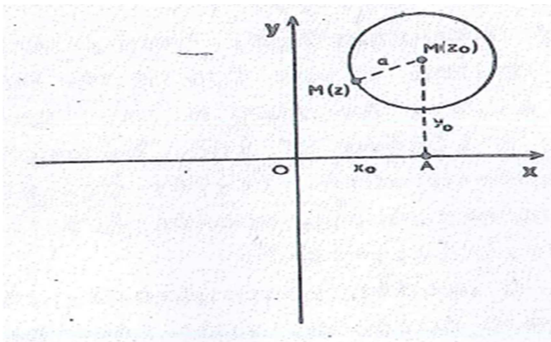
Γεωμετρικοί τόποι & μιγαδικοί αριθμοί.

➤ Βρείτε το σύνολο των σημείων $M\left(z\right)$ του μιγαδικού επιπέδου (εικόνες των μιγαδικών αριθμών z) για τα οποία ισχύει ότι $|z-z_o|=a$, με $\alpha \in \mathbb{R}^+$ και $z_o = x_o + y_o \cdot i$ όπου $x_o, y_o \in \mathbb{R}$.

Λύση.

Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 δίνει την απόσταση των σημείων $M\left(z_1\right), M\left(z_2\right)$ του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία παραστάνουν γεωμετρικά τους αριθμούς. Άρα, η παράσταση $|z-z_o|$ δίνει την απόσταση των σημείων $M\left(z\right)$ από το σταθερό σημείο $M\left(z_0\right)$, που είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού.

Επειδή $|z-z_o|=a>0$, τα σημεία $M\left(z\right)$ απέχουν από το σταθερό σημείο $M\left(z_0\right)$ σταθερή απόσταση ίση με a άρα βρίσκονται σε κύκλο κέντρου $M\left(z_0\right)$ και ακτίνας $r=a$. Έχομε τα εξής συμπεράσματα:

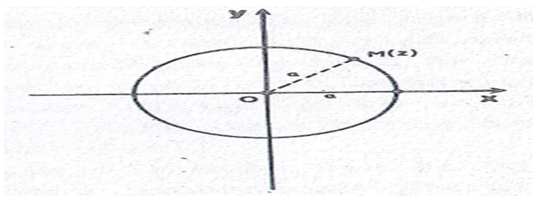


Το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-z_o|=a$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ είναι κύκλος κέντρου $M\left(z_0\right)$ και ακτίνας a .

Άρα, η σχέση $|z-z_o|=a>0$ με $z_o = x_o + y_o \cdot i$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (δοσμένος μιγαδικός αριθμός) αποτελεί την εξίσωση του κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο.

Παρατηρήσεις.

• Αν z_o=0 η σχέση $|z-z_o|=a>0$ παίρνει τη μορφή $|z|=a>0$ και αποτελεί την εξίσωση κύκλου, ο οποίος γράφεται με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα α.



• Το σύνολο $\{z \in \mathbb{R} : |z-z_o|=a,\ a>0\}$ έχει το πολύ δύο στοιχεία (δύο όταν $a>y_0$, ένα όταν $a=y_0$ και κανένα όταν $a<y_0$). Ενώ το σύνολο $\{z \in c : |z-z_o|=a,\ a>0\}$ είναι άπειρο σύνολο (έχει τους μιγαδικούς z των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στον κύκλο $\left(M(z_o),\ a\right)$).

• Το σύνολο $\{z \in \mathbb{R} : |z|=a,\ a>0\}$ έχει δύο στοιχεία, $\left(a,\ -a\right)$ ενώ το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z|=a,\ a>0\}$ είναι άπειρο σύνολο (έχει τους μιγαδικούς των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στο κύκλο $\left(0,\ a\right)$.

• Τα σημεία $M\left(z\right)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $|z-z_o|>\alpha>0$ είναι τα εξωτερικά του κύκλου κέντρου $M\left(z_0\right)$ και ακτίνας α, ενώ εκείνα για τα οποία ισχύει ότι $|z-z_o|<\alpha$ είναι τα εσωτερικά του ίδιου κύκλου.

• Από τη σχέση $|z-z_o|=a,\ a>0$, παίρνομε διαδοχικά

$$|z-z_0|=a \Leftrightarrow |z-z_0|^2=a^2 \Leftrightarrow (z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0)=a^2 \Leftrightarrow z\overline{z}-z_o\overline{z}-\overline{z}_0 z+z_o\overline{z}_0=a^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2-\left[\overline{z}_0 z+\left(\overline{\overline{z}_0 z}\right)\right]+|z_0|^2=a^2 \Leftrightarrow |z|^2-2\operatorname{Re}(\overline{z}_0 z)+|z_0|^2=a^2$$

Η σχέση αυτή αποτελεί μία άλλη μορφή της εξισώσεως κύκλου, κέντρου $M(z_0)$ και ακτίνας $r=a$.

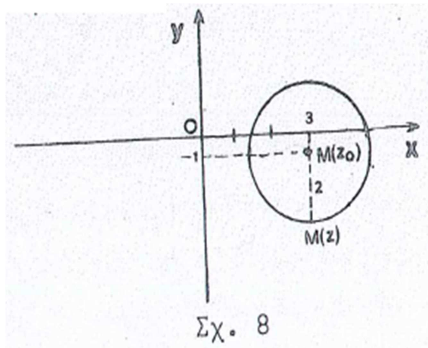
• Αν στη σχέση $|z-z_o|=a,\ a>0$ θέσομε $z=x+yi$, $z_o=x_0+y_0 i$ τότε ισχύει ότι

$$|(x-x_0)+(y-y_0)i|=a \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2}+\sqrt{(y-y_o)}^2=a \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2.$$

Η σχέση αυτή αποτελεί μία άλλη μορφή της εξισώσεως κύκλου, κέντρου $(x_0,\ y_0)$ και ακτίνας $r=a$.

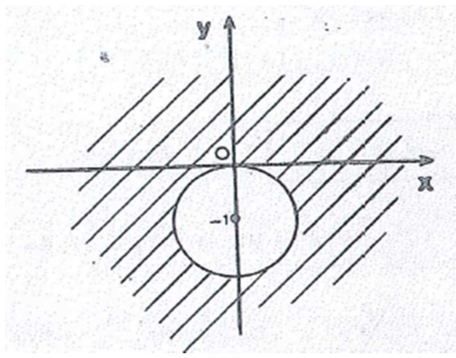
➢ Βρείτε το σύνολο των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι (i) $|z-3+i|=2$,
(ii) $|z+i|\geq 1$,
(iii) $|z+i|<2$,
(iv) $|z|=3$,
(v) $|z|<3$.

Λύση.



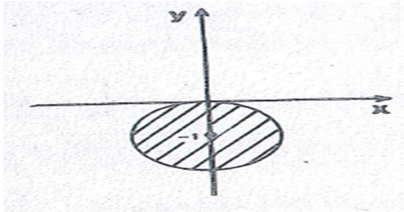
(i) **1ος τρόπος.** Είναι $|z-3+i|=2 \Leftrightarrow |z-(3-i)|=2$. Άρα η απόσταση των σημείων $M(z)$, εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, από το σταθερό σημείο $M(z_0)$ με συντεταγμένες $(3,\ -1)$ είναι σταθερή και ίση με 2. Άρα, το σύνολο των σημείων $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $M(z_0)$ και ακτίνας 2.

2ος τρόπος. Θέτω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ οπότε $|(x-3)+(y+1)i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=2^2$. Από τη σχέση αυτή έπεται ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(z)$, για τα οποία ισχύει η δοσμένη σχέση, είναι κύκλος κέντρου $(3,\ -1)$ και ακτίνας $r=2$.

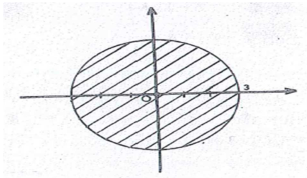


(ii) Είναι $|z+i|\geq 1 \Leftrightarrow |z-(-i)|\geq 1$. Επειδή η σχέση $|z-(-i)|=1$, αποτελεί την εξίσωση κύκλου κέντρου $(0,\ -1)$ και ακτίνας 1, το σύνολο των σημείων $M(z)$ (εικόνες των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση) είναι ο κύκλος και όλα τα εξωτερικά του σημεία.

(**iii**) Το σύνολο των σημείων $M(z)$, για τα οποία ισχύει ότι $|z+i|<1$, αποτελείται από όλα τα εσωτερικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.



(**iv**), (**v**). Το σύνολο των σημείων $M(z)$ για τα οποία ισχύει ότι $|z|=3$ είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3 . Το σύνολο των σημείων $M(z)$ για τα οποία ισχύει ότι $|z|<3$ είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του κύκλου αυτού.



➢ Λύστε στο σύνολο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $|z+1+i|=3$.

