Ορισμοί, ισότητα, μέτρο, άθροισμα μιγαδικών αριθμών. Μιγαδικό επίπεδο. Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος μιγαδικών αριθμών.

Η προσπάθεια επιλύσεως εξισώσεων 3ου βαθμού $\left(ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0\right)$ με πραγματικούς συντελεστές και δευτεροβαθμίων εξισώσεων $\left(ax^2+\beta x+\gamma=0\right)$ με πραγματικούς συντελεστές και αρνητική διακρίνουσα, οδήγησε τους μαθηματικούς (S.Del Ferro, N. Tartaglia, R. Bombelli), στα μέσα του 16ου αιώνα, στο να διευρύνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τη δημιουργία νέων αριθμών, της μορφής $a+\beta i$ στο υπερσύνολο $\mathbb{C}$, τους μιγαδικούς αριθμούς (complex numbers). Στο σύνολο $\mathbb{C}$, οι πράξεις, οι ιδιότητες τους και η επίλυση των εξισώσεων ταυτίζονται με αυτές του $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}=\mathbb{R}\cup \mathrm{I}$

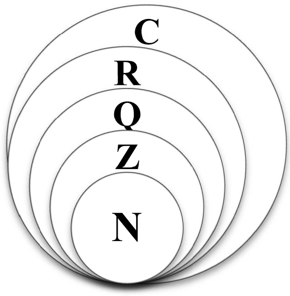
$\mathbb{R}=Q\cup\{\acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\iota\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\acute{\iota}\}$,

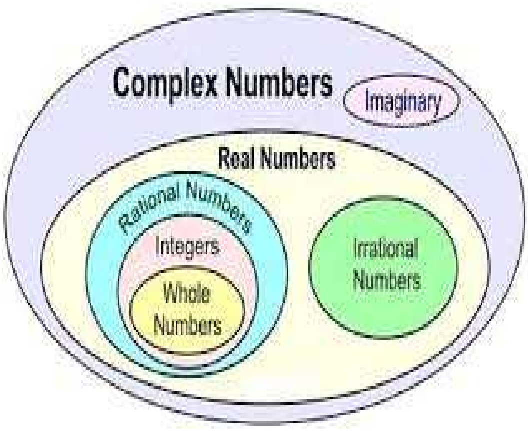
$Q=\left\{\dfrac{m}{n}: m\in Z,\ n\in Z^*\right\}$

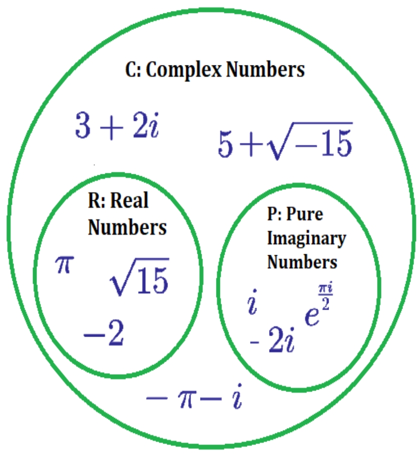
$Z=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ ...\}$

$\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{...,-3,-2,-1\}$

$N=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$,







Ορισμός φανταστικών και μιγαδικών αριθμών. Η μορφή $a+\beta i$.

Γνωρίζομε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$ έχει:

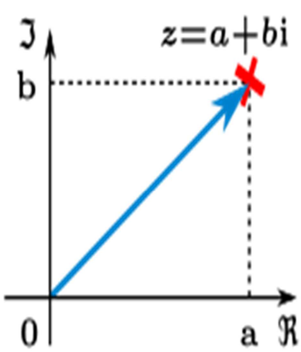
- δύο άνισες πραγματικές ρίζες, όταν είναι η διακρίνουσα της $\Delta>0$,
- μία διπλή ρίζα, που είναι πραγματικός αριθμός, όταν είναι $\Delta=0$ και
- είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, όταν ισχύει ότι $\Delta<0$.

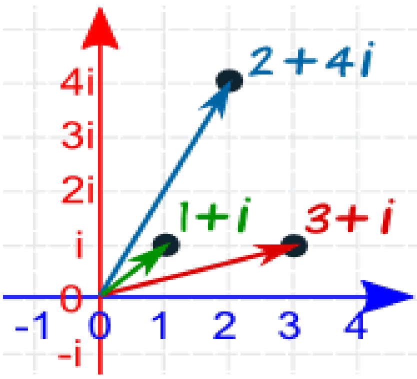
$$\text{Δηλαδή} \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} & ,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0 \\ x_1=x_2=\dfrac{-\beta}{2\alpha} & ,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0 \\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \text{ στο } \mathbb{R} & ,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0 \end{cases}$$

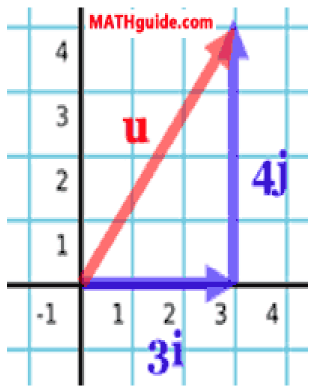
Η εξίσωση $x^2=-1$ είναι αδύνατη στο ℝ, διότι πάντα ισχύει ότι $x^2\geq 0$. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτή η αδυναμία, έγινε διεύρυνση του συνόλου ℝ σε ένα νέο σύνολο, το ℂ. Το νέο υπερσύνολο έχει τις ίδιες πράξεις και ιδιότητες πράξεων με το σύνολο ℝ, που είναι γνήσιο υποσύνολο του, αλλά περιέχει επιπλέον τουλάχιστο μία λύση της εξισώσεως $x^2=-1$.

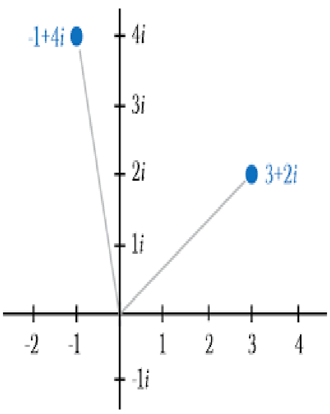
Το νέο σύνολο ℂ περιέχει ως στοιχείο του τον αριθμό i για τον οποίο ισχύει ότι $i^2=-1$ και ονομάζεται **φανταστική μονάδα**. Κάθε αριθμός της μορφής ai, με $a\in\mathbb{R}$, ονομάζεται **φανταστικός αριθμός**. Πρώτος ο Gauss εισήγαγε το συμβολισμό $i=\sqrt{-1}$, αλλά ο Euler τον εισήγαγε οριστικά.

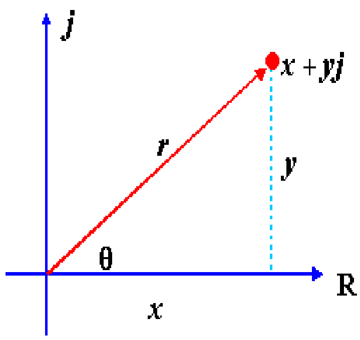
Κάθε αριθμός της μορφής $z=a+bi$, με $a,b\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός**. Ο αριθμός a ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται ως $\mathrm{Re}(z)$, ενώ ο αριθμός b ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζεται ως $\mathrm{Im}(z)$. Άρα $z=a+b\cdot i=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)\cdot i$.

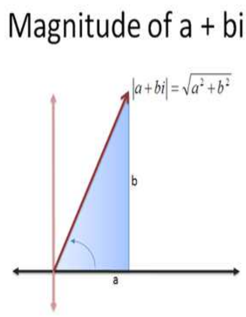












Κάθε $a\in\mathbb{R}$ είναι και μιγαδικός αριθμός, διότι ισχύει ότι $a=a+0i$. Επίσης κάθε φανταστικός αριθμός bi είναι και μιγαδικός αριθμός, διότι $bi=0+bi$.

Άρα $z \in I \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ και $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$.

Είναι $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ και $\mathbb{C}=\mathbb{R} \cup \mathrm{I}$, όπου I το σύνολο των φανταστικών αριθμών. Αν $ab \neq 0$, τότε ο z λέγεται **καθαρός ή γνήσιος μιγαδικός** αριθμός. Είναι $(0,b)=0+bi=bi$ και $(a,b)=a+bi$.

Παραδείγματα.

1. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις της μορφής i^k για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Είναι $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=i^2 i=(-1)i=-i$, $i^4=i^2 i^2=(-1)(-1)=1$.

Αν ο ακέραιος $k=4\lambda+\upsilon$ με $0 \le \upsilon < 4$, τότε $i^k=i^{4\lambda}i^{\upsilon}=(i^4)^{\lambda}i^{\upsilon}=i^{\upsilon}=\begin{cases} 1, & \upsilon=0 \\ i, & \upsilon=1 \\ -1, & \upsilon=2 \\ -i, & \upsilon=3 \end{cases}$

Είναι $i^5=i^{4+1}=i^4 i=1\cdot i=i$, $\quad i^6=i^{4+2}=i^4 i^2=1\cdot(-1)=-1$, κ.τ.λ.

2. Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

• Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ ή $z_2=0$.

Η πρόταση είναι αληθής διότι αν $z_1=z_2=0$, τότε προφανώς $z_1 \cdot z_2 = 0$.

Αν $z_1 \neq 0$, τότε $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1}\cdot z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{z_1}\cdot 0 \Leftrightarrow 1\cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2=0$.

Ομοίως ενεργούμε όταν $z_2 \neq 0$.

• Η εξίσωση $x^2+\alpha^2=0$ έχει λύση στο $\mathbb{C}$.

Η πρόταση είναι αληθής διότι, $x^2+\alpha^2=0 \Leftrightarrow x^2-(-1)\alpha^2=0 \Leftrightarrow x^2-i^2\alpha^2=0 \Leftrightarrow x^2-(i\alpha)^2=0 \Leftrightarrow (x-i\alpha)\cdot(x+i\alpha)=0 \Leftrightarrow x=i\alpha$ ή $x=-i\alpha$.

Εφαρμογή. $x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=-9 \Leftrightarrow x=\pm 3i$

•Αν $x, y \in \mathbb{C}: x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.

Η πρόταση είναι ψευδής διότι αν $\begin{cases} x=1\neq 0 \\ \text{και} \\ y=i\neq 0 \end{cases}$ τότε $x^2+y^2=1^2+i^2=1-1=0$ ή ακόμα

αν $\begin{cases} x=3+i\neq 0 \\ \text{και} \\ y=-1+3i\neq 0 \end{cases}$ τότε $x^2+y^2=\cancel{9}+6i-\cancel{1}+\cancel{1}-6i-\cancel{9}=0$.

• Για κάθε $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}-\{0\}$ ισχύει ότι $z^2>0$. Η πρόταση είναι ψευδής διότι αν $z=1+2i \in \mathbb{C}^*$ τότε $z^2=(1+2i)^2=1-4+4i=-3+4i$.

Δε μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι $z^2=-3+4i>0$, διότι το σύνολο $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο (όπως ήταν το σύνολο $\mathbb{R}$).

3. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $x^2-6x+10=0$.

Λύση.

Είναι $a=1$, $\beta=-6$, $\gamma=10$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=36-40=-4<0$.

Συνεπώς $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{6\pm i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{6\pm 2i}{2}=3\pm i$

Επίσης $ax^2-\beta x+\gamma=\alpha(x-z_1)(x-z_2)=(x-(3+i))(x-(3-i))=...=x^2-6x+10$

4. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $3x^2-3x+1=0$.

Λύση.

Είναι $a=3$, $\beta=-3$, $\gamma=1$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot3\cdot1=9-12=-3<0$.

Συνεπώς $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Επίσης ισχύει ότι:

$$ax^2-\beta x+\gamma=\alpha(x-z_1)(x-z_2)=3\left(x-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)=...=3x^2-3x+1$$

5. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $4x^2-12x+13=0$.

Λύση.

Είναι $a=4$, $\beta=-12$, $\gamma=13$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot4\cdot13=144-208=-64<0$

Συνεπώς $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{12\pm i\sqrt{64}}{8}=\dfrac{12\pm i8}{8}=\dfrac{3}{2}\pm i$. Επίσης ισχύει ότι:

$$ax^2-\beta x+\gamma=\alpha(x-z_1)(x-z_2)=4\left(x-\left(\frac{3}{2}+i\right)\right)\left(x-\left(\frac{3}{2}-i\right)\right)=...=4x^2-12x+13$$

Εφαρμογή.

(**α**) Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ το τριώνυμο $z^2+4z+8=0$.

(**β**) Βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η εξίσωση $x^2+ax+\beta=0$ έχει ρίζα τον $5-i$.

(**γ**) Να βρεθεί η δευτεροβάθμια εξίσωση $az^2+\beta z+\gamma=0$ όπου $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $a\neq0$ αν γνωρίζετε ότι μία λύση της είναι η $z_1=1+i$.

Λύση.

(**α**) Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot1\cdot8=16-32=-16<0$.

Άρα $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-4\pm i\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm 4i}{2}=-2\pm 2i$.

(**β**) Η εξίσωση έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $5-i$ και πραγματικούς συντελεστές, άρα έχει και άλλη μία ρίζα τον συζυγή του $5-i$ δηλαδή τον $5+i$.

Είναι $\begin{array}{r} 5-i \\ +\ 5+i \\ \hline 10 \end{array}$, συνεπώς $a=-10$.

Είναι $(5-i)(5+i)=5^2-i^2=25-(-1)=26$, συνεπώς $\beta=26$.

Παρατήρηση.

Για το τριώνυμο $x^2 - Sx + P = 0$ ισχύει ότι $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

(γ) Αφού το τριώνυμο έχει ως μία του λύση (ή άλλως ρίζα) το μιγαδικό αριθμό $z_1 = 1 + i$ θα έχει ως δεύτερη λύση του το μιγαδικό αριθμό $z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+i} = 1 - i$.

Είναι

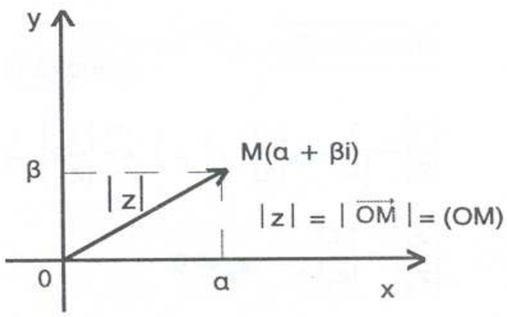
$$\left\{ \begin{array}{l} S = \dfrac{-\beta}{\alpha} = z_1 + z_2 = 1 + i + 1 - i = 2 \\ \\ P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = z_1 \cdot z_2 = (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\beta = 2\alpha \\ \\ \gamma = 2\alpha \end{array} \right\}$$

Συνεπώς

$$az^2 + \beta z + \gamma = 0 \Leftrightarrow az^2 - 2az + 2a = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0 \overset{\alpha \neq 0}{\Longleftrightarrow} z^2 - 2z + 2 = 0$$

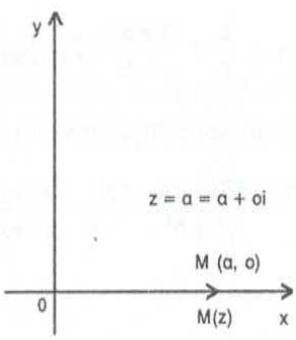
Μιγαδικό επίπεδο (ή επίπεδο Gauss). Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού.

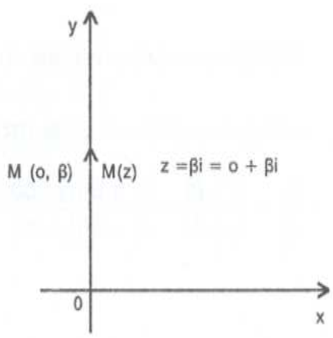
Κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσομε στο σημείο M με συντεταγμένες (a, β) του καρτεσιανού επιπέδου. Αντιστρόφως, το κάθε σημείο $M(a, \beta)$ του καρτεσιανού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσομε στο μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Το σημείο M ονομάζεται **εικόνα** του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και συμβολίζεται ως Μ (z). Με την απεικόνιση αυτή:



• Ο μιγαδικός αριθμός $z = 0$ απεικονίζεται στην αρχή O του ορθοκανονικού συστήματος των αξόνων.

• Οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $z = a + 0i$, απεικονίζονται στον οριζόντιο άξονα xx' (άξονας των πραγματικών αριθμών).

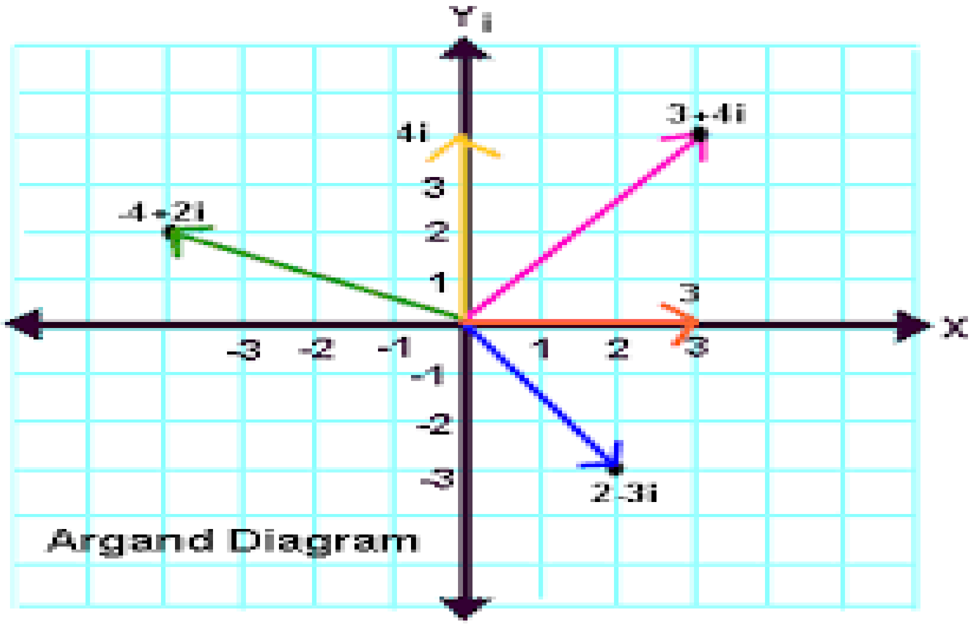


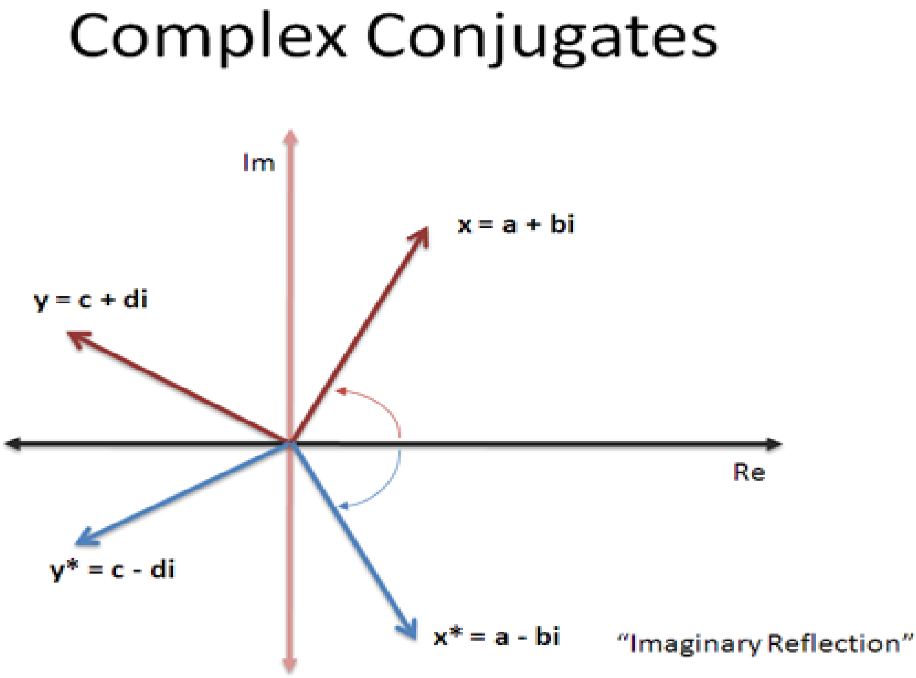


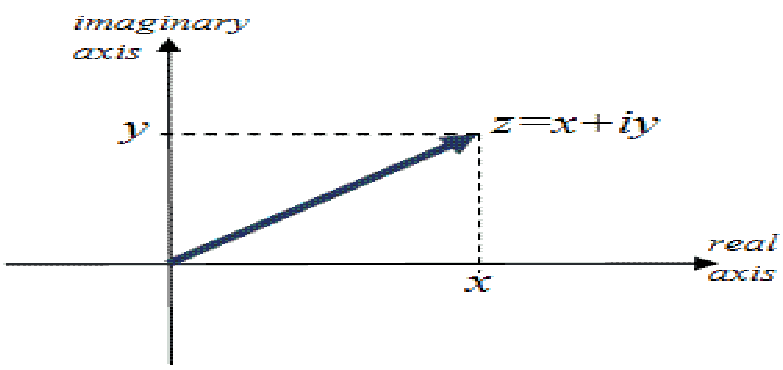
Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί απεικονίζονται στο θετικό ημιάξονα Ox και οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί απεικονίζονται στον αρνητικό ημιάξονα Ox'.

