

Περιεχόμενα

5.11 Γενικοί ορισμοί.....	5
5.11.1 Οριακό σημείο.....	5
5.11.2 Μεμονωμένο σημείο	5
5.11.3 Εσωτερικό σημείο	5
Παρατήρηση.....	5
5.12 Οριακή τιμή όταν $x \rightarrow +\infty$	5
5.12.1 Πραγματική οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow +\infty$	5
Εφαρμογή 54	6
5.12.2 Οριακή τιμή το $+\infty$, όταν $x \rightarrow +\infty$	7
Εφαρμογή 55	7
5.12.3 Οριακή τιμή το $-\infty$, όταν $x \rightarrow +\infty$	7
Εφαρμογή 56	8
5.12.4 Ιδιότητες των ορίων.....	8
5.12.5 Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow +\infty$	8
5.12.6 Όριο ρητής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow +\infty$	9
5.12.7 Εφαρμογές.....	9
Εφαρμογή 57	11
Εφαρμογή 58	12
Εφαρμογή 59	12
Εφαρμογή 60	13
5.13 Οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow -\infty$	13
5.13.1 Πραγματική οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow -\infty$	13
Εφαρμογή 61	14
5.13.2 Οριακή τιμή το $+\infty$, όταν $x \rightarrow -\infty$	15
Εφαρμογή 62	15
5.13.3 Οριακή τιμή το $-\infty$, όταν $x \rightarrow -\infty$	15
Εφαρμογή 63	16
5.13.4 Ιδιότητες των ορίων.....	16
5.13.5 Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow -\infty$	16
5.13.6 Όριο ρητής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow -\infty$	17
Εφαρμογή 64	17
Εφαρμογή 65	18
Εφαρμογή 66	19
Εφαρμογή 67	20
Εφαρμογή 68	20
5.14 Πραγματική οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	21
5.14.1 Παρατήρηση.....	22
5.14.2 Παρατήρηση.....	22
Εφαρμογή 69	22
5.14.3 Οριακή τιμή το $+\infty$, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	23
5.14.4 Οριακή τιμή το $-\infty$, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	23
5.14.5 Πλευρικά όρια, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	24
Εφαρμογή 70	24
5.14.6 Ασύμπτωτες.....	25
Εφαρμογή 71	25
Εφαρμογή 72	25
Εφαρμογή 73	26
Παρατηρήσεις.....	26
Εφαρμογή 74	26
Εφαρμογή 75	27
Εφαρμογή 76	27

Εφαρμογή 77	28
Εφαρμογή 78	28
Παρατήρηση	28
Εφαρμογή 79	28
Εφαρμογή 80	29
Εφαρμογή 81	29
Εφαρμογή 82	30
5.15 Ιδιότητες των ορίων	30
5.15.1 Παρατηρήσεις	31
5.15.2 Κριτήριο μη σύγκλισης	32
5.15.3 Κριτήριο της παρεμβολής	32
Εφαρμογή 83	32
Εφαρμογή 84	32
5.15.4 Όρια και διάταξη	33
5.15.5 Όρια και πράξεις	33
5.15.6 Όριο πολυωνμικής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	33
5.15.7 Όριο ρητής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	34
Παρατήρηση	34
5.15.8 Τριγωνομετρικά όρια, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	34
5.15.9 Όριο του αθροίσματος, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	34
5.15.10 Όριο του γινομένου, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$	35
Εφαρμογή 85	35
Εφαρμογή 86	36
Εφαρμογή 87	36
Εφαρμογή 88	36
Εφαρμογή 89	37
Εφαρμογή 90	37
Εφαρμογή 91	38
Εφαρμογή 92	39
Εφαρμογή 93	39
Εφαρμογή 94	40
Εφαρμογή 95	40
Εφαρμογή 96	41
5.15.11 Βασικά όρια συναρτήσεων	41
5.16 Θεώρημα του Bolzano	41
5.16.1 Παρατήρηση	42
5.16.2 Πορίσματα	42
Εφαρμογή 97	42
Εφαρμογή 98	43
Εφαρμογή 99	43
Εφαρμογή 100	43
Εφαρμογή 101	44
5.17 Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών	44
5.17.1 Σχόλιο	44
5.17.2 Πόρισμα	44
Εφαρμογή 102	45
Εφαρμογή 103	45
Εφαρμογή 104	46
5.18 Συνέχεια συναρτήσεων	46
5.18.1 Συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0	46
Παρατηρήσεις	46
5.18.2 Συνάρτηση ασυνεχής στο σημείο x_0	46

5.18.3 Πλευρική συνέχεια συνάρτησης στο σημείο x_0	47
5.18.4 Συνεχής συνάρτηση	47
5.18.5 Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής	47
5.18.6 Συνέχεια βασικών συναρτήσεων	48
5.18.7 Βασικές προτάσεις στις συνεχείς συναρτήσεις	48
Εφαρμογή 105	49
Εφαρμογή 106	49
Εφαρμογή 107	50
Εφαρμογή 108	50
Εφαρμογή 109	50
Εφαρμογή 110	51
Εφαρμογή 111	52
Εφαρμογή 112	52
Εφαρμογή 113	52
Εφαρμογή 114	52
Εφαρμογή 115	53
Εφαρμογή 116	54
Εφαρμογή 117	55
Εφαρμογή 118	57
Εφαρμογή 119	58
Εφαρμογή 120	58
Εφαρμογή 121	59
Εφαρμογή 122	59
Εφαρμογή 123	60
Εφαρμογή 124	60
Εφαρμογή 125	61
Εφαρμογή 126	61
Εφαρμογή 127	62
Εφαρμογή 128	62
Εφαρμογή 129	63
Εφαρμογή 130	63
Εφαρμογή 131	64
Εφαρμογή 132	65
Εφαρμογή 133	65
Εφαρμογή 134	66
5.19 Άλυτες ασκήσεις	66
Άσκηση 1	66
Άσκηση 2	66
Άσκηση 3	66
Άσκηση 4	66
Άσκηση 5	66
Άσκηση 6	67
Άσκηση 7	67
Άσκηση 8	67
Άσκηση 9	67
Άσκηση 10	67
Άσκηση 11	67
Άσκηση 12	68
Άσκηση 13	68
Άσκηση 14	69
Άσκηση 15	70
Άσκηση 16	70
Άσκηση 17	71
Άσκηση 18	71

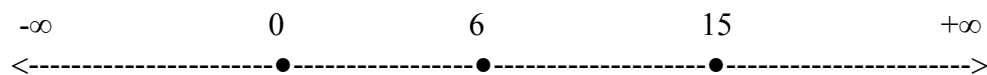
Άσκηση 19.....	71
Άσκηση 20.....	71
Άσκηση 21.....	71
Άσκηση 22.....	71
Άσκηση 23.....	71
Άσκηση 24.....	72
Άσκηση 25.....	72
Άσκηση 26.....	72
Άσκηση 27.....	72
Άσκηση 28.....	72
Άσκηση 29.....	72
Άσκηση 30.....	72
Άσκηση 31.....	72
Άσκηση 32.....	72
Άσκηση 33.....	72
Άσκηση 34.....	73
Άσκηση 35.....	73
Άσκηση 36.....	73
Άσκηση 37.....	73
Άσκηση 38.....	73
Άσκηση 39.....	73
Άσκηση 40.....	73
Άσκηση 41.....	73
Άσκηση 42.....	73
Άσκηση 43.....	74
Άσκηση 44.....	74
Άσκηση 45.....	74
Άσκηση 46.....	74
Άσκηση 47.....	74
Άσκηση 48.....	74
Άσκηση 49.....	74
Άσκηση 50.....	74
Άσκηση 51.....	74
Άσκηση 52.....	75
Άσκηση 53.....	75
Άσκηση 54.....	75
Άσκηση 55.....	75
Άσκηση 56.....	77
Άσκηση 57.....	78
Άσκηση 58.....	79
Άσκηση 59.....	80

5.11 Γενικοί ορισμοί

5.11.1 Οριακό σημείο

Ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f ($\text{Π.Ο.} \subseteq \mathbb{R}$), ονομάζεται οριακό, αν και μόνο αν σε κάθε περιοχή του x_0 υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του Π.Ο. διαφορετικό του x_0

Π.χ. $\text{Π.Ο.} = [0, 15]$ και $x_0 = 6$



5.11.2 Μεμονωμένο σημείο

Ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f ($\text{Π.Ο.} \subseteq \mathbb{R}$), ονομάζεται μεμονωμένο, αν και μόνο αν $x_0 \in \text{Π.Ο.}$ και υπάρχει περιοχή του x_0 έστω $\pi(x_0)$, που το μόνο κοινό σημείο που έχει με το Π.Ο. είναι το x_0

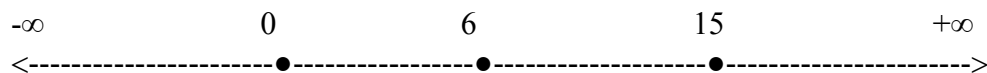
Π.χ. $\text{Π.Ο.} = [0, 15] \cup \{16\}$ και $x_0 = 16$



5.11.3 Εσωτερικό σημείο

Ένα σημείο x_0 ονομάζεται εσωτερικό του Π.Ο. της συνάρτησης f ($\text{Π.Ο.} \subseteq \mathbb{R}$), αν και μόνο αν το $x_0 \in \text{Π.Ο.}$ και υπάρχει περιοχή του x_0 , έστω $\pi(x_0)$, τέτοια ώστε $\pi(x_0) \subseteq \text{Π.Ο.}$

Π.χ. $\text{Π.Ο.} = [0, 15]$ και $x_0 = 6$



Παρατήρηση

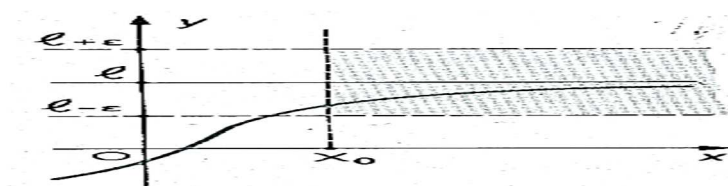
Κάθε εσωτερικό σημείο του Π.Ο. είναι και οριακό, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει αφού το οριακό σημείο δεν είναι απαραίτητα σημείο του Π.Ο.

5.12 Οριακή τιμή όταν $x \rightarrow +\infty$

Για να εξετάσω τη συμπεριφορά της συνάρτησης f για πολύ μεγάλες τιμές της μεταβλητής x , πρέπει το Π.Ο. της να μην είναι φραγμένο άνω. Θεωρώ δηλαδή ότι περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ όπου $a \in \mathbb{R}$

5.12.1 Πραγματική οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow +\infty$

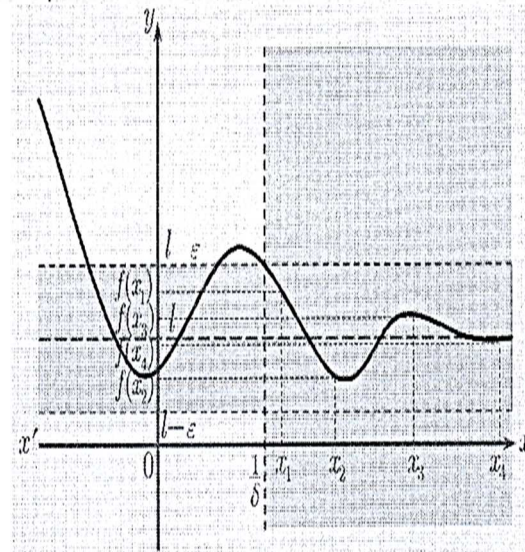
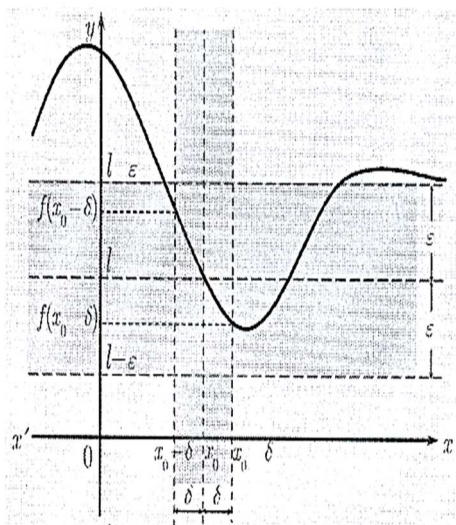
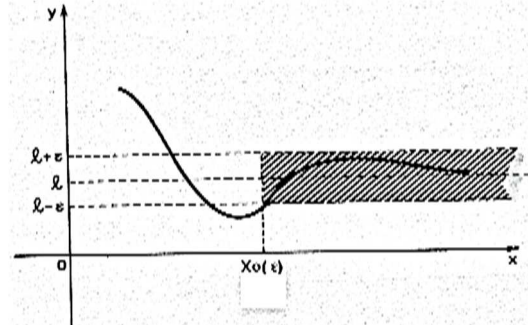
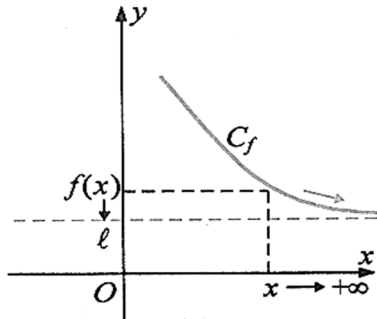
Έστω συνάρτηση f της οποίας το Π.Ο. δεν είναι φραγμένο άνω. Λέω ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο τον $\ell \in \mathbb{R}$, όταν $\forall \varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό, υπάρχει $x_0 > 0$ εξαρτώμενο από το ε , έτσι ώστε $\forall x \in \text{Π.Ο.}$ με $x > x_0$ να ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ δηλαδή



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0(\varepsilon) > 0: \forall x \in \text{ΠΟ}, \text{ με } x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\text{Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ell] = 0$$

$$\text{Επειδή } |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow |-f(x) - (-\ell)| < \varepsilon \text{ προκύπτει ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f) = -\ell$$



Εφαρμογή 54

$$\text{Δείξτε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ έχει Π.Ο. $= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ Αν $\varepsilon > 0$ τότε,

$$\text{για κάθε } x > 1 \text{ έχω } \left| \frac{2x+1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2x+1-2x+2}{x-1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3}{x-1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$0 < \frac{3}{x-1} < \varepsilon \text{ (διότι } x > 1) \Leftrightarrow x > 1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

Αν εκλέξω $x_0 > 1 + \frac{3}{\varepsilon}$, τότε για κάθε x του Π.Ο. της f με $x > x_0$ ισχύει ότι

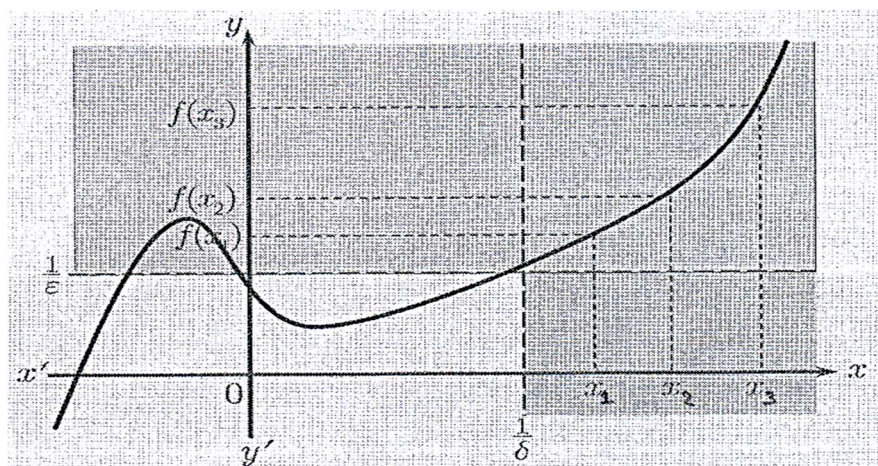
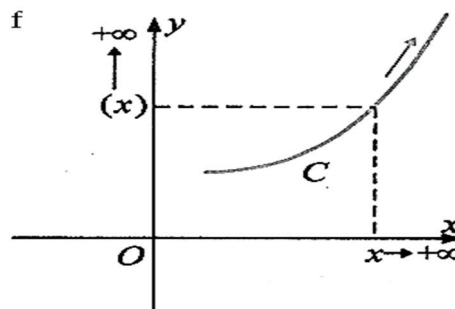
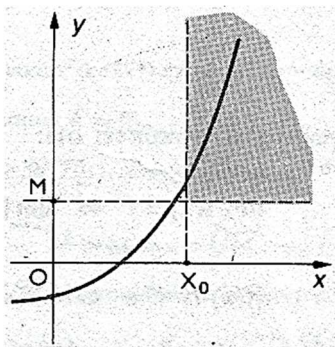
$$\left| \frac{2x+1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

5.12.2 Οριακή τιμή το $+\infty$, όταν $x \rightarrow +\infty$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο άνω. Θα λέω ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$, όταν $\forall M > 0$ υπάρχει $x_0 > 0$, εξαρτώμενο από το M , τέτοιο ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x > x_0$, να ισχύει ότι $f(x) > M$

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ}_f \text{ με } x > x_0 \Rightarrow f(x) > M$

Επειδή $f(x) > M \Leftrightarrow -f(x) < -M$ έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f)(x) = -\infty$



Εφαρμογή 55

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$

Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Έχει $\text{ΠΟ} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και $M > 0$

Τότε $\sqrt{x^2 - 1} > M \Leftrightarrow x^2 - 1 > M^2 \Leftrightarrow x^2 > M^2 + 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{M^2 + 1}$

Άρα, αν επιλέξω $x_0 > \sqrt{M^2 + 1}$, τότε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x > x_0$ είναι $\sqrt{x^2 - 1} > M$ δηλαδή

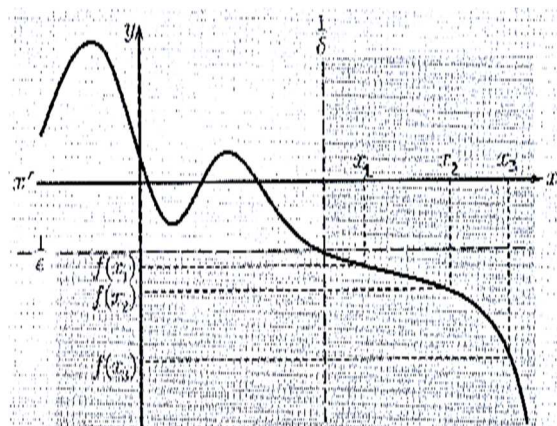
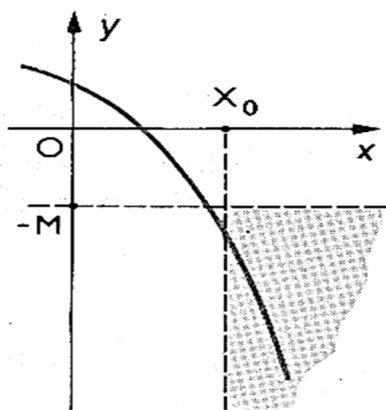
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$

