλάσιο του όγκου που σχηματίζεται από την περιστροφή του χωρίου ΟΑΒ, δηλαδή είναι $V=2\pi\int_0^\alpha y^2dx$




Είναι $x=a\cos^3 t \Leftrightarrow dx=-3a\cos^2 t\cdot\sin t\ dt$

- Όταν $x=0$ τότε η $x=a\cos^3 t$ δίνει $t=\dfrac{\pi}{2}$
- Όταν $x=\alpha$ τότε η $x=a\cos^3 t$ δίνει $t=0$

Άρα, $V=2\pi\int_{\pi/2}^0\alpha^2\sin^6 t\left(-3\alpha\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt=$

$$6\pi\alpha^3\left[-\int_0^{\pi/2}\sin^9 t\ dt+\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\ dt\right]=$$

$$\frac{32}{105}\pi\alpha^3$$

**Εφαρμογή 105**

Τόξο της καμπύλης $y=\dfrac{\alpha}{2}\left(e^{x/\alpha}+e^{-x/\alpha}\right)=ach\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$ όπου $\alpha>0$, με πέρατα τετμημένων $0$ και $x$ αντίστοιχα, περιστρέφεται περί τον άξονα $xx'$. Αν $E$ το εμβαδό της επιφάνειας και $V$ ο όγκος του στερεού σώματος που παράγονται από την περιστροφή, δείξτε ότι $E=\dfrac{2V}{a}$

Είναι $y=\left(ach\left(\dfrac{x}{a}\right)\right)'=sh\left(\dfrac{x}{a}\right)$ και $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+sh^2\left(\dfrac{x}{a}\right)}=ch\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$$E=2\pi\int_a^x y\sqrt{1+(y')^2}\ dx=$$

$$2a\pi\int_0^x ch^2\left(\frac{x}{a}\right)dx=$$

$$\frac{2\pi}{a}\int_0^x a^2ch^2\left(\frac{x}{a}\right)dx=$$

$$\frac{2}{a}\left[\pi\int_{0}^{x} a^2 ch^2\left(\frac{x}{a}\right)\, dx\right] =$$

$$\frac{2}{a}\left(\pi\int_{0}^{x} y^2\, dx\right) = \frac{2V}{a}$$

**Εφαρμογή 106**

Υπολογισμός όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα $xx'$, του χωρίου που περικλείεται από τον ημιάξονα $Ox'$ και από το τόξο της καμπύλης $y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ με $x \in (-\infty, 0)$

Είναι $V = \pi\int_{-\infty}^{0} y^2 dx = \pi\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{2/x}}{x^2}\, dx =$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^-\\ \lambda\to-\infty}}\int_{\lambda}^{\varepsilon}\frac{e^{2/x}}{x^2}\, dx =$$

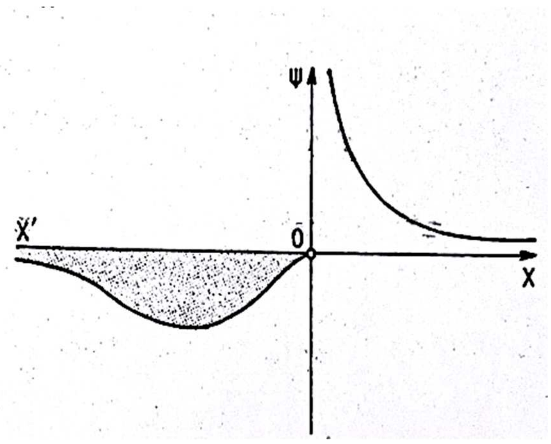
$$\frac{-\pi}{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^-\\ \lambda\to-\infty}}\int_{\lambda}^{\varepsilon} e^{2/x}\, d\left(\frac{2}{x}\right) =$$

$$\frac{-\pi}{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^-\\ \lambda\to-\infty}}\left[e^{2/x}\right]_{\lambda}^{\varepsilon} =$$

$$\frac{-\pi}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^-}\left[e^{2/\varepsilon} - e^{2/\lambda}\right] =$$

$$\frac{-\pi}{2}\left[\lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(e^{2/\varepsilon}\right) - \lim_{\lambda\to-\infty}\left(e^{2/\lambda}\right)\right] =$$

$$\frac{-\pi}{2}(0-1) = \frac{\pi}{2}$$




**Εφαρμογή 107**

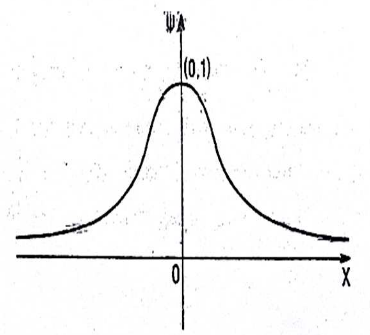
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ περί την οριζόντια ασύμπτωτη της.

Ο άξονας $xx'$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη, διότι για $x \to \pm\infty$ είναι $\lim f(x) = 0$

Είναι $V = \pi\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx = \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

Θέτω $x = \tan\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \left(1+\tan^2\omega\right)\, d\omega$

- Όταν $x \to -\infty$ τότε $\omega \to \frac{-\pi}{2}$
- Όταν $x \to +\infty$ τότε $\omega \to \frac{\pi}{2}$



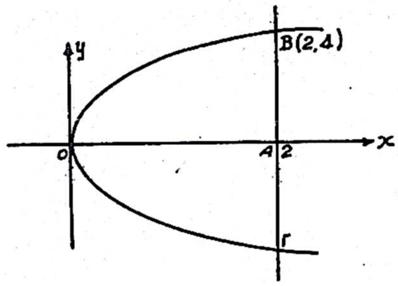
Άρα, $V=\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=$

$$\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\tan^2\omega}{\left(1+\tan^2\omega\right)^2}\,d\omega=\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\omega\,d\omega=$$

$$\pi\left[\frac{\omega}{2}+\frac{\sin(2\omega)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{2}$$

### Εφαρμογή 108

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $\mathrm{O}x$, του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y^2=8x$ και από την ευθεία $x=2$




$$V=\pi\int\limits_0^2 y^2\,dx=\pi\int\limits_0^2(8x)\,dx=(8\pi)\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2=16\pi$$

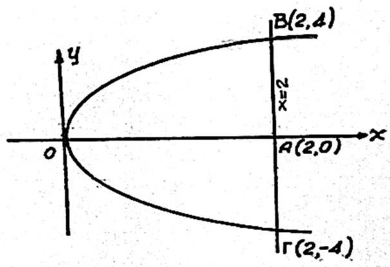
Πρόκειται για τον ολικό όγκο, διότι ότι στερεό σώμα που γράφει το τόξο (ΟΒ) συμπίπτει με το στερεό σώμα που γράφει το τόξο (ΟΓ), κατά την περιστροφή τους.

### Εφαρμογή 109

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί την ευθεία $x=2$, του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y^2=8x$ και από την ευθεία $x=2$

Θα κάνω αλλαγή του συστήματος των αξόνων. Οι γενικοί τύποι της αλλαγής του συστήματος των αξόνων είναι $\left\{\begin{matrix} x=a+x_1\cdot\cos\varphi-y_1\cdot\sin\varphi \\ y=\beta+x_1\cdot\sin\varphi+y_1\cdot\cos\varphi\end{matrix}\right\}$ όπου $\alpha,\beta$ οι συντεταγμένες της νέας αρχής και $\varphi$ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας $x_1$ του νέου συστήματος με τον άξονα $x$ του παλαιού συστήματος.

Αρχή είναι το σημείο $\mathrm{A}(2,0)$




Οι άξονες του νέου και του παλαιού συστήματος είναι παράλληλοι, άρα $\varphi=0$

Συνεπώς, οι $\left\{\begin{matrix} x=a+x_1\cdot\cos\varphi-y_1\cdot\sin\varphi \\ y=\beta+x_1\cdot\sin\varphi+y_1\cdot\cos\varphi\end{matrix}\right\}$

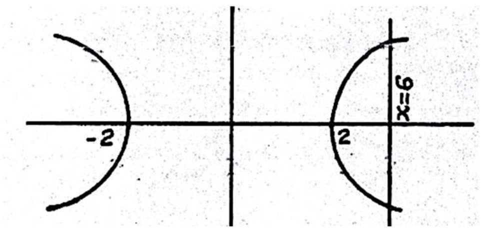
γίνονται $\left\{\begin{matrix} x=2+x_1 \\ y=y_1\end{matrix}\right\}$

Άρα, οι $\left\{\begin{matrix} x=2 \\ y^2=8x\end{matrix}\right\}$ γίνονται $\left\{\begin{matrix} x_1=0 \\ y_1^2=8(x_1+2)\end{matrix}\right\}$ δηλαδή η ευθεία $x_1=0$ είναι ο άξονας περιστροφής του νέου συστήματος.

Για να βρω τα άκρα ολοκλήρωσης, θέτω $x_1 = 0$ στην εξίσωση της καμπύλης οπότε $y_1 = \pm 4$ Άρα, $V = \pi \int_{-4}^{4} x_1^2 \, dy_1 = \pi \int_{-4}^{4} \left( 2 - \frac{y_1^2}{8} \right)^2 dy_1 = \frac{256\pi}{15}$

### Εφαρμογή 110

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του τόξου της υπερβολής $x^2 - y^2 = 4$ που βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $x = 6$, $y = 0$




$$V = \pi \int_{2}^{6} \left( x^2 - 4 \right) dx = \pi \left( \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Bigg|_2^6 = \frac{160\pi}{3}$$

### Εφαρμογή 111

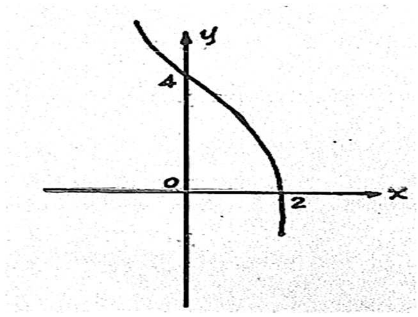
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Oy$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = 4 - \frac{x^3}{2}$ και από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 \sqrt[3]{(8-2y)^2} dy =$$

$$\pi \int_0^4 (8-2y)^{\frac{2}{3}} \, dy =$$

$$\frac{-\pi}{2} \int_0^4 (8-2y)^{\frac{2}{3}} \, d(8-2y) =$$

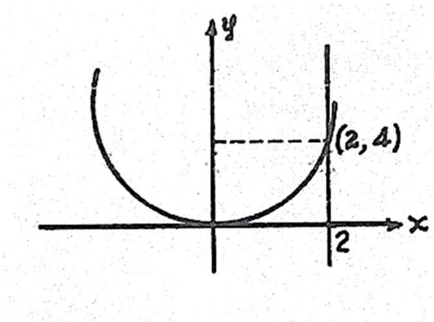
$$\frac{-\pi (8-2y)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{-5\pi}{4} (8-2y)^{\frac{5}{2}} \Bigg|_0^4 = 160\pi\sqrt{2}$$




### Εφαρμογή 112

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Oy$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = x^2$ και από τις ευθείες $y = 0$, $x = 2$

Ο ζητούμενος όγκος, ισούται με τον όγκο του στερεού σώματος που γράφει η ευθεία $x = 2$ μείον τον όγκο του στερεού σώματος που γράφει η καμπύλη $y = x^2$




Δηλαδή, $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left( x_1^2 - x_2^2 \right) dy =$

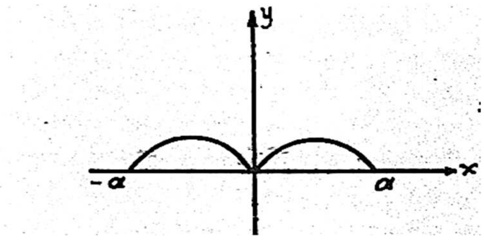
$$\pi \int_0^4 (4-y) \, dy = \pi \left( 4y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^4 = 8\pi$$

## Εφαρμογή 113

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y=x\sqrt{a^2-x^2}$ και από την ευθεία $y=0$

$$V=2\pi\int_0^a x^2\left(a^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^a\left(a^2x^2-x^4\right)dx=$$

$$2\pi\left(\frac{a^2x^3}{3}-\frac{x^6}{5}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4\pi}{15}a^5$$

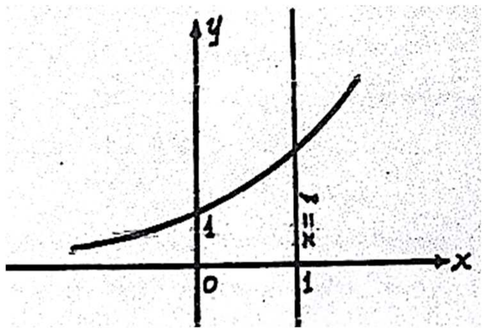



## Εφαρμογή 114

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την $y=e^x$ και από τις ευθείες $y=0$, $x=0$, $x=1$

$$V=\pi\int_0^1 e^{2\pi}\,dx=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(e^{2x}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^e-1\right)}{2}$$




## Εφαρμογή 115

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την $y=x\left(x^2-1\right)$ και από την ευθεία $y=0$