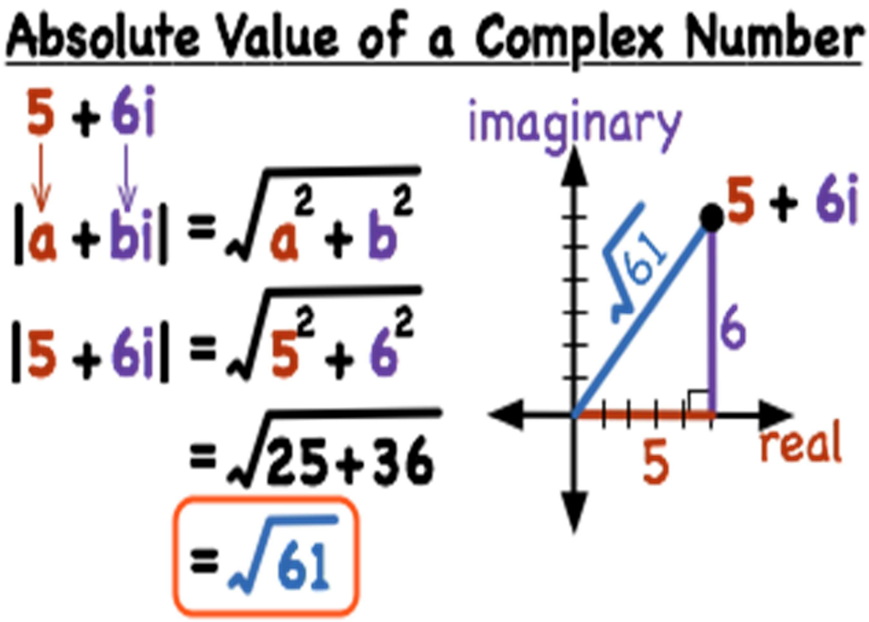
• Οι φανταστικοί αριθμοί, δηλαδή οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $z = 0 + \beta i$, απεικονίζονται στον κατακόρυφο άξονα yy' (άξονας των φανταστικών αριθμών). Οι έχοντες $\beta > 0$ απεικονίζονται στο θετικό ημιάξονα Oy και οι έχοντες $\beta < 0$ απεικονίζονται στον αρνητικό ημιάξονα Oy'.

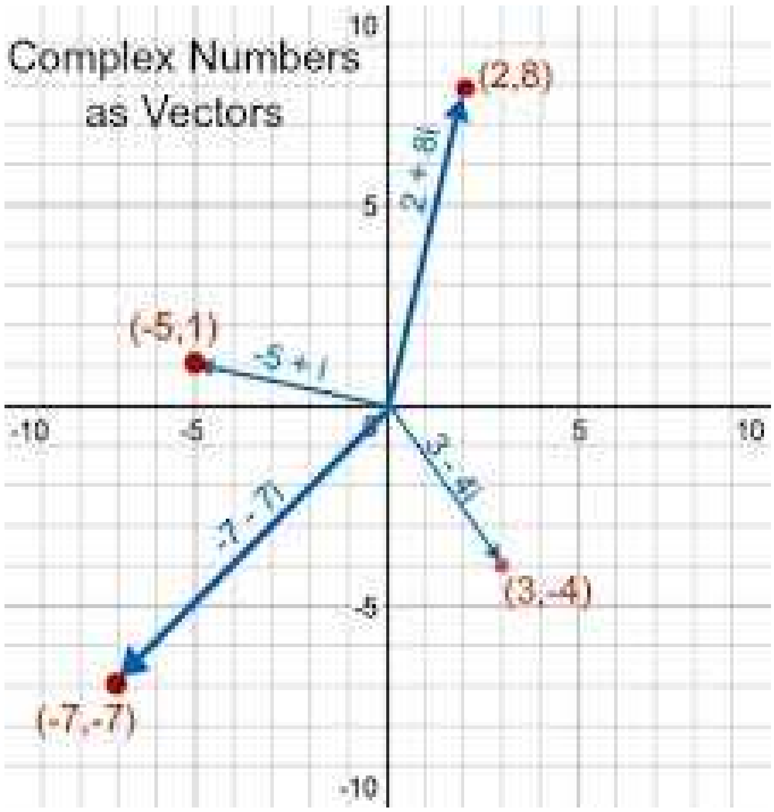
• Οι αντίθετοι μιγαδικοί αριθμοί απεικονίζονται, στο μιγαδικό επίπεδο, σε σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

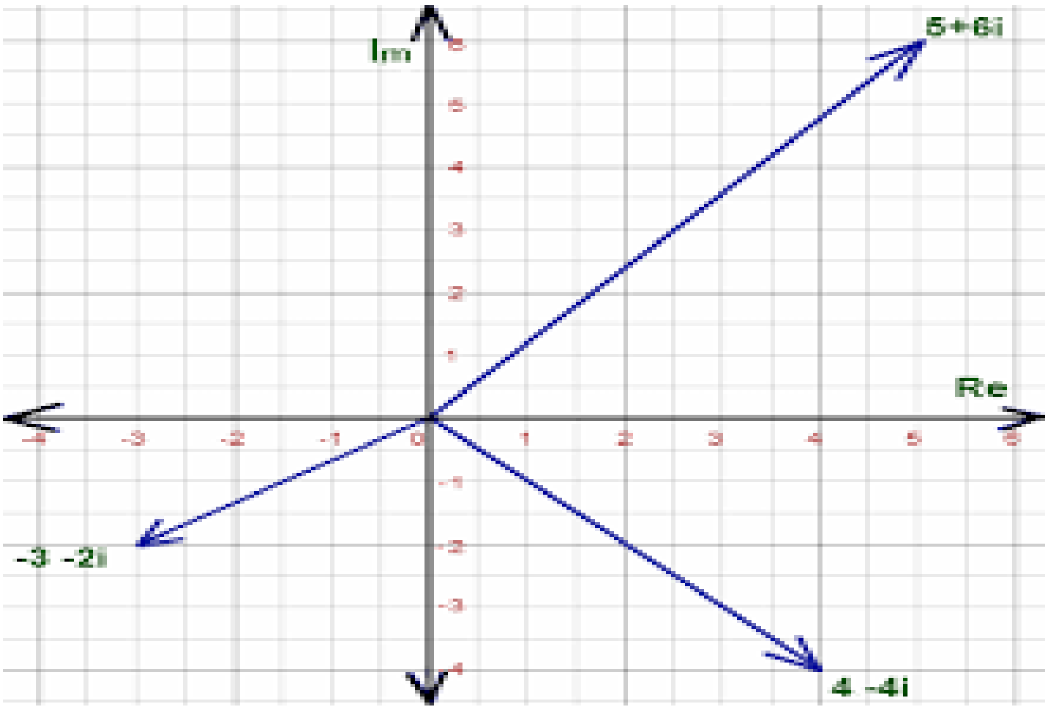







Absolute Value of a Complex Number
5 + 6i
|a + bi| = √(a² + b²)
|5 + 6i| = √(5² + 6²)
= √(25+36)
= √61
imaginary
5 + 6i
√61
6
5
real


Complex Numbers
as Vectors
(2,8)
2 + 8i
(-5,1)
-5 + i
-7 - 7i
3 - 4i
(3,-4)
(-7,-7)
10
5
-5
-10



Ισότητα μιγαδικών αριθμών.

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $a+\beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a+\beta i$ και $z_2 = \gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι, αντίστοιχα, ίσα μεταξύ τους.

Δηλαδή $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a+\beta i = \gamma+\delta i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\gamma \\ \kappa\alpha\iota \\ \beta=\delta \end{cases}$. Οι μιγαδικοί αριθμοί δε διατάσσονται, δηλαδή δεν έχει νόημα να λέμε ότι ο μιγαδικός z_1 είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος του μιγαδικού z_2.

Ιδιότητες της ισότητος των μιγαδικών.

- Ανακλαστική, δηλαδή κάθε μιγαδικός αριθμός είναι ίσος με τον εαυτό του. $(z=z)$
- Συμμετρική, δηλαδή αν ο μιγαδικός z_1 ισούται με το μιγαδικό z_2, τότε και ο z_2 είναι ίσος με τον z_1. Άρα $(z_1=z_2 \Leftrightarrow z_2=z_1)$.
- Μεταβατική, δηλαδή αν ο μιγαδικός z_1 είναι ίσος με το μιγαδικό z_2 και ο z_2 είναι ίσος με τον z_3, τότε και ο z_1 είναι ίσος με το μιγαδικό z_3. Άρα $\left.\begin{matrix} z_1=z_2 \\ \kappa\alpha\iota \\ z_2=z_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1=z_3$

Εφαρμογή.

Να λυθεί η εξίσωση $(3+i)z+(4-2i)=(1-i)$.

Λύση.

Είναι

$$\left(3+i\right)z+\left(4-2i\right)=(1-i)\Leftrightarrow\left(3+i\right)z=(1-i)-\left(4-2i\right)$$

$$\left(3+i\right)z=-3+i\Leftrightarrow z=\frac{-3+i}{\left(3+i\right)}=\frac{\left(-3+i\right)\left(3-i\right)}{\left(3+i\right)\left(3-i\right)}$$

$$=\frac{-9+3i+3i+1}{9+1}=\frac{-8+6i}{10}=\frac{-4+3i}{5}=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$$

$2^{ος}$ τρόπος επιλύσεως.

Θέτομε $z=a+bi$ και η εξίσωση ισοδυνάμως γράφεται:

$$\left(3+i\right)\left(a+bi\right)+\left(4-2i\right)=\left(1-i\right)\Leftrightarrow$$

$$3a+3bi+ai-b=-3+i\Leftrightarrow$$

$$(3a-b)+(3b+a)i=-3+i\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}3a-b&=-3\\3b+a&=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}a&=-\frac{4}{5}\\b&=\frac{3}{5}\end{aligned}\right..$$

Άρα $z=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$.

Εφαρμογή.

(**α**) Να γραφεί στη μορφή $a+bi$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$ ο μιγαδικός αριθμός $\frac{1+2i}{3+7i}$.

(**β**) Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z_1=\frac{2+i}{1-3i}$.

(**γ**) Βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών $z=\left(1+i\right)^2$, $w=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$, $u=-1+i$ και $v=\left(1-2i\right)^2+\left(2+5i\right)$.

Λύση.

(**α**) Είναι $\frac{1+2i}{3+7i}=\frac{(1+2i)\cdot(3-7i)}{(3+7i)\cdot(3-7i)}=\frac{(3+14)+(6-7)i}{9+49}=\frac{17-i}{58}=\frac{17}{58}-\frac{1}{58}i$.

(**β**) Είναι $z_1=\frac{2+i}{1-3i}=\frac{\left(2+i\right)\left(1+3i\right)}{\left(1-3i\right)\left(1+3i\right)}=\frac{2+6i+i-3}{1^2-9i^2}=\frac{-1+7i}{10}=-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i$.

Άρα $|z_1|=\sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{49}{100}}=\sqrt{\frac{5\cancel{0}}{10\cancel{0}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(**γ**) Είναι $|z|=\left|(1+i)^2\right|=\left|(1+i)\right|^2=\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$.

Είναι $|w|=\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3\right|=\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\right|^3=\frac{|1-i|^3}{|1+i|^3}=\left(\frac{|1-i|}{|1+i|}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3=1^3=1$.

Είναι $|u|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Είναι $v=(1-2i)^2+(2+5i)=1^2+4i^2-2\cdot1\cdot2i+2+5i=1-4-4i+2+5i=-1+i=u$

Συνεπώς $|v|=|u|=\sqrt{2}$.

Παρατηρήσεις.

1. Επειδή $0=0+0i$ ισχύει ότι $a+\beta i=0\Leftrightarrow\alpha=0$ και $\beta=0$.

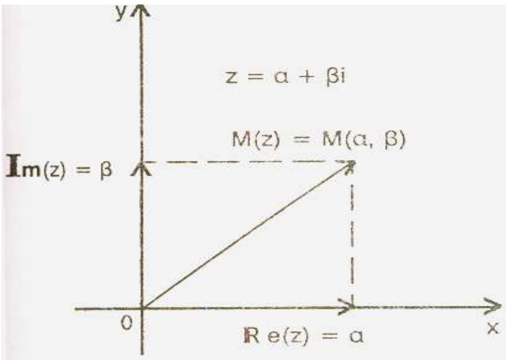
Απόδειξη.

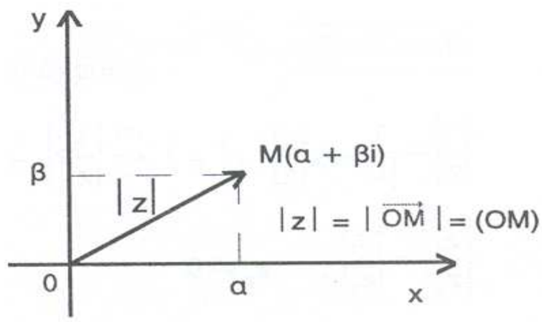
$a+\beta i=0\Leftrightarrow\alpha=-\beta i\Leftrightarrow\alpha^2=(-\beta i)^2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$.

Το αντίστροφο είναι προφανές.

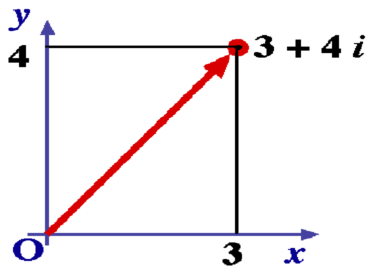
Μέτρο μιγαδικού αριθμού.

Μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+\beta i$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ο οποίος είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων της εικόνας του z, δηλαδή του σημείου M.





Εφαρμογή. Αν $z=3+4i$ τότε $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$



Εκ του ορισμού προκύπτουν ότι:

- $z=0\Leftrightarrow|z|=0$.

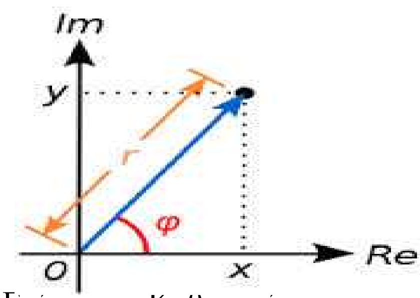
- Το μέτρο ενός πραγματικού αριθμού είναι η απόλυτη τιμή του.

Αν $z_1=5\Rightarrow|z_1|=5$.   Αν $z_1=-4\Rightarrow|z_1|=4$.

- Το μέτρο ενός φανταστικού αριθμού ai , με $a\in\mathbb{R}$ είναι $|a|$.

Αν $z_1=5i\Rightarrow|z_1|=5$. Αν $z_1=-4i\Rightarrow|z_1|=4$

- Ισχύει $|z|=r>0$ αν και μόνο αν η εικόνα του z , δηλαδή το σημείο M ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=r^2$.



• Η $|z|^2 = z^2$ ισχύει μόνο για τους πραγματικούς αριθμούς. Πράγματι, αν $z = 3+4i$, τότε $|z| = 5$, συνεπώς $|z|^2 = 25$. Επίσης $z^2 = z \cdot z = (3+4i)(3+4i) = -7+24i$.

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $\forall z \in \mathbb{C}$ $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$.

• $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

• $\forall z \in \mathbb{C}$ και $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $|z^\nu| = |z|^\nu$.

• $\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C}^*$ ισχύει ότι $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

• $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ισχύει ότι $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, δηλαδή $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

• $\forall z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\left\|z\right\| = |z|$.

Εφαρμογή.

Γράψτε στη μορφή $\alpha + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$, τους μιγαδικούς αριθμούς $(1-2i)^3$, $(2+i)^{-1}$.

Λύση.

Είναι

$$(1-2i)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2 \cdot 2i + 3\cdot 1\cdot (2i)^2 - (2i)^3 = 1 - 6i - 12 + 8i = -11 + 2i$$

και

$$(2+i)^{-1} = \frac{1}{2+i} = \frac{1\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Παρατήρηση.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$.

Είναι $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{|z|^2} - \dfrac{b}{|z|^2}i = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$.

Εφαρμογή.

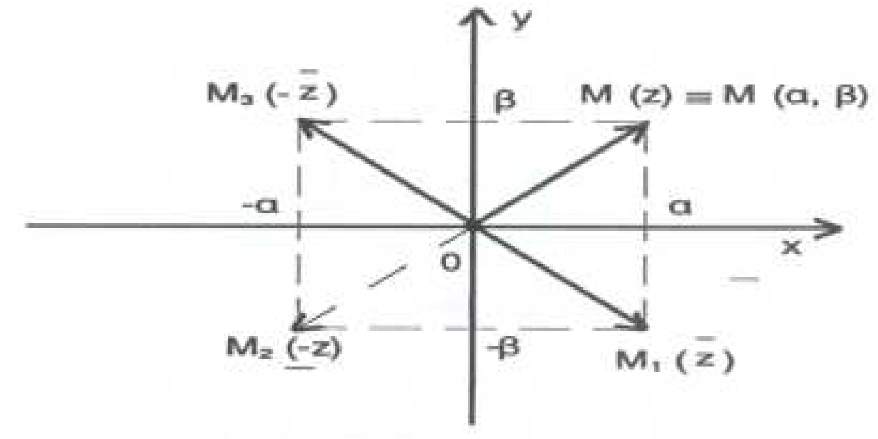
$$\text{Αν } z = 2+i \text{ είναι } z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2+i} = \frac{2}{2^2+1^2} - \frac{1}{2^2+1^2}i = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Παρατηρήσεις.

1. Είναι $|z| = |-z|$.

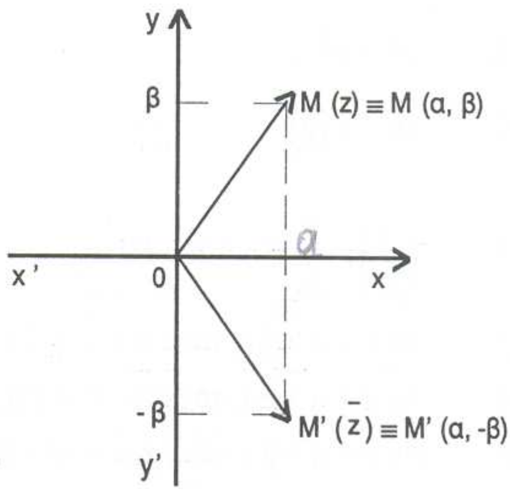
Απόδειξη.

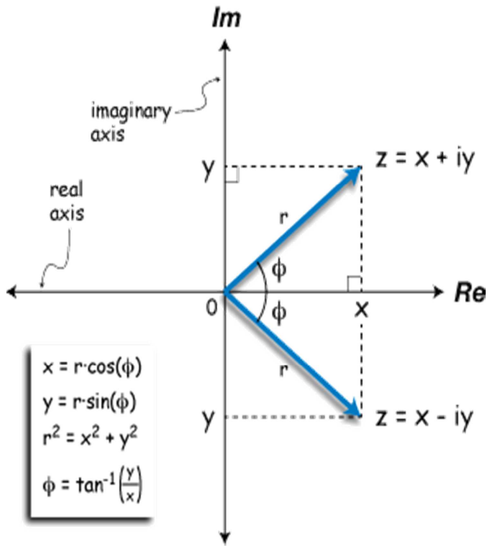
Έστω $z = a + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Εξ΄ ορισμού είναι $|z| = \sqrt{a^2+\beta^2}$. Επίσης είναι $-z = -a - \beta i$, άρα $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{a^2+\beta^2} = |z|$. Δύο αντίθετοι μιγαδικοί αριθμοί απεικονίζονται σε σημεία με αντίθετες συντεταγμένες, άρα σε σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων δηλαδή το σημείο $\mathrm{O}(0,\ 0)$.

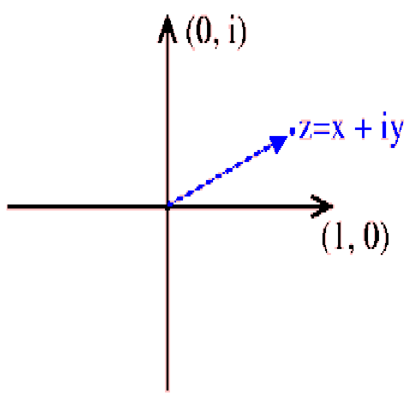


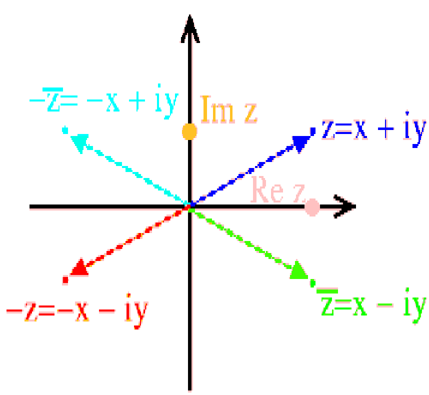
2. Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Ιδιότητες τους.

Ονομάζεται συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = a + \beta i$ και συμβολίζεται ως $\bar{z}$, ο μιγαδικός $a - \beta i$. Δηλαδή $\overline{\alpha + \beta i} = \alpha - \beta i$. Δύο συζυγείς μιγαδικοί απεικονίζονται σε σημεία με την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες, άρα σε σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα xx'.









Παράδειγμα.

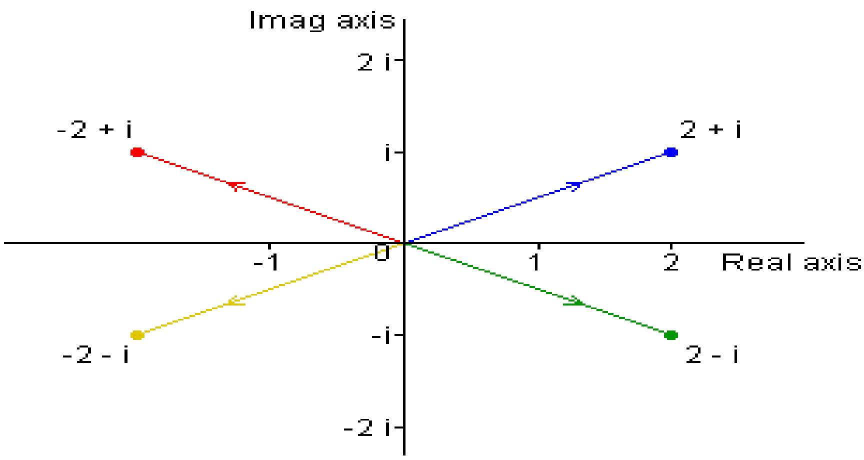
z	$\overline{z}$
$3+4i$	$3-4i$
$-3+4i$	$-3-4i$
$3-4i$	$3+4i$
$-3-4i$	$-3+4i$
5	5
2i	-2i

Εφαρμογή.

Αν $z=2+i$, να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι $z,\ -z,\ \overline{z},\ \overline{-z}$.

Λύση.

Είναι $z=2+i$, $-z=-2-i$, $\overline{z}=2-i$, $\overline{-z}=-2+i$.