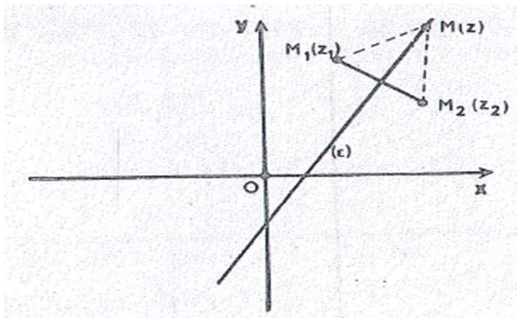
Λύση.

Είναι $|z+1+i|=3 \Leftrightarrow |z-(-1-i)|=3$. Η σχέση αυτή ικανοποιείται από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, των οποίων οι εικόνες είναι τα σημεία κύκλου, κέντρου $(-1,\ -1)$ και ακτίνας $r=3$.

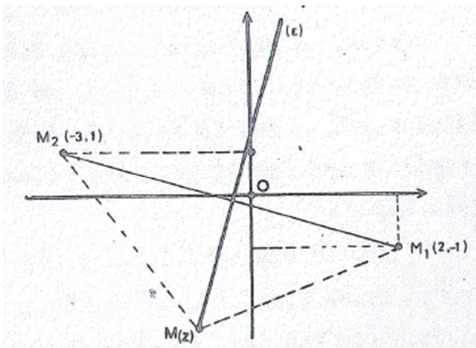
➢ Βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου (εικόνες των μιγαδικών z) για τα όποια ισχύει ότι $|z-z_1|=|z-z_2|$ όπου z_1, z_2 είναι γνωστοί μιγαδικοί αριθμοί.

Λύση.

Θεωρώ τα σημεία M_1, M_2, δηλαδή τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο. Επειδή η παράσταση $|z-z_1|$ δίνει την απόσταση των $M(z)$ από το σταθερό σημείο M_1 και η παράσταση $|z-z_2|$ δίνει την απόσταση αυτών από το επίσης σταθερό σημείο M_2, είναι φανερό ότι θέλω να βρω το γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία M_1, M_2. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος $M_1 M_2$.



➢ Το σύνολο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου που επαληθεύουν τη σχέση $|z-2+i| = |z+3-i| \Leftrightarrow |z-(2-i)| = |z-(-3+i)|$ είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος $M_1\ M_2$ με $M_1(2,\ -1)$, $M_2(-3,\ 1)$.

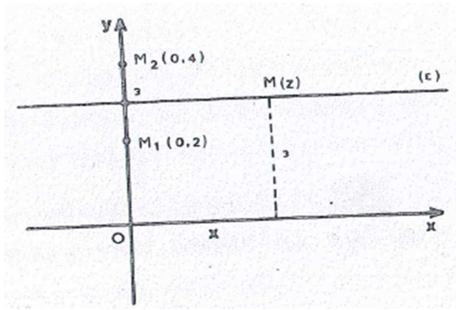


➤ Λύστε στο σύνολο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $|z-2i|=|z-4i|$|.

Λύση.

$1^{ος}$ τρόπος. Είναι $|z-2i|=|z-4i| \Leftrightarrow |z-(0+2i)|=|z-(0+4i)|$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται από τους μιγαδικούς αριθμούς z , των οποίων οι εικόνες είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος $M_1\ M_2$, με M_1 (0,2), M_2 (0,4).



Κάθε σημείο της (ε) έχει τεταγμένη 3 και τετμημένη έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό κ. Άρα, οι λύσεις της εξισώσεως είναι οι αριθμοί της μορφής $z=x+3i$, $x\in\mathbb{R}$.

$2^{ος}$ τρόπος. Είναι $|z-2i|=|z-4i| \Leftrightarrow |z-2i|^2=|z-4i|^2 \Leftrightarrow$ $(z-2i)(\overline{z}+2i)=(z-4i)(\overline{z}+4i) \Leftrightarrow z\overline{z}-2i\overline{z}+2iz+4=z\overline{z}-4i\overline{z}+4iz+16 \Leftrightarrow$ $2i\overline{z}-2iz-12=0 \Leftrightarrow 2i(\overline{z}-z+6i)=0 \Leftrightarrow \overline{z}-z+6i=0$.

Θέτω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ οπότε

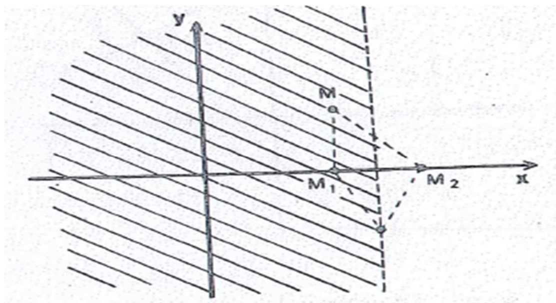
$x-yi-x-yi+6i=0 \Leftrightarrow -2yi+6i=0 \Leftrightarrow (-2y+6)i=0 \Leftrightarrow y=3$ και $x\in\mathbb{R}$

Άρα $z=x+3i$, $x\in\mathbb{R}$.

➤ Βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ για τα οποία ισχύει ότι $|z-4|<|z-6|$|.

Λύση.

Είναι $|z-4|<|z-6| \Leftrightarrow |z-(4+0i)|<|z-(6+0i)|$. Θέλω να βρω τα σημεία $M(z)$ (εικόνες των μιγαδικών αριθμών που επαληθεύουν τη δοσμένη σχέση) που απέχουν από το σημείο M_1 (4,0) απόσταση μικρότερη από όση απέχουν από το σημείο M_2 (6,0).



Τα σημεία που απέχουν εξ ίσου από τα M_1 , M_2 είναι τα σημεία της μεσοκάθετου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος $M_1\ M_2$.

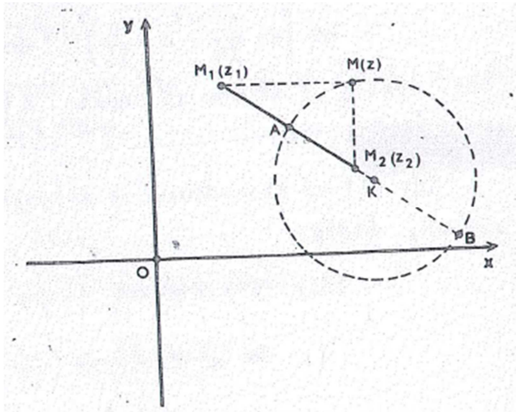
Άρα, τα ζητούμενα σημεία $M(z)$ είναι όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που βρίσκονται αριστερά από τη μεσοκάθετο (ε) του ευθυγράμμου τμήματος $M_1\ M_2$.

➤ Βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a$, όπου α $a\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ και z_1, z_2 δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί.

Λύση.

Είναι : $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a \Leftrightarrow |z-z_1|=\alpha|z-z_2| \Leftrightarrow |z-z_1|^2=\alpha^2|z-z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z}_1)=\alpha^2(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z}_2) \Leftrightarrow$$
$$z\overline{z}-z_1\overline{z}-\overline{z}_1 z+z_1\overline{z}_1=\alpha^2 z\overline{z}-\alpha^2 z_2\overline{z}-\alpha^2 z\overline{z}_2+\alpha^2\overline{z}_2 z_2 \Leftrightarrow$$
$$(1-\alpha^2)|z|^2=z z_1-\alpha^2 z z_2+(\overline{z\overline{z}_1-\alpha^2 z\overline{z}_2})-|z_1|^2+\alpha^2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$(1-\alpha^2)|z|^2=2\Re e\left[z(\overline{z}_1-\alpha^2\overline{z}_2)\right]-|z_1|^2+\alpha^2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$|z|^2=2\Re e\left[z\frac{\overline{z}_1-\alpha^2\overline{z}_2}{1-\alpha^2}\right]-\frac{|z_1|^2}{1-\alpha^2}+\frac{\alpha^2|z_2|^2}{1-\alpha^2}(1) \text{ διότι } 1-\alpha^2\neq 0.$$



Γνωρίζω ότι η εξίσωση κύκλου μπορεί να έχει τη μορφή $|z|^2=2\cdot\mathrm{Re}(\overline{z}_0 z)+\lambda^2-|z_0|^2$ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι το ζητούμενο σύνολο σημείων, είναι κύκλος κέντρου $M(z_0)$, εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_0=\dfrac{z_1-\alpha^2 z_2}{1-\alpha^2}$ με $\overline{z}_0=\dfrac{\overline{z}_1-\alpha^2\overline{z}_2}{1-\alpha^2}$, και ακτίνας λ με

$\lambda^2-|z_0|^2=\dfrac{\alpha^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-\alpha^2}$, άρα $\lambda^2=|z_0|^2+\dfrac{\alpha^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-\alpha^2}=z_0\cdot\overline{z}_0+\dfrac{\alpha^2 z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_1}{1-\alpha^2}=$

$$\frac{(z_1-\alpha^2 z_2)(\overline{z}_1-\alpha^2\overline{z}_2)}{(1-\alpha^2)^2}+\frac{\alpha^2 z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_1}{1-\alpha^2}$$

$$=\frac{\alpha^2\left(z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1 z_2\right)}{\left(1-\alpha^2\right)^2}=\frac{\alpha^2\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z}_1-\overline{z}_2\right)}{\left(1-\alpha^2\right)^2}=\frac{\alpha^2|z_1-z_2|^2}{(1-\alpha^2)^2}\Rightarrow\lambda=\frac{\alpha|z_1-z_2|}{|1-\alpha^2|}$$

➢ Επειδή η δοσμένη σχέση γράφεται ως $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a>0$ θέλομε να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ είναι σταθερός και ίσος με $a>0$. Αυτός ο γεωμετρικός τόπος ονομάζεται **Απολλώνιος κύκλος.** Η σχέση $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a$ με $a\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ είναι η μιγαδική εξίσωση του Απολλώνιου κύκλου.

