Κεφάλαιο 2, παράγραφος 2.5, παράδειγμα 2, σελίδα 89.

		Εξαρτήματα			
Παραγγελίες	Συσκευασίες	Α	Β	Γ	Δ
x_1	M_1	20	40	120	20
x_2	M_2	40	60	40	60
x_3	M_3	60	60	40	40
Ανάγκες μας		400	500	520	380

$$\left\{\begin{aligned} 20x_1+40x_2+60x_3&=400\\ 40x_1+60x_2+60x_3&=500\\ 120x_1+40x_2+40x_3&=520\\ 20x_1+60x_2+40x_3&=380 \end{aligned}\right\}$$

Επίλυση γραμμικού συστήματος με τον αντίστροφο πίνακα.

Αν ο $A_{\nu x \nu}$ είναι αντιστρέψιμος, το γραμμικό σύστημα που γράφεται με τη μορφή $A\cdot X=B$ έχει μοναδική λύση $X=A^{-1}\cdot B$, όπου A είναι ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας των αγνώστων, B ο πίνακας των σταθερών όρων.

Π.χ. 1. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{aligned} x-\ \ y&=2\\ -5x+6y&=-8 \end{aligned}\right\}$.

Είναι $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -5 & 6\end{bmatrix}$, $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & 6\end{vmatrix}=6-5=1\neq 0$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ -8\end{bmatrix}$.

Το σύστημα ισοδυνάμως γράφεται $A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}$.

Π.χ. 2. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{aligned} 2x+\ \ y-\ \ z&=1\\ x-3y+\ \ z&=-2\\ 2x+3y-2z&=2 \end{aligned}\right\}$.

Είναι $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$, $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=1\neq 0$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -3\\ 9 & -4 & -7\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$. Το σύστημα ισοδυνάμως γράφεται $A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$.

Π.χ. 3. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 1 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{array}\right\}$.

Είναι $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Το σύστημα γράφεται $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{11}{27} & \frac{-3}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{-6}{27} & \frac{9}{27} & \frac{-3}{27} \\ \frac{2}{27} & \frac{-3}{27} & \frac{10}{27} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Επίλυση γραμμικού συστήματος με ορίζουσες.

Δίνεται το $\nu x \nu$ γραμμικό σύστημα που γράφεται με τη μορφή $A \cdot X = B$.

Αν $|A| \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, κ.ο.κ.

Αν $|A| = 0$ το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

Π.χ. 1. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$.

Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 26$, $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 13$.

Άρα είναι $x = \frac{D_x}{D} = \frac{26}{13} = 2$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{13}{13} = 1$.

Π.χ. 2. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \end{array}\right\}$.

Είναι $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6$,

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -6$, $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 12$.

Άρα $x=\frac{D_x}{D}=\frac{6}{6}=1$, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{-6}{6}=-1$, $z=\frac{D_z}{D}=\frac{12}{6}=2$.

Π.χ. 3. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{matrix}3x+6y=7\\2x+4y=3\end{matrix}\right\}$.

Είναι $D=\begin{vmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{vmatrix}=12-12=0$, $D_x=\begin{vmatrix}7 & 6\\3 & 4\end{vmatrix}=28-18=10\neq 0 \Rightarrow$ Αδύνατο

Ομοίως και αν $D_y=\begin{vmatrix}3 & 7\\2 & 3\end{vmatrix}=9-14=-5\neq 0 \Rightarrow$ Αδύνατο.

Π.χ. 4. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{matrix}x+3y=2\\2x+6y=4\end{matrix}\right\}$.

Είναι $D=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{vmatrix}=6-6=0$, $D_x=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$, $D_y=\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0$.

Από $D=D_x=D_x=0$ έπεται ότι το σύστημα είναι αόριστο. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωση του, προκύπτει αν πολλαπλασιάσομε την πρώτη επί δύο.

Άρα, $\left\{\begin{matrix}x+3y=2\\2x+6y=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x+3y=2\Leftrightarrow x=2-3y$.
Συνεπώς, $(x,y)=(2-3y,\ y)$ όπου $y\in\mathbb{R}$.

Π.χ. 5. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{matrix}x+2y+3z=1\\x-y-z=0\\4x+5y+6z=0\end{matrix}\right\}$.

Είναι $D=6\neq 0$, $D_x=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -1\\0 & 5 & 6\end{vmatrix}=-1$, $D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 0 & -1\\4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-10$, $D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & -1 & 0\\4 & 5 & 0\end{vmatrix}=9$

Άρα $(x,y,z)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D},\frac{D_z}{D}\right)=\left(\frac{-1}{6},\frac{-10}{6},\frac{9}{6}\right)$.

