Αντιστοιχίες – Συναρτήσεις.

Έστω δύο μη κενά σύνολα A, B. Λέμε ότι έχομε μία **αντιστοιχία** ή **διμελή σχέση** με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο αφίξεως το B, αν και μόνο αν μπορούμε με ένα συγκεκριμένο τρόπο (ή κανόνα ή διαδικασία) f να συσχετίσομε ένα τουλάχιστο στοιχείο x του A με ένα ή περισσότερα στοιχεία y του B.

Ο παραπάνω ορισμός, συμβολικά, δίνεται με το $f: A \to B$ και διαβάζομε «η f είναι μία αντιστοιχία με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο αφίξεως το B».

Για τα στοιχεία που συσχετίζονται γράφομε: $x \xrightarrow{f} y$ και διαβάζομε «το x δια μέσου της f αντιστοιχεί στο y» ή «από το σύνολο A το στοιχείο x, δια μέσω της f αντιστοιχεί στο στοιχείο y του B».

Ονομάζομε **τύπο** μίας αντιστοιχίας $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ τη συμβολική έκφραση $x \xrightarrow{f} y$ με την οποία καθορίζεται ο τρόπος που συνδέονται τα αντίστοιχα στοιχεία. Το x ονομάζεται αρχέτυπο ή πρωτότυπο ή ανεξάρτητη μεταβλητή και το y ονομάζεται εικόνα του x ή εξαρτημένη μεταβλητή ή τιμή της f στο x.

Ονομάζομε **πεδίο ορισμού** (domain of definition) της αντιστοιχίας $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ και το συμβολίζομε με το $D(f)$, το σύνολο που περιέχει εκείνα τα στοιχεία x του A για τα οποία υπάρχουν στοιχεία y του B έτσι ώστε $x \xrightarrow{f} y$, δηλαδή ορίζεται ως εξής:

$$D(f) \underset{\text{ορισμ}}{=} \left\{ x \in \mathrm{A} : \exists y \in \mathrm{B} \text{ με } x \xrightarrow{f} y \right\}.$$

Ονομάζομε **πεδίο τιμών** (domain of range) της αντιστοιχίας $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ και το συμβολίζομε με το $R(f)$, το σύνολο των στοιχείων y του B για τα οποία υπάρχουν στοιχεία x του A έτσι ώστε $x \xrightarrow{f} y$, δηλαδή ορίζεται ως εξής:

$$R(f) = \left\{ y \in \mathrm{B} : \exists x \in \mathrm{A} \text{ με } x \xrightarrow{f} y \right\}.$$

Ονομάζομε **γράφημα** (graph) της αντιστοιχίας $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ και το συμβολίζομε $G(f)$, το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) με $x \in \mathrm{A}$, $y \in \mathrm{B}$ έτσι ώστε $x \xrightarrow{f} y$, δηλαδή ορίζεται ως εξής: $G(f) = \left\{ (x, y) \in \mathrm{A} \text{ x } \mathrm{B} : x \xrightarrow{f} y \right\}$.

Το σύνολο $G(f)$ μπορεί να παρασταθεί με το καρτεσιανό του διάγραμμα. Μία τέτοια παράσταση του γραφήματος ονομάζεται γραφική ή γεωμετρική παράσταση της αντιστοιχίας.

Μία αντιστοιχία $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ονομάζεται **μονοσήμαντη** ή **μονότιμη** αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $x \in D(f)$ έχει, δια μέσου της f, ως εικόνα ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in \mathrm{B}$. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται πλειότιμη.

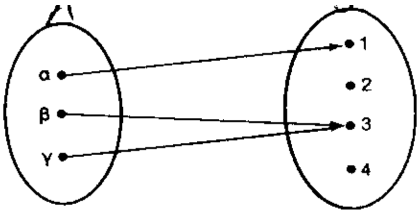
Ορισμός συναρτήσεως. Πεδίο ορισμού συναρτήσεων.

Έστω δύο μη κενά σύνολα Α, Β. Συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β είναι μία διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β. Αν το σύνολο Α είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\mathrm{B}=\mathbb{R}$, τότε η f ονομάζεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

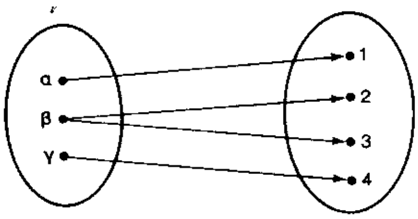
Δηλαδή πραγματική συνάρτηση με πραγματική μεταβλητή είναι κάθε μονοσήμαντη αντιστοιχία του $\mathrm{A}\subseteq\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση είναι γνωστή αν γνωρίζομε το πεδίο ορισμού της, το σύνολο μέσα στο οποίο παίρνει τιμές και το νόμο βάσει του οποίου το κάθε $x\in D(f)$ αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα $y\in R(f)$.

Άσκηση.

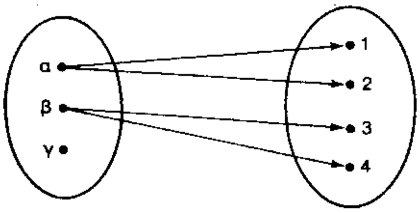
Ποιά διαγράμματα Venn αντιστοιχούν σε συνάρτηση και ποια σε διμελή σχέση;



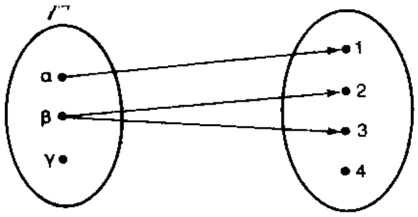
Διάγραμμα 1



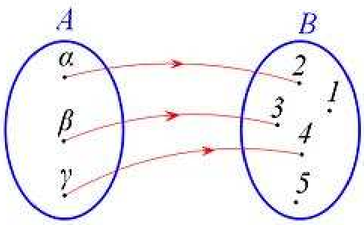
Διάγραμμα 2



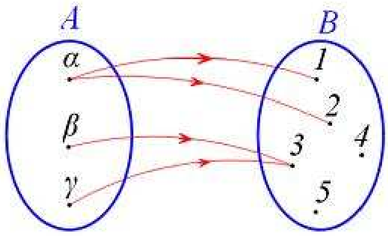
Διάγραμμα 3



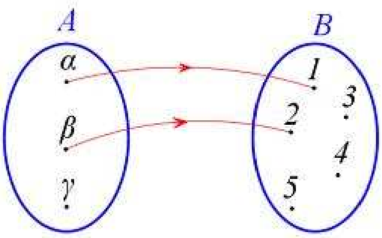
Διάγραμμα 4



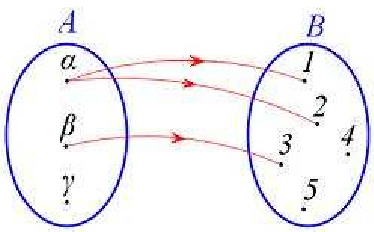
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



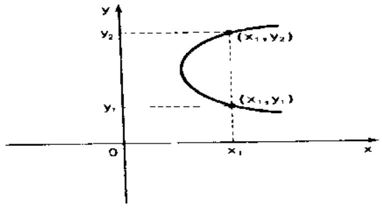
Σχήμα 4

Παρατήρηση.

Από τον ορισμό της συναρτήσεως f προκύπτει ότι κάθε στοιχείο $x\in D(f)$ έχει μία μόνο εικόνα $y\in R(f)$, άρα κάθε ευθεία γραμμή κάθετη στον άξονα xx' σε σημείο που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα μόνο σημείο.

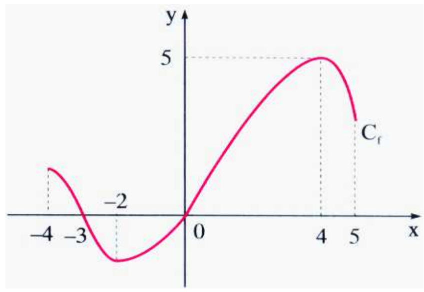
Αν η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει, τότε πρόκειται για διμελή σχέση και όχι συνάρτηση. Στο σχήμα 1 έχομε τη γραφική παράσταση διμελούς σχέσεως και όχι συναρτήσεως, διότι για $x = x_1$ υπάρχουν δυο αντίστοιχες τιμές του y, η y_1 και η y_2.

Σχήμα 1.



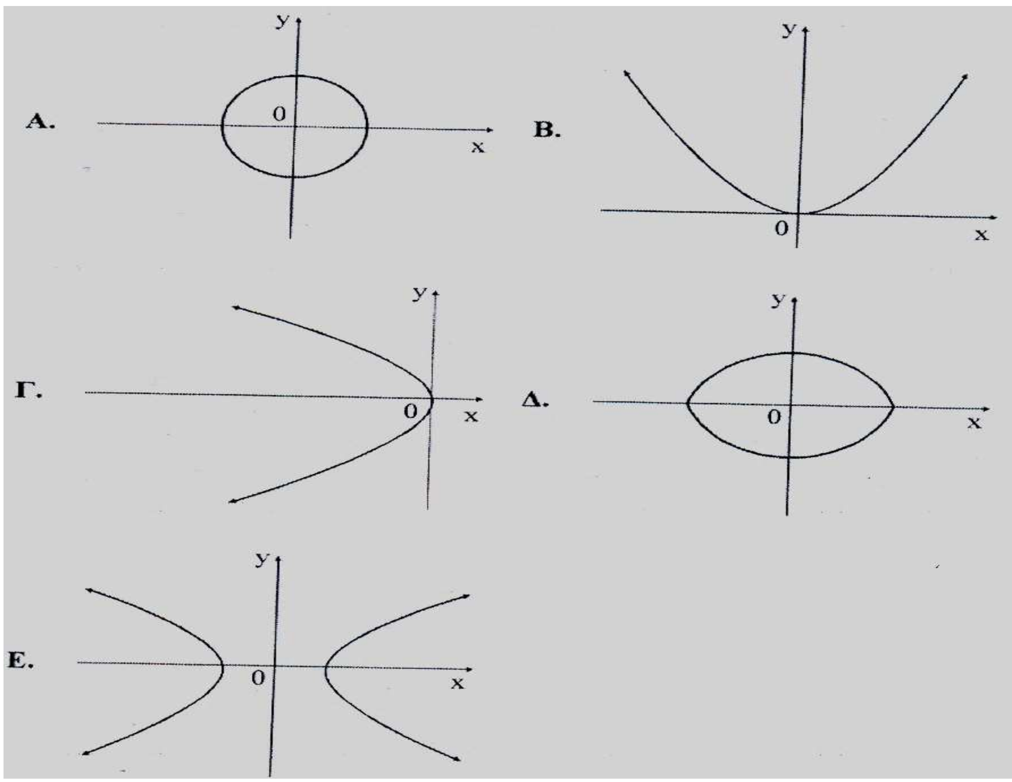
Άσκηση 1.