5.12.3 Οριακή τιμή το $-\infty$, όταν $x \rightarrow +\infty$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο άνω. Θα λέω ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$, όταν $\forall M > 0$ υπάρχει $x_0 > 0$ εξαρτώμενο από το M , τέτοιο ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x > x_0$, να ισχύει ότι $f(x) < -M$ δηλαδή:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ} \text{ με } x > x_0 \Rightarrow f(x) < -M$

Επειδή $f(x) > M \Leftrightarrow -f(x) < -M$ έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f)(x) = +\infty$



Εφαρμογή 56

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 5) = -\infty$

Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^2 + 5$, ΠΟ = $\mathbb{R}$ και $M > 0$

Τότε για $x > 0$ ισχύει ότι $-x^2 + 5 < -M \Leftrightarrow x^2 > M + 5 \Leftrightarrow x > \sqrt{M + 5}$

Αν επιλέξω $x_0 > \sqrt{M + 5}$, τότε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x > x_0$ ισχύει $-x^2 + 5 < -M$ δηλαδή

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 5) = -\infty$

5.12.4 Ιδιότητες των ορίων

Έστω συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού όχι φραγμένο άνω, που έχουν στο $+\infty$ πεπερασμένα όρια. Τότε:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Οι παραπάνω προτάσεις επεκτείνονται επαγωγικά, για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού όχι φραγμένο άνω.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}$

Στην παραπάνω περίπτωση επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$, ισχύει ότι σε μία περιοχή του $+\infty$ είναι $g(x) \neq 0$

- Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$ και $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}$

Στην παραπάνω περίπτωση σε μία περιοχή του $+\infty$ είναι $f(x) > 0$ και εκεί ορίζεται η συνάρτηση $\sqrt[k]{f(x)}$

5.12.5 Όριο πολωνυμικής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow +\infty$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ που περιέχει διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_\nu \neq 0$ και τύπο $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, \dots, \nu$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu \left(\alpha_\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{x} + \frac{\alpha_{\nu-2}}{x^2} + \frac{\alpha_{\nu-3}}{x^3} + \dots + \frac{\alpha_3}{x^{\nu-3}} + \frac{\alpha_2}{x^{\nu-2}} + \frac{\alpha_1}{x^{\nu-1}} + \frac{\alpha_0}{x^\nu} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha_\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{x} + \frac{\alpha_{\nu-2}}{x^2} + \frac{\alpha_{\nu-3}}{x^3} + \dots + \frac{\alpha_3}{x^{\nu-3}} + \frac{\alpha_2}{x^{\nu-2}} + \frac{\alpha_1}{x^{\nu-1}} + \frac{\alpha_0}{x^\nu} \right) =$$

$$(+\infty) \cdot (\alpha_\nu + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0) = (+\infty) \cdot (\alpha_\nu) = \begin{cases} +\infty, & \text{όταν } \alpha_\nu > 0 \\ -\infty, & \text{όταν } \alpha_\nu < 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, το όριο στο $+\infty$ κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $+\infty$ του μεγιστοβάθμιου όρου της, άρα $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_\nu x^\nu)$

5.12.6 Όριο ρητής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow +\infty$

Έστω ρητή συνάρτηση f , $f(x) = \frac{\alpha_\kappa x^\kappa + \alpha_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \alpha_{\kappa-2} x^{\kappa-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\lambda x^\lambda + \beta_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \beta_{\lambda-2} x^{\lambda-2} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$

Είναι $f(x) = \frac{\alpha_\kappa x^\kappa \left(1 + \frac{\alpha_{\kappa-1}}{\alpha_\kappa} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\kappa} \cdot \frac{1}{x^\kappa} \right)}{\beta_\lambda x^\lambda \left(1 + \frac{\beta_{\lambda-1}}{\beta_\lambda} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{\beta_0}{\beta_\lambda} \cdot \frac{1}{x^\lambda} \right)}$, άρα $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_\kappa x^\kappa}{\beta_\lambda x^\lambda}$

δηλαδή, το όριο στο $+\infty$ της ρητής συνάρτησης, ισούται με το όριο στο $+\infty$ του λόγου των μεγιστοβάθμιων όρων του αριθμητή και του παρονομαστή.

Όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι $\begin{cases} +\infty, & \text{αν } \kappa > \lambda \text{ και } \frac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda} > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \kappa > \lambda \text{ και } \frac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda} < 0 \\ 0, & \text{αν } \kappa < \lambda \\ \frac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda}, & \text{αν } \kappa = \lambda \end{cases}$

5.12.7 Εφαρμογές

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 7x + 9) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^5 \cdot \left(3 - \frac{7}{x^4} + \frac{9}{x^5} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{7}{x^4} + \frac{9}{x^5} \right) = (+\infty) \cdot 3 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^8 + 7x^2 + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^8 \cdot \left(-3 + \frac{7}{x^6} + \frac{6}{x^8} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^8 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{7}{x^6} + \frac{6}{x^8} \right) = (+\infty) \cdot (-3) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{x \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{2 - \frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = \frac{3}{2}$$

- $$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{2x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{2 - \frac{5}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = (+\infty) \frac{3}{2} = +\infty$$
- $$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{2x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{x^2 \left(2 - \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{x \left(2 - \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{5}{x^2} \right)} = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$$
- $$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{1}{1} = 1$$
- $$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt[3]{x^3 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{4}{x^3} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{x^3} \right)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{x^3} \right)}} = \frac{2}{1} = 2$$
- $$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - 1}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{\sqrt{1+0} - 0}{1 - 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0$$
- $$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + x} + x \right)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2(x-1)} + \sqrt[3]{x^2(x+1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right) = \\ &= (+\infty) \cdot \left(\sqrt[3]{1-0} + \sqrt[3]{1+0} \right) = (+\infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} + \sqrt{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 57

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \alpha x \right) = \beta$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \alpha \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \alpha \right) = (+\infty) \cdot (1 - \alpha)$$

$$\bullet \text{ Όταν } 1 - \alpha > 0 \Rightarrow 1 > \alpha, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \alpha x \right) = +\infty$$

- Όταν $1 - a < 0 \Rightarrow 1 < a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \alpha x) = -\infty$
- Όταν $1 - a = 0 \Rightarrow 1 = a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \alpha x) = (+\infty) \cdot 0 = ?$ (De L' Hospital)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x \sqrt{1 + \frac{5}{x}} + x} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1\right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1} = 0 \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = 0 \end{aligned}$$

Άρα, είναι $a = 1$ και $\beta = 0$

Εφαρμογή 58

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11$ αν $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \alpha x - \beta$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \alpha x - \beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) &= (+\infty) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{x} \right) = (+\infty)(1 - a) \end{aligned}$$

- Όταν $1 - a > 0 \Rightarrow 1 > a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $1 - a < 0 \Rightarrow 1 < a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Όταν $1 - a = 0 \Rightarrow 1 = a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot 0 = ?$ (De L' Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + \beta)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}^2 - (x + \beta)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + \beta)} = \dots = 1 - \beta$$

Άρα, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11 \Rightarrow 1 - \beta = 11 \Rightarrow \beta = -10$

Εφαρμογή 59

Αν $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8} + (a - 3)x$, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για το $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 8} + (a - 3)x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}\right)} + (a - 3)x \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a - 3)x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a - 3)x \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a - 3)x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a - 3) \right] = \\ &= (+\infty)(1 + a - 3) = (+\infty)(a - 2) \end{aligned}$$

- Όταν $a - 2 > 0 \Leftrightarrow a > 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $a - 2 < 0 \Leftrightarrow a < 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

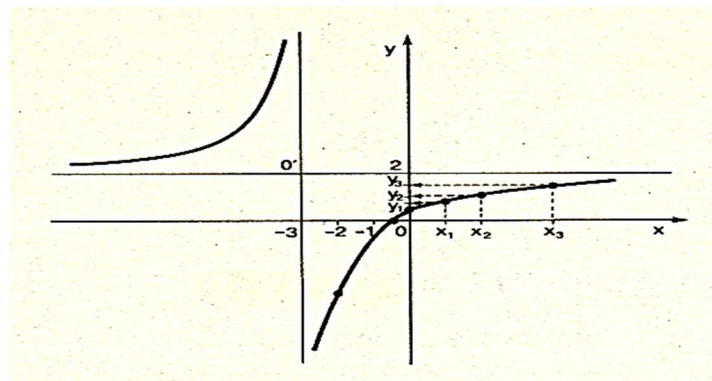
- Όταν $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ τότε απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$

Είναι $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8} - x$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 8}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 8}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2 + \frac{8}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{8}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1} = \\ &= \frac{2 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 60

Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ Είναι $\text{ΠΟ} = \mathbb{R} - \{-3\}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η $x = -3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$



5.13 Οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow -\infty$

Για να εξετάσω τη συμπεριφορά της συνάρτησης για πολύ μικρές τιμές της μεταβλητής x , πρέπει το πεδίο ορισμού της να μην είναι φραγμένο κάτω. Θεωρώ ότι περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ όπου $a \in \mathbb{R}$

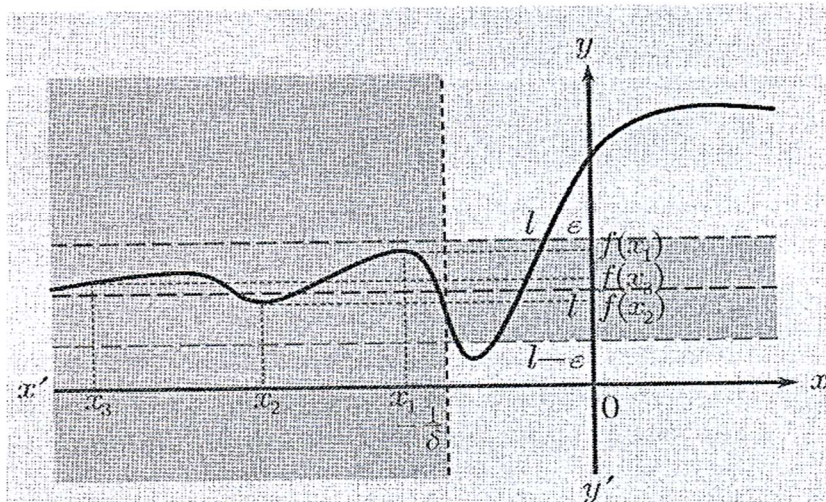
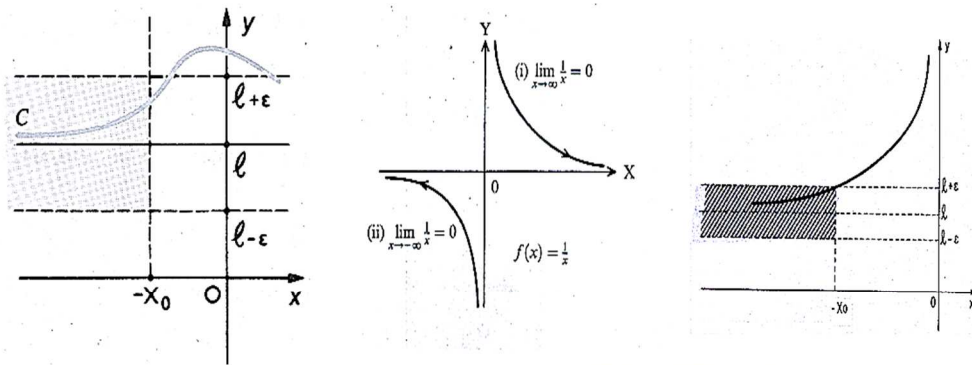
5.13.1 Πραγματική οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow -\infty$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο κάτω. Θα λέω ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο τον $\ell \in \mathbb{R}$, όταν $\forall \varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό, $\exists x_0 > 0$ εξαρτώμενο από το ε , τέτοιο ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x < x_0$, να ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0(\varepsilon) > 0: \forall x \in \text{ΠΟ}, \text{ με } x < -x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \ell] = 0$

Επειδή $|f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow |-f(x) - (-\ell)| < \varepsilon$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f)(x) = -\ell$



Εφαρμογή 61

Δείξτε με τον ορισμό, ότι για τη συνάρτηση f , $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

Είναι $\Pi\Omega = \mathbb{R} - \{-1\}$, άρα η f ορίζεται σε μία περιοχή του $-\infty$

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{2x-3}{x+1} - 2 \right| = \left| \frac{5}{x+1} \right| = \frac{5}{|x+1|}$$

Αφού $x \rightarrow -\infty$, υποθέτω ότι $x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow |x+1| = -(x+1)$

$$\text{Άρα, } |f(x) - 2| = -\frac{5}{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{x+1} > -\varepsilon \Leftrightarrow x+1 < \frac{-5}{\varepsilon}$$

Άρα, κάθε $x < -\left(1 + \frac{5}{\varepsilon}\right)$, ικανοποιεί τον περιορισμό $x < -1$ και την $|f(x) - 2| < \varepsilon$

Αν επιλέξω $x_0(\varepsilon) = \left(1 + \frac{5}{\varepsilon}\right)$ ισχύει ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0(\varepsilon) = \left(1 + \frac{5}{\varepsilon}\right) > 0 : \forall x \in \Pi\Omega \text{ με } x < -x_0(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

άρα, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

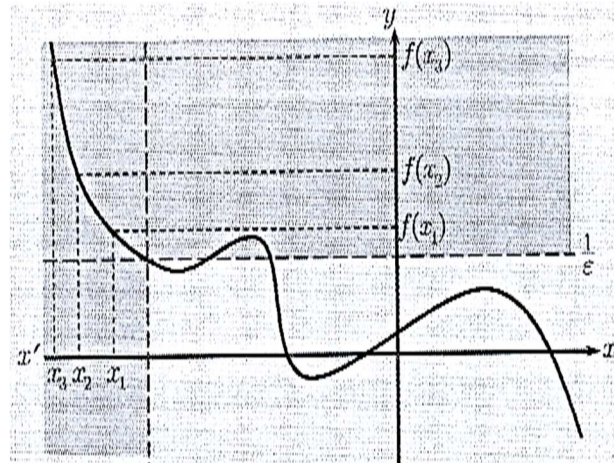
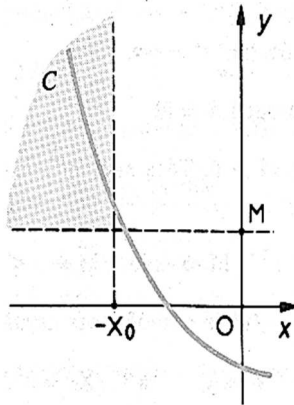
5.13.2 Οριακή τιμή το $+\infty$, όταν $x \rightarrow -\infty$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο κάτω. Θα λέω ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο το $+\infty$, όταν $\forall M > 0, \exists x_0 > 0$ εξαρτώμενο από το M , τέτοιο ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x < -x_0$, να ισχύει ότι $f(x) > M$

Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ} \text{ με } x < -x_0 \Rightarrow f(x) > M$$

Επειδή $f(x) > M \Leftrightarrow -f(x) < -M$ έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f)(x) = -\infty$



Εφαρμογή 62

Δείξτε με τον ορισμό ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ για την $f, f(x) = x^2 - 2x$

Είναι $\text{ΠΟ} = \mathbb{R}$. Επίσης $f(x) = x^2 - 2x > -2x > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\frac{\varepsilon}{2}$

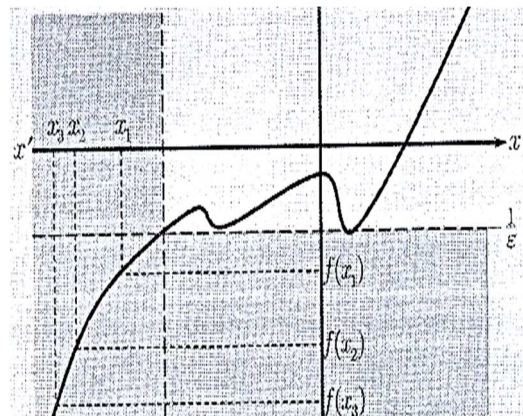
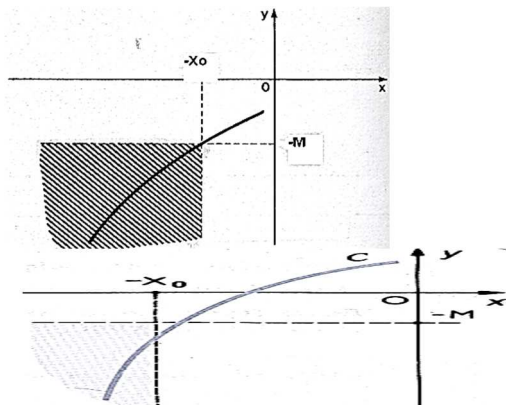
Άρα, $\forall M > 0, \exists x_0(M) = \frac{\varepsilon}{2} > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ} \text{ με } x < -x_0 \Rightarrow f(x) > M$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

5.13.3 Οριακή τιμή το $-\infty$, όταν $x \rightarrow -\infty$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ όχι φραγμένο κάτω. Θα λέω ότι η f έχει στο $-\infty$, όριο το $-\infty$, όταν $\forall M > 0, \exists x_0 > 0$ εξαρτώμενο από το M , τέτοιο ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x < -x_0$ να ισχύει ότι $f(x) < -M$ δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ} \text{ με } x < -x_0 \Rightarrow f(x) < -M$$



Εφαρμογή 63

Δείξτε με τον ορισμό ότι για την $f, f(x) = x^3$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Είναι $\text{ΠΟ} = \mathbb{R}$ Έστω $M > 0$ τότε, για $x < 0$ είναι $x^3 < -M \Leftrightarrow x < -\sqrt[3]{M}$

Αν εκλέξω $x_0 \geq -\sqrt[3]{M}$, τότε η σχέση $x^3 < -M$ ισχύει $\forall x < -x_0$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

Γενικότερα, ισχύει ότι $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty, k \in \mathbb{N}$

5.13.4 Ιδιότητες των ορίων

Έστω συναρτήσεις f, g με κοινό ΠΟ όχι φραγμένο κάτω, που έχουν στο $-\infty$ πεπερασμένα όρια. Τότε ισχύουν: $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

Οι παραπάνω προτάσεις, επεκτείνονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων, με ΠΟ μη φραγμένο κάτω.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

$$\bullet \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow -\infty} [\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \neq 0 \text{ τότε: } \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)} \text{ και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)}$$

Στην παραπάνω περίπτωση, επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \neq 0$, ισχύει ότι σε μία περιοχή του $-\infty$ είναι $g(x) \neq 0$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του ορίου μίας συνάρτησης όταν $x \rightarrow -\infty$ είναι οι εξής ιδιότητες: $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f) = -\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = +\infty, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty, k \in \mathbb{N}$$