Αν $a=1$ ο κύκλος εκφυλίζεται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $M_1 M_2$.

➢ Βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $|z-3|=4|z-1|$.

Λύση.

1ος τρόπος. Σύμφωνα με το προηγούμενο, το σύνολο των σημείων $M(z)$, δηλαδή των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, είναι ο Απολλώνιος κύκλος του οποίου θα προσδιορίσομε το κέντρο και την ακτίνα, από τους προηγούμενους τύπους.

Είναι $z_1 = 3$, $z_2 = 1$, $a = 4$, οπότε $z_0 = \dfrac{3-16}{1-16} = \dfrac{13}{15}$ και $\lambda = \dfrac{4|3-1|}{|1-16|} = \dfrac{8}{15}$

Άρα ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $M\left(\dfrac{13}{15}, 0\right)$ και ακτίνα $\lambda = \dfrac{8}{15}$, δηλαδή η εξίσωση του είναι $\left|z - \dfrac{13}{15}\right| = \dfrac{8}{15}$.

2ος τρόπος. $|z-3| = 4|z-1| \Leftrightarrow |z-3|^2 = 16|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-3)(\overline{z}-3) = 16(z-1)(\overline{z}-1)$

$z\overline{z} - 3\overline{z} - 3z + 9 = 16z\overline{z} - 16\overline{z} - 16z + 16 \Leftrightarrow 15z\overline{z} - 13(z+\overline{z}) + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$z\overline{z} - \dfrac{13}{15}(\overline{z}+z) + \dfrac{7}{15} = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} - \dfrac{13}{15}(\overline{z}+z) + \left(\dfrac{13}{15}\right)^2 = \dfrac{169}{15^2} - \dfrac{7}{15} \Leftrightarrow z\overline{z} - \dfrac{13}{15}(\overline{z}+z) + \left(\dfrac{13}{15}\right)^2 = \dfrac{64}{15^2}$

$\Leftrightarrow \left(z - \dfrac{13}{15}\right)\left(\overline{z} - \dfrac{13}{15}\right) = \left(\dfrac{8}{15}\right)^2 \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{13}{15}\right|^2 = \left(\dfrac{8}{15}\right)^2 \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{13}{15}\right| = \dfrac{8}{15}$ δηλαδή κύκλος κέντρου $M\left(\dfrac{13}{15}, 0\right)$ και ακτίνας $\lambda = \dfrac{8}{15}$.

➤ Βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $|z+4| = 2|z+1|$.

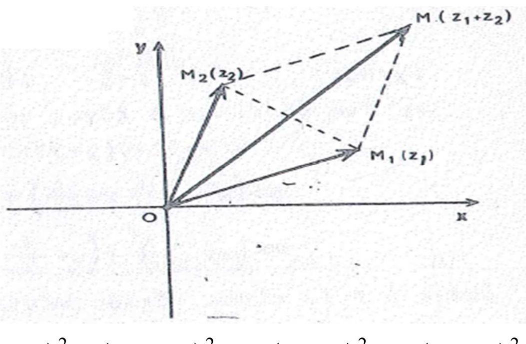
Λύση.

Είναι $|z+4| = 2|z+1| \Leftrightarrow |z+4|^2 = 2|z+1|^2 \Leftrightarrow (z+4)(\overline{z}+4) = 4(z+1)(\overline{z}+1) \Leftrightarrow$
$z\overline{z} + 4\overline{z} + 4z + 16 = 4z\overline{z} + 4\overline{z} + 4z + 4 \Leftrightarrow 3z\overline{z} = 12 \Leftrightarrow z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$

Δηλαδή το ζητούμενο σύνολο σημείων $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

➤ Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τι εκφράζει γεωμετρικά η $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$;

Λύση.



Αν $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ είναι οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, το σημείο $M(z_1+z_2)$ είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου OM_1MM_2 με $|\overrightarrow{OM_1}| = |z_1|$, $|\overrightarrow{OM_2}| = |z_2|$, $|\overrightarrow{M_1M_2}| = |z_1 - z_2|$, $|\overrightarrow{OM}| = |z_1 + z_2|$, συνεπώς

$|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{M_1M_2}|^2 = 2|\overrightarrow{OM_1}|^2 + 2|\overrightarrow{OM_2}|^2 \Leftrightarrow (OM)^2 + (M_1M_2)^2 = 2(OM_1)^2 + 2(OM_2)^2$

Άρα η δοσμένη σχέση εκφράζει γεωμετρικά τη γνωστή γεωμετρική πρόταση **«Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των πλευρών του»**.

➤ Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ για τα οποία ο λόγος $\dfrac{z+3i}{z+1}$ είναι αριθμός (**i**) φανταστικός, (**ii**) πραγματικός.

Λύση.

Αν $z=x+yi\,, x,y\in\mathbb{R}$ άρα $\dfrac{z+3i}{z+1}=\dfrac{x+(y+3)i}{(x+1)+yi}=\dfrac{\left[x+(y+3)i\right]\left[(x+1)-yi\right]}{(x+1)^2+y^2}$

$=\dfrac{\left[x+(y+3)i\right]\left[(x+1)-yi\right]}{(x+1)^2+y^2}=\dfrac{x(x+1)+y(y+3)}{(x+1)^2+y^2}+\dfrac{(x+1)(y+3)-xy}{(x+1)^2+y^2}i$

(**i**) Για να είναι ο λόγος φανταστικός πρέπει και αρκεί $x(x+1)+y(y+3)=0 \Leftrightarrow$ $x^2+y^2+x+3y=0 \Leftrightarrow \left(x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{4}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ και ακτίνας α=$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(**ii**) Για να είναι πραγματικός πρέπει $(x+1)(y+3)-xy=0 \Leftrightarrow$ $xy+y+3x+3-xy=0 \Leftrightarrow 3x+y=-3$ άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $3x+y=-3$.

➢ Αν M η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, να προσδιοριστεί το σύνολο των σημείων M για τα οποία οι εικόνες των $i,\ z,\ iz$ είναι συνευθειακά σημεία.

Λύση.

Αν $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και Α, Β, Γ οι εικόνες των $i,\ z,\ iz$ αντίστοιχα, είναι $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(x,\ y)$, $\Gamma(-y,\ x)$. Για να είναι τα σημεία Α, Β, Γ συνευθειακά, πρέπει τα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ να είναι συγγραμικά.

Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x,\ y-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(-y,\ x-1)$ άρα αρκεί $\begin{vmatrix} x & y-1 \\ y & x-1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$x^2-x+y^2-y=0 \Leftrightarrow x^2-2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+y^2-2y\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Άρα, το Μ βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνας $r=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

➢ Αν $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ διαφορετικοί ανά δύο και Α, Β, Γ οι εικόνες τους αντιστοίχως, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\in\mathbb{R}$.

Λύση.

Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow$ Υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}^*:\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\lambda\left(\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \Leftrightarrow z_2-z_1=\lambda(z_3-z_1) \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\in\mathbb{R}$

➢ Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M\left(z\right)$ των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει ότι $Re^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)=2\left[Re(z)-2\cdot\mathrm{Im}(z)\right]+11$ είναι κύκλος κέντρου $K\left(1,\ -2\right)$ και ακτίνας $\rho=4$.

Λύση.