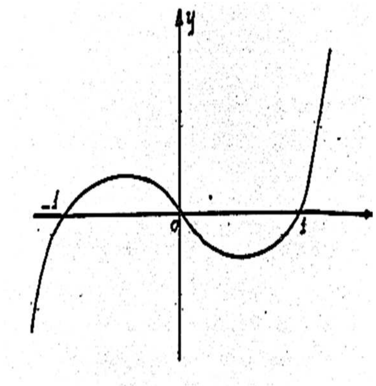
$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^2\right)^2dx=$$

$$2\pi\int_0^1\left(x^3-x\right)^2dx=$$

$$2\pi\int_0^1\left(x^6-2x^4+x^2\right)dx=$$

$$2\pi\left(\frac{x^7}{7}-2\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$2\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{16\pi}{105}$$




## Εφαρμογή 116

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ και από τις ευθείες $y=0$, $x=a$, $x=-a$

$$V = 2\pi \int_{0}^{\alpha} \frac{a^2}{4}\left( e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{10}{e}} \right)^2 dx =$$

$$2\frac{\pi a^2}{4}\int_0^a \left( e^{\frac{2\pi}{4}} + e^{\frac{3x}{2}} + 2 \right) dx =$$

$$\frac{\pi a^2}{2}\left[ \int_0^a e^{\frac{2\pi}{a^2}} dx + \int_0^a e^{\frac{-2\pi}{4}} dx + 2\int_0^a dx \right] =$$

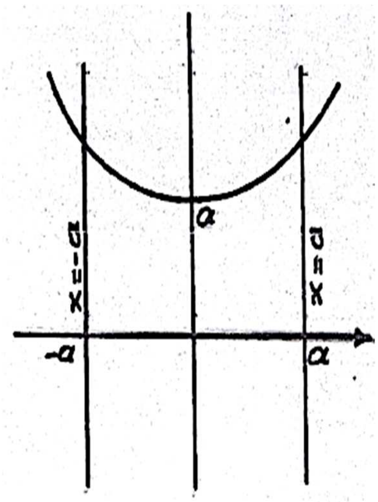
$$\frac{\pi a^2}{2}\left[ \frac{a}{2}\int_0^a e^{\frac{2\pi}{2}} d\left(\frac{2x}{a}\right) - \frac{a}{2}\int_0^a e^{\frac{-2x}{a}} d\left(\frac{-2x}{a}\right) + 2x \right] =$$

$$\frac{\pi a^2}{2}\left[ \frac{a}{2}e^{\left(\frac{2x}{a}\right)} - \frac{a}{2}e^{\left(\frac{-2x}{a}\right)} + 2 \right]_0^a =$$

$$\frac{\pi a^2}{2}\left[ \left( \frac{a}{2}e^2 - \frac{a}{2}e^{-2} + 2a \right) - \left( \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \right) \right] =$$

$$\frac{\pi a^3}{2}\left( \frac{e^2 - e^{-2} + 4}{2} \right) =$$

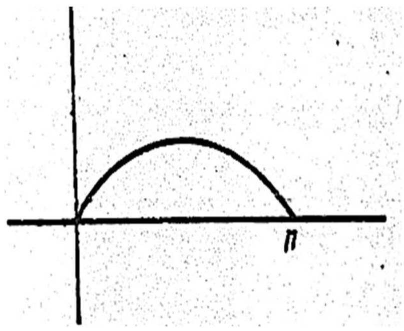
$$\frac{\pi a^3}{4}\left( \frac{e^4 + 4e^2 - 1}{e^2} \right)$$




## Εφαρμογή 117

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την $y = \sin^2 x$ και από την ευθεία $y = 0$

Για να βρω τα άκρα ολοκλήρωσης, θέτω $y = 0$ στην εξίσωση της καμπύλης οπότε $x = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix}$




Άρα, $V = \pi \int\limits_0^{\pi} \sin^4 x \, dx =$

$$\pi\left[ \frac{-\sin^3 x \cdot \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx \right] =$$

$$\pi\left[ \frac{-\sin^3 x \cdot \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left( \frac{-\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2} \right) \right]_0^{\pi} =$$

$$\pi\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{8}$$

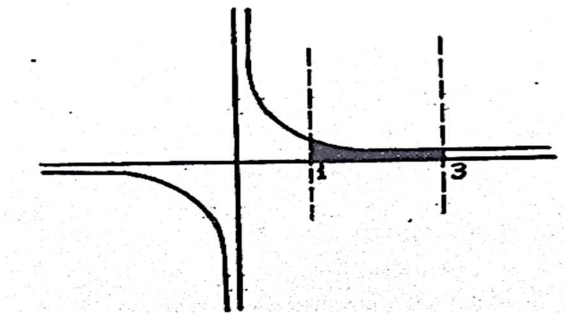
## Εφαρμογή 118

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την $xy = 1$ και από τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

$$V=\pi\int_1^3 y^2\,dx=$$

$$\pi\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx=\left.\frac{-\pi}{x}\right|_1^3=$$

$$\frac{-\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$$




**Εφαρμογή 119**

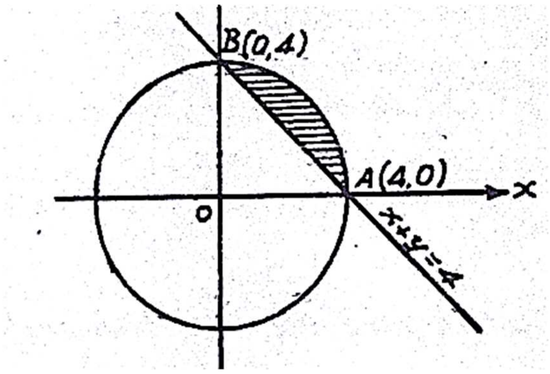
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x^2+y^2=16$ και από την ευθεία $x+y=4$

$$V=\pi\int_0^4\left(y_1^2-y_2^2\right)dx=$$

$$\pi\int_0^4\left[\left(16-x^2\right)-(4-x)^2\right]dx=$$

$$\pi\int_0^4\left(16-x^2-16+8x-x^2\right)dx=$$

$$\pi\left(64-\frac{128}{3}\right)=\frac{64\pi}{3}$$




**Εφαρμογή 120**

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2=4-x$ και από την ευθεία $x+2y=4$

$$V=\pi\int_0^4\left(y_1^2-y_2^2\right)dx=$$

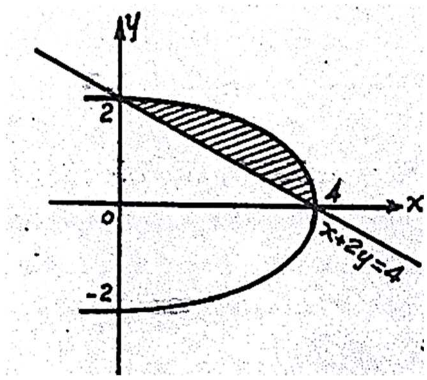
$$\pi\int_0^4\left(\left(4-x\right)-x-\left(\frac{4-x}{2}\right)^2\right)dx=$$

$$\pi\int_0^4\left(4-x-\frac{16+x^2-8x}{4}\right)dx=$$

$$\pi\int_0^4\frac{16-4x-16-x^2+8x}{4}\,dx=$$

$$\frac{\pi}{4}\int_0^4\left(4x-x^2\right)dx=$$

$$\frac{\pi}{4}\left.\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^4=\frac{\pi}{4}\frac{32}{3}=\frac{8\pi}{3}$$



### Εφαρμογή 121

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί την ευθεία $y=1$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y=x^2$ και από την ευθεία $y=x$

Κάνω αλλαγή των αξόνων $\left\{\begin{matrix} x=a+x_1 \\ y=\beta+y_1 \end{matrix}\right\}$, άρα $\left\{\begin{matrix} x=x_1 \\ y=1+y_1 \end{matrix}\right\}$, αρχή του συστήματος των αξόνων είναι το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$

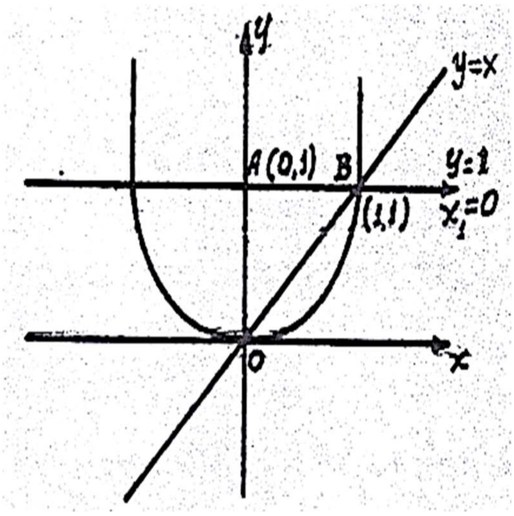
Άρα, $V=\pi\int_0^1 \left(y_1^2-y_2^2\right)\,dx_1=$

$$\pi\int_0^1 \left[\left(x_1^2-1\right)^2-\left(x_1-1\right)^2\right]dx_1=$$

$$\pi\int_0^1 \left(x_1^4-2x_1^2+1-x_1^2+2x_1-1\right)dx_1=$$

$$\pi\int_0^1 \left(x_1^4-3x_1^2+2x_1\right)dx_1=$$

$$\pi\left(\frac{x_1^5}{5}-x_1^3+x_1^2\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}-1+1\right)=\frac{\pi}{5}$$




### Εφαρμογή 122

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y=e^x\sin x$ και από τον άξονα $Ox$

$$V=\pi\int_0^\pi y^2\,dx=\pi\int_0^\pi e^{2x}\sin^2 x\,dx=$$

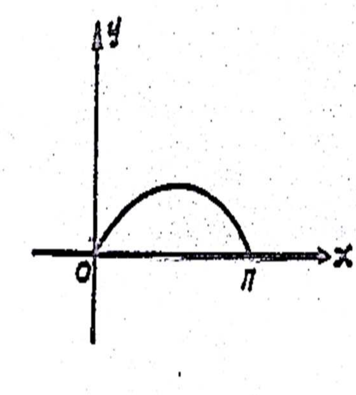
$$\pi\int_0^\pi e^{2x}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx=$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{2x}\,dx-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{2x}\cos^2 x\,dx=$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{2x}\,dx-\frac{\pi}{4}\int_0^\pi \cos(2x)\,d\left(e^{2x}\right)=$$

$$\frac{\pi}{4}\left(e^{2x}\right)\Big|_0^\pi-\frac{\pi}{4}\int_0^\pi \cos(2x)\,d\left(e^{2x}\right)=$$

$$\frac{\pi}{4}e^{2\pi}-\frac{\pi}{12}e^{2x}\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{6}\left(e^{2\pi}-1\right)$$




### Εφαρμογή 123

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης $x^4-a^2x^2+a^2y^2=0$ περί τον άξονα $Ox$

Ο όγκος είναι $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx$ Για να βρω τα άκρα της ολοκλήρωσης, θέτω $y=0$

οπότε $y=0 \Leftrightarrow x^4-a^2x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-a^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2\left(x-a\right)\left(x+a\right) \Leftrightarrow x=\left\{\begin{matrix} 0 \\ a \\ -a \end{matrix}\right\}$

Άρα, ολοκληρώνω από $0$ ως $a$ και διπλασιάζω ή από $-a$ ως $a$ και έχω τον ολικό όγκο. Άρα, $V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{a^2x^2-x^4}{a^2}\,dx=\frac{\pi}{a^2}\left(a^2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4\pi a^3}{15}$

**Εφαρμογή 124**

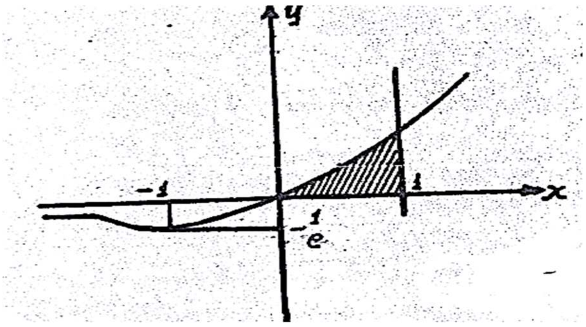
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y=xe^x$ και από τις ευθείες $y=0$ και $x=1$

$$V=\pi\int_0^1\left(x^2e^{2x}\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2\, d\left(e^{2x}\right)=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(x^2e^{2x}-\int_0^1\left(e^{2x}2x\right)dx\right)=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(x^2e^{2x}-\int_0^1 x\, d\left(e^{2x}\right)\right)=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(x^2e^{2x}-xe^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right)$$




**Εφαρμογή 125**

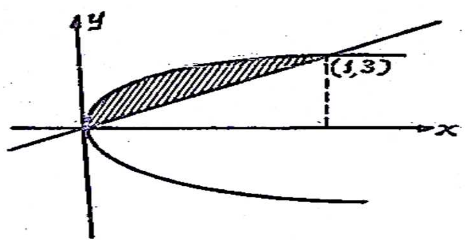
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2=9x$ και από την ευθεία $y=3x$