5.13.5 Όριο πολωνυμικής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow -\infty$

Έστω συνάρτηση f , με ΠΟ που περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ όπου $a \in \mathbb{R}$, $a_v \neq 0$ με τύπο $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + a_{v-2} x^{v-2} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, \dots, v$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^v \cdot \left(a_v + \frac{a_{v-1}}{x} + \frac{a_{v-2}}{x^2} + \frac{a_{v-3}}{x^3} + \dots + \frac{a_3}{x^{v-3}} + \frac{a_2}{x^{v-2}} + \frac{a_1}{x^{v-1}} + \frac{a_0}{x^v} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a_v + \frac{a_{v-1}}{x} + \frac{a_{v-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{x^{v-2}} + \frac{a_1}{x^{v-1}} + \frac{a_0}{x^v} \right) =$$

$$\begin{cases} (+\infty) \cdot a_n, \text{ όταν } n \text{ άρτιος} & \begin{cases} +\infty, \text{ όταν } a_n > 0 \\ -\infty, \text{ όταν } a_n < 0 \end{cases} \\ (-\infty) \cdot a_n, \text{ όταν } n \text{ περιττός} & \begin{cases} -\infty, \text{ όταν } a_n > 0 \\ +\infty, \text{ όταν } a_n < 0 \end{cases} \end{cases}$$

5.13.6 Όριο ρητής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow -\infty$

Το όριο της ρητής συνάρτησης

$$f, f(x) = \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_\lambda x^\lambda + \beta_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} = \frac{a_k x^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_k} \cdot \frac{1}{x^k} \right)}{\beta_\lambda x^\lambda \left(1 + \frac{\beta_{\lambda-1}}{\beta_\lambda} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{\beta_0}{\beta_\lambda} \cdot \frac{1}{x^\lambda} \right)}$$

είναι $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha_k x^k}{\beta_\lambda x^\lambda}$ δηλαδή, το όριο στο $-\infty$ της ρητής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $-\infty$ του λόγου των μεγιστοβάθμιων όρων του αριθμητή

και του παρονομαστή. Όταν $x \rightarrow -\infty$ είναι $\begin{cases} -\infty, \text{ αν } k > \lambda \text{ και } \frac{\alpha_k}{\beta_\lambda} > 0 \\ +\infty, \text{ αν } k > \lambda \text{ και } \frac{\alpha_k}{\beta_\lambda} < 0 \\ 0, \text{ αν } k < \lambda \\ \frac{\alpha_k}{\beta_\lambda}, \text{ αν } k = \lambda \end{cases}$

Εφαρμογή 64

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 7x + 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^5 \cdot \left(3 - \frac{7}{x^4} + \frac{9}{x^5} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{7}{x^4} + \frac{9}{x^5} \right) = (-\infty) \cdot 3 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^8 + 7x^2 + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^8 \cdot \left(-3 + \frac{7}{x^6} + \frac{6}{x^8} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^8 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{7}{x^6} + \frac{6}{x^8} \right) = (+\infty) \cdot (-3) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{x \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{2 - \frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{2 - \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{5}{x} \right)} = (-\infty) \cdot \frac{3}{2} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{2x^2-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{x^2 \left(2 - \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{x \left(2 - \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{4}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{5}{x^2} \right)} = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-1) = +\infty,$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + \sqrt{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)}}{\sqrt{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right]}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right]}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}$$

Άρα, υπάρχουν 2 περιπτώσεις

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{4 + \frac{1}{x}} = - \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = - \frac{\sqrt{2}}{4} = - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - |x-1|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x-1|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x} = 3$$

$$\text{Επεξήγηση: } \frac{2x - |x-1|}{x} = \begin{cases} \frac{2x - x + 1}{x} = \frac{x+1}{x}, & x \geq 1 \\ \frac{2x + x - 1}{x} = \frac{3x-1}{x}, & x < 1 \end{cases}$$

Εφαρμογή 65

Βρείτε το Π.Ο. της $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \lambda x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \lambda x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda \right]$$

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Όταν $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda \right] = (+\infty) \cdot (1 + \lambda)$$

- Όταν $1 + \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $1 + \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Όταν $1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Όταν $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - \lambda \right] = (+\infty) \cdot (1 - \lambda)$$

- Όταν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow 1 > \lambda$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow 1 < \lambda$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- Όταν $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Εφαρμογή 66

Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ αν $f, f(x) = \frac{(\lambda-1)x^3 + 5x + 2}{\lambda x^2 + 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\lambda-1)x^3 + 5x + 2}{\lambda x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left[(\lambda-1) + 5 \frac{1}{x^2} + 2 \frac{1}{x^3} \right]}{x^2 \left(\lambda + \frac{3}{x^2} \right)} = \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\lambda-1) + 5 \frac{1}{x^2} + 2 \frac{1}{x^3}}{\lambda + \frac{3}{x^2}} &= (\pm\infty) \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[(\lambda-1) + 5 \frac{1}{x^2} + 2 \frac{1}{x^3} \right]}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\lambda + \frac{3}{x^2} \right)} = (\pm\infty) \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}, \text{ όπου} \end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$

- Όταν $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0 \Rightarrow \lambda^2 \frac{\lambda-1}{\lambda} > 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) > 0 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Όταν $\frac{\lambda-1}{\lambda} < 0 \Rightarrow \lambda^2 \frac{\lambda-1}{\lambda} < 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) < 0 \Rightarrow \lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Όταν $\frac{\lambda-1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$, τότε $f(x) = \frac{5x+2}{x^2+3}$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+2}{x^2+3} = 0$$

Εφαρμογή 67

Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} - kx$, όπου $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$. Να υπολογισθούν τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των α, β, k

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} - kx \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} \right)} - kx \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[|x| \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] \end{aligned}$$

Όταν $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - k \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - k \right] = (+\infty)(\sqrt{a} - k) \end{aligned}$$

- Όταν $\sqrt{a} - k > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > k$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Όταν $\sqrt{a} - k < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < k$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• Όταν $\sqrt{a} - k = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = k$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Όταν $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x| \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} + k \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} + k \right] = (-\infty)(\sqrt{a} + k) \end{aligned}$$

- Όταν $\sqrt{a} + k > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > -k$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- Όταν $\sqrt{a} + k < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < -k$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

• Όταν $\sqrt{a} + k = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = -k$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Εφαρμογή 68

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ αν $f, f(x) = \frac{4x^2}{x+3} - (ax + \beta)$

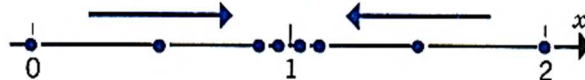
$$f(x) = \frac{4x^2}{x+3} - (ax + \beta) = \frac{4x^2 - (ax + \beta)(x+3)}{x+3} = \frac{(4-\alpha)x^2 - (3a+\beta)x - 3\beta}{x+3}$$

Για να είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ πρέπει $4 - \alpha = 0$ και $3\alpha + \beta = 0$ άρα, $\alpha = 4$, $\beta = -12$

5.14 Πραγματική οριακή τιμή, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

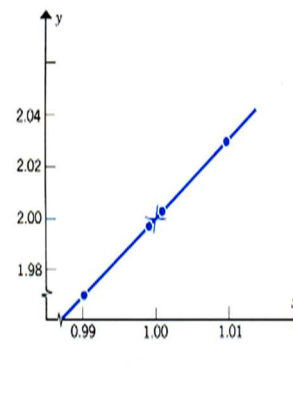
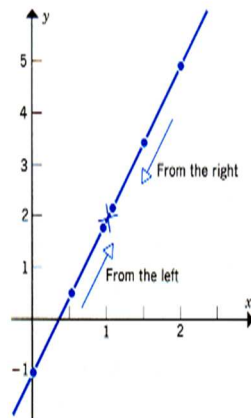
Έστω συνάρτηση $f, f(x) = 3x - 1$ με $\text{ΠΟ} = \mathbb{R}$. Παρατηρώ ότι όσο το x πλησιάζει την τιμή 1 στο ΠΟ, τόσο το $y = f(x)$ πλησιάζει προς την τιμή 2

Το x μπορεί να πλησιάσει την τιμή 1 από δεξιά (δηλαδή το x είναι μεγαλύτερο από το 1 και συνεχώς μειώνεται, ώστε να το προσεγγίσει), ή από αριστερά (δηλαδή το x είναι μικρότερο από το 1 και συνεχώς αυξάνεται, ώστε να το προσεγγίσει).



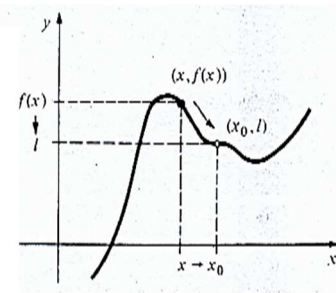
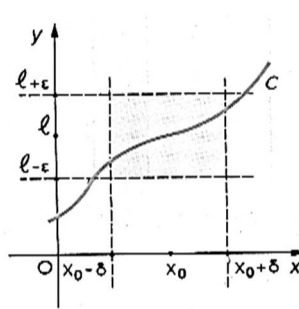
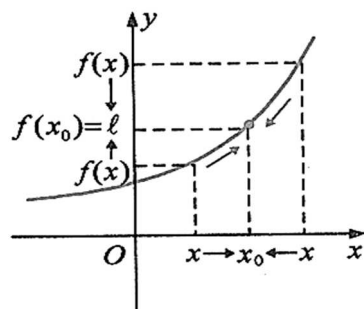
Με αυτό τον τρόπο, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας. Στην 1^η στήλη, το x παίρνει τιμές αυξανόμενες αλλά μικρότερες του 1, ώστε να το προσεγγίσει από αριστερά και συγχρόνως στη 2^η στήλη βλέπω τις τιμές που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή $y = 3x - 1$ για κάθε μία τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x

x	$y = 3x - 1$	x	$y = 3x - 1$
0.00000	-1.00000	2.00000	5.00000
0.50000	0.50000	1.50000	3.50000
0.90000	1.70000	1.10000	2.30000
0.99000	1.97000	1.01000	2.03000
0.99900	1.99700	1.00100	2.00300
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

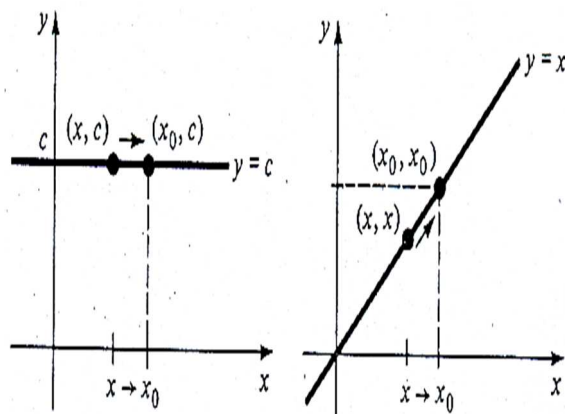
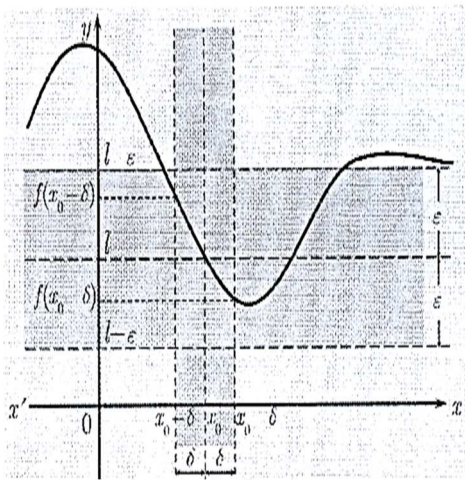


Αντιστοίχως, στην 3^η στήλη το x παίρνει τιμές διαρκώς μειούμενες, αλλά μεγαλύτερες του 1, ώστε να το προσεγγίσει από δεξιά και συγχρόνως στην 4^η στήλη, βλέπω τις τιμές που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή $y = 3x - 1$ για κάθε μία τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Το 2 ονομάζεται όριο της $f, f(x) = 3x - 1$ του x τείνοντος στο 1 και συμβολίζεται ως $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

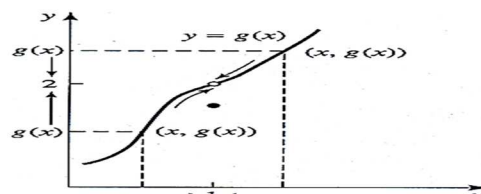
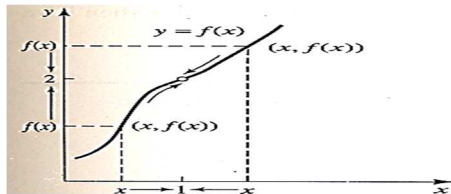
Έστω συνάρτηση f με ΠΟ που περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέω ότι η f έχει στο x_0 όριο τον $\ell \in \mathbb{R}$ όταν $\forall \varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό, $\exists \delta > 0$ που εξαρτάται από το ε , τέτοιο ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να είναι $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ δηλαδή



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \Pi.O., \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



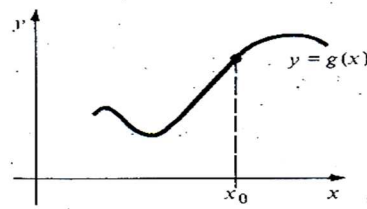
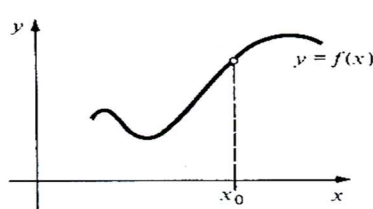
5.14.1 Παρατήρηση



Ανεξάρτητα του πώς το x πλησιάζει το 1, είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$

5.14.2 Παρατήρηση

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g είναι ταυτόσημες κοντά στη θέση x_0 , εκτός ίσως από το μεμονωμένο σημείο $x = x_0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

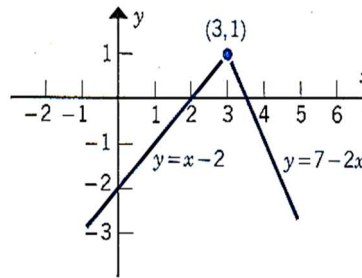


Εφαρμογή 69

$$\text{Αν } f, f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 3 \\ 7-2x, & x \geq 3 \end{cases} \text{ να βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Αντικαθιστώντας, έχω τον ακόλουθο πίνακα για τιμές του x που προσεγγίζουν την τιμή 3 από δεξιά και αριστερά, οπότε συμπεραίνω ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

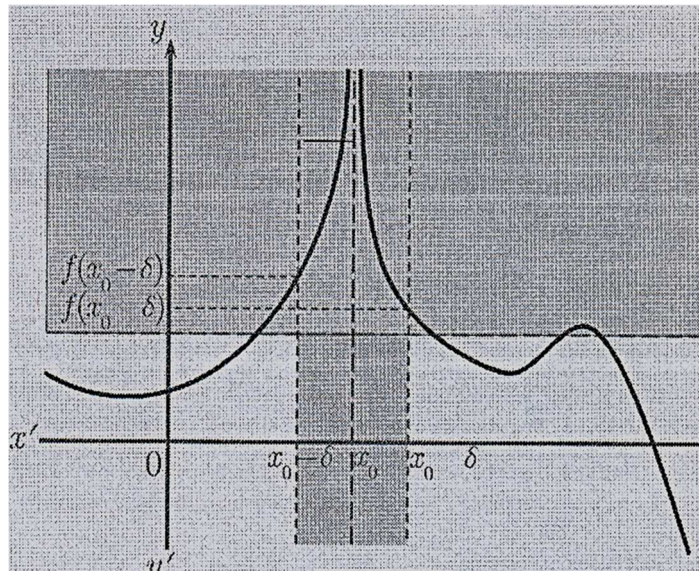
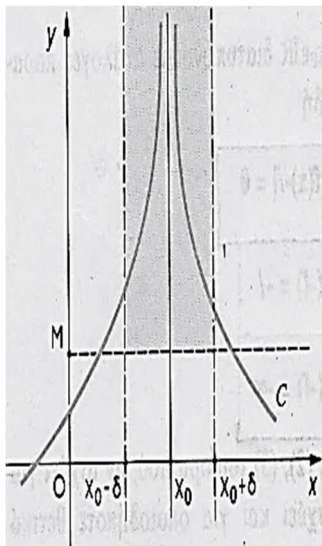
x	$y = x - 2$	x	$y = 7 - 2x$
2.0000	0.0000	4.0000	-1.0000
2.5000	0.5000	3.5000	0.0000
2.9000	0.9000	3.1000	0.8000
2.9900	0.9900	3.0100	0.9800
2.9990	0.9990	3.0010	0.9980
2.9999	0.9999	3.0001	0.9998
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



5.14.3 Οριακή τιμή το $+\infty$, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ που περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέω ότι η f έχει στο x_0 όριο το $+\infty$, όταν $\forall M > 0$ οσοδήποτε μεγάλο, $\exists \delta > 0$ που εξαρτάται από το M , τέτοιος ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) > M$ δηλαδή

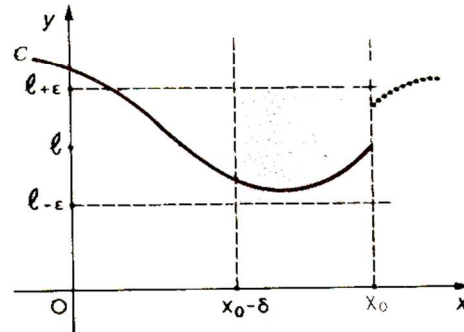
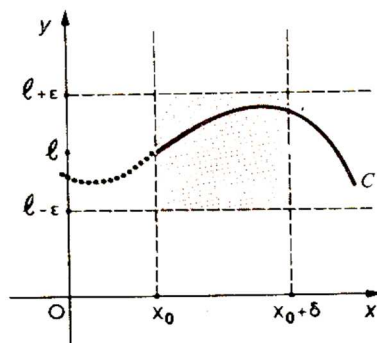
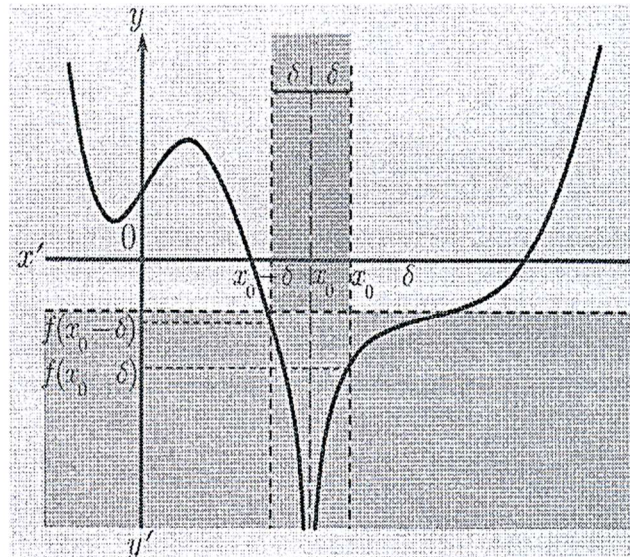
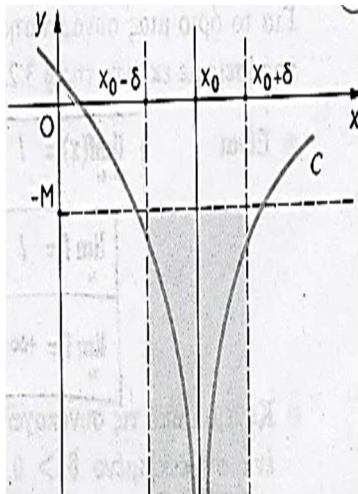
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta = \delta(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ} \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$



5.14.4 Οριακή τιμή το $-\infty$, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω συνάρτηση f με ΠΟ που περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα λέω ότι η f έχει στο x_0 όριο το $-\infty$, όταν $\forall M > 0$ οσοδήποτε μεγάλο, $\exists \delta > 0$ που εξαρτάται από το M , τέτοιος ώστε $\forall x \in \text{ΠΟ}$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) < -M$ δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta = \delta(M) > 0 : \forall x \in \text{ΠΟ} \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$



5.14.5 Πλευρικά όρια, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση f με $\text{Π.Ο.} = A$. Αν το A περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και ο περιορισμός f_1 της f στο (x_0, β) έχει στη θέση x_0 όριο ℓ , τότε λέω ότι η f έχει στη θέση x_0 όριο από δεξιά το ℓ .