Εφαρμογή.

Να βρεθούν $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε οι μιγαδικοί αριθμοί

(**α**) $z_1=(x+2y)-i$ και $z_2=16-(4x-y)i$ να είναι ίσοι μεταξύ τους,

(**β**) $z_1=(x+2y)+i$ και $z_2=16-(4x-y)i$ να είναι συζυγείς.

Λύση.

(**α**) Πρέπει

$$\begin{Bmatrix} x+2y=16 \\ -1=-(4x-y) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+2y=16 \\ 1=4x-y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+2(4x-1)=16 \\ y=4x-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 9x=18 \\ y=4x-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2 \\ y=7 \end{Bmatrix}$$

(**β**) Πρέπει

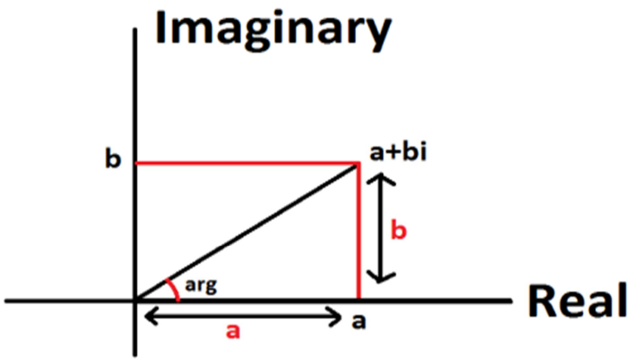
$$\begin{Bmatrix} x+2y=16 \\ 1=4x-y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+2y=16 \\ 4x-1=y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+2(4x-1)=16 \\ y=4x-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 9x=18 \\ y=4x-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2 \\ y=7 \end{Bmatrix}.$$

Άρα $z_1=(2+14)+i=16+i$ και $z_2=16-(8-7)i=16-i$.

Εφαρμογή.

(**α**) Να παρασταθεί γεωμετρικά, στο μιγαδικό επίπεδο, η παρακάτω αφαίρεση των μιγαδικών αριθμών $(3+2i)-(1+3i)$.

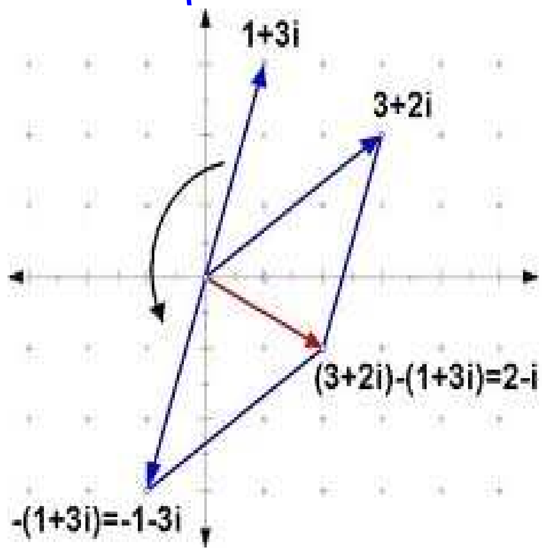
(**β**) Να εκφρασθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού $z=a+bi$, συναρτήσει του z.



(**γ**) Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο, οι μιγαδικοί αριθμοί $z=2+i$, $2z$, $-3z$.

Λύση.

(**α**) Είναι $(3+2i)-(1+3i)=2-i$.

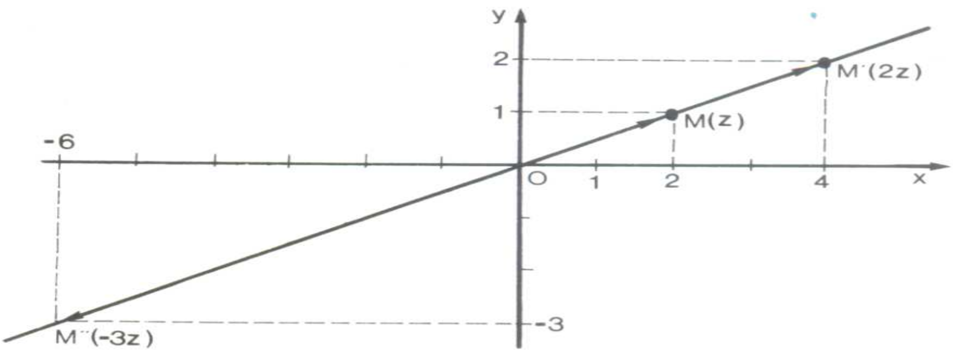


(**β**)

Είναι $\left.\begin{aligned} z&=a+bi \\ \bar{z}&=a-bi \end{aligned}\right\} \Rightarrow z+\bar{z}=2a \Rightarrow a=\operatorname{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$.

Επίσης $\left.\begin{aligned} z&=a+bi \\ -\bar{z}&=-a+bi \end{aligned}\right\} \Rightarrow z-\bar{z}=2bi \Rightarrow b=\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

(**γ**)



3. Από τον ορισμό προκύπτει ότι $\overline{\left(\overline{z}\right)}=z$, δηλαδή ο συζυγής του συζυγούς είναι ο αρχικός μιγαδικός. Είναι: $z+\overline{z}=2\alpha$, $z-\overline{z}=2\beta i$, $z\cdot\overline{z}=\alpha^2+\beta^2=|z|^2$.

Απόδειξη.

Πράγματι, αν $\left.\begin{cases} z=\alpha+\beta i \\ \kappa\alpha\iota \\ \overline{z}=\alpha-\beta i \end{cases}\right\} \Rightarrow z+\overline{z}=\left(\alpha+\beta i\right)+\left(\alpha-\beta i\right)=2\alpha$.

Επίσης, αν $\left.\begin{cases} z=\alpha+\beta i \\ \kappa\alpha\iota \\ \overline{z}=\alpha-\beta i \end{cases}\right\} \Rightarrow z-\overline{z}=\left(\alpha+\beta i\right)-(\alpha-\beta i)=2\beta i$.

Είναι $z\cdot\overline{z}=\left(\alpha+\beta i\right)\cdot\left(\alpha-\beta i\right)=\alpha^2-\alpha\beta i+\alpha\beta i-\beta^2 i^2=\alpha^2-\beta^2 i^2=\alpha^2+\beta^2$.

4. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός. Τα αντίστροφα των προτάσεων αυτών δεν ισχύουν.

Πράγματι αν $\left.\begin{cases} z_1=3+4i \\ \kappa\alpha\iota \\ z_2=5-4i \end{cases}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=8\in\mathbb{R}$, αλλά $\overline{z_1}\neq z_2$.

Επίσης αν $\left.\begin{cases} z_1=3i \\ \kappa\alpha\iota \\ z_2=4i \end{cases}\right\} \Rightarrow z_1\cdot z_2=3i\cdot 4i=12i^2=-12\in\mathbb{R}$, αλλά $\overline{z_1}\neq z_2$.

5. Αν $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$.

Απόδειξη.

Αν $z\in\mathbb{R}$ τότε είναι $z=\alpha+\beta i=\alpha+0i=\alpha$ και $\overline{z}=\alpha$. Άρα $z=\overline{z}$.

Αν $z=\overline{z}$ τότε $\cancel{\alpha}+\beta i=\cancel{\alpha}-\beta i\Leftrightarrow\beta i=-\beta i\Leftrightarrow\beta=-\beta\Leftrightarrow 2\beta=0\Leftrightarrow\beta=0$.

Άρα $z=\alpha+\beta i=\alpha+0i=\alpha$.

6. Αν $z\in I\Leftrightarrow z=-\overline{z}$ όπου I το σύνολο των φανταστικών αριθμών.

Απόδειξη.

Αν $z\in I$, τότε $z=\alpha+\beta i=0+\beta i=\beta i$. Επίσης $\overline{z}=-\beta i=-\left(\beta\ i\right)=-z$.

Αν $z=-\overline{z}$, τότε $z+\overline{z}=0\Leftrightarrow\left(\alpha+\beta i\right)+\left(\alpha-\beta i\right)=0\Leftrightarrow 2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$ Άρα $z=\beta i$ δηλαδή $z\in I$.

7. $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$.

Απόδειξη.

Έστω $z=a+\beta i$, τότε $|z|=\sqrt{a^2+\beta^2}$.

Επίσης $\overline{z}=\alpha-\beta i$ και $|\overline{z}|=\sqrt{a^2+(-\beta)^2}=\sqrt{a^2+\beta^2}$. Άρα $|z|=|\overline{z}|$.

Επίσης $-\overline{z}=-\alpha+\beta i$ και $|-\overline{z}|=\sqrt{(-a)^2+\beta^2}=\sqrt{a^2+\beta^2}=|z|$.

8. $\forall z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Απόδειξη.

Έστω $z = a + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Εξ ΄ ορισμού είναι $|z| = \sqrt{a^2 + \beta^2}$, άρα $|z|^2 = a^2 + \beta^2$.
Επίσης είναι $\bar{z} = \alpha - \beta i$ και $z \cdot \bar{z} = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$. Συνεπώς $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

9. $\forall z \in \mathbb{C}$ με $z = a + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\overline{(-z)} = -\bar{z}$.

10. Αν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ και $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ τότε $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Δηλαδή ο συζυγής του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών, ισούται με το άθροισμα των συζυγών τους.

Απόδειξη

$\overline{z_1 + z_2} =$
$\overline{(a_1 + a_2) + (\beta_1 + \beta_2)i} = (a_1 + a_2) - (\beta_1 + \beta_2)i = (\alpha_1 - \beta_1 i) + (\alpha_2 - \beta_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

11. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι για $\nu \geq 2$ $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_\nu}$.

12. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$. Δηλαδή ο συζυγής της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με τη διαφορά των συζυγών τους.

13. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Δηλαδή ο συζυγής του γινομένου δυο μιγαδικών αριθμών, ισούται με το γινόμενο των συζυγών τους.

14. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι για $\nu \geq 2$ ισχύει ότι $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot ... \cdot \overline{z_\nu}$.

15. $\forall z_1 \in \mathbb{C}$, $\forall z_2 \in \mathbb{C}^*$ ισχύει ότι $\overline{z_1 : z_2} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. Δηλαδή ο συζυγής του πηλίκου δυο μιγαδικών αριθμών, ισούται με το πηλίκο των συζυγών τους.

16. Από την ανωτέρω ιδιότητα για $z_1 = 1$ και για $z_2 = z \neq 0$ προκύπτει ότι $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

Δηλαδή, ο συζυγής που έχει ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού, ισούται με τον αντίστροφο του συζυγούς του.

17. $\forall z \in \mathbb{C}$ και $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$.

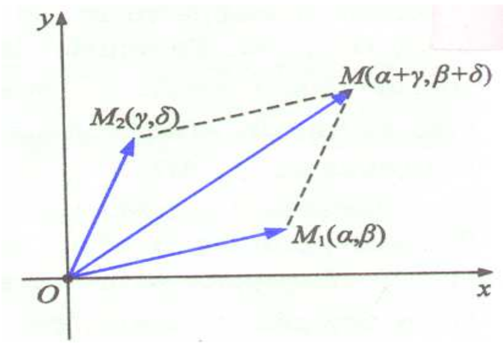
Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών.

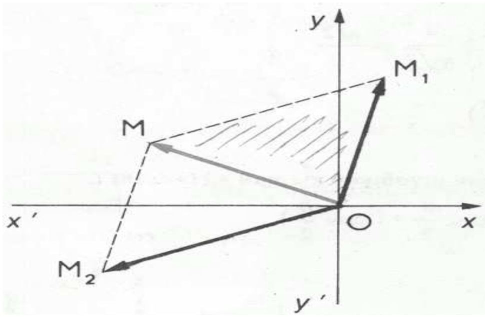
Έστω $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί. Η πρόσθεση τους ορίζεται ως $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$. Δηλαδή εκτελούμε πρόσθεση των πραγματικών και των φανταστικών μερών, αντίστοιχα.

Παράδειγμα $(1 + 2i) + (3 + 7i) = 4 + 9i$.

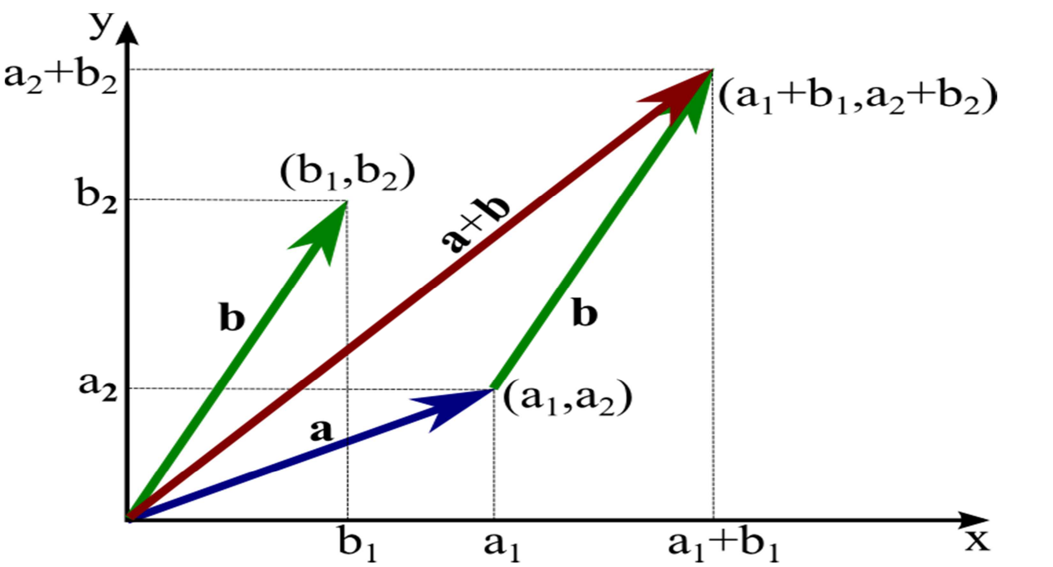
Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος μιγαδικών αριθμών.

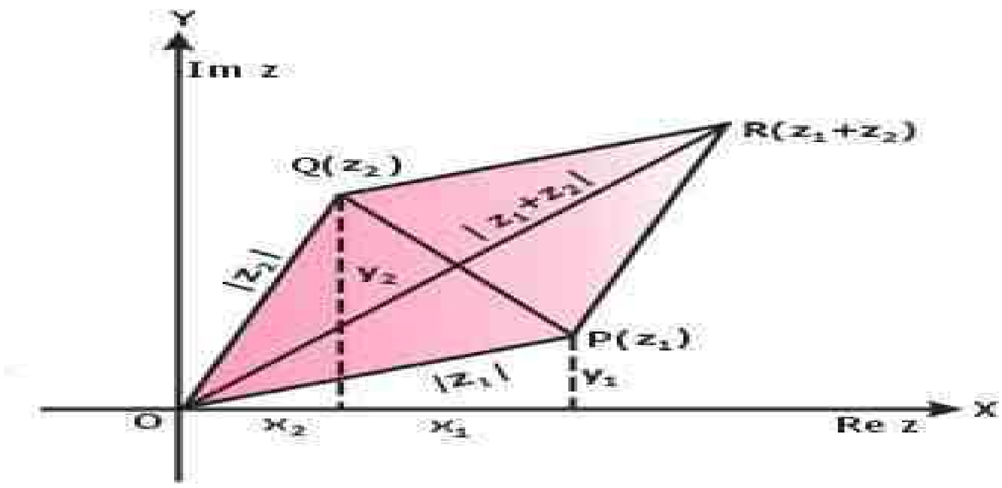
Έστω ότι η εικόνα του μιγαδικού $\alpha+\beta i$ στο επίπεδο, είναι το σημείο $\mathrm{M}_1(\alpha,\,\beta)$ και ότι η εικόνα του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ στο επίπεδο είναι το σημείο $\mathrm{M}_2(\gamma,\,\delta)$. Τότε εικόνα του αθροίσματος τους $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ στο επίπεδο, είναι το σημείο $\mathrm{M}(\alpha+\gamma,\,\beta+\delta)$.

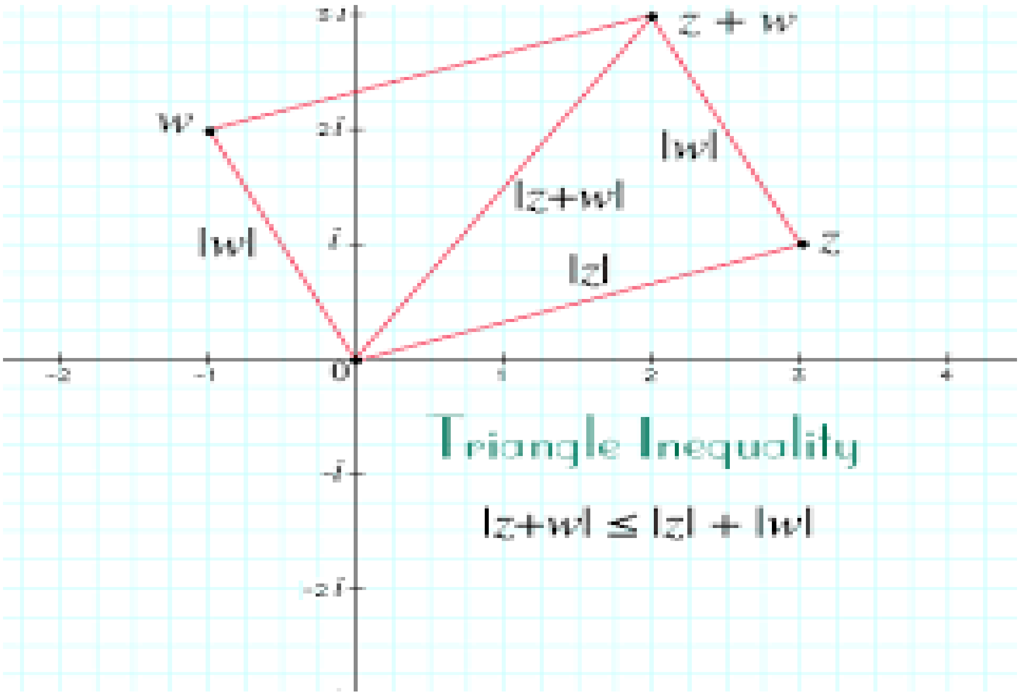




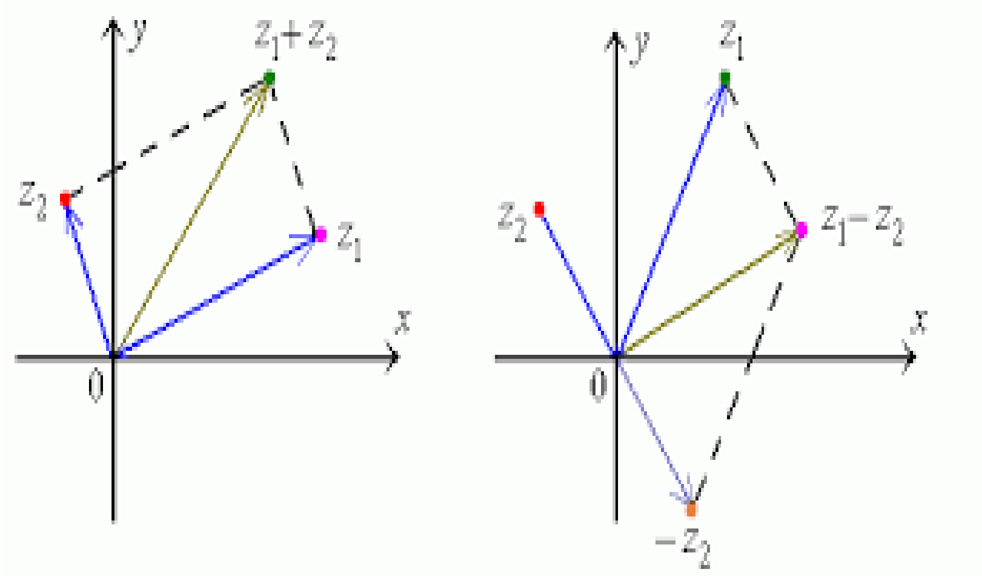
Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $a+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους. Δηλαδή $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.



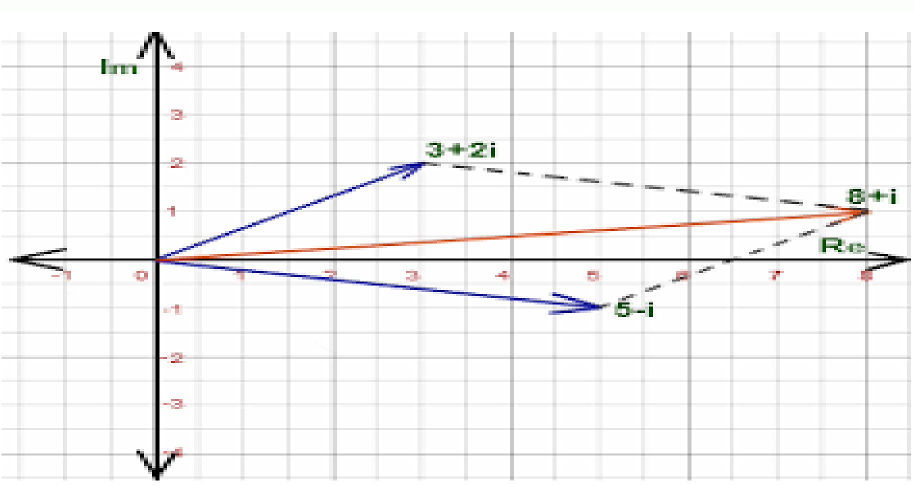




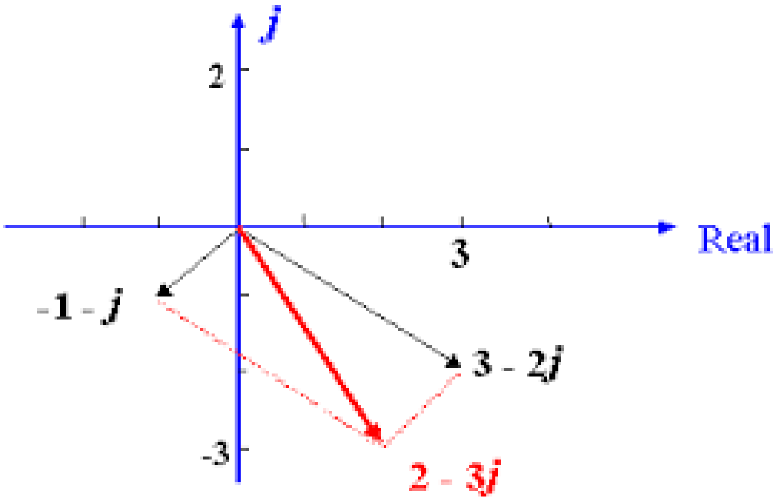
z + w
w
|w|
|z+w|
|w|
z
|z|
Triangle Inequality
|z+w| ≤ |z| + |w|



y
z_1+z_2
z_2
z_1
x
0
y
z_1
z_2
z_1-z_2
x
0
$-z_2$



Im
3+2i
8+i
Re
5-i



Ιδιότητες της προσθέσεως μιγαδικών αριθμών.