Αν $z=x+yi$ η ως άνω σχέση γράφεται

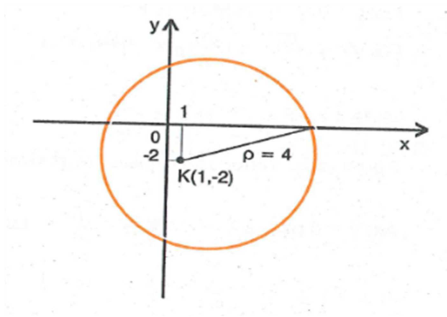
$x^2+y^2=2(x-2y)+11 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y=11$

$\Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+y^2+2y\cdot 2+2^2=16 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+2)^2=4^2$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M\left(z\right)$ είναι κύκλος κέντρου $K\left(1,\ -2\right)$ και ακτίνας $\rho=4$.



➢ Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M\left(z\right)$ των $z=x+yi\in\mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει ότι $Re(z^2)+2\,\mathrm{Im}^2(z)=2\,\mathrm{Im}(z)$.

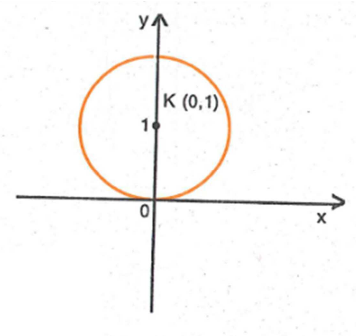
Λύση.

Αν $z=x+yi$ είναι $z^2=x^2+y^2+2xyi$ άρα $Re(z^2)=x^2-y^2$ και η ως άνω σχέση γράφεται

$x^2-y^2+2y^2=2y \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-2y+1=1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των $M\left(z\right)$ είναι κύκλος κέντρου $K\left(0,\ 1\right)$ και $\rho=1$.



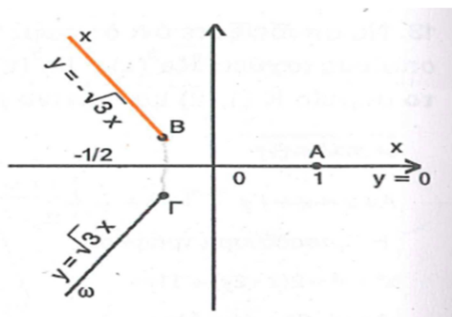
➢ Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M\left(z\right)$ που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει ότι $z^3\in\mathbb{R}$ και $z^3\geq 1$ είναι 3 ημιευθείες.

Λύση.

Έχομε $z^3=(x-yi)^3=x^3+(iy)^3+3x^2yi+3x(yi)^2=x^3-y^3i+3x^2yi-3xy^2=$ $x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$. Επειδή

$\begin{cases} z^3\in\Re \\ z^3\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y-y^3=0(1) \\ x^3-3xy^2\geq 1(2) \end{cases} \Leftrightarrow$ Η (1) δίνει

$\begin{cases} y=0 \\ ή \\ y=\pm\sqrt{3}x \end{cases}$



Για y=0 η (2) $\Leftrightarrow x^3\geq 1 \Leftrightarrow$ x$\geq$1

Για y=$\pm\sqrt{3}x$ η(2) $\Leftrightarrow x^3-9x^3\geq 1 \Leftrightarrow -8x^3\geq 1 \Leftrightarrow x^3\leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\ \leq -\frac{1}{2}$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M\left(z\right)$ είναι οι ημιευθείες:

$Ax: y=0,\ x\geq 1$, $Bt: y=-\sqrt{3}x,\ x\leq\frac{-1}{2}$ με $x\ \leq -\frac{1}{2}$, $\Gamma\omega: y=\sqrt{3}x$ με $x\ \leq -\frac{1}{2}$

➤ Αν Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία του μιγαδικού επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα αποδείξτε τις ισοδυναμίες:

(i) ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο $\Leftrightarrow z_1 + z_3 = z_2 + z_4$

(ii) ΑΒΓΔ ορθογώνιο $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_3 = z_2 + z_4 (1) \\ (z_3 - z_1)(\overline{z}_3 - \overline{z}_1) = (z_4 - z_2)(\overline{z}_4 - \overline{z}_2)(2) \end{cases}$

Λύση.

(i) $z_1 + z_3 = z_2 + z_4 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = z_4 - z_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow$ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

(ii) Από την (1) έχομε ότι ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

Από τη (2) $\Leftrightarrow |z_3 - z_1|^2 = |z_4 - z_2|^2 \Leftrightarrow |z_3 - z_1| = |z_4 - z_2| \Leftrightarrow |\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}| = |\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}|$

Άρα οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, συνεπώς είναι ορθογώνιο.

➤ Έστω $z = x + yi \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ισότητα $z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} = 0$ με $a = 2 + 3i$.

(i) Αν M η εικόνα του z, βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M.

(ii) Αν $w = \frac{9}{z}$ τότε $aw + \overline{aw} = 9$.

(ii) Αν N η εικόνα του w, βρείτε το γεωμετρικό τόπο του N.

Λύση.

(i) Έχομε $z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} = 2\,\Re e(a\overline{z}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2(2x + 3y)$ Διότι $\overline{a}z = (2+3i)(x - iy) = 2x - 2yi + 3xi + 3y = (2x + 3y) + (3x - 2y)i$ και είναι $Re(a\overline{z}) =$ $2x + 3y$, οπότε η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου $x^2 + y^2 = 2(2x + 3y) \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(2,\ 3)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{13}$.

(ii) Από $w = \frac{9}{z}$ είναι $aw + \overline{aw} = a\frac{9}{z} + \overline{a}\frac{9}{\overline{z}} = 9\left(\frac{a}{z} + \frac{\overline{a}}{\overline{z}}\right) = 9\frac{a\overline{z} + \overline{a}z}{z\overline{z}} = 9\frac{z\overline{z}}{z\overline{z}} = 9$

(iii) Η σχέση $aw + \overline{aw} = 9$ δίνει $2Re(aw) = 9 \Leftrightarrow Re(aw) = \frac{9}{2}$.

Θέτω $w = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $aw = (2+3i)(x+yi) = (2x - 3y) + (3x + 2y)i$.

Οπότε $Re(aw) = 2x - 3y \Leftrightarrow \frac{9}{2} = 2x - 3y \Leftrightarrow 4x - 6y = 9 \Leftrightarrow 4x - 6y - 9 = 0$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος του N είναι η ευθεία $4x - 6y - 9 = 0$.

➤ Λύστε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $z^2 - 2i\overline{z} = 0$. Αν Α, Β, Γ είναι εικόνες των μη μηδενικών λύσεων της εξισώσεως, στο μιγαδικό επίπεδο, δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Λύση.

Θέτω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και η εξίσωση γράφεται ως $(x + yi)^2 - 2i(x - yi) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xyi - 2xi - 2y = 0$. Άρα,

$$\left.\begin{cases} x^2-y^2-2y=0 \\ 2x(y-1)=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{cases} x^2-y^2-2y=0 \\ x=0 \end{cases}\right\} \\ \text{ή} \\ \left.\begin{cases} x^2-y^2-2y=0 \\ y=1 \end{cases}\right\} \end{cases}$$

Για $x=0$ το 1ο σύστημα δίνει $-y^2-2y=0 \Leftrightarrow y(y+2)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=0 \\ \text{ή} \\ y=-2 \end{matrix}\right\}$

Για $y=1$ το 2ο σύστημα δίνει $x=\pm\sqrt{3}$.

Συνεπώς οι ρίζες της εξισώσεως είναι οι $z_0=0$, $z_1=-2i$, $z_2=\sqrt{3}+i$, $z_3=-\sqrt{3}+i$

Έστω Α(z_1),Β(z_2),Γ(z_3) οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} (AB)&=|z_2-z_1|=\left|\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{12} \\ (B\Gamma)&=|z_3-z_2|=\left|-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}=\sqrt{12} \\ (\Gamma A)&=|z_1-z_3|=\left|\sqrt{3}-3i\right|=\sqrt{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Το } \overset{\Delta}{AB\Gamma} \text{ είναι ισόπλευρο.}$$

➤ Έστω $w=\dfrac{z+1}{z-2i}$ με $z=x+yi, xy\in\mathbb{R}$ με $z\neq 2i$. Αποδείξετε ότι

(i) Αν $w\in\mathbb{R}$, τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ είναι η ευθεία $y=2x+2$ εκτός του σημείου της $M(0,\ 2)$.

(ii) Αν $w\in I$, τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $K\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ και ακτίνας R=$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, εκτός από το σημείο αυτού $M(0,\ 2)$.

Λύση.

(i) **1ος τρόπος.** Αν $z=x+yi$ έχομε $x+yi\neq 0+2i$ με $(x,\ y)\neq(0,\ 2)$. Είναι

$$w=\frac{(x+1)+yi}{x+(y-2)i}=\frac{[(x+1)+yi][x-(y-2)i]}{x^2+(y-2)^2}i=\frac{x(x+1)+y(y-2)+[xy-(x+1)(y-2)]i}{x^2+(y-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+x-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}i \quad (*)$$

Επειδή $w\in\mathbb{R}$, πρέπει $\operatorname{Im}(w)=0$ δηλαδή $2x-y+2=0 \Leftrightarrow y=2x+2$.