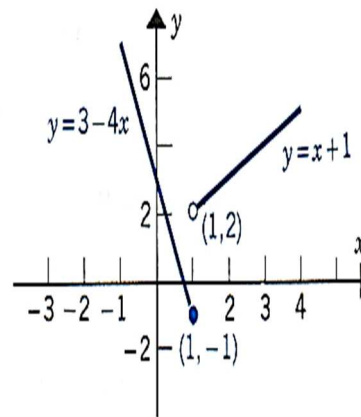
Αν το A περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (a, x_0) και ο περιορισμός f_2 της f στο (a, x_0) έχει στη θέση x_0 όριο ℓ , λέω ότι η f έχει στη θέση x_0 όριο από αριστερά το ℓ .

Εφαρμογή 70

Αν $f(x) = \begin{cases} 3-4x, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

x	$y = 3 - 4x$	x	$y = x + 1$
0.0000	3.0000	2.0000	3.0000
0.5000	1.0000	1.5000	2.5000
0.9000	-0.6000	1.1000	2.1000
0.9900	-0.9600	1.0100	2.0100
0.9990	-0.9960	1.0010	2.0010
0.9999	-0.9996	1.0001	2.0001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$. Εφόσον το από δεξιά όριο της f στη θέση $x_0 = 1$ είναι διαφορετικό από το από αριστερά της όριο στη συγκεκριμένη θέση, λέω ότι δεν υπάρχει το όριο της f στη θέση $x_0 = 1$. Η ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ δεν εξαρτάται από το αν ορίζεται ή όχι το $f(1)$, ούτε από την τιμή του $f(1)$.

5.14.6 Ασύμπτωτες

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης $y = f(x)$ ονομάζονται οι ευθείες οι οποίες, για πολύ μικρές ή μεγάλες τιμές των x, y προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη γραφική παράσταση της f .

Μία ευθεία $x = a$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f , όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ είναι $\pm\infty$.

Εφαρμογή 71

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ άρα, η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Η $y = \beta$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \beta$.

Εφαρμογή 72

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$ άρα, η $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ σε μία περιοχή του $+\infty$.

Η $y = \lambda x + \beta$ είναι **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f , αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Η ασύμπτωτη είναι πλάγια αν $\lambda \neq 0$ και οριζόντια αν $\lambda = 0$.

Εφαρμογή 73

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{άρα η } y=x \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της}$$

γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Η εύρεση της οριζόντιας ή της πλάγιας ασύμπτωτης, γίνεται με τη βοήθεια της πρότασης: Η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , αν και μόνο αν $\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \lambda x]$, όπου $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

Παρατηρήσεις

1 Οι γραφικές παραστάσεις των ρητών συναρτήσεων έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες της μορφής $x=a$, όπου a είναι ρίζα του παρονομαστή μόνο. Αν το a είναι ρίζα και του αριθμητή, τότε για να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη η $x=a$, πρέπει το a να είναι ρίζα του παρονομαστή με μεγαλύτερη πολλαπλότητα από αυτήν του αριθμητή.

2 Καθώς $x \rightarrow +\infty$ (ή $x \rightarrow -\infty$) δεν είναι δυνατό να υπάρχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης. Άρα, έχω το πολύ δύο ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$.

3 Η γραφική παράσταση των πολυωνυμικών συναρτήσεων με βαθμό $\nu \geq 2$ δεν έχει οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

Πράγματι, αν $f, f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $a_\nu \neq 0$ και $\nu \geq 2$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_\nu x^\nu}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_\nu x^{\nu-1}) = a_\nu \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\nu-1} = \pm\infty$$

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f, f(x) = ax + \beta$ που είναι η $y = ax + \beta$ έχει ασύμπτωτη την ίδια την ευθεία.

4 Είναι δυνατόν η γραφική παράσταση της συνάρτησης να τέμνει μία ασύμπτωτη της, σε ένα τουλάχιστον σημείο.

5 Για τη γραφική παράσταση των ρητών συναρτήσεων, ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη.
- Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά ένα μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη.
- Όταν ο αριθμητής έχει βαθμό τουλάχιστον κατά δυο μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, τότε δεν υπάρχουν οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

6 Αν είναι $f(x) = \lambda x + \beta + g(x)$ με $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, τότε η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , διότι

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$$

Εφαρμογή 74

Εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{x^5}{x^2-4}$
 $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

Άρα, οι $x = \pm 2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

Είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ άρα, δεν υπάρχουν οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Εφαρμογή 75

Εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x + 3}$

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 2x + 3 > 0$

Άρα, δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

Άρα, η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = -2$ άρα, η $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $+\infty$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = -2$ άρα, η $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $-\infty$

Εφαρμογή 76

Εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{3|x| - 2x + 1}{x + 3}$

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Είναι $\lim_{x \rightarrow -3} (x + 3) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -3} [3|x| - 2x + 1] = 16 > 0$ άρα, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ συνεπώς, η $x = -3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . Η γραφική παράσταση προσεγγίζει την $x = -3$ από δεξιά και από αριστερά.

Εύρεση οριζόντιας-πλάγιας ασύμπτωτης

Είναι $f, f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+3}, & x \geq 0 \\ \frac{1-5x}{x+3}, & x < 0 \text{ και } x \neq -3 \end{cases}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = 1$ άρα, η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $+\infty$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = -5$ άρα, η $y = -5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f σε μία περιοχή του $-\infty$

Εφαρμογή 77

Εύρεση των ασύμπτωτων της $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Είναι $D(f) = (1, +\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x=1$. Είναι

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ άρα, η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1 = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1 = \beta$$

άρα, η $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Εφαρμογή 78

Εύρεση των $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ax + \beta - \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2} \right] = 0$

Έστω $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2}$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + \beta - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + \beta)] = 0$

Άρα, η $y = ax + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f για $x \rightarrow -\infty$

Άρα, $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = 3$

Παρατήρηση

Έστω συνάρτηση $f, f(x)$. Η $y = ax + \beta$ ονομάζεται πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης f αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = ax + \beta$ ή ισοδύναμα

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax - \beta] = 0$$

Εύρεση των a, β

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \beta$$

Μελέτη περιπτώσεων

- Αν $a=0$, $\beta=0$ τότε οριζόντια ασύμπτωτη είναι ο άξονας xx'
- Αν $a=0$, $\beta \neq 0$ τότε οριζόντια ασύμπτωτη είναι η $y = \beta$
- Αν $a \neq 0$, $\beta=0$ τότε πλάγια ασύμπτωτη είναι η $y = ax$
- Αν $a \neq 0$, $\beta \neq 0$ τότε πλάγια ασύμπτωτη είναι η $y = ax + \beta$

Εφαρμογή 79

Έστω συνάρτηση $f, f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + 1}$. Να βρεθεί η ασύμπτωτη $y = ax + \beta$ της γραφικής της παράστασης, σε μία περιοχή του $+\infty$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ax + \beta \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = 0$ άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + 1} - ax - \beta \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x \left[\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}} + \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{\beta}{x} \right] \right\} = (+\infty)(4 - a)$$

- Αν $4 - a > 0 \Leftrightarrow 4 > a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = +\infty$
- Αν $4 - a < 0 \Leftrightarrow 4 < a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = -\infty$
- Αν $4 - a = 0 \Leftrightarrow 4 = a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = (+\infty)0$ (?) Απροσδιόριστη

μορφή. Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + 1} - 4x - \beta \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} - x \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right] - \beta$$

Χρησιμοποιώντας δύο φορές συζυγή παράσταση, έχω

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} - x \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right] - \beta = 0 + 0 - \beta = -\beta$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = 0 \Leftrightarrow a = 4, \beta = 0$$

Εφαρμογή 80

$$\text{Εύρεση των ασύμπτωτων της } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\text{Είναι } \Pi O = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*, \bullet \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$$

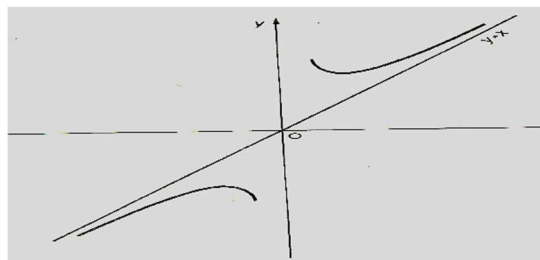
$$\bullet \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα, η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f όταν το x τείνει στο $+\infty$

$$\text{Επίσης είναι } \bullet \alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$$

$$\bullet \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα, η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f όταν το x τείνει στο $-\infty$



Εμπειρικός κανόνας

Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, τότε υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

Εφαρμογή 81

$$\text{Εύρεση των ασύμπτωτων της } f, f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 8}$$

$$\text{Είναι } D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

1^{ος} τρόπος

$$\text{Είναι } \alpha = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{4x^2-8x} = 0,$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{4x-8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα, η (ε) $y = \alpha x + \beta = 0x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Είναι } f(x) - (\alpha x + \beta) = \frac{2x+3}{4x-8} - (\alpha x + \beta) = \frac{-4\alpha x^2 + (2-4\beta+8\alpha)x + 3+8\beta}{4x-8}$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-4\alpha x^2 + (2-4\beta+8\alpha)x + 3+8\beta}{4x-8} \right], \text{ συνεπώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-4\alpha x^2 + (2-4\beta+8\alpha)x + 3+8\beta}{4x-8} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4\alpha = 0 \\ 2-4\beta+8\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα, η (ε) $y = \alpha x + \beta = 0x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$

Εφαρμογή 82

Εύρεση των ασύμπτωτων της $f, f(x) = \sqrt{x^2+x}$ στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x(x+1)}, \quad D(f) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a,$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \frac{1}{2}$$

Άρα, η (ε) $y = \alpha x + \beta = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = a,$$

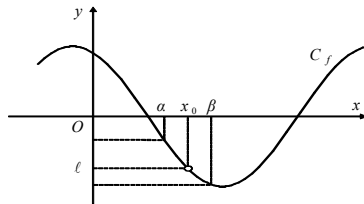
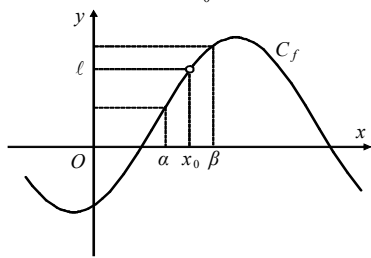
$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = -\frac{1}{2}$$

Άρα, η (ε) $y = \alpha x + \beta = -x - \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

5.15 Ιδιότητες των ορίων

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε κοντά στο x_0 ισχύει ότι $f(x) > 0$

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε κοντά στο x_0 ισχύει ότι $f(x) < 0$



Γενικότερα, έστω ότι μία συνάρτηση f έχει όριο στη θέση x_0 το $\ell \neq 0$. Τότε, σε μία περιοχή του x_0 οι τιμές που παίρνει η f , έχουν το πρόσημο του ορίου της. Για την ενιαία διατύπωση αυτής της ιδιότητας, θεωρώ ως πρόσημο του $+\infty$ το $+$ και του $-\infty$ το $-$. Τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων, δεν ισχύουν. Πράγματι, για τη συνάρτηση $f, f(x) = x^2$ με $\text{Π.Ο.} = \mathbb{R}$, ισχύει ότι κοντά στη θέση $x_0 = 0$ είναι $f(x) > 0$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

5.15.1 Παρατηρήσεις

1 Αν σε ένα διάστημα του x_0 οι τιμές της συνάρτησης f είναι θετικές (ή αρνητικές) και υπάρχει το όριο της f του x τείνοντος στο x_0 , τότε αυτό το όριο αποκλείεται να είναι αρνητικό (ή θετικό), αλλά δεν αποκλείεται να είναι μηδέν.

Πράγματι, οι τιμές της $f, f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ είναι θετικές, αλλά το όριο της στο $+\infty$ είναι μηδέν.

2 Έστω συναρτήσεις f, g με κοινό Π.Ο., με $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x του κοινού τους Π.Ο., που έχουν όριο στο $x_0 \in \text{Π.Ο.}$ Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Ομοίως αν $f(x) < g(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Πράγματι, αν $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, κοντά στη θέση $x_0 = 0$ του Π.Ο. τους, ισχύει ότι $f(x) < g(x)$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

3 Αν η f έχει στη θέση x_0 όριο το μηδέν και η g είναι φραγμένη σε μία περιοχή του x_0 , τότε η $f \cdot g$ έχει στο x_0 όριο το μηδέν.

Παράδειγμα

Έστω συναρτήσεις $f, f(x) = x - 5$, $g, g(x) = 2x$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (x - 5) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (2x) = 10$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 5} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 5} [(x - 5)2x] = 0$

4 Έστω ότι για τις συναρτήσεις f, g σε μία περιοχή του x_0 ισχύει ότι $|g(x)| < |f(x)|$ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$

Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$, ισχύει ότι $\left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

5 Αν μία συνάρτηση έχει στη θέση x_0 πεπερασμένο όριο ℓ , τότε είναι φραγμένη σε μία περιοχή του x_0

6 Αν συνάρτηση f έχει στη θέση x_0 πεπερασμένο όριο, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

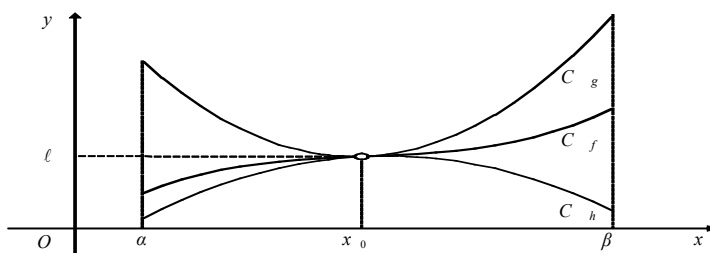
7 Αν συνάρτηση f έχει στη θέση x_0 όριο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

5.15.2 Κριτήριο μη σύγκλισης

Μία συνάρτηση f δεν έχει στη θέση x_0 πεπερασμένο όριο (δηλαδή δεν υπάρχει το όριο ή υπάρχει και είναι $+\infty$ ή $-\infty$), αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό, ώστε σε κάθε διάστημα του x_0 να υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$

5.15.3 Κριτήριο της παρεμβολής

Αν για τις συναρτήσεις h, f, g σε μία περιοχή του σημείου x_0 ισχύει ότι $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και οι h, g έχουν στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$, τότε και η f έχει στη θέση x_0 όριο ℓ



Εφαρμογή 83

Έστω $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2}{f^4(x) + 1}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Επειδή $x^2 \geq 0$ και $f^4(x) + 1 \geq 1 \geq 0$, είναι $0 \leq \frac{x^2}{f^4(x) + 1} \leq \frac{x^2}{1}$, δηλαδή $0 \leq f(x) \leq x^2$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Εφαρμογή 84

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Είναι γνωστό ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq 1 + x$

Αν στη θέση του x θέσω $-x$ τότε η ανωτέρω σχέση γίνεται $e^{-x} \geq 1 - x$

Για $x \in (-1, 1)$ είναι $e^x \leq \frac{1}{1-x}$

Έτσι, είναι $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{x-1}$

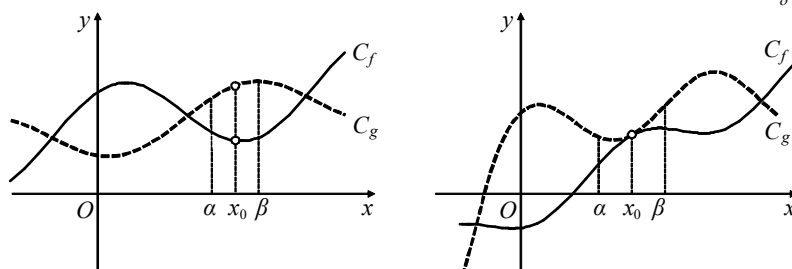
$$\begin{cases} \text{Αν } 0 < x < 1, \text{ είναι } 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x} \\ \text{Αν } -1 < x < 0, \text{ είναι } 1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1-x} \end{cases}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

5.15.4 Όρια και διάταξη

Έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για τις συναρτήσεις f, g σε μία περιοχή του x_0

- Αν οι f, g έχουν στη θέση x_0 πεπερασμένα όρια, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$



- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

5.15.5 Όρια και πράξεις

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), k \in \mathbb{R}$

Οι ως άνω προτάσεις, επεκτείνονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ όταν } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\nu = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^\nu, \nu \in \mathbb{N}$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ όταν } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0$

5.15.6 Όριο πολωνυμικής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

Για μία πολωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη

Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{\nu-2} x^{\nu-2}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_2 x^2) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \\
&= \alpha_\nu \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_2 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 + \alpha_1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 = \\
&= \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \\
&= P(x_0)
\end{aligned}$$

5.15.7 Όριο ρητής συνάρτησης, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

Για μία ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, με $Q(x_0) \neq 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Απόδειξη

Για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0)$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0)$$