• Αντιμεταθετική. $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

• Προσεταιριστική. $\forall\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\left(z_1 + z_2\right) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right)$.

• Ουδέτερο στοιχείο $\forall z \in \mathbb{C}$, υπάρχει $z' \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε να ισχύει $z + z' = z' + z = z$.
Το z΄ είναι το μηδενικό στοιχείο της προσθέσεως και έχει τη μορφή $0 + 0i$.
Αποδεικνύεται ότι το μηδενικό στοιχείο της προσθέσεως είναι μοναδικό.

• Συμμετρικό (αντίθετο) στοιχείο.
$\forall z \in \mathbb{C}$ υπάρχει $z' \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε να ισχύει $z + z' = z' + z = 0$. Το z' είναι ο αντίθετος του μιγαδικού z. Αποδεικνύεται ότι κάθε μιγαδικός αριθμός έχει έναν και μόνο έναν αντίθετο.

• Ιδιότητα της διαγραφής. $\forall z_1, z_2,\ z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι αν $z_1 = z_2$ *τότε* $z_1 + z = z_2 + z$.

• Δείξτε ότι αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με <u>πραγματικούς συντελεστές</u> $\left(\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu-1},\ ...\ , \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}\right)$ και $\alpha_\nu \neq 0$ έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό z, τότε έχει ρίζα και τον $\bar{z}$.

Πράγματι, αφού ο z είναι ρίζα της εξισώσεως, ισχύει ότι: $\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \overline{\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0} = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\overline{\alpha_\nu z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}} + ... + \overline{\alpha_1 z} + \overline{\alpha_0} = 0 \Leftrightarrow \overline{\alpha_\nu}\,\overline{z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1}}\,\overline{z^{\nu-1}} + ... + \overline{\alpha_1}\,\overline{z} + \overline{\alpha_0} = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha_\nu \left(\bar{z}\right)^\nu + \alpha_{\nu-1} \left(\bar{z}\right)^{\nu-1} + ... + \alpha_1 \bar{z} + \alpha_0 = 0$. Άρα ο μιγαδικός $\bar{z}$ είναι ρίζα της εξισώσεως.

Αφαίρεση μιγαδικών αριθμών.

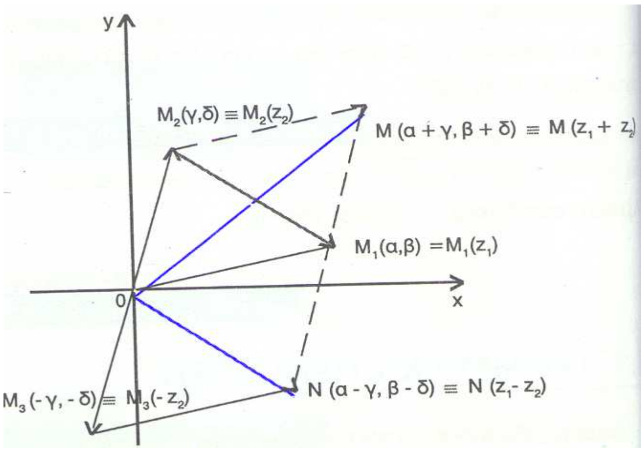
Έστω $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί. Για την αφαίρεση του $\gamma + \delta i$ από τον $a + \beta i$ εκτελούμε πρόσθεση του $a + \beta i$ με τον $-\gamma - \delta i$, ο οποίος είναι ο αντίθετος του $\gamma + \delta i$ και $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) i$.

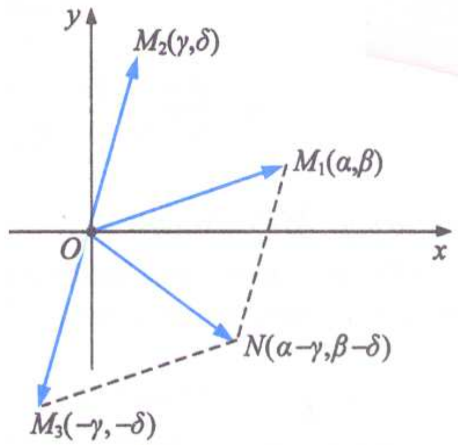
Δηλαδή εκτελούμε αφαίρεση των πραγματικών και των φανταστικών μερών, αντίστοιχα.

Παράδειγμα. $(1+2i)-(3+7i)=(1+2i)+(-3-7i)=(1-3)+(2-7)i=-2-5i$.

Γεωμετρική παράσταση της διαφοράς μιγαδικών

Έστω ότι η εικόνα του μιγαδικού $a+\beta i$ στο επίπεδο είναι το σημείο $\mathrm{M}_1(\alpha,\ \beta)$ και ότι η εικόνα του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ στο επίπεδο είναι το σημείο $\mathrm{M}_2(\gamma,\ \delta)$. Τότε εικόνα της διαφοράς τους στο επίπεδο είναι το σημείο $\mathrm{N}(\alpha-\gamma,\ \beta-\delta)$.



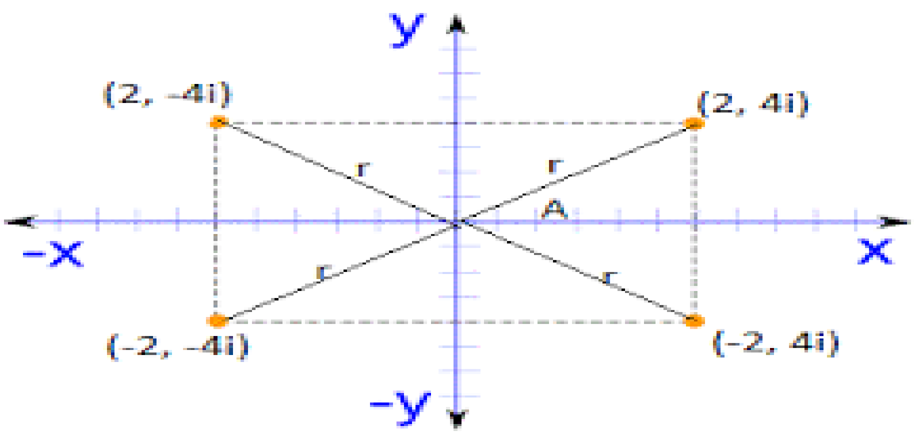


Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $a+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους. Δηλαδή $\overrightarrow{O\mathrm{N}}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$.

Από την τριγωνική ανισότητα και τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος z_1+z_2 και της διαφοράς z_1-z_2 δύο μιγαδικών, προκύπτει ότι $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

Αν αντικαταστήσομε το z_2 με το $-z_2$ η ανωτέρω σχέση γίνεται $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $|z_1+z_2+\ldots+z_\nu| \le |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_\nu|$.

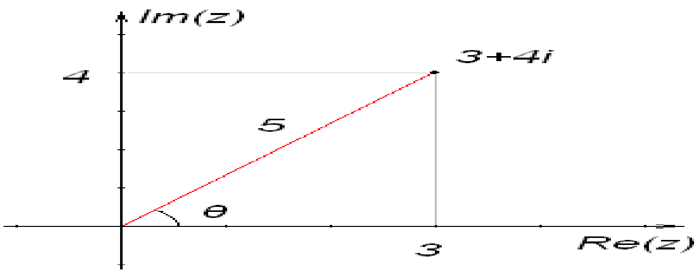


Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών.

Για τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχομε

$$(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=\alpha\cdot(\gamma+\delta i)+\beta i\cdot(\gamma+\delta i)=$$
$$\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

Παράδειγμα. $(1+2i)\cdot(3+7i)=1\cdot(3+7i)+2i\cdot(3+7i)=3+7i+6i-14=-11+13i$



Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών αριθμών.

- Αντιμεταθετική $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

- Προσεταιριστική $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

- Ουδέτερο στοιχείο $\forall z\in\mathbb{C}$, υπάρχει $z'\in\mathbb{C}$ έτσι ώστε να ισχύει $z\cdot z'=z'\cdot z=z$.

Το z' είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού και έχει τη μορφή $1+0i$. Αποδεικνύεται ότι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι μοναδικό.

- Συμμετρικό (αντίστροφο) στοιχείο. $\forall\, z\in\mathbb{C}^*, \exists\, z'\in\mathbb{C}^*: z\cdot z'=z'\cdot z=1$.

Το z' είναι ο αντίστροφος του μιγαδικού αριθμού z. Αποδεικνύεται ότι κάθε μιγαδικός αριθμός έχει έναν και μόνο έναν αντίστροφο.

- Ιδιότητα της διαγραφής $\forall\, z_1, z_2, z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι αν $z_1=z_2$ *τότε* $z_1\cdot z=z_2\cdot z$.

- Επιμεριστική ιδιότητα $\forall\, z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

- Αν $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ τότε $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Απόδειξη

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a_1+\beta_1 i)\cdot(a_2+\beta_2 i)}=\overline{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i}$$
$$=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i.$$
$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(\overline{\alpha_1+\beta_1 i})\cdot(\overline{\alpha_2+\beta_2 i})=(\alpha_1-\beta_1 i)\cdot(\alpha_2-\beta_2 i)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)i$$

Άρα $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

- Αν $z_2\neq 0$ τότε $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Απόδειξη

Θέτω $z=\dfrac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow z\cdot z_2=z_1\Leftrightarrow \overline{z\cdot z_2}=\overline{z_1}\Leftrightarrow \overline{z}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1}\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. Άρα $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Αν στην ανωτέρω σχέση θέσω $z_1 = 1,\ z_2 = z \neq 0$ τότε $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$. Άρα $\overline{\left(z^{-1}\right)} = \left(\overline{z}\right)^{-1}$.

- Επαγωγικά αποδεικνύεται για κάθε ν ≥ 2 ότι: $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_\nu}$ και $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_\nu}$.

Αν στην τελευταία ισότητα θέσομε $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu$ έχομε $\overline{\left(z^\nu\right)} = \left(\overline{z}\right)^\nu$.

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_2 \cdot \overline{z_1} \geq 0\left(\text{ή } z_1 \cdot \overline{z_2} \geq 0\right)$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_2 \cdot \overline{z_1} \leq 0\left(\text{ή } z_1 \cdot \overline{z_2} \leq 0\right)$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow z_2 \cdot \overline{z_1} \leq 0\left(\text{ή } z_1 \cdot \overline{z_2} \leq 0\right)$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow z_2 \cdot \overline{z_1} \geq 0\left(\text{ή } z_1 \cdot \overline{z_2} \geq 0\right)$

- $\forall z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $z + \overline{z} \leq 2|z|$.

Πράγματι αν $z = a + bi$ τότε $\overline{z} = a - bi$, άρα $z + \overline{z} = 2a$.
Είναι $2|z| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2} = 2|a| \geq 2a = z + \overline{z}$
Είναι $z + \overline{z} = 2|z|$ όταν $2a = 2|z| \Leftrightarrow a = |z| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow a \geq 0$ και $b = 0$.

Πηλίκο μιγαδικών αριθμών.

Προκειμένου να ορίζεται το πηλίκο $\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$ των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$, πρέπει $\gamma + \delta i \neq 0$. Για την απαλοιφή, από τον παρονομαστή, του κλάσματος της φανταστικής μονάδος, πολλαπλασιάζομε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

Έτσι έχομε $\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \dfrac{(\alpha + \beta i)\cdot(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)\cdot(\gamma - \delta i)} = \dfrac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2}$.

Εφαρμογή.

(**α**) Αν $z \neq 0$ δείξτε ότι ο αριθμός $w = \dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}$ είναι φανταστικός.

(**β**) Βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει ότι $|z - 1| = \left|z^2\right| = 1$.

(**γ**) Ποιες η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παραστάσεως $|z_1 \pm z_2|$ όταν $z_1 = 3 - 4i$ και $|z_2| = 2$;

Λύση.

(**α**) Είναι
$$\left.\begin{cases} w=\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z} \\ \\ \bar w=\overline{\left(\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z}\right)}=\overline{\left(\dfrac{z}{\bar z}\right)}-\overline{\left(\dfrac{\bar z}{z}\right)}=\dfrac{\bar z}{z}-\dfrac{z}{\bar z}=-\left(\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z}\right)=-w \end{cases}\right\} w\in I$$

(**β**) Έστω ότι $z=x+yi$

Είναι $\left|z^2\right|=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

Επίσης $|z-1|=1\Leftrightarrow|(x-1)+yi|=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2=1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=1\Leftrightarrow$

$$x^2+\cancel{1}-2x+y^2=\cancel{1}\Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0\Leftrightarrow 1-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Αφού $x=\dfrac{1}{2}$ από τη σχέση $x^2+y^2=1$ έπεται ότι $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα $z=x+yi=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

(**γ**) Από τη θεωρία γνωρίζομε ότι ισχύει η σχέση $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

Είναι $|z_1|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$.

Συνεπώς $\quad |5-2|\le|z_1\pm z_2|\le 5+2\Leftrightarrow$

$$3\le|z_1\pm z_2|\le 7$$

Εφαρμογή.

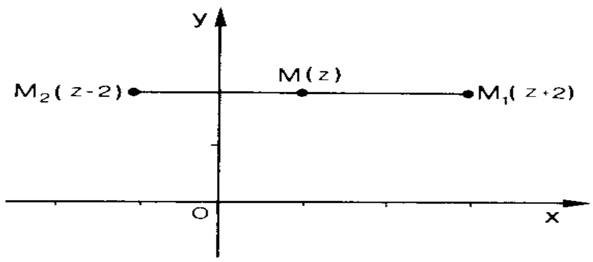
Αν $z=1+2i$ να παρασταθούν, στο μιγαδικό επίπεδο (ή επίπεδο Gauss), οι μιγαδικοί αριθμοί z, $z_1=z+2$, $z_2=z-2$, $z_3=z-i$, $z_4=z+i$.

Λύση.

Είναι $\quad z=1+2i$

$z_1=z+2=(1+2i)+2=3+2i$

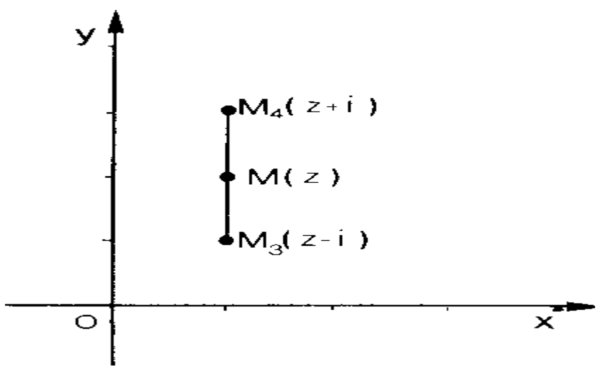
$z_2=z-2=(1+2i)-2=-1+2i$



Είναι $\quad z=1+2i$

$z_3=z-i=(1+2i)-i=1+i$

$z_4=z+i=(1+2i)+i=1+3i$.



Εφαρμογή.

(**α**) Αν το άθροισμα και το γινόμενο δυο μη πραγματικών μιγαδικών z_1, z_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι οι z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί.

(**β**) Αν ισχύει ότι $|z+i|=|z-i|$ δείξτε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση.

(**α**) Είναι $z_1=a+bi,\ b\neq 0$ και $z_2=c+di,\ d\neq 0$.

Συνεπώς
$$\begin{array}{r} z_1=a+bi \\ +\ \ z_2=c+di \\ \hline z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{r} z_1=a+bi \\ \cdot\ \ z_2=c+di \\ \hline z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{array}$$

Για να είναι $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ πρέπει $b+d=0\Leftrightarrow b=-d$.
Για να είναι $z_1\cdot z_2\in\mathbb{R}$ πρέπει $ad+bc=0\Leftrightarrow ad-dc=0\Leftrightarrow d(a-c)=0$.
Επειδή είναι $d\neq 0$ πρέπει $a-c=0\Leftrightarrow a=c$.
Συνεπώς είναι $z_1=a+bi$ και $z_2=c+di=a-bi=\overline{z_1}$.

(**β**) Αρκεί να δειχθεί ότι είναι $z=\overline{z}$

Είναι $|z+i|=|z-i|\Leftrightarrow|z+i|^2=|z-i|^2\Leftrightarrow$

$$(z+i)\left(\overline{z+i}\right)=(z-i)\left(\overline{z-i}\right)\Leftrightarrow(z+i)\left(\overline{z}-i\right)=(z-i)\left(\overline{z}+i\right)\Leftrightarrow$$
$$z\overline{z}-zi+i\overline{z}-i^2=z\overline{z}+zi-i\overline{z}-i^2\Leftrightarrow\quad -zi+i\overline{z}=zi-i\overline{z}\Leftrightarrow$$
$$-z+\overline{z}=z-\overline{z}\Leftrightarrow-2z=-2\overline{z}\Leftrightarrow\ z=\overline{z}$$

Εφαρμογή.

(**α**) Αν για τους μιγαδικούς $z_1,z_2,\dots,z_k$ ισχύει ότι $|z_1|=|z_2|=\dots=|z_k|=1$, δείξτε ότι $|z_1+z_2+\dots+z_k|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dots+\dfrac{1}{z_k}\right|$.

(**β**) Αν $z\in\mathbb{C}$, $z\neq ai$, α$\in\mathbb{R}^*$. Δείξτε ότι $w=\dfrac{z+ai}{iz+a}$ φανταστικός $\Leftrightarrow z$ φανταστικός.

Λύση.

(**α**) Από την $|z_1|=|z_2|=\dots=|z_k|=1$ προκύπτει ότι $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1},\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2},\dots,\ \overline{z_k}=\dfrac{1}{z_k}$.

Άρα $\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dots+\dfrac{1}{z_k}\right|=\left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\dots+\overline{z_k}\right|=\left|\overline{z_1+z_2+\dots+z_k}\right|=|z_1+z_2+\dots+z_k|$.

(**β**) Είναι

$$w=\frac{z+ai}{iz+a} \text{ φανταστικός } \Leftrightarrow \overline{w}=-w \Leftrightarrow \frac{\overline{z}-ai}{-i\overline{z}+a}=\frac{-(z+ai)}{iz+a} \Leftrightarrow$$

$$\left(\overline{z}-ai\right)\left(iz+a\right)=-\left(z+ai\right)\left(-i\overline{z}+a\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{zi\overline{z}}+a\overline{z}-ai^2z\cancel{-a^2i}=\cancel{zi\overline{z}}-az+ai^2\overline{z}\cancel{-a^2i} \Leftrightarrow$$

$$a\overline{z}+az=-az-a\overline{z} \overset{a\neq 0}{\Longleftrightarrow} \overline{z}+z=-z-\overline{z} \Leftrightarrow$$

$$\overline{z}+z=-z-\overline{z} \Leftrightarrow 2\overline{z}+2z=0 \Leftrightarrow \overline{z}+z=0 \Leftrightarrow z=-\overline{z}$$

Άρα ο z είναι φανταστικός αριθμός.

Εφαρμογή.

(**α**) Αν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left|z_1\right|^2+2\left|z_2\right|^2$. Πρόκειται για τη γνωστή πρόταση από την ευκλείδεια γεωμετρία, ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του.

(**β**) Δείξτε ότι $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\left|z_1\right|<1$ και $\left|z_2\right|<1$ είναι $\left|z_1-z_2\right|<\left|1-\overline{z_1}z_2\right|$.

Λύση.

(**α**) Είναι $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=\left(z_1+z_2\right)\cdot\left(\overline{z_1+z_2}\right)+\left(z_1-z_2\right)\cdot\left(\overline{z_1-z_2}\right)=$

$$\left(z_1+z_2\right)\cdot\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+\left(z_1-z_2\right)\cdot\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=$$

$$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2\left|z_1\right|^2+2\left|z_2\right|^2.$$

(**β**) $$\left|z_1-z_2\right|<\left|1-\overline{z_1}z_2\right| \Leftrightarrow \left|z_1-z_2\right|^2<\left|1-\overline{z_1}z_2\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)<\left(1-\overline{z_1}z_2\right)\left(1-z_1\overline{z_2}\right) \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z_1}-\cancel{z_1\overline{z_2}}-\cancel{z_2\overline{z_1}}+z_2\overline{z_2}<1-\cancel{z_1\overline{z_2}}-\cancel{\overline{z_1}z_2}+\overline{z_1}z_2z_1\overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}<1+\overline{z_1}z_2z_1\overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2<1+\left|z_1\right|^2\cdot\left|z_2\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-1-\left|z_1\right|^2\cdot\left|z_2\right|^2<0 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2(1-|z_2|^2)-(1-|z_2|^2)<0 \Leftrightarrow$$

$$(1-|z_2|^2)(|z_1|^2-1)<0 \qquad (1)$$

Από $|z_1|<1 \Rightarrow |z_1|^2<1 \Rightarrow |z_1|^2-1<0$ η (1) γίνεται $(1-|z_2|^2)>0 \Leftrightarrow$

$1>|z_2|^2$ ή

$|z_2|^2<1$ που ισχύει.

Εφαρμογή.

(**α**) Αν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2| \Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_2|$.

(**β**) Αν $|z|=1$, δείξτε ότι $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

(**γ**) Αν $z\neq 0$, δείξτε ότι $\overline{(z^{-1})}=(\bar{z})^{-1}$, δηλαδή $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

(**δ**) Δείξτε ότι για κάθε μιγαδικό z, ισχύει ότι $z+\bar{z}\leq 2|z|$. Εξετάστε πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση.

