

## Περιεχόμενα

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 6.1 Κανόνες παραγώγισης.....                                          | 5  |
| 6.1.1 Παραγωγή αθροίσματος.....                                       | 5  |
| Παρατήρηση 1.....                                                     | 5  |
| Παραδείγματα.....                                                     | 5  |
| 6.1.2 Παραγωγή διαφοράς.....                                          | 5  |
| Παρατήρηση 2.....                                                     | 5  |
| 6.1.3 Παραγωγή γινομένου.....                                         | 5  |
| Παρατήρηση 3.....                                                     | 5  |
| Ειδική περίπτωση.....                                                 | 6  |
| Παραδείγματα.....                                                     | 6  |
| 6.1.4 Παραγωγή πηλίκου.....                                           | 6  |
| Παραδείγματα.....                                                     | 6  |
| 6.1.5 Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων.....                             | 7  |
| Εφαρμογή 1 Εύρεση $f'(x)$ .....                                       | 8  |
| Εφαρμογή 2 Παράγωγος άρτιων, περιττών και περιοδικών συναρτήσεων..... | 8  |
| Εφαρμογή 3 Σύνθεση συναρτήσεων και παράγωγος.....                     | 9  |
| 6.2 Εξίσωση εφαπτομένης.....                                          | 10 |
| Εφαρμογή 4 Εύρεση γωνίας της εφαπτομένης.....                         | 10 |
| Εφαρμογή 5 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης.....                       | 10 |
| Εφαρμογή 6 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης.....                       | 10 |
| Εφαρμογή 7 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης.....                       | 10 |
| Εφαρμογή 8 Υπολογισμός παραμέτρων.....                                | 11 |
| Εφαρμογή 9 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης.....                       | 11 |
| Εφαρμογή 10 Εύρεση του σημείου επαφής.....                            | 11 |
| 6.3 Ακρότατα συναρτήσεων.....                                         | 12 |
| 6.3.1 Πρώτο κριτήριο.....                                             | 12 |
| Παρατηρήσεις.....                                                     | 12 |
| 6.3.2 Δεύτερο κριτήριο.....                                           | 13 |
| Παρατηρήσεις.....                                                     | 13 |
| 6.3.3 Κριτήριο μονοτονίας.....                                        | 13 |
| Παρατηρήσεις.....                                                     | 13 |
| Εφαρμογή 11 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας.....                    | 13 |
| Εφαρμογή 12 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας.....                    | 14 |
| Εφαρμογή 13 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας.....                    | 14 |
| Εφαρμογή 14 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας.....                    | 14 |
| Εφαρμογή 15 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 15 |
| Εφαρμογή 16 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 15 |
| Εφαρμογή 17 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 15 |
| Εφαρμογή 18 Επίλυση εξίσωσης.....                                     | 16 |
| Εφαρμογή 19 Εύρεση παραμέτρου.....                                    | 16 |
| Εφαρμογή 20 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 16 |
| Εφαρμογή 21 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 16 |
| Εφαρμογή 22 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 17 |
| Εφαρμογή 23 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 17 |
| Εφαρμογή 24 Απόδειξη ανισότητας.....                                  | 17 |
| Εφαρμογή 25 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 18 |
| Εφαρμογή 26 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 18 |
| Εφαρμογή 27 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 18 |
| Εφαρμογή 28 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 18 |
| Εφαρμογή 29 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 19 |
| Εφαρμογή 30 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 19 |
| Εφαρμογή 31 Μελέτη της μονοτονίας.....                                | 19 |
| Εφαρμογή 32 Εύρεση των ακρότατων.....                                 | 20 |

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| Εφαρμογή 33 Εύρεση των ακρότατων .....                                      | 20 |
| Εφαρμογή 34 Εύρεση των ακρότατων .....                                      | 20 |
| Εφαρμογή 35 Εύρεση των ακρότατων .....                                      | 21 |
| Εφαρμογή 36 Εύρεση των ακρότατων .....                                      | 21 |
| Εφαρμογή 37 Απόδειξη ανισότητας.....                                        | 22 |
| Εφαρμογή 38 Μελέτη της μονοτονίας .....                                     | 22 |
| Εφαρμογή 39 Μελέτη της μονοτονίας .....                                     | 22 |
| Εφαρμογή 40 Διαστήματα μονοτονίας.....                                      | 23 |
| Εφαρμογή 41 Διαστήματα μονοτονίας.....                                      | 23 |
| Εφαρμογή 42 Διαστήματα μονοτονίας.....                                      | 23 |
| Εφαρμογή 43 Μελέτη μονοτονίας.....                                          | 23 |
| Εφαρμογή 44 Απόδειξη ανισότητας.....                                        | 24 |
| Εφαρμογή 45 Απόδειξη ανισότητας.....                                        | 24 |
| Εφαρμογή 46 Μελέτη της μονοτονίας .....                                     | 24 |
| Εφαρμογή 47 Εύρεση παραμέτρου .....                                         | 25 |
| Εφαρμογή 48 