Παρατήρηση

Αν $P(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{0}{Q(x_0)} = 0$

Αν $P(x_0) = 0$ και $Q(x_0) = 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_0) \cdot P_1(x_0)}{(x - x_0) \cdot Q_1(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)} \text{ κ.ο.κ.}$$

5.15.8 Τριγωνομετρικά όρια, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon \phi x = \epsilon \phi x_0$, $x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \phi x = \sigma \phi x_0$, $x_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 0$

5.15.9 Όριο του αθροίσματος, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$;$	$;$

5.15.10 Όριο του γινομένου, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

5.15.10 Όριο του πηλίκου όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	;	;

Απροσδιόριστες μορφές, για τα όρια των πράξεων των συναρτήσεων, είναι οι ακόλουθες. $(+\infty) + (-\infty)$, $0(\pm\infty)$, $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, $\frac{0}{0}$

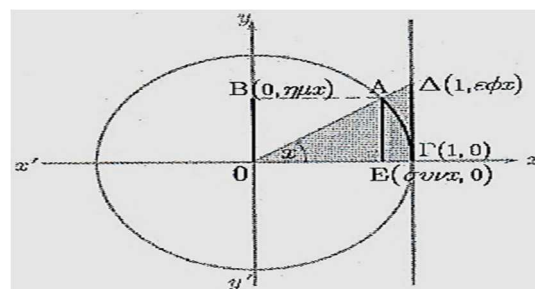
Από τον ορισμό του ορίου μίας συνάρτησης στη θέση x_0 , προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (-f)(x) = -l$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (-f)(x) = -\infty$

Εφαρμογή 85

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi 4x}{x} = 4$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, συγκρίνοντας τα εμβαδά των τριγώνων ΟΑΕ, ΟΓΔ και του κυκλικού τομέα ΟΑΓ, προκύπτει ότι



$$E_{\text{OAE}} < E_{\text{OAG}} < E_{\text{OΓΔ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \text{OE} \cdot \text{AE} < \frac{1}{2} \cdot x \cdot \pi \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot \text{OG} \cdot \text{ΓΔ} \Leftrightarrow$$

$$\cos x \cdot \sin x < x < 1 \cdot \varepsilon\phi x \Leftrightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} < \frac{\eta\mu x}{x} < \cos x.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$, από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει ότι

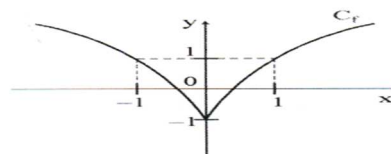
υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 4x}{x} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$

Εφαρμογή 86

Υπολογίστε εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ για τη συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Το σημείο $x_0 = 0$ είναι διφορούμενο, διότι άλλος είναι ο τύπος της f δεξιά του ($x > x_0$) και άλλος αριστερά του ($x < x_0$)

Βρίσκω τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

Εφαρμογή 87

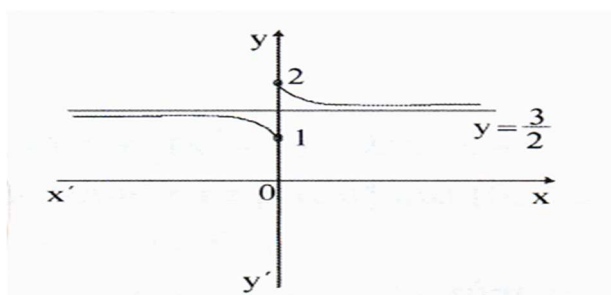
Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για τη συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.

Το σημείο $x_0 = 0$ είναι διφορούμενο, διότι άλλος είναι ο τύπος της f δεξιά του ($x > x_0$) και άλλος αριστερά του ($x < x_0$)

Βρίσκω τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

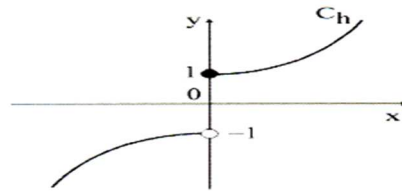
Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$



Εφαρμογή 88

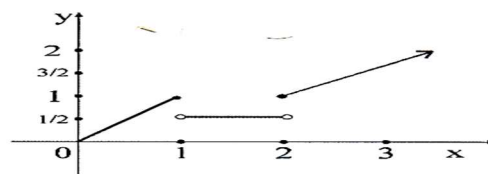
Υπολογίστε εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ για τη συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.

Το σημείο $x_0 = 0$ είναι διφορούμενο. Βρίσκω τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.



Εφαρμογή 89

Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τη συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Επειδή $\text{Π.Ο.} = [0, +\infty)$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$

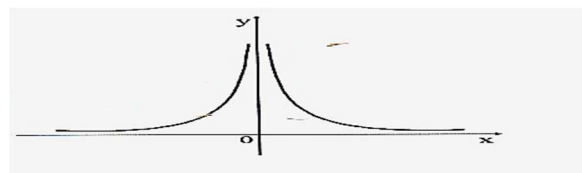
Το σημείο $x_0 = 1$ είναι διφορούμενο, άρα πρέπει να βρω τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Το σημείο $x_0 = 2$ είναι διφορούμενο, άρα πρέπει να βρω τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{2}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Τέλος είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Εφαρμογή 90

Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τη συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Είναι $\text{Π.Ο.} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Επίσης, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Εφαρμογή 91

Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν, τα:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^3 + 3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 3) = 0 + 3 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x-3)} = \frac{4}{-1} = -4$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2 \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{(x-1)^2 \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x-1) \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x-2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

$$= (-3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \begin{cases} (-3) \cdot (+\infty) = -\infty, & \text{όταν } x > 1 \\ (-3) \cdot (-\infty) = +\infty, & \text{όταν } x < 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 10x + 24} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-6} = -4$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7}{x+6} = \frac{9}{8}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x-3|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x+2) = -1 \end{cases}$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x-3|}$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+5} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} =$

$$\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot (+\infty) = +\infty, & \text{διότι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \frac{1}{3} \cdot (-\infty) = -\infty, & \text{διότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{cases}$$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x+5)}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x(x-3)} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x(x-3)} = 0$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^3(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^2(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+5} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{3} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\bullet \text{Όταν } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{9}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{-9}{x} \rightarrow -\infty$$

$$\text{Όταν } x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{9}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{-9}{x} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9|x|}{x^2 - 9|x|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 9x}{x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left(1 + \frac{9}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{9}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{9}{x}}{1 - \frac{9}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{9}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{9}{x}\right)} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 9x}{x^2 + 9x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \left(1 - \frac{9}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{9}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \frac{9}{x}}{1 + \frac{9}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{9}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{9}{x}\right)} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty \end{cases}$$

Εφαρμογή 92

$$\text{Εύρεση των } a, \beta \in \mathbb{R} \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ αν } f, f(x) = \frac{x^2 + 2ax - \beta + 5}{2x - 4}$$

Είναι $\text{ΠΟ} = \mathbb{R} - \{2\}$. Αφού το 2 είναι ρίζα του παρονομαστή, πρέπει να είναι και του αριθμητή. Συνεπώς, $9 + 4\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 9 + 4\alpha$

$$\text{Άρα, το } f(x) \text{ γράφεται ως } f(x) = \frac{x^2 + 2ax - \beta + 5}{2x - 4} = \frac{x^2 + 2ax - (4\alpha + 9) + 5}{2(x - 2)} =$$

$$\frac{(x-2)(x+2) + 2\alpha(x-2)}{2(x-2)} = \frac{x+2+2\alpha}{2}$$

$$\text{Δηλαδή } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2+2\alpha}{2} = \frac{2+2+2\alpha}{2} = 2 + \alpha$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \Leftrightarrow 2 + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ και } \beta = 9 + 4\alpha = 9 + 4(-1) = 5$$

Εφαρμογή 93

$$\text{Βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ για τον } a \in \mathbb{R} \text{ αν } f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8} + (\alpha - 3)x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} + (\alpha - 3)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}\right)} + (\alpha - 3)x \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (\alpha - 3)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (\alpha - 3)x \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (\alpha - 3)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (\alpha - 3)x \right] =$$

$$(+\infty)(1 + \alpha - 3) = (+\infty)(\alpha - 2)$$

- Όταν $\alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $\alpha - 2 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Όταν $\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$, τότε $(+\infty) \cdot 0 =$ απροσδιόριστη μορφή, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης, άρα η f γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 8})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 8}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{8}{x} \right)}{x \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{8}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1}$$

$$= \frac{2 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Εφαρμογή 94

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \text{ δείξτε ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$\text{Θέτω } \frac{f(x)}{g(x)} = h(x), \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = +\infty$$

$$\text{Επειδή } g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = f(x) \frac{1}{h(x)} \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \frac{1}{h(x)} \right] = \ell \cdot 0 = 0$$

Εφαρμογή 95

$$\text{Αν } f, f(x) = \frac{x^2 + \alpha x - \beta}{|x - 2|} \text{ εξετάστε αν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Πρέπει το 2 να είναι ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $2\alpha + 4 = \beta$

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x - \beta}{|x - 2|} = \frac{x^2 + \alpha x - (2\alpha + 4)}{|x - 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2) + \alpha(x - 2)}{|x - 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2 + \alpha)}{|x - 2|} =$$

$$\begin{cases} \frac{(x - 2)(x + 2 + \alpha)}{x - 2} = x + 2 + \alpha, & x > 2 \\ \frac{(x - 2)(x + 2 + \alpha)}{-(x - 2)} = -x - 2 - \alpha, & x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2 + \alpha) = 4 + \alpha \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x - 2 - \alpha) = -4 - \alpha$$

$$\text{Για να υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ πρέπει } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + \alpha = -4 - \alpha = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\text{Άρα, } \alpha = -4 \text{ οπότε } \beta = 2\alpha + 4 = -4$$

Εφαρμογή 96

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ για $f, f(x) = \frac{x^2 + 2ax - \beta + 5}{2x - 4}$

Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$. Αφού το 2 είναι ρίζα του παρονομαστή πρέπει να είναι ρίζα και του αριθμητή. Δηλαδή $9 + 4a - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 9 + 4a$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax - \beta + 5}{2x - 4} = \frac{x^2 + 2ax - (9 + 4a) + 5}{2(x - 2)} = \frac{(x - 2)(x + 2) + 2a(x - 2)}{2(x - 2)} = \frac{(x + 2) + 2a}{2}$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 + 2a}{2} = \frac{2 + 2 + 2a}{2} = 2 + a$$

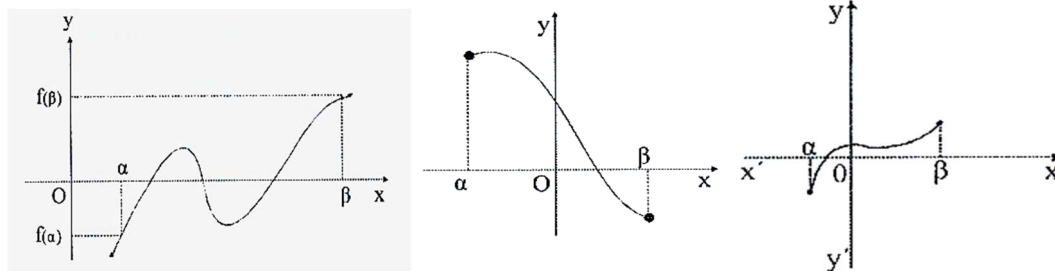
Για να είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ πρέπει $2 + a = 1 \Rightarrow a = -1$, οπότε $\beta = 4a + 9 = 5$

5.15.11 Βασικά όρια συναρτήσεων

- $\lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}} x^k = x_0^k$ όπου $k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}} ax^k = ax_0^k$, όπου $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, όπου $k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$, όπου k άρτιος φυσικός αριθμός
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$, όπου k περιττός φυσικός αριθμός
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, όπου $k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, όπου $k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

5.16 Θεώρημα του Bolzano

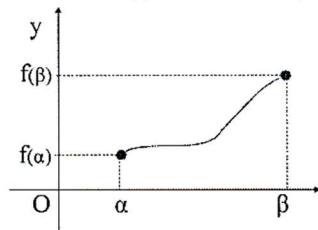
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και στα άκρα α, β έχει ετερόσημες τιμές, δηλαδή $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Τότε, η f μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του (α, β)



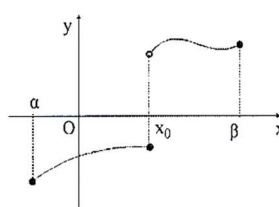
Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και οι τιμές της στα α, β είναι ετερόσημες, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α, β) . Η πρόταση αυτή οφείλεται στους Bolzano και Weierstrass για αυτό στη βιβλιογραφία συναντάται ως θεώρημα που φέρει το όνομα τους.

5.16.1 Παρατήρηση

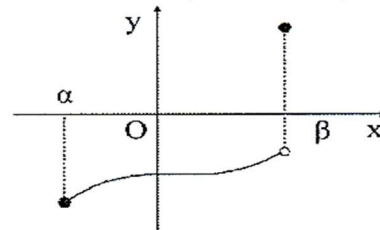
Για να ισχύει το θεώρημα, πρέπει να ικανοποιούνται και οι δύο προϋποθέσεις του.



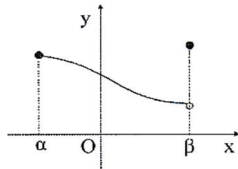
f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
αλλά $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$



$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ αλλά
 f ασυνεχής στο $[\alpha, \beta]$



$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ αλλά
 f συνεχής στο $[\alpha, \beta)$

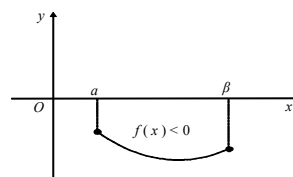
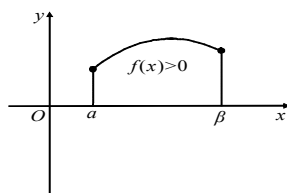


$f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ και
 f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

5.16.2 Πορίσματα

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

1 Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα χωρίς να μηδενίζεται σε αυτό, τότε είναι θετική ή αρνητική, σε κάθε σημείο αυτού του διαστήματος. Δηλαδή, διατηρεί πρόσημο στο διάστημα.



2 Κάθε συνεχής συνάρτηση, διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Εφαρμογή 97

Δείξτε ότι η $x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, \pi)$

Η $f, f(x) = x^2 - x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$f(0) = 0^2 - 0 \cdot \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$$

$$f(\pi) = \pi^2 - \pi \cdot \eta\mu \pi - \sigma\upsilon\nu \pi = \pi^2 + 1 > 0$$

Άρα, η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ από το θεώρημα του Bolzano έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, \pi)$

Εφαρμογή 98

Δείξτε ότι η $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Αν $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Άρα, υπάρχουν $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(a) < 0$, $f(\beta) > 0$, δηλαδή $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

Η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$, άρα η $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Γενίκευση

Με την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται η πρόταση «Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα».

Εφαρμογή 99

Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$, δείξτε ότι η $\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0$ έχει τουλάχιστον μία

ρίζα στο (α, β)

Η ανωτέρω εξίσωση γράφεται $(x^2+1) \cdot (x-\beta) + (x^6+1) \cdot (x-\alpha) = 0$

Η $f(x) = (x^2+1) \cdot (x-\beta) + (x^6+1) \cdot (x-\alpha)$ ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ διότι:

$$f(a) = (\alpha^2+1) \cdot (\alpha-\beta) + (\alpha^6+1) \cdot (\alpha-\alpha) = (\alpha^2+1) \cdot (\alpha-\beta) < 0 \text{ και}$$

$$f(\beta) = (\beta^2+1) \cdot (\beta-\beta) + (\beta^6+1) \cdot (\beta-\alpha) = (\beta^6+1) \cdot (\beta-\alpha) > 0$$

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β)

Εφαρμογή 100

Δείξτε ότι η $x = a \cdot \eta\mu x + \beta$, με $\alpha, \beta > 0$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα, που δεν υπερβαίνει τον αριθμό $\alpha + \beta$

Η $f, f(x) = x - a \cdot \eta\mu x - \beta$ είναι συνεχής στο $[0, \alpha + \beta]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(0) = 0 - a \cdot \eta\mu 0 - \beta = -\beta < 0$ και

$f(a + \beta) = \alpha + \beta - a \cdot \eta\mu(\alpha + \beta) - \beta = \alpha[1 - \eta\mu(\alpha + \beta)] \geq 0$ διότι $\alpha > 0$ και $\eta\mu(\alpha + \beta) \leq 1$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Αν } \eta\mu(\alpha + \beta) = 1, \text{ τότε } f(\alpha + \beta) = 0 \text{ \& o αριθμός } (\alpha + \beta) \text{ είναι ρίζα της εξίσωσης } f(x) = 0 \\ \text{Αν } \eta\mu(\alpha + \beta) \neq 1, \text{ τότε } f(\alpha + \beta) > 0, \text{ άρα } f(0) \cdot f(\alpha + \beta) < 0, \text{ άρα από Bolzano η εξίσωση } f(x) = 0 \\ \text{έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα } (0, \alpha + \beta) \end{array} \right.$

Άρα, πάντα η $x - a \cdot \eta\mu x - \beta = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0, \alpha + \beta]$

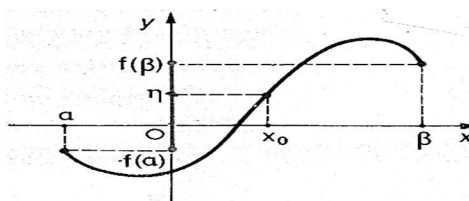
Εφαρμογή 101

Αν η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$

Έστω ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$ με $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) < 0$. Τότε από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο. Άρα, η f έχει σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$

5.17 Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$



Αυτό το θεώρημα γεωμετρικά, εκφράζει ότι κάθε σημείο του άξονα yy' που βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ είναι τιμή της συνάρτησης. Δηλαδή, από κάθε τέτοιο σημείο, μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα xx' τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τουλάχιστον ένα σημείο. Το θεώρημα οφείλεται στον Darboux για αυτό στη βιβλιογραφία συναντιέται ως θεώρημα που φέρει το όνομα του.