Από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f (σχήμα 2), βρείτε πεδίο ορισμού, διαστήματα μονοτονίας, λύσεις εξισώσεως $f(x)=0$, λύσεις ανισώσεως $f(x)>0$ και λύσεις εξισώσεως $2^{f(x)}=32$. Σχήμα 2.

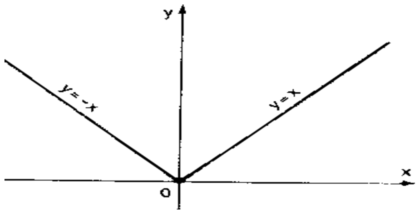


Άσκηση 2.

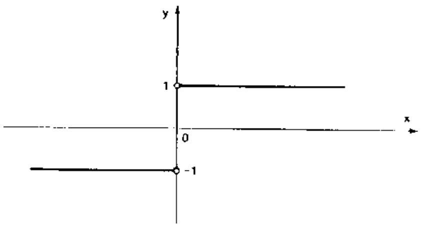
Ποιές από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνουν συναρτήσεις;



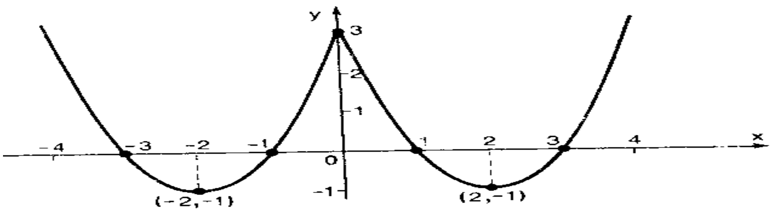
Άσκηση 1. Κάντε τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x\leq 0 \end{cases}$.



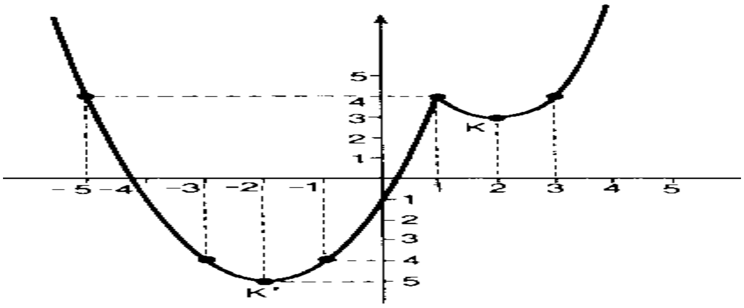
Άσκηση 2. Ομοίως για $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & ,x>0 \\ -1 & ,x<0 \end{cases}$.



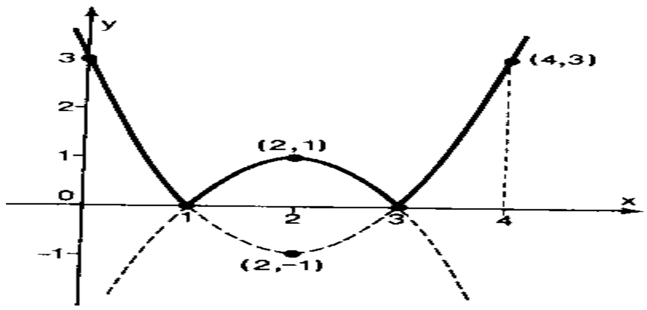
Άσκηση 3. Ομοίως για $f(x)=x^2-4|x|+3=\begin{cases} x^2-4x+3 & ,x\geq 0 \\ x^2+4x+3 & ,x<0 \end{cases}$



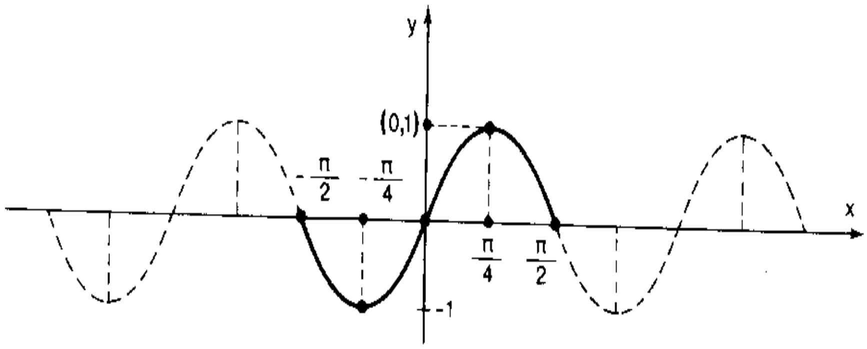
Άσκηση 4. Ομοίως για $f(x)=x^2-4|x-1|+3=\begin{cases} x^2-4x+7 & ,x\geq 1 \\ x^2+4x-1 & ,x<1 \end{cases}$.



Άσκηση 5. Ομοίως για $f(x)=|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3 & ,x\leq 1 \text{ η } x\geq 3 \\ -x^2+4x-3 & ,1<x<3 \end{cases}$

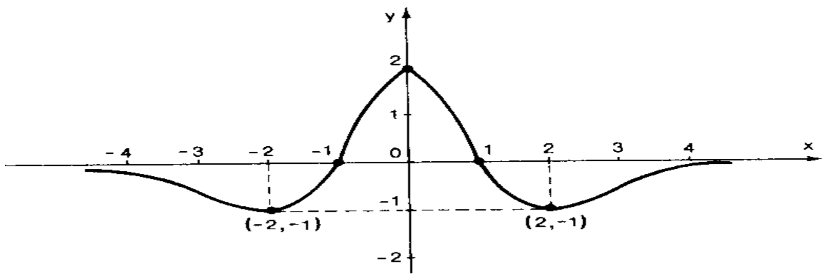


Άσκηση 6. Ομοίως για $f(x) = \eta\mu(2x)$

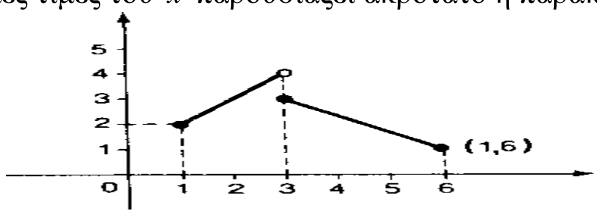


Άσκηση 7. Η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος έχει $D(f) = \mathbb{R}$.

(**α**) Για ποιες τιμές του x παρουσιάζει ακρότατα τα οποία και να υπολογίσετε;
(**β**) Ποιό το πεδίο τιμών της;
(**γ**) Λύστε την εξίσωση $f(x) = 0$.
(**δ**) Λύστε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.



Άσκηση 8. Για ποιες τιμές του x παρουσιάζει ακρότατο η παρακάτω συνάρτηση;

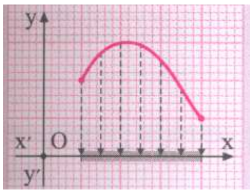


Εύρεση πεδίου ορισμού συναρτήσεων.

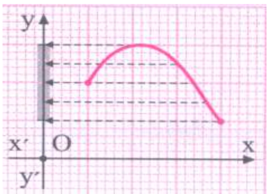
Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

Τύπος συναρτήσεως	Περιορισμοί
$f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$	Κανένας
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt[2\nu]{P(x)}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$	$P(x)\geq 0$
$f(x)=\sqrt[2\nu+1]{P(x)}$	Κανένας
$f(x)=\log\left(P(x)\right)$	$P(x)>0$
$f(x)=\left[P(x)\right]^{Q(x)}$	$P(x)>0$
$f(x)=\dfrac{5}{P(x)}+\sqrt{Q(x)}+\log\ \mathrm{h}(x)$	$P(x)\neq 0$, $Q(x)\geq 0$, h(x)>0
$f(x)=\varepsilon\phi\left[P(x)\right]$	$P(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$
$f(x)=\sigma\phi\left[P(x)\right]$	$P(x)\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

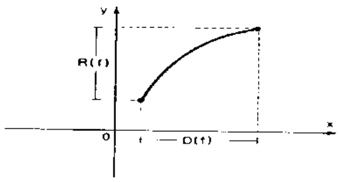
Από τη γραφική παράσταση μίας συναρτήσεως προσδιορίζομε τα πεδία ορισμού και τιμών της. Πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των σημείων του άξονα xx' που είναι οι ορθές προβολές πάνω σε αυτόν, όλων των σημείων της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως (Σχήμα 1).



Σχήμα 1.



Σχήμα 2.



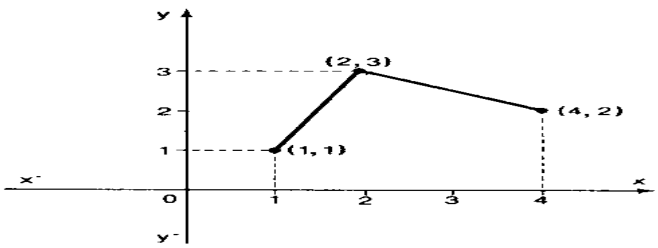
Σχήμα 3.

Πεδίο τιμών είναι το σύνολο των σημείων του άξονα yy' που είναι ορθές προβολές των σημείων της γραφικής παραστάσεως (Σχήμα 2). Τα ανωτέρω περιγράφονται στο σχήμα 3.

Πρέπει να προσεχθεί ότι το $D(f)$ είναι σημεία του xx' άξονα και το $R(f)$ σημεία του yy' άξονα, ανεξάρτητα από τα γράμματα που χρησιμοποιούμε για να δηλώσομε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.