2ος τρόπος. $w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow w=\overline{w} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-2i}=\overline{\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-2i}=\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-2i} \Leftrightarrow$

$z\overline{z}+\overline{z}+2iz+2i=z\overline{z}+z-2i\overline{z}-2i \Leftrightarrow 2i(z+\overline{z})+\overline{z}-z+4i=0 \Leftrightarrow 4xi-2yi+4i=0$

$\overset{:2}{\Leftrightarrow} 2x-y+2=0 \Leftrightarrow y=2x+2$ Ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι η ευθεία $y=2x+2$ εκτός του σημείου της $M(0,\ 2)$, επειδή $z\neq 2i$.

(ii) 1^{ος} τρόπος. Όμοια καταλήγω στην $(*)$. Επειδή $w\in I$, πρέπει $\mathrm{Re}(w)=0$ άρα

$$x^2+y^2+x-2y=0 \Leftrightarrow x^2+2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+y^2-2y.1+1=\frac{1}{4}+1 \Leftrightarrow$$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $\mathrm{K}\left(-\frac{1}{2},1\right)$ και $\mathrm{R}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ εκτός του $M(0,\ 2)$.

2^{ος} τρόπος. $w\in I \Leftrightarrow w=-\overline{w} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2i}=-\overline{\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2i}=-\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-2i} \Leftrightarrow$

$$z\overline{z}+\overline{z}+2iz+2i=-z\overline{z}-z+2i\overline{z}+2i \Leftrightarrow 2z\overline{z}+\overline{z}+z+2i(z-\overline{z})=0 \Leftrightarrow$$

$$2(x^2+y^2)+2x-4y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-2y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $\mathrm{K}\left(-\frac{1}{2},1\right)$ και $\mathrm{R}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ εκτός του $M(0,\ 2)$.

➢ Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και $w=\frac{\overline{z}^2}{z-1}$ με $z\neq 1$. Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ για τα οποία $w\in\mathbb{R}$ είναι η καμπύλη $3x^2-y^2-2x=0$ και ο άξονας xx' (υπερβολή).

Λύση.

Έχομε $w\in\mathbb{R}$ άρα $\overline{w}=w \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{\overline{z}^2}{z-1}\right)}=\frac{\overline{z}^2}{z-1} \Leftrightarrow \frac{\overline{\overline{z}^2}}{\overline{z-1}}=\frac{\overline{z}^2}{z-1} \Leftrightarrow \frac{z^2}{\overline{z}-1}=\frac{\overline{z}^2}{z-1} \Leftrightarrow$

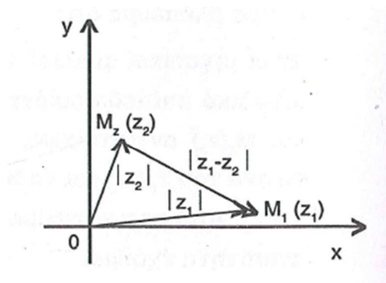
$$\Leftrightarrow z^3-z^2=\overline{z}^3-\overline{z}^2 \Leftrightarrow (z-\overline{z})\left[\left(z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2\right)-\left(z+\overline{z}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\overline{z} \\ ή \\ \left(z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2\right)-\left(z+\overline{z}\right)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\overline{z} \\ ή \\ \left(z+\overline{z}\right)^2-2z\overline{z}+z\overline{z}-\left(z+\overline{z}\right)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ ή \\ (2x)^2-(x^2+y^2)-2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ ή \\ 4x^2-x^2-y^2-2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ ή \\ 3x^2-y^2-2x=0 \end{array}\right. .$$

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι.

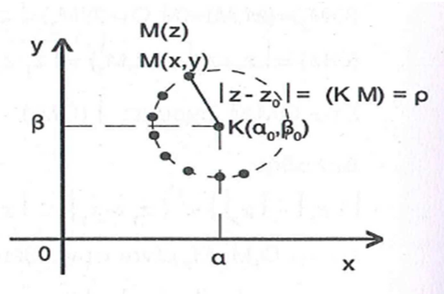
Το μέτρο της διαφοράς z_1-z_2 δηλαδή το $|z_1-z_2|$, όπου $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ παριστάνει την απόσταση των σημείων M_1, M_2 που είναι οι εικόνες των μιγαδικών



z_1, z_2 αντιστοίχως. Δηλαδή $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{M_2M_1}}| = |z_2 - z_1|$.

Η διαπίστωση αυτή οδηγεί στο να βρίσκομε εύκολα τους δύο παρακάτω βασικούς γεωμετρικούς τόπους.

Αν ο $z_0 = a_0 + \beta_0 i \in \mathbb{C}$ έχει εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σταθερό σημείο $\mathrm{K}_0(z_0) = \mathrm{K}(a_0, \beta_0)$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, που έχουν εικόνες τους τα σημεία $M(z) = M(x, y)$ ικανοποιούν τη σχέση $|z - z_0| = \rho$, όπου $\rho > 0$, τότε κάθε σημείο $M(z)$ έχει την ιδιότητα να απέχει από το σταθερό σημείο $\mathrm{K}(a_0, \beta_0)$ σταθερή απόσταση $(KM) = \rho$.



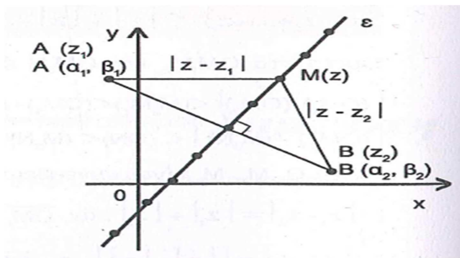
Άρα, βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $\mathrm{K}(a_0, \beta_0)$ και ακτίνας ρ.

➢ Η σχέση $|z - z_0| = \rho$ εκφράζεται «αλγεβρικά» ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ των $z \in \mathbb{C}$ είναι κύκλος κέντρου $K(z_0)$ και ακτίνας ρ.

Για δύο μιγαδικούς $z_1 = a_1 + \beta_1 i$, $z_2 = a_2 + \beta_2 i$ με αντίστοιχες εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha_1, \beta_1)$, $\mathrm{B}(\alpha_2, \beta_2)$, οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν τη σχέση $|z - z_1| = |z - z_2|$ έχουν εικόνες $M(z)$ που ισαπέχουν από τα σταθερά άκρα $\mathrm{A}(z_1)$, $\mathrm{B}(z_2)$ του ευθυγράμμου τμήματος AB.

Δηλαδή τα $M(z) = M(x, \mathrm{y})$ βρίσκονται στη μεσοκάθετο ε του AB.

➢ Η σχέση $|z - z_1| = |z - z_2|$ εκφράζει αλγεβρικά ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ των $z \in \mathbb{C}$ είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $\mathrm{A}(z_1)$, $\mathrm{B}(z_2)$.

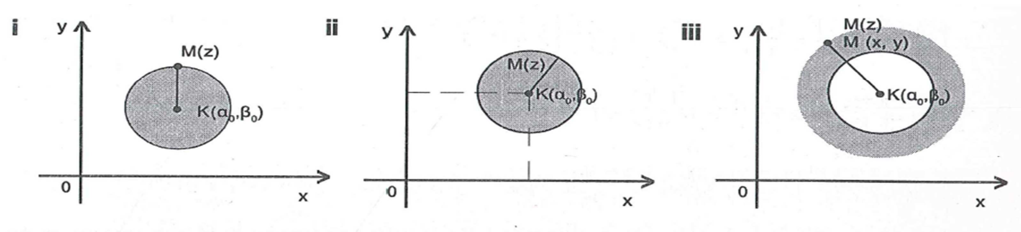


Παρατηρήσεις. Αν ο $z_0 = a_0 + \beta_0 i$ έχει εικόνα το σημείο $\mathrm{K}(a_0, \beta_0)$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(z) = M(x, \mathrm{y})$ που είναι εικόνες των $z = x + yi$ έτσι ώστε:

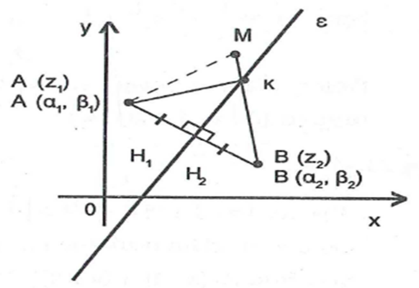
(i) $|z - z_0| \le \rho$ είναι ο κυκλικός δίσκος κέντρου $\mathrm{K}(a_0, \beta_0)$ και ακτίνας ρ.

(ii) $|z - z_0| < \rho$ είναι τα εσωτερικά σημεία του παραπάνω κύκλου.