Απόδειξη

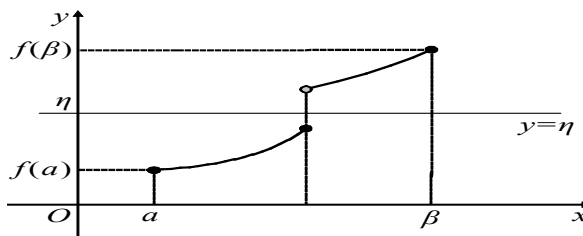
Έστω ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Θα δειχθεί ότι για $\forall \eta \in (f(\alpha), f(\beta))$, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$. Προς τούτο, θεωρώ τη συνάρτηση $g, g(x) = f(x) - \eta$, που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$$

Άρα, η g ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος Bolzano συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$

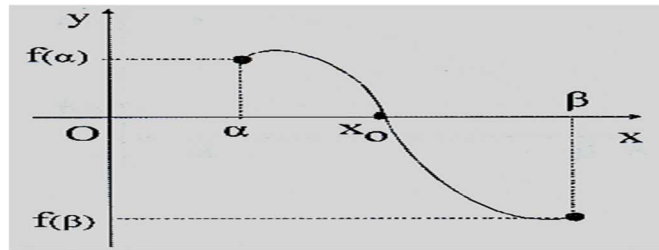
5.17.1 Σχόλιο

Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

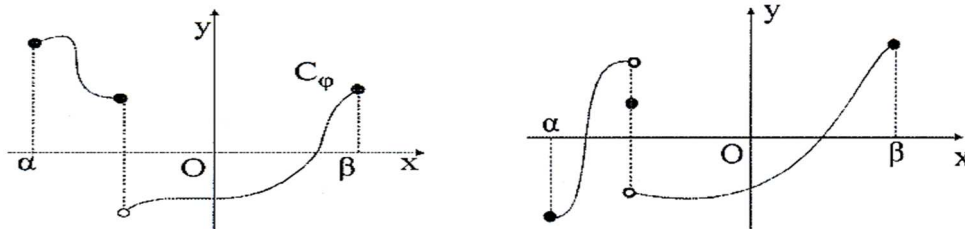


5.17.2 Πόρισμα

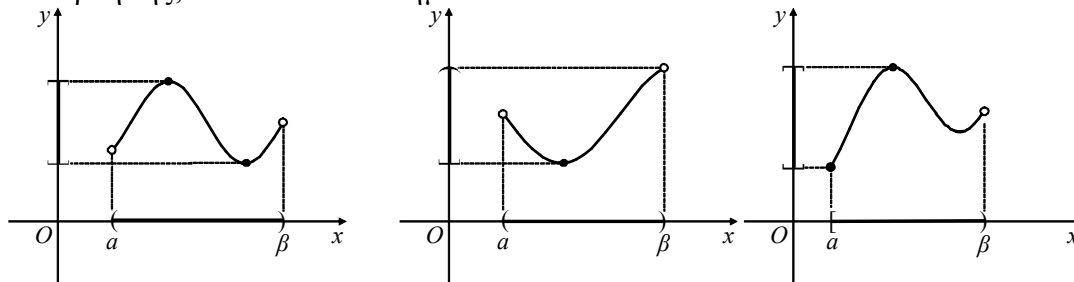
Μία συνεχής συνάρτηση f απεικονίζει ένα οποιοδήποτε διάστημα (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο) σε ένα διάστημα. Αποδεικνύεται πως η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος, με συνεχή συνάρτηση, είναι ένα κλειστό διάστημα.



Η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος με συνάρτηση φ , μπορεί να είναι ένα κλειστό διάστημα, χωρίς η φ να είναι συνεχής.



Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μίας συνεχούς, μη σταθερής συνάρτησης, είναι ένα διάστημα.



Εφαρμογή 102

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και οι τιμές της είναι ρητοί αριθμοί, τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

Έστω ότι η f όχι σταθερή στο Δ . Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \neq f(x_2)$

Από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, η f παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των ρητών $f(x_1), f(x_2)$, άρα παίρνει και άρρητες τιμές, που είναι άτοπο. Άρα, η f είναι σταθερή στο Δ

Εφαρμογή 103

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ και $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$, δείξτε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη. Επειδή f συνεχής με $f(\alpha) < f(\beta)$ από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, για κάθε αριθμό η , έστω $\eta = f(\gamma)$ μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = \eta = f(\gamma)$. Όμως $\gamma > \beta$ άρα, για $x_0 < \gamma$ ισχύει $f(x_0) = f(\gamma)$, άρα η f όχι 1-1 άρα, δεν είναι αντιστρέψιμη.

Εφαρμογή 104

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ με $f(x_0) = \frac{2}{5}f(a) + \frac{3}{5}f(\beta)$

Μέθοδος εργασίας

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, προκειμένου να αποδείξω ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$, αρκεί να δειχθεί ότι ο αριθμός η βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$. [Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών]

Αρκεί να δειχθεί ότι ο αριθμός $\eta = \frac{2}{5}f(a) + \frac{3}{5}f(\beta)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$

Έστω ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Αρκεί να δειχθεί ότι:

$$f(a) < \frac{2}{5}f(a) + \frac{3}{5}f(\beta) < f(\beta) \Leftrightarrow 5f(a) < 2f(a) + 3f(\beta) < 5f(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3f(a) < 3f(\beta) \\ 2f(a) < 2f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) < f(\beta) \\ f(a) < f(\beta) \end{cases} \text{ που ισχύουν.}$$

Ομοίως και όταν $f(\alpha) > f(\beta)$

5.18 Συνέχεια συναρτήσεων

5.18.1 Συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0

Μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ , λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Παρατηρήσεις

1 Αν μία συνάρτηση δεν είναι ορισμένη στο σημείο x_0 , δεν μιλάω για συνέχεια της στο σημείο αυτό. Μπορώ να αναζητήσω το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ χωρίς η f να είναι ορισμένη στο σημείο x_0 , αρκεί να είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

2 Αν θέσω $x = x_0 + \Delta x$ ($\Delta x = x - x_0$) τότε η ανωτέρω συνθήκη γράφεται

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$$

5.18.2 Συνάρτηση ασυνεχής στο σημείο x_0

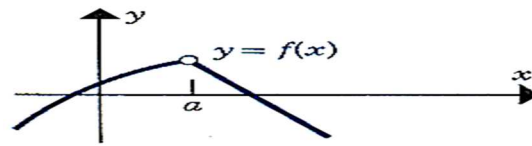
Μία συνάρτηση f λέγεται ασυνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν δεν είναι συνεχής στο x_0 δηλαδή ισχύει μία τουλάχιστον από τις παρακάτω περιπτώσεις: (α) Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(β) Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

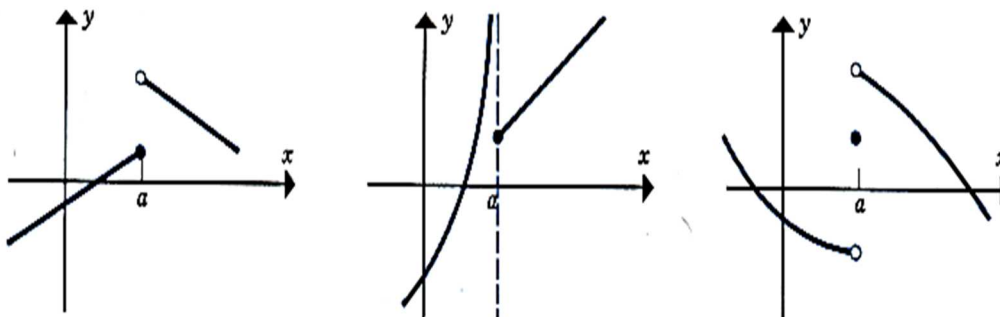
(γ) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

5.18.3 Πλευρική συνέχεια συνάρτησης στο σημείο x_0

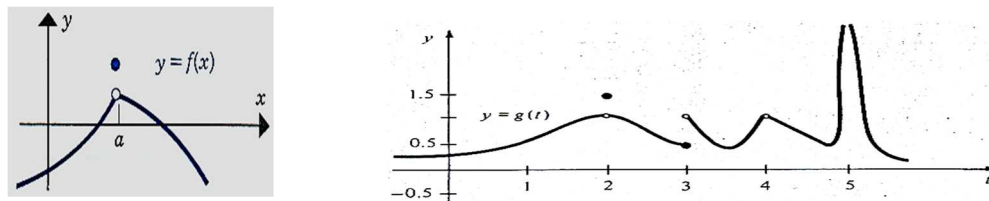
Περίπτωση 1^η Όταν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, αλλά δεν υπάρχει το $f(a)$



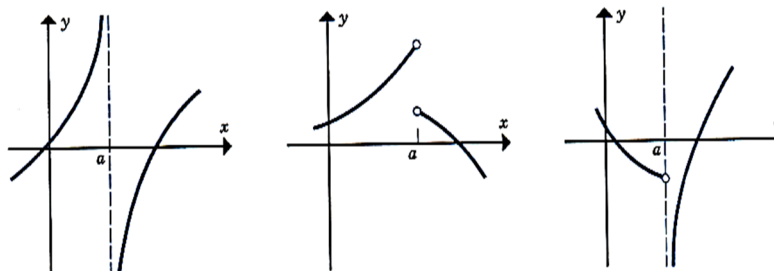
Περίπτωση 2^η Όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ αλλά υπάρχει το $f(a)$



Περίπτωση 3^η Όταν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $f(a)$ αλλά $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$



Περίπτωση 4^η Όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ και το $f(a)$ δεν ορίζεται.



5.18.4 Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό, υπάρχει $\delta > 0$ που εξαρτάται από το ε , τέτοιο ώστε $\forall x \in \Delta : |x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

5.18.5 Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε στο διάστημα αυτό παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο.

- Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε στο διάστημα αυτό είναι και φραγμένη.
- Αν η f είναι 1-1 και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(\alpha)]$
- Η εικόνα $f(\Delta)$ του διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, β) , τότε το πεδίο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $\left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)\right)$.
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (a, β) , τότε το πεδίο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $\left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)\right)$.
- Το όριο της κάθε συνάρτησης αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

5.18.6 Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
- Κάθε ρητή συνάρτηση, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση, είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.
- Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχείς συναρτήσεις.
- Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής συνάρτηση.
- Αν η f είναι συνεχής, τότε οι συναρτήσεις $|f|$, $\sqrt[k]{f}$ είναι συνεχείς.

Αντιπαράδειγμα

Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, παντού ασυνεχούς, ενώ η $|f|$ είναι παντού συνεχής. Η $f, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι παντού ασυνεχής, ενώ η συνάρτηση $|f|, |f|(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους. Οι ς $f(x) = \eta \mu x$ και $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$ είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$

Η $f(x) = \varepsilon \phi x$ είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Η $f(x) = \sigma \phi x$ είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Η $f(x) = a^x$ με $a > 0$, είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$

Η $f(x) = \log_a x$ με $a > 0$ και $a \neq 1$ είναι συνεχής $\forall x > 0$

Η $f(x) = x^a$ με $\text{ΠΟ} = (0, +\infty)$ και a σταθερό αριθμό, είναι συνεχής $\forall x \in \text{ΠΟ}$

5.18.7 Βασικές προτάσεις στις συνεχείς συναρτήσεις

1 Αν οι f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και στο $x_0 \in \Delta$ είναι συνεχείς, τότε και οι $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0

2 Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ , τότε οι $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο Δ . Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πράγματι αν $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ τότε $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Οι f, g είναι ασυνεχείς στη θέση $x_0 = 0$ ενώ η $f+g$ είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 0$

Έστω $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ ασυνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους, Το γινόμενο τους, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases} = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

3 Αν η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η g ασυνεχής στο x_0 , τότε οι $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ είναι ασυνεχείς στο x_0

4 Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και στο $x_0 \in \Delta$ είναι συνεχής με $f(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο x_0

5 Αν οι f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού Δ και στο $x_0 \in \Delta$ είναι συνεχείς, με $g(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0

6 Αν οι f, g είναι συνεχείς στο κοινό διάστημα ορισμού Δ και $g(x_0) \neq 0 \forall x \in \Delta$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο Δ

Εφαρμογή 105

Δείξτε ότι η $f, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-x^2, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\forall x < 1, f(x) = x+1$ συνεχής ως πολυωνυμική.

$\forall x > 1, f(x) = 3-x^2$ συνεχής ως πολυωνυμική.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$

Η θέση $x_0 = 1$ είναι διφορούμενη.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x^2) = 3-1^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 1+1 = 2$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$ η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$

Τελικά η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Εφαρμογή 106

Βρείτε το σύνολο τιμών της $f, f(x) = x + \ln x, x \in [1, e]$

$\forall x_1, x_2 \in [1, e]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\ln x_1 < \ln x_2$, άρα

$x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αφού είναι συνεχής ως άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων, έχει πεδίο τιμών το $[f(1), f(e)] = [1 + \ln 1, e + \ln e] = [1, e + 1]$

Εφαρμογή 107

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $x^2 f(x) = 1 - \sin(2x)$. Ποια η τιμή $f(0)$;

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι $f(x) = \frac{1 - \sin(2x)}{x^2} = \frac{2 \eta \mu^2 x}{x^2} = 2 \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2$ και αφού η f είναι συνεχής, τότε ισχύει ότι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$

Εφαρμογή 108

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x) = \begin{cases} \beta x + 2\alpha - 1, & x \geq 1 \\ \frac{x^2 + x + \alpha}{x - 1}, & x < 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

$\forall x > 1$ η f συνεχής ως πολωνυμική.

$\forall x < 1$ η f συνεχής ως ρητή.

Άρα, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 + x + \alpha}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$$

Πρέπει το 1 να είναι ρίζα αριθμητή, ώστε να είναι δυνατή η απαλοιφή του παρονομαστή, δηλαδή $x^2 + x + a = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\beta x + 2\alpha - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [\beta + 2(-2) - 1] = \beta - 5$$

Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή $\beta - 5 = 3 \Leftrightarrow \beta = 8$

Για να είναι συνεχής η f στη θέση 1 πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ που ισχύει.

Άρα, για $(\alpha, \beta) = (-2, 8)$ η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Εφαρμογή 109

Η $f, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{\ln 2} \\ \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq \frac{1}{\ln 2} \end{cases}$ και $x \neq 0$ να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια

στη θέση $x_0 = \frac{1}{\ln 2}$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^+} \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}} = {}^* +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^-} \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}} = {}^* -\infty$$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}} f(x)$, οπότε η f είναι ασυνεχής στη θέση $x_0 = \frac{1}{\ln 2}$

Επεξηγήσεις

$$x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 > \frac{1}{x} \Rightarrow e^{\ln 2} > e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln 2 > \frac{1}{x} \Rightarrow 2 > e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2 - e^{\frac{1}{x}} > 0$$

$$x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^- \Rightarrow x < \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 < \frac{1}{x} \Rightarrow e^{\ln 2} < e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2 < e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2 - e^{\frac{1}{x}} < 0$$

Εφαρμογή 110

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια την f , $f(x) = \min\{x^2 + 1, 9x - 7\}$

Έστω $A = x^2 + 1$, $B = 9x - 7$

Τότε:

$$A - B > 0 \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \min\{A, B\} = B$$

$$A - B < 0 \Leftrightarrow A < B \Leftrightarrow \min\{A, B\} = A$$

$$A - B = 0 \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \min\{A, B\} = A = B$$

x	$-\infty$	1	8	$+\infty$
$A - B$		+	0	-

Επεξήγηση

$$A - B = x^2 - 9x + 8 \quad (\Delta = 8 > 0, \rho_1 = 1, \rho_2 = 8)$$

$$\text{Άρα } f, f(x) = \begin{cases} 9x - 7, & x \in (-\infty, 1) \cup (8, +\infty) \\ x^2 + 1, & x \in (1, 8) \\ 2, & x = 1 \\ 65, & x = 8 \end{cases}$$

Η f ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1, 8\}$

Εξετάζω τη συνέχεια της f στη θέση $x_0 = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (9x - 7) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\text{Είναι } f(1) = 2$$

Άρα, η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$

Εξετάζω τη συνέχεια της f στη θέση $x_0 = 8$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} (9x - 7) = 65 \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} (x^2 + 1) = 65 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 65$$

$$\text{Είναι } f(8) = 65$$

Άρα, η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 8$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Εφαρμογή 111

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0 = 1$, την $f, f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 5^{\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 5^{\frac{1}{x-1}} =^* \lim_{y \rightarrow -\infty} 5^y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 5^{\frac{1}{x-1}} =^* \lim_{y \rightarrow +\infty} 5^y = +\infty$$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, συνεπώς η f είναι ασυνεχής στη θέση $x_0 = 1$

Επεξήγηση

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} 5^{\frac{1}{x-1}} =^* \lim_{y \rightarrow -\infty} 5^y = 0$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} 5^{\frac{1}{x-1}} =^* \lim_{y \rightarrow +\infty} 5^y = +\infty$$

Εφαρμογή 112

Εύρεση των $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ για συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν $x - x^2 \leq f(x) \leq x$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (x - x^2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, άρα από το κριτήριο της παρεμβολής ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{cases} \text{Αν } x > 0 \Rightarrow \frac{x - x^2}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x}{x} \Rightarrow 1 - x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 \\ \text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1 \text{ \& } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Αν } x < 0 \Rightarrow \frac{x - x^2}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x}{x} \Rightarrow 1 - x \geq \frac{f(x)}{x} \geq 1 \\ \text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1 \text{ \& } \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1 \end{cases}$$

Εφαρμογή 113

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(\nu) = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ δείξτε ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$, τότε η f αφού είναι συνεχής πρέπει να διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή οι τιμές $f(1), f(2), f(3), \dots, f(\nu)$ να είναι ομόσημες, οπότε δε γίνεται να έχουν άθροισμα μηδέν, πράγμα άτοπο. Συνεπώς, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Εφαρμογή 114

Δείξτε με αντιπαραδείγματα, ότι δεν αληθεύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί:

(i) Αν η f είναι συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ τότε παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $(\alpha, \beta]$

(ii) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η $\frac{1}{f}$ συνεχής στο x_0

(iii) Αν η f παίρνει θετική τιμή σε κάποιο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε υπάρχει περιοχή του x_0 , στην οποία η f παίρνει θετική τιμή.

(iv) Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη.

Για κάθε ψευδή ισχυρισμό γράψτε την επιπλέον συνθήκη ή περιορισμό που απαιτείται ώστε να είναι αληθής.

(i) Η $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, άρα η f δεν έχει μέγιστο στο πεδίο ορισμού της, οπότε ο ισχυρισμός ήταν ψευδής.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα του ισχυρισμού, πρέπει η f να ορίζεται σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Η κλειστότητα του διαστήματος αποτελεί ικανή συνθήκη, αλλά όχι αναγκαία.

(ii) Αν $f(x) = x$ με $\text{ΠΟ} = \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$, η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 0$, όμως η $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ είναι ασυνεχής στη θέση $x_0 = 0$, αφού εκεί δεν ορίζεται.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα πρέπει και αρκεί $f(x_0) \neq 0$

(iii) Έστω $f, f(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Τότε $f(0) = 1 > 0$, αλλά δεν υπάρχει περιοχή

του μηδέν ώστε $f(x) > 0$ διότι $f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα πρέπει και αρκεί η f να είναι συνεχής στο x_0

(iv) Η $f(x) = \varepsilon \phi x$ και $\text{ΠΟ} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

αλλά μη φραγμένη, διότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon \phi x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \varepsilon \phi x = -\infty$

Μία αναγκαία συνθήκη για να είναι φραγμένη, είναι να ορίζεται σε κλειστό διάστημα ή αν ορίζεται σε ανοικτό ή ημιανοικτό, να υπάρχουν τα όρια στα ανοικτά άκρα και να είναι πεπερασμένα.