(**α**) Αφού $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$ η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2\ |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_2|^2+2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1-z_2|^2=3|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_2|$$

(**β**) Είναι $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

(**γ**) Είναι $z\dfrac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \overline{z\dfrac{1}{z}}=\bar{1} \Leftrightarrow \bar{z}\cdot\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=1 \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \overline{(z^{-1})}=(\bar{z})^{-1}$

(**δ**) Αν $z=a+bi$, τότε $\bar{z}=a-bi$, άρα $z+\bar{z}=2a$.

Επίσης είναι $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Συνεπώς $2|z|=2\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{a^2}=2|a|\geq 2a=z+\bar{z}$.

Η ισότητα $z+\bar{z}=2|z|$ ισχύει όταν $2a=2|z|$, δηλαδή $a=|z|$ άρα $Re(z)=|z|$.

Συνεπώς η ισότητα $z+\bar{z}=2|z|$ ισχύει όταν $a\geq 0$ και $b=0$.

Εφαρμογή.

(α) Αν $z=\dfrac{2i}{1-i}$ δείξτε ότι $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=0$.

(β) Βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\alpha+\beta i=(1+i)^{10}$.

(γ) Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ υπάρχουν μοναδικοί $a,b\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $z=a+bi$.

Λύση.

(α) Είναι $z=\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{1^2-i^2}=\dfrac{2i-2}{2}=-1+i$.

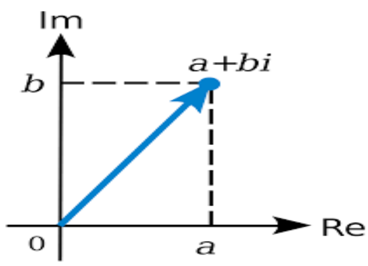
Άρα $\mathrm{z}^2=(-1+i)^2=\cancel{1}-\cancel{1}-2i=-2i=0-2i$. Συνεπώς $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=0$.

(β) Είναι $(1+i)^{10}=\left[(1+i)^2\right]^5=\left(\cancel{1}+\cancel{i^2}+2i\right)^5=(2\cdot i)^5=2^5\cdot i^5=32\cdot i^4\cdot i=32i$.

Άρα $\alpha=0$ και $\beta=32$.

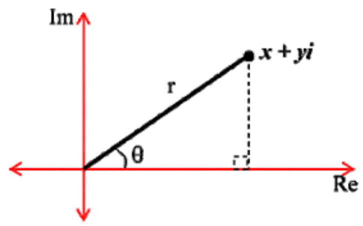
(γ) Αν η γραφή του (a,b) ως $a+bi$ δεν είναι μοναδική αλλά το (a,b) γράφεται και ως $a'+b'i$, τότε

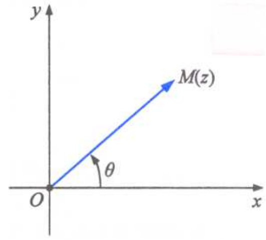
$$a+bi=a'+b'i\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\ b=b'\end{cases}$$



Τριγωνομετρική (ή πολική) μορφή μιγαδικού αριθμού.

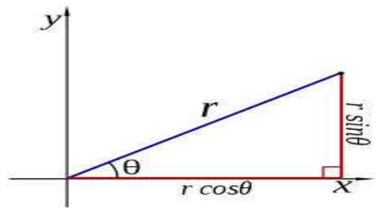
Έστω $z = x + yi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός και $\overrightarrow{OM}$ η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα του. Ονομάζομε **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού z κάθε μια από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z είναι $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.





Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot cos\theta \\ sin\theta = \dfrac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot sin\theta \end{cases}$$



Άρα ο $z = x + yi$ γράφεται και ως: $z = r \cdot cos\theta + r \cdot sin\theta \cdot i = r \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$.

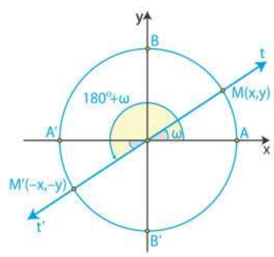
Αυτός ο τρόπος γραφής του μιγαδικού αριθμού λέγεται **τριγωνομετρική** (ή **πολική**) **μορφή** του z. Αντιστρόφως, έστω $z = \lambda(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$. Τότε αν $\lambda > 0$ το δεύτερο μέλος της ανωτέρω σχέσεως είναι η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z, δηλαδή λ είναι το μέτρο και φ είναι το όρισμα του z.

Πράγματι $|z|^2 = \lambda^2 (cos^2\varphi + sin^2\varphi)$ και επειδή $\lambda > 0$ είναι $|z| = \lambda$. Επίσης αν θ είναι ένα όρισμα του z θα ισχύει ότι $z = \lambda \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$.

Άρα, πρέπει $\left.\begin{cases} cos\theta = cos\varphi \\ sin\theta = sin\varphi \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{Z}\text{: } \varphi = \theta + 2k\pi$

Συνεπώς ο θ είναι ένα όρισμα του z.

Παρατηρήσεις.



- Αν $\lambda < 0$ ο μιγαδικός $z = \lambda(cos\theta + i \cdot sin\theta)$ γράφεται ως $z = -\lambda(-cos\theta - i \cdot sin\theta) = -\lambda\left[cos(\pi + \theta) + i \cdot sin(\pi + \theta)\right]$

Άρα ο z έχει μέτρο $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι ο $(\pi + \theta)$

Π.χ. $z = -5(cos30^0 + i \cdot sin30^0) = 5(-cos30^0 - i \cdot sin30^0) = 5(cos210^0 + i \cdot sin210^0)$

- Ένας μιγαδικός z έχει μέτρο 1 αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $z = cos\theta + i \cdot sin\theta$.

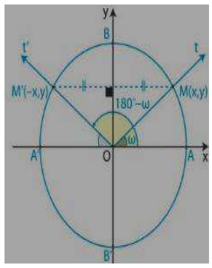
Π.χ. $1 = 1(cos0^0 + i \cdot sin0^0) = cos0^0 + i \cdot sin0^0 = 1 + 0i$

$-1 = 1(cos\pi + i \cdot sin\pi) = cos\pi + i \cdot sin\pi = -1 + 0i$

$$i = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + i\cdot sin\frac{\pi}{2}\right) = cos\frac{\pi}{2} + i\cdot sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1i$$

$$-i = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot sin\frac{3\pi}{2}\right) = cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot sin\frac{3\pi}{2} = cos\frac{-\pi}{2} + i\cdot sin\frac{-\pi}{2} = 0 - 1i$$

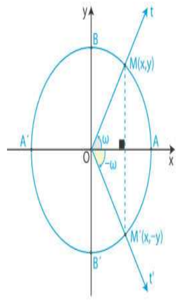
- Αν $\lambda > 0$ ο μιγαδικός $z = \lambda(-cos\theta + i\cdot sin\theta)$ γράφεται ως $z = \lambda\left[cos(\pi - \theta) + i\cdot sin(\pi - \theta)\right]$.



Δηλαδή ο z έχει μέτρο το λ και ένα όρισμα του είναι ο $(\pi - \theta)$.

Π.χ. $z = 5\left(-cos30^0 + i\cdot sin30^0\right) = 5\left(cos150^0 + i\cdot sin150^0\right)$

- Αν $\lambda < 0$ ο μιγαδικός $z = \lambda(-cos\theta + i\cdot sin\theta)$ γράφεται ως $z = \lambda(-cos\theta + i\cdot sin\theta) = -\lambda(cos\theta - i\cdot sin\theta) = -\lambda\left[cos(-\theta) + i\cdot sin(-\theta)\right]$

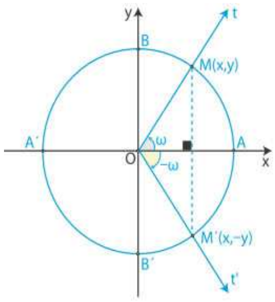


Δηλαδή ο z έχει μέτρο το $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι ο $-\theta$.

Π.χ. $z = -5\left(-cos30^0 + i\cdot sin30^0\right) = 5\left(cos30^0 - i\cdot sin30^0\right) =$
$5\left[cos\left(-30^0\right) + i\cdot sin\left(-30^0\right)\right]$

- Αν $\lambda > 0$ ο μιγαδικός $z = \lambda(cos\theta - i\cdot sin\theta)$ γράφεται ως

$$z = \lambda(cos\theta - i\cdot sin\theta) = \lambda\left[cos(-\theta) + i\cdot sin(-\theta)\right].$$

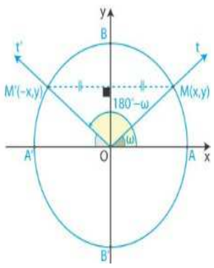


Δηλαδή ο z έχει μέτρο το λ και ένα όρισμα του είναι ο $-\theta$.

Π.χ. $z = 5\left(cos30^0 - i\cdot sin30^0\right) = 5\left[cos\left(-30^0\right) + i\cdot sin\left(-30^0\right)\right]$

- Αν $\lambda < 0$, ο μιγαδικός $z = \lambda(cos\theta - i\cdot sin\theta)$ γράφεται ως

$$z = -\lambda(-cos\theta + i\cdot sin\theta) = -\lambda\left[-cos(\pi - \theta) + i\cdot sin(\pi - \theta)\right].$$

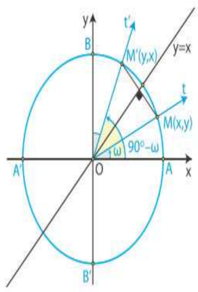


Δηλαδή ο z έχει μέτρο το $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι ο $(\pi - \theta)$.

Π.χ. $z = -5\left(cos30^0 - i\cdot sin30^0\right) = 5\left(-cos30^0 + i\cdot sin30^0\right) =$
$5\left(cos150^0 + i\cdot sin150^0\right)$

- Αν $\lambda > 0$ ο μιγαδικός $z = \lambda(sin\theta + i\cdot cos\theta)$ γράφεται ως:

$$z = \lambda(sin\theta + i\cdot cos\theta) = \lambda\left[cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right].$$



Δηλαδή ο z έχει μέτρο το λ και ένα όρισμα του είναι ο $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

Π.χ. $z = 5\left(sin30^0 + i\cdot cos30^0\right) = 5\left(cos60^0 + i\cdot sin60^0\right)$

• Αν $\lambda<0$, ο μιγαδικός $z=\lambda(sin\theta+i\cdot cos\theta)$ γράφεται ως εξής:

$$z=-\lambda(-sin\theta-i\cdot cos\theta)=-\lambda\left[sin(\pi+\theta)+i\cdot cos(\pi+\theta)\right]=$$

$$-\lambda\left[cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right].$$

Δηλαδή ο z έχει μέτρο το $-\lambda$ και ένα όρισμα του είναι ο $\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

Π.χ. $z=-5\left(sin30^0+i\cdot cos30^0\right)=-5\left(cos60^0+i\cdot sin60^0\right)=$

$$5\left(-cos60^0-i\cdot sin60^0\right)=5\left(cos240^0+i\cdot sin240^0\right)$$

• Αν $\lambda>0$, ο μιγαδικός $z=\lambda(-sin\theta+i\cdot cos\theta)$ γράφεται ως:

$$z=\lambda(-sin\theta+i\cdot cos\theta)=\lambda\left[-cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=$$

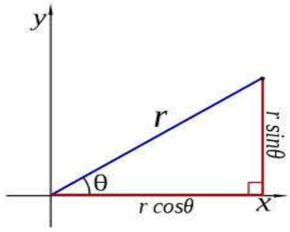
$$\lambda\left[cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

Δηλαδή ο z έχει μέτρο το λ και ένα όρισμα του είναι ο $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$.

Π.χ. $z=5\left(-sin30^0+i\cdot cos30^0\right)=5\left(-cos60^0+i\cdot sin60^0\right)=5\left(cos120^0+i\cdot sin120^0\right)$

Παραδείγματα.

•Αν $z=\sqrt{3}+i$ τότε $|z|=\sqrt{3+1}=2$, $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta\ =\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\pi}{6}$



Άρα η $z=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)$

• Αν $z=5$ τότε $Argz=0$ και $|z|=\sqrt{5^2+0^2}=5$. Συνεπώς $z=5\left(cos0+i\cdot sin0\right)$.

• Αν $z=-5$ τότε $Argz=\pi$ και $|z|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$. Συνεπώς $z=5\left(cos\pi+i\cdot sin\pi\right)$.

• Αν $z=5i$ τότε $Argz=\frac{\pi}{2}$ και $|z|=\sqrt{0^2+5^2}=5$. Συνεπώς $z=5\left(cos\frac{\pi}{2}+i\cdot sin\frac{\pi}{2}\right)$.

• Αν $z=-5i$ είναι $Argz=-\frac{\pi}{2}$, $|z|=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5$, $z=5\left[cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

- Αν $z=\dfrac{4+12i}{1-2i}$ τότε $z=\dfrac{(4+12i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{-20+20i}{1+4}=-4+4i$, άρα $|z|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

Αν $\varphi=Argz$ ισχύει ότι $\left.\begin{cases} cos\varphi=\dfrac{-4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ sin\varphi=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}\right\}\Rightarrow \hat{\varphi}=135^0=\dfrac{3\pi}{4}$.

Συνεπώς $z=4\sqrt{2}\left(cos\dfrac{3\pi}{4}+i\cdot sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

- Αν $z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ τότε

$$z=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(cos225^0+i\cdot sin225^0\right)=2\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\cdot sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

- Αν $z=-1+i\sqrt{3}$ τότε

$$z=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(cos120^0+i\cdot sin120^0\right)=2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

- Αν $z=2\left(cos\dfrac{\pi}{4}-i\cdot sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ τότε $z=2\left[cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\cdot sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

- Αν $z=-4\left(cos\dfrac{\pi}{5}+i\cdot sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ τότε

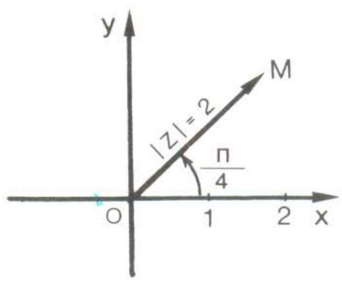
$$z=4\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+i\cdot sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right]=4\left(cos\frac{6\pi}{5}+i\cdot sin\frac{6\pi}{5}\right)$$

- Αν $z=cos\dfrac{\pi}{6}-i\cdot sin\dfrac{\pi}{6}$ τότε $z=1\left[cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\cdot sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

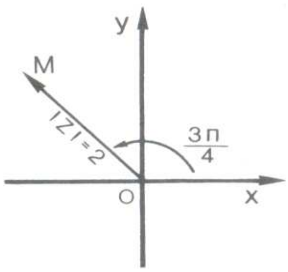
- Αν $z=1-i$ τότε $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left[cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\cdot sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

Εφαρμογή.

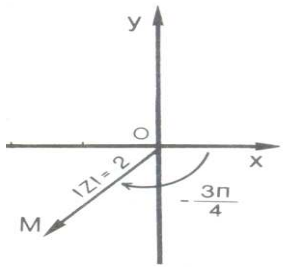
Ποιές οι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών που οι γεωμετρικές παραστάσεις τους φαίνονται στα παρακάτω σχήματα;



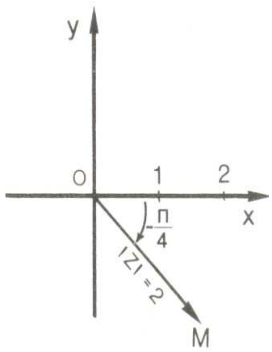
$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$$



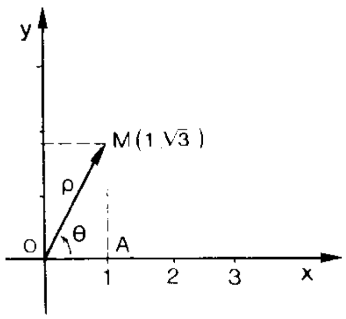
$$z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(\cos135^0+i\cdot\sin135^0\right)=$$
$$2\left(-\cos45^0+i\cdot\sin45^0\right)=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$$



$$z=2\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{-3\pi}{4}\right)=2\left[\cos\left(-135^0\right)+i\cdot\sin\left(-135^0\right)\right]=$$
$$2\left(-\cos45^0-i\cdot\sin45^0\right)=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$$



$$z=2\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{-\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$$



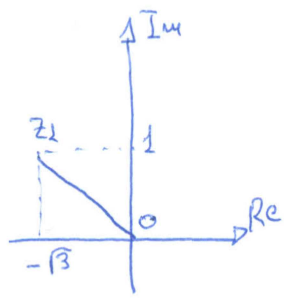
$$\rho=\sqrt{1^2+3}=2,\quad \theta=60^0=\frac{\pi}{3},$$
$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$2\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\cdot\sqrt{3}$$

Εφαρμογή.

Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών $z_1=-\sqrt{3}+i$, $z_2=-1+\sqrt{3}i$ και να υπολογισθούν οι μιγαδικοί z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.

Λύση.

- Είναι $|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$ και

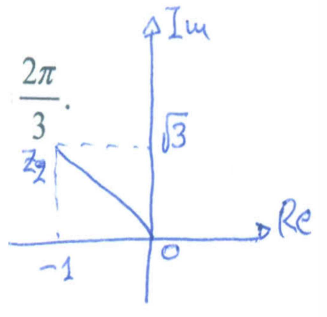


$$\left.\begin{cases}\cos\theta_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow\widehat{\theta}_1=150^0=\frac{5\pi}{6}.$$

Συνεπώς $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

- Είναι $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$ και

$$\left.\begin{cases}\cos\theta_2 = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\right\} \Rightarrow \widehat{\theta_2} = 120^0 = \frac{2\pi}{3}.$$



Συνεπώς $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

- Είναι $z_1 \cdot z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos\frac{9\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{9\pi}{6}\right] = 4\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right] = 4(0-i) = -4i$$

- Είναι $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}} =$

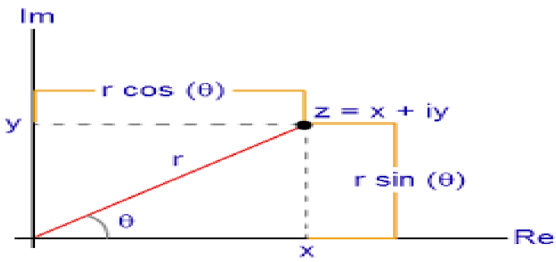
$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

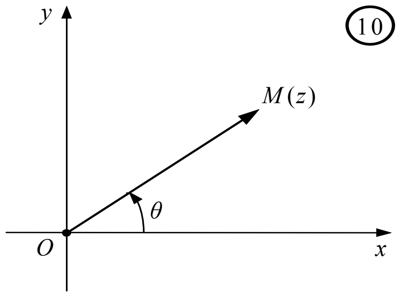
Όρισμα και μέτρο αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου και πηλίκου δυο μιγαδικών αριθμών.

Ορίσματα μιγαδικού αριθμού.

Έστω μιγαδικός αριθμός z, $z \neq 0$, με $|z| = \rho$. Αφού $\rho \neq 0$, η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ένα σημείο του κύκλου (O, ρ). Η θέση του σημείου Μ καθορίζεται πλήρως όταν δοθεί η κυρτή προσανατολισμένη γωνία $\left(\widehat{\text{O}x, \text{OM}}\right)$.

Η αλγεβρική τιμή φ_0 της γωνίας αυτής ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται ως Arg (Argument).





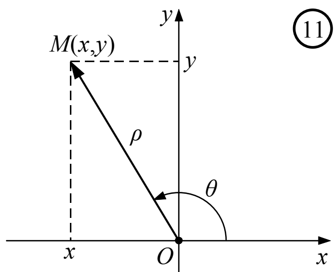
10

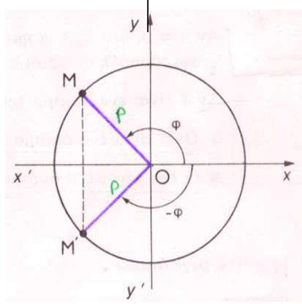
Δηλαδή η θέση του σημείου Μ καθορίζεται από το ζεύγος των αριθμών $\rho = |z|$ και $\varphi_0 = Argz$, που λέγονται **πολικές συντεταγμένες** του Μ. Ισχύει ότι $z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $\text{Arg}z_1 = \text{Arg}z_2$.

Από τον ορισμό του $Argz$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Αν $z \neq 0$, τότε $-\pi < Argz \leq \pi$
- αν $z \in \mathbb{R}_+^*$, τότε $Argz = 0$
- αν $z \in \mathbb{R}_-^*$, τότε $Argz = \pi$
- αν $z = \beta i \begin{cases} \text{με } \beta > 0\text{, τότε } Argz = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{με } \beta < 0\text{, τότε } Argz = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

11





- Γενικά ισχύει ότι $Arg\bar{z} = -Argz$ εκτός από την περίπτωση που $z \in \mathbb{R}_-^*$ οπότε είναι $Arg\bar{z} = Argz = \pi$.

- Αν ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ έχει ως εικόνα του το σημείο M, τότε ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το σημείο αυτό, το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z λαμβάνει τις τιμές που φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Τεταρτημόριο	Πρωτεύον όρισμα	Τιμές του x	Τιμές του y
$1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο	$0 < Argz < \dfrac{\pi}{2}$	$x > 0$	$y > 0$
$2^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο	$\dfrac{\pi}{2} < Argz < \pi$	$x < 0$	$y > 0$

3^{o} τεταρτημόριο	$\pi < Argz < \dfrac{3\pi}{2}$	$x<0$	$y<0$
4^{o} τεταρτημόριο	$\dfrac{3\pi}{2} < Argz < 2\pi$	$x>0$	$y<0$

Ορισμός.

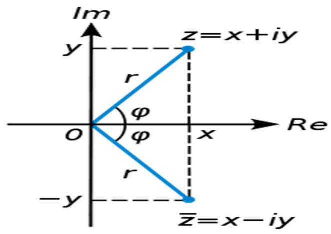
Κάθε πραγματικός αριθμός $\varphi = Argz + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ονομάζεται όρισμα του μιγαδικού αριθμού z .