(iii) $|z - z_0| > \rho$ είναι τα εξωτερικά σημεία του παραπάνω κύκλου.



➤ Αν $z_1=a_1+\beta_1 i$, $z_2=a_2+\beta_2 i$ με εικόνες αντίστοιχα τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha_1,\ \beta_1)$, $\mathrm{B}(\alpha_2,\ \beta_2)$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(z)=M(x,\ \mathrm{y})$ που είναι εικόνες των $z=x+yi$ έτσι ώστε:



(i) $|z-z_1|\le|z-z_2|$ είναι το ημιεπίπεδο H_1 μαζί με την ακμή του ε.

(Αν Μ σημείο του H_1 στο $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ είναι (ΜΑ)<(ΜΚ)+(ΚΑ)=(ΜΚ)+(ΚΒ)=(ΜΒ))

(ii) $|z-z_1|<|z-z_2|$ είναι το ημιεπίπεδο H_1 χωρίς την ε.

(iii) $|z-z_1|\ge|z-z_2|$ είναι το ημιεπίπεδο H_2 με την ε.

(iv) $|z-z_1|>|z-z_2|$ είναι το ημιεπίπεδο H_2 χωρίς την ε.

➤ Αν $z_1=3+4i$, $|z_2|=3$ βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παραστάσεως $|z_1\pm z_2|$.

Λύση.

Επειδή $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$ και $|z_1|=\sqrt{9+16}=5$ είναι

$|5-3|\le|z_1\pm z_2|\le5+3\Rightarrow2\le|z_1+z_2|\le8$. Άρα, max $|z_1\pm z_2|$=8, min$|z_1\pm z_2|$=2

➤ Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ που είναι εικόνες των $z\in\mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύει (i) $|z-1+2i|=1$

(ii) $|z-1+2i|=|z-2+i|$

(iii) $|z-1+2i|<|z-2+i|$

Λύση.

(i) Είναι $|z-1+2i|=1\Leftrightarrow|z-(1-2i)|=1$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(1,\ -2)$ και $\rho=1$ που έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2=1$.

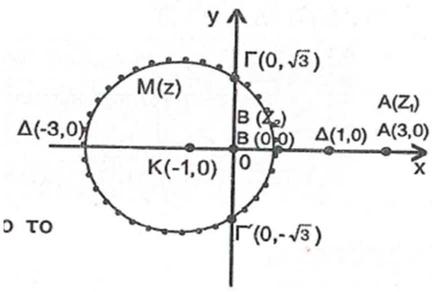
(ii) Είναι $|z-1+2i|=|z-2+i|\Leftrightarrow|z-(1-2i)|=|z-(2-i)|$. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με άκρα $\mathrm{A}(1,\ \text{-}2)$, $\mathrm{B}(2,-1)$ που έχει εξίσωση $y=-x$.

(iii) Είναι $|z-1+2i|<|z-2+i|\Leftrightarrow|z-(1-2i)|<|z-(2-i)|$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι το ημιεπίπεδο H_1 χωρίς την ακμή (ε).

➤ Βρείτε το σύνολο $M(z)$ των εικόνων των $z=x+yi$ αν $|z-3|=2|z||$.

Λύση.



$|z-3| = 2|z| \overset{\uparrow^2}{\Leftrightarrow} |z-3|^2 = 4|z|^2 \Leftrightarrow$
$(z-3)(\overline{z}-3) = 4z\overline{z} \Leftrightarrow z\overline{z} - 3z - 3\overline{z} + 9 - 4z\overline{z} = 0$
$\Leftrightarrow$
$-3[z\overline{z} + (z+\overline{z}) - 3] = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2^2$

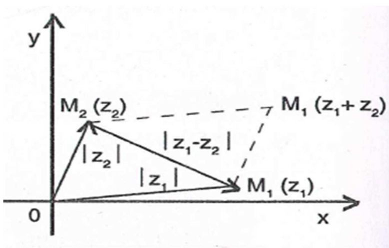
Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $K(-1,\ 0)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

- Γενικότερα, αν $|z-z_1| = k|z-z_2|$ με $0 < k \neq 1$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι ο Απολλώνιος κύκλος δηλαδή ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο $\Delta\Delta'$ οπού $\Delta,\ \Delta'$ είναι τα συζυγή αρμονικά των άκρων $A(z_1)$, $B(z_2)$ αντιστοίχως, του AB με $(AB) = |z_1 - z_2|$.

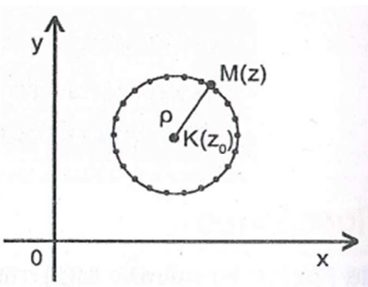
Δηλαδή τα $\Delta,\ \Delta'$ χωρίζουν αντιστοίχως εσωτερικά και εξωτερικά το AB σε λόγο K. Έτσι, για τις εικόνες $M(z)$ των z είναι $\dfrac{MA}{MB} = K$ ή $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = K$ ή $|z-z_1| = k|z-z_2|$.

Συνεπώς, $|z-3| = 2|z| \Leftrightarrow \dfrac{|z-(3+0i)|}{|z-(0+0i)|} = 2$. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι το σύνολο των σημείων του επίπεδου που ο λόγος των αποστάσεων τους από τις εικόνες των $z_1 = 3 + 0i$, $z_2 = 0 + 0i$ είναι σταθερός και ίσος με 2.

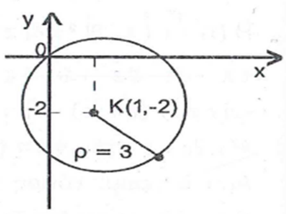
Δηλαδή, είναι κύκλος διαμέτρου $\Delta\Delta'$, με $\Delta(1,0)$, $\Delta'(-3,\ 0)$ να είναι τα συζυγή αρμονικά των $A(z_1) = A(3,\ 0)$, $B(z_2) = B(0,\ 0)$ αντιστοίχως.



Ορισμένοι γεωμετρικοί τόποι στηρίζονται στην έννοια της αποστάσεως δύο σημείων ως μέτρο της διαφοράς των αντίστοιχων μιγαδικών αριθμών που τα έχουν εικόνες τους δηλαδή M_1M_2 $= |z_1 - z_2|$.



- Αν $|z - z_o| = \rho$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι ο κύκλος κέντρου $K(z_o)$ και ακτίνας ρ.



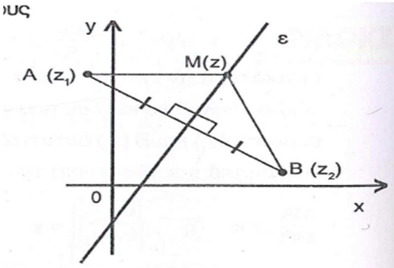
Εφαρμογή. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(z)$ του z αν $|z-(1-2i)| = 3$.

Λύση.

Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(1,\ -2i) = K(1,\ -2)$ και ακτίνας

$\rho = 3$.

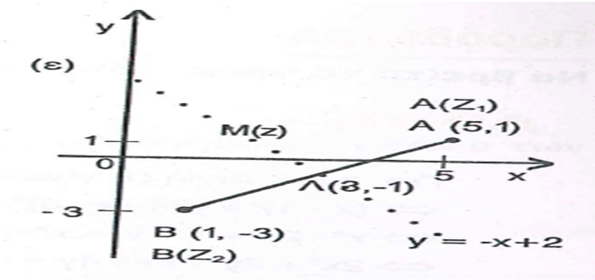
➤ Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει ότι $|z-(5+i)|=|z-(1-3i)|$.



Λύση.

Ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται από τις εικόνες $A(5,\ 1)$, $B(1,\ -3)$ των μιγαδικών $z_1 = 5+i$, $z_2 = 1-3i$ αντιστοίχως .

Οι συντεταγμένες του μέσου Λ του AB είναι $\Lambda\left(\frac{5+1}{2},\frac{1-3}{2}\right)=\Lambda(3,\ -1)$ και επειδή $\lambda_{AB}\lambda_{\varepsilon}=-1$, $\lambda_{AB}=1$ είναι $\lambda_{\varepsilon}=-1$. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z είναι η ευθεία $y+1=-1(x-3) \Leftrightarrow y=-x+2$.