Εφαρμογή 115

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0 = 0$, την $f, f(x) = \begin{cases} 5, & x = 0 \\ \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \end{cases}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

• Όταν $x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} 3^y = 0$

Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{5}{1+0} = 5$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

- Όταν $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} 3^y = +\infty$

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{5}{1 + (+\infty)} = 0$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Συνεπώς, η f στη θέση $x_0 = 0$ είναι ασυνεχής.

Επειδή $f(0) = 5 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ είναι συνεχής η f στη θέση $x_0 = 0$ από αριστερά.

Εφαρμογή 116

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^2}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 10x + 24}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 4x - 12}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x+5)}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^3(x+5)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x-3|}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9|x|}{x^2 - 9|x|}$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^3 + 3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 3) = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 10x + 24} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-6} = -4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7}{x+6} = \frac{9}{8}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+5} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \frac{1}{3} \cdot (-\infty) = -\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{cases} \quad \text{Άρα, δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x+5)}.$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^3(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x-1)^2(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+5} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

•

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x(x-3)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x(x-3)} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 3|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x + 2) = -1 \end{cases} \quad \text{Άρα, δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 3|}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9|x|}{x^2 - 9|x|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 9x}{x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left(1 + \frac{9}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{9}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{9}{x}}{1 - \frac{9}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{9}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{9}{x}\right)} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 9x}{x^2 + 9x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \left(1 - \frac{9}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{9}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \frac{9}{x}}{1 + \frac{9}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{9}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{9}{x}\right)} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty \end{cases}$$

Επεξήγηση

$$\bullet \text{Όταν } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{9}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{-9}{x} \rightarrow -\infty$$

$$\bullet \text{Όταν } x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{9}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{-9}{x} \rightarrow +\infty$$

Εφαρμογή 117

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 7x + 9)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^8 + 7x^2 + 6)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt[3]{x^3 + 4}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - |x - 1|}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{4x + 1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$$

Είναι:

•

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 7x + 9) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^5 \left(3 - 7 \frac{1}{x^4} + 9 \frac{1}{x^5} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - 7 \frac{1}{x^4} + 9 \frac{1}{x^5} \right) = (+\infty) \cdot 3 = +\infty$$

•

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^8 + 7x^2 + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^8 \left(-3 + 7 \frac{1}{x^6} + 6 \frac{1}{x^8} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^8 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + 7 \frac{1}{x^6} + 6 \frac{1}{x^8} \right) = (+\infty) \cdot (-3) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt[3]{x^3 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{4}{x^3} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{x^3} \right)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{x^3} \right)}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1) = +\infty$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - |x - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{x} = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}$$

Άρα, υπάρχουν 2 περιπτώσεις

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{4 + \frac{1}{x}} = - \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = - \frac{\sqrt{2}}{4} = - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Επεξήγηση

$$\frac{2x - |x-1|}{x} = \begin{cases} \frac{2x-x+1}{x} = \frac{x+1}{x}, & x \geq 1 \\ \frac{2x+x-1}{x} = \frac{3x-1}{x}, & x < 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{\sqrt{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x} \left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}} \right]}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{3}{x}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}} \right]}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}}}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{\sqrt{1+0} - 0}{1-0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0$$

Εφαρμογή 118

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2(x-1)} + \sqrt[3]{x^2(x+1)} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right)$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2(x-1)} + \sqrt[3]{x^2(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right) =$$

$$(+\infty) \cdot \left(\sqrt[3]{1 - 0} + \sqrt[3]{1 + 0} \right) = (+\infty)$$

•

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} + \sqrt{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = \frac{2}{2} = 1$$

Εφαρμογή 119

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ αν $f, f(x) = \frac{x^2 + ax - \beta}{|x - 2|}$

Πρέπει το 2 να είναι ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $2\alpha + 4 = \beta$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax - \beta}{|x - 2|} = \frac{x^2 + ax - (2\alpha + 4)}{|x - 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2) + \alpha(x - 2)}{|x - 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2 + \alpha)}{|x - 2|} =$$

$$\begin{cases} \frac{(x - 2)(x + 2 + \alpha)}{x - 2} = x + 2 + \alpha, & x > 2 \\ \frac{(x - 2)(x + 2 + \alpha)}{-(x - 2)} = -x - 2 - \alpha, & x < 2 \end{cases}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2 + \alpha) = 4 + \alpha$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x - 2 - \alpha) = -4 - \alpha$$

Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + \alpha = -4 - \alpha = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Άρα, $\alpha = -4$ οπότε $\beta = 2\alpha + 4 = -4$

Εφαρμογή 120

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ αν $f, f(x) = \frac{x^2 + 2ax - \beta + 5}{2x - 4}$

Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$. Αφού το 2 είναι ρίζα του παρονομαστή πρέπει να είναι και του αριθμητή δηλαδή $9 + 4a - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 9 + 4a$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax - \beta + 5}{2x - 4} = \frac{x^2 + 2ax - (9 + 4a) + 5}{2(x - 2)} = \frac{(x - 2)(x + 2) + 2a(x - 2)}{2(x - 2)} = \frac{(x + 2) + 2a}{2}$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 + 2a}{2} = \frac{2 + 2 + 2a}{2} = 2 + a$$

Για να είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ πρέπει $2 + a = 1 \Rightarrow a = -1$, οπότε $\beta = 4a + 9 = 5$

Εφαρμογή 121

Αν $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8} + (a-3)x$ βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} + (a-3)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right)} + (a-3)x \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a-3)x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a-3)x \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a-3)x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + (a-3) \right] = (+\infty)(1+a-3) = (+\infty)(a-2)\end{aligned}$$

- Όταν $a-2 > 0 \Leftrightarrow a > 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $a-2 < 0 \Leftrightarrow a < 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Όταν $a-2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ τότε απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$

Είναι $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8} - x$

$$\begin{aligned}\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 8} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 8}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 8} + x} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 8}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{8}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{8}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1} = \\ \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} &= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

Εφαρμογή 122

Αν $f, f(x) = \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} - kx$ βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ για $a, \beta, k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} - kx \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} \right)} - kx \right] = \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[|x| \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right]\end{aligned}$$

Όταν $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - k \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - k \right] = (+\infty)(\sqrt{a} - k)\end{aligned}$$

- Όταν $\sqrt{a} - k > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > k$, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $\sqrt{a} - k < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < k$, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• Όταν $\sqrt{a} - k = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = k$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Όταν $x \rightarrow -\infty$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x| \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} - kx \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} + k \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{a + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} + k \right] = (-\infty)(\sqrt{a} + k)$$

• Όταν $\sqrt{a} + k > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > -k$, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• Όταν $\sqrt{a} + k < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < -k$, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

• Όταν $\sqrt{a} + k = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = -k$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Εφαρμογή 123

Εύρεση του πεδίου ορισμού της $f, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \lambda x$ και υπολογισμός των $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ για $\lambda \in \mathbb{R}$

Είναι $\text{ΠΟ} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \lambda x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda \right]$$

Όταν $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lambda \right] = (+\infty) \cdot (1 + \lambda)$$

• Όταν $1 + \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Όταν $1 + \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• Όταν $1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$, τότε απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Όταν $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - \lambda \right] = (+\infty) \cdot (1 - \lambda)$$

• Όταν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow 1 > \lambda$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• Όταν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow 1 < \lambda$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

• Όταν $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε είναι απροσδιόριστη μορφή (?) $(+\infty)0$, οπότε θα γίνει χρήση της συζυγούς παράστασης.

Εφαρμογή 124

$$\text{Αν } f, f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^3 + 5x + 2}{\lambda x^2 + 3} \text{ βρείτε τα } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \text{ για } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\lambda-1)x^3 + 5x + 2}{\lambda x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left[(\lambda-1) + 5\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3} \right]}{x^2 \left(\lambda + \frac{3}{x^2} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\lambda-1) + 5\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3}}{\lambda + \frac{3}{x^2}} = (\pm\infty) \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[(\lambda-1) + 5\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3} \right]}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\lambda + \frac{3}{x^2} \right)} = (\pm\infty) \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda}, \text{ όπου}$$

$\lambda \neq 0$

- Όταν $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0 \Rightarrow \lambda^2 \frac{\lambda-1}{\lambda} > 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) > 0 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Όταν $\frac{\lambda-1}{\lambda} < 0 \Rightarrow \lambda^2 \frac{\lambda-1}{\lambda} < 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) < 0 \Rightarrow \lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Όταν $\frac{\lambda-1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$, τότε $f(x) = \frac{5x+2}{x^2+3}$ άρα,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+2}{x^2+3} = 0$$

Εφαρμογή 125

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ αν $f, f(x) = \frac{4x^2}{x+3} - (ax + \beta)$

$$f(x) = \frac{4x^2}{x+3} - (ax + \beta) = \frac{4x^2 - (ax + \beta)(x+3)}{x+3} = \frac{(4-\alpha)x^2 - (3a+\beta)x - 3\beta}{x+3}$$

Για να είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ πρέπει $4-\alpha = 0$ και $3a + \beta = 0$

Άρα, $\alpha = 4$ και $\beta = -12$

Εφαρμογή 126

Εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \frac{2x+3}{4x-8}$

Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

1^{ος} τρόπος

$$\text{Είναι } \alpha = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{4x^2-8x} = 0 \quad \text{και}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{4x-8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα, η ευθεία $(\varepsilon) \ y = \alpha x + \beta = 0x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της ομογραφικής συνάρτησης, στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Είναι } f(x) - (ax + \beta) = \frac{2x+3}{4x-8} - (ax + \beta) = \frac{-4ax^2 + (2-4\beta+8\alpha)x + 3+8\beta}{4x-8}$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + \beta)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-4ax^2 + (2-4\beta+8\alpha)x + 3+8\beta}{4x-8} \right], \text{ συνεπώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + \beta)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-4ax^2 + (2-4\beta+8\alpha)x + 3+8\beta}{4x-8} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4\alpha = 0 \\ 2-4\beta+8\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0,5 \end{cases}$$

Οπότε η (ε) $y = \alpha x + \beta = 0x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της ομογραφικής συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$

Εφαρμογή 127

$$\text{Εύρεση των } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5} - \alpha x) = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5} - \alpha x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \alpha \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \alpha \right) = (+\infty) \cdot (1 - a)$$

- Όταν $1 - a > 0 \Rightarrow 1 > a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5} - \alpha x) = +\infty$
- Όταν $1 - a < 0 \Rightarrow 1 < a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5} - \alpha x) = -\infty$
- Όταν $1 - a = 0 \Rightarrow 1 = a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5} - \alpha x) = (+\infty) \cdot 0 = ?$ (De L' Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x \sqrt{1 + \frac{5}{x}} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1} = 0 \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = 0$$

Άρα, είναι $a = 1$ και $\beta = 0$

Εφαρμογή 128

$$\text{Εύρεση των } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11 \text{ αν } f, f(x) = \sqrt{x^2+2x+4} - \alpha x - \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x+4} - \alpha x - \beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) =$$

$$(+\infty) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{x} \right) = (+\infty)(1 - a)$$

- Όταν $1 - a > 0 \Rightarrow 1 > a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $1 - a < 0 \Rightarrow 1 < a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Όταν $1 - a = 0 \Rightarrow 1 = a$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot 0 = ?$ (De L'Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + \beta) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}^2 - (x + \beta)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + \beta)} = \dots = 1 - \beta$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11 \Rightarrow 1 - \beta = 11 \Rightarrow \beta = -10$$

Εφαρμογή 129

Εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης της $f, f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x(x+1)}$$

$$D(f) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \frac{1}{2}$$

Άρα, η (ε) $y = ax + \beta = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = a \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = -\frac{1}{2}$$

Άρα, η (ε) $y = ax + \beta = -x - \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$

Εφαρμογή 130

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια, την $f, f(x) = \min\{x^2 + 1, 9x - 7\}$

Έστω $A = x^2 + 1$ και $B = 9x - 7$

- Όταν $A - B > 0 \Rightarrow A > B \Rightarrow \min\{x^2 + 1, 9x - 7\} = 9x - 7$
- Όταν $A - B < 0 \Rightarrow A < B \Rightarrow \min\{x^2 + 1, 9x - 7\} = x^2 + 1$
- Όταν $A - B = 0 \Rightarrow A = B \Rightarrow \min\{x^2 + 1, 9x - 7\} = x^2 + 1 = 9x - 7$

Είναι $A - B = x^2 - 9x - 8$, τριώνυμο με $\Delta = 81 > 0$ και $\rho_1 = 1, \rho_2 = 8$. Για το πρόσημο του τριωνύμου ισχύει ο παρακάτω πίνακας.

x	$-\infty$	1	8	$+\infty$	
A-B	+	0	-	0	+

Άρα, η $f, f(x) = \min\{x^2 + 1, 9x - 7\}$ γράφεται απλούστερα ως εξής

$$f, f(x) = \begin{cases} 9x - 7, & x \in (-\infty, 1) \cup (8, +\infty) \\ x^2 + 1, & x \in (1, 8) \\ 2, & x = 1 \\ 65, & x = 8 \end{cases} \quad \Omega\varsigma \text{ πολυωνυμική είναι συνεχής στο } \mathbb{R} - \{1, 8\}$$

Εξετάζω τη συνέχεια της f στη θέση $x_0 = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (9x - 7) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Επίσης είναι $f(1) = 2$

Άρα, η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$

Εξετάζω τη συνέχεια επίσης f στη θέση $x_0 = 8$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} (9x - 7) = 65 \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} (x^2 + 1) = 65 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 65$$

Επίσης είναι $f(8) = 65$

Άρα, η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 8$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

Εφαρμογή 131

$$\text{Εύρεση των } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ώστε η } f, f(x) = \begin{cases} \beta x + 2\alpha - 1, & x \geq 1 \\ \frac{x^2 + x + a}{x - 1}, & x < 1 \end{cases} \text{ να είναι συνεχής.}$$

$\forall x > 1$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

$\forall x < 1$ η f είναι συνεχής ως ρητή.

Άρα, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$

Εξετάζω τη συνέχεια της f στη θέση $x_0 = 1$

$$\text{Είναι } f(1) = \beta - 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + a}{x - 1} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$$

* Πρέπει το 1 να είναι ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $a = -2$

$$\text{Επίσης είναι } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + a}{x - 1} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \beta - 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \beta - 5 = 3 \Rightarrow \beta = 8$$

Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Εφαρμογή 132

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0 = 1$, την $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 5^{\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1 \end{cases}$

Είναι $f(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 5^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} 5^y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 5^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} 5^y = +\infty$$

Άρα, ασυνεχής η f στη θέση $x_0 = 1$

Επεξήγηση

- Όταν $x \rightarrow 1^- \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} 5^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} 5^y = 0$
- Όταν $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} 5^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} 5^y = +\infty$

Εφαρμογή 133

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0 = \frac{1}{\ln 2}$, την

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{\ln 2} \\ \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq \frac{1}{\ln 2} \text{ \& } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^+} \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^-} \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$$

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}} f(x)$

Συνεπώς, ασυνεχής η f στη θέση $x_0 = \frac{1}{\ln 2}$

Επεξήγηση

$$\text{Είναι } x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 > \frac{1}{x} \xRightarrow{*} e^{\ln 2} > e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2 > e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2 - e^{\frac{1}{x}} > 0$$

$$\text{Είναι } x \rightarrow \frac{1}{\ln 2}^- \Rightarrow x < \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 < \frac{1}{x} \xRightarrow{*} e^{\ln 2} < e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2 < e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 2 - e^{\frac{1}{x}} < 0$$

Σημείωση Ισχύει ότι $x_1 > x_2 \xRightarrow{a>1} a^{x_1} > a^{x_2}$

Εφαρμογή 134

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0 = 0$, την $f, f(x) = \begin{cases} 5 & , x = 0 \\ \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}} & , x \neq 0 \end{cases}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

• Όταν $x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} 3^y = 0$

Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{5}{1+0} = 5$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

• Όταν $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} 3^y = +\infty$

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{5}{1+(+\infty)} = 0$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Συνεπώς, η f στη θέση $x_0 = 0$ είναι ασυνεχής.

Επειδή $f(0) = 5 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ είναι συνεχής η f στη θέση $x_0 = 0$ από αριστερά.

5.19 Άλυστες ασκήσεις

Άσκηση 1

Δείξτε ότι η $x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$

Άσκηση 2

Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x) = \begin{cases} 3^{x+1}, & x < 0 \\ 3\alpha + x, & x \geq 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 0$

Άσκηση 3

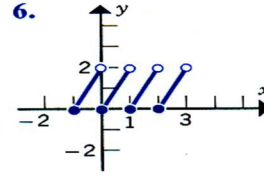
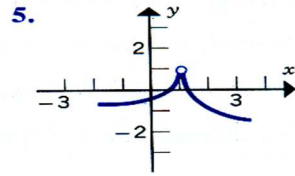
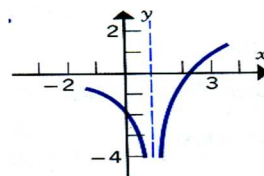
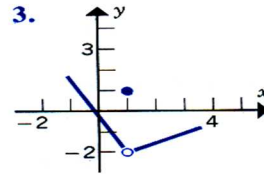
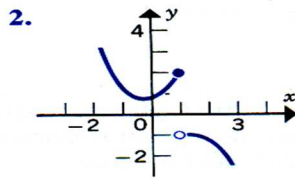
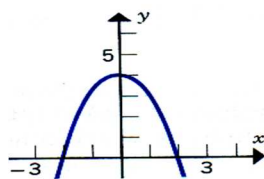
Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, & x \geq 0 \\ x + \beta, & x < 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

Άσκηση 4

Αν $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$ να μελετηθεί $f \circ g$ ως προς τη συνέχεια.