Στο σχήμα 4, είναι $D(f)=\left[1,4\right]$ και $R(f)=\left[1,3\right]$.

Σχήμα 4.



Παράδειγμα 1. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$

Παράδειγμα 2. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0 \ \& \ x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+2) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 2 \ \eta \ x < -2\} = (-\infty, \ -2) \cup (2, \ +\infty)$

Παράδειγμα 3. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$.

$\Pi O = \mathbb{R}$ διότι $x^2 + 4 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (1-x)(1+x) \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, \ 1]\} = [-1, \ 1]$

Παράδειγμα 5. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+1) \geq 0\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : \ x > 2 \ \eta \ x \leq -1\} = (-\infty, \ -1] \cup [2, \ +\infty)$

Παράδειγμα 6. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

$\Pi O = \mathbb{R}$ διότι $x^2 + 4 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 7. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \sqrt{|x-2|+1}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 8. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \sqrt{|x| - 4}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 4\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 4 \ \eta \ x \leq -4\} = (-\infty, -4] \cup [4, \ +\infty)$

Παράδειγμα 9. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1| - 2}}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| - 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| > 2\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 2 \ \eta \ x - 1 < -2\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \ \eta \ x < -1\} = (-\infty, \ -1) \cup (+3, \ +\infty)$

Παράδειγμα 10. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{|x+1| - 3}}$.

$\Pi O = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \neq 3\} =$

$\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 3 \text{ η } x+1\neq -3\}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 2 \text{ η } x\neq -4\}=\mathbb{R}-\{-4,\ 2\}$

Παράδειγμα 11. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f, f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$.

$\Pi O=\{x\in\mathbb{R}: -x^2+5x-4\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: -(x-4)(x-1)\geq 0\}=$
$\{x\in\mathbb{R}: (x-4)(x-1)\leq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x\in[1,\ 4]\}=[1,\ 4]$

Παράδειγμα 12. Εύρεση πεδίου ορισμού της $f, f(x)=\sqrt{-x^2+1}-\sqrt{x^2-6x+8}$.

$\Pi O=\{x\in\mathbb{R}: -x^2+1\geq 0 \ \& \ x^2-6x+8\geq 0\}=$
$\{x\in\mathbb{R}: (-x+1)(-x-1)\geq 0 \ \& \ (x-4)(x-2)\geq 0\}=$
$\{x\in\mathbb{R}: x\in[-1,\ 1] \ \& \ x\in(-\infty,\ 2]\cup[4,\ +\infty)\}=[-1,\ 1]$

Παράδειγμα 13. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{5x+2}{|x|+1}$.

$\Pi O=\{x\in\mathbb{R}: |x|+1\neq 0\}=\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 14. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{3}{|x-2|-7}$.

$\Pi O=\{x\in\mathbb{R}: |x-2|-7\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: |x-2|\neq 7\}=\{x\in\mathbb{R}: x-2\neq 7 \ \textit{και} \ x-2\neq -7\}=$
$\{x\in\mathbb{R}: x\neq 9 \ \textit{και} \ x\neq -5\}=\mathbb{R}-\{-5,\ 9\}$.

Παράδειγμα 15. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{5x+3}{x-2}-\sqrt{x^2-4}$.

$\Pi O=\{x\in\mathbb{R}: x-2\neq 0 \ \textit{και} \ x^2-4\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 2 \ \textit{και} \ (x-2)(x+2)\geq 0\}=$
$\{x\in\mathbb{R}-\{2\} \ \textit{και} \ (x-2)(x+2)\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}-\{2\} \ \textit{και} \ x\in(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)\}=$
$(-\infty,\ -2]\cup(2,\ +\infty)$.

Παράδειγμα 16. Εύρεση πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{3x+1}{2sinx-1}$.

$\Pi O=\{x\in\mathbb{R}: 2sinx-1\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}: sinx\neq \dfrac{1}{2}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: sinx\neq sin\dfrac{\pi}{6}\right\}=$
$\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{6} \ \textit{και} \ x\neq 2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\right\}=$
$\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\pi \ \textit{και} \ x\neq\left(2k+1-\dfrac{1}{6}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}=$
$\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\pi \ \textit{και} \ x\neq\left(2k+\dfrac{5}{6}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}=$
$\mathbb{R}-\left\{\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\pi,\ \left(2k+\dfrac{5}{6}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Άσκηση 1. Εύρεση πεδίου ορισμού των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt[3]{1-x}$ (β) $f(x)=ln\left(1-|x|\right)$ (γ) $f(x)=ln\left(2\cos x-1\right)$

(δ) $f(x)=\sqrt{-2-lnx+ln^2x}$ (ε) $f(x)=\left(lnx\right)^{lnx}$ (στ) $f(x)=\left(2-|x|\right)^{\sqrt{x}}$

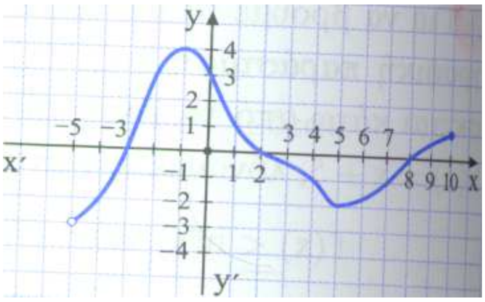
(στ) $f(x)=\sqrt{log\dfrac{7x-x^2}{6}}$ (ζ) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-2}-\sqrt{e^x-1}$ (η) $f(x)=\dfrac{1}{ln\left(1-x\right)}$

(θ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ (ι) $f(x)=ln\left(|x|-x\right)$ (κ) $f(x)=ln\left(4-x^2\right)$

(λ) $f(x)=ln|lnx|$ (μ) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-|x|}$ (ν) $f(x)=\sqrt{ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$

(ξ) $f(x)=ln\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}\right)$

Άσκηση 2. Από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f (σχήμα 5), βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών της, τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$ και $f\left(f(-1)\right)$.
Λύστε τις εξισώσεις $f(x)=0$, $f(x)=-2$ και την ανίσωση $f(x)<3$. Σχήμα 5.



Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση

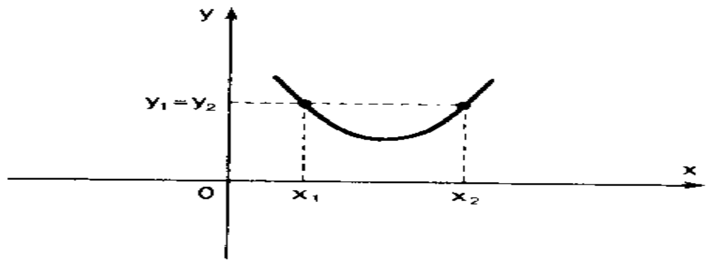
Μία συνάρτηση f ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη ή αμφιμονότιμη ή $1-1$ (ένα προς ένα) αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 \neq x_2$ έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ισοδυνάμως από την αντιθετοαντιστροφή, η ανωτέρω πρόταση γράφεται και ως εξής: Μία συνάρτηση f ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη ή $1-1$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έπεται ότι $x_1 = x_2$.

Μία $1-1$ συνάρτηση στη γραφική της παράσταση είναι τέτοια ώστε οποιαδήποτε ευθεία γραμμή γραμμή, κάθετη στον άξονα yy' να μην τέμνει την γραφική παράσταση σε περισσότερα από ένα σημεία.

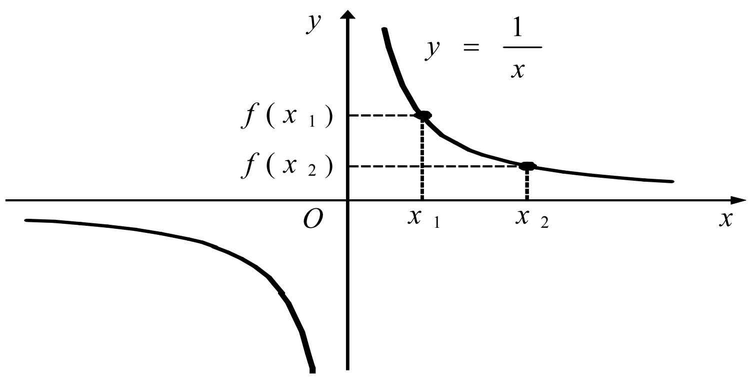
Η συνάρτηση που παριστάνεται γραφικά σχήμα 1 δεν είναι 1-1, διότι με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $y_1 = y_2$.

Σχήμα 1.



Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνάρτηση $1-1$ (σχήμα 2).

Σχήμα 2.



Παράδειγμα 1. Η συνάρτηση $f(x) = ax$ με $a \in \mathbb{R}^*$ είναι $1-1$. Πράγματι αφού έχει $\Pi O = \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1 \neq ax_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow y_1 \neq y_2$.

Μία διαφορετική απόδειξη, με χρήση της αντιθετοαντιστροφής, είναι η ακόλουθη: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Παράδειγμα 2. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a \in \mathbb{R}^*$ και $\beta \in \mathbb{R}$ είναι $1-1$. Πράγματι, αφού έχει $\Pi O = \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1 \neq ax_2 \Rightarrow ax_1 + \beta \neq ax_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Μία διαφορετική απόδειξη, με χρήση της αντιθετοαντιστροφής, είναι η ακόλουθη: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + \beta = ax_2 + \beta \Rightarrow \alpha x_1 = \alpha x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

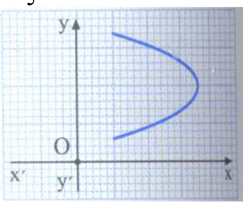
Παράδειγμα 3. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a}{x}$ με $a\in\mathbb{R}^{*}$ είναι $1-1$. Πράγματι αφού έχει $\Pi O=\mathbb{R}^{*}$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^{*}$ με $x_1\neq x_2\Rightarrow\dfrac{a}{x_1}\neq\dfrac{a}{x_2}\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\Rightarrow y_1\neq y_2$.

Μία διαφορετική απόδειξη, με χρήση της αντιθετοαντιστροφής, είναι η ακόλουθη: $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^{*}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\dfrac{a}{x_1}=\dfrac{a}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$.

