Κεφάλαιο 5

5.9 Ερωτήσεις κατανοήσεως, Σελίδες 301–302.

Α/Α	Απαντήσεις	Επεξηγήσεις
1	Λάθος	Η σωστή απάντηση είναι $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}\Leftrightarrow z+\bar{z}=2Re(z)$.
2	Λάθος	Αν $z_1=1\neq 0$ και $z_2=i\neq 0$, είναι $z_1{}^2+z_2{}^2=1^2+i^2=0$.
3	Σωστό	Βλέπε παράγραφο 5.5, σελίδα 287, 9η γραμμή.
4	Λάθος	Αν $z=a+bi$, είναι $z^2=\left(a^2-b^2\right)+2abi$ και $\left\|z^2\right\|=a^2+b^2$.
5	Σωστό	Βλέπε αναλυτική επεξήγηση μετά τον πίνακα.
6	Λάθος	Το σωστό είναι ότι $z\in I\Leftrightarrow z=-\bar{z}\Leftrightarrow z+\bar{z}=0$
7	Σωστό	Να γίνει χρήση του τύπου De Moivre.
8	Σωστό	Οι άλλες δυο ρίζες, θα είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.
9	Σωστό	Ισχύει ότι $z\in I\Leftrightarrow z=-\bar{z}\Leftrightarrow z+\bar{z}=0$
10	Λάθος	Ισχύει ότι $z-\bar{z}=(a+i)-(a-i)=2i$. Άρα τα σημεία βρίσκονται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.
11	Σωστό	Βλέπε σχήμα 5.5.β σελίδος 288.
12	Λάθος	Το σωστό είναι $\|z\|=\|-z\|=\|\bar{z}\|=\|-\bar{z}\|$.
13	Σωστό	Βλέπε 1η γραμμή σελίδος 278.
14	Λάθος	Πρέπει οι συντελεστές του πολυωνύμου να είναι πραγματικοί αριθμοί. Βλέπε π.χ. 5.3.3 σελίδος 279.
15	Σωστό	$z^2-2z+2=(1-i)^2-2(1-i)+2=$ $1+i^2-\cancel{2i}-\cancel{2}+\cancel{2i}+\cancel{2}=1+i^2=0$
16	Λάθος	Το σωστό είναι $\theta_1=\theta_2+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
17	Σωστό	
18	Σωστό	Βλέπε συμπέρασμα σελίδος 288.
19	Σωστό	
20	Σωστό	Βλέπε αποτέλεσμα στο τέλος σελίδος 295.
21	Λάθος	Το σωστό είναι $\frac{2\pi}{40}=\frac{\pi}{20}$.
22	Σωστό	
23	Λάθος	Αν $z_1=\sqrt{7}+5i$, τότε $\|z_1\|^2=\left(\sqrt{7}\right)^2+5^2=32$, άρα $\|z_1\|=\sqrt{32}$, συνεπώς $r=\sqrt[3]{\|z_1\|}=\sqrt[3]{\sqrt{32}}=\sqrt[6]{32}=\sqrt[6]{2^5}=2^{\frac{5}{6}}$
24	Σωστό	Διότι αν έχει ρίζα έναν καθαρό μιγαδικό αριθμό, θα έχει ως ρίζα και το συζυγή του.

5. Από $z_1=2+3i$, είναι $|z_1|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, άρα $z_1=\sqrt{13}\left(cos\theta_1+i\cdot sin\theta_1\right)$.

Από $z_2=2-3i=\bar{z}_1$, είναι $|z_2|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, άρα $z_2=\sqrt{13}\left(cos(-\theta_1)+i\cdot sin(-\theta_1)\right)$.

Είναι

$$z=z_1^{20}+z_2^{20}=\sqrt{13}^{20}\left(cos(20\theta_1)+i\cdot sin(20\theta_1)\right)+\sqrt{13}^{20}\left(cos(-20\theta_1)+i\cdot sin(-20\theta_1)\right)=$$

$$\sqrt{13}^{20}cos(20\theta_1)+\sqrt{13}^{20}cos(-20\theta_1)=2\cdot 13^{10}cos(20\theta_1)\in\mathbb{R}.$$

7. Είναι $z=cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot sin\dfrac{\pi}{4}=1\left(cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, άρα

$$z^{200}=1^{200}\left(cos\frac{200\pi}{4}+i\cdot sin\frac{200\pi}{4}\right)=cos\left(50\pi\right)+i\cdot sin\left(50\pi\right)=$$

$$cos\left[25\left(2\pi\right)\right]+i\cdot sin\left[25\left(2\pi\right)\right]=cos0+i\cdot sin0=1+i\cdot 0=1$$

10. Διακρίνομε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

$z=a\in\mathbb{R}$	$z=a+bi$	$z=bi\in\mathrm{I}$
$\overline{z}=a\in\mathbb{R}$	$\overline{z}=a-bi$	$\overline{z}=-bi\in\mathrm{I}$
$-\overline{z}=-a\in\mathbb{R}$	$-\overline{z}=-a+bi$	$-\overline{z}=bi\in\mathrm{I}$
$z-\overline{z}=a-a=0$	$z-\overline{z}=2bi$	$z-\overline{z}=2bi$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, Σελίδες 302–303.

Α/Α	Απαντήσεις	Επεξηγήσεις
1	α	Βλέπε τελευταία γραμμή σελίδος 266.
2	β	Βλέπε ορισμό φανταστικής μονάδος, σελίδα 266.
3	β	Βλέπε συμπέρασμα σελίδος 288.
4	α	Βλέπε τέλος π.χ. 5.7.1 σελίδος 295.
5	α	
6	β	
7	γ	$z=\overline{z}\Leftrightarrow 0=\overline{z}-z\Leftrightarrow 0=\overline{\overline{z}-z}$
8	β	$\Delta=-7<0$, $z_{1,2}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$
9	β	
10	α	
11	δ	$P(z)=Q(z)\left[z-(-i)\right](z-i)=Q(z)\left(z^2-i^2\right)=$ $Q(z)\left(z^2+1\right)$.
12	γ	
13	α	
14	β	Βλέπε ορισμό στην αρχή σελίδος 293.
15	β	Βλέπε τύπο 5.7.1 σελίδος 293.