

Περιεχόμενα

5.1 Ορισμός διμελούς σχέσης.....	3
5.2 Ορισμός συνάρτησης.....	3
Εφαρμογή 1.....	4
Εφαρμογή 2.....	4
5.2.1 Παρατήρηση.....	4
Εφαρμογή 3.....	5
Εφαρμογή 4.....	5
Εφαρμογή 5.....	5
Εφαρμογή 6.....	6
Εφαρμογή 7.....	6
Εφαρμογή 8.....	6
Εφαρμογή 9.....	6
5.3 Πεδίο ορισμού συνάρτησης.....	7
5.4 Πεδίο τιμών συνάρτησης.....	7
Εφαρμογή 10.....	8
Εφαρμογή 11.....	8
Εφαρμογή 12.....	8
Εφαρμογή 13.....	8
Εφαρμογή 14.....	8
Εφαρμογή 15.....	9
Εφαρμογή 16.....	9
Εφαρμογή 17.....	9
Εφαρμογή 18.....	9
Εφαρμογή 19.....	9
Εφαρμογή 20.....	9
Εφαρμογή 21.....	10
Εφαρμογή 22.....	10
Εφαρμογή 23.....	10
Εφαρμογή 24.....	10
Εφαρμογή 25.....	10
Εφαρμογή 26.....	11
5.5 Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.....	11
Εφαρμογή 27.....	12
Εφαρμογή 28.....	12
Εφαρμογή 29.....	12
Εφαρμογή 30.....	12
Εφαρμογή 31.....	12
Εφαρμογή 32.....	13
5.5.1 Παρατηρήσεις.....	13
5.6 Η άλγεβρα των συναρτήσεων.....	13
Εφαρμογή 33.....	14
Εφαρμογή 34.....	15
5.7 Η αντίστροφη συνάρτηση.....	15
5.7.1 Εύρεση του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης.....	15
Εφαρμογή 35.....	15
5.8 Ισότητα των συναρτήσεων.....	16
Εφαρμογή 36.....	16
Εφαρμογή 37.....	16
Εφαρμογή 38.....	17
Εφαρμογή 39.....	17
5.9 Άρτια και περιττή συνάρτηση.....	17
5.9.1 Παρατηρήσεις.....	17
Εφαρμογή 40.....	17
Εφαρμογή 41.....	18

Εφαρμογή 42.....	18
Εφαρμογή 43.....	18
Εφαρμογή 44.....	18
Εφαρμογή 45.....	18
Εφαρμογή 46.....	18
Εφαρμογή 47.....	19
5.10 Σύνθεση συναρτήσεων	19
Εφαρμογή 48.....	20
5.10.1 Παρατηρήσεις	22
Εφαρμογή 49.....	22
Εφαρμογή 50.....	25
Εφαρμογή 51.....	26
Εφαρμογή 52.....	27
Εφαρμογή 53.....	27
Άσκηση 1	29
Άσκηση 2	30
Άσκηση 3	30
Άσκηση 4	30
Άσκηση 5	30
Άσκηση 6	30
Άσκηση 7	30
Άσκηση 8	30
Άσκηση 9	30
Άσκηση 10	30
Άσκηση 11	31
Άσκηση 12	31
Άσκηση 13	31
Άσκηση 14	31
Άσκηση 15	31
Άσκηση 16	32
Άσκηση 17	32
Άσκηση 18	32
Άσκηση 19	32
Άσκηση 20	32
Άσκηση 21	32
Άσκηση 22	33

5.1 Ορισμός διμελούς σχέσης

Έστω δύο μη κενά σύνολα A, B . Έχω μία **αντιστοιχία** ή **διμελή σχέση** με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης το B , αν και μόνο αν μπορώ με έναν συγκεκριμένο τρόπο (ή κανόνα ή διαδικασία) f να συσχετίσω ένα τουλάχιστον στοιχείο x του A , με ένα ή περισσότερα στοιχεία y του B .

Ο παραπάνω ορισμός συμβολικά, δίνεται με το $f: A \rightarrow B$ και διαβάζω «η f είναι μία αντιστοιχία με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης το B ».

Για τα στοιχεία που συσχετίζονται, γράφω: $x \xrightarrow{f} y$ και διαβάζω «το x διαμέσου της f αντιστοιχεί στο y » ή «από το σύνολο A το στοιχείο x , μέσω της f αντιστοιχεί στο στοιχείο y του B ».

Ονομάζω **τύπο** μίας αντιστοιχίας $f: A \rightarrow B$, τη συμβολική έκφραση $x \xrightarrow{f} y$ με την οποία καθορίζεται ο τρόπος που συνδέονται τα αντίστοιχα στοιχεία. Το x ονομάζεται **αρχέτυπο** ή **πρωτότυπο** ή **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y ονομάζεται **εικόνα** του x ή **εξαρτημένη μεταβλητή** ή **τιμή** της f στο x .

Ονομάζω **πεδίο ορισμού** (domain of definition) της αντιστοιχίας $f: A \rightarrow B$ και το συμβολίζω με το $D(f)$, το σύνολο που περιέχει εκείνα τα στοιχεία x του A για τα οποία υπάρχουν στοιχεία y του B έτσι ώστε $x \xrightarrow{f} y$, δηλαδή ορίζεται ως εξής:

$$D(f) = \left\{ x \in A : \exists y \in B \text{ με } x \xrightarrow{f} y \right\}$$

ορισμ

Ονομάζω **πεδίο τιμών** (domain of range) της αντιστοιχίας $f: A \rightarrow B$ και το συμβολίζω με το $R(f)$, το σύνολο των στοιχείων y του B για τα οποία υπάρχουν στοιχεία x του A έτσι ώστε $x \xrightarrow{f} y$, δηλαδή ορίζεται ως εξής:

$$R(f) = \left\{ y \in B : \exists x \in A \text{ με } x \xrightarrow{f} y \right\}$$

Ονομάζω **γράφημα** (graph) της αντιστοιχίας $f: A \rightarrow B$ και το συμβολίζω $G(f)$, το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) με $x \in A$, $y \in B$ έτσι ώστε $x \xrightarrow{f} y$, δηλαδή ορίζεται ως εξής: $G(f) = \left\{ (x, y) \in A \times B : x \xrightarrow{f} y \right\}$

Το σύνολο $G(f)$ μπορεί να παρασταθεί με το καρτεσιανό του διάγραμμα. Μία τέτοια παράσταση του γραφήματος, ονομάζεται **γραφική** (ή γεωμετρική) **παράσταση** της αντιστοιχίας.

Μία αντιστοιχία $f: A \rightarrow B$ ονομάζεται **μονοσήμαντη** ή **μονότιμη** αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $x \in D(f)$ έχει, μέσω της f , ως εικόνα ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in B$. Σε αντίθετη περίπτωση, ονομάζεται **πλειότιμη**.

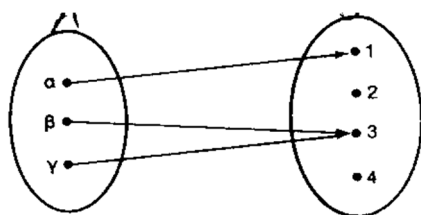
5.2 Ορισμός συνάρτησης

Έστω δύο μη κενά σύνολα A, B . Συνάρτηση από το A στο B , είναι μία διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς στοιχείο του B . Αν το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $B = \mathbb{R}$, τότε η f ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.

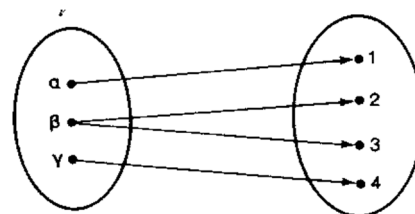
Δηλαδή, πραγματική συνάρτηση με πραγματική μεταβλητή είναι κάθε μονοσήμαντη αντιστοιχία του $A \subseteq \mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση είναι γνωστή, αν γνωρίζω το πεδίο ορισμού της, το σύνολο μέσα στο οποίο παίρνει τιμές και τον νόμο βάσει του οποίου το κάθε $x \in D(f)$ αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα $y \in R(f)$

Εφαρμογή 1

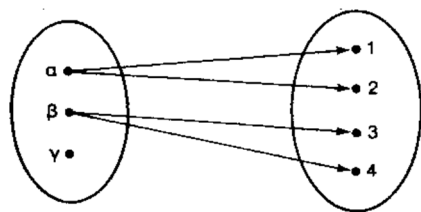
Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα Venn αντιστοιχεί σε συνάρτηση; Το διάγραμμα 1 αντιστοιχεί σε συνάρτηση, διότι από κάθε στοιχείο του 1^{ου} συνόλου φεύγει βέλος και είναι μοναδικό.



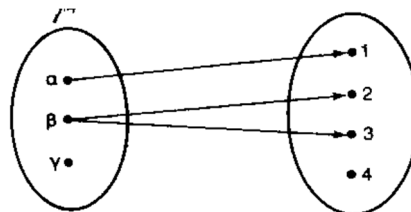
Διάγραμμα 1



Διάγραμμα 2



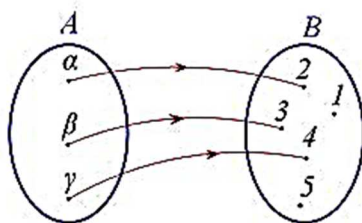
Διάγραμμα 3



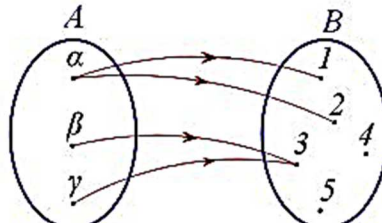
Διάγραμμα 4

Εφαρμογή 2

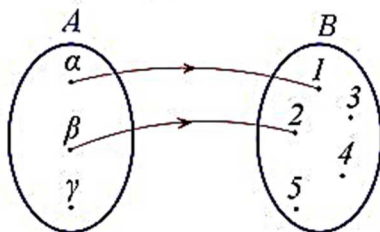
Ποιο από τα παρακάτω σχήματα Venn αντιστοιχεί σε συνάρτηση; Μόνο το διάγραμμα 1 αντιστοιχεί σε συνάρτηση, διότι από κάθε στοιχείο του 1^{ου} συνόλου φεύγει βέλος και είναι μοναδικό.