Παρατηρήσεις.

• Αν $z=0$, δεν έχει νόημα ο όρος «όρισμα».

• Αν φ είναι ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού z , τότε:

- Ο $-\varphi$ είναι ένα όρισμα του $\bar{z}$.
- Ο $(\pi+\varphi)$ είναι ένα όρισμα του $-z$.



• Αν για τυχόν όρισμα φ του μιγαδικού αριθμού z ισχύει ότι $\varphi = Argz \notin [0,\ 2\pi)$ τότε από τη σχέση $\varphi = Argz + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, προκύπτει ότι $Argz = \varphi - 2k\pi = argz - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ισότητα μιγαδικών αριθμών.

Αν φ_1, φ_2 είναι ορίσματα των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 αντιστοίχως, τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε $\left\{\begin{matrix} \varphi_1 = Argz_1 + 2k_1\pi \\ \varphi_2 = Argz_2 + 2k_2\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = Argz_1 - Argz_2 + 2k\pi,\ k = k_1 - k_2$.

• Αν $Argz_1 = Argz_2$ τότε $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$.

• Αν $Argz_1 \neq Argz_2$ τότε $-2\pi < Argz_1 - Argz_2 < 2\pi$ και δεν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$: $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$.

Άρα $Argz_1 = Argz_2 \Leftrightarrow \textit{υπάρχει}\ k \in \mathbb{Z},\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$.

Η σχέση $z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $Argz_1 = Argz_2$ γίνεται

$$z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ και } \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi .$$

Έτσι προκύπτει το κριτήριο ισότητας των μιγαδικών αριθμών.

Κριτήριο ισότητας μιγαδικών αριθμών.

Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

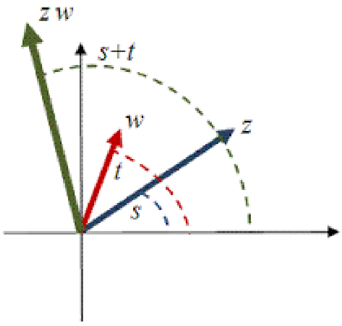
Μέτρο και ορίσματα γινομένου, πηλίκου μιγαδικών αριθμών.

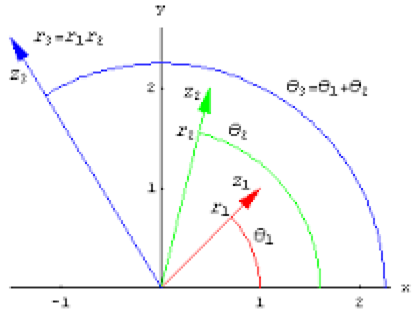
Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με φ_1, φ_2 ορίσματα και $r_1,\ r_2$ τα μέτρα τους αντίστοιχα. Τότε $z_1 \cdot z_2 = r_1\left(cos\varphi_1 + i \cdot sin\varphi_1\right) r_2\left(cos\varphi_2 + i \cdot sin\varphi_2\right) =$

$$r_1 \cdot r_2\left[\left(cos\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 - sin\varphi_1 \cdot sin\varphi_2\right) + i\left(sin\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 + sin\varphi_2 \cdot cos\varphi_1\right)\right] =$$

$$r_1 \cdot r_2\left[cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \cdot sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right].$$

Επειδή $r_1 \cdot r_2 > 0$ το μέτρο του $z_1 \cdot z_2$ είναι $r_1 \cdot r_2$ και ένα όρισμα του είναι $\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$.
Το παραπάνω συμπέρασμα γενικεύεται με χρήση της επαγωγής για $\nu > 2$.





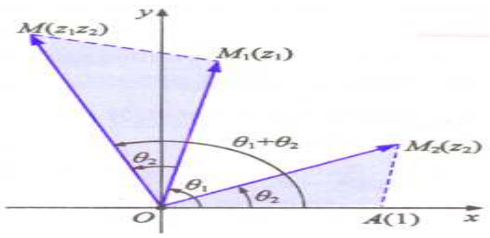
Θεώρημα.

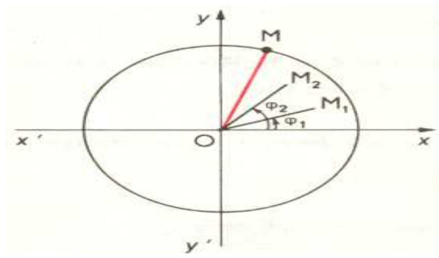
Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί $z_1, z_2, ..., z_\nu$ και φ_i ένα όρισμα του z_i, όπου $i = 1, 2, ...\nu$. Το γινόμενο $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_\nu$ έχει:

- μέτρο, ίσο με το γινόμενο των μέτρων των μιγαδικών, $\left|z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_\nu\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right| ... \left|z_\nu\right|$
- ως ένα όρισμα του, το άθροισμα $\left(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_\nu\right)$.

Πόρισμα.

Αν $z_1 = z_2 = ... = z_\nu = z$ και φ ένα όρισμα του z, τότε $\left|z^\nu\right| = \left|z\right|^\nu$ και το $(\nu\varphi)$ είναι όρισμα του z^ν.





Παρατήρηση.

Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό της μορφής $cos\theta + i \cdot sin\theta$ (που έχει μέτρο 1) στρέφει τη διανυσματική ακτίνα που αντιστοιχίζεται στον μιγαδικό αριθμό z, κατά γωνία θ.

Όρισμα και μέτρο του πηλίκου μιγαδικών.

Έστω z ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, φ ένα όρισμα του και θ ένα όρισμα του $\frac{1}{z}$. Επειδή $z\frac{1}{z} = 1$, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το $\left(\theta + \varphi\right)$ είναι ένα όρισμα του 1. Άρα υπάρχει ακέραιος αριθμός k τέτοιος ώστε

$$\theta + \varphi = Arg1 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta + \varphi = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta + \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = -\varphi + 2k\pi$$

Αν $k = 0$, είναι $\theta = -\varphi$. Είναι $\left|z\frac{1}{z}\right| = \left|1\right| \Leftrightarrow \left|z\right| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{\left|z\right|}$.

Θεώρημα.

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού $z \neq 0$ έχει ως μέτρο τον αντίστροφο του μέτρου του z, ενώ ένα όρισμα του είναι ο αντίθετος ενός οποιουδήποτε ορίσματος του z.

Πόρισμα.

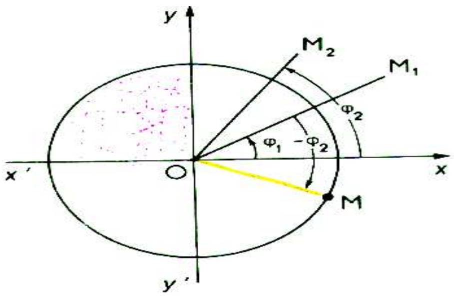
Αν οι μιγαδικοί $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ έχουν ορίσματα φ_1, φ_2 αντιστοίχως, τότε:

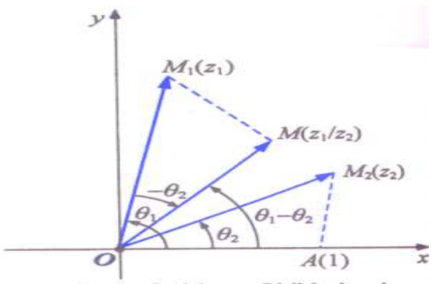
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- το $(\varphi_1 - \varphi_2)$ είναι ένα όρισμα του $\frac{z_1}{z_2}$.

Σχόλιο.

Το ανωτέρω πόρισμα ισχύει προφανώς και όταν $z_1 = 0$.

Στο σχήμα που ακολουθεί, εικόνα του πηλίκου είναι το σημείο Μ στο οποίο τέμνει τον κύκλο $\left(O, \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$ η τελική πλευρά της γωνίας $\left(\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}\right)$.





Τα τρίγωνα OAM_2 και OMM_1 είναι όμοια

Δύναμη με εκθέτη ακέραιο αριθμό.

Θεώρημα.

Έστω μιγαδικός αριθμός $z \neq 0$ και φ ένα όρισμα του. Τότε $\forall k \in \mathbb{Z}$ ισχύουν:

- $|z^k| = |z|^k$
- Το $(k\varphi)$ είναι ένα όρισμα του z^k.

Τύπος του Abraham De Moivre (1667–1754).

Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και η τριγωνομετρική (ή πολική) του μορφή είναι $z = r(cos\theta + i \cdot sin\theta)$ τότε ισχύει ότι:

- $z^2 = z \cdot z = r(cos\theta + i \cdot sin\theta) r(cos\theta + i \cdot sin\theta) = r^2 (cos\theta + i \cdot sin\theta)(cos\theta + i \cdot sin\theta) =$
$r^2 (cos\theta \cdot cos\theta + cos\theta \cdot i \cdot sin\theta + i \cdot sin\theta \cdot cos\theta + i \cdot sin\theta \cdot i \cdot sin\theta) =$
$r^2 (cos^2\theta + 2 \cdot cos\theta \cdot sin\theta \cdot i - sin^2\theta) =$
$r^2 (cos^2\theta - sin^2\theta + 2 \cdot cos\theta \cdot sin\theta \cdot i) = r^2 [cos(2\theta) + i \cdot sin(2\theta)]$

- $z^3 = z \cdot z \cdot z = ... = r^3 [cos(3\theta) + i \cdot sin(3\theta)]$

- $z^4 = z \cdot z \cdot z \cdot z = ... = r^4 [cos(4\theta) + i \cdot sin(4\theta)]$ κ.τ.λ.

Δηλαδή $(cos\theta + i \cdot sin\theta)^k = cos(k\theta) + i \cdot sin(k\theta)$. Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως τύπος του De Moivre.

Θεώρημα.

Αν $z = r(cos\theta + i \cdot sin\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και ν ακέραιος αριθμός, τότε $z^\nu = r^\nu [\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i \cdot \eta\mu(\nu\theta)]$.

Απόδειξη.

<u>Μέθοδος εργασίας:</u> Αποδεικνύομε ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για τη μικρότερη τιμή του ν, δηλαδή για $\nu = 1$. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu = k$ και αποδεικνύομε ότι ισχύει για $\nu = k + 1$.

- Αν $\nu = 1$, η προς απόδειξη σχέση γίνεται $z^1 = r^1 [cos(1 \cdot \theta) + i \cdot sin(1 \cdot \theta)]$, ισχύει.

- Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει και για $\nu = k$, δηλαδή έστω ότι $z^k = r^k [cos(k\theta) + i \cdot sin(k\theta)]$.

- Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει και για $\nu = k + 1$, δηλαδή θα δειχθεί ότι ισχύει η ισότητα $z^{k+1} = r^{k+1} [cos(k+1)\theta + i \cdot sin(k+1)\theta]$.

Πράγματι: $z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k [cos(k\theta) + i \cdot sin(k\theta)] r(cos\theta + i \cdot sin\theta) =$
$$r^{k+1} [cos(k+1)\theta + i \cdot sin(k+1)\theta]$$

Άρα, η προς απόδειξη σχέση ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους αριθμούς.
Αποδεικνύεται ότι ο τύπος του De Moivre ισχύει για όλους τους ακεραίους αριθμούς.

Π.χ. Αν $z = 3(cos10^0 + i \cdot sin10^0)$ τότε:

$$z^2 = 3^2 (cos20^0 + i \cdot sin20^0), \quad z^3 = 3^3 (cos30^0 + i \cdot sin30^0),$$
$$z^4 = 3^4 (cos40^0 + i \cdot sin40^0), \quad z^5 = 3^5 (cos50^0 + i \cdot sin50^0).$$

Υπόδειξη.

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.), Επίκουρος Καθηγητής.

Από την τριγωνομετρία γνωρίζομε ότι

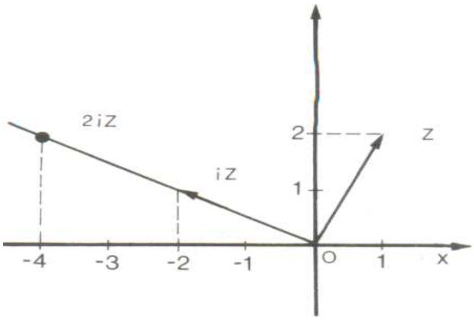
- $cos(a+b) = cosa \cdot cosb - sina \cdot sinb$
- $cos(a-b) = cosa \cdot cosb + sina \cdot sinb$
- $cos(2a) = cos(a+a) = cosa \cdot cosa - sina \cdot sina = cos^2 a - sin^2 a$

- $sin(a+b) = sina \cdot cosb + cosa \cdot sinb$,
- $sin(a-b) = sina \cdot cosb - cosa \cdot sinb$
- $sin(2a) = sin(a+a) = sina \cdot cosa + cosa \cdot sina = 2 \cdot sina \cdot cosa$

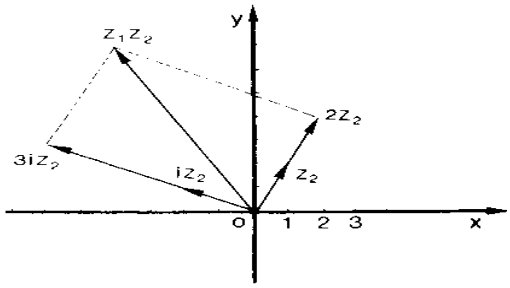
Εφαρμογή.

Αν $z_1 = r_1(cos\theta_1 + i \cdot sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(cos\theta_2 + i \cdot sin\theta_2)$, $z_3 = r_3(cos\theta_3 + i \cdot sin\theta_3)$ είναι

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sin(\theta_1 + \theta_2)]$
- $z_1 \cdot z_3 = r_1 \cdot r_3 [cos(\theta_1 + \theta_3) + i \cdot sin(\theta_1 + \theta_3)]$
- $z_2 \cdot z_3 = r_2 \cdot r_3 [cos(\theta_2 + \theta_3) + i \cdot sin(\theta_2 + \theta_3)]$
- $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 [cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \cdot sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sin(\theta_1 - \theta_2)]$



- $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}[cos(\theta_2 - \theta_1) + i \cdot sin(\theta_2 - \theta_1)]$
- $\frac{z_1}{z_3} = \frac{r_1}{r_3}[cos(\theta_1 - \theta_3) + i \cdot sin(\theta_1 - \theta_3)]$
- $\frac{z_3}{z_1} = \frac{r_3}{r_1}[cos(\theta_3 - \theta_1) + i \cdot sin(\theta_3 - \theta_1)]$

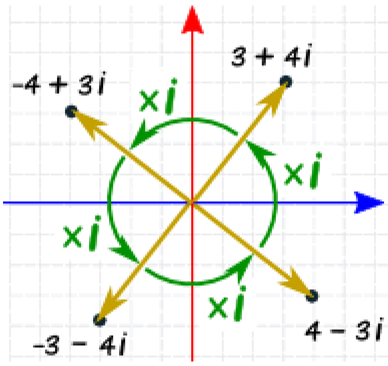


- $\frac{z_2}{z_3} = \frac{r_2}{r_3}[cos(\theta_2 - \theta_3) + i \cdot sin(\theta_2 - \theta_3)]$
- $\frac{z_3}{z_2} = \frac{r_3}{r_2}[cos(\theta_3 - \theta_2) + i \cdot sin(\theta_3 - \theta_2)]$
- $\frac{1}{z_1} = \frac{1(cos0 + i \cdot sin0)}{r_1(cos\theta_1 + i \cdot sin\theta_1)} = \frac{1}{r_1}[cos(-\theta_1) + i \cdot sin(-\theta_1)]$

- $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1(cos0 + i \cdot sin0)}{r_2(cos\theta_2 + i \cdot sin\theta_2)} = \dfrac{1}{r_2}\left[cos(-\theta_2) + i \cdot sin(-\theta_2)\right]$

- $\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{1(cos0 + i \cdot sin0)}{r_3(cos\theta_3 + i \cdot sin\theta_3)} = \dfrac{1}{r_3}\left[cos(-\theta_3) + i \cdot sin(-\theta_3)\right]$

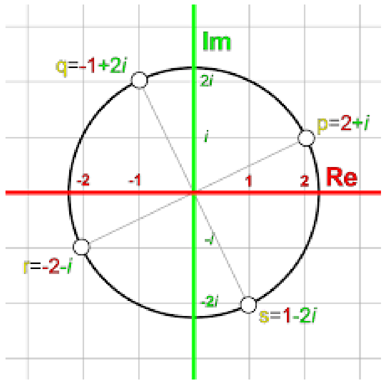
- $z_1 \cdot i = r_1\left[cos\left(\theta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$



- $z_2 \cdot i = r_2\left[cos\left(\theta_2 + \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_2 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

- $z_3 \cdot i = r_3\left[cos\left(\theta_3 + \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_3 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

- $\dfrac{i}{z_1} = \dfrac{1}{r_1}\left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right) + i \cdot sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right]$



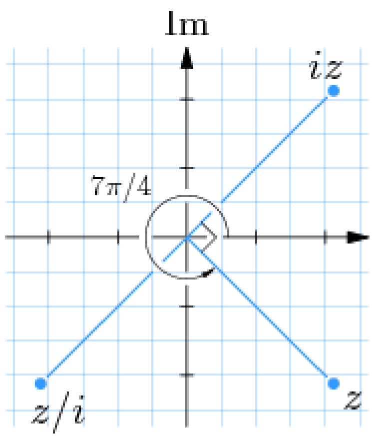
- $\dfrac{i}{z_2} = \dfrac{1}{r_2}\left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_2\right) + i \cdot sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_2\right)\right]$

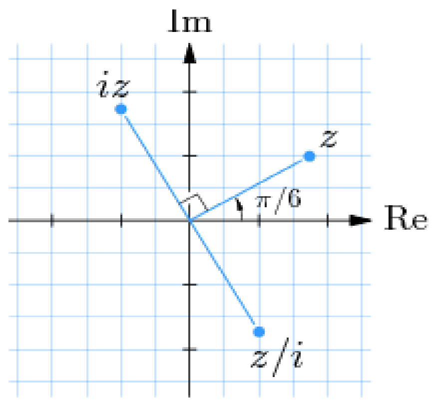
- $\dfrac{i}{z_3} = \dfrac{1}{r_3}\left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_3\right) + i \cdot sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_3\right)\right]$

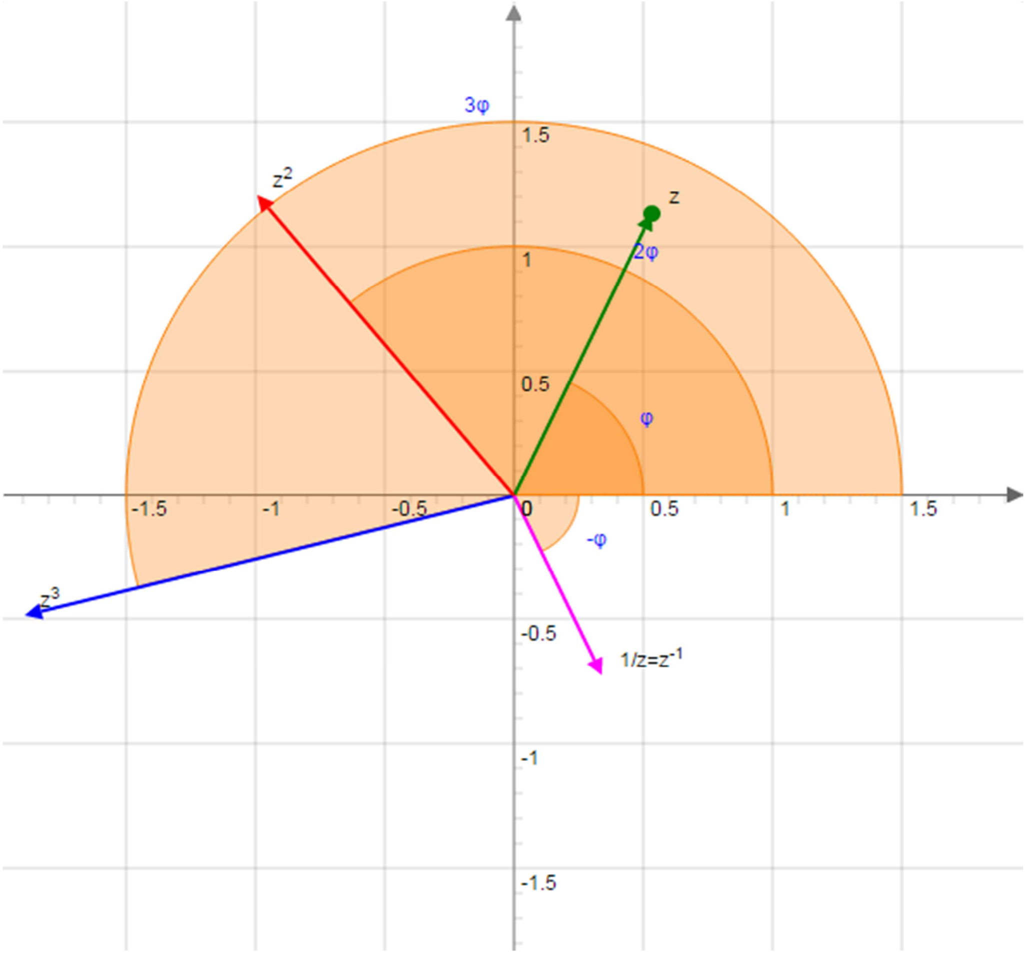
- $\dfrac{z_1}{i} = r_1\left[cos\left(\theta_1 - \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_1 - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

- $\dfrac{z_2}{i} = r_2\left[cos\left(\theta_2 - \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_2 - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

- $\dfrac{z_3}{i} = r_3\left[cos\left(\theta_3 - \dfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\theta_3 - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$







Εφαρμογή.

Υπολογίστε το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z=1-i$ & βρείτε τον μιγαδικό z^{2016}.

Λύση.