Ο ζητούμενος όγκος, ισούται με τον όγκο του στερεού σώματος πού γράφει η καμπύλη $y^2=9x$ μείον τον όγκο του στερεού σώματος που γράφει η ευθεία $y=3x$

$$V=\pi\int_0^1(9x)\,dx-\pi\int_0^1\left(9x^2\right)dx=$$

$$\frac{9\pi}{2}x^2\Big|_0^1-3\pi x^3\Big|_0^1=$$

$$\frac{9\pi}{2}-3\pi=\frac{3\pi}{2}$$

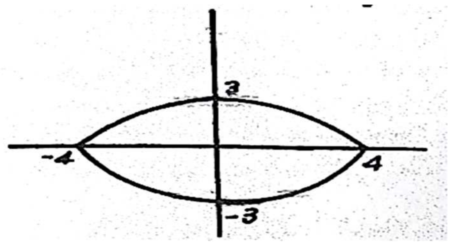



**Εφαρμογή 126**

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$$V = \pi \int_{-4}^{4} y^2 \, dx = \pi \int_{-4}^{\frac{1}{16}} \left(16 - x^2\right) dx =$$

$$\frac{8\pi}{16}\left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{4} = 48\pi$$




**Εφαρμογή 127**

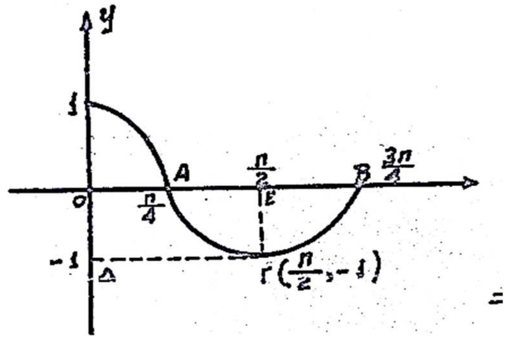
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \cos(2x)$ και από τις ευθείες $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2(2x) \, dx =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2(2x) \, d(2x) =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos(2x)\cdot\sin(2x)}{2} + x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$



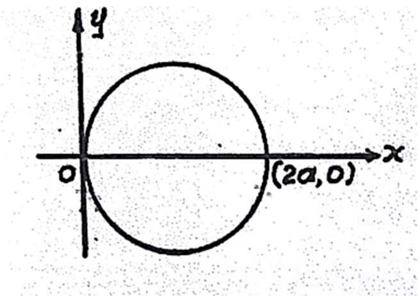

**Εφαρμογή 128**

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $Ox$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

$$V = \pi \int_{0}^{2a} y^2 \, dx =$$

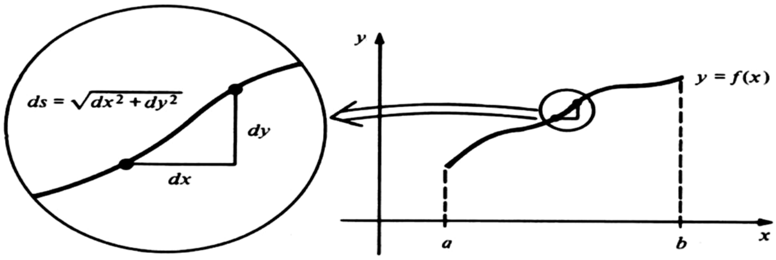
$$\pi \int_{0}^{2a} \left(2ax - x^2\right) dx = \pi\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2a} =$$

$$\pi\left(4a^3 - \frac{8a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^3$$




## 7.2.4 Μήκος τόξου καμπύλης

Το μήκος ενός τμήματος μίας καμπύλης γραμμής στο επίπεδο, ονομάζεται πολλές φορές μήκος τόξου της καμπύλης. Υποθέτω ότι το μήκος αυτό υπάρχει και θα προσπαθήσω να το εκφράσω με τη βοήθεια του ολοκληρώματος. Σε πρώτη φάση περιορίζομαι σε καμπύλες που είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Γενικότερες καμπύλες θα θεωρήσω αργότερα. Θεωρώ μία καμπύλη γραμμή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ από $x = a$ ως $x = b$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Η καμπύλη αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από απειροστά τμήματα. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχω ότι το μήκος $ds$ κάθε απειροστού τμήματος είναι $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Είναι $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$ άρα $ds = \sqrt{dx^2 + (f'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Άρα, για να βρω το μήκος της καμπύλης πρέπει να υπολογίσω το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx$$

Το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής η οποία ορίζεται από παραμετρικές εξισώσεις, δίνεται από το ολοκλήρωμα $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Αν τα $x, y, z$ είναι συναρτήσεις του $t$, δηλαδή αν είναι $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, τότε ο γενικός τύπος (1) γίνεται

$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$, δηλαδή, ο τύπος $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ είναι γενικός και ισχύει αν τα $x, y, z$ είναι συναρτήσεις κάθε άλλης μεταβλητής.

**Π.χ.** Αν $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, $z = z(\omega)$, τότε ο τύπος του μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής λαμβάνει τη μορφή $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2}\; d\omega$

- Αν η καμπύλη είναι επίπεδη, δηλαδή αν $z = 0$ (ή κάποια από τις τρείς μεταβλητές είναι μηδέν), τότε το μήκος του τόξου της επίπεδης καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (y')^2}\; dx$
- Αν η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τον άξονα $xx'$, τότε το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\; dy = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + 1}\; dy$ εφόσον η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τον άξονα $yy'$

### 7.2.4.1 Εύρεση των ορίων ολοκλήρωσης

- Συνήθως δίνονται.
- Αν θέλω να υπολογίσω το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων τομής αυτής με τον άξονα $xx'$, θέτω στην εξίσωση της καμπύλης $y = 0$ και λαμβάνω ως όρια τις μεταβολές του $x$

• Αν θέλω να υπολογίσω το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων τομής της καμπύλης με τον άξονα $yy'$, θέτω στην εξίσωση της καμπύλης $x = 0$ και λαμβάνω ως όρια τις μεταβολές του y

### 7.2.4.2 Μήκος του τόξου καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες

Το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής, της οποίας η εξίσωση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες, λαμβάνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ ή από τον τύπο $\ell = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{p^2\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 + 1}\, dp$, όπου $\theta_1, \theta_2$ οι μεταβολές της πολικής γωνίας και $\rho_1, \rho_2$ οι μεταβολές της πολικής ακτίνας.

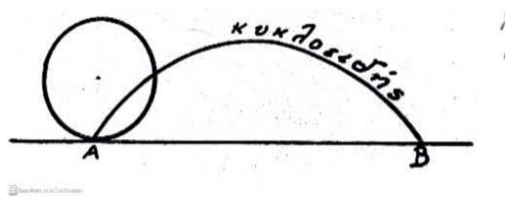
### Μήκος κυκλοειδούς καμπύλης

Οι παραμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς καμπύλης είναι: $x = \alpha(\omega - \eta\mu\omega)$, $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)$ Κυκλοειδής είναι η καμπύλη την οποία γράφει ένα σημείο μίας περιφέρειας κύκλου όταν ο οποίος κυλιέται πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Αν αυτή η ευθεία γραμμή ληφθεί ως άξονας $xx'$, τότε θέλω να βρω το μήκος μεταξύ των διαδοχικών σημείων τομής της καμπύλης με τον άξονα $xx'$. Για να βρω τα άκρα ολοκλήρωσης θέτω $y = 0$ άρα $a(1 - \sigma\upsilon\nu\omega) = 0$ ή συνω=1 άρα $\omega = 0$ ή $\omega = 2\pi$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 (1 - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 d\omega^2 + \alpha^2 \eta\mu^2\omega\ d\omega^2} = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu\omega}\ d\omega =$$

$$\alpha\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}\ d\omega = 2\alpha\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = 4\alpha\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)\ d\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left[4\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$-4\alpha\sigma\upsilon\nu\pi - (-4\alpha\sigma\upsilon\nu 0) = -4\alpha(-1) - (-4\alpha) = 8\alpha$$




### Εφαρμογή 129

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $y = x^{3/2}$ από $x = 0$ ως $x = 5$

Είναι $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ άρα, το μήκος του τόξου της καμπύλης είναι $\ell = \int_a^\beta \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ δηλαδή

$$\ell=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;dx=\int_0^5\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}dx=\frac{4}{9}\int_0^5\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}\mathrm{d}\left(1+\frac{9}{4}x\right)=\left[\frac{4}{9}\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_5^0$$

$$=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}5\right)^{3/2}-1\right]=\frac{8}{27}\left[\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2}-1\right]=\frac{8}{27}\left[\frac{7^3}{2^3}-1\right]=\frac{8}{27}\left(\frac{343-8}{8}\right)=\frac{335}{27}$$

### Εφαρμογή 130

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $x=3y^{3/2}-1$ από $y=0$ ως $y=4$ Είναι $x'=\frac{9\sqrt{y}}{2}$. Το μήκος της καμπύλης είναι

$$\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x')^2+1}\;dy=\int_0^4\sqrt{\frac{81}{4}y+1}\;dy=\frac{4}{81}\int_0^4\left(\frac{81}{4}y+1\right)^{1/2}d\left(\frac{81}{4}y+1\right)=\left[\frac{4}{81}\frac{\left(\frac{81}{4}y+1\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\frac{8}{243}\left[\left(\frac{81}{4}4+1\right)^{3/2}-1\right]=\frac{8}{243}\left(82\sqrt{82}-1\right)$$

### Εφαρμογή 131

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $24xy=x^4+48$ από $x=2$ ως $x=4$

Λύνω ως προς $y$ και έχω $y=\frac{x^4+48}{24x},\;y'=\frac{1}{8}\left(x^2-\frac{16}{x^2}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{x^4-16}{x^2}\right)$

Το μήκος του τόξου της καμπύλης είναι $\ell=\int_a^\beta\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$$=\int_2^4\sqrt{1+\frac{1}{64}\left(\frac{x^4-16}{x^2}\right)^2}\;dx=\int_2^4\sqrt{\frac{64x^4+x^8-32x^4+256}{64x^4}}\;dx=\int_2^4\frac{\sqrt{x^8+32x^4+256}}{8x^2}\;dx$$

$$=\int_2^4\frac{\sqrt{\left(x^4+16\right)^2}}{8x^2}dx=\int_2^4\frac{x^4+16}{8x^2}dx=\frac{1}{8}\int_2^4\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)dx=\frac{1}{8}\int_2^4x^2dx+2\int_2^4x^{-2}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{24}-\frac{2}{x}\right]_2^4=\left(\frac{4^3}{24}-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{2^3}{24}-\frac{2}{2}\right)=\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1=\frac{16-3-2+6}{6}=\frac{17}{6}$$

### Εφαρμογή 132

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$ από $x=1$ ως $x=4$

Είναι $y'=\dfrac{x^6-1}{2x^3}$ Το μήκος του τόξου της καμπύλης είναι $\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(y')^2+1}\,dx$

$$=\int_1^4\sqrt{1+\frac{\left(x^6-1\right)^2}{4x^6}}\,dx=\int_1^4\frac{\sqrt{4x^6+x^{12}-2x^6}}{4x^6}\,dx=$$

$$\int_1^4\frac{\sqrt{x^{12}+2x^6+1}}{2x^3}\,dx=\int_1^4\frac{\sqrt{\left(x^6+1\right)^2}}{2x^3}\,dx=$$

$$\int_1^4\frac{x^6+1}{2x^3}\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_1^4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_1^4 x^3dx+\frac{1}{2}\int_1^4 x^{-3}dx\left[\frac{1}{2}\frac{x^4}{2}+\frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^4=$$

$$\left(\frac{x^4}{8}-\frac{1}{4x^2}\right)\Bigg|_1^4=$$

$$\left(\frac{4^4}{8}-\frac{1}{4\cdot4^2}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$\frac{256}{8}-\frac{1}{64}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{2048-1-8+16}{64}=\frac{2055}{64}$$

## Εφαρμογή 133

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $x=t^2, y=t^3$ από $t=0$ ως $t=4$

Η καμπύλη δίνεται σε παραμετρικές εξισώσεις. Το μήκος της είναι $\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ ή $\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

Βρίσκω τις παραγώγους $dx=2t\cdot dt\Rightarrow\dfrac{dx}{dt}=2t,\ dy=3t^2\cdot dt\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=3t^2$

Αντικαθιστώ και έχω:

$$\ell=\int_0^4\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt=\int_0^4 2t\sqrt{1+\frac{9}{4}t^2}\,dt=\int_0^4\left(1+\frac{9}{4}\mathrm{t}^2\right)^{1/2}dt^2=\frac{4}{9}\int_0^4\left(1+\frac{9}{4}t^2\right)^{1/2}d\left(1+\frac{9}{4}t^2\right)=$$

$$\left[\frac{4\left(1+\frac{9}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{9\cdot3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}t^2\right)^{3/2}\right]\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$

### Εφαρμογή 134

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = \omega - \eta\mu\omega,\ y = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$ από $\omega = 0$ ως $\omega = 2\pi$

Η καμπύλη δίνεται σε παραμετρικές εξισώσεις. Το μήκος της είναι $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2}$

ή και $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2}\, d\omega$ Βρίσκω τις παραγώγους

$$dx = (1 - \sigma\upsilon\nu\omega)\, d\omega \Rightarrow \frac{dx}{d\omega} = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$$

$dy = \eta\mu\omega \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dy}{d\omega} = \eta\mu\omega$ Αντικαθιστώ και έχω

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)^2\, d\omega^2 + \eta\mu^2\omega\, d\omega^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu^2\omega}\, d\omega$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu\omega}\, d\omega = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}\, d\omega = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\, d\omega = 4\int_0^{2\pi} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)\, d\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$4\left[-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 4\left[-\sigma\upsilon\nu\pi - (-\sigma\upsilon\nu 0)\right] = 4(1+1) = 8$$