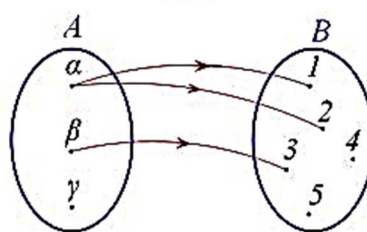
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

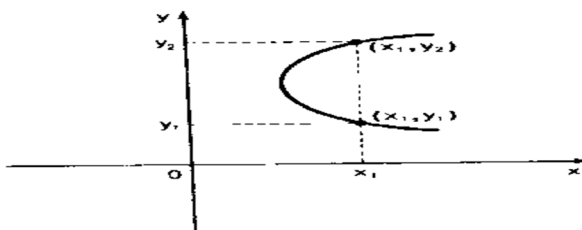


Σχήμα 4

5.2.1 Παρατήρηση

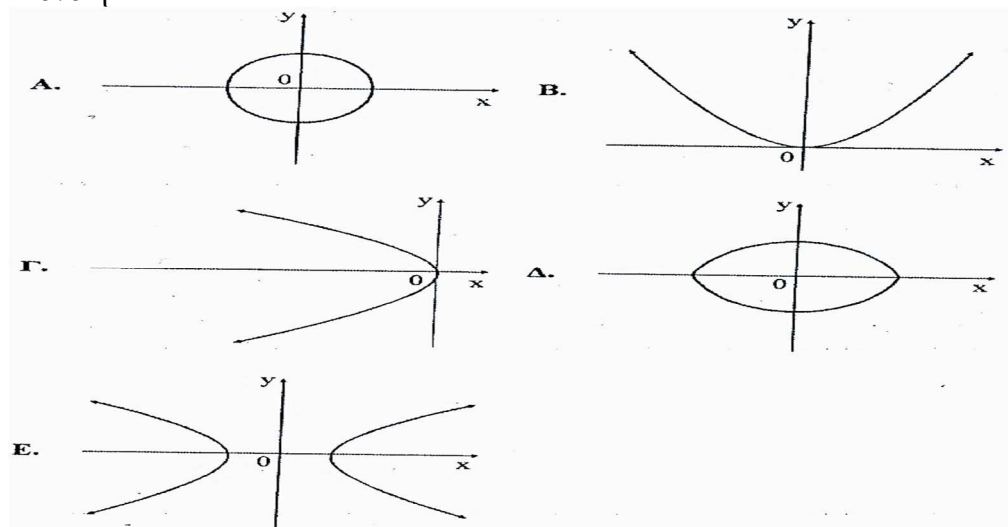
Από τον ορισμό της συνάρτησης f προκύπτει ότι κάθε στοιχείο $x \in D(f)$ έχει μία μόνο εικόνα $y \in R(f)$, άρα κάθε ευθεία γραμμή κάθετη στον άξονα xx' σε σημείο που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα μόνο σημείο. Αν η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει, τότε πρόκειται

για διμελή σχέση και όχι για συνάρτηση. Στο παρακάτω σχήμα έχω τη γραφική παράσταση μίας διμελούς σχέσης και όχι συνάρτησης, διότι για $x = x_1$ υπάρχουν δυο αντίστοιχες τιμές του y , η y_1 και η y_2



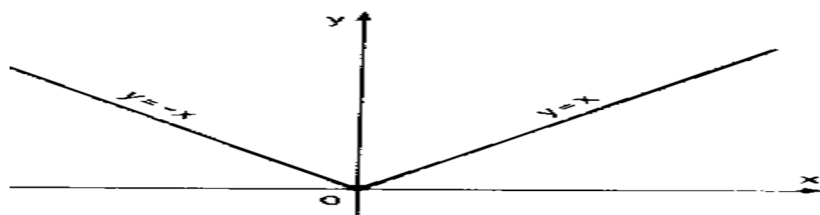
Εφαρμογή 3

Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνει συνάρτηση;
Μόνο η Β



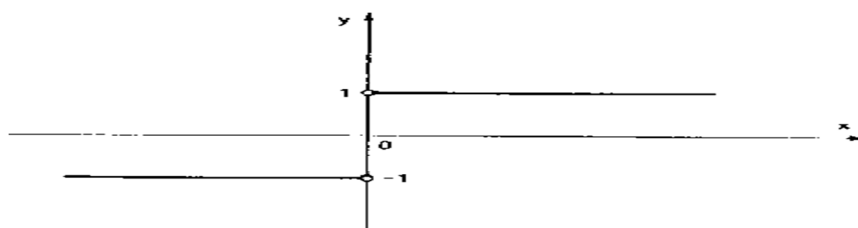
Εφαρμογή 4

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$



Εφαρμογή 5

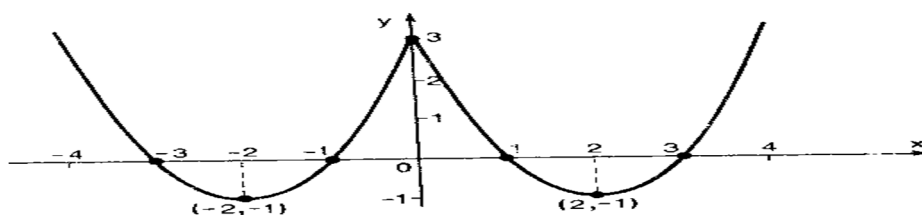
Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



Εφαρμογή 6

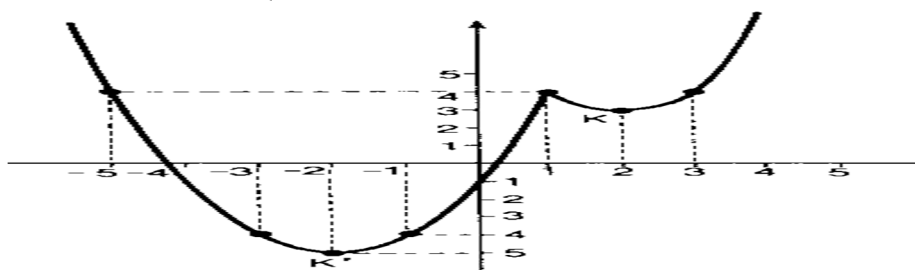
Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 & , x < 0 \end{cases}$$

**Εφαρμογή 7**

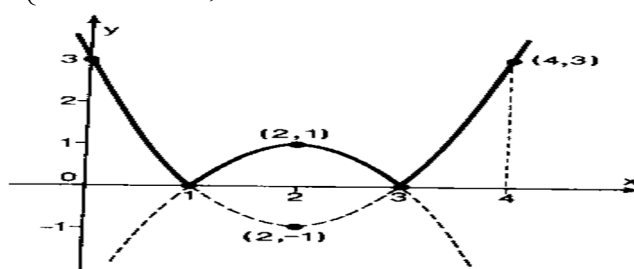
Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 4|x-1| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & , x \geq 1 \\ x^2 + 4x - 1 & , x < 1 \end{cases}$$

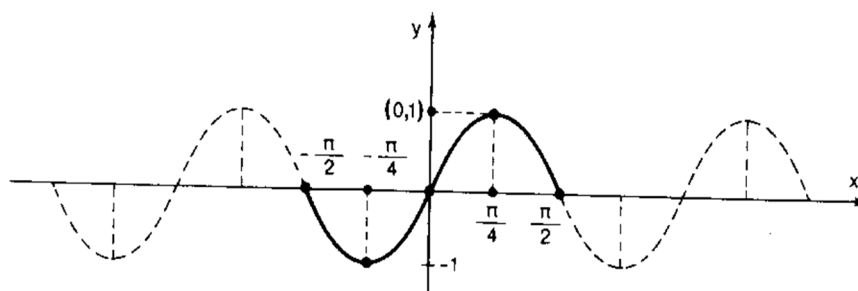
**Εφαρμογή 8**

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x \leq 1 \text{ ή } x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & , 1 < x < 3 \end{cases}$$

**Εφαρμογή 9**

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(2x)$

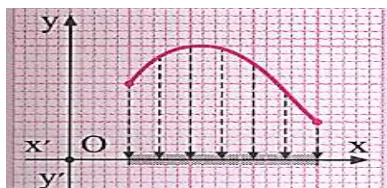


5.3 Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

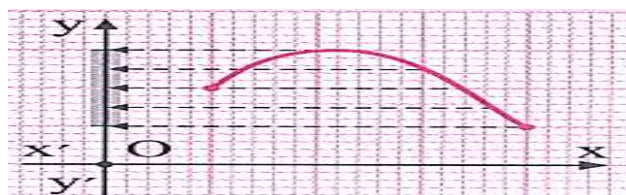
Τύπος συνάρτησης	Περιορισμοί
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	Κανένας
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}, n \in \mathbb{N}^*$	$P(x) \geq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	Κανένας
$f(x) = \log(P(x))$	$P(x) > 0$
$f(x) = [P(x)]^{Q(x)}$	$P(x) > 0$
$f(x) = \frac{5}{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \log h(x)$	$P(x) \neq 0, Q(x) \geq 0, h(x) > 0$
$f(x) = \varepsilon\phi[P(x)]$	$P(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sigma\phi[P(x)]$	$P(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Από τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, προσδιορίζω τα πεδία ορισμού και τιμών της. Πεδίο ορισμού, είναι το σύνολο των σημείων του άξονα xx' που είναι οι ορθές προβολές πάνω σε αυτόν, όλων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

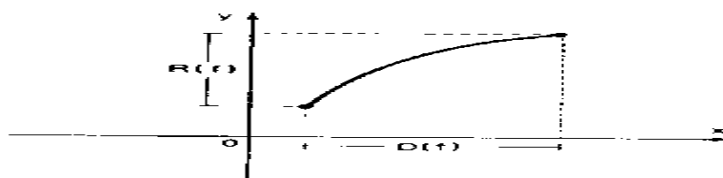


5.4 Πεδίο τιμών συνάρτησης

Πεδίο τιμών, είναι το σύνολο των σημείων του άξονα yy' που είναι ορθές προβολές των σημείων της γραφικής παράστασης.



Τα ανωτέρω, περιγράφονται στο παρακάτω σχήμα.