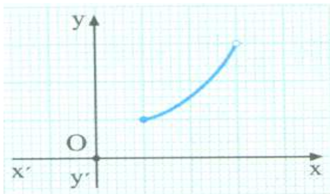
Παράδειγμα 4. Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ με $\Pi O=\mathbb{R}$ δεν είναι $1-1$. Πράγματι $f(3)=f(-3)=9$. Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ με $\Pi O=[0,\ +\infty)$ ή $\Pi O=(-\infty,\ 0]$ είναι $1-1$.

Άσκηση 1.

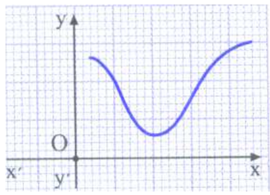
Εξετάστε αν οι επόμενες καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις $1-1$ συναρτήσεων.



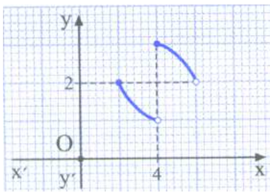
(α)



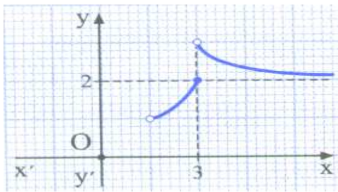
(β)



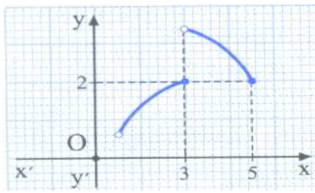
(γ)



(δ)



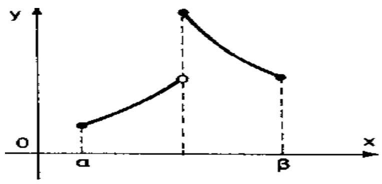
(ε)



(στ)

Παρατήρηση. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι 1-1. Άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, συμβολίζετε f^{-1} και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Παρατήρηση. Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1, δεν έπεται ότι είναι γνησίως μονότονη, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Η άλγεβρα των συναρτήσεων.

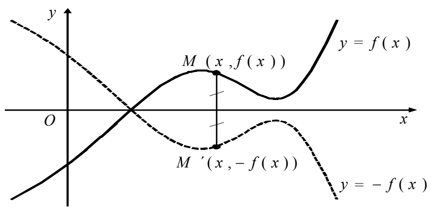
Ονομάζομε **άθροισμα** των συναρτήσεων f, g τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f+g$, έχει τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ και πεδίο ορισμού $D(f+g)=D(f)\bigcap D(g)$.

Ονομάζομε **διαφορά** των συναρτήσεων f, g τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f-g$, έχει τύπο $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ και πεδίο ορισμού $D(f-g)=D(f)\bigcap D(g)$.

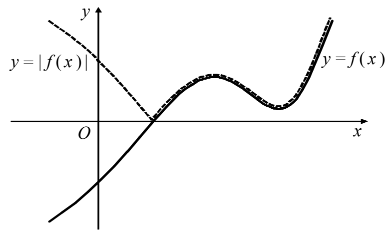
Ονομάζομε **γινόμενο** πραγματικού αριθμού α επί τη συνάρτηση f, τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως af, έχει τύπο $(a\bullet f)(x)=a\cdot f(x)$ και πεδίο ορισμού $D(af)=D(f)$.

Ονομάζομε **αντίθετη** συνάρτηση μίας συναρτήσεως f τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $-f$, έχει τύπο $(-f)(x)=-f(x)$ και πεδίο ορισμού $D(-f)=D(f)$.

Η γραφική παράστασης της συναρτήσεως $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα xx', της γραφικής παράστασης της f, διότι αποτελείται από τα σημεία $M'\left(x,\ -f(x)\right)$ που είναι συμμετρικά των $M\left(x,\ f(x)\right)$, ως προς τον άξονα xx' (Σχήμα 1).



Σχήμα 1.



Σχήμα 2.

Ονομάζομε **γινόμενο** των συναρτήσεων f, g τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f\cdot g$, έχει τύπο $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $D(f\cdot g)=D(f)\bigcap D(g)$.

Ονομάζομε **πηλίκο** σ μίας συναρτήσεως f δια τη συνάρτηση g, τη συνάρτηση που συμβολίζετε ως $f:g$ ή $\dfrac{f}{g}$, έχει τύπο $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού το κοινό πεδίο ορισμού των f, g εκτός από τις τιμές του x που μηδενίζουν την g, δηλαδή $D\left(\dfrac{f}{g}\right)=D(f)\bigcap D(g)-\left\{x\in\mathbb{R}: g(x)=0\right\}$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από όλα τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα xx' καθώς και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα xx', των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα xx' (Σχήμα 2).

Παράδειγμα 1. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=2x$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.
Είναι $\Pi O_f=\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.
Είναι $\Pi O_g=\{x\in\mathbb{R}:1-x^2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:(1-x)(1+x)\geq 0\}=[-1,\ 1]$
Είναι $\Pi O_f\cap\Pi O_g=[-1,\ 1]$. Συνεπώς ισχύει ότι:

$(f+g)(x)=2x+\sqrt{1-x^2}$ και $\Pi O_{f+g}=[-1,\ 1]$

$(f-g)(x)=2x-\sqrt{1-x^2}$ και $\Pi O_{f-g}=[-1,\ 1]$

$(f\cdot g)(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ και $\Pi O_{f\cdot g}=[-1,\ 1]$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ και $\Pi O_{\frac{f}{g}}=(-1,\ 1)$

$\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$ και $\Pi O_{\frac{g}{f}}=[-1,\ 1]-\{0\}=[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$

$(5f)(x)=10x$ και $\Pi O_{5f}=\mathbb{R}$

$(5g)(x)=5\sqrt{1-x^2}$ και $\Pi O_{5g}=[-1,\ 1]$

Παράδειγμα 2. Έστω συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-2}$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.
Είναι $\Pi O_f=\{x\in\mathbb{R}:x-2\geq 0\}=[2,\ +\infty)$
Είναι $\Pi O_g=\{x\in\mathbb{R}:1-x^2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:(1-x)(1+x)\geq 0\}=[-1,\ 1]$
Άρα $\Pi O_f\cap\Pi O_g=\{\ \}=\varnothing$.
Συνεπώς δεν ορίζεται καμία από τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$.

Άσκηση 1. Βρείτε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$ αν $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Άσκηση 2. Εύρεση της $f+g$ αν $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in(-2,\ 0]\\ 3, & x\in(0,\ 2]\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in(-1,\ 0]\\ 2x+1, & x\in(0,\ 2]\end{cases}$.

Άσκηση 3. Βρείτε, αν ορίζεται, τη συνάρτηση $f\cdot g$ αν $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{2-x}$.

Αντίστροφη συνάρτηση.

Για να υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση μίας συναρτήσεως f πρέπει και αρκεί η f να είναι $1-1$. Η f^{-1} και η $\frac{1}{f}$ είναι εντελώς διαφορετικές συναρτήσεις.

Π.χ. για τη συνάρτηση $f(x)=2x+3$ είναι $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{2x+3}$ και $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$.

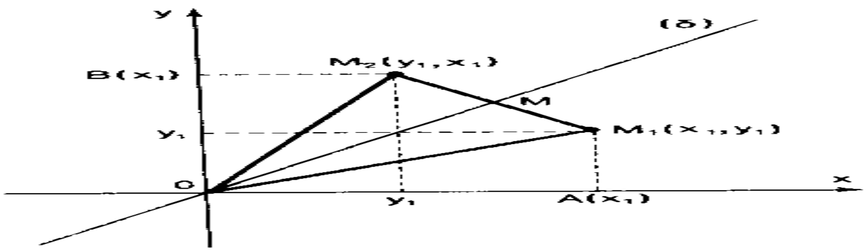
Εύρεση τύπου αντίστροφης συναρτήσεως.

Αφού εξασφαλίσομε ότι η συνάρτηση έχει αντίστροφη, δηλαδή ότι είναι $1-1$, τότε για κάθε $y\in R(f)$ υπάρχει ένα και μόνο ένα $x\in D(f)$ ώστε $y=f(x)$. Για τον προσδιορισμό αυτού του μοναδικού x, λύνομε τον τύπο της f ως προς x.

Ενώ λύνομε ως προς x, απαιτούμε αυτό να ανήκει στο $D(f)$, οπότε προσδιορίζομε ισοδύναμη συνθήκη για το y.

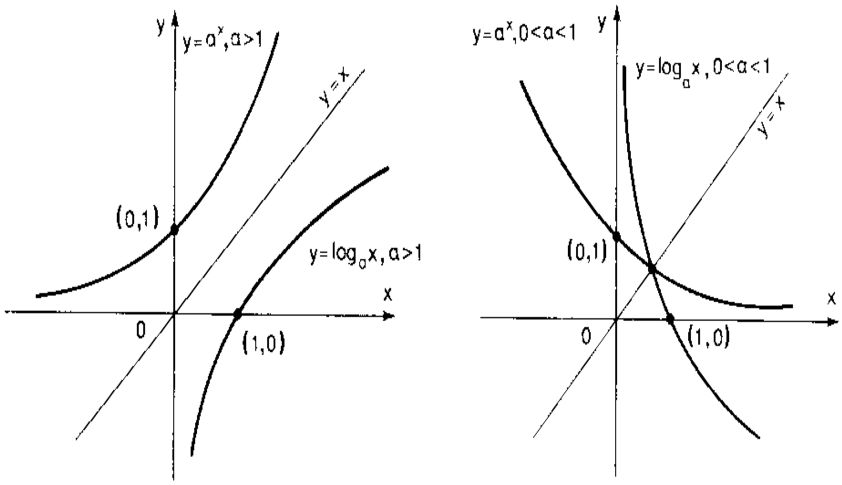
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, δηλαδή την ευθεία $y=x$. Αυτό συμβαίνει διότι από τον ορισμό που δώσαμε για την αντίστροφη συνάρτηση, αν ένα σημείο $\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f, το σημείο $\mathrm{M}_2(y_1,x_1)$ θα βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f^{-1}. Τα σημεία $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων (σχήμα 1).