Είναι $|z|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ και $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{\theta}=-45^0=\dfrac{7\pi}{4}$

Συνεπώς $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Είναι $z^{2016}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)\right]^{2016}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)^{2016}=$

$2^{1008}\left(\cos\dfrac{7\pi 2016}{4}+i\sin\dfrac{7\pi 2016}{4}\right)=2^{1008}\left[\cos(7\pi 504)+i\sin(7\pi 504)\right]=$

$2^{1008}\left[\cos(3.528\pi)+i\sin(3.528\pi)\right]=$

$2^{1008}\left[\cos(2\pi\cdot 1.764)+i\sin(2\pi\cdot 1.764)\right]=$

$2^{1008}\left[\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\right]=2^{1008}(1+0i)=2^{1008}$.

Εφαρμογή.

Να υπολογισθεί το άθροισμα τριών μονοφασικών αρμονικών ρευμάτων, ίδιας κυκλικής συχνότητας ω και ίδιου πλάτους I_0, που έχουν το κάθε ένα διαφορά φάσεως $\frac{2\pi}{3}$ από το προηγούμενο και το επόμενο του.

Λύση.

Οι στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων δίνονται από τους τύπους

$$I_1 = I_0 \cdot sin\omega t,$$
$$I_2 = I_0 \cdot sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$
$$I_3 = I_0 \cdot sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Τα ρεύματα παριστάνονται με τη μιγαδική τους μορφή ως ακολούθως

$$I_1 = I_0\left(cos0 + i \cdot sin0\right),$$
$$I_2 = I_0\left(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$I_3 = I_0\left(cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

Αθροίζοντας τις στιγμιαίες τιμές του ρεύματος, προκύπτει ότι

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = I_0\left(cos0 + i \cdot sin0\right) + I_0\left(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}\right) + I_0\left(cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= I_0\left(1 + i \cdot 0\right) + I_0\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + I_0\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= I_0\left[\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = I_0 \cdot 0 = 0.$$

Παρατήρηση.

Από τη θεωρία γνωρίζομε ότι $X \cdot sin(\omega t + \varphi) = X(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$.

Εφαρμογή.

Στη φυσική και ειδικότερα στο κεφάλαιο των εναλλασσομένων ρευμάτων, η μελέτη των εναλλασσομένων μεγεθών περιγράφεται με χρήση περιοδικών συναρτήσεων του χρόνου.

Τα αρμονικά μεγέθη (αρμονική ταλάντωση, αρμονική τάση, αρμονικό ρεύμα) περιγράφονται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, της μορφής

$$f(t) = a \cdot sin(\omega t + \varphi),$$

όπου $a > 0$ είναι το πλάτος,
ω είναι η κυκλική συχνότητα (ή γωνιακή ταχύτητα) και
φ είναι η αρχική φάση του αρμονικού μεγέθους.

Ευθύγραμμος χάλκινος αγωγός διαρρέεται από δυο αρμονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά ρεύματα της ιδίας κυκλικής συχνότητας ω. Οι στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων δίνονται από τους τύπους

$$\mathrm{I}_1 = 2\cdot sin\omega t \quad \text{και} \quad \mathrm{I}_2 = 2\cdot sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Ποια η συνολική τιμή I του ρεύματος;

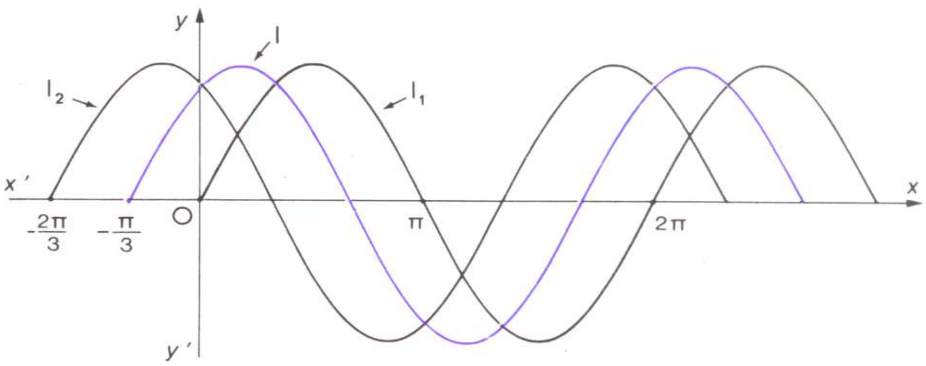
Λύση.

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = 2\cdot sin\omega t + 2\cdot sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left[sin\omega t + sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left(sin\omega t + sin\omega t\cdot cos\frac{2\pi}{3} + sin\frac{2\pi}{3}\cdot cos\omega t\right)$$

$$= 2\left(sin\omega t - \frac{1}{2}sin\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot cos\omega t\right) = 2\left(\frac{1}{2}sin\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot cos\omega t\right)$$

$$= 2\left(cos\frac{\pi}{3}\cdot sin\omega t + sin\frac{\pi}{3}\cdot cos\omega t\right) = 2\cdot sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$



Εφαρμογή.

Αν $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 0$, $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 0$ δείξτε ότι

(**α**) $cos(3\alpha) + cos(3\beta) + cos(3\gamma) = 3cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

(**β**) $sin(3\alpha) + sin(3\beta) + sin(3\gamma) = 3sin(\alpha + \beta + \gamma)$.

Λύση.

Έστω $\begin{cases} x = cos\alpha + i \cdot sin\alpha \Rightarrow x^3 = cos(3\alpha) + i \cdot sin(3\alpha) \\ y = cos\beta + i \cdot sin\beta \Rightarrow y^3 = cos(3\beta) + i \cdot sin(3\beta) \\ z = cos\gamma + i \cdot sin\gamma \Rightarrow z^3 = cos(3\gamma) + i \cdot sin(3\gamma) \end{cases}$.

Τότε $x + y + z = (cos\alpha + cos\beta + cos\gamma) + i(sin\alpha + sin\beta + sin\gamma) = 0$.

Από την ταυτότητα $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$

αν $\left.\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \text{ή} \\ x = y = z = 0 \end{cases}\right\}$ οπότε μηδενίζεται το 2^o μέλος, είναι $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

- $x^3 + y^3 + z^3 = \left[cos(3\alpha) + cos(3\beta) + \sigma\upsilon\nu(3\gamma)\right] + i\left[sin(3\alpha) + sin(3\beta) + sin(3\gamma)\right]$.

- $3xyz = 3(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)(cos\beta + i \cdot sin\beta)(cos\gamma + i \cdot sin\gamma) =$
  $3\left[cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \cdot sin(\alpha + \beta + \gamma)\right]$.

Άρα $\begin{cases} cos(3\alpha) + cos(3\beta) + cos(3\gamma) = 3cos(\alpha + \beta + \gamma) \\ \kappa\alpha\iota \\ sin(3\alpha) + sin(3\beta) + sin(3\gamma) = 3sin(\alpha + \beta + \gamma) \end{cases}$.

Εφαρμογή.

(**α**) Δείξτε ότι $cos(2\theta)=cos^2\theta-sin^2\theta$ και $sin(2\theta)=2cos\theta\cdot sin\theta$.

(**β**) Δείξτε ότι $cos(3\theta)=4cos^3\theta-3cos\theta$ και $sin(3\theta)=3sin\theta-4sin^3\theta$.

(**γ**) Υπολογίστε τα $sin(4\theta)$ και $cos(4\theta)$.

Λύση.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=cos\theta+i\cdot sin\theta$.

(**α**) Από τον τύπο του De Moivre ισχύει ότι $z^2=cos(2\theta)+i\cdot sin(2\theta)$.

Επίσης από τη γνωστή ταυτότητα $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, ισχύει ότι $z^2=(cos\theta+i\cdot sin\theta)^2=cos^2\theta-sin^2\theta+2\cdot i\cdot cos\theta\cdot sin\theta$

Άρα ισχύει ότι $\left\{\begin{matrix} cos(2\theta)=cos^2\theta-sin^2\theta \\ sin(2\theta)=2cos\theta\cdot sin\theta \end{matrix}\right\}$

(**β**) Από τον τύπο του De Moivre ισχύει ότι $z^3=cos(3\theta)+i\cdot sin(3\theta)$.

Επίσης από τη γνωστή ταυτότητα $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} z^3&=(cos\theta+i\cdot sin\theta)^3= \\ &cos^3\theta+3cos^2\theta\cdot i\cdot sin\theta+3cos\theta(i\cdot sin\theta)^2+(i\cdot sin\theta)^3= \\ &cos^3\theta+3cos^2\theta\cdot i\cdot sin\theta-3cos\theta\cdot sin^2\theta-i\cdot sin^3\theta= \\ &cos^3\theta-3cos\theta\cdot sin^2\theta+(3cos^2\theta\cdot sin\theta-sin^3\theta)i \end{aligned}$$

Συνεπώς $\left\{\begin{matrix} cos(3\theta)=cos^3\theta-3cos\theta\cdot sin^2\theta \\ sin(3\theta)=3cos^2\theta\cdot sin\theta-sin^3\theta \end{matrix}\right\}$ και από $cos^2\theta+sin^2\theta=1$ προκύπτει ότι

$cos(3\theta)=4cos^3\theta-3cos\theta$ και $sin(3\theta)=3sin\theta-4sin^3\theta$.

(**γ**) Από τον τύπο του De Moivre είναι $(cos\theta+i\cdot sin\theta)^4=cos(4\theta)+i\cdot sin(4\theta)$.

Αναπτύσσομε το 1^o μέρος της ισότητας και μετά από τις σχετικές πράξεις έχομε $(cos\theta+i\cdot sin\theta)^4=(8cos^4\theta-8cos^2\theta+1)+i\cdot 4cos\theta(sin\theta-2sin^3\theta)$.

Άρα $(8cos^4\theta-8cos^2\theta+1)+i\cdot 4cos\theta(sin\theta-2sin^3\theta)=cos(4\theta)+i\cdot sin(4\theta)$.

$$\text{Συνεπώς } \left\{\begin{matrix} cos(4\theta)=8cos^4\theta-8cos^2\theta+1 \\ \text{και} \\ sin(4\theta)=4cos\theta(sin\theta-2sin^3\theta) \end{matrix}\right. .$$

Ρίζες μιγαδικών, νιοστές ρίζες μονάδος και γεωμετρική παράσταση τους.

Ονομάζεται νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού a, κάθε μιγαδικός αριθμός z, τέτοιος ώστε $z^{\nu}=a$.

Υπολογισμός νιοστών ριζών της μονάδος.

Θα βρούμε τις ρίζες της εξισώσεως $z^{\nu}=1$. Ένας μιγαδικός αριθμός $\zeta=|\zeta|(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ για να είναι νιοστή ρίζα της μονάδος πρέπει να ισχύει $\zeta^{\nu}=1$.

Δηλαδή $\zeta^{\nu}=|\zeta|^{\nu}\left[\cos(\nu\theta)+i\cdot\sin(\nu\theta)\right]=1$.

Επειδή $|1|=1$ και $Arg1=0$, ο ζ είναι ρίζα του 1 αν και μόνο αν υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $|\zeta^{\nu}|=1$ και $\nu\theta-0=2k\pi$. Δηλαδή $|\zeta|=1$ και $\theta=\dfrac{2k\pi}{\nu}$.

Άρα, νιοστή ρίζα της μονάδος είναι κάθε αριθμός της μορφής

.

Π.χ. νιοστές ρίζες της μονάδος είναι οι αριθμοί $\zeta_0=\cos0+i\cdot\sin0=1$, $\zeta_1=\cos\dfrac{2\pi}{\nu}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{\nu}$.

Παρατηρούμε ότι $\zeta_k=\zeta_1^k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$. Δηλαδή $\zeta_2=\zeta_1^2$, $\zeta_3=\zeta_1^3$, ….

Θεώρημα.

Νιοστές ρίζες της μονάδος είναι οι ν το πλήθος αριθμοί

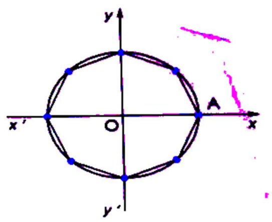
.

Ιδιότητες νιοστών ριζών μονάδος.

- Ο αντίστροφος της ρίζας ζ_λ είναι η ρίζα $\zeta_{\nu-\lambda}$. Πράγματι $\zeta_\lambda\cdot\zeta_{\nu-\lambda}=\zeta_1^{\lambda}\cdot\zeta_1^{\nu-\lambda}=\zeta_1^{\nu}=1$.
- Είναι $\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{\nu-1}=1+\zeta_1+\zeta_1^{\,2}+\zeta_1^{\,3}+\ldots+\zeta_1^{\nu-1}=\dfrac{\zeta_1^{\,\nu}-1}{\zeta_1-1}$.

  Επειδή ισχύει ότι $\zeta_1^{\,\nu}=1$, προκύπτει ότι .
- Ισχύει ότι $\zeta_0\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2\cdot\ldots\cdot\zeta_{\nu-1}=1\cdot\zeta_1\cdot\zeta_1^2\cdot\zeta_1^3\cdot\ldots\cdot\zeta_1^{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}=(-1)^{\nu+1}$
- Οι νιοστές ρίζες της μονάδος έχουν το ίδιο μέτρο $(=1)$ και τα ορίσματα δύο διαδοχικών ριζών διαφέρουν κατά $\dfrac{2\pi}{\nu}$.

  Οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού ν– γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1.



- Αν ζ νιοστή ρίζα της μονάδος με $\zeta\neq1$, ισχύουν ότι $1+2\zeta+3\zeta^2+\ldots+\nu\zeta^{\nu-1}=\dfrac{\nu}{\zeta-1}$ και $1+4\zeta+9\zeta^2+\ldots+\nu^2\zeta^{\nu-1}=-\dfrac{\nu^2(1-\zeta)+2\nu}{(1-\zeta)^2}$.

Νιοστές ρίζες μιγαδικού.

Θα υπολογίσομε τις νιοστές ρίζες ενός οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού a, δηλαδή θα βρούμε τις ρίζες της εξισώσεως $z^{\nu}=a$. Διακρίνομε τις περιπτώσεις:

- Αν $a=0$, τότε η μοναδική νιοστή ρίζα του a είναι ο αριθμός 0, καθόσον $z^{\nu}=0\Leftrightarrow z=0$.
- Αν $a\neq0$ και φ είναι ένα όρισμα του a ,τότε $\alpha=|\alpha|(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$.

Για να είναι ένας αριθμός $\zeta=|\zeta|(cos\theta+i\cdot sin\theta)$ νιοστή ρίζα του a πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha=|\zeta|^{\nu}\left[cos(\nu\theta)+i\cdot sin(\nu\theta)\right]$.

Άρα $|z|^{\nu}=|\alpha|\Leftrightarrow|z|=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$ και υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $\nu\theta-\varphi=2k\pi$ δηλαδή $\theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}$.

Επομένως νιοστή ρίζα του α είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$z_k=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

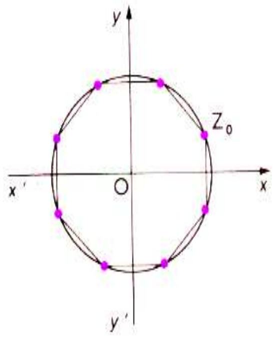
$$z_k=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left[cos\left(\frac{\varphi}{\nu}+\frac{2k\pi}{\nu}\right)+i\cdot sin\left(\frac{\varphi}{\nu}+\frac{2k\pi}{\nu}\right)\right]$$

$$=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\frac{\varphi}{\nu}+i\cdot sin\frac{\varphi}{\nu}\right)\cdot\left(cos\frac{2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\frac{2k\pi}{\nu}\right)$$

$$=\underbrace{\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\frac{\varphi}{\nu}+i\cdot sin\frac{\varphi}{\nu}\right)}_{z_o}\cdot\underbrace{\left(cos\frac{2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\frac{2k\pi}{\nu}\right)}_{\zeta_k}=z_o\cdot\zeta_k.$$

Από αυτή την ισότητα συμπεραίνομε ότι ο a έχει ν νιοστές ρίζες, που τις βρίσκουμε αν πολλαπλασιάσουμε τη z_0 με τις νιοστές ρίζες της μονάδος.

Παρατηρήσεις.



• Οι εικόνες των νιοστών ριζών του μιγαδικού a στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.

• Οι νιοστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού a προκύπτουν όταν μία οποιαδήποτε νιοστή ρίζα του (όχι υποχρεωτικά η z_0) πολλαπλασιασθεί με τις νιοστές ρίζες της μονάδος. Πράγματι $\forall\lambda\in\{0,\ 1,\ 2,...,\nu-1\}$ είναι $(z_k\cdot\zeta_\lambda)^{\nu}=(z_k)^{\nu}(\zeta_\lambda)^{\nu}=a\cdot1=a$.

Συνεπώς, ο αριθμός $z_k\cdot\zeta_\lambda$ αποτελεί μία ρίζα του μιγαδικού αριθμού a.

Εφαρμογή.

Να υπολογισθούν οι κυβικές ρίζες της μονάδος.

Λύση.

- $\zeta_0 = cos\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{3} = cos0 + i\cdot sin0 = 1 + i\cdot 0 = 1$

- $\zeta_1 = cos\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{3} = cos\dfrac{2\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\pi}{3} = cos120^0 + i\cdot sin120^0 =$

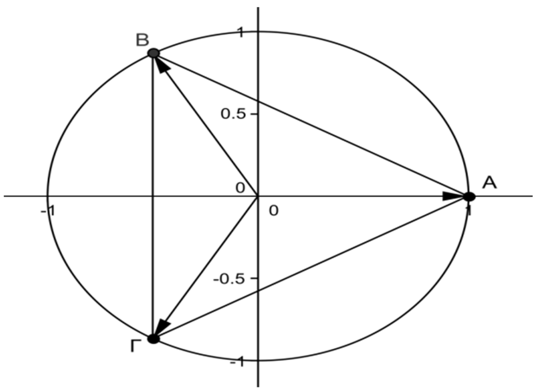
  $-cos60^0 + i\cdot sin60^0 = -sin30^0 + i\cdot cos30^0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

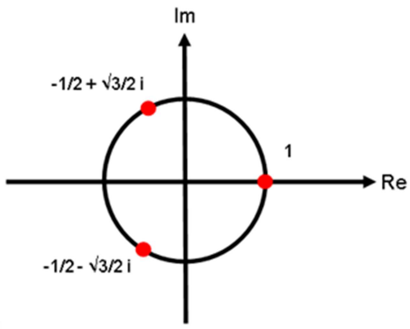
- $\zeta_2 = cos\dfrac{2\cdot 2\cdot \pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 2\cdot \pi}{3} = cos\dfrac{4\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{4\pi}{3} = cos240^0 + i\cdot sin240^0 =$

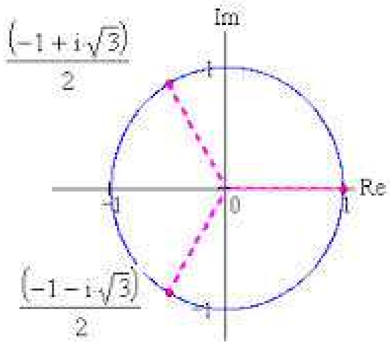
  $-cos60^0 - i\cdot sni60^0 = -\eta\mu 30^0 - i\cdot cos30^0 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Υπόδειξη.

Έγινε χρήση του τύπου $\zeta_\upsilon = cos\dfrac{2\upsilon\pi}{\nu} + i\cdot sin\dfrac{2\upsilon\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3, ..., \nu - 1$







- $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 = 0$
- $\zeta_2 = \zeta_1^2$
- $\zeta_0 \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2 = (-1)^{\nu-1} = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1$

Εφαρμογή.

Να υπολογισθούν οι τετάρτης τάξεως ρίζες της μονάδος.

Λύση.

- $\zeta_0 = cos\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{4} + i\cdot sin\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{4} = cos0 + i\cdot sin0 = 1 + i\cdot 0 = 1$

- $\zeta_1 = cos\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{4} + i\cdot sin\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{4} = cos\frac{\pi}{2} + i\cdot sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1\cdot i = i$

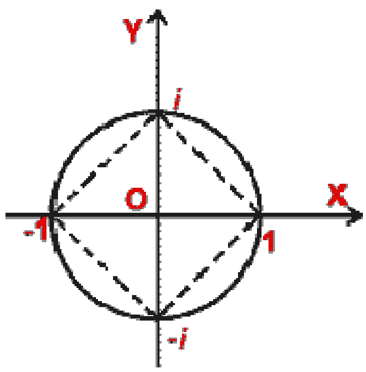
- $\zeta_2 = cos\frac{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \pi}{\cancel{4}} + i\cdot sin\frac{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \pi}{\cancel{4}} = cos\pi + i\cdot sin\pi = -1 + i0 = -1$

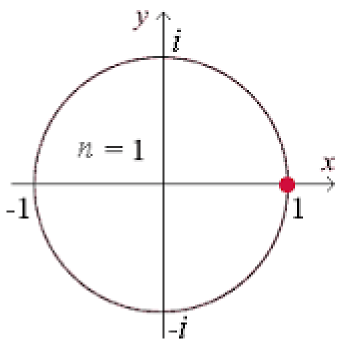
- $\zeta_3 = cos\frac{2\cdot 3\cdot \pi}{4} + i\cdot sin\frac{2\cdot 3\cdot \pi}{4} = cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot sin\frac{3\pi}{2} =$

  $cos270^0 + i\cdot sin270^0 = 0 + i(-1) = -i$

Υπόδειξη.

Έγινε χρήση του τύπου $\zeta_\upsilon = cos\frac{2\upsilon\pi}{\nu} + i\cdot sin\frac{2\upsilon\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3, \ldots, \nu - 1$





- $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0$
- $\zeta_2 = \zeta_1^2$
- $\zeta_3 = \zeta_2 \cdot \zeta_1 = \zeta_1^3$
- $\zeta_0 \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 = (-1)^{\nu-1} = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$

Εφαρμογή.

Να υπολογισθούν οι πέμπτης τάξεως ρίζες της μονάδος.

Λύση.