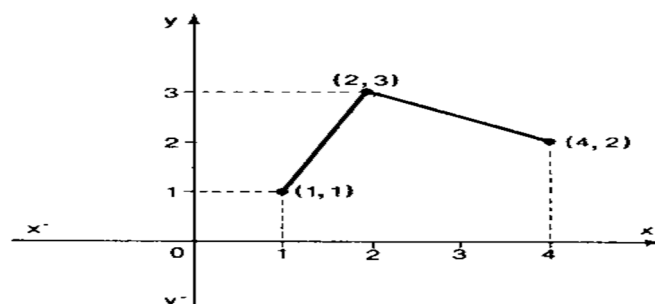


Το $D(f)$ είναι σημεία του xx' άξονα ενώ το $R(f)$ είναι σημεία του yy' άξονα, ανεξάρτητα από τα γράμματα που χρησιμοποιώ για να δηλώσω την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.

Εφαρμογή 10

Από τη γραφική παράσταση της f , βρείτε τα $D(f)$ και $R(f)$

Είναι $D(f) = [1, 4]$ και $R(f) = [1, 3]$

**Εφαρμογή 11**

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

Είναι $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} =$
 $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} =$
 $\mathbb{R} - \{1\}$

Εφαρμογή 12

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

Είναι $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0 \text{ και } x^2 - 4 \neq 0\} =$
 $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} =$
 $\{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+2) > 0\} =$
 $\{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ και } x < -2\} =$
 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Εφαρμογή 13

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \frac{2}{x^2+4}$

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ διότι $x^2 + 4 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Εφαρμογή 14

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Είναι $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} =$
 $\{x \in \mathbb{R} : (1-x)(1+x) \geq 0\} =$
 $\{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, 1]\} =$
 $[-1, 1]$

Εφαρμογή 15

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+1) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ ή } x \leq -1\} = \\ &= (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \end{aligned}$$

Εφαρμογή 16

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ διότι $x^2 + 4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Εφαρμογή 17

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \sqrt{|x-2|+1}$

Είναι $\text{ΠΟ} = \{x \in \mathbb{R} : |x-2|+1 \geq 0\} = \mathbb{R}$

Εφαρμογή 18

Εύρεση του πεδίου ορισμού της $f, f(x) = \sqrt{|x|-4}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \text{ΠΟ} &= \{x \in \mathbb{R} : |x|-4 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 4\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4 \text{ ή } x \leq -4\} = \\ &= (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \end{aligned}$$

Εφαρμογή 19

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|-2}}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : |x-1|-2 > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x-1| > 2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 2 \text{ ή } x-1 < -2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ ή } x < -1\} = \\ &= (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

Εφαρμογή 20

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \frac{x-2}{\sqrt[3]{|x+1|-3}}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : |x+1|-3 \neq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \neq 3\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 3 \text{ ή } x+1 \neq -3\} = \end{aligned}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \text{ ή } x \neq -4\} = \\ \mathbb{R} - \{-4, 2\}$$

Εφαρμογή 21

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 5x - 4 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -(x-4)(x-1) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-4)(x-1) \leq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [1, 4]\} = \\ &= [1, 4] \end{aligned}$$

Εφαρμογή 22

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f, f(x) = \sqrt{-x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 1 \geq 0 \text{ και } x^2 - 6x + 8 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (-x+1)(-x-1) \geq 0 \text{ και } (x-4)(x-2) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, 1] \text{ και } x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)\} = \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$

Εφαρμογή 23

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f(x) = \frac{5x+2}{|x|+1}$

$$\text{Είναι } D(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Εφαρμογή 24

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f(x) = \frac{3}{|x-2|-7}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : |x-2| - 7 \neq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \neq 7\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 7 \text{ και } x-2 \neq -7\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 9 \text{ και } x \neq -5\} = \\ &= \mathbb{R} - \{-5, 9\} \end{aligned}$$

Εφαρμογή 25

Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f(x) = \frac{5x+3}{x-2} - \sqrt{x^2 - 4}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0 \text{ και } x^2 - 4 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \text{ και } (x-2)(x+2) \geq 0\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \text{ και } (x-2)(x+2) \geq 0\} = \\ & \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \text{ και } x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\} = \\ & (-\infty, -2] \cup (2, +\infty) \end{aligned}$$

Εφαρμογή 26

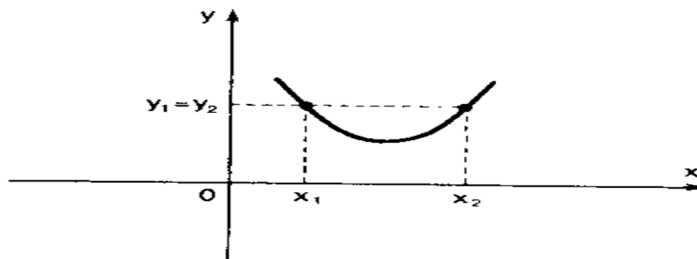
Εύρεση του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f(x) = \frac{3x+1}{2\sin x - 1}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : 2\sin x - 1 \neq 0\} = \\ & \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq \frac{1}{2}\right\} = \\ & \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq \sin \frac{\pi}{6}\right\} = \\ & \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ και } x \neq 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \\ & \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi \text{ και } x \neq \left(2k + 1 - \frac{1}{6}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \\ & \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi \text{ και } x \neq \left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \\ & \mathbb{R} - \left\{\left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi, \left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

5.5 Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση

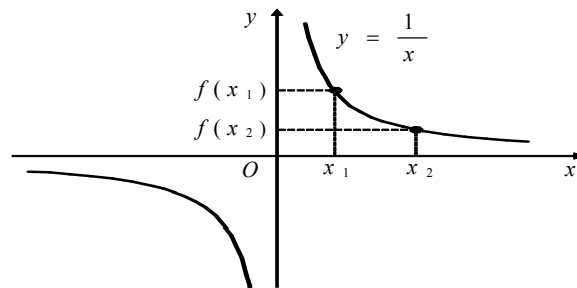
Μία συνάρτηση f ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη ή αμφιμονότιμη ή 1-1 (ένα προς ένα) αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 \neq x_2$ έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ισοδυνάμως από την αντιθετοαντιστροφή, η ανωτέρω πρόταση γράφεται και ως εξής: Μία συνάρτηση f ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη ή 1-1 αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έπεται ότι $x_1 = x_2$.

Μία 1-1 συνάρτηση, στη γραφική της παράσταση είναι τέτοια ώστε οποιαδήποτε ευθεία γραμμή, κάθετη στον άξονα yy' να μην τέμνει τη γραφική της παράσταση σε περισσότερα από ένα σημεία. Η συνάρτηση που παριστάνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα δεν είναι 1-1, διότι με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $y_1 = y_2$.



Εφαρμογή 27

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι 1-1

**Εφαρμογή 28**

Η συνάρτηση $f(x) = ax$ με $a \in \mathbb{R}^*$ είναι 1-1

Πράγματι, αφού $D(f) = \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1 \neq ax_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow y_1 \neq y_2$

Μία διαφορετική απόδειξη, με χρήση της αντιθετοαντιστροφής, είναι η ακόλουθη: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Εφαρμογή 29

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a \in \mathbb{R}^*$ και $\beta \in \mathbb{R}$ είναι 1-1

Πράγματι, αφού $D(f) = \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1 \neq ax_2 \Rightarrow ax_1 + \beta \neq ax_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Μία διαφορετική απόδειξη, με χρήση της αντιθετοαντιστροφής, είναι η ακόλουθη: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + \beta = ax_2 + \beta \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Εφαρμογή 30

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$ με $a \in \mathbb{R}^*$ είναι 1-1

Πράγματι, αφού $D(f) = \mathbb{R}^*$, ισχύει ότι $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{a}{x_1} \neq \frac{a}{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow y_1 \neq y_2$

Μία διαφορετική απόδειξη, με χρήση της αντιθετοαντιστροφής, είναι η ακόλουθη: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{a}{x_1} = \frac{a}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

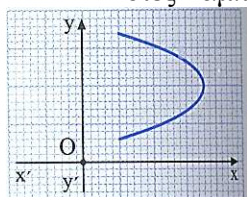
Εφαρμογή 31

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $D(f) = \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1 διότι, $f(3) = f(-3) = 9$

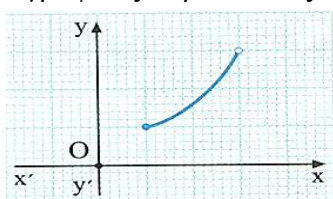
Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $D(f) = [0, +\infty)$ ή $D(f) = (-\infty, 0]$ είναι 1-1

Εφαρμογή 32

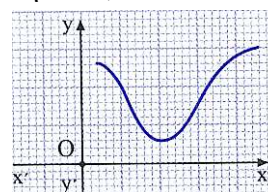
Ποιες καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις 1–1 συναρτήσεων;



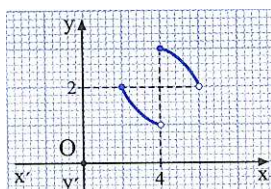
(α)



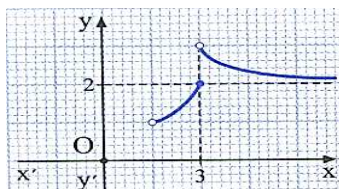
(β)



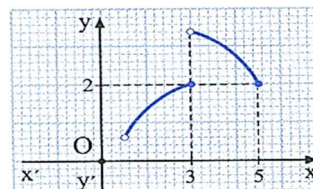
(γ)



(δ)



(ε)



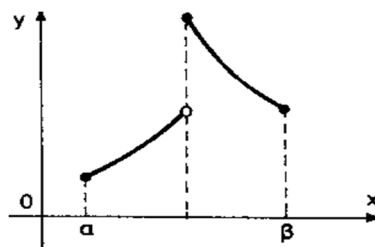
(στ)

Οι καμπύλες (α), (β), (δ), (ε)

5.5.1 Παρατηρήσεις

1 Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι 1–1. Άρα, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, συμβολίζετε f^{-1} και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f

2 Αν μία συνάρτηση f είναι 1–1, δεν έπεται ότι είναι γνησίως μονότονη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



5.6 Η άλγεβρα των συναρτήσεων

Ονομάζω **άθροισμα** των συναρτήσεων f, g τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f + g$, έχει τύπο $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και πεδίο ορισμού το $D(f + g) = D(f) \cap D(g)$

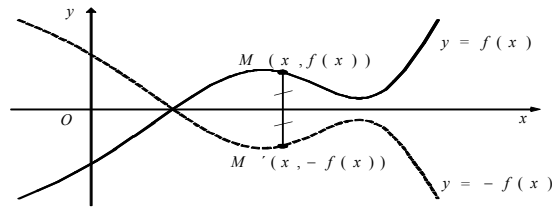
Ονομάζω **διαφορά** των συναρτήσεων f, g τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f - g$, έχει τύπο $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ και πεδίο ορισμού το $D(f - g) = D(f) \cap D(g)$