Σχήμα 1.



Η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής είναι η λογαριθμική συνάρτηση (σχήμα 2).

Σχήμα 2.



Ισότητα συναρτήσεων.

Δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες και σημειώνομε $f = g$ αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε x που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού τους έχουν ίσες τιμές. Συμβολικά ο ορισμός δίνεται ως εξής:

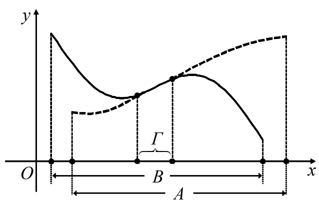
$$f = g \underset{\text{ορισμ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} D(f) = D(g) \\ \text{και} \\ f(x) = g(x), \text{ για καθε } x \in D(f) = D(g) \end{cases}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν δυο συναρτήσεις είναι ίσες, θα έχουν ίσα πεδία τιμών. Δηλαδή $R(f) = R(g)$. Δυο συναρτήσεις είναι διάφορες και σημειώνομε $f \neq g$, αν μια τουλάχιστον από τις παραπάνω συνθήκες δεν ισχύει.

Αν $\mathrm{A} \subseteq D(f) \bigcap D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$, τότε οι συναρτήσεις είναι ίσες στο A. Για να δηλώσομε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες γράφομε $f = g$.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των Α, Β. Αν $\forall x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο σύνολο Γ (Σχήμα 1).

Σχήμα1.



Οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$, έχουν πεδία ορισμού $\Pi\text{O}_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και $\Pi\text{O}_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. Είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma = \mathbb{R} - \{0,\ 1\}$, διότι $\forall x \in \Gamma$ ισχύει ότι $f(x) = g(x) = x + 1$.

Παράδειγμα 1. Εξετάστε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$.

Είναι $\Pi\text{O}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Είναι $\Pi\text{O}_g = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 + 1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Δηλαδή είναι $\Pi\text{O}_f = \Pi\text{O}_g$. Επίσης ισχύει ότι $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x} = \dfrac{x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = \dfrac{1}{x} = f(x)$.

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $f = g$.

Παράδειγμα 2. Δείξτε ότι $f \neq g$ για τις συναρτήσεις $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$.

Είναι $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \dfrac{x(x - 1)}{x - 1} = x = f(x)$. Είναι $\Pi\text{O}_f = \mathbb{R}$ και $\Pi\text{O}_g = \mathbb{R} - \{1\}$. Άρα, $f \neq g$. Η ισότητα των συναρτήσεων ισχύει στο κοινό τους πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{1\}$.

Παράδειγμα 3. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ 2x+1, & x\le 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 3x, & x>0 \\ 2x+1, & x\le 0 \end{cases}$.

$\forall x\le 0$ ισχύει ότι $f=g$.
Είναι $\Pi O_f=\Pi O_g=\mathbb{R}$, αλλά στο σύνολο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f\ne g$.
Πράγματι $f(4)=4^2=16$ και $g(4)=3\cdot 4=12$.

Άσκηση. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες.

(α) $f(x)=x-3$, $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ (β) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

(γ) $f(x)=x-3$, $g(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$ (δ) $f(x)=x$, $g(x)=|x|$

(ε) $f(x)=x+2$, $g(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$ (στ) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

(ζ) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{|x|}$, $g(x)=\sqrt{|1-x|}+\sqrt{x}$

Άρτια & περιττή συνάρτηση.

Η συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν:

- Το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $\forall x \in \mathrm{A}$ είναι $-x \in \mathrm{A}$ και
- $\forall x \in \mathrm{A}$ ισχύει ότι $f(x) = f(-x)$.

Η συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ λέγεται **περιττή** αν και μόνο αν:

- Το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $\forall x \in \mathrm{A}$ είναι $-x \in \mathrm{A}$ και
- $\forall x \in \mathrm{A}$ ισχύει ότι $f(x) = -f(-x)$.

Παρατηρήσεις.

- Η πρώτη προϋπόθεση είναι κοινή στους δυο ορισμούς.
- Μία συνάρτηση μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy'.
- Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $\mathrm{O}(0,\ 0)$.
- Αν μία συνάρτηση είναι άρτια, τότε δεν είναι $1-1$

Παράδειγμα 1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια.

- Επειδή η f είναι πολυωνυμική ισχύει $\Pi\mathrm{O}_f = \mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty) = (-\infty,\ 0] \cup [0,\ +\infty)$, δηλαδή συμμετρικό ως προς το μηδέν .
- Επίσης για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει ότι $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

Παράδειγμα 2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $\Pi\mathrm{O}_f = (2,\ 8]$ δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

- Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως δεν είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. Πράγματι $3 \in \Pi\mathrm{O}_f$ αλλά $-3 \notin \Pi\mathrm{O}_f$. Άρα η συνάρτηση δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

Παράδειγμα 3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι άρτια.

- Η f ως πολυωνυμική έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty) = (-\infty,\ 0] \cup [0,\ +\infty)$.
- Για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει ότι $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

Παράδειγμα 4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -|x| + 3cosx$ είναι άρτια.

- Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty) = (-\infty,\ 0] \cup [0,\ +\infty)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = -|-x| + 3cos(-x) = -|x| + 3cosx = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

Παράδειγμα 5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -4x + sinx$ είναι περιττή.

- Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty) = (-\infty,\ 0] \cup [0,\ +\infty)$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = -4(-x) + sin(-x) = 4x - sinx = -f(x)$.
Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

Παράδειγμα 6. Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4x - 5$.

• Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty) = (-\infty,\ 0] \cup [0,\ +\infty)$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = |-x-3| - 4x - 5 = |x+3| - 4x - 5$

Επειδή $f(x) \neq f(-x)$, η συνάρτηση δεν είναι άρτια.
Επειδή $f(x) \neq -f(-x)$, η συνάρτηση δεν είναι περιττή.

Παράδειγμα 7. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι άρτια.

• Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού:
$$\Pi O = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : (1-x)(1+x) \geq 0\right\} = [-1,\ 1] = [-1,\ 0] \cup [0,\ 1]$$

• $\forall x \in [-1,\ 1]$ ισχύει ότι $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

Παράδειγμα 8. Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - k$ με $k \in \mathbb{R}$.

• Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty) = (-\infty,\ 0] \cup [0,\ +\infty)$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = (-x)^2 - x - k = x^2 - x - k$.

Επειδή $f(x) \neq f(-x)$, η συνάρτηση δεν είναι άρτια.
Επειδή $f(x) \neq -f(-x)$, η συνάρτηση δεν είναι περιττή.

Άσκηση. Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{7x+5}{x-3}$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τους λογαρίθμους

(α) $\log_2 16$ (β) $\log_7 7$ (γ) $\log 10$ (δ) $\log 10.000$ (ε) $\log\left(\ln e^{100}\right)$

(στ) $\ln e$ (ζ) $\ln\frac{1}{e^2}$ (η) $\log_2 4^{15}$ (θ) $\log_4\frac{1}{32}$ (ι) $\log 1$

(κ) $\log_{13} 1$ (κα) $\ln 1$ (κβ) $e^{\ln 5}$ (κγ) $10^{\log 3}$ (κδ) $5^{\log_5 3}$

(κε) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}$ (κστ) $\log_{\sqrt{8}} 32$

2. Βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

(α) $\log x = 3$ (β) $\log_x 9 = 2$ (γ) $\log_x (5x-4) = 2$ (δ) $\log_{27} x = \frac{-2}{3}$

3. Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $\log 20 + \log 50$ (β) $\ln\left(e^4 - e^3\right) - \ln\left(e-1\right)$ (γ) $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 16$

(δ) $\frac{2-\log 4}{\log 5}$ (ε) $\frac{\ln 25 - \log 9}{\ln\sqrt{5} - \log\sqrt{3}}$ (στ) $\frac{\frac{1}{2}+\log_4 18}{\log_4 384 - 3}$

(ζ) $e^{\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{2}{3}\ln 8 + \ln 12}$ (η) $\frac{1+4\cdot\log 2 - 3\cdot\log 4 + \frac{1}{3}\cdot\log 8}{\log 75 - 2\cdot\log\sqrt{3}}$

4. Λύστε τις εξισώσεις

(α) $\log_2\left(x-12\right) = 3$ (β) $\ln\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0$ (γ) $\log x^2 = -2$

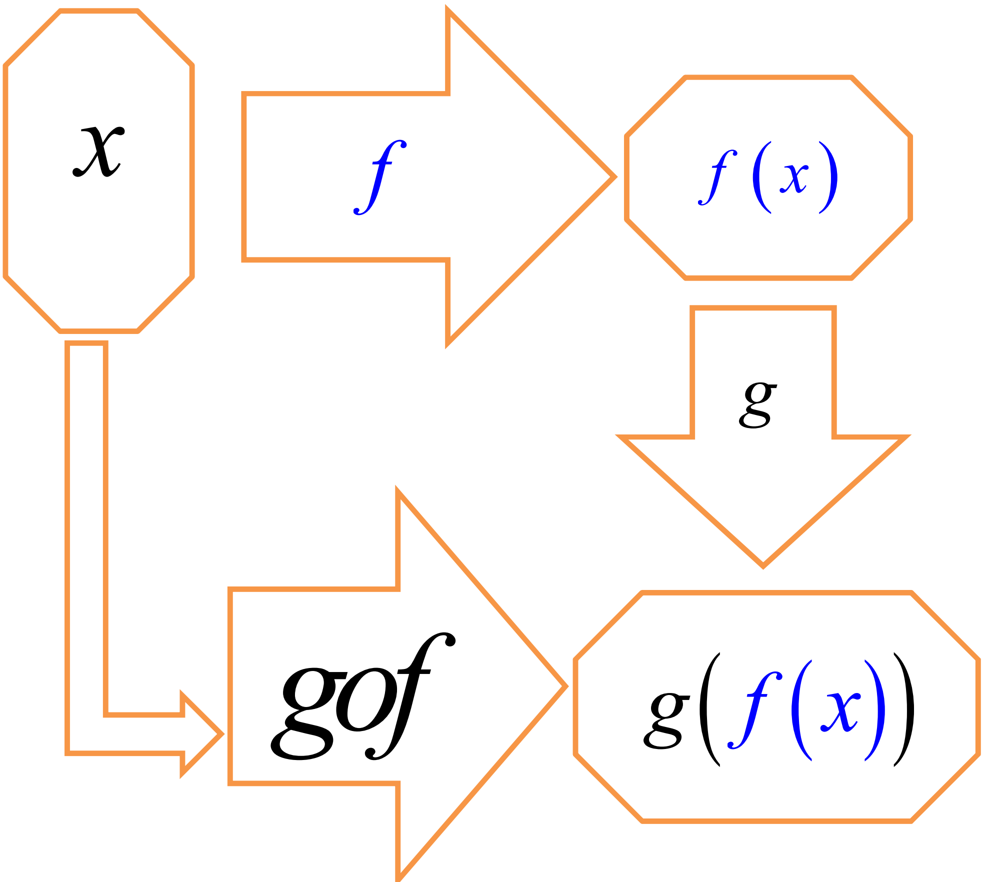
(δ) $\ln\left(3x-1\right) = \ln\left(9-x^2\right)$ (ε) $\log\left(x-6\right) + \log\left(x+1\right) = 3\cdot\log 2$