- $\zeta_0 = cos\dfrac{2\cdot 0\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 0\cdot\pi}{5} = cos0 + i\cdot sin0 = 1 + i\cdot 0 = 1$

- $\zeta_1 = cos\dfrac{2\cdot 1\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 1\cdot\pi}{5} = cos\dfrac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot\pi}{5} = cos72^0 + i\cdot sin72^0$

- $\zeta_2 = cos\dfrac{2\cdot 2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 2\cdot\pi}{5} = cos\dfrac{4\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{4\cdot\pi}{5} = cos144^0 + i\cdot sin144^0$

ή με δεύτερο τρόπο:

$$\zeta_2 = \zeta_1^2 = \left(cos\frac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot\pi}{5}\right)^2 = cos\frac{4\pi}{5} + i\cdot sin\frac{4\pi}{5} = cos144^0 + i\cdot sin144^0$$

- $\zeta_3 = cos\dfrac{2\cdot 3\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 3\cdot\pi}{5} = cos\dfrac{6\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{6\cdot\pi}{5} = cos216^0 + i\cdot sin216^0$

ή με δεύτερο τρόπο:

$$\zeta_3 = \zeta_1^3 = \left(cos\frac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot\pi}{5}\right)^3 = cos\frac{6\pi}{5} + i\cdot sin\frac{6\pi}{5} = cos216^0 + i\cdot sin216^0$$

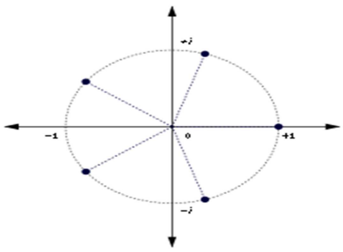
- $\zeta_4 = cos\dfrac{2\cdot 4\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 4\cdot\pi}{5} = cos\dfrac{8\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\dfrac{8\cdot\pi}{5} = cos288^0 + i\cdot sin288^0$

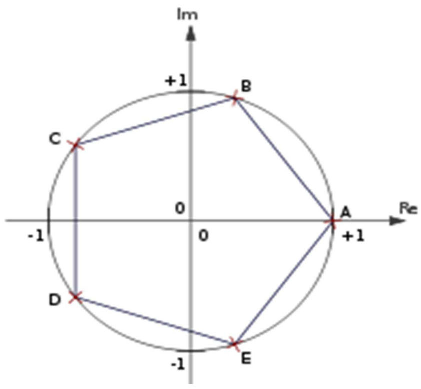
ή με δεύτερο τρόπο:

$$\zeta_4 = \zeta_1^4 = \left(cos\frac{2\cdot\pi}{5} + i\cdot sin\frac{2\cdot\pi}{5}\right)^4 = cos\frac{8\pi}{5} + i\cdot sin\frac{8\pi}{5} = cos288^0 + i\cdot sin288^0$$

Υπόδειξη.

Έγινε χρήση του τύπου: $\zeta_\upsilon = cos\dfrac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3, ..., \nu - 1$

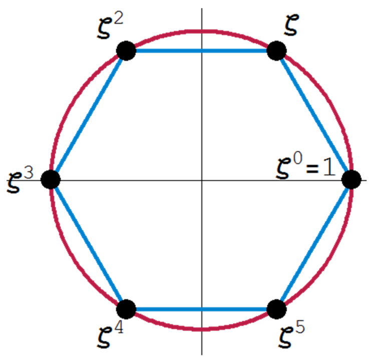




- $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 0$
- $\zeta_2 = \zeta_1^2$
- $\zeta_3 = \zeta_2\cdot\zeta_1 = \zeta_1^3$
- $\zeta_4 = \zeta_3\cdot\zeta_1 = \zeta_1^3\cdot\zeta_1 = \zeta_1^4$
- $\zeta_0\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2\cdot\zeta_3\cdot\zeta_4 = (-1)^{\nu-1} = (-1)^{5-1} = (-1)^4 = 1$

Εφαρμογή.

Να υπολογισθούν οι έκτης τάξεως ρίζες της μονάδος.



Λύση.

➢ $\zeta_0 = cos\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{6} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 0\cdot \pi}{6} = cos0^0 + i\cdot sin0^0 = 1 + i\cdot 0 = 1$

➢ $\zeta_1 = cos\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{6} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 1\cdot \pi}{6} = cos\dfrac{\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

➢ $\zeta_2 = cos\dfrac{2\cdot 2\cdot \pi}{6} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 2\cdot \pi}{6} = cos\dfrac{2\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ή με δεύτερο τρόπο:

$$\zeta_2 = \zeta_1^2 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot sin\frac{2\pi}{3} = cos120^0 + i\cdot sin120^0 =$$

$$-cos60^0 + i\cdot sin60^0 = -sin30^0 + i\cdot cos30^0 = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

➢ $\zeta_3 = cos\dfrac{2\cdot 3\cdot \pi}{6} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 3\cdot \pi}{6} = cos\pi + i\cdot sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$

ή με δεύτερο τρόπο:

$$\zeta_3 = \zeta_1^3 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = cos\frac{3\pi}{3} + i\cdot sin\frac{3\pi}{3} = cos\pi + i\cdot sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

➢ $\zeta_4 = cos\dfrac{2\cdot 4\cdot \pi}{6} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 4\cdot \pi}{6} = cos\dfrac{4\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ή με δεύτερο τρόπο:

$$\zeta_4 = \zeta_1^4 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^4 = cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot sin\frac{4\pi}{3} = cos240^0 + i\cdot sin240^0 =$$

$$-cos60^0 - i\cdot sin60^0 = -sin30^0 - i\cdot cos30^0 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

➢ $\zeta_5 = cos\dfrac{2\cdot 5\cdot \pi}{6} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot 5\cdot \pi}{6} = cos\dfrac{5\pi}{3} + i\cdot sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ή με δεύτερο τρόπο:

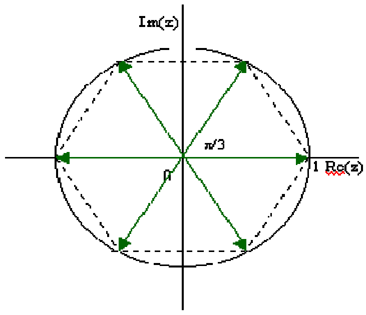
$$\zeta_5 = \zeta_1^5 = \left(cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\pi}{3}\right)^5 = cos\frac{5\pi}{3} + i\cdot sin\frac{5\pi}{3} = cos300^0 + i\cdot sin300^0 =$$

$$cos60^0 - i\cdot sin60^0 = sin30^0 - i\cdot cos30^0 = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Υπόδειξη.

Έγινε χρήση του τύπου

$\zeta_\upsilon = cos\dfrac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu} + i\cdot sin\dfrac{2\cdot\upsilon\cdot\pi}{\nu}$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3, ..., \nu - 1$.



- $\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5=0$
- $\zeta_2=\zeta_1^2$
- $\zeta_3=\zeta_2\cdot\zeta_1=\zeta_1^2\cdot\zeta_1=\zeta_1^3$
- $\zeta_4=\zeta_3\cdot\zeta_1=\zeta_1^3\cdot\zeta_1=\zeta_1^4$
- $\zeta_5=\zeta_4\cdot\zeta_1=\zeta_1^4\cdot\zeta_1=\zeta_1^5$
- $\zeta_0\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2\cdot\zeta_3\cdot\zeta_4\cdot\zeta_5=(-1)^{\nu-1}=(-1)^{6-1}=(-1)^5=-1$

Εφαρμογή.

Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $8z^3=1$.

Λύση.

Είναι $8z^3=1\Leftrightarrow(2z)^3=1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2z=\zeta_0\\2z=\zeta_1\\2z=\zeta_2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2z=1\\2z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\2z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=\frac{1}{2}\\z=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\\z=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\end{array}\right\}$

Εφαρμογή.

Εύρεση τετραγωνικών ριζών του μιγαδικού αριθμού $z=-3+4i$.

Λύση.

Έστω ότι η ζητούμενη τετραγωνική ρίζα είναι η $x+yi$.

Είναι $(x+yi)^2=-3+4i\Leftrightarrow x^2+(yi)^2+2xyi=-3+4i\Leftrightarrow$

$$(x^2-y^2)+2xyi=-3+4i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=-3\\2xy=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=-3\\xy=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=-3\\y=\frac{2}{x}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=-3\\y=\frac{2}{x}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-\frac{4}{x^2}=-3\\y=\frac{2}{x}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^4-4=-3x^2\\y=\frac{2}{x}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\pm1\\y=\frac{2}{x}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(x,y)=(1,\ 2)\\(x,y)=(-1,\ -2)\end{array}\right\}$$

Συνεπώς η ζητούμενη τετραγωνική ρίζα είναι $x+yi=\left\{\begin{array}{l}1+2i\\-1-2i\end{array}\right.$.

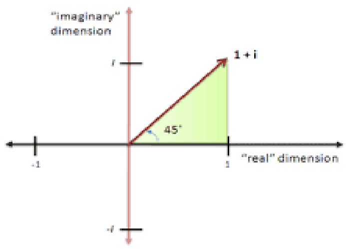
Επεξήγηση.

$x^4-4=-3x^2\Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0$ (διτετράγωνη εξίσωση).

Θέτω $x^2=\omega$, οπότε η ανωτέρω εξίσωση γράφεται ως

$$\omega^2+3\omega-4=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\omega=1\\\omega=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\\x^2=-1\text{ Απορρίπτεται}\end{array}\right\}.$$

1 + i



Εφαρμογή.

Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = 1 + i$.

Λύση.

$$z^3 = 1 + i \Leftrightarrow z^3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- $z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos15^0 + i\cdot\sin15^0\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

- $z_1 = z_0\zeta_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{8\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{8\pi}{12}\right) =$$

$$\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{8\pi}{12} - \sin\frac{8\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12} + i\left(\sin\frac{8\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{8\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)\right] =$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos135^0 + i\cdot\sin135^0\right) =$$

$$\sqrt[6]{2}\left(-\cos45^0 + i\cdot\sin45^0\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- $z_2 = z_0\zeta_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{16\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{16\pi}{12}\right) =$$

$$\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{16\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{16\pi}{12} + i\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{16\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{16\pi}{12}\right)\right] =$$

$$\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{16\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{16\pi}{12}\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{17\pi}{12}\right) =$$

$$\sqrt[6]{2}\left[\cos(17\cdot15) + i\cdot\sin(17\cdot15)\right] = \sqrt[6]{2}\left(\cos255^0 + i\cdot\sin255^0\right) =$$

$$\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(180^0 + 75^0\right) + i\cdot\sin\left(180^0 + 75^0\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left(-\cos15^0 - i\cdot\sin15^0\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right).$$

Σχόλια.

- $cos15^0 = cos\left(45^0 - 30^0\right) = cos45^0 \cdot cos30^0 + sin45^0 \cdot sin30^0 =$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

- $sin15^0 = sin\left(60^0 - 45^0\right) = sin60^0 \cdot cos45^0 - sin45^0 \cdot cos60^0 =$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
- $cos\left(\alpha+\beta\right) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$,
- $cos\left(\alpha-\beta\right) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$

Εφαρμογή.

(**α**) Να δειχθεί ότι αν ο μιγαδικός a είναι μία νιοστή ρίζα του μιγαδικού z, τότε ο μιγαδικός $\overline{a}$ είναι νιοστή ρίζα του μιγαδικού $\overline{z}$.

(**β**) Με χρήση του ανωτέρω, δείξτε ότι οι μη πραγματικές νιοστές ρίζες της μονάδος είναι ανά δυο συζυγείς.

(**γ**) Δείξτε ότι αν ζ_λ είναι μία νιοστή ρίζα της μονάδος $\left(0<\lambda<\nu\right)$, τότε $\overline{\zeta_\lambda} = \zeta_{\nu-\lambda}$.

(**δ**) Αν ζ_0, ζ_1, ζ_2 είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδος, δείξτε ότι $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = 1$ και $\zeta_2^2 = \zeta_1$.

Λύση.

(**α**) Αφού ο a είναι μία νιοστή ρίζα του z, ισχύει ότι $a^\nu = z \Leftrightarrow \overline{\left(a^\nu\right)} = \overline{z} \Leftrightarrow \left(\overline{a}\right)^\nu = \overline{z}$.

(**β**) Έστω ότι ο ζ_λ είναι μία νιοστή ρίζα του 1. Τότε ο $\overline{\zeta_\lambda}$ θα είναι μία νιοστή ρίζα του $\overline{1}$ δηλαδή του 1.

(**γ**) Είναι $\zeta_\lambda \cdot \zeta_{\nu-\lambda} = \zeta_1^\lambda \cdot \zeta_1^{\nu-\lambda} = \zeta_1^\nu = 1$. Συνεπώς $\zeta_{\nu-\lambda} = \dfrac{1}{\zeta_\lambda}$.

Γνωρίζομε ότι αν $|z| = 1 \Rightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Άρα από την $\zeta_{\nu-\lambda} = \dfrac{1}{\zeta_\lambda}$ προκύπτει ότι $\zeta_{\nu-\lambda} = \overline{\zeta_\lambda}$.

(**δ**) Είναι $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = \zeta_1 \cdot \zeta_1^2 = \zeta_1^3 = 1$.

Είναι $\zeta_2^2 = \left(\zeta_1^2\right)^2 = \zeta_1^4 = \zeta_1^3 \cdot \zeta_1 = 1 \cdot \zeta_1 = \zeta_1$.

Εφαρμογή.

Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = -64$.

Λύση.

$z^3 = -64 \Leftrightarrow z^3 = 64(cos\pi + i \cdot sin\pi)$

Από τη θεωρία ισχύει ότι $z_k = \sqrt[\nu]{|\alpha|} \cdot \left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{\nu} + i \cdot sin\frac{\varphi + 2k\pi}{\nu} \right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \nu - 1$

Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$z_k = \sqrt[3]{64} \cdot \left(cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right),\ k = 0,\ 1,\ 2$$

Δηλαδή $z_k = 4\left(cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right),\ k = 0,\ 1,\ 2$

Συνεπώς:

- $z_0 = \sqrt[3]{64}\left(cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3} \right) = 4\left(cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3} \right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 2i\sqrt{3}$

- $z_1 = 4\left(cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi + 2\pi}{3} \right) = 4(cos\pi + i \cdot sin\pi) = 4(-1 + i \cdot 0) = -4$

- $z_2 = 4\left(cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi + 4\pi}{3} \right) = 4\left(cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot sin\frac{5\pi}{3} \right) = 2 - 2i\sqrt{3}$

Εφαρμογή.

Να λυθεί η εξίσωση $z^5=-1$.

Λύση.

Είναι $z^5=-1 \Leftrightarrow z^5=cos\pi+i\cdot sin\pi$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο $z_k=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\cdot\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}+i\cdot sin\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \nu-1$

που στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται

$$z_k=\sqrt[5]{1}\cdot\left(cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

δηλαδή $z_k=\left(cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ προκύπτει ότι

- $z_0=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{5}\right)=cos\frac{\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi}{5}=cos36^0+i\cdot sin36^0$.

- $z_1=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{5}\right)=cos\frac{3\pi}{5}+i\cdot sin\frac{3\pi}{5}=cos108^0+i\cdot sin108^0$

ή με δεύτερο τρόπο

$$z_1=z_0\zeta_1=\left(cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{2\pi}{5}+isin\frac{2\pi}{5}\right)=cos\frac{3\pi}{5}+isin\frac{3\pi}{5}$$
$$=cos108^0+isin108^0$$

- $z_2=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{5}\right)=cos\frac{\cancel{5}\pi}{\cancel{5}}+i\cdot sin\frac{\cancel{5}\pi}{\cancel{5}}=-1+i\cdot 0=-1$

ή με δεύτερο τρόπο

$$z_2=z_0\cdot\zeta_2=\left(cos\frac{\pi}{5}+i\cdot sin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{4\pi}{5}+i\cdot sin\frac{4\pi}{5}\right)=cos\frac{5\pi}{5}+i\cdot sin\frac{5\pi}{5}=-1.$$

- $z_3=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 3\pi}{5}+isin\frac{\pi+2\cdot 3\pi}{5}\right)=cos\frac{7\pi}{5}+isin\frac{7\pi}{5}=cos228^0+i\cdot sin228^0$

ή με δεύτερο τρόπο

$$z_3=z_0\zeta_3=\left(cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{6\pi}{5}+isin\frac{6\pi}{5}\right)=cos\frac{7\pi}{5}+isin\frac{7\pi}{5}$$
$$=cos228^0+isin228^0$$

- $z_4=\sqrt[5]{1}\left(cos\frac{\pi+2\cdot 4\pi}{5}+isin\frac{\pi+2\cdot 4\pi}{5}\right)=cos\frac{9\pi}{5}+isin\frac{9\pi}{5}=cos324^0+isin324^0$

ή με δεύτερο τρόπο

$$z_4=z_0\zeta_4=\left(cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}\right)\left(cos\frac{8\pi}{5}+isin\frac{8\pi}{5}\right)=cos\frac{9\pi}{5}+isin\frac{9\pi}{5}$$
$$=cos324^0+isin324^0$$

Εφαρμογή.

Να βρεθούν οι τρίτης τάξεως (ή κυβικές) ρίζες του i.

Λύση.

Γνωρίζομε ότι $i = 0 + 1i$, $Argi = \frac{\pi}{2}$ και $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

- $$z_0 = \sqrt[3]{|i|}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) =$$

$$1\left(cos\frac{\pi}{6} + i\cdot sin\frac{\pi}{6}\right) = cos30^0 + i\cdot sin30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

- $$z_1 = \sqrt[3]{|i|}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{3} + i\cdot sin\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right) =$$

$$cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot sin\frac{5\pi}{6} = cos150^0 + i\cdot sin150^0 = -cos30^0 + i\cdot sin30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

ή με δεύτερο τρόπο

$$z_1 = z_0\zeta_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \underbrace{i\frac{\sqrt{3^2}}{4} - \frac{i}{4}}_{\frac{2}{4}i} + i^2\frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

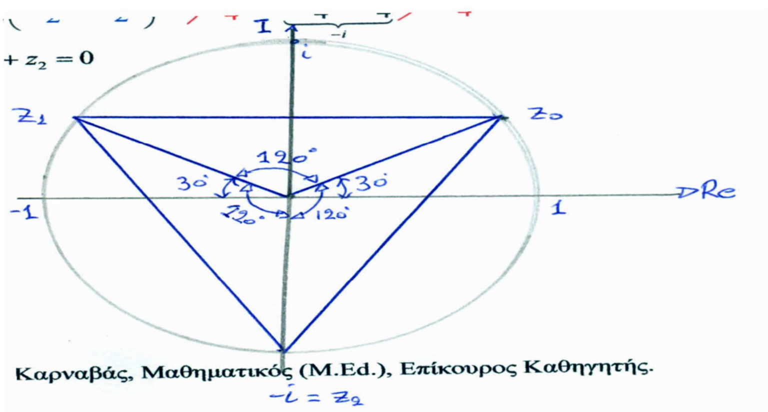
- $$z_2 = \sqrt[3]{|i|}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\cdot sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\cdot sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right) =$$

$$cos\frac{9\pi}{6} + i\cdot sin\frac{9\pi}{6} = cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot sin\frac{3\pi}{2} = cos270^0 + i\cdot sin270^0 = 0 + i\cdot(-1) = -i$$

ή με δεύτερο τρόπο

$$z_2 = z_0\zeta_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{4}} \underbrace{-i\frac{\sqrt{3^2}}{4} - \frac{i}{4}}_{-i} \cancel{-i^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = -i.$$

Παρατήρηση. • $z_0 + z_1 + z_2 = 0$.



Εκθετική μορφή μιγαδικών. Νεπέρειος λογάριθμος μιγαδικών αριθμών.

Εκθετική μορφή μιγαδικών αριθμών.

Κάθε μιγαδικός αριθμός γράφεται στην εκθετική του μορφή, δηλαδή $z=\rho\left(cos\theta+i\cdot sin\theta\right)=\rho\cdot e^{i\theta}$.

Σημείωση Είναι γνωστό από τον Euler πως ισχύει ότι: $e^{i\theta}=\left(cos\theta+i\cdot sin\theta\right)$.

Νεπέρειος λογάριθμος μιγαδικών αριθμών.

Έστω ο μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z=\rho\left(cos\theta+i\cdot sin\theta\right)=\rho e^{i\theta}$.

Είναι $lnz=lnp+lne^{i\theta}=lnp+i\theta lne=lnp+i\theta$ όπου $\theta\in\left(-\pi,\ \pi\right)$ πρωτεύον όρισμα.

Αν δεν είναι πρωτεύον όρισμα τότε ισχύει ότι $lnz=lnp+i\left(2\nu\pi+\theta\right),\ \nu=0,\pm1,\pm2,...$

Ορίζομε τη λογαριθμική συνάρτηση ως

$$logz=lnp+i\left(2\nu\pi+\theta\right),\ \nu=0,\pm1,\pm2,...\ \text{ή}\ \ logz=ln\left|z\right|+i\cdot Arg(z).$$

Εφαρμογή.

Να υπολογισθεί ο $log\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

Είναι $\left|z\right|=2$ και $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$. Άρα $logz=ln2+i\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{3}\right)$.

Εφαρμογή.

Παραγοντοποιήστε το άθροισμα $\alpha^2+\ \alpha\beta+\ \beta^2$.

Λύση.

Είναι:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\frac{\beta}{2}+\beta^2=$$

$$\underbrace{\alpha^2+2a\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}}_{\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2}-\frac{\beta^2}{4}+\beta^2=\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}+\frac{4\beta^2}{4}=\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{3\beta^2}{4}=$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{3\beta^2}{4}i^2=$$

$$\left(\frac{2a+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta i\sqrt{3}}{2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{2a+\beta}{2}-\frac{\beta i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2a+\beta}{2}+\frac{\beta i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Εφαρμογή.

Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2+px+q=0$, με $p,q\in\mathbb{R}$ και $p^2-4q<0$ έχει λύση στο $\mathbb{C}$.

Λύση.

Πράγματι

$$x^2+px+q=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\cancel{2}\frac{p}{\cancel{2}}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}=0 \ .$$

Θέτω $\frac{p}{2}=-a$ και $\frac{4q-p^2}{4}=\beta^2$.

Το $\beta\in\mathbb{R}$, διότι είναι $4q-p^2>0$.

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$(x-\alpha)^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-a)^2-(\beta i)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=0$$

Άρα, η αρχική εξίσωση έχει, στο $\mathbb{C}$, λύσεις $x=a+\beta i$ και $x=a-\beta i$.