Ονομάζω **γινόμενο** πραγματικού αριθμού a επί τη συνάρτηση f , τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως af , έχει τύπο $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$ και πεδίο ορισμού το $D(af) = D(f)$

Ονομάζω **αντίθετη** συνάρτηση μίας συνάρτησης f , τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $-f$, έχει τύπο $(-f)(x) = -f(x)$ και πεδίο ορισμού το $D(-f) = D(f)$

Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα xx' , της γραφικής παράστασης της f , διότι αποτελείται από τα

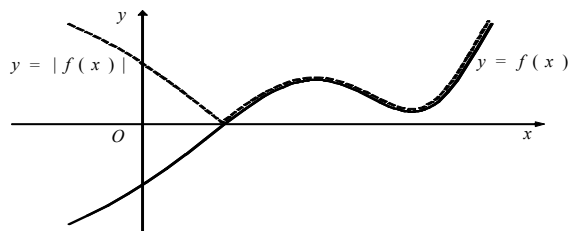
σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα xx'



Ονομάζω **γινόμενο** των συναρτήσεων f, g τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f \cdot g$, έχει τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού το $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$

Ονομάζω **πηλίκο** μίας συνάρτησης f δια τη συνάρτηση g , τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f : g$ ή $\frac{f}{g}$, έχει τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού το κοινό πεδίο ορισμού των f, g εκτός από τις τιμές του x που μηδενίζουν τη g , δηλαδή $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από όλα τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα xx' καθώς και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα xx' , των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα xx'



Εφαρμογή 33

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 2x$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

Είναι $\text{ΠΟ}_f = \mathbb{R}$ ως πολωνυμική.

Είναι $\text{ΠΟ}_g = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (1-x)(1+x) \geq 0\} = [-1, 1]$

Είναι $\text{ΠΟ}_f \cap \text{ΠΟ}_g = [-1, 1]$

Άρα, ισχύει ότι $(f+g)(x) = 2x + \sqrt{1-x^2}$ και $\text{ΠΟ}_{f+g} = [-1, 1]$

$(f-g)(x) = 2x - \sqrt{1-x^2}$ και $\text{ΠΟ}_{f-g} = [-1, 1]$

$(f \cdot g)(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ και $\text{ΠΟ}_{f \cdot g} = [-1, 1]$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ και $\text{ΠΟ}_{\frac{f}{g}} = (-1, 1)$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$ και $\text{ΠΟ}_{\frac{g}{f}} = [-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$

$(5f)(x) = 10x$ και $\text{ΠΟ}_{5f} = \mathbb{R}$

$$(5g)(x) = 5\sqrt{1-x^2} \text{ και } \text{ΠΟ}_{5g} = [-1, 1]$$

Εφαρμογή 34

$$\text{Έστω συναρτήσεις } f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Είναι } \text{ΠΟ}_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq 0\} = [2, +\infty)$$

$$\text{Είναι } \text{ΠΟ}_g = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (1-x)(1+x) \geq 0\} = [-1, 1]$$

$$\text{Άρα, } \text{ΠΟ}_f \cap \text{ΠΟ}_g = \{ \} = \emptyset$$

Άρα, δεν ορίζεται καμία από τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$

5.7 Η αντίστροφη συνάρτηση

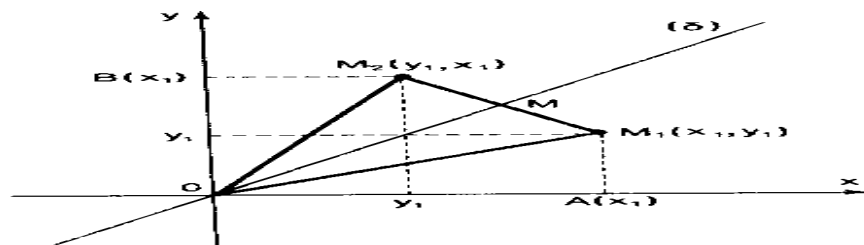
Για να υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση μίας συνάρτησης f πρέπει και αρκεί η f να είναι 1-1. Η f^{-1} και η $\frac{1}{f}$ είναι εντελώς διαφορετικές συναρτήσεις.

$$\text{Π.χ. για τη συνάρτηση } f(x) = 2x+3 \text{ είναι } \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{2x+3} \text{ και } f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

5.7.1 Εύρεση του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης

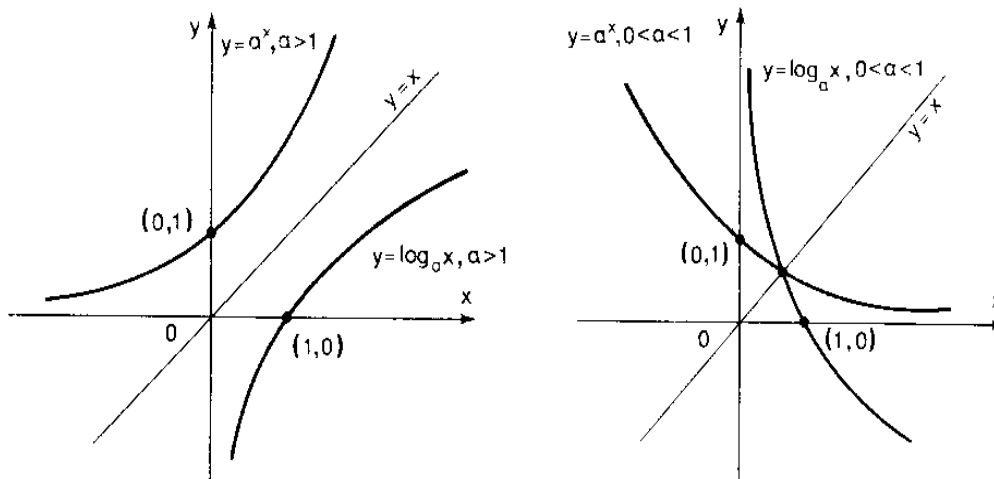
Αφού εξασφαλίσω ότι η συνάρτηση έχει αντίστροφη, δηλαδή ότι είναι 1-1, τότε για κάθε $y \in R(f)$ υπάρχει ένα και μόνο ένα $x \in D(f)$ έτσι ώστε $y = f(x)$. Για τον προσδιορισμό αυτού του μοναδικού x , λύνω τον τύπο της f ως προς x

Ενώ λύνω ως προς x , απαιτώ αυτό να ανήκει στο $D(f)$, οπότε προσδιορίζω ισοδύναμη συνθήκη για το y . Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, δηλαδή ως προς την ευθεία $y=x$. Αυτό συμβαίνει διότι, από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης, αν ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , τότε το σημείο $M_2(y_1, x_1)$ βρίσκεται στη γραφική παράσταση της f^{-1} . Τα σημεία M_1, M_2 είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων.



Εφαρμογή 35

Η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής $y = a^x$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_a x$.



5.8 Ισότητα των συναρτήσεων

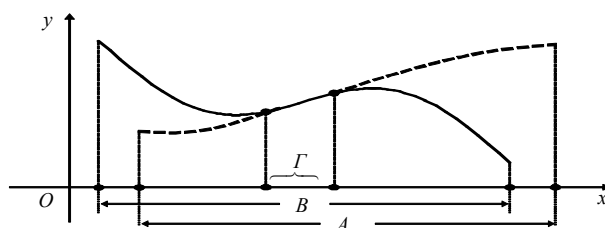
Δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες και σημειώνω $f = g$, αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε x που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού τους έχουν ίσες τιμές. Συμβολικά, ο ορισμός δίνεται ως εξής:

$$f = g \underset{\text{ορισμ}}{\iff} \begin{cases} D(f) = D(g) \\ \text{και} \\ f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in D(f) = D(g) \end{cases}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν δυο συναρτήσεις είναι ίσες, έχουν ίσα πεδία τιμών, δηλαδή $R(f) = R(g)$. Δυο συναρτήσεις είναι διάφορες και σημειώνω $f \neq g$, αν μια τουλάχιστον από τις παραπάνω συνθήκες δεν ισχύει.

Αν $A \subseteq D(f) \cap D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε οι συναρτήσεις είναι ίσες στο A . Για να δηλώσω ότι οι f, g είναι ίσες, γράφω $f = g$.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A, B . Αν $\forall x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε οι f, g είναι ίσες στο σύνολο Γ .



Εφαρμογή 36

Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$, έχουν πεδία ορισμού $\text{ΠΟ}_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και $\text{ΠΟ}_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. Είναι ίσες στο $\Gamma = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, διότι $\forall x \in \Gamma$ ισχύει ότι $f(x) = g(x) = x + 1$.

Εφαρμογή 37

Εξετάστε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + x}$.

Είναι $\text{ΠΟ}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Είναι $\text{ΠΟ}_g = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 + 1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Δηλαδή, είναι $\text{ΠΟ}_f = \text{ΠΟ}_g$. Επίσης, ισχύει ότι $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} = f(x)$

Άρα, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $f = g$

Εφαρμογή 38

Δείξτε ότι $f \neq g$ για τις συναρτήσεις $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$

Είναι $g(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x = f(x)$

Είναι $\text{ΠΟ}_f = \mathbb{R}$ και $\text{ΠΟ}_g = \mathbb{R} - \{1\}$ άρα, $f \neq g$

Η ισότητα των συναρτήσεων, ισχύει στο κοινό τους πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{1\}$

Εφαρμογή 39

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 2x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x, & x > 0 \\ 2x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$

$\forall x \leq 0$ ισχύει ότι $f = g$. Είναι $\text{ΠΟ}_f = \text{ΠΟ}_g = \mathbb{R}$, αλλά στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f \neq g$

Πράγματι, $f(4) = 4^2 = 16$ και $g(4) = 3 \cdot 4 = 12$

5.9 Άρτια και περιττή συνάρτηση

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν:

- Το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $\forall x \in A$ είναι $-x \in A$ και
- $\forall x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = f(-x)$

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται **περιττή** αν και μόνο αν:

- Το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $\forall x \in A$ είναι $-x \in A$ και
- $\forall x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = -f(-x)$

5.9.1 Παρατηρήσεις

- Η πρώτη προϋπόθεση, είναι κοινή στους δυο ορισμούς.
- Μία συνάρτηση μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy'
- Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης, είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $O(0, 0)$
- Αν μία συνάρτηση είναι άρτια, τότε δεν είναι 1-1

Εφαρμογή 40

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια.