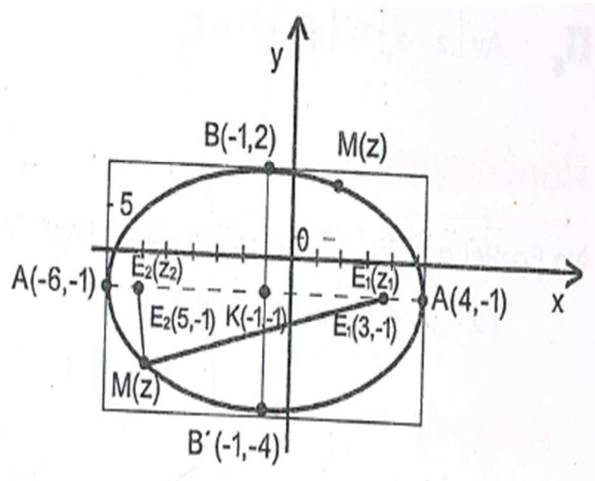
➤ Αν $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι η έλλειψη με εστίες $\mathrm{E}_1(z_1)$, $\mathrm{E}_2(z_2)$, εστιακή απόσταση $(E_1,E_2)=|z_1-z_2|=2\alpha>2\gamma$.

Εφαρμογή. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(z)$ των $z\in\mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει ότι $|z-(3-i)|+|z-(-5-i)|=10$.

Λύση.

Αν $E_1(3,\ -1)$, $E_2(-5,\ -1)$ οι εικόνες των $z_1=3-i$, $z_2=-5-i$ αντιστοίχως, και $M(z)$ οι εικόνες των z ώστε $(ME_1)+(ME_2)=10=2a$.

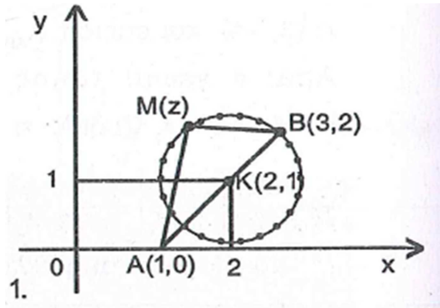
Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι έλλειψη με εστίες E_1, E_2 , κέντρο συμμετρίας το μέσο K του E_1E_2 δηλαδή $K\left(\frac{3-5}{2},\frac{-1-1}{2}\right)=K(-1,\ -1)$, μεγάλο άξονα μήκους $(AA')=2a=10$, εστιακή απόσταση $(E_1E_2)=|3+5|=8=2\gamma$, μικρό άξονα μήκους $(BB')=2\gamma=2\cdot 3=6$ και εξίσωση $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$.



➤ Αν $|z-z_1|-|z-z_2|=2a, a>0$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ των $z\in\mathbb{C}$ είναι η υπερβολή με εστίες $E_1(z_1), E_2(z_2)$ και εστιακή απόσταση $(E_1E_2)=|z_1-z_2|=2\gamma>2\alpha=|(ME_1)-(ME_2)|$.

➢ Αν $\left|z-z_1\right|^2-\left|z-z_2\right|^2=c, c\in\mathbb{R}$ με c>0 τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z $\in\mathbb{C}$ είναι κύκλος.

Εφαρμογή. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(z)$ των $z\in\mathbb{C}$ έτσι ώστε $\left|z-1\right|^2+\left|z-3-2i\right|^2=6$.



Λύση.

Για $z=x+yi$ η ανωτέρω σχέση γίνεται

$\left|(x-1)+yi\right|^2+\left|x-3+(y-2)i\right|^2=6 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-2)^2-6=0 \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+y^2+x^2-6x+9+y^2-4y+4-6=0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x-4y=-8 \Leftrightarrow$

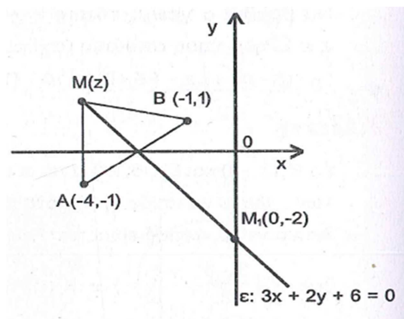
$x^2+y^2-4x-2y=-4 \Leftrightarrow x^2-2x.2+2^2+y^2-2y+1=-4+4+1 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(2,\ 1)$ και $\rho=1$.

➢ Αν $\left|z-z_1\right|^2-\left|z-z_2\right|^2=c, c\in\Re_+^*$ τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία.

Εφαρμογή. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(z)$ των z $\in\mathbb{C}$ έτσι ώστε $\left|z+i+4\right|^2-\left|z+1-i\right|^2=3$.



Λύση.

Αν $z=x+yi$ η ανωτέρω σχέση γίνεται

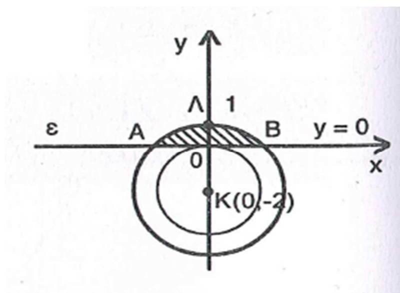
$\left|(x+4)+(y+1)i\right|^2-\left|(x+1)-(y-1)i\right|^2=3 \Leftrightarrow$

$(x+4)^2+(y+1)^2-(x+1)^2-(y-1)^2=3 \Leftrightarrow$

$x^2+8x+16+y^2+2y+1-x^2-2x-1-y^2+2y-1-3=0 \Leftrightarrow$ 6x+4y+12=0 $\Leftrightarrow$ 3x+2y+6=0 . Άρα ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι η ευθεία (ε).

➢ Βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ που είναι εικόνες των $z\in\mathbb{C}$ αν

$$\begin{cases} 2<\left|z+2i\right|<3 \ (1) \\ \kappa\alpha\iota \\ \operatorname{Im}(z)>0 \ (2) \end{cases}$$



Λύση.

Αν $z=x+yi$ είναι (1) $\Leftrightarrow$ $2<\left|z+2i\right|<3$, (2) y ≥ 0 . Το σύνολο των σημείων $M(z)$, που ζητάμε, είναι η τομή του δακτυλίου μεταξύ των ομόκεντρων κύκλων $C_1:(x-0)^2+(y+2)^2=3^2=9$, $C_2:(x-0)^2+(y+2)^2=2^2=4$ και του ημιεπιπέδου που ορίζει ο xx' με τον ημιάξονα Oy χωρίς την ακμή του (ε) y=0 δηλαδή τον xx'.

Άρα, το σύνολο των σημείων $M(z)$ που ικανοποιούν τις (1), (2) είναι το μικτόγραμμο σχήμα ΑΟΒΛ χωρίς το περίγραμμα του.

➤ Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$, ώστε $\log_{1/2}|z-2|>\log_{1/2}|z|$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού της συνθήκης είναι $A=\mathbb{C}-\{0,\ 2\}$. $\forall z\in A$. Ισχύει ότι

$\log_{1/2}|z-2|=\dfrac{\log_e|z-2|}{\log_e\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln|z-2|}{\ln\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln|z-2|}{\ln l-\ln 2}=-\dfrac{\ln|z-2|}{\ln 2}$ και ομοίως $\log_{1/2}|z|=-\dfrac{\ln|z|}{\ln 2}$. Έτσι (1) $-\dfrac{\ln|z-2|}{\ln 2}>-\dfrac{\ln|z|}{\ln 2}$ $\Leftrightarrow$ ln|z-2|<ln|z| $\Leftrightarrow$ |z-2|<|z| (2)

Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου, που ικανοποιούν την σχέση |z-2|=|z| $\Leftrightarrow$ |z-(2+0i)|=|z-(0+0i)|, είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ όπου $A(2,\ 0), B(0,\ 0)$ δηλαδή τα σημεία της ευθείας $x=1$. Επομένως, τα σημεία που ικανοποιούν τη σχέση (2) άρα και την (1) είναι τα σημεία που βρίσκονται δεξιά από την ευθεία $x=1$ και έκτος αυτής.

➤ Έστω η εξίσωση (ε) $z^2-(2^{\theta+1}\sigma\upsilon\nu\theta)z+2^{2\theta}=0$ με $\in[0,2\pi)$ με ρίζες $z_1,z_2\in C$.

(i) Βρείτε τις z_1,z_2.

(ii) Αν A, B είναι οι εικόνες των z_1,z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, υπολογίστε το θ ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισόπλευρο.

Λύση.