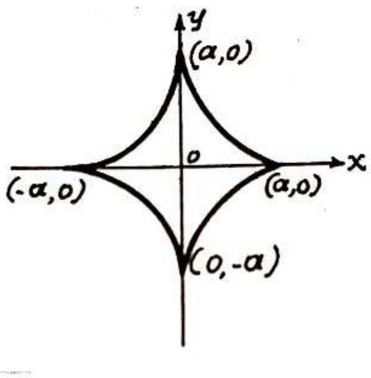
### Εφαρμογή 135

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $x^{2/3} + y^{2/3} = \alpha^{2/3}$ (κλειστή καμπύλη). Το μήκος δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

Είναι $y' = \frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$. Τα όρια ολοκλήρωσης του $x$ είναι από $0$ έως $a$ και θα βρω το $\frac{1}{4}$ του μήκους $\ell = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2}\, dx = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = \sqrt[3]{a}\int_0^{\alpha} x^{-1/3}\, dx = \left[\frac{\sqrt[3]{a}\, x^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right]_0^{\alpha} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot a^{2/3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^3} = \frac{3}{2}a$$

Άρα $\ell_{\text{ολικό}} = 4\frac{3}{2}a = 6a$



## Εφαρμογή 136

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $x=\alpha(\sigma\upsilon\nu\omega+\omega\eta\mu\omega)$ από $\omega=0$ ως $\omega=\omega_1$

Είναι $y=\alpha(\eta\mu\omega-\omega\sigma\upsilon\nu\omega)$ Το μήκος του τόξου της καμπύλης είναι $\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}dx$ με

• $dx=\alpha(-\eta\mu\omega+\eta\mu\omega+\omega\sigma\upsilon\nu\omega)d\omega=\alpha\omega\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$

• $dy=\alpha(\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega+\omega\eta\mu\omega)d\omega=\alpha\omega\eta\mu\omega d\omega$

$$\ell=\int_0^{\omega_1}\sqrt{\alpha^2\omega^2\sigma\upsilon\nu^2\omega\,d\omega^2+\alpha^2\omega^2\eta\mu^2\omega\,d\omega^2}=\int_0^{\omega_1}\alpha\omega\,d\omega=\left[\alpha\frac{\omega^2}{2}\right]_0^{\omega_1}\text{ Άρα, }\ell=\frac{\alpha\omega_1^{\ 2}}{2}$$

## Εφαρμογή 137

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ από $x=1$ ως $x=2$ Είναι $y'=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}$. Το μήκος του τόξου της καμπύλης είναι

$$\ell=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}dx=\int_1^2\sqrt{\frac{4x^2+(x^2-1)^2}{4x^2}}dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}}dx=\int_1^2\frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{2x}dx=\int_1^2\frac{x^2+1}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^2=\frac{1}{2}\left(2+\ln 2-\frac{1}{2}-\ln 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\ln 2\right)$$

## Εφαρμογή 138

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $x=\frac{y^4}{2}+\frac{1}{16y^2}$ από $y=1$ ως $y=2$ Είναι $x'=2y^3-\frac{1}{8y^3}$

$$\ell=\int_1^2\sqrt{1+(x')^2}dy=\int_1^2\sqrt{1+\left(2y^3-\frac{1}{8y^3}\right)^2}dy=\int_1^2\sqrt{1+4y^6+\frac{1}{64y^6}-\frac{1}{2}}dy=$$

$$\int_1^2\sqrt{4y^6+\frac{1}{64y^6}+\frac{1}{2}}\,dy=\int_1^2\sqrt{\left(2y^3+\frac{1}{8y^3}\right)^2}dy=\int_1^2\left(2y^3+\frac{1}{8y^3}\right)dy=2\int_1^2 y^3dy+\frac{1}{8}\int_1^2 y^{-3}dy=$$

$$\left[\frac{2y^4}{4}+\frac{1}{8}\frac{y^{-2}}{-2}\right]_1^2=\frac{y^4}{2}-\frac{1}{16y^2}\Big|_1^2=\left(\frac{16}{2}-\frac{1}{64}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right)=8-\frac{1}{64}-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{483}{64}$$

## Εφαρμογή 139

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $x^2=3y, 2xy=9z$ από $x=0$ ως $x=a$

Επειδή δίνονται οι μεταβλητές των $x$ θα θεωρήσω τα $y,z$ συναρτήσεις του $x$ Είναι

$$y=\frac{x^2}{3},\ z=\frac{2x^3}{27} \text{ άρα } y'=\frac{2x}{3},\ z'=\frac{2x^2}{9}$$

$$\ell=\int_0^a\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx=$$

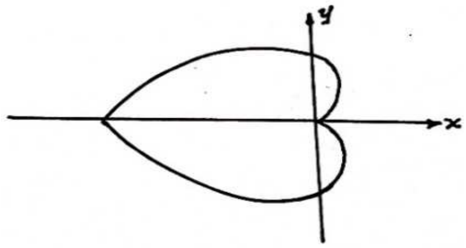
$$\int_0^a\sqrt{1+\frac{4x^2}{9}+\frac{4x^4}{81}}\,dx=\frac{1}{9}\int_0^a\sqrt{81+36x^2+4x^4}\,dx=\frac{1}{9}\int_0^a\sqrt{\left(9+2x^2\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^a\left(9+2x^2\right)dx=\frac{1}{9}\left[x+\frac{2x^3}{3}\right]_0^a=\frac{1}{9}\left(9a+\frac{2a^3}{3}\right)$$

## Εφαρμογή 140

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $p=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$ από $\theta=0$ ως $\theta=2\pi$

Είναι $\ell=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{p^2+\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$




και $dp=\alpha\eta\mu\theta\, d\theta,\ \frac{dp}{d\theta}=\alpha\eta\mu\theta$

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu\theta)^2+\alpha^2\eta\mu^2\theta}\,d\theta=$$

$$\alpha\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}\,d\theta=\alpha\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\sigma\upsilon\nu\theta}\,d\theta=\alpha\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\theta}\,d\theta$$

$$=\alpha\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\alpha\int_0^{2\pi}\eta\mu\frac{\theta}{2}d\theta=\left[-4\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8\alpha$$

## Εφαρμογή 141

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $p=e^{3\theta+5}$ από $\theta=0$ ως $\theta=\frac{\pi}{4}$.

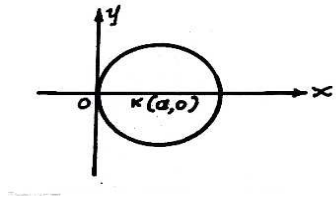
Είναι $dp=3e^{3\theta+5}d\theta\Rightarrow\frac{dp}{d\theta}=3e^{3\theta+5}$

$$d\ell=\int_0^{\pi/4}\sqrt{e^{6\theta+10}+9e^{6\theta+10}}\,d\theta=\sqrt{10}\int_0^{\pi/4}e^{3\theta+5}d\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}\int_0^{\pi/4}e^{3\theta+5}\,d(3\theta+5)=\left[\frac{\sqrt{10}}{3}e^{3\theta+5}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{3}\left(e^{\frac{3\pi}{4}+5}-e^5\right)=\frac{\sqrt{10}}{3}e^5\left(e^{\frac{3\pi}{4}}-1\right)$$

## Εφαρμογή 142

Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = 2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$ από $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ως $\theta = \frac{\pi}{2}$



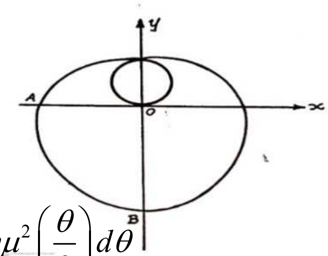

Είναι $dp = -2\alpha\eta\mu\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = -2\alpha\eta\mu\theta$

$$\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\alpha^2\eta\mu^2\theta}\; d\theta =$$

$2\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = [2\alpha\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\alpha\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi\alpha$. Αν ήθελα μπορούσα να ολοκληρώσω από 0 ως $\frac{\pi}{2}$ και να διπλασιάσω το μήκος του τόξου της καμπύλης που θα βρω.

## Εφαρμογή 143

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \alpha\eta\mu^3\frac{\theta}{3}$ από $\theta = 0$ ως $\theta = \frac{3\pi}{2}$




Είναι $dp = 3a\eta\mu^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{3}\right)\frac{1}{3}\, d\theta$

Άρα $\frac{dp}{d\theta} = a\eta\mu^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{3}\right)$

$$\ell = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\alpha^2\eta\mu^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + \alpha^2\eta\mu^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\theta}{3}\right)}\; d\theta = \alpha \int_0^{3\pi/2} \eta\mu^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta$$

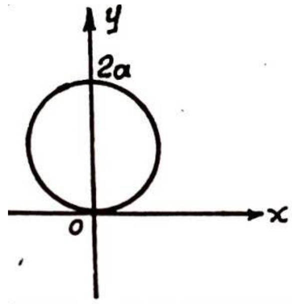
$$= 3\alpha \int_0^{3\pi/2} \eta\mu^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\left(\frac{\theta}{3}\right) = 3\alpha\left[\frac{-\eta\mu\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{3}\right)}{2} + \frac{\frac{\theta}{3}}{2}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 3\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3\alpha(0) = \frac{3\pi\alpha}{4}$$

Για να βρω το ολικό μήκος, διπλασιάζω, δηλαδή $\ell_{\text{ολικό}} = \frac{3\pi\alpha}{2}$

## Εφαρμογή 144

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = 2\alpha\eta\mu\theta$

Είναι $dp = 2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = 2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$




$$\ell_{\text{ολικό}} = \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\alpha^2\eta\mu^2\theta + 4\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}\; d\theta$$

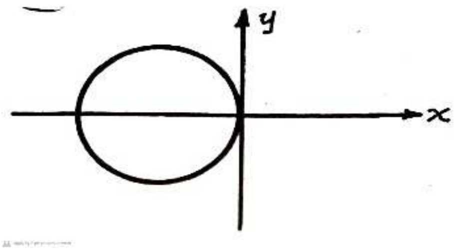
$$= 2\alpha\int_0^{\pi} d\theta = [2\alpha\theta]_0^{\pi} = 2\alpha\pi$$

**Εφαρμογή 145**

Εύρεση μήκους του τόξου της καμπύλης $p = -2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

Η καμπύλη είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει το κέντρο της στον αρνητικό ημιάξονα άξονα $xx'$ άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $xx'$

Είναι $dp = 2\alpha\eta\mu\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = 2\alpha\eta\mu\theta$



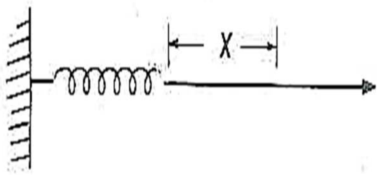

$$\ell = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{4\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\alpha^2\eta\mu^2\theta} = 2a\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta$$

$$= [2a\theta]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{2\alpha 3\pi}{2} - \frac{2\alpha\pi}{2} = 2\alpha\pi$$

## 7.3 Τα ολοκληρώματα στη φυσική

**Εφαρμογή 146 (Έργο ιδανικού ελατηρίου)**

Σε ιδανικό ελατήριο ασκείται δύναμη, ώστε να το επιμηκύνει κατά $x$. Η αντίσταση του ελατηρίου είναι μία δύναμη μέτρου $F$ ανάλογου της επιμήκυνσης (νόμος Hooke) δηλαδή $F = k \cdot x$ όπου $k$ η σταθερά του ελατηρίου. Η διεύθυνση της $F$ είναι η διεύθυνση της κίνησης, άρα για το έργο της $F$ και την απομάκρυνση από τη θέση $x = a$ ως τη θέση $x = \beta$ είναι $W = \int_a^\beta (k \cdot x)\, dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^\beta = k\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$




**Εφαρμογή 147 (Έργο ιδανικού ελατηρίου)**

Η επιμήκυνση του μήκους 10 $cm$ ελατηρίου, είναι ανάλογη με τη δύναμη $F$ που του ασκείται. Ποιο είναι το έργο $W$ της $F = 25\ Kp$, όταν το ελατήριο επιμηκύνεται, κατά το $1/5$ του αρχικού του μήκους;

Είναι $F(x) = kx$, $k$ =σταθερά και $x = \frac{1}{5}10 = 2\ cm = \frac{2}{100}\ m$ άρα,

$$F = k \cdot x \Leftrightarrow 25 = k\frac{2}{100} \Leftrightarrow k = 1.250 \quad \text{άρα,}$$

$$W = \int_0^{0,02} 1250x dx = 1250\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,02} = 0,5KPm$$

**Εφαρμογή 148 (Έργο δύναμης ηλεκτροστατικού πεδίου)**

Ποιο έργο παράγεται από τη δύναμη $F$ με την οποία ηλεκτρικό φορτίο $q_1$ απωθεί άλλο $q_2$ από τη θέση $A_1$ που απέχει από το $q_1$ απόσταση $R_1$ στη θέση $A_2$ που απέχει απόσταση $R_2$ από το $q_1$, αν το $q_1$ είναι τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος των αξόνων;

Είναι $F = K\frac{q_1.q_2}{R^2}$,

άρα $W=\int_{R_1}^{R_2} FdR=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Kq_1q_2}{R^2}=Kq_1q_2\left[-\frac{1}{R}\right]_{R_1}^{R_2}=Kq_1q_2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