Π.χ. 6. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{matrix}5x-2y+3z-\omega=6\\x+2y-3z=9\\-3x+y-2\omega=-1\\4x+3y-z+5\omega=-7\end{matrix}\right\}$.
Είναι $D=206\neq 0$, $D_x=412$, $D_y=-206$, $D_z=D_\omega=-618$.

Άρα $\left(x,y,z,\omega\right)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D},\dfrac{D_z}{D},\dfrac{D_\omega}{D}\right)=\left(2,-1,-3,-3\right)$.

Π.χ. 7. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{matrix}(\lambda+2)x+7(\lambda-3)y=35\\ x+\ \ (\lambda-3)y=\lambda\end{matrix}\right\}$.

Είναι $D=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 7(\lambda-3)\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda+2 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+2-7)=(\lambda-3)(\lambda-5)$

$$D_x=\begin{vmatrix}35 & 7(\lambda-3)\\ \lambda & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}35 & 7\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(35-7\lambda)=-7(\lambda-3)(\lambda-5)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 35\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda-35=(\lambda-5)(\lambda+7)$$

- Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3$ και $\lambda\neq 5$ είναι $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(-7,\dfrac{\lambda+7}{\lambda-3}\right)$

- Αν $\lambda=3$ το σύστημα γίνεται $\left\{\begin{matrix}5x+0y=35\\ x+0y=3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}5x=35\\ x=3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=\dfrac{35}{3}\\ x=3\end{matrix}\right\}$ Αδύνατο

- Αν $\lambda=5$ το σύστημα γίνεται $\left\{\begin{matrix}7x+14y=35\\ x+\ 2y=5\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x+2y=5\Leftrightarrow$ Αόριστο

Έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,\ y)=(5-2y,\ y)$ όπου $y\in\mathbb{R}$.

Π.χ. 8. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{matrix}3x+5y=12\\ x-3y=4\end{matrix}\right\}$.

Είναι $D=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14\neq 0$, $D_x=\begin{vmatrix}12 & 5\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-56$, $D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 1 & 4\end{vmatrix}=0$.

Άρα $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(\dfrac{-56}{-14},\dfrac{0}{-14}\right)=(4,0)$.

Π.χ. 9. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{matrix}\lambda x+\mu y=1\\ \mu x+\lambda y=\lambda+\mu\end{matrix}\right\}$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Είναι $D=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)$.

Όταν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm\mu$, τότε $(x,y) = \left(\dfrac{D_X}{D}, \dfrac{D_Y}{D}\right) = \left(\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \lambda+\mu & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)}, \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \mu & \lambda+\mu \end{vmatrix}}{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)}\right)$.

- Όταν $\lambda = \mu$, το σύστημα γράφεται: $\left\{\begin{array}{l} \lambda x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + \lambda \end{array}\right\} \ldots.$

- Όταν $\lambda = -\mu$, το σύστημα γράφεται: $\left\{\begin{array}{l} \lambda x - \lambda y = 1 \\ -\lambda x - \lambda y = 0 \end{array}\right\} \ldots.$

Επίλυση ομογενούς γραμμικού συστήματος $\nu x \nu$.

Το γραμμικό $2x2$ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{array}\right\}$ ποτέ δεν είναι αδύνατο, καθόσον έχει ως προφανή λύση τη μηδενική. Το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = 0$

Αν $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ τότε το σύστημα έχει ως μόνη λύση την προφανή.

Π.χ. 1. Λύστε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 2(x + 2y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y.$$

Είναι $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$. Άρα, έχει και άλλες λύσεις εκτός της προφανούς οι οποίες είναι της μορφής $(x, y) = (-2y, y) = (-2, 1)y$ όπου $y \in \mathbb{R}$, οπότε μία λύση είναι η $(x,y) = (10,-5)$.

Π.χ. 2. Λύστε το σύστημα $\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \end{array}\right\}$.

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$, άρα το σύστημα δεν έχει άλλη λύση πλην της μηδενικής.

Π.χ. 3. Λύστε το ομογενές σύστημα $\left\{\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right\}$.

Είναι $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$, άρα υπάρχει και μη μηδενική λύση.

Υπολογισμός της μη μηδενικής λύσεως.

$$\begin{array}{c}(-2)\\ \downarrow\\ \rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ (1)\\ \hookleftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\end{array}\right]:(3)$$

$$\sim\begin{array}{c}\mapsto\\ (-1)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1/3 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2/3 & 0\\ 0 & 1 & -1/3 & 0\end{array}\right]\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-\frac{2}{3}z=0\\ y-\frac{1}{3}z=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}z\\ y=\frac{1}{3}z\end{array}\right.$$

Άρα $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{2}{3}z,\ \frac{1}{3}z,\ z\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)z$, όπου $z\in\mathbb{R}$.