Επειδή η f είναι πολυωνυμική, $\text{ΠΟ}_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$, δηλαδή συμμετρικός ως προς το μηδέν.
Επίσης, $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Άρα, η f είναι άρτια.

Εφαρμογή 41

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $\text{ΠΟ}_f = (2, 8]$ δεν είναι άρτια ούτε περιττή.
Το πεδίο ορισμού της f δεν είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. Πράγματι, $3 \in \text{ΠΟ}_f$ αλλά $-3 \notin \text{ΠΟ}_f$ άρα, η f δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

Εφαρμογή 42

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι άρτια.
Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$
Για κάθε πραγματικό αριθμό, ισχύει ότι $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$
Άρα, η f είναι άρτια.

Εφαρμογή 43

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -|x| + 3\cos x$ είναι άρτια.
Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = -|-x| + 3\cos(-x) = -|x| + 3\cos x = f(x)$
Άρα, η f είναι άρτια.

Εφαρμογή 44

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -4x + \sin x$ είναι περιττή.
Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = -4(-x) + \sin(-x) = 4x - \sin x = -f(x)$
Άρα, η f είναι περιττή.

Εφαρμογή 45

Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4x - 5$
Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = |-x-3| - 4x - 5 = |x+3| - 4x - 5$
Επειδή $f(x) \neq f(-x)$, η f δεν είναι άρτια.
Επειδή $f(x) \neq -f(-x)$, η f δεν είναι περιττή.

Εφαρμογή 46

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι άρτια.
Η f έχει πεδίο ορισμού:
 $\text{ΠΟ} = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (1-x)(1+x) \geq 0\} = [-1, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1]$
 $\forall x \in [-1, 1]$ ισχύει ότι $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$

Άρα, η f είναι άρτια.

Εφαρμογή 47

Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - k$ με $k \in \mathbb{R}$
 Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$

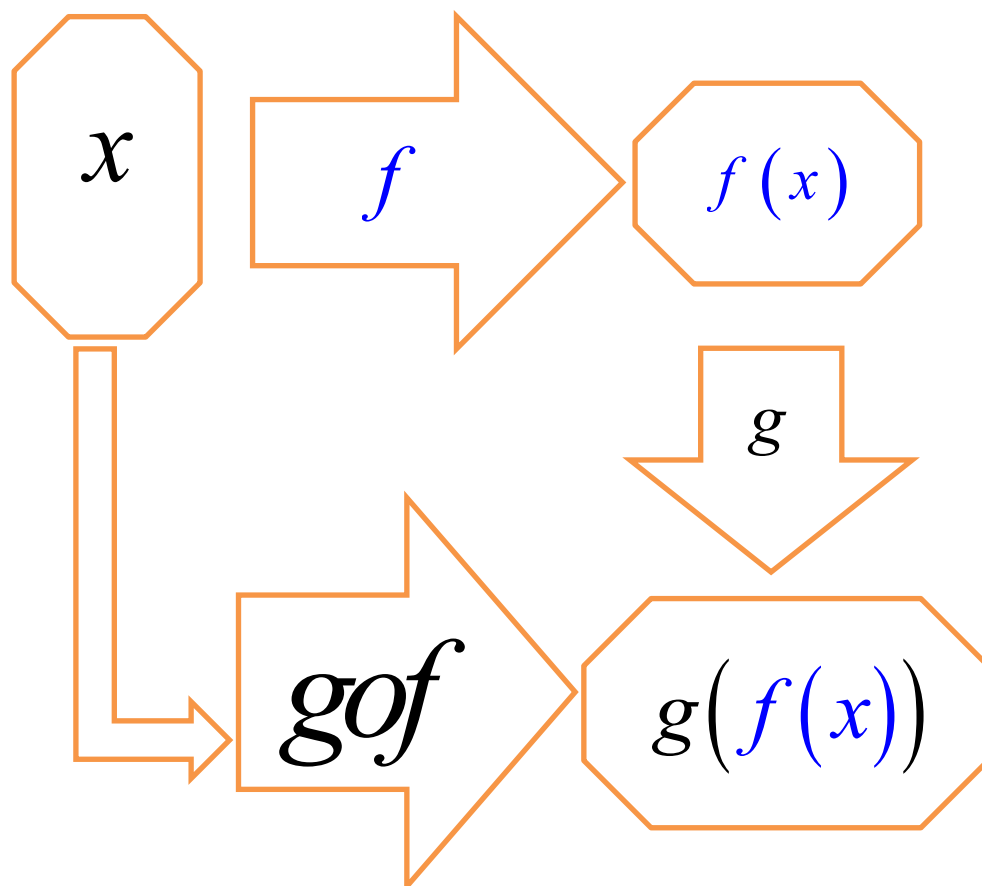
$\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = (-x)^2 - x - k = x^2 - x - k$

Επειδή $f(x) \neq f(-x)$, η f δεν είναι άρτια.

Επειδή $f(x) \neq -f(-x)$, η f δεν είναι περιττή.

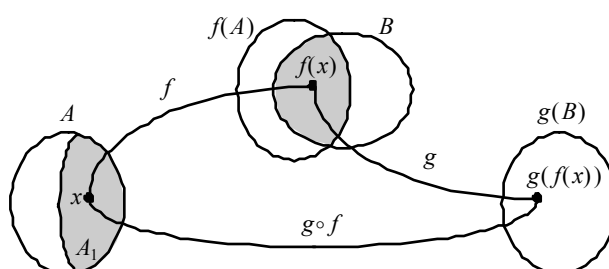
5.10 Σύνθεση συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $R(f) \cap D(g) \neq \{ \}$. Σύνθεση της f με τη g ονομάζεται μία νέα συνάρτηση $\Sigma = g \circ f$ η οποία είναι ορισμένη $\forall x \in D(f)$ για το οποίο ισχύει ότι $f(x) \in D(g)$ και της οποίας η τιμή για κάθε τέτοιο x ισούται με την τιμή της συνάρτησης g στο σημείο $f(x)$. Οι τιμές της $\Sigma(x) = (g \circ f)(x)$ δίνονται από τον τύπο $\Sigma(x) = g(f(x))$, δηλαδή θέτω στη θέση του x της συνάρτησης g , τον τύπο της f

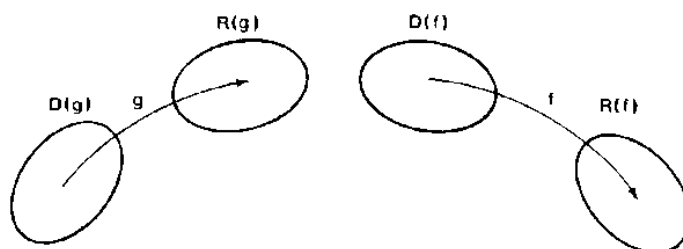


Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ορίζω ως σύνθεση της f με τη g και συμβολίζω ως $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

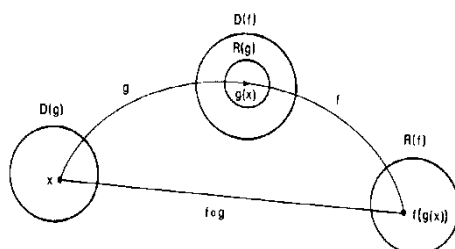
Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ περιέχει όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή, είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A : f(x) \in B\}$



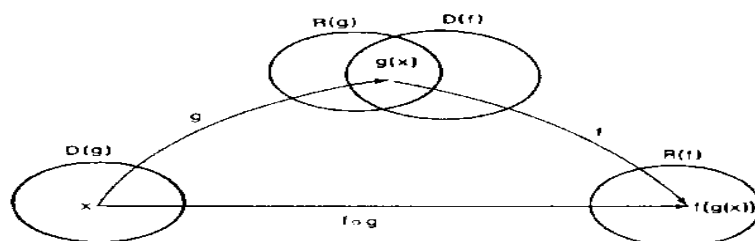
Η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$. Στην περίπτωση του παρακάτω σχήματος, δεν ορίζεται η $g \circ f$



Στην περίπτωση του παρακάτω σχήματος, η $f \circ g$ ορίζεται $\forall x \in D(g)$



Στην περίπτωση του παρακάτω σχήματος, η $f \circ g$ ορίζεται για όσα $x \in D(g)$ η εικόνα τους μέσω της g πάει στο $D(f)$ και επειδή ανήκει και στο $R(f)$, έπεται ότι η εικόνα $g(x)$ ανήκει στην τομή του $R(g)$ με το $D(f)$



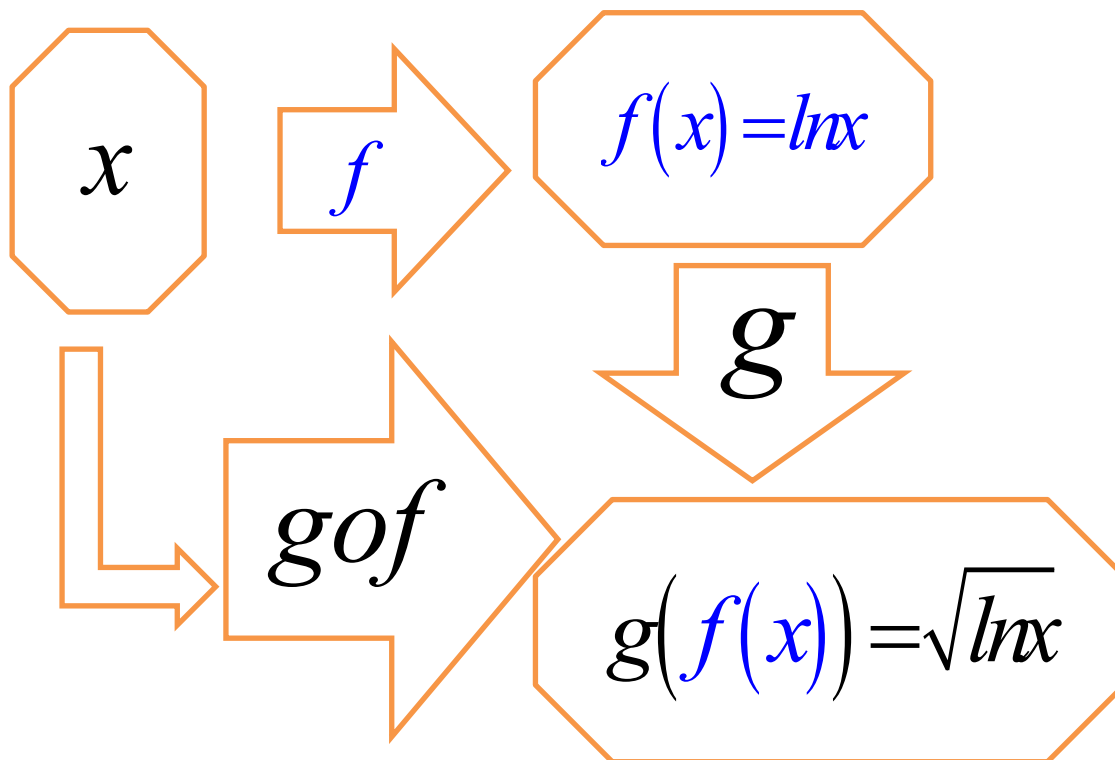
Εφαρμογή 48

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$. Βρείτε τις $g \circ f$, $f \circ g$
 Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$ και η g το $D_g = [0, +\infty)$

i) Για να ορίζεται η $g(f(x))$ πρέπει $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ δηλαδή,