**Εφαρμογή 149 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

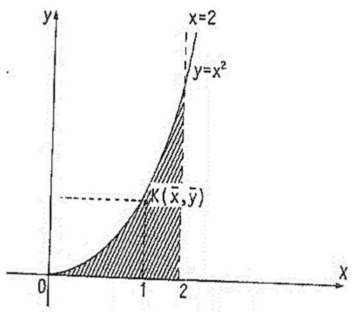
Εύρεση κέντρου βάρους του επιπέδου χωρίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=x^2$, από την ευθεία $x=2$ και από τον $xx'$ άξονα

Η καμπύλη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έτσι, $E=\int_0^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2 (x^2)^2dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{16}{5}$$

$$M_y=\int_0^2 x\cdot x^2dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=4$$



Σχ.9.4

Είναι $\overline{\mathrm{Y}}=\frac{\frac{16}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{6}{5}$ , $\overline{\mathrm{X}}=\frac{4}{\frac{8}{3}}=\frac{3}{2}$ άρα $\mathrm{K}\left(\frac{3}{2},\frac{6}{5}\right)$

**Εφαρμογή 150 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

Εύρεση κέντρου βάρους του επιπέδου χωρίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=9-x^2$ και από τις ευθείες $x=0$, $y=0$ ($1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο)

Η καμπύλη τέμνει τους άξονες $Ox$, $Oy$ στα σημεία (3, 0) και (0, 9) αντίστοιχα. Έτσι,

$$\mathrm{E}=\int_0^3\left(9-x^2\right)dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{54}{3}=18$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^3\left(9-x^2\right)^2dx=\frac{324}{5}$$

$$M_y=\int_0^3 x\left(9-x^2\right)dx=\frac{81}{4}$$

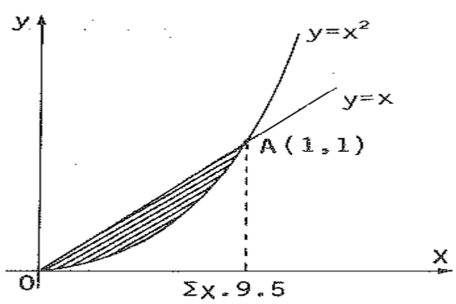
Τότε $\overline{X}=\frac{\frac{81}{4}}{18}=\frac{9}{8}$ , $\overline{Y}=\frac{\frac{324}{5}}{18}=\frac{18}{5}$ άρα $K\left(\frac{9}{8},\frac{18}{5}\right)$

**Εφαρμογή 151 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

Εύρεση κέντρου βάρους του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=x$

Τα σημεία που τέμνονται οι καμπύλες είναι $\mathrm{A}(1,1)$ και $\mathrm{O}(0,0)$. Τότε

$$\mathrm{E}=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{1}{6}$$



Σχ.9.5

$$M_y=\int_0^1 x\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{12}$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^1 (x+x^2)(x-x^2)dx=\frac{1}{15}$$

Είναι $\overline{y}=\frac{2}{5}$, $\overline{x}=\frac{1}{2}$ άρα $K\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$

**Εφαρμογή 152 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

Εύρεση κέντρου βάρους του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $x=y^2$ και $x^2=-27y$

Τα σημεία τομής των καμπυλών είναι $(9,-3)$ και $\mathrm{O}(0,0)$, οι δε καμπύλες γράφονται

$y=-\sqrt{x}$ και $y=-\frac{x^2}{27}$, άρα

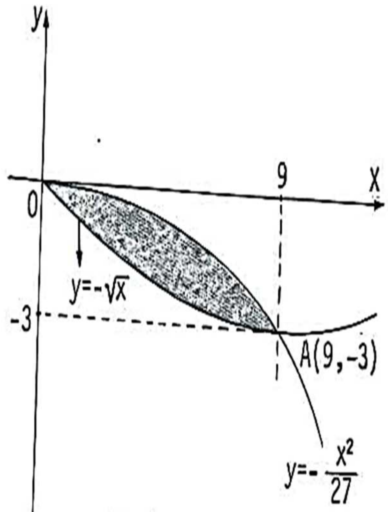
$$\mathrm{E}=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}-(-\sqrt{x})\right)dx=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)dx=9$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)\left(-\frac{x}{27}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{-243}{20}$$

$$M_y=\int_0^9 x\left(-\frac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)dx=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{729}{20}$$

Είναι $\overline{Y}=\dfrac{\frac{-243}{20}}{9}=-\frac{27}{20}$, $\overline{X}=\dfrac{\frac{729}{20}}{9}=\frac{81}{20}$

Άρα, το κέντρο βάρους είναι $K\left(\frac{81}{20},\frac{-27}{20}\right)$



Σχ.9.6

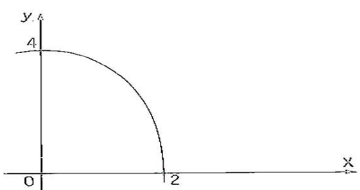
**Εφαρμογή 153 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

Εύρεση κέντρου βάρους $K(\overline{X},0)$ του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί άξονα $xx'$, του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από την καμπύλη $y=4-x^2$ και από τις ευθείες $x=0$, $y=0$

Η καμπύλη τέμνει τους άξονες στα σημεία $(2,0)$ και $(0,4)$. Τότε

$$V=\pi\int_0^2\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\int_0^2(4-x^2)^2dx=\frac{256\pi}{15}$$

$$M_{yz}=\pi\int_0^2 x[f(x)]^2dx=\pi\int_0^2 x(4-x^2)^2dx=\frac{32\pi}{3}$$ άρα, $\overline{X}=\dfrac{\frac{32\pi}{2}}{\frac{256\pi}{15}}=\frac{5}{8}$ άρα $\mathrm{K}\left(\frac{5}{8},0\right)$



Σx.9.7

**Εφαρμογή 154 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

Εύρεση του κέντρου βάρους $K(0,\overline{y})$ του στερεού του προηγούμενου προβλήματος, αν η περιστροφή γίνει γύρω από τον άξονα $yy'$

Είναι αντίστοιχα $V = 2\pi\int_0^2 xf(x)dx = 2\pi\int_0^2 x(4-x^2)dx = 8\pi$

$$M_{xz} = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2 dx = \frac{32\pi}{3}$$

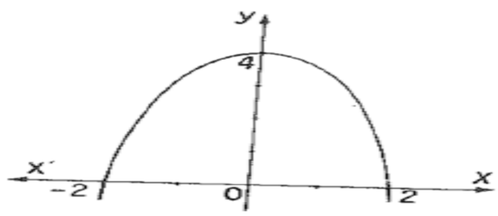
$$\overline{Y} = \frac{\frac{32\pi}{3}}{8\pi} = \frac{4}{3} \text{ άρα } K\left(0,\overline{y}\right) = K\left(0,\frac{4}{3}\right)$$

**Εφαρμογή 155 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα $yy'$, του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y = 4 - x^2$ και από τον άξονα $xx'$

Η παραβολή, τέμνει τον άξονα $xx'$ στα σημεία $(-2,0)$, $(2,0)$ και είναι

$$I_y = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)dx = 2\int_0^2 (4x^2 - x^4)dx = 2\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128}{15}$$




Επειδή $E = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$ για την ακτίνα της ροπής αδρανείας από τον $I_y = E\cdot R^2$ προκύπτει ότι $\frac{128}{15} = \frac{32}{3}R^2$ άρα, $R = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

**Εφαρμογή 156 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της ροπής αδρανείας, ως προς τον άξονα $yy'$, του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2 = 4x$ και από την ευθεία $x = 4$

Για το μισό του χωρίου, που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $xx'$, είναι $I_1 y = \frac{1}{4}\int_0^4 y^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}} dx$

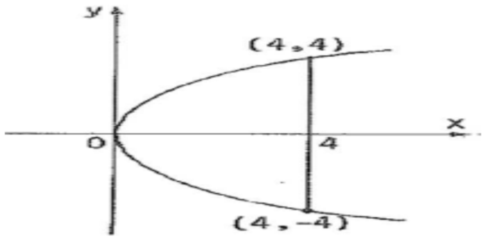
Άρα, η ροπή αδρανείας όλου του επιπέδου χωρίου είναι

$$I_y = 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}4^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{256}{5}$$

Το εμβαδό του χωρίου, είναι $\mathrm{E}=2\int_0^4 f(x)dx=2\int_0^4 (4x)^{\frac{1}{2}}dx=2\cdot 4^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{64}{3}$

Άρα, $R^2=\frac{\mathrm{I}_x}{E}=\frac{\frac{256}{5}}{\frac{64}{3}}=\frac{12}{5}$

δηλαδή, $R=\frac{2\sqrt{15}}{5}$




**Εφαρμογή 157 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της ροπής αδρανείας περί τον άξονα $xx'$, του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή του επίπεδου χωρίου που περιέχεται στο 1ο τεταρτημόριο και ορίζεται από τις γραμμές $y^2=4x$, $y=0$, $x=3$ αν αυτό περιστραφεί περί τον άξονα $xx'$

Είναι $\mathrm{I}_x=\frac{\pi}{2}\int_0^3 [f(x)]^4dx=\frac{\pi}{2}\int_0^3 (4x)^2dx=8\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=72\pi$

Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $V=\pi\int_0^3 4xdx=4\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=18\pi$

Για την ακτίνα της ροπής είναι $R^2=\frac{I_x}{V}=\frac{72\pi}{18\pi}=4$ άρα, R=2

**Εφαρμογή 158 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της ροπής αδρανείας, ως προς τον άξονα $yy'$, του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή του επιπέδου χωρίου του προηγούμενου παραδείγματος.

Είναι $\mathrm{I}_y=2\pi\int_0^3 x^3 f(x)dx=4\pi\int_0^3 x^3x^{\frac{1}{2}}dx=4\pi\int_0^3 x^{\frac{7}{2}}dx=4\pi\left[\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\right]_0^3=72\sqrt{3}\pi$

**Εφαρμογή 159 (Εύρεση κέντρου βάρους, στατικής ροπής και ροπής αδρανείας)**

Εύρεση του κέντρου βάρους του 1ου τεταρτημόριου, του τόξου του κύκλου $x^2+y^2=9$

Είναι $f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, $1+[f'(x)]^2=1+\frac{x^2}{y^2}=\frac{9}{y^2}$, $y=\sqrt{9-x^2}$

Από $\overline{x}=\frac{\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}$ και $\overline{y}=\frac{\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}$ προκύπτουν

$$\overline{x}=\frac{\int_0^3 x\frac{3}{y}dx}{\int_0^3 \frac{3}{y}dx}=\frac{3\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx}{3\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}}=\frac{-[\sqrt{9-x^2}]_0^3}{[\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{3}]_0^3}=\frac{6}{\pi}$$ και

$$\overline{y} = \frac{\int_0^3 y\frac{3}{y}dx}{3\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{\pi}$$

Άρα, $K(\overline{x},\overline{y}) = K\left(\frac{6}{\pi},\frac{6}{\pi}\right)$

Οι ροπές του τεταρτημόριου ως προς τους άξονες $xx'$, $yy'$ από $\mathrm{M}_x = \int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ και $\mathrm{M}_y = \int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ είναι

$$\mathrm{M}_x = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx = 3\int_0^3 dx = 9,$$

$$\mathrm{M}_y = \int_0^3 x\frac{3}{y}dx = 3\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx = -3\left[\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = 9$$

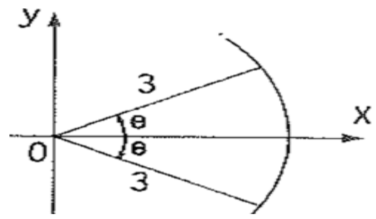
Για τις ροπές αδρανείας από $\mathrm{I}_x = \int_\alpha^\beta [f(x)]^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ και $\mathrm{I}_y = \int_\alpha^\beta x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ προκύπτουν

$$\mathrm{I}_x = \int_0^3 (9-x^2)\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx = 3\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = \frac{27\pi}{4}$$

$$\mathrm{I}_y = \int_0^3 x^2\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx = 3\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{27\pi}{4}$$

**Εφαρμογή 160 (Εύρεση κέντρου βάρους σε πολικές συντεταγμένες)**

Εύρεση του κέντρου βάρους, ενός κυκλικού τόξου ακτίνας $R = 3$ και επίκεντρης γωνίας $2\theta$




Παίρνω τόξο όπως στο σχήμα και το κέντρο βάρους του είναι $(\overline{x},0)$

Η εξίσωση της περιφερείας του κύκλου που ανήκει το τόξο, είναι $x^2+y^2=9$ άρα $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$ Είναι $dS = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = \frac{3}{x}dy$ Το $y$ μεταβάλλεται από 0 μέχρι $3\eta\mu\theta$ διότι το $\overline{x}$ του τόξου ταυτίζεται με το $\overline{x}$ του άνω του μισού. Έτσι,

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\int_0^{3\eta\mu\theta} x\frac{3}{x}dy}{3\theta} = \frac{3[y]_0^{3\eta\mu\theta}}{3\theta} = \frac{3\eta\mu\theta}{\theta}$$