Μέθοδος επαυξημένου πίνακα ή μέθοδος Gauss.

Π.χ. 1. Λύστε τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}x+\ \ y=4\\ 2x+3y=11\end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 11\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right]\begin{array}{c}\leftarrow\\ (-1)\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right]\text{ άρα }\left[\begin{array}{c}x=1\\ y=3\end{array}\right]$$

Π.χ. 2. Λύστε τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}x+2y=3\\ x+2y=4\end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{array}\right]\begin{array}{c}(-1)\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\text{ άρα } 0x+0y=1\Leftrightarrow 0=1\text{ Αδύνατο}$$

Π.χ. 3. Λύστε τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}x+2\ \ y=3\\ 10x+20y=30\end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 10 & 20 & 30\end{array}\right]\begin{array}{c}(-10)\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\end{array}\right]\Leftrightarrow x+2y=3\Leftrightarrow x=3-2y$$

Αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(3-2y,\ y)$ $y\in\mathbb{R}$.

Π.χ. 4. Λύστε με τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}x+\ \ y=1\\ 2x+3y=-5\end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&3&-5\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&-7\end{array}\right]\begin{array}{c}\leftarrow\\(-1)\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&0&8\\0&1&-7\end{array}\right] \text{ άρα } \begin{bmatrix}x=8\\y=-7\end{bmatrix}$$

Π.χ. 5. Λύστε τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}x+2y-\ \ 3\omega=2\lambda\\2x+6y-11\omega=3\lambda-1\\x-2y+\ \ 7\omega=3\lambda\end{array}\right\}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&2\lambda\\2&6&-11&3\lambda-1\\1&-2&7&3\lambda\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)(-1)\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&2\lambda\\0&2&-5&-\lambda-1\\0&-4&10&\lambda\end{array}\right]\begin{array}{c}\leftarrow\\(-1)\\ \ \end{array}\sim$$

$$\begin{array}{c}\ \\(-2)\\ \rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\lambda+1\\0&-2&5&\lambda+1\\0&-4&10&\lambda\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\lambda+1\\0&-2&5&\lambda+1\\0&0&0&-\lambda-2\end{array}\right]$$

- Όταν $-\lambda-2\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq -2$, το σύστημα είναι αδύνατο.
- Όταν $\lambda=-2$, τότε $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-5\\0&-2&5&-1\end{array}\right]\sim\left\{\begin{array}{l}x+2\omega=-5\\-2y+5\omega=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-5-2\omega\\y=\dfrac{1+5\omega}{2}\end{array}\right.$ Αόριστο.

Έχει άπειρες λύσεις, της μορφής $(x,\ y,\ \omega)=\left(-5-2\omega,\ \dfrac{1+5\omega}{2},\ \omega\right)$, όπου $\omega\in\mathbb{R}$.

Π.χ. 6. Λύστε με τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}x+\ \ y\ \ \ \ \ \ =3\\2x+5y-z=0\\-7x+9y-z=-1\end{array}\right\}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\2&5&-1&0\\-7&9&-1&-1\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)(7)\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&3&-1&-6\\0&16&-1&20\end{array}\right]\begin{array}{c}\ \\ \leftarrow\\(-1)\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&-13&0&-26\\0&16&-1&20\end{array}\right]:(-13)$$

$$\sim\begin{array}{c}\ \\(-16)\\ \rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&1&0&2\\0&16&-1&20\end{array}\right]\begin{array}{c}\leftarrow\\(-1)\\ \ \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&-1&-12\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&12\end{array}\right]$$

Άρα, $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 12)$.

Π.χ. 7. Λύστε με τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}x+2y+\lambda\omega=1\\2x+\lambda y+8\omega=3\end{array}\right\}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Είναι $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & \lambda & 1\\ 2 & \lambda & 8 & 3\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)\\ \leftarrow\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-4 & 8-2\lambda & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & \lambda & 1\\ 0 & (\lambda-4) & -2(\lambda-4) & 1\end{array}\right]$

➢ Όταν $\lambda-4\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 4$, το σύστημα γράφεται $\left\{\begin{array}{r}x+\quad 2y+\quad \lambda\omega=1\\ (\lambda-4)y-2(\lambda-4)\omega=1\end{array}\right\}$ και είναι αόριστο.

➢ Όταν $\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=4$, το σύστημα είναι αδύνατο διότι η 2^{η} γραμμή γράφεται $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$.