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1, \text{ άρα πρέπει } x \geq 1$$

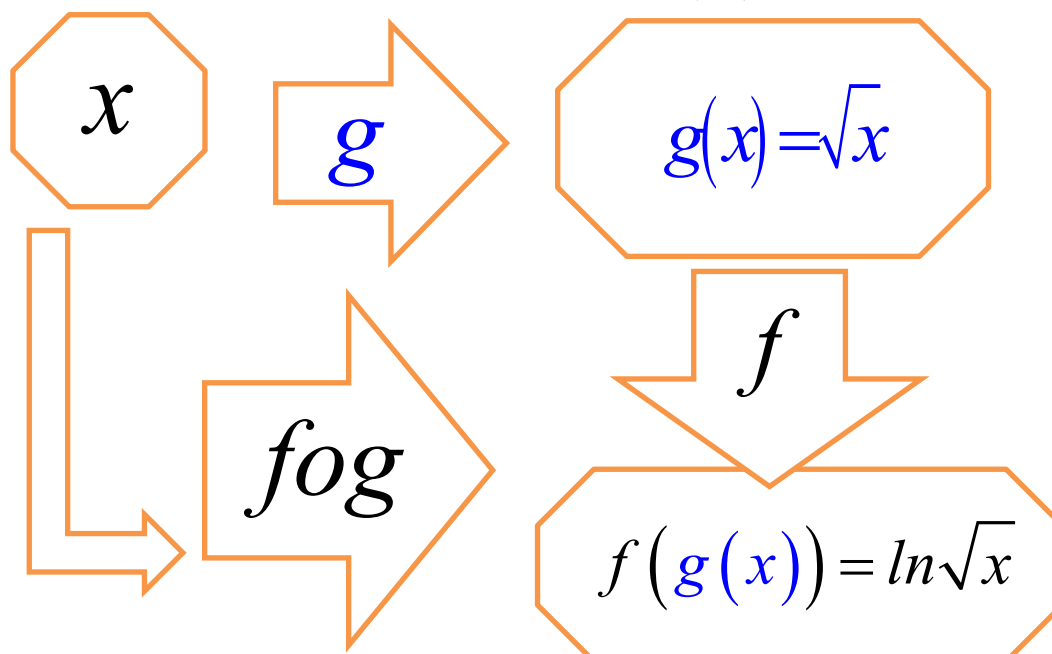
Συνεπώς, ορίζεται η gof και $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \forall x \in [1, +\infty)$



ii) Για να ορίζεται η $f(g(x))$ πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ δηλαδή,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0, \text{ άρα πρέπει } x > 0$$

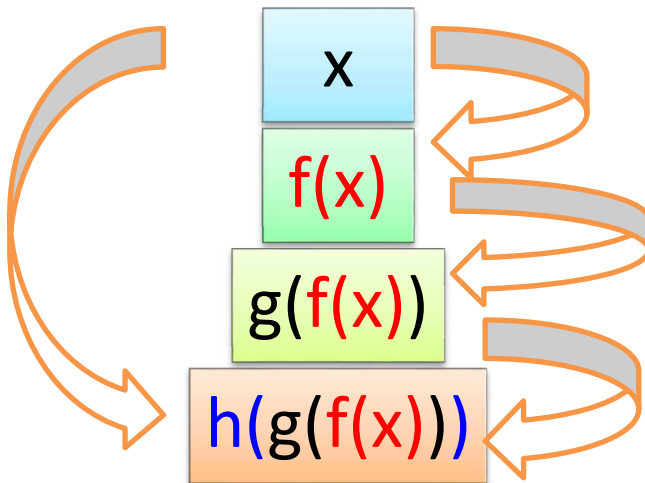
Συνεπώς, ορίζεται η fog και $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}, \forall x \in (0, +\infty)$



5.10.1 Παρατηρήσεις

- Στην παραπάνω εφαρμογή, παρατηρώ ότι $gof \neq fog$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες μεταξύ τους.

- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται η $(hog)of$ και ισχύει ότι $ho(gof) = (hog)of$. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζω ως $hogof$. Η σύνθεση των συναρτήσεων, γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.



- Η σύνθεση δυο αρτίων συναρτήσεων, είναι άρτια συνάρτηση.
- Η σύνθεση δυο περιττών συναρτήσεων, είναι περιττή συνάρτηση.
- Η σύνθεση μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης, είναι άρτια συνάρτηση.
- Αν f, g δυο 1-1 συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού, τότε η fog αντιστρέφεται και ισχύει ότι: $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$
- Στο σύνολο των συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f_1of_2 = f_2of_1$

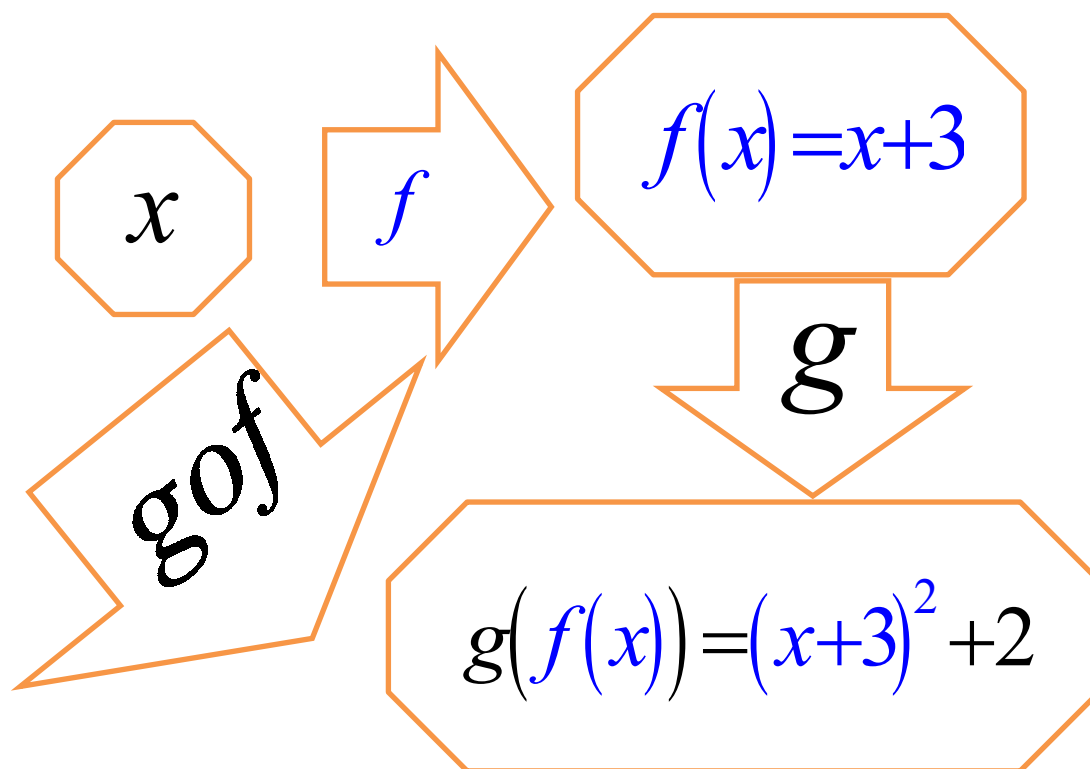
Εφαρμογή 49

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x + 3$ με $D(f) = (-1, 6]$ και $g(x) = x^2 + 2$ με $D(g) = \mathbb{R}$. Βρείτε τις gof, fog, fof, gog

Ορισμός της συνάρτησης gof

$$\begin{aligned} (gof)(x) &= g(f(x)) = \\ &= g(x+3) = \\ &= (x+3)^2 + 2 = x^2 + 6x + 11 \end{aligned}$$

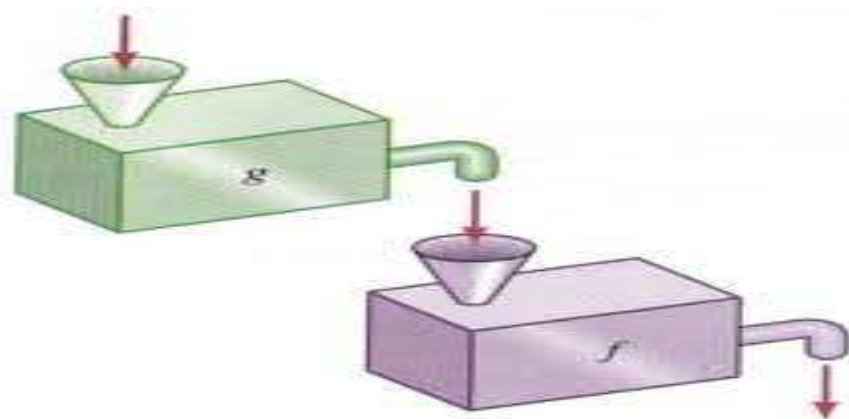
$$\begin{aligned} \text{ΠΟ}_{gof} &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \\ &= \{x \in (-1, 6] : x+3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= (-1, 6] \end{aligned}$$