(στ) $\log\left(64-x^2\right) = 1 + \log(x+4)$

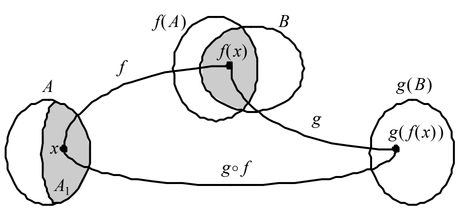
Σύνθεση συναρτήσεων.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $R(f) \cap D(g) \neq \{\ \}$. Σύνθεση της f με τη g ονομάζεται μία νέα συνάρτηση $\Sigma = gof$ η οποία είναι ορισμένη $\forall x \in D(f)$ για το οποίο ισχύει ότι $f(x) \in D(g)$ και της οποίας η τιμή για κάθε τέτοιο x ισούται με την τιμή της συναρτήσεως g στο σημείο $f(x)$.

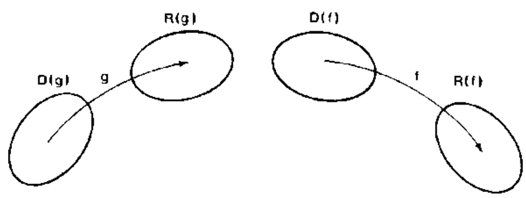
Οι τιμές της $\Sigma(x) = (gof)(x)$ δίνονται από τον τύπο $\Sigma(x) = g(f(x))$, δηλαδή θέτω στη θέση του x της συναρτήσεως g, τον τύπο της f.



Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως, ορίζω ως σύνθεση της f με τη g, και συμβολίζω ως gof, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$.



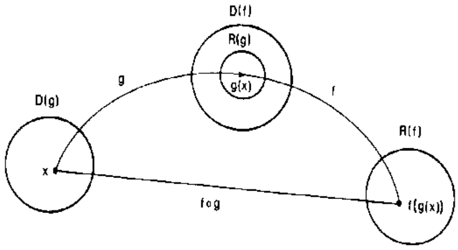
Σχήμα 1.



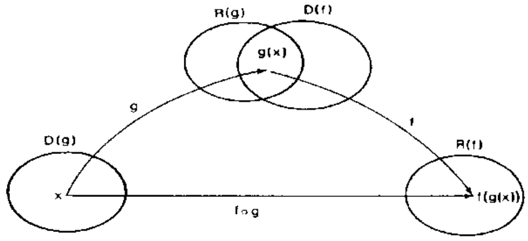
Σχήμα 2.

Το πεδίο ορισμού της gof περιέχει όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A : f(x) \in B\}$ (σχήμα 1).

Η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(\mathrm{A}) \cap B \neq \varnothing$. Στην περίπτωση του σχήματος 2, δεν ορίζεται η συνάρτηση gof.



Σχήμα 3.



Σχήμα 4.

Στην περίπτωση του σχήματος 3, η συνάρτηση fog ορίζεται $\forall x \in D(g)$. Στην περίπτωση του σχήματος 4, η συνάρτηση fog ορίζεται για όσα $x \in D(g)$ η εικόνα τους μέσω της g πάει στο $D(f)$ και επειδή ανήκει και στο $R(f)$, έπεται ότι η εικόνα $g(x)$ ανήκει στην τομή του $R(g)$ με το $D(f)$.

Παράδειγμα 1.

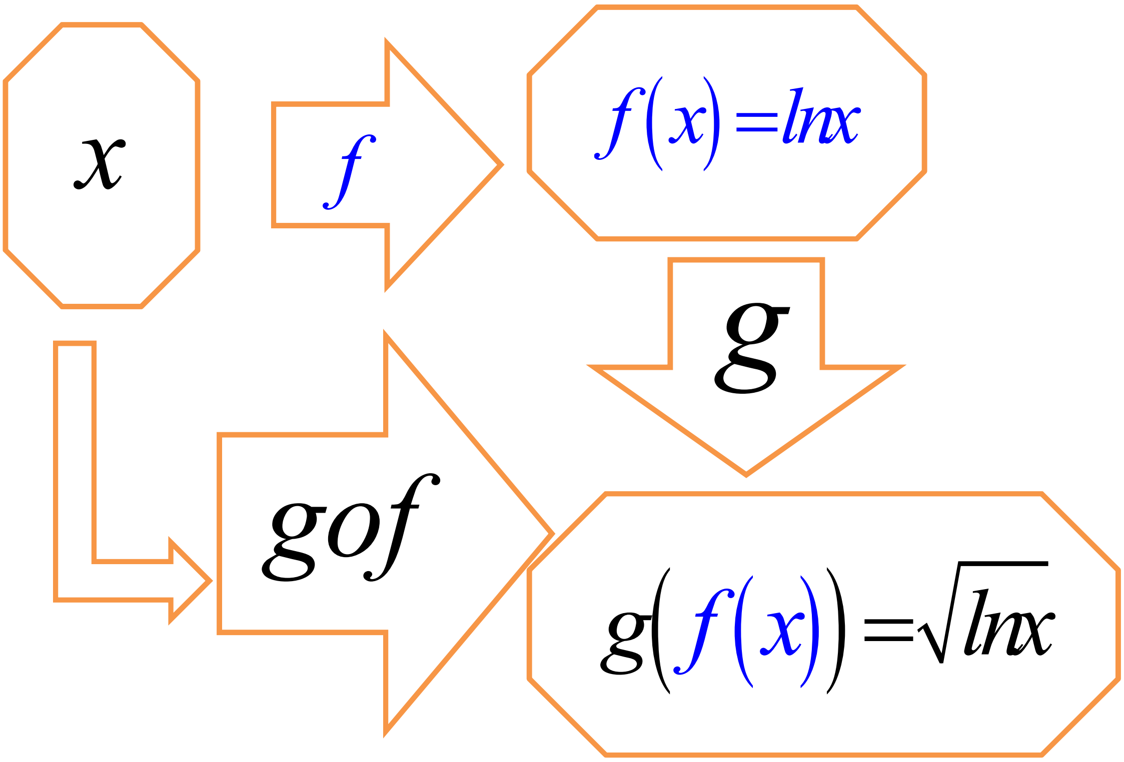
Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = lnx$, $g(x) = \sqrt{x}$. Βρείτε τις συναρτήσεις: gof, fog.

Λύση.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$ και η g το $D_g = [0, +\infty)$.

i) Για να ορίζεται η $g(f(x))$ πρέπει: $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ δηλαδή,
$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ lnx \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$, άρα πρέπει $x \geq 1$.

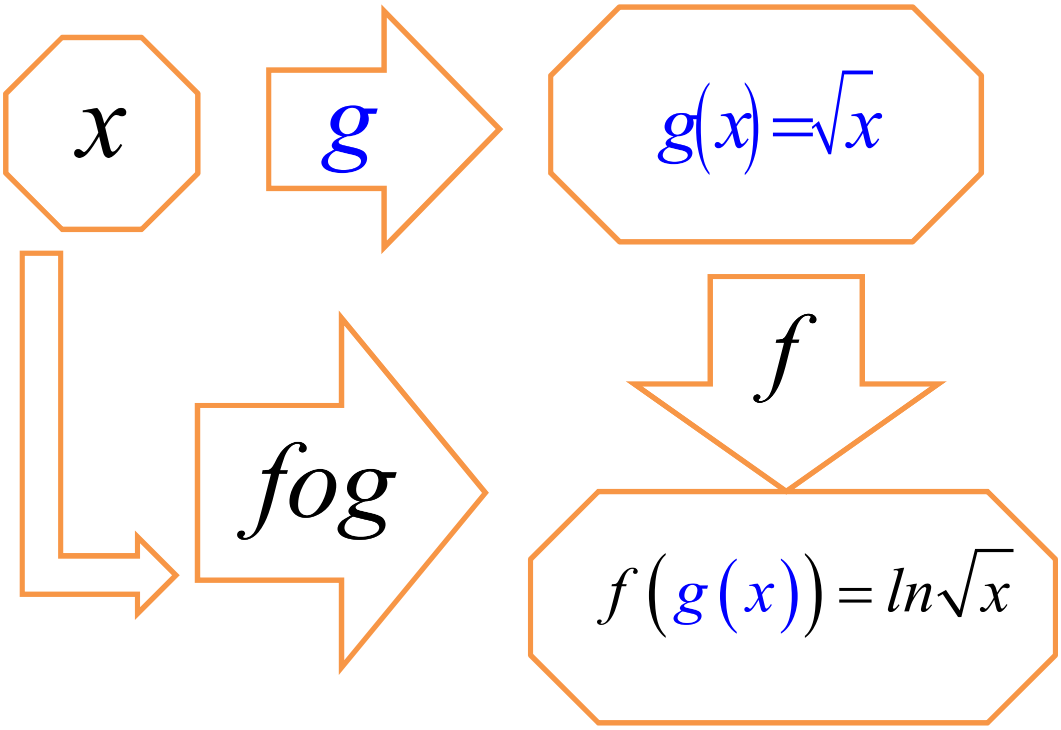
Συνεπώς ορίζεται η gof και $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}$, $\forall x \in [1 + \infty)$.