Π.χ. 8. Λύστε με τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{r}x+4y+7z=6\\ 2x+5y+9z=9\\ 3x+6y+8z=12\end{array}\right\}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 6\\ 2 & 5 & 9 & 9\\ 3 & 6 & 8 & 12\end{array}\right]\begin{array}{c}(-2)(-3)\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 6\\ 0 & -3 & -5 & -3\\ 0 & -6 & -13 & -6\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ :(-1)\\ :(-1)\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 6\\ 0 & 3 & 5 & 3\\ 0 & 6 & 13 & 6\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ :3\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 6\\ 0 & 1 & 5/3 & 1\\ 0 & 6 & 13 & 6\end{array}\right]\begin{array}{c}\leftarrow\\ (-6)(-4)\\ \leftarrow\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1/3 & 2\\ 0 & 1 & 5/3 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ :(3)\end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1/3 & 2\\ 0 & 1 & 5/3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{array}{cc}\leftarrow & \leftarrow\\ \leftarrow & \uparrow\\ (-5/3) & (-1/3)\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \text{ άρα } \left[\begin{array}{c}x=2\\ y=1\\ z=0\end{array}\right]$$

Π.χ. 9. Λύστε με τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{r}x+2y+3z=2\\ 2x+3y+4z=3\\ 5x+6y+7z=6\end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 3\\ 5 & 6 & 7 & 6\end{array}\right]\begin{array}{cc}(-2) & (-5)\\ \leftarrow & \downarrow\\ \leftarrow & \leftarrow\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & -4 & -8 & -4\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ :(-1)\\ :(-4)\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}\leftarrow\\ (-2)\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x-z=0\\ y+2z=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=z\\ y=1-2z\end{array}\right.$$

Αόριστο το σύστημα, έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=(z,\ 1-2z,\ z)$ $z\in\mathbb{R}$.

Π.χ. 10. Λύστε με τη μέθοδο Gauss το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x+\quad y+z=2 \\ 2x+4y+5z=13 \\ 3x+6y+7z=18 \end{array}\right\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & 18 \end{array}\right]\begin{array}{cc} (-2) & (-3) \\ \leftarrow & \downarrow \\ \leftarrow & \leftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right]:(2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1,5 & 4,5 \\ 0 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right]\begin{array}{cc} \leftarrow & \\ (-1) & (-3) \\ & \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\ 0 & 1 & 1,5 & 4,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & -1,5 \end{array}\right]:(-0,5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\ 0 & 1 & 1,5 & 4,5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{cc} \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & \uparrow \\ (-1,5) & (0,5) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Άρα $(x,y,z)=(-1,\ 0,\ 3)$.

Άλυτες ασκήσεις.

1. Λύστε τα συστήματα

(α) $\left\{\begin{array}{l} x+4y-\ 3z=5 \\ 2x+8y-\ 6z=9 \\ 3x+12y-9z=10 \end{array}\right\}$, **(β)** $\left\{\begin{array}{l} 5x+\ y-3z=0 \\ 4x-y+7z=0 \\ 3y+\ z=x \end{array}\right\}$, **(γ)** $\left\{\begin{array}{l} (\lambda-1)x-\ y=0 \\ \quad 2\lambda x+3y=7z \\ (\lambda+2)x+2y-6z=0 \end{array}\right\}$,

(δ) $\left\{\begin{array}{l} \lambda x+\ y+\ z=1 \\ x+\lambda y+\ z=\lambda \\ x+\ y+\lambda z=\lambda^2 \end{array}\right\}$, **(ε)** $\left\{\begin{array}{l} (\lambda+5)x+(2\lambda+3)y=3\lambda+2 \\ (\lambda+10)x+(\lambda+6)\ y=\ \lambda+4 \end{array}\right\}$,

(στ) $\left\{\begin{array}{l} x+\ \lambda y=1 \\ \lambda x-3\lambda y=2\lambda+3 \end{array}\right\}$, **(ζ)** $\left\{\begin{array}{l} (2\mu-3)x-\qquad \mu y=3\mu-2 \\ \qquad 5x+(2\mu+3)y=-5 \end{array}\right\}$,

(η) $\left\{\begin{array}{l} (\mu-2)x+\qquad 3\mu y=-3 \\ \quad 3\mu x+(\mu-2)y=\mu-2 \end{array}\right\}$, **(θ)** $\left\{\begin{array}{l} 3x-5y+\ z=0 \\ 4x-2y+2z=0 \\ 3x-5y+6z=1 \\ 6x+\ y+3z=1 \end{array}\right\}$.

2. Βρείτε τους $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, αν $(x,\ y,\ z)=\left(-1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$ είναι λύση του συστήματος $\left\{\begin{array}{l} \lambda x-\qquad \mu y+\ z=1+2\mu \\ 2\mu x-(\lambda-2\mu)y-\lambda z=-5+\lambda \end{array}\right\}$.

3. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε τον πίνακα Χ ώστε: $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{B}$.

4. Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\mathrm{A}^2-(\alpha+\delta)\cdot\mathrm{A}+|\mathrm{A}|\cdot\mathrm{I}=O$.

5. Λύστε τα συστήματα: **(α)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+z-\omega=1 \\ 2x-y+3z=9 \\ -x+3y-z+2\omega=-4 \\ 5x-y+4z-3\omega=11 \end{array}\right\}$, **(β)** $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ 3y+5z=7 \\ 2x+5z=11 \end{array}\right\}$

(γ) $\left\{\begin{array}{l} x-2y+3z+2\omega=0 \\ 2x+y-z+4\omega=0 \\ 3x-y+2z+6\omega=0 \\ -x-3y+4z-2\omega=0 \end{array}\right\}$, **(δ)** $\left\{\begin{array}{l} 10x-13y+15z=18 \\ 3x-y+z=2 \\ x+y+4z=3 \\ -2x+3y+z=-2 \end{array}\right\}$, **(ε)** $\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=-5 \\ 5x+5y-2z=-2 \end{array}\right\}$

6. Λύστε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x+1 & x+1 & 0 & 0 \\ x+2 & x+2 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & x+3 & x+3 \end{vmatrix}=0$.

7. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 \end{vmatrix}=4(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$.

8. Δείξτε ότι $\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 \end{vmatrix}=\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

9. A. Βρείτε το γινόμενο $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

B. Αν $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot \mathrm{X}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, βρείτε τον πίνακα X.

10. Με τη μέθοδο του αντιστρόφου πίνακα λύστε τα συστήματα:

(α) $\left\{\begin{array}{l} -x+3y=10 \\ 2x-5y=2 \end{array}\right\}$, **(β)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ -x+2y+z=2 \\ x+3y-z=3 \end{array}\right\}$, **(γ)** $\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z=1 \\ 5x+2y+7z=-2 \\ x+2y+z=2 \end{array}\right\}$,

(δ) $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+5z=14 \\ 4x+5y-z=-5 \\ x-3z=-3/2 \end{array}\right\}$, **(ε)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ \lambda x+y+z=\lambda^2 \end{array}\right\}$.

11. Λύστε τα συστήματα: **(α)** $\begin{cases}(\lambda+1)x-2(\lambda-1)y=\mu+2\\ x+\quad 3\lambda y=4\lambda+5\end{cases}$,

(β) $\begin{cases}\lambda x+\quad 3y+2z=1\\ 2x-\quad \lambda y-\ z=5\\ x+(\lambda-1)y\quad =4\\ \quad 10y+3z=-2\end{cases}$, **(γ)** $\begin{cases}x+\ y+\ z=\kappa\\ ax+\beta y+\gamma z=\lambda\\ \beta x+\gamma y+\alpha z=\mu\end{cases}$, **(δ)** $\begin{cases}6x+7y+10z=11\\ 2x-\ y+5z=3\\ 4x+8y+5z=10\end{cases}$.

12. Βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases}\alpha x+2\beta y=1-x\\ 3x+(3\beta-1)y=\alpha x-3\end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και να υπολογίσετε.

13. Βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι αδύνατο το σύστημα $\begin{cases}(\lambda+6)x+(3\lambda+4)y=\lambda+2\\ (2\lambda+3)x+(\lambda+2)y=3\lambda+1\end{cases}$.

14. Βρείτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συγχρόνως αδύνατα τα συστήματα $\begin{cases}\alpha x-(2\beta+1)y=\beta\\ 2x-\quad 6y=7\alpha-4\beta\end{cases}$, $\begin{cases}3x+\quad 2y=\alpha-\beta-1\\ (5\alpha+\beta)x-(\alpha-5\beta)y=5\end{cases}$.

15. Δείξτε ότι το σύστημα $\begin{cases}(\lambda+2)x-3y=2\lambda+3\\ x+\lambda y=3\end{cases}$ έχει μία λύση $(x_0,\ y_0)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. Υπολογίστε την τιμή του λ ώστε $x_0+3y_0=7$.

16. Βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι αόριστο το σύστημα $\begin{cases}\lambda x+2y-z\ =2\\ 2x+\lambda y+3z=13\\ 3(x+y)+2z=15\end{cases}$ και μετά υπολογίστε τις άπειρες λύσεις του.

17. Λύστε τα συστήματα: **(α)** $\begin{cases}(\lambda-\mu)x+(\lambda+\mu)y=2(\lambda^2+\mu^2)\\ (\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y=2(\lambda^2+2\lambda\mu-\mu^2)\end{cases}$,

(β) $\begin{cases}(\sin\alpha)x-(\cos\alpha)y=\sin(2\alpha)\\ (\cos\alpha)x+(\sin\alpha)y=\cos(2\alpha)\end{cases}$, **(γ)** $\begin{cases}x+2y=\lambda+1\\ 3\lambda x-\ y=3\lambda-1\\ 2x-\lambda y=4\end{cases}$, **(δ)** $\begin{cases}2x+\quad 3y=0\\ 4x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$.