Ορισμός της συνάρτησης $f \circ g$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(x^2 + 2) = \\ &= x^2 + 2 + 3 = x^2 + 5 \end{aligned}$$

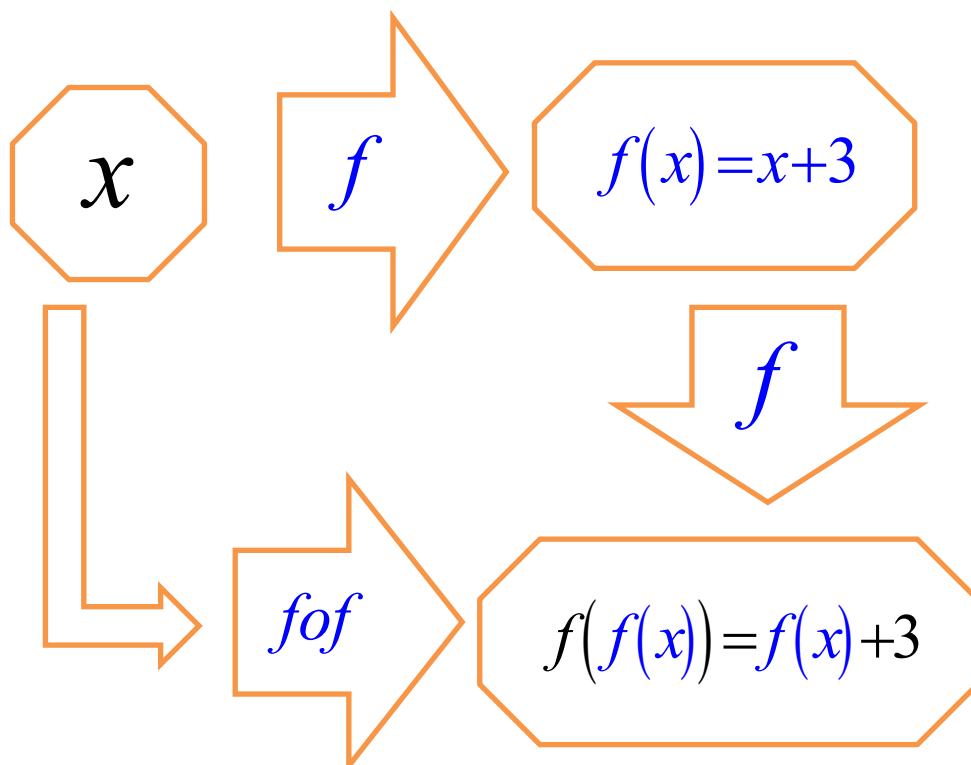
$$\begin{aligned} \text{ΠΟ}_{f \circ g} &= \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 \in (-1, 6]\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 + 2 \leq 6\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 + 2 \leq 6\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 \leq 6\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+2) \leq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2, 2]\} = \\ &= [-2, 2] \end{aligned}$$



Ορισμός της συνάρτησης $f \circ f$

$$\begin{aligned} \text{ΠΟ}_{f \circ f} &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(f)\} = \\ &= \{x \in (-1, 6] : x+3 \in (-1, 6]\} = \\ &= \{x \in (-1, 6] : -1 < x+3 \leq 6\} = \\ &= \{x \in (-1, 6] : -4 < x \leq 3\} = \\ &= (-1, 3] \end{aligned}$$

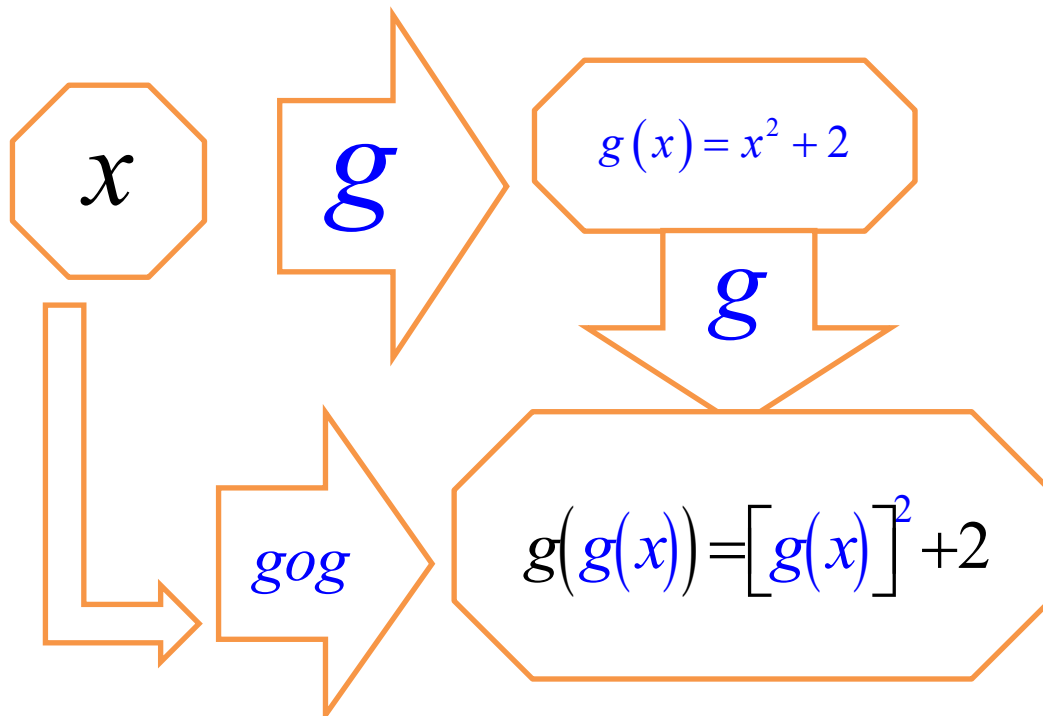
$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = \\ &= f(x+3) = \\ &= x+3+3 = x+6 \end{aligned}$$



Ορισμός της συνάρτησης $g \circ g$

$$\begin{aligned}\text{ΠΟ}_{g \circ g} &= \{x \in D(g) : g(x) \in D(g)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = \\ &= g(x^2 + 2) = \\ &= (x^2 + 2)^2 + 2 = \\ &= x^4 + 4 + 4x^2 + 2 = x^4 + 6 + 4x^2\end{aligned}$$

**Εφαρμογή 50**

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Βρείτε τις $f \circ g$, $g \circ f$

Ορισμός της συνάρτησης $f \circ g$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(x^2 - 3x + 2) = \\ &= \sqrt{x^2 - 3x + 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ΠΟ}_{f \circ g} &= \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-2) \geq 0\} = \\ &= (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)\end{aligned}$$

Ορισμός της συνάρτησης gof

$$\begin{aligned}
 (gof)(x) &= g(f(x)) = \\
 &= g(\sqrt{x}) = \\
 &= \sqrt{x}^2 - 3\sqrt{x} + 2 = \\
 &= |x| - 3\sqrt{x} + 2 = \\
 &= x - 3\sqrt{x} + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ΠΟ}_{gof} &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \\
 &= \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \\
 &= [0, +\infty)
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 51

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Βρείτε τις fog , gof , fof

Ορισμός της συνάρτησης fog

$$\begin{aligned}
 (fog)(x) &= f(g(x)) = \\
 &= f(\sqrt{x}) = \\
 &= \sqrt{1-\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ΠΟ}_{fog} &= \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \\
 &= \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in (-\infty, 1]\} = \\
 &= \{x \geq 0 : \sqrt{x} \leq 1\} = \\
 &= \{x \geq 0 : x^2 \leq 1\} = \\
 &= \{x \geq 0 : x^2 - 1 \leq 0\} = \\
 &= \{x \geq 0 : (x-1)(x+1) \leq 0\} = \\
 &= \{x \geq 0 : -1 \leq x \leq 1\} = \\
 &= [0, 1]
 \end{aligned}$$

Ορισμός της συνάρτησης gof

$$\begin{aligned}
 (gof)(x) &= g(f(x)) = \\
 &= g(\sqrt{1-x}) = \\
 &= \sqrt{\sqrt{1-x}} = \\
 &= \sqrt[4]{1-x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ΠΟ}_{g \circ f} &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \\ &= \{x \in (-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \geq 0\} = \\ &= \{x \leq 1 \text{ και } 1-x \geq 0\} = \\ &= (-\infty, 1]\end{aligned}$$

Ορισμός της συνάρτησης $f \circ f$

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = \\ &= f(\sqrt{1-x}) = \\ &= \sqrt{1-\sqrt{1-x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ΠΟ}_{f \circ f} &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(f)\} = \\ &= \{x \leq 1 \text{ και } \sqrt{1-x} \leq 1\} = \\ &= \{x \leq 1 \text{ και } 1-x \leq 1\} = \\ &= \{x \leq 1 \text{ και } x \geq 0\} = \\ &= [0, 1]\end{aligned}$$

Εφαρμογή 52

Έστω συνάρτηση $h(x) = (x^2 + 1)^3$. Βρείτε δυο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε $h = f \circ g$

Έστω $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 + 1$ με $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμικές.

$$\begin{aligned}\text{Είναι } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(x^2 + 1) = \\ &= (x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Επίσης, είναι } \text{ΠΟ}_{f \circ g} &= \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

Εφαρμογή 53

Έστω συνάρτηση $h(x) = (\sin x)^2$. Βρείτε δυο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε $h = f \circ g$

Έστω συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sin x$ με $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{Είναι } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(\sin x) = \\ &= (\sin x)^2 = \\ &= \sin^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Επίσης, είναι } \text{ΠΟ}_{f \circ g} &= \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{R}\} = \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

Εφαρμογή 54

Να ορισθούν οι $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ αν $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{5}{x+4}$

Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ και $D(g) = \mathbb{R} - \{-4\}$

Ορισμός της συνάρτησης $f \circ g$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &f\left(\frac{5}{x+4}\right) = \\ &\frac{\frac{5}{x+4} + 1}{\frac{5}{x+4} + 2} = \frac{x+9}{2x+13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \text{ΠΟ}_{f \circ g} &= \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \\ &\left\{x \in \mathbb{R} - \{-4\} : \frac{5}{x+4} \in \mathbb{R} - \{-2\}\right\} = \\ &\left\{x \neq -4 \text{ και } \frac{5}{x+4} \neq -2\right\} = \\ &\{x \neq -4 \text{ και } x \neq -6, 5\} = \\ &\mathbb{R} - \{-4, -6, 5\}\end{aligned}$$