$\overline{y} = 0$ (το τόξο που έχει γωνία $\theta$ σε ακτίνα, έχει μήκος $S = R\cdot\theta$)

**Εφαρμογή 161 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της ροπής αδρανείας της υποκυκλοειδούς καμπύλης $x = R\cdot\eta\mu^3 t$, $y = R\cdot\sigma\upsilon\nu^3 t$, ως προς τον άξονα $xx'$

Από $\mathrm{I}_x = \int_\alpha^\beta [f(x)]^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ προκύπτει ότι $\mathrm{I}_x = \int_\alpha^\beta y^2\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ και

$\dfrac{dx}{dt} = 3R\cdot\eta\mu^2 t\cdot\sigma\upsilon\nu t\ dt$, $\dfrac{dy}{dt} = -3R\cdot\sigma\upsilon\nu^2 t\cdot\eta\mu t\ dt$

Η $I_x$ είναι τετραπλάσια της ροπής του $1^{\text{ου}}$ τεταρτημόριου, λόγω συμμετρίας. Άρα,

$$\mathrm{I}_x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cdot\sigma\upsilon\nu^6 t\cdot 3R\cdot\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t\ dt = -12R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^7 t\cdot d\left(\sigma\upsilon\nu t\right) = \frac{3}{2}R^3$$

Άρα, $\mathrm{I}_x = \dfrac{3}{2}R^3$

**Εφαρμογή 162 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

Εύρεση του κέντρου βάρους, της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της $4y+3x=8$, από 0 μέχρι 2, γύρω από τον άξονα $xx'$

Είναι $y = \dfrac{8-3x}{4}$, $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = -\dfrac{3}{4}$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \dfrac{5}{4}$

Άρα, $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{\int_0^2 x(8-3x)dx}{\int_0^2 (8-3x)dx} = \dfrac{4}{5}$, $\overline{y} = 0$ άρα $\mathrm{K}(\overline{x},\overline{y}) = \mathrm{K}\left(\dfrac{4}{5},0\right)$

**Εφαρμογή 163 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

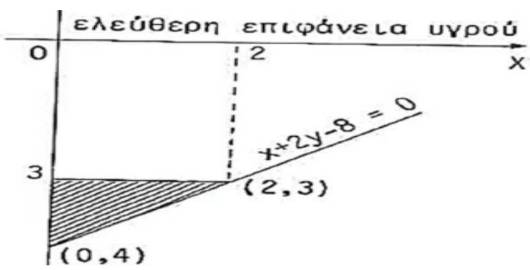
Εύρεση της ροπής αδρανείας, της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της ευθείας $y=2x$ περί τον άξονα $xx'$, από 0 μέχρι 2

Είναι $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = 2$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{5}$ άρα, από $\mathrm{I}x = 2\pi\int_\alpha^\beta [f(x)]^3\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

προκύπτει $\mathrm{I}_x = 2\pi\int_0^2 (2x)^3\sqrt{5}dx = 16\sqrt{5}\pi\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_0^2 = 64\sqrt{5}\pi$

**Εφαρμογή 164 (Εύρεση δύναμης)**

Εύρεση της δύναμης, που ασκείται στη μία όψη της επιφάνειας που ορίζεται από τις γραμμές $x=0$, $y=3$ και $x+2y-8=0$ και είναι βυθισμένη σε υγρό ειδικού βάρους ε

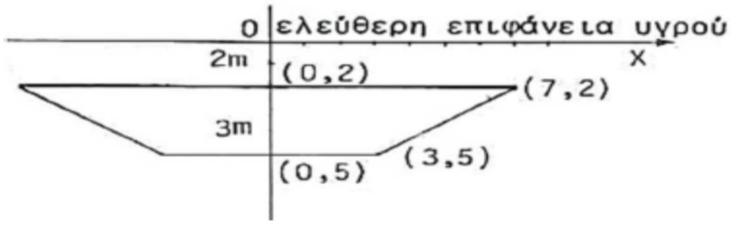


Η $x+2y-8=0$ τέμνεται με την $y=3$ στο σημείο $(2,3)$ ενώ τέμνει τον άξονα $yy'$ στο σημείο $(0,4)$. Από την $x+2y-8=0$ είναι $x=8-2y$ και ο $F=\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta} yg(y)dy$

δίνει $F=\varepsilon\int_{3}^{4} y(8-2y)dy=\varepsilon\int_{3}^{4}(8y-2y^2)dy=\varepsilon\left[4y^2-\frac{2y^3}{3}\right]_3^4=\frac{10}{3}\varepsilon$

## Εφαρμογή 165 (Εύρεση δύναμης)

Ισοσκελές τραπέζιο μικρής βάσης $6\ m$, μεγάλης βάσης $14\ m$, ύψους $3\ m$ είναι βυθισμένο κατακόρυφα μέσα σε υγρό, με τη μικρή βάση προς τα κάτω, σε απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια σε σχέση με τη μεγάλη βάση $2\ m$. Βρείτε την ολική δύναμη που του ασκείται, από το υγρό (δίνεται ειδικό βάρος υγρού ε).




Θεωρώ άξονες όπως στο σχήμα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (3, 5), (7, 2) έχει εξίσωση $x=\frac{29}{3}-\frac{4y}{3}$ και από $F=\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta} yg(y)dy$ για την ολική δύναμη, είναι

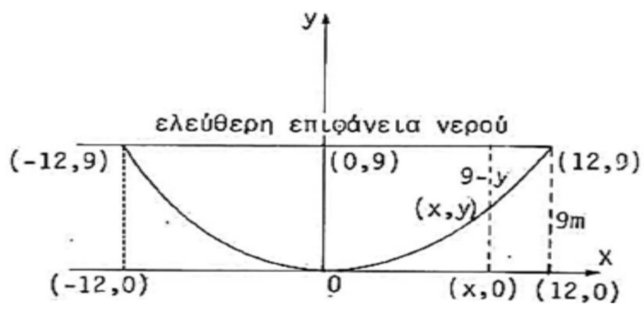
$$F=2\varepsilon\int_{2}^{5} y\left(\frac{29}{3}-\frac{4y}{3}\right)dy=2\varepsilon\int_{2}^{5}\left(\frac{29}{3}y-\frac{4y^2}{3}\right)dy=2\varepsilon\left[\frac{29y^2}{6}-\frac{4y^3}{9}\right]_2^5=99\varepsilon$$

## Εφαρμογή 166 (Εύρεση δύναμης)

Δίσκος, μορφής παραβολικού τμήματος, βάσης $24\ m$, ύψους $9\ m$, είναι βυθισμένος σε υγρό ειδικού βάρους ε, έτσι ώστε η βάση του να είναι στο ίδιο επίπεδο με την επιφάνεια του νερού. Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στην πλευρά του δίσκου;

Η παραβολή, έχει εξίσωση $x^2=ky$. Επειδή διέρχεται από το σημείο (12, 9) ισχύει ότι $12^2=k\cdot 9 \Rightarrow k=16$ άρα, $x^2=16y$ Για την ολική δύναμη είναι

$$F=2\varepsilon\int_{0}^{9}(9-y)4\sqrt{y}dy=8\varepsilon\int_{0}^{9}(9y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}})dy=8\varepsilon\left[6y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^9=\frac{2592}{5}\varepsilon$$



**Εφαρμογή 167 (Εύρεση στατικής ροπής και ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της στατικής ροπής και της ροπής αδρανείας του ημικυκλίου $y=\sqrt{r^2-x^2}$ , $x\in[-r,r]$ ως προς τον άξονα $xx'$

Είναι $\mathrm{M}_x=\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=r\int_{-r}^{r}dx=2r^2$

Είναι $I_x=\int_\alpha^\beta y^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}$

$dx=r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=2r\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$ (άρτια η συνάρτηση)

Για να υπολογίσω το τελευταίο ολοκλήρωμα, θέτω $x=r\cdot\sin t\Rightarrow dx=r\cdot\cos t\ dt$

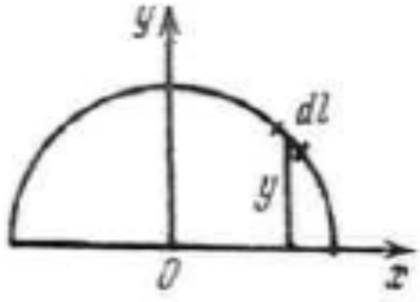
Αν $x=0$ τότε $t=0$ Αν $x=r$ τότε $t=\frac{\pi}{2}$

Άρα, $I_x=2r\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\ dt=$

$r\cdot\cos t\ dt=$

$r^3\int_0^{\pi/2}\left[1+\cos(2t)\right]dt=$

$r^3\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi r^3}{2}$




**Εφαρμογή 168 (Εύρεση στατικής ροπής και ροπής αδρανείας)**

Εύρεση των στατικών ροπών και των ροπών αδρανείας, του τόξου του 1ου τεταρτημόριου, της αστροειδούς με εξισώσεις $x=a\cdot\cos^3 t$, $y=a\cdot\sin^3 t$

Λόγω συμμετρίας της καμπύλης ως προς τους άξονες, είναι $\mathrm{M}_\chi=\mathrm{M}_y$ και $\mathrm{I}_\chi=\mathrm{I}_y$

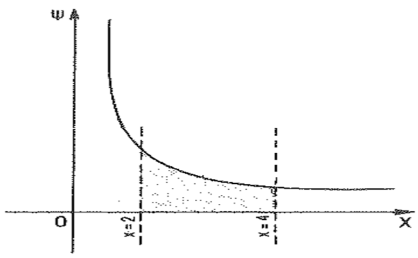
Στο 1ο τεταρτημόριο, η παράμετρος $t$ ανήκει στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Έχω $d\ell=\sqrt{x_t^2+y_t^2}=3a\cdot\sin t\cdot\cos t\ dt$ Άρα,

$\mathrm{M}_x=\int_\alpha^\beta y\ d\ell=\int_0^{\pi/2}\left(\alpha\cdot\sin^3 t\cdot 3\alpha\cdot\sin t\cdot\cos t\ \right)dt=\left[\frac{3\alpha^2}{5}\sin^5 t\right]_0^{\pi/2}=\frac{3}{5}\alpha^2$ και

$\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta y^2 d\ell=\int_0^{\pi/2}\left(\alpha^2\sin^6 t\cdot 3\alpha\cdot\sin t\cdot\cos t\right)dt=\left[\frac{3}{8}\alpha^3\sin^8 t\right]_0^{\pi/2}=\frac{3}{8}\alpha^3$

Άρα, $\mathrm{M}_x=\mathrm{M}_y=\frac{3}{5}\alpha^2$, $\mathrm{I}_x=\mathrm{I}_y=\frac{3}{8}\alpha^3$



**Εφαρμογή 169 (Εύρεση μάζας)**

Εύρεση του κέντρου μάζας, του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή $xy=1$ και από τις ευθείες $x=2$, $x=4$

Οι συντεταγμένες, είναι $x_0=\dfrac{\int_2^4 x\frac{1}{x}dx}{\int_2^4 \frac{1}{x}dx}=\dfrac{2}{\ln 2}$ , $y_0=\dfrac{\int_2^4 \frac{1}{x^2}dx}{2\int_2^4 \frac{dx}{x}}=\dfrac{1}{8\ln 2}$

**Εφαρμογή 170 (Εύρεση έργου)**

Εύρεση του έργου του βάρους, κατά την εκτόξευση πυραύλου σε ύψος $h$ από την επιφάνεια της Γης. Το ζητούμενο έργο Α είναι αρνητικό, διότι το βάρος Β του πυραύλου σε κάθε σημείο της τροχιάς του, έχει φορά αντίθετη από τη μετατόπιση. Η δύναμη έλξης του πυραύλου είναι Β=G $\dfrac{m_\Pi \cdot m_\Gamma}{x}$ όπου $m_\Pi$, $m_\Gamma$ οι μάζες πυραύλου και Γης αντίστοιχα, $x$ η απόσταση του πυραύλου από κέντρο της Γης και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Έστω $R$ η ακτίνα της Γης. Είναι

$$W=-\int_R^{+\infty} Bdx=-\int_R^{+\infty}\frac{Gm_\Pi\cdot m_\Gamma}{x^2}dx=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\int_R^{+\infty}x^{-2}dx=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\lim_{\beta\to+\infty}\int_R^{\beta}x^{-2}dx=$$

$$=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{\beta}=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{R}\right]=-\frac{Gm_\Pi\cdot m_\Gamma}{R}=-\frac{Gm_\Pi\cdot m_\Gamma}{R^2}$$

$R=-B_0\cdot R$ Όπου $B_0$ το βάρος του πυραύλου στην επιφάνεια της Γης.

**Εφαρμογή 171 (Εύρεση μεταβολής της δυναμικής ενέργειας)**

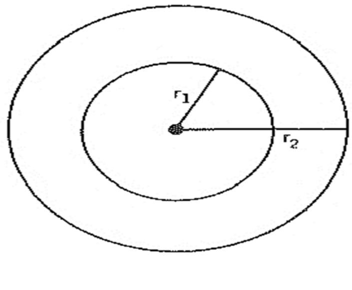
Εύρεση της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου, όταν μεταπηδά από επιτρεπτή τροχιά ακτίνας $r_1$ σε άλλη επιτρεπτή $r_2$ σύμφωνα με τις συνθήκες του Bohr.