18. Δείξτε ότι είναι αδύνατο το σύστημα $\begin{cases}(k^2+1)x+\quad k\lambda y=k\mu\\ k\lambda x+(\lambda^2+1)y=\lambda\mu\\ k\mu x+\quad \lambda\mu y=\mu^2+1\end{cases}$.

19. Ποιά σχέση πρέπει να συνδέει τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συμβιβαστό το σύστημα $\begin{Bmatrix} \alpha x+\beta y=1 \\ \beta x+\alpha y=\alpha\beta \\ x+\ \ y=\alpha+\beta \end{Bmatrix}$;

20. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} \mu+2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, βρείτε τον πίνακα X ώστε $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{B}$.

21. Βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να έχει τουλάχιστον μία λύση το σύστημα $\begin{Bmatrix} x+\ \ y=3 \\ \lambda x+(\lambda+1)\,y=8 \\ (\lambda+1)\ x-\ \ y=1 \end{Bmatrix}$.

22. Δείξτε ότι για κάθε τιμή του $\theta\in\mathbb{R}$ είναι αδύνατο το σύστημα $\begin{Bmatrix} (1+\sin\theta)\,x+2y=1 \\ (-1+\sin\theta)\,x+3y=-1 \\ 2x-\ y=4 \end{Bmatrix}$.

23. Λύστε τα συστήματα (**α**) $\begin{Bmatrix} (\lambda-1)^2\,x+(\lambda^2-1)\,y=0 \\ (2\lambda-1)\,x+(\lambda+1)\,y=0 \end{Bmatrix}$, (**β**) $\begin{Bmatrix} \alpha x-\beta y+\gamma z=0 \\ \beta x+\gamma y+\alpha z=0 \\ x+\ \ y+\ \ z=0 \end{Bmatrix}$.

24. Αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, βρείτε πίνακα $\mathrm{X}_{2\mathrm{X}1}$ ώστε $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\lambda\cdot\mathrm{X}$.

25. Αν υπάρχουν $x,y,z\in\mathbb{R}$ με $|x|+|y|+|z|\neq 0$, $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, $\beta x+\gamma y+\alpha z=0$ και $\gamma x+\alpha y+\beta z=0$, δείξτε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

26. Βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να έχει άπειρες λύσεις το σύστημα $\begin{Bmatrix} (\lambda^2-1)\,x-y=0 \\ 2x-y=0 \end{Bmatrix}$.

Ποιές είναι τότε οι λύσεις;

27. Αν $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ διαφορετικοί ανά δύο και το σύστημα $\begin{Bmatrix} x+\ \ y+\ \ z=0 \\ \beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z=0 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\ \gamma^2 z=0 \end{Bmatrix}$ έχει και μη μηδενικές λύσεις, δείξτε ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

28. Βρείτε τους $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}+\lambda\cdot\begin{bmatrix} y \\ \lambda y \end{bmatrix}=(\lambda+1)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

29. Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha^2 x + \alpha\beta y + \beta^2 z = 0 \\ \beta^2 x + \beta\gamma y + \gamma^2 z = 0 \\ \gamma^2 x + \alpha\gamma y + \alpha^2 z = 0 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, δείξτε ότι $\alpha^2 = \beta\gamma$ ή $\beta^2 = \alpha\gamma$ ή $\gamma^2 = \alpha\beta$.

30. Βρείτε το πολυώνυμο $f(x) = |x \cdot I - A|$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και δείξτε ότι $f(A) = \mathbf{O}$ αν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

31. Βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 2) y = 0 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ να έχει μία λύση (x_0, y_0) τέτοια ώστε, η παράσταση $\left(x_0 + 3{y_0}^2\right)$ να είναι ελάχιστη.

32. Αν $\mathrm{A}_{2\mathrm{X}2}$ αντιστρέψιμος, δείξτε ότι $|\mathrm{A}^{-1}| = |\mathrm{A}|^{-1}$, $|\lambda\mathrm{A}| = \lambda^2 |\mathrm{A}|$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ο αντιστρέψιμος $\mathrm{A}_{2\mathrm{X}2}$ επαληθεύει την $9\mathrm{A}^2 = \sqrt{3}\mathrm{A}^{-1}$, βρείτε την ορίζουσα $|\mathrm{A}|$.

33. Δείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας $\mathrm{A}_{2\mathrm{X}2}$ για τον οποίο $|\mathrm{A}^2| - \frac{1}{2}|2\mathrm{A}| + 3 = 0$.

34. Αν α, β, γ οι πλευρές και $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\Gamma}$ οι γωνίες τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, αποδείξτε το νόμο συνημιτόνων. Υπόδειξη. Θεωρείστε ως δεδομένα τα $\begin{cases} \beta \cdot \cos\Gamma + \gamma \cdot \cos\mathrm{B} = \alpha \\ \gamma \cdot \cos\mathrm{A} + \alpha \cdot \cos\Gamma = \beta \\ \alpha \cdot \cos\mathrm{B} + \beta \cdot \cos\mathrm{A} = \gamma \end{cases}$.

35. Λύστε τα συστήματα: (**α**) $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \beta x + \alpha y = \alpha\beta \\ x + y = \alpha + \beta \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

(**β**) $\begin{cases} 2x + \lambda y = -\lambda \\ \lambda x + 2y = -\lambda \\ \lambda x + \lambda y = -2 \end{cases}$, (**γ**) $\begin{cases} (\lambda + 1)x + y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda + 1) y = 1 \\ x + y = 2\lambda + 1 \end{cases}$.

36. Βρείτε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συγχρόνως αδύνατα τα συστήματα $\begin{cases} (\mu - 1)x + \lambda y = 2 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} (\mu + 1)x + 2\lambda y = 3 \\ 4x + 10y = 5 \end{cases}$.

37. Βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y + 3\omega = 0 \\ 4x + (\lambda+3)y + 6\omega = 0 \\ 5x + 4y + (1+\lambda)\omega = 0 \end{cases}$ να έχει και μη μηδενικές λύσεις. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος για τη μικρότερη τιμή του λ από το προηγούμενο ερώτημα.

38. Βρείτε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συγχρόνως αδύνατα τα συστήματα $\begin{cases} (2\lambda-1)x + 10\mu y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} (\lambda-2)x - (\mu+1)y = 2 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$.

39. Δείξτε ότι για $\lambda \neq 1$ το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x + (\lambda+1)y + (\lambda+2)\omega = \lambda+1 \\ (\lambda+1)x + (\lambda+1)y + \lambda\omega = \lambda+1 \\ (\lambda+2)x + (\lambda+1)y + (2\lambda+5)\omega = 1 \end{cases}$ έχει μόνο μία λύση (x_0, y_0, ω_0). Δείξτε ότι για $\lambda = -1$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Αν $\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{bmatrix}$ λύστε την εξίσωση $\mathrm{A}^2(\lambda) = 0$.

40. Λύστε με τη μέθοδο επαυξημένου πίνακα τα συστήματα:

(α) $\begin{cases} x + y + 2\omega = -1 \\ 2x - y + 2\omega = -4 \\ 4x + y + 4\omega = -2 \end{cases}$, **(β)** $\begin{cases} x - 2y + 3\omega = 1 \\ 3x + 5y + \omega = 2 \\ -3x - 16y + 7\omega = 5 \end{cases}$, **(γ)** $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + y = \lambda \end{cases}$

(δ) $\begin{cases} x - 2y - \omega = -3 \\ 2x - 3y - 3\omega = -4 \end{cases}$, **(ε)** $\begin{cases} x + 2y + 3z + 5\omega = 1 \\ 2x + y - z + 3\omega = -1 \\ 3x - y + 2z + \omega = 3 \end{cases}$, **(στ)** $\begin{cases} x - y + 4z - 3\omega = 0 \\ 3x - 5y + 2z + \omega = 0 \\ -2x + 3y + z - 2\omega = 0 \end{cases}$

(ζ) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}$, **(η)** $\begin{cases} 5x - 2y + 3z - \omega = 6 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ -3x + y - 2\omega = -1 \\ 4x + 3y - z + 5\omega = -7 \end{cases}$, **(θ)** $\begin{cases} x + 2y + \lambda\omega = 1 \\ 2x + \lambda y + 8\omega = 3 \end{cases}$

(ι) $\begin{cases} x + 2y - 3\omega = 2\lambda \\ 2x + 6y - 11\omega = 3\lambda - 1 \\ x + 3y + 7\omega = 3\lambda \end{cases}$, **(κ)** $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 5y = \lambda \\ -7x + 9y = \lambda - 1 \end{cases}$, **(λ)** $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 24 \end{cases}$,

(μ) $\begin{cases} x + y - z + 2\omega = 1 \\ 2x + 4y - 6z - 2\omega = 0 \\ -x + y - 3z - 9\omega = -2 \\ x - 2y + 5z + 13\omega = \lambda + 4 \end{cases}$, **(ν)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - 2z = 8 \\ 3x - 8y + 3z = -8 \end{cases}$, **(ξ)** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x + y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$,