Ορισμός της συνάρτησης $g \circ f$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \\ &g\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \\ &\frac{5}{\frac{x+1}{x+2} + 4} = \frac{5x+10}{5x+9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ΠΟ}_{g \circ f} &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \\ &\left\{x \in \mathbb{R} - \{-2\} : \frac{x+1}{x+2} \in \mathbb{R} - \{-4\}\right\} = \\ &\left\{x \neq -2 \text{ και } \frac{x+1}{x+2} \neq -4\right\} = \\ &\left\{x \neq -2 \text{ και } x \neq -\frac{9}{5}\right\} = \\ &\mathbb{R} - \{-2, -1, 8\}\end{aligned}$$

Ορισμός της συνάρτησης $f \circ f$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) =$$

$$f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) =$$

$$\frac{\frac{x+1}{x+2} + 1}{\frac{x+1}{x+2} + 2} = \frac{2x+3}{3x+5}$$

$$\text{ΠΟ}_{f \circ f} = \{x \in D(f) : f(x) \in D(f)\} =$$

$$\left\{x \in \mathbb{R} - \{-2\} : \frac{x+1}{x+2} \in \mathbb{R} - \{-2\}\right\} =$$

$$\left\{x \neq -2 \text{ και } \frac{x+1}{x+2} \neq -2\right\} =$$

$$\left\{x \neq -2 \text{ και } x \neq -\frac{5}{3}\right\} =$$

$$\mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{5}{3}\right\}$$

Ορισμός της συνάρτησης $g \circ g$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) =$$

$$g\left(\frac{5}{x+4}\right) =$$

$$\frac{\frac{5}{x+4} + 4}{\frac{5}{x+4} + 4} = \frac{5x+20}{4x+21}$$

$$\text{ΠΟ}_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} - \{-4\} : g(x) \in \mathbb{R} - \{-4\}\} =$$

$$\left\{x \neq -4 \text{ και } \frac{5}{x+4} \neq -4\right\} =$$

$$\left\{x \neq -4 \text{ και } \frac{5}{x+4} \neq -4\right\} =$$

$$\left\{x \neq -4 \text{ και } x \neq \frac{-21}{4}\right\} =$$

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{-21}{4}, -4\right\}$$

5.11 Άλλες ασκήσεις

Άσκηση 1

Να ορισθούν οι $f \circ g$, $g \circ f$ αν $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = \sqrt{x}$

Άσκηση 2

Να ορισθεί η gof αν $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1-2x^2}$

Άσκηση 3

Να ορισθούν οι fog , gof αν $f(x) = |x-1|$, $g(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 1 \\ 1-x^2, & x > 1 \end{cases}$

Άσκηση 4

Να ορισθούν οι fog , gof αν $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{4x^2-3}$

Άσκηση 5

Να ορισθεί η gof αν $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Άσκηση 6

Εύρεση των fog , gof αν $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 2 \\ 3-x, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 2, & x = 0 \\ 3-x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

Άσκηση 7

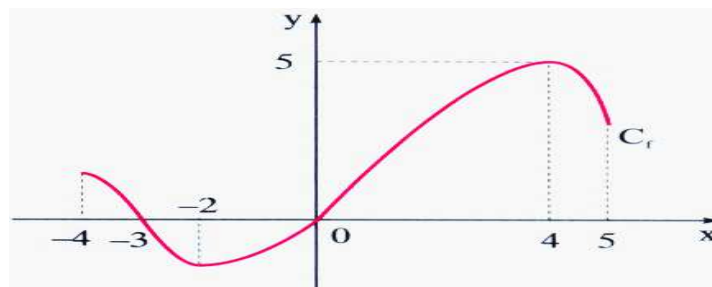
Να ορισθεί η gof αν $f(x) = \frac{1}{x+1}$ και $g(x) = \frac{2}{x}$

Άσκηση 8

Να ορισθεί η fog αν $f(x) = \begin{cases} 2x, & |x| \leq 1 \\ -2x, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 2 \\ x, & |x| > 2 \end{cases}$

Άσκηση 9

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τις λύσεις των $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ και $2^{f(x)} = 32$

**Άσκηση 10**

Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x) = \frac{7x+5}{x-3}$

Άσκηση 11

Υπολογίστε τους λογαρίθμους:

$$\begin{array}{lllll}
 (\alpha) \log_2 16 & (\beta) \log_7 7 & (\gamma) \log 10 & (\delta) \log 10.000 & (\epsilon) \log(\ln e^{100}) \\
 (\sigma\tau) \ln e & (\zeta) \ln \frac{1}{e^2} & (\eta) \log_2 4^{15} & (\theta) \log_4 \frac{1}{32} & (\iota) \log 1 \\
 (\kappa) \log_{13} 1 & (\kappa\alpha) \ln 1 & (\kappa\beta) e^{\ln 5} & (\kappa\gamma) 10^{\log 3} & (\kappa\delta) 5^{\log_5 3} \\
 (\kappa\epsilon) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} & (\kappa\sigma\tau) \log_{\sqrt{8}} 32 & & &
 \end{array}$$

Άσκηση 12Βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$(\alpha) \log x = 3 \quad (\beta) \log_x 9 = 2 \quad (\gamma) \log_x (5x - 4) = 2 \quad (\delta) \log_{27} x = \frac{-2}{3}$$

Άσκηση 13

Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) \log 20 + \log 50 & (\beta) \ln(e^4 - e^3) - \ln(e - 1) & (\gamma) 2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 16 \\
 (\delta) \frac{2 - \log 4}{\log 5} & (\epsilon) \frac{\ln 25 - \log 9}{\ln \sqrt{5} - \log \sqrt{3}} & (\sigma\tau) \frac{\frac{1}{2} + \log_4 18}{\log_4 384 - 3} \\
 (\zeta) e^{\frac{1}{2} \ln 9 - \frac{2}{3} \ln 8 + \ln 12} & (\eta) \frac{1 + 4 \cdot \log 2 - 3 \cdot \log 4 + \frac{1}{3} \cdot \log 8}{\log 75 - 2 \cdot \log \sqrt{3}} &
 \end{array}$$

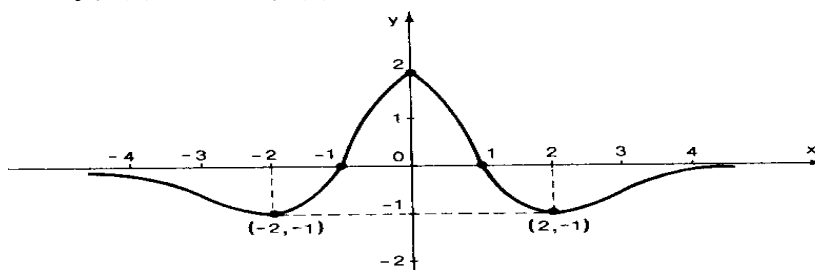
Άσκηση 14

Λύστε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) \log_2 (x - 12) = 3 & (\beta) \ln(x^2 - 4x + 4) = 0 & (\gamma) \log x^2 = -2 \\
 (\delta) \ln(3x - 1) = \ln(9 - x^2) & (\epsilon) \log(x - 6) + \log(x + 1) = 3 \cdot \log 2 & \\
 (\sigma\tau) \log(64 - x^2) = 1 + \log(x + 4) & &
 \end{array}$$

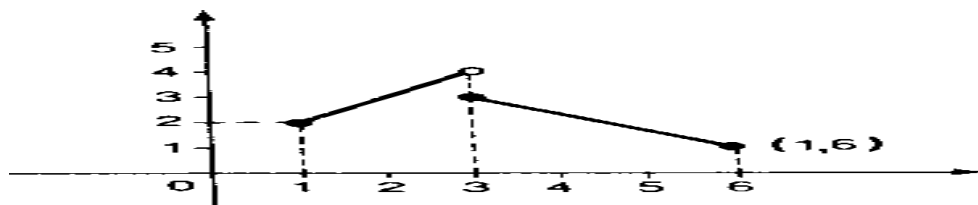
Άσκηση 15Η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος έχει $D(f) = \mathbb{R}$

- (α) Για ποιες τιμές του x παρουσιάζει ακρότατα και ποια είναι αυτά;
 (β) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της;
 (γ) Λύστε την $f(x) = 0$
 (δ) Λύστε τις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$



Άσκηση 16

Για ποιες τιμές του x παρουσιάζει ακρότατο η παρακάτω συνάρτηση;

**Άσκηση 17**

Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες μεταξύ τους.

(α) $f(x) = x - 3$, $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

(β) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}$, $g(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$

(γ) $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

(δ) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$

(ε) $f(x) = x + 2$, $g(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$

(στ) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

(ζ) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{|x|}$, $g(x) = \sqrt{|1 - x|} + \sqrt{x}$

Άσκηση 18

Εύρεση του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \sqrt{x + 5} - \sqrt[3]{1 - x}$

(β) $f(x) = \ln(1 - |x|)$

(γ) $f(x) = \ln(2 \cos x - 1)$

(δ) $f(x) = \sqrt{-2 - \ln x + \ln^2 x}$

(ε) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

(στ) $f(x) = (2 - |x|)^{\sqrt{x}}$

(στ) $f(x) = \sqrt{\log \frac{7x - x^2}{6}}$

(ζ) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 2} - \sqrt{e^x - 1}$

(η) $f(x) = \frac{1}{\ln(1 - x)}$

(θ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

(ι) $f(x) = \ln(|x| - x)$

(κ) $f(x) = \ln(4 - x^2)$

(λ) $f(x) = \ln|\ln x|$

(μ) $f(x) = \frac{1 + x}{1 - |x|}$

(ν) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{4}}$

(ξ) $f(x) = \ln(\sqrt{x - 2} - \sqrt{6 - x})$

Άσκηση 19

Βρείτε τις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ αν $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Άσκηση 20

Εύρεση της $f + g$ αν $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in (-2, 0] \\ 3, & x \in (0, 2] \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in (-1, 0] \\ 2x + 1, & x \in (0, 2] \end{cases}$

Άσκηση 21

Εύρεση της $f \cdot g$ αν $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{2 - x}$

Άσκηση 22

Από τη γραφική παράσταση της f , βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών της, τα $f(-2)$, $f(0)$, $f(f(-1))$ και λύστε τις $f(x) = 0$, $f(x) = -2$, $f(x) < 3$