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ πυρήνα–ηλεκτρονίου είναι από το νόμο του Coulomb $F=K\dfrac{Q\cdot e}{r^2}$ (όπου $Q$ το φορτίο του πυρήνα, $e$ το φορτίο του ηλεκτρονίου και $r$ η απόσταση πυρήνα–ηλεκτρονίου). Έτσι, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta E_j=\int_{r_1}^{r_2}F\ dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{K\cdot Q\cdot e}{r^2}\ dr=K\cdot Q\cdot e\int_{r_1}^{r_2}r^{-2}\ dr=$$

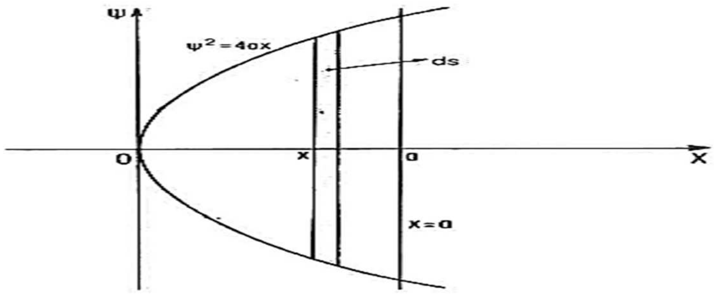
$$K\cdot Q\cdot e\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}=K\cdot Q\cdot e\left[-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right]=K\cdot Q\cdot e\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Τα $r_1$, $r_2$ θα υπολογισθούν από την 1η συνθήκη του Bohr $mur=n\dfrac{h}{2\pi}$ (n=1, 2,…) και την κεντρομόλο δύναμη $\dfrac{m\cdot u^2}{r}=K\dfrac{Q\cdot e}{r^2}$



**Εφαρμογή 172 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα $yy'$, του σχήματος που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4ax$ και από την ευθεία $x = a$ , $a > 0$




Έστω $ds$ το εμβαδό της στοιχειώδους ζώνης, που είναι παράλληλη προς τον άξονα $yy'$ Είναι $dI_x = x^2 ds$ και $ds = 2|y|dx = 2\sqrt{4ax}\ dx$

Η $dI_x = x^2 ds$ δίνει $dI_x = 4x^2\sqrt{ax}\ dx \Rightarrow I_x = \int_0^{\alpha} 4x^2\sqrt{ax}\ dx = 4\sqrt{a}\int_0^{\alpha} x^{5/2}\ dx = \ldots = \frac{8}{7}a^4$

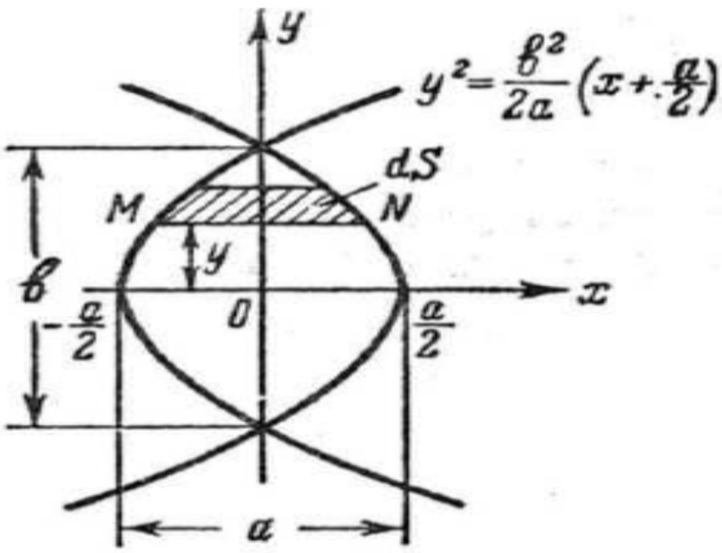
**Εφαρμογή 173 (Εύρεση ροπής αδρανείας)**

Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα $xx'$, του χωρίου που περικλείεται από της παραβολές ($c_1$): $y^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$ και ($c_2$) $y^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)$ και από τον άξονα $xx'$

Είναι $dI_x = y^2 ds$ όπου $ds$ είναι το εμβαδό του στοιχειώδους χωρίου, που είναι παράλληλο προς τον άξονα $xx'$. Είναι $ds = |AB|dy$

Είναι $|\mathrm{AB}| = x_2 - x_1 = 2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\alpha}{\beta^2}y^2\right) = \alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2}y^2$

Άρα, η $dI_x = y^2 ds$ από τις $ds = |AB|dy$ και $|\mathrm{AB}| = \alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2}y^2$ δίνει $dI_x = y^2\left(\alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2}y^2\right)dy \Rightarrow \mathrm{I}_x = \int_0^{\beta/2} y^2\left(\alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2}y^2\right)dy = \ldots = \frac{\alpha\beta^3}{30}$

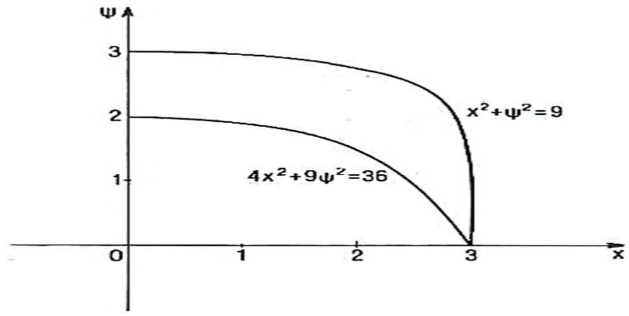


**Εφαρμογή 174 (Εύρεση στατικής ροπής και κέντρου βάρους)**

Εύρεση των στατικών ροπών ως προς τους άξονες $yy'$, $xx'$ και του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου του 1ου τεταρτημόριου, που περικλείεται από την έλλειψη $4x^2+9y^2=36$ και από τον κύκλο $x^2+y^2=9$

Είναι $\mathrm{M}_y=\int_0^3 x(y_2-y_1)dx=\int_0^3 x\left[\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx=3$

$$\mathrm{M}_x=\frac{1}{2}\int_0^3\left(y_2^2-y_1^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left[(9-x^2)-\frac{4}{9}(9-x^2)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=5$$




Έστω $x_0, y_0$ οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους Κ

Είναι $x_0=\frac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{E}}$, $y_0=\frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{E}}$ όπου Ε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Είναι $\mathrm{E}=\frac{3\pi}{4}$

Άρα, $x_0=\frac{4}{\pi}$, $y_0=\frac{20}{3\pi}$

**Εφαρμογή 175 (Εύρεση κέντρου βάρους)**

Εύρεση του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου, που περικλείεται από τις καμπύλες $y=\frac{2}{\pi}x$, $y=\sin x$ με $x\ge 0$

Τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων είναι $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

Το εμβαδό του χωρίου είναι $\mathrm{E}=\int_0^{\pi/2}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=\frac{4-\pi}{4}$

Είναι $x_0=\frac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{E}}$, $y_0=\frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{E}}$ και

$$\mathrm{M}_x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin(2x)}{4}-\frac{4x^3}{3\pi^2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{24}$$

$$\mathrm{M}_y=\int_0^{\pi/2}x\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=1-\frac{\pi^2}{12}$$

Άρα, $x_0=\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}$, $y_0=\frac{\pi}{6(4-\pi)}$

## Άλυτες ασκήσεις

### Άσκηση 1 (Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx$, (γ) $\int_2^3 \frac{1}{3x-1}\,dx$, (δ) $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx$,

(ε) $\int_0^1 \frac{3}{x-2}\,dx$, (στ) $\int_0^1 \frac{1}{3-x}\,dx$, (ζ) $\int_3^4 \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$, (η) $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x-1}\,dx$,

(θ) $\int_0^1 \frac{3x+1}{x+1}\,dx$, (ι) $\int_0^1 \frac{x+2}{2x+1}\,dx$, (κ) $\int_{-1}^0 \frac{2x^2+1}{x-1}\,dx$, (λ) $\int_0^1 \frac{2x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$,

(μ) $\int_0^1 \frac{3x^2+x+1}{x-2}\,dx$, (ν) $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{2x+1}\,dx$, (ξ) $\int_0^1 \frac{2x^3+x+1}{x+1}\,dx$, (ο) $\int_0^1 \frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)}\,dx$

### Άσκηση 2 (Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$, (γ) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$, (δ) $\int_3^4 \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$,

(ε) $\int_0^1 \frac{3}{x^2+5x+6}\,dx$, (στ) $\int_2^3 \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$, (ζ) $\int_2^3 \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx$, (η) $\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+5x+6}\,dx$

(θ) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3x+2}\,dx$, (ι) $\int_{-1}^0 \frac{2x^2+3}{x^2-4x+3}\,dx$, (κ) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\,dx$, (λ) $\int_2^3 \frac{x^4+x+2}{x-1}\,dx$

### Άσκηση 3 (Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+4}$, (γ) $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+1}$, (δ) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-6x+9}\,dx$,

(ε) $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2+4x+4}\,dx$, (στ) $\int_{-1}^0 \frac{2x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$, (ζ) $\int_0^1 \frac{4x^2-x}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx$

### Άσκηση 4 (Παραγοντική ολοκλήρωση)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 x\cdot e^x\,dx$, (β) $\int_0^1 (x+1)\cdot e^x\,dx$, (γ) $\int_0^1 (x-2)\cdot e^x\,dx$, (δ) $\int_0^1 x^2\cdot e^x\,dx$,

(ε) $\int_0^1 (x^2+1)\cdot e^x\,dx$, (στ) $\int_0^1 (x^2+x+2)\cdot e^x\,dx$, (ζ) $\int_0^1 3x\cdot e^{-x}\,dx$, (η) $\int_0^1 x\cdot e^{3x}\,dx$,

(θ) $\int_0^1 x\cdot e^{2x}\,dx$, (ι) $\int_0^1 (x+3)\cdot e^{-x}\,dx$, (κ) $\int_0^1 e^{-x}\cdot sin3x\,dx$, (λ) $\int_1^e (x^2+x+1)lnx\,dx$

### Άσκηση 5 (Παραγοντική ολοκλήρωση)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 e^x \cdot sinx\, dx$, (β) $\int_0^1 e^x \cdot cosx\, dx$, (γ) $\int_0^1 e^x \cdot sin2x\, dx$, (δ) $\int_0^1 e^{2x} \cdot cos3x\, dx$,

(ε) $\int_1^e x \cdot lnx\, dx$, (στ) $\int_1^e lnx\, dx$, (ζ) $\int_1^e ln^2 x\, dx$, (η) $\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\, dx$, (θ) $\int_1^e \frac{lnx}{\sqrt{x}}\, dx$,

(ι) $\int_0^1 x\sqrt{1+x}\, dx$, (κ) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\, dx$, (λ) $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x}\, dx$, (μ) $\int_0^1 (x+1)\cdot\sqrt[3]{x+2}\, dx$,

(ν) $\int_0^1 (x^2+1)\cdot\sqrt[5]{x+3}\, dx$, (ξ) $\int_1^e cos(lnx)\, dx$, (ο) $\int_{-0,5}^{0} x \cdot ln\frac{1-x}{1+x}\, dx$, (π) $\int_1^e sin(lnx)\, dx$

## Άσκηση 6 (Παραγοντική ολοκλήρωση)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sinx\, dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cosx\, dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cdot cosx\, dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cdot sinx\, dx$,

(ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot sinx\, dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sin^2 x\, dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x\, dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\, dx$,

(θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sin2x\, dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+2)\cdot cosx\, dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cdot cos3x\, dx$, (λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x\, dx$

(μ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\cdot cos^2 x\, dx$, (ν) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sin3x \cdot cosx\, dx$, (ξ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sinx \cdot sin2x\, dx$

## Άσκηση 7 (Παραγοντική ολοκλήρωση)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\, dx$, (β) $\int_0^1 \frac{x+1}{e^x}\, dx$, (γ) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$, (δ) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} sin\sqrt{x}\, dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sinx \cdot cosx\, dx$

(στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4^{-x} cosx\, dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^x sinx\, dx$, (η) $\int_1^e (lnx)^2 \sqrt{x}\, dx$, (θ) $\int_0^1 (x+3)2^x\, dx$,

(ι) $\int_0^1 x \cdot ln(x+1)\, dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 x}{e^x}\, dx$, (λ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{sin^2 x}\, dx$, (μ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2 x}\, dx$

## Άσκηση 8 (Ολοκλήρωση γινομένου–πηλίκου)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (3x^2 e^x + x^3 e^x)\, dx$, (β) $\int_0^1 (4x^3 e^x + x^4 e^x)\, dx$, (γ) $\int_0^1 (2x \cdot sinx + x^2 \cdot cosx)\, dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx - x \cdot sinx)\, dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3x^2 \cdot \varepsilon\varphi x + \frac{x^3}{cos^2 x}\right) dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot sinx + e^x \cdot cosx)\, dx$,

(ζ) $\int_1^2 \left(\frac{sinx}{x} + lnx \cdot cosx\right) dx$, (η) $\int_e^{e^2} \frac{2x \cdot lnx - \frac{x^2+1}{x}}{ln^2 x}\, dx$, (θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x \cdot sinx - x^2 \cdot cosx}{sin^2 x}\, dx$

### Άσκηση 9 (Ολοκλήρωση γινομένου–πηλίκου)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_e^{2e} \frac{lnx - 1}{ln^2 x}\, dx$, (β) $\int_e^{e^2} \frac{e^x \cdot lnx - \frac{e^x}{x}}{ln^2 x}\, dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x \cdot cosx + e^x \cdot sinx}{cos^2 x}\, dx$,

(δ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\varepsilon\varphi x - \frac{x}{cos^2 x}}{\varepsilon\varphi^2 x}\, dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x \cdot cosx + x^2 \cdot sinx}{cos^2 x}\, dx$, (στ) $\int_0^1 \frac{(x^2+2)e^x - 2xe^x}{(x^2+2)^2}\, dx$

### Άσκηση 10 (Αλλαγή μεταβλητής)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (x^2+x+1)^3 (2x+1)\, dx$, (β) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx$

(δ) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$, (ε) $\int_0^1 (3e^x+2)^4 e^x\, dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx \cdot sin^4 x\, dx$,

(ζ) $\int_0^1 \frac{3x^2+1}{(x^3+x+1)^2}\, dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{(cosx)^2}\, dx$, (θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+2\sigma\varphi x}}{sin2x}\, dx$

### Άσκηση 11 (Αλλαγή μεταβλητής)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\, dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos3x\, dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sin(x^2+1)\, dx$, (δ) $\int_{\frac{\pi}{2e}}^{1} \cdot \frac{sin(lnx)}{x}\, dx$,

(ε) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \cdot cosx}{3 \cdot sinx + 1}\, dx$, (ζ) $\int_0^1 \frac{e^x}{2e^x+1}\, dx$, (η) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\, dx$.