(ο) $\begin{Bmatrix} x+2y-2z+\omega=1 \\ 3x-3y+z=2 \\ 2x-8y+3z-2\omega=3 \end{Bmatrix}$, **(π)** $\begin{Bmatrix} 2x-y+z=1 \\ x+2y-2z=3 \\ 3x-2y+3z=1 \end{Bmatrix}$, **(ρ)** $\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+3y+4z=0 \end{Bmatrix}$,

(σ) $\begin{Bmatrix} 2x+y=5 \\ 2x+y=2 \end{Bmatrix}$, **(τ)** $\begin{Bmatrix} 3x+5y-8z=0 \\ 2x+y-z=2 \\ 5x+2y+3z=1 \\ -x+y+z=1 \end{Bmatrix}$, **(υ)** $\begin{Bmatrix} 2y-3z+\varphi=2 \\ x-2y+z-\omega+2\varphi=1 \\ 2x-y+3z+\omega-\varphi=10 \end{Bmatrix}$.

41. Βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$ αν AB= λB, όπου $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\neq \mathbf{O}$.

42. Αν το σύστημα $\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ \beta x+\gamma y+\alpha z=0 \end{Bmatrix}$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, έχει τις διαφορετικές λύσεις (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) δείξτε ότι $(x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2)=z_1\cdot z_2$.

43. Λύστε με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα, τα συστήματα:

(α) $\begin{Bmatrix} 3x+5y=13 \\ 5x-2y=1 \end{Bmatrix}$, **(β)** $\begin{Bmatrix} 2x+4y-\omega=6 \\ 2x+3y+5\omega=8 \end{Bmatrix}$, **(γ)** $\begin{Bmatrix} x+3y=7 \\ 2x-y=0, \\ 4x+y=7 \end{Bmatrix}$ **(δ)** $\begin{Bmatrix} x+3y=8 \\ 3x-2y=2 \\ 5x+y=12 \end{Bmatrix}$,

(ε) $\begin{Bmatrix} x-2y-10\omega=-1 \\ 2x+5\omega=13-y \\ 3x-38=-3y-\omega \end{Bmatrix}$, **(στ)** $\begin{Bmatrix} 2(2x-y)+4(2x-y)=48 \\ 5(x+y)-3(5x+y)=40 \end{Bmatrix}$.

---

44. Λύστε τα συστήματα **(α)** $\begin{Bmatrix} (\lambda+2)x+(\lambda-1)y=2\lambda-3 \\ (\lambda-2)x+(2\lambda+1)y=\lambda+3 \end{Bmatrix}$,

(β) $\begin{Bmatrix} x+(\lambda+1)y=2 \\ (\lambda+2)x-(\lambda^2-1)y=5 \end{Bmatrix}$, **(γ)** $\begin{Bmatrix} x+2y-z=6 \\ 2x-5y+z=4 \end{Bmatrix}$, **(δ)** $\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ 3x+4y+8z=0 \\ 2x+3y+7z=0 \end{Bmatrix}$,

(ε) $\begin{Bmatrix} x+\lambda y=7 \\ 2x+\lambda y=5 \\ 5x-(1-\lambda)y=-4 \end{Bmatrix}$, **(στ)** $\begin{Bmatrix} 3x+y-z=5 \\ 2x-4y+3z=8 \\ 5x-3y+2z=13 \end{Bmatrix}$, **(ζ)** $\begin{Bmatrix} x+y+\lambda z=2 \\ 2x+y+z=\lambda^2 \\ x+\lambda y+z=3\lambda \end{Bmatrix}$,

---

(**η**) $\begin{cases} \alpha x+y+z=3 \\ x+\alpha y+z=3 \\ x+y+\alpha z=3 \end{cases}$, (**θ**) $\begin{cases} 7x+3y-z=3 \\ 5x+4y+z=3 \\ x-2y+5z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, (**ι**) $\begin{cases} \lambda x+y+z+\omega=1 \\ x+\lambda y+z+\omega=\lambda \\ x+y+\lambda z+\omega=\lambda^2 \\ x+y+z+\lambda\omega=\lambda^3 \end{cases}$,

(**κ**) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+3y-z=6 \\ x-y-3z=3 \end{cases}$, (**λ**) $\begin{cases} \lambda x+2y+z=1 \\ x+(\lambda+1)y+3z=\alpha \\ 2x+\lambda y+z=1 \end{cases}$, (**μ**) $\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha-\beta \\ \beta x+\gamma y+\alpha z=\beta-\gamma \\ \gamma x+\alpha y+\beta z=\gamma-\alpha \end{cases}$

όπου $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