ii) Για να ορίζεται η $f\left(g(x)\right)$ πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ δηλαδή,

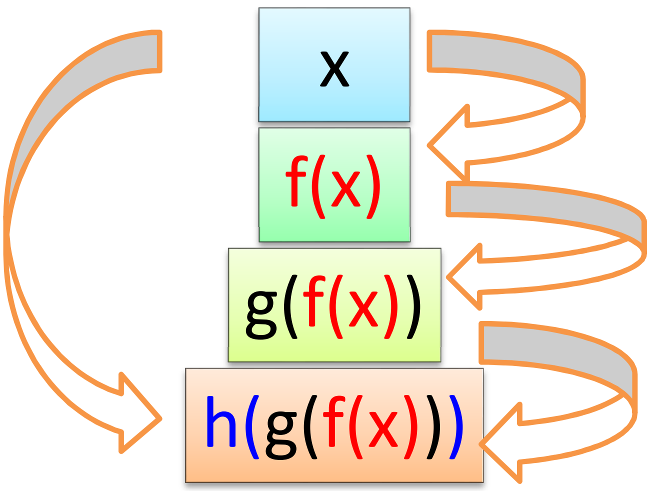
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \text{, άρα πρέπει } x > 0 .$$

Συνεπώς ορίζεται η fog και $(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = \ln\sqrt{x}$, $\forall x \in (0,+\infty)$.



Παρατηρήσεις.

- Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$. Γενικά αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται η $(hog)of$ και ισχύει ότι $ho(gof) = (hog)of$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζομε ως $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.



- Η σύνθεση δυο αρτίων συναρτήσεων, είναι άρτια συνάρτηση.
- Η σύνθεση δυο περιττών συναρτήσεων, είναι περιττή συνάρτηση.
- Η σύνθεση μίας άρτιας και μίας περιττής συναρτήσεως, είναι άρτια συνάρτηση.
- Αν f, g δυο $1-1$ συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού, τότε η συνάρτηση fog αντιστρέφεται και ισχύει ότι: $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$.
- Στο σύνολο των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f_1 of_2 = f_2 of_1$.

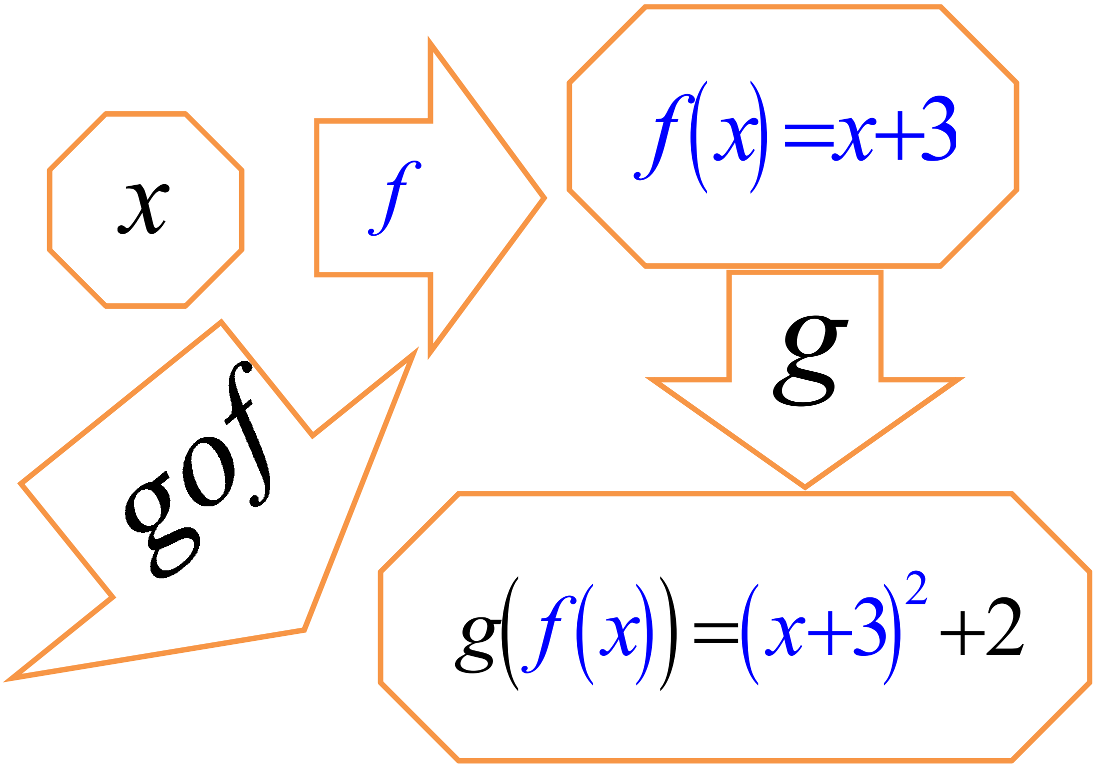
Παράδειγμα 2.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x+3$ με $D(f)=(-1,\ 6]$ και $g(x)=x^2+2$ με $D(g)=\mathbb{R}$. Βρείτε τις συναρτήσεις : gof , fog , fof , gog .

Ορισμός της συναρτήσεως gof .

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x+3)=(x+3)^2+2=x^2+6x+11.$$

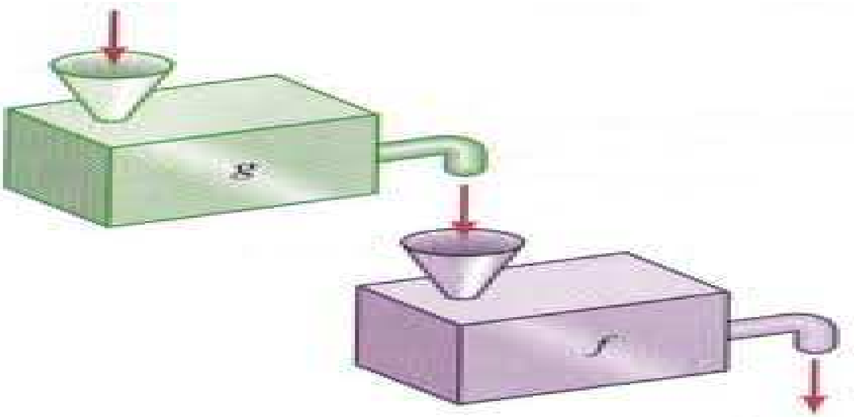
$$\Pi\text{O}_{gof}=\{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}=\{x\in(-1,\ 6]: x+3\in\mathbb{R}\}=(-1,\ 6].$$



Ορισμός της συναρτήσεως fog .

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2+2)=x^2+2+3=x^2+5.$$

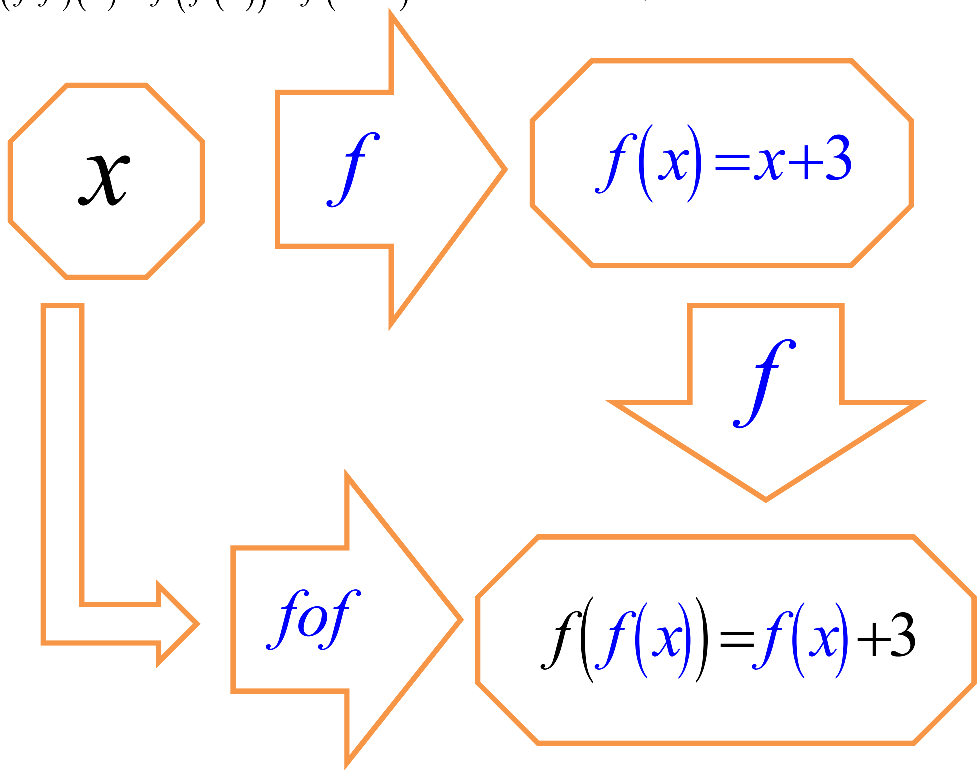
$$\Pi\text{O}_{fog}=\{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2+2\in(-1,\ 6]\}=$$
$$\{x\in\mathbb{R}: -1<x^2+2\le 6\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2+2\le 6\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2\le 4\}=$$
$$\{x\in\mathbb{R}: (x-2)(x+2)\le 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x\in[-2,\ 2]\}=[-2,\ 2].$$



Ορισμός της συναρτήσεως fof .

$$\Pi O_{fof}=\{x\in D(f): f(x)\in D(f)\}=\{x\in(-1,\ 6]: x+3\in(-1,\ 6]\}=$$
$$\{x\in(-1,\ 6]: -1<x+3\leq 6\}=\{x\in(-1,\ 6]: -4<x\leq 3\}=(-1,\ 3].$$