Άσκηση 5

Να βρεθούν με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, τα $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



Άσκηση 6

Εύρεση του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στη θέση 0

Άσκηση 7

Υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ ώστε $f(x_0) = 0$ αν $f, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & -2 \leq x < 0 \\ -x^2 - 2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$;

Άσκηση 8

Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ αν η $f, f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 + \alpha x - 3}{x + 1}, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$

Άσκηση 9

Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η $f, f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$

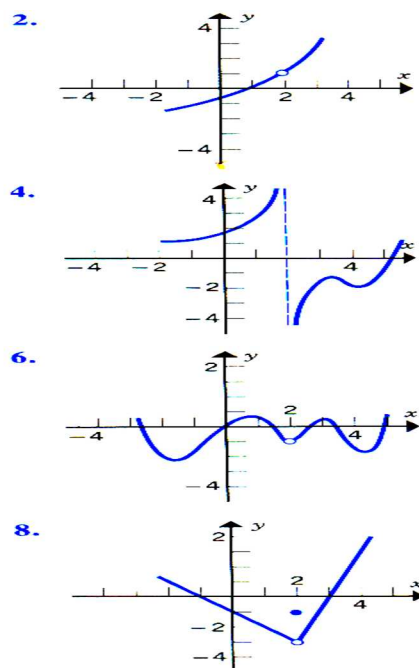
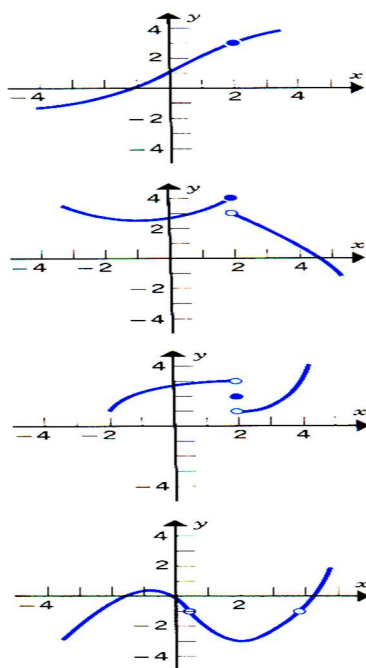
Απάντηση $(\alpha, \beta) = (3, -10)$

Άσκηση 10

Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η $f, f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta - 4, & x < -2 \\ \sin(\pi x), & -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{\alpha x + \beta}{1 + x^2}, & x > 1 \end{cases}$

Άσκηση 11

Βρείτε τα $f(2), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ εφόσον αυτά υπάρχουν και μελετήστε τις συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια στη θέση $x_0 = 2$ και στο πεδίο ορισμού τους.



Άσκηση 12

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια, οι συναρτήσεις:

$$(α) f, f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$(β) g, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

$$(γ) h, h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(δ) t, t(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cdot (x+1)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$$(ε) u, u(x) = \begin{cases} 2x + \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(στ) v, v(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1 \\ -x^2+1, & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$$

$$(ζ) k, k(x) = \begin{cases} \frac{|x-2| - |x+2|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(η) \Pi, \Pi(x) = \frac{|x^3 - 2x^2 - x + 2|}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$(θ) E, E(x) = \begin{cases} \lambda x^3 + (\lambda+1)x+1, & x \leq 1 \\ 2\lambda x^2 + (\lambda+2)x+3, & x > 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 13

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια, οι συναρτήσεις:

$$(α) f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$(β) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\gamma) f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\epsilon) f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 3\sin x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(\zeta) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\theta) f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\iota\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(\nu\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \eta\mu(2x)}{x + \eta\mu x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$(\iota\epsilon) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x \cdot \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(\iota\zeta) g, g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ 1-4x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(\delta) f(x) = |x|$$

$$(\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ 1-2x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(\eta) f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 0 \\ \ln(1+x), & x > 0 \end{cases}$$

$$(\iota) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$(\iota\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$$

$$(\iota\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

$$(\iota\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ 1+x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(\iota\eta) h, h(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 14

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια, οι συναρτήσεις:

$$(\alpha) f, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$(\beta) u, u(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\gamma) v, v(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(\delta) t, t(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 3\cos x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(\epsilon) \phi, \phi(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$$

$$(\sigma\tau) \sigma, \sigma(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$$

$$(\zeta) g, g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

$$(\eta) \theta, \theta(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\theta) w, w(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 0 \\ x+\beta, & x < 0 \end{cases}$$

$$(\iota) \xi, \xi(x) = |x| - x$$

Άσκηση 15

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια, οι συναρτήσεις:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) f, f(x) = \begin{cases} e^x - e \cdot x, & x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases} & (\beta) g, g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases} \\
 (\gamma) h, h(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & (\delta) u, u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \\ x^2+1, & x \leq 1 \end{cases} \\
 (\epsilon) v, v(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} & (\sigma\tau) w, w(x) = \begin{cases} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\
 (\zeta) z, z(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x + x^2}{x + \eta\mu x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} & (\eta) \varphi, \varphi(x) = \begin{cases} \cos x + \lambda \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ (2\lambda + 1) \tan x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}
 \end{array}$$

Άσκηση 16

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια, οι συναρτήσεις:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) f(x) = \sqrt{|x|} & (\beta) g(x) = x - \sqrt{x - [x]} \\
 (\gamma) h(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} & (\delta) u(x) = \frac{\cos^3 x - 1}{3 - \cos^2 x} \\
 (\epsilon) v(x) = \begin{cases} \frac{-1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & (\sigma\tau) w(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \\
 (\zeta) z(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1 \leq x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x \geq 4 \end{cases} & (\eta) t(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases} \\
 (\theta) \phi(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases} & (\iota) \sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\
 (\iota\alpha) \omega(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & (\iota\beta) (x) = \begin{cases} -2 \cdot \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cdot \sin x + \beta, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}
 \end{array}$$

Άσκηση 17

Εύρεση του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $f, f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax - 3}{x + 1}, & x > 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στη

θέση $x_0 = 1$

Άσκηση 18

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η $f, f(x) = \begin{cases} ax + \beta - 4, & x < -2 \\ \cos(\pi x), & -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{ax + \beta}{1 + x^2}, & x > 1 \end{cases}$

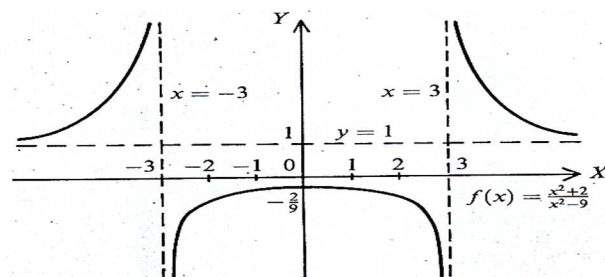
Άσκηση 19

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η $f, f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + (\beta - 1)x + 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$

Απάντηση $(\alpha, \beta) = (3, -10)$

Άσκηση 20

Από τη γραφική παράσταση, βρείτε τα: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

**Άσκηση 21**

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x + 2}{x - 1} + \beta x = 4$

Άσκηση 22

Εύρεση του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\mu^2 - 3\mu)x^2 + 2x + 4}{x^2 - 4} = \ell \in \mathbb{R}$

Άσκηση 23

Εύρεση του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\mu^2 - 3\mu)x^2 + 2x + 4}{x^2 - 4} = \ell \in \mathbb{R}$

Άσκηση 24

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) + a}{x^2} + \beta = 4$

Άσκηση 25

Αν $f, f(x) = \begin{cases} x+5, & x \leq 2 \\ x^2-3, & x > 2 \end{cases}$ τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

Άσκηση 26

Αν $f, f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2}, & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty) \\ \frac{1-x}{x+2}, & x \in (0, 2) \end{cases}$ τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

Άσκηση 27

Αν $f, f(x) = \frac{|x|(x+1)}{x}$ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

Άσκηση 28

Εύρεση του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για την $f, f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ \lambda^2 x - 13, & x > 1 \end{cases}$

Άσκηση 29

Εύρεση του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ για την $f, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x < 2 \\ 3 + \lambda x, & x \geq 2 \end{cases}$

Άσκηση 30

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x + 2}{x-1} + \beta x = 4$

Άσκηση 31

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + a}{x^2} + \beta = 4$

Άσκηση 32

Αν $f, f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq -2 \\ x^2+5, & -2 < x < 0 \\ 6-x, & x \geq 0 \end{cases}$ υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$;

Άσκηση 33

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$ αν $f, f(x) = \begin{cases} 4ax^2 - \beta x - 4\alpha, & x \leq 2 \\ 3\beta x - 2\alpha - 2, & x > 2 \end{cases}$

Άσκηση 34

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f, f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^2 + ax + \beta}$ να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = -1, x = 2$. Εξετάστε την ύπαρξη οριζόντιας και πλάγιας ασύμπτωτης.

Άσκηση 35

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1 - \lambda^3$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^4 + \lambda$;

Άσκηση 36

Είναι καλώς ορισμένα τα: $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{5-x}$, $\lim_{x \rightarrow 2} (\ln x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$;

Άσκηση 37

Αν $f, f(x) = \frac{x^2 + ax - \beta}{|x-3|}$ να υπολογισθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι πραγματικός αριθμός το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Άσκηση 38

Ποια σχέση συνδέει τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ αν $f, f(x) = \frac{ax^\nu + \beta x^\mu + \gamma}{x-1}$; Υπολογίστε τον ℓ

Άσκηση 39

Εύρεση του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \lambda}{(x-1)^2}, \text{ όπου } f(x) = x^{2\nu} - 2x^\nu$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \lambda x) = l \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 40

Αν $\alpha \neq \beta$, δείξτε ότι $\nexists \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ για $f, f(x) = \begin{cases} \alpha x - \alpha\beta, & x \leq \alpha \\ \beta x - \beta^2, & x > \alpha \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Άσκηση 41

Αν $f, f(x) = \frac{ax^\nu + \beta x^\mu + \gamma}{x-1}$ ποια σχέση συνδέει τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$; Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Άσκηση 42

Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, k \in \mathbb{R}$ αν $f(x) = \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} - kx$

Άσκηση 43

Εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + 5x - 1}{x + 2} - (ax + \beta) \right] = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ax + \beta - \sqrt{x^2 + x + 2} \right] = 0$$

Άσκηση 44

Αν $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} - ax - \beta$, εύρεση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε: **(α)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \textbf{(β)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad \textbf{(γ)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$$

Άσκηση 45

Αν $f(x) = x^{2\nu} - 2x^\nu$ βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν τα: **(α)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \lambda}{(x-1)^2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \lambda x \right) = l \in \mathbb{R}$

Άσκηση 46

Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν $f, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}$;

Άσκηση 47

Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $f, f(x) = \frac{|x|(x+1)}{x}$;

Άσκηση 48

Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ για $f, f(x) = \begin{cases} x+5, & x \leq 2 \\ x^2-3, & x > 2 \end{cases}$;

Άσκηση 49

Υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ αν $f, f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq -2 \\ x^2+5, & -2 < x < 0 \\ 6-x, & x \geq 0 \end{cases}$;

Άσκηση 50

Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν $f, f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2}, & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty) \\ \frac{1-x}{x+2}, & x \in (0, 2) \end{cases}$;

Άσκηση 51

Εύρεση του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν τα:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ όπου } f, f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ \lambda^2 x - 13, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ όπου } f, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ 3 + \lambda x, & x \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 52

Αν $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} - ax - \beta$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$$

Άσκηση 53

Βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) f(x) = \frac{1}{x^2 + 5} & (\beta) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} & (\gamma) f(x) = \frac{x^3}{x - 1} \\ (\delta) f(x) = 3x + \frac{1}{x^2} & (\epsilon) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} & (\sigma\tau) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3} \\ (\zeta) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} & (\eta) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & (\theta) f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{x} \\ (\iota) f(x) = 1 - \frac{|x|}{x - 2} & (\iota\alpha) f(x) = -x + \frac{1}{\sqrt{x}} & (\iota\beta) f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1} \\ (\nu\gamma) f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} & (\iota\delta) f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} & \end{array}$$

Άσκηση 54

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x + 4} & (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x + 4} & (\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x^2 + 4} \\ (\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 4x + 5) & (\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-7x^2 + 6) & (\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} \\ (\zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1} & (\eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} & (\theta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} \\ (\iota) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x - 1}} & (\iota\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}} & (\iota\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x}{5x^2 - 1} \\ (\nu\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) & (\iota\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) & (\iota\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}$$

Άσκηση 55

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 3}{x - 2} & (\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x^2 + x + 4} & (\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3} \\ (\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} & (\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 2x - 1} & (\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{2x^2 - 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
(\zeta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 2x^3 - 3}{x^4 + x^3 - 2} & (\eta) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) & (\theta) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 + 6x + 8} \\
(\iota) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} & (\omega) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 2}{x} & (\iota\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{(x - 1)^2} \\
(\nu\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{|x - 3|} & (\iota\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\eta\mu x} & (\iota\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sigma\upsilon\nu x - 1} \\
(\iota\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(4x)}{x} & (\iota\zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(6x)}{2x} & (\iota\eta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(-4x)}{5x} \\
(\iota\theta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x - 2)}{x^2 - 3x + 2} & (\kappa) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) & (\kappa\alpha) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} \\
(\kappa\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} & & (\kappa\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x) - 1}{x} \\
(\kappa\delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} & (\kappa\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{2x} & (\kappa\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x + 1} - 3}{x - 1} \\
(\kappa\zeta) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 5x - 6}{|x - 1|} & (\kappa\eta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{|x| - 1} & (\kappa\theta) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 2x| - |x^2 - 5x + 6|}{|x - 2|} \\
(\kappa\iota) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x - 2)}{x^2 - 3x + 2} & (\lambda) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3} & (\lambda\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 1| - 2x}{|x - 2| \cdot (x + 2)} \\
(\lambda\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| + x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} & (\lambda\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 2|x|} & (\lambda\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2} \sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2} \\
(\lambda\epsilon) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x| + x}{|x + 1| \cdot (x + 2)} & (\lambda\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^3 - 5^3} & (\lambda\zeta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2x - 4}}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}} \\
(\lambda\eta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5}{2|x| \cdot x} & (\lambda\theta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} & (\lambda\iota) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 1}}{\sqrt[3]{x} - 1} \\
(\lambda\kappa) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} & (\mu) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} & (\mu\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \eta\mu x}{x^3} \\
(\mu\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2 - x} & (\mu\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x + 3} - 2} & (\mu\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^3} \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{3}\right) \\
(\mu\epsilon) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 2} & (\mu\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x^2 - 4} & (\mu\zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x|x|} \\
(\mu\eta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + x}}{x^2 - \eta\mu x} & (\mu\theta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 7} - 2}{x^2 - 1} & (\mu\iota) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} \\
(\mu\kappa) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} - 3}{x - 1} & (\mu\lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{|x| \cdot \eta\mu x} & (\nu) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 (\nu\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \varepsilon \phi x}{2x - \eta \mu x} & (\nu\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\varepsilon \phi 5x} & (\nu\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \\
 (\nu\delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2)} & & (\nu\varepsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^2 - 3x + 2} \\
 (\nu\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta \mu^2 x}{x^2 \cdot \eta \mu^2 x} & & (\nu\zeta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{5x+1} - \sqrt{x^2+7}} \\
 (\nu\eta) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta \mu x \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) \right] & & (\nu\theta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sigma \upsilon \nu(2x) + 2 \cdot \eta \mu(2x) + \beta}{x}
 \end{array}$$

Άσκηση 56

Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \sqrt{|x|} & f(x) = x - \sqrt{x - [x]} & f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} \\
 f(x) = \frac{\cos^3 x - 1}{3 - \cos^2 x} & f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \\
 f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -1 \leq x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x \geq 4 \end{cases} & f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases} & f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases} \\
 f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & f(x) = \begin{cases} \cos x + \lambda \cdot \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \\ (2\lambda + 1) \cdot \tan x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \\
 f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & t(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cdot (x+1)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases} \\
 f(x) = \begin{cases} -2 \cdot \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cdot \sin x + \beta, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases} & f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases} \\
 g(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} & h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\
 u(x) = \begin{cases} 2x + \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} & v(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < -1 \\ -x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$k(x) = \begin{cases} \frac{|x-2| - |x+2|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \Pi, \Pi(x) = \frac{|x^3 - 2x^2 - x + 2|}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$E(x) = \begin{cases} \lambda x^3 + (\lambda + 1)x + 1, & x \leq 1 \\ 2\lambda x^2 + (\lambda + 2)x + 3, & x > 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 57

Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$f, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \quad g, g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ 1 - 4x, & x > 0 \end{cases}$$

$$h, h(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases} \quad u, u(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$v, v(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad t, t(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3 \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\phi, \phi(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases} \quad \sigma, \sigma(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 0 \\ \ln(x + 1), & x > 0 \end{cases}$$

$$\theta, \theta(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases} \quad \theta, \theta(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$w, w(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \geq 0 \\ x + \beta, & x < 0 \end{cases}, \quad \xi, \xi(x) = |x| - x$$

$$f, f(x) = \begin{cases} e^x - e \cdot x, & x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases} \quad f, f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$f, f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad f, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$f, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad g, g(x) = \begin{cases} \eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g, g(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu 2x + x^2}{x + \eta \mu x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 58

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1| - 2x}{|x-2| \cdot (x+2)}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x| + x}{|x+1| \cdot (x+2)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5}{2|x| \cdot x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 2|x|}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^3 - 5^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - |x-5|}{x^2 + |x-3|}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x - \eta\mu x}{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+3} - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3} \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{3}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x|x|}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3x^4 + x^2 + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + x - 2}{x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2 - x}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 2x - 3}{x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \varepsilon\phi x}{2x - \eta\mu x}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 2x - 3}{x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x^2-4}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x^2+7}}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-4x+3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{|x| \cdot \eta\mu x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2 - \eta\mu x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}-3}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-3x+2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2 \cdot \eta\mu^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\varepsilon\phi 5x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta\mu x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2)}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2-x} + \sqrt[3]{x^2+x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+3} + x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2+x-1} - 2x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+4} - \sqrt[4]{16x^4+x^2+3} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2+x} - \sqrt{x^2+2x+3} - x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sigma \nu \nu(2x) + 2 \cdot \eta \mu(2x) + \beta}{x}$$

Άσκηση 59

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x+4}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x+4}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x^2+4}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2+4x+5)$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^2+6)$$

$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^2+6)$$

$$(\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3x}{x^2-1}$$

$$(\theta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-3x+1}$$

$$(\iota) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+x^2+1)$$

$$(\iota\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4x}{5x^2-1}$$

$$(\iota\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$$

$$(\iota\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$(\iota\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$(\iota\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4x}{5x^2-1}$$

$$(\iota\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+x+1}{x+1}$$

$$(\iota\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$(\iota\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$(\iota\theta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

$$(\kappa) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-6x^7}{9x^2-3}$$

$$(\kappa\alpha) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3x^4+x^2+1)$$

$$(\kappa\beta) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3+x-2}{x^2-4}$$

$$(\kappa\gamma) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-|x-5|}{x^2+|x-3|}$$

$$(\kappa\delta) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x-3}{x+1}$$

$$(\kappa\epsilon) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x-3}{x+1}$$

$$(\kappa\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2-x} + \sqrt[3]{x^2+x+1}$$

$$(\kappa\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+3}+x)$$

$$(\kappa\eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+x-1}-2x)$$

$$(\kappa\theta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+2x+5})$$

$$(\kappa\iota) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt[4]{16x^4+x^2+3})$$

$$(\lambda) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2+2x+3}-x)$$

$$(\lambda\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}$$