(θ) $\int_0^1 e^{3x}\, dx$, (ι) $\int_0^1 x \cdot e^{x^2+1}\, dx$, (κ) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$, (λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1+sinx} \cdot cosx\, dx$,

(μ) $\int_0^1 e^{x^2+2x+3+ln(x+1)}\, dx$, (ν) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx$, (ξ) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$, (ο) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\, dx$

**Άσκηση 12 (Συνθέσεις του ημιτόνου)**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin3x\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(2x+1)\,dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$,

(ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cdot sin\left(x^2+x+1\right)dx$, (ζ) $\int_1^2 \frac{sin(lnx)}{x}dx$

(η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot sin\left(2e^x+1\right)dx$, (θ) $\int_1^4 \frac{sin\left(2+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}dx$,

(κ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(1+\sigma\varphi x)}{sin^2x}dx$, (λ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin(\varepsilon\varphi x)}{cos^2x}dx$, (μ) $\int_0^1 \frac{sin\left[ln(x+2)\right]}{x+2}dx$

**Άσκηση 13 (Συνθέσεις του συνημιτόνου)**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(3x+2)\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$,

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$, (στ) $\int_1^e \frac{cos(lnx)}{x}dx$,

(ζ) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, (η) $\int_0^1 \frac{cos\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}dx$, (θ) $\int_0^1 \frac{cos\left(1+3e^x\right)}{e^x}dx$,

(ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cdot cos\left(x^2+2x+4\right)dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3x^2+1\right)\cdot cos\left(x^3+x+4\right)dx$,

(λ) $\int_0^1 \frac{cos\left[ln(3x+1)\right]}{3x+1}dx$, (μ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\cdot cosx}{1+3\cdot sinx}dx$

**Άσκηση 14 (Συνθέσεις των $cos^{-2}x$, $sin^{-2}x$)**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{cos^2(2x)}dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{cos^2(2x+1)}dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{21}} \frac{1}{cos^2(3x)}dx$,

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2\left(1+x^2\right)}dx$, (ε) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{-1}}{cos^2\left(\sqrt{x}\right)}dx$, (στ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{sin^2(2x)}dx$,

(ζ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{sin^2(2x+1)}dx$, (η) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sin^2\left(2+x^2\right)}dx$, (θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{sin^2\left(x^2+2x+3\right)}dx$, (ι) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{-1}}{sin^2\left(\sqrt{x}\right)}\,dx$

## Άσκηση 15 (Συνθέσεις του $e^x$ )

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 e^{4x+2}\,dx$, (β) $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$, (γ) $\int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx$, (δ) $\int_0^1 (2x+1)\cdot e^{x^2+x+1}\,dx$,

(ε) $\int_1^4 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$, (στ) $\int_0^1 \left(3x^2+1\right)e^{x^3+x+1}\,dx$, (ζ) $\int_0^1 \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, (η) $\int_0^1 4^x\,dx$,

(θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx-sinx)e^{sinx+cosx}dx$, (ι) $\int_0^1 cosx\cdot e^{sinx}\,dx$, (κ) $\int_0^1 x^2\cdot 5^{x^3}\,dx$ , (λ) $\int_0^1 2^x\cdot e^x\,dx$,

(μ) $\int_0^1 \frac{\left(4^x-3^x\right)^2}{4^x\cdot 3^x}dx$, (ν) $\int_0^1 e^{x^2+2x+3+ln(x+1)}\,dx$, (ξ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{cos^2x}dx$, (ο) $\int_1^4 \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$,

(π) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{1+3\cdot\sigma\varphi x}}{sin^2x}dx$

## Άσκηση 16

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \left(x^2+3x+1\right)dx$, (β) $\int_0^1 \left(x^2-2x+3\right)dx$, (γ) $\int_0^1 (2x+1)^2\,dx$,

(δ) $\int_1^2 \left(x+\sqrt{x}\right)dx$, (ε) $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}\right)dx$, (στ) $\int_1^2 \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2\,dx$,

(ζ) $\int_0^1 x(x-2)^3\,dx$, (η) $\int_1^2 \sqrt{x}(x-2)\,dx$, (θ) $\int_1^2 \sqrt{x}(x-2)^2\,dx$,

(ι) $\int_1^2 x^2\left(\sqrt{x}-1\right)^2\,dx$

## Άσκηση 17

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 \left(x^2+3x+\frac{1}{x}\right)dx$, (β) $\int_1^e \frac{x^2-3x+1}{x}\,dx$, (γ) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$,

(δ) $\int_1^2 \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$, (ε) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}(x+1)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, (στ) $\int_1^2 \frac{x-3}{\sqrt{x}}\,dx$,

(ζ) $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x}+x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, (η) $\int_1^2 \frac{x^2+3x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, (θ) $\int_1^e \left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)dx$

(ι) $\int_1^2 \frac{x^3-2x^2+1}{x^2}\,dx$, (κ) $\int_1^e \left(\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$, (λ) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2}+2+\frac{1}{x}\right)dx$

### Άσκηση 18 (Συνθέσεις του 1/x)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\,dx$, (δ) $\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx$,

(ε) $\int_0^1 \frac{1}{3x-6}\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+sinx}\,dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{1+2cosx}\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx$,

(θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\,dx$, (ι) $\int_0^1 \frac{e^x}{3e^x+2}\,dx$, (κ) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$, (λ) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$,

(μ) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot lnx}\,dx$, (ν) $\int_1^e \frac{1}{x(1+2\cdot lnx)}\,dx$, (ξ) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, (ο) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

### Άσκηση 19 (Συνθέσεις του 1/x)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}\,dx$,

(δ) $\int_0^1 \frac{x(2x^2+1)}{x^4+x^2+3}\,dx$, (ε) $\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x+1}\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x+cosx}{e^x+sinx}\,dx$,

(ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx-cosx}{sinx+sinx}\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x ln2+cosx}{2^x+sinx}\,dx$, (θ) $\int_3^4 (x+1)(x-3)^{31}\,dx$

### Άσκηση 20 (Συνθέσεις του 1/x)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^3 (x-2)\sqrt{x+1}\,dx$, (β) $\int_0^3 x^2\sqrt{x+1}\,dx$, (γ) $\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx$,

(δ) $\int_0^1 (x+3)\sqrt{8x+1}\,dx$, (ε) $\int_0^1 (x^2-1)\sqrt[3]{x+1}\,dx$, (στ) $\int_{-2}^0 x(x+2)^5\,dx$,

(ζ) $\int_1^2 x^2(x-1)^{55}\,dx$, (η) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 x(2x+1)^{55}\,dx$, (θ) $\int_0^1 (x^2+x+1)(x+1)^6\,dx$.

(ι) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, (κ) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, (λ) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^2}}$, (μ) $\int_0^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$,

(ν) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$, (ξ) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

**Άσκηση 21**

Εξετάστε αν ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

(α) $\frac{3}{2}\le\int_1^2\frac{2x+1}{x+1}\,dx\le\frac{5}{3}$, (β) $1\le\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx\le\sqrt{2}$

(γ) $2\sqrt{3}\le\int_0^2\sqrt{x^2+2x+3}\,dx\le2\sqrt{11}$, (δ) $e\le\int_0^1 e^{x^2+2x+1}\,dx\le e^4$,

(ε) $-2\le\int_{-1}^1\left(x^3-3x+1\right)dx\le6$, (στ) $\frac{\pi}{4}\le\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3+sinx}\,dx\le\frac{\pi}{2}$,

(ζ) $\frac{1+ln2}{4}\le\int_e^{2e}\frac{lnx}{2x}\,dx\le\frac{1}{2}$

**Άσκηση 22 (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα)**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin3x\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(x+sin6x\right)dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2+sin4x\right)dx$,

(ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos3x\,dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos4x\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3x+cos6x\right)dx$,

(θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos3x\cdot cosx\right)dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin3x\cdot cosx\right)dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin3x\cdot cos4x\right)dx$,

(λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin3x\cdot sin5x\right)dx$, (μ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^3x\cdot cosx\right)dx$, (ν) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^4x\cdot cosx\right)dx$,

(ξ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sinx\cdot cos^3x\right)dx$, (ο) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinx}{cos^2x}\,dx$, (π) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3x\,dx$, (ρ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\,dx$

**Άσκηση 23 (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα)**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\,dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 2x\,dx$,

(ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\cdot cos^3x\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5x\cdot cos^2x\,dx$.

**Άσκηση 24 (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα)**

Αν $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx$ και $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\,dx$ υπολογίστε τα $I_1$, $I_2$, $I_1+I_2$, $I_2-I_1$.

**Άσκηση 25 (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα)**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\cdot cos^2x\, dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin4x\cdot sin^2x\, dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos3x\cdot cos^2x\, dx$,

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4x\cdot sin^2x\, dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\, dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x\, dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^3 x\, dx$

(η) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^4 x\, dx$, (θ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x}{cos^2x}\, dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{cos^2x}\, dx$, (κ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\, dx$, (λ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^2 x\, dx$,

(μ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^3 x\, dx$, (ν) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^4 x\, dx$, (ξ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\varphi x}{sin^2x}\, dx$, (ο) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sigma\varphi x}}{sin^2x}\, dx$

**Άσκηση 26**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \left(x^2+x+1\right)^3\left(2x+1\right)\, dx$, (β) $\int_0^1 \left(x^3+x+1\right)^4\left(3x^2+1\right)\, dx$, (γ) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx$,

(δ) $\int_0^1 \left(x^2+2x+3\right)^2\left(x+1\right)\, dx$, (ε) $\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}\, dx$, (στ) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ ,

(ζ) $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}}$ , (η) $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt[4]{x^2+6x+7}}\, dx$, (θ) $\int_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^4}{\sqrt{x}}\, dx$, (ι) $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$,

(κ) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, (λ) $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

**Άσκηση 27**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 e^x\left(e^x+1\right)^3\, dx$, (β) $\int_0^1 e^x\sqrt{e^x+2}\, dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx$, (δ) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x+1}}\, dx$,

(ε) $\int_0^1 e^x\left(2e^x+1\right)^4\, dx$, (στ) $\int_1^e \frac{ln^4x}{x}\, dx$, (ζ) $\int_1^e \frac{\sqrt{lnx}}{x}\, dx$, (η) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot ln^3x}\, dx$,

(θ) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{lnx}}\, dx$, (ι) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+lnx}}{x}\, dx$, (κ) $\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+2lnx\right)^3}$

**Άσκηση 28**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x \cdot cosx\, dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x \cdot cosx\, dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx \cdot cos^5x\, dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sinx}{cos^2x} dx$,

(ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{\sqrt{cosx}} dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx \cdot \sqrt[3]{cosx}\, dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx \cdot \sqrt{2+cosx}\, dx$,

(η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sinx} \cdot cosx\, dx$, (θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{1+sinx} \cdot cosx\, dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{(2cosx+1)^2} dx$,

(κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{1+sinx}} dx$, (λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt[3]{3+2sinx}} dx$

### Άσκηση 29

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{εφ^5x}{cos^2x} dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{εφx}}{cos^2x} dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+εφx}}{cos^2x} dx$,

(δ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{σφ^6x}{sin^2x} dx$, (ε) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+3σφx)^3}{sin^2x} dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(2+3εφx)cos^2x}$,

(ζ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2+σφx}}{sin^2x} dx$, (η) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin^2x\,\sqrt{1+σφx}}$, (θ) $\int_0^1 (e^x+sinx+x)^3\,(e^x+cosx+1)\, dx$,

(ι) $\int_e^{e^2} \frac{3x+2}{x(2lnx+3x)^2} dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^5x}{cos^7x} dx$, (λ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^3x}{sin^5x} dx$, (μ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx-sinx}{(cosx+sinx)^2} dx$,

(ν) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sinx+2^x}\,(cosx+2^x ln2)\, dx$