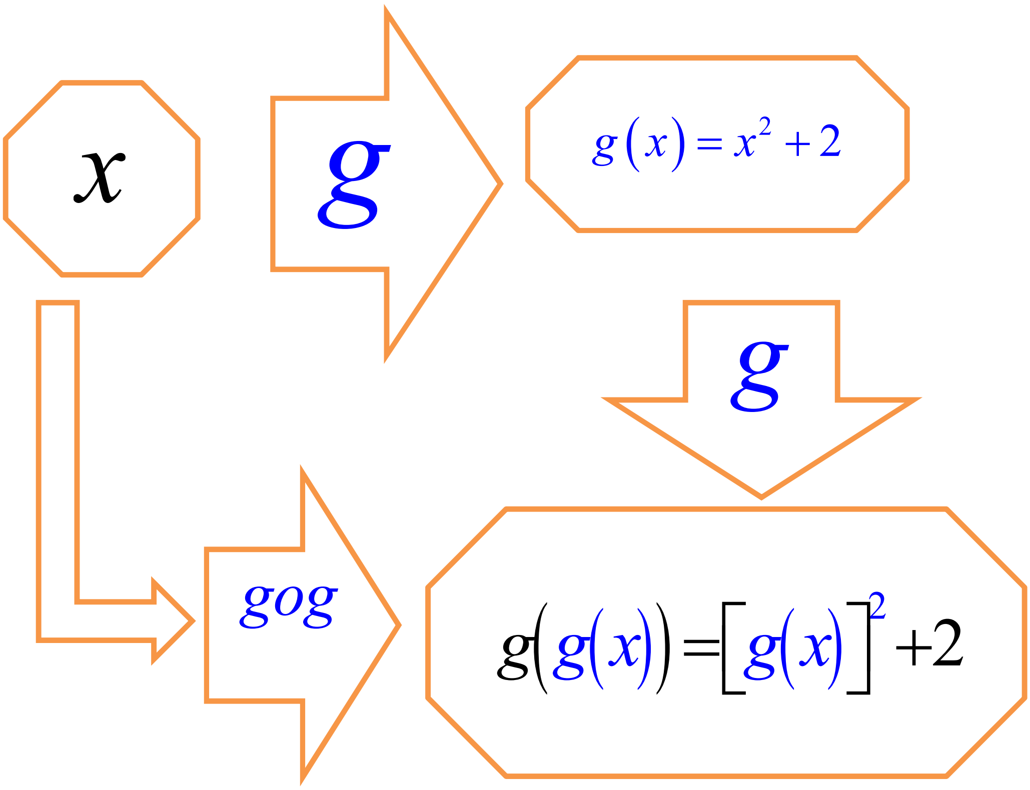
$$(fof)(x)=f(f(x))=f(x+3)=x+3+3=x+6\,.$$



Ορισμός της συναρτήσεως gog .

$$\Pi O_{gog}=\{x\in D(g): g(x)\in D(g)\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2+2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\,.$$

$$(gog)(x)=g(g(x))=g(x^2+2)=(x^2+2)^2+2=x^4+4+4x^2+2=x^4+6+4x^2\,.$$



Παράδειγμα 3.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x^2-3x+2$. Βρείτε τις συναρτήσεις: fog, gof.

Ορισμός της συναρτήσεως fog.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-3x+2)=\sqrt{x^2-3x+2}.$$

$$\Pi\mathrm{O}_{fog}=\{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x+2\geq 0\}=$$
$$\{x\in\mathbb{R}:(x-1)(x-2)\geq 0\}=(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty).$$

Ορισμός της συναρτήσεως gof.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sqrt{x}^2-3\sqrt{x}+2=|x|-3\sqrt{x}+2=x-3\sqrt{x}+2.$$

$$\Pi\mathrm{O}_{gof}=\{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}=\{x\in[0,\ +\infty):\sqrt{x}\in\mathbb{R}\}=[0,\ +\infty).$$

Παράδειγμα 4.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $g(x)=\sqrt{x}$. Βρείτε τις συναρτήσεις: fog, gof, fof.

Ορισμός της συναρτήσεως fog.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\sqrt{1-\sqrt{x}}.$$

$\Pi O_{fog} = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \left\{x \in [0,\ +\infty) : \sqrt{x} \in (-\infty,\ 1]\right\} =$
$\left\{x \ge 0 : \sqrt{x} \le 1\right\} = \left\{x \ge 0 : x^2 \le 1\right\} = \left\{x \ge 0 : x^2 - 1 \le 0\right\} =$
$\left\{x \ge 0 : (x-1)(x+1) \le 0\right\} = \{x \ge 0 : -1 \le x \le 1\} = [0,\ 1]$.

Ορισμός της συναρτήσεως gof.

$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{1-x}\right) = \sqrt{\sqrt{1-x}} = \sqrt[4]{1-x}$.

$\Pi O_{gof} = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \left\{x \in (-\infty,\ 1] : \sqrt{1-x} \ge 0\right\} =$
$\{x \le 1 \ \kappa\alpha\iota \ 1 - x \ge 0\} = (-\infty,\ 1]$.

Ορισμός της συναρτήσεως fof.

$(fof)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{1-x}\right) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

$\Pi O_{fof} = \{x \in D(f) : f(x) \in D(f)\} = \left\{x \le 1 \ \kappa\alpha\iota \ \sqrt{1-x} \le 1\right\} = \{x \le 1 \ \kappa\alpha\iota \ 1 - x \le 1\} =$
$\{x \le 1 \ \kappa\alpha\iota \ x \ge 0\} = [0,\ 1]$.

Παράδειγμα 5.

Έστω συνάρτηση $h(x) = \left(x^2+1\right)^3$. Βρείτε δυο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε $h = fog$.

Λύση.

Έστω συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 + 1$ με $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμικές.

Είναι $(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)^3$.

Επίσης είναι $\Pi O_{fog} = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6.

Έστω συνάρτηση $h(x) = (sinx)^2$. Βρείτε δυο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε $h = fog$.

Λύση.

Έστω συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = sinx$ με $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Είναι $(fog)(x) = f(g(x)) = f(sinx) = (sinx)^2 = sin^2 x$.

Επίσης είναι $\Pi O_{fog} = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \{x \in \mathbb{R} : sinx \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 7.

Να ορισθούν οι συναρτήσεις: fog, gof, fof, gog αν $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{5}{x+4}$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ και $D(g) = \mathbb{R} - \{-4\}$.

Ορισμός της συναρτήσεως fog.

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\frac{5}{x+4}\right)=\frac{\frac{5}{x+4}+1}{\frac{5}{x+4}+2}=\frac{x+9}{2x+13}.$$

Είναι $\Pi O_{fog}=\left\{x\in D(g):g(x)\in D(f)\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-4\}:\frac{5}{x+4}\in\mathbb{R}-\{-2\}\right\}=$

$$\left\{x\neq -4\ \kappa\alpha\iota\ \frac{5}{x+4}\neq -2\right\}=\left\{x\neq -4\ \kappa\alpha\iota\ x\neq -6,5\right\}=\mathbb{R}-\{-4,\ -6,5\}.$$

Ορισμός της συναρτήσεως gof.

$$(gof)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{5}{\frac{x+1}{x+2}+4}=\frac{5x+10}{5x+9}.$$

$\Pi O_{gof}=\left\{x\in D(f):f(x)\in D(g)\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-2\}:\frac{x+1}{x+2}\in\mathbb{R}-\{-4\}\right\}=$

$$\left\{x\neq -2\ \kappa\alpha\iota\ \frac{x+1}{x+2}\neq -4\right\}=\left\{x\neq -2\ \kappa\alpha\iota\ x\neq -\frac{9}{5}\right\}=\mathbb{R}-\{-2,\ -1,8\}.$$

Ορισμός της συναρτήσεως fof.

$$(fof)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\frac{x+1}{x+2}+1}{\frac{x+1}{x+2}+2}=\frac{2x+3}{3x+5}.$$

$\Pi O_{fof}=\left\{x\in D(f):f(x)\in D(f)\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-2\}:\frac{x+1}{x+2}\in\mathbb{R}-\{-2\}\right\}=$

$$\left\{x\neq -2\ \kappa\alpha\iota\ \frac{x+1}{x+2}\neq -2\right\}=\left\{x\neq -2\ \kappa\alpha\iota\ x\neq -\frac{5}{3}\right\}=\mathbb{R}-\left\{-2,\ -\frac{5}{3}\right\}.$$

Ορισμός της συναρτήσεως gog.

$$(gog)(x)=g\left(g(x)\right)=g\left(\frac{5}{x+4}\right)=\frac{5}{\frac{5}{x+4}+4}=\frac{5x+20}{4x+21}.$$

$\Pi O_{gog}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-4\}:g(x)\mathbb{R}-\{-4\}\right\}=\left\{x\neq -4\ \kappa\alpha\iota\ \frac{5}{x+4}\neq -4\right\}=$

$$\left\{x\neq -4\ \kappa\alpha\iota\ \frac{5}{x+4}\neq -4\right\}=\left\{x\neq -4\ \kappa\alpha\iota\ x\neq\frac{-21}{4}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{-21}{4},\ -4\right\}.$$

Ασκήσεις.

1. Να ορισθούν οι συναρτήσεις fog, gof αν $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

2. Να ορισθεί η συνάρτηση gof αν $f(x)=sinx$ και $g(x)=\sqrt{1-2x^2}$.

3. Να ορισθούν οι συναρτήσεις fog, gof αν $f(x)=|x-1|$ και $g(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 1\\ 1-x^2, & x>1\end{cases}$.

4. Ομοίως αν $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\ 1]\\ 0, & x=2\\ 3-x, & x\in(2,\ +\infty)\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\ 1]\\ 2, & x=0\\ 3-x, & x\in(-\infty,\ 0)\end{cases}$.

5. Ομοίως αν $f(x)=sinx$ και $g(x)=\sqrt{4x^2-3}$.

6. Να ορισθεί η συνάρτηση gof αν $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

7. Να ορισθεί η συνάρτηση gof αν $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ και $g(x)=\dfrac{2}{x}$.

8. Να ορισθεί η συνάρτηση fog αν $f(x)=\begin{cases}2x, & |x|\le 1\\ -2x, & |x|>1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2\\ x, & |x|>2\end{cases}$