(i) Η (ε) έχει διακρίνουσα:

$\Delta=[-(2^{\theta+1}\sigma\upsilon\nu\theta)]^2-4.2^{2\theta}=2^{2(\theta+1)}\sigma\upsilon\nu^2\theta-2^2.2^{2\theta}=2^{2\theta+2}\sigma\upsilon\nu^2\theta-2^{2\theta+2}=2^{2\theta+2}(\sigma\upsilon\nu^2\theta-1)=-2^{2\theta+2}(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$=-2^{2\theta+2}\eta\mu^2\theta\leq 0$ Άρα οι ρίζες της (1) είναι:

$$z_{1,2}=\frac{2^{\theta+1}\sigma\upsilon\nu\theta\pm i\sqrt{2^{2(\theta+1)}\eta\mu^2\theta}}{2}=\frac{2^{\theta+1}\sigma\upsilon\nu\theta\pm i2^{\theta+1}\eta\mu\theta}{2}=2^{\theta}\sigma\upsilon\nu\theta\pm i2^{\theta}\eta\mu\theta$$

Άρα έχομε τις ρίζες $z_1=2^{\theta}[\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta]$ και $z_2=2^{\theta}[\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)]$

(ii) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$ $\Leftrightarrow$ $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$(*) Έχομε $|z_1|=|z_2|=2^{\theta}$ (1)

$|z_1-z_2|=|2^{\theta}\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)|\Leftrightarrow|z_1-z_2|=2^{\theta}|2i\eta\mu\theta|=2^{\theta+1}|\eta\mu\theta|$(2)

Από (1),(2) η (*) γίνεται $\Rightarrow 2^{\theta}=2^{\theta+1}|\eta\mu\theta|$ $\Leftrightarrow$ $|\eta\mu\theta|=\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\eta\mu\theta=\dfrac{1}{2}\\ \acute{\eta}\\ \eta\mu\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6},\theta=\dfrac{5\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \theta=\dfrac{7\pi}{6},\theta=\dfrac{11\pi}{6}\end{cases}$$

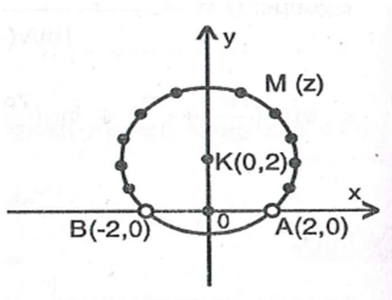
➢ Βρείτε το σύνολο των εικόνων $M(z)$ των z $\in C$ αν $Arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Λύση.

Αν $z=x+yi$ είναι $\frac{z-2}{z+2}=\frac{(x-2)+yi}{(x+2)+yi}=\frac{[(x-2)+yi][(x+2)-yi]}{(x+2)^2+y^2}=$

$$\frac{(x-2)(x+2)+y^2+(x+2)yi-(x-2)yi}{(x+2)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-4}{(x+2)^2+y^2}+\frac{4y}{(x+2)^2+y^2}i$$

Άρα, η συνθήκη Arg $\left(\frac{z-2}{z+2}\right)=\frac{\pi}{4}$ είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις.



$$\begin{cases} 1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=\frac{4y}{x^2+y^2-4} \\ \kappa\alpha\iota \\ 4y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4=4y(1) \\ y>0(2) \end{cases}$$

Η (1) γράφεται $x^2+y^2-4y=4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=8 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=(2\sqrt{2})^2$ άρα το σύνολο των εικόνων $M(z)$ των z είναι το τόξο κύκλου κέντρου $K(0,\ 2)$ και ακτίνας $\rho=2\sqrt{2}$, που είναι πάνω από τον xx'.

➢ Αν $z=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$, βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών $w=z^2+3$, $v=\frac{1}{z+1}$.

Λύση.

Είναι $w=z^2+3 \Leftrightarrow w-3=z^2 \Leftrightarrow w-3=\cos(2\theta)+i\cdot\sin(2\theta) \Leftrightarrow |w-3|=1$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ του μιγαδικού w είναι κύκλος κέντρου $K(3,\ 0)$ και ακτίνας $\rho=1$. Επίσης $v=\frac{1}{z+1} \Leftrightarrow z+1=\frac{1}{v} \Leftrightarrow z=\frac{1}{v}-1 \Leftrightarrow z=\frac{1-v}{v}$

Από $|z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-v}{v}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|1-v|}{|v|}=1 \Leftrightarrow |1-v|=|v| \Leftrightarrow |1-v|^2=|v| \Leftrightarrow (1-v)(1-\bar{v})=v\bar{v}$

$\Leftrightarrow 1-\bar{v}-v+v\bar{v}=v\bar{v} \Leftrightarrow v+\bar{v}=1 \Leftrightarrow 2\cdot Re(v)=1 \Leftrightarrow Re(v)=\frac{1}{2}$.

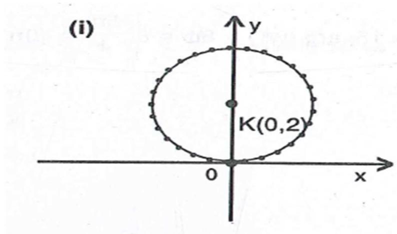
Αν $v=x+yi \Rightarrow x=\frac{1}{2}, \psi\in\Re$.

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ του v είναι η ευθεία $x=\frac{1}{2}$.

➢ Αν $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και $w=\frac{z+2i}{z-i}$, $z\neq i$, βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z έτσι ώστε

(i) $|w|=2$,

(ii) $Arg(w)=\frac{\pi}{2}$.



Λύση.

(i) |w|=2 $\Leftrightarrow \left|\dfrac{z+2i}{z-1}\right| = 2 \Leftrightarrow |z+2i| = 2\,|z-i| \Leftrightarrow |x+yi+2i| = 2|x+yi-i| \Leftrightarrow$

$|x+(y+2)i| = 2|x+(y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2} = 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow$

$x^2+y^2+4y+4 = 4(x^2+y^2-2y+1) \Leftrightarrow x^2+y^2+4y+4 = 4x^2+4y^2-8y+4 \Leftrightarrow$

$3x^2+3y^2-12y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=4 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(0,\ 2)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

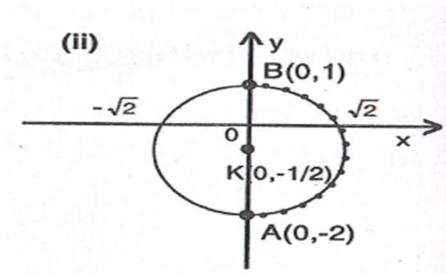
(ii) Είναι $w = \dfrac{z+2i}{z-1} = \dfrac{x+yi+2i}{x+yi-i} = \dfrac{x+(y+2)i}{x+(y-1)i} = \dfrac{[x+(y+2)i][x+(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} =$

$= \dfrac{x^2-(xy-x)i+(xy+2x)i+y^2-y+2y-2}{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2} + \dfrac{3x}{x^2+(y-1)^2}i$

Είναι $Arg(w) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x^2+y^2+y-2 \\ 3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+y+\dfrac{1}{4} = 2+\dfrac{1}{4} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \\ x>0 \end{cases}$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι το ημικύκλιο κέντρου $K\left(0,\ \dfrac{-1}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho = \dfrac{3}{2}$ που βρίσκεται δεξιά του άξονα yy'.



➤ Λύστε το σύστημα $\begin{cases} |z+1|+|z-1| = 4 \ (1) \\ Arg(iz) = \pi \ (2) \end{cases}$

Λύση.

Αν $z = x+yi$ η σχέση (1) γράφεται

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$(x+1)^2+y^2 = 16 - 8\sqrt{(x-1)^2+y^2} + (x-1)^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}+x^2-2x+1 \Leftrightarrow$

$4x-16 = -8\sqrt{(x-1)^2+y^2} \overset{:(-4)}{\Leftrightarrow} 4-x = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2} \overset{x\le 4}{\Leftrightarrow}$

$16+x^2-8x = 4[(x-1)^2+y^2] \Leftrightarrow 16+x^2-8x = 4(x-1)^2+4y^2 \Leftrightarrow 16+x^2-8x-4x^2+8x-4-4y^2 = 0 (3)$

Η σχέση (2) δίνει $Argi + Argz = \pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + Argz = \pi \Leftrightarrow Argz = \dfrac{\pi}{2}$.

Άρα, $x=0$ και $y>0$ (4)

Η (3) $\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 12-4y^2=0 \\ y>o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2=12 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=3 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{3} \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow y=\sqrt{3}$

Άρα, z= $z = \sqrt{3}i$.

➢ Το σύστημα λύνεται απλούστερα αν ερμηνεύσομε την (1) γεωμετρικά, δηλαδή ότι είναι έλλειψη με εστίες $E'(-1,\ 0)$, $E(1,\ 0)$ μεγάλο άξονα μήκους $(AA') = 2a = 4$, μικρό άξονα μήκους $(BB') = 2\sqrt{3}$ και εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Η (2) Argi+Argz=π $\Rightarrow$ $\text{A}rgz = \frac{\pi}{2}$ ή $x = 0$ και $y > 0$ (2) .

Δηλαδή, η εικόνα $B\left(0,\ \sqrt{3}\right)$ του $z = \sqrt{3}i$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος . Άρα, το σύστημα έχει λύση το $z = \sqrt{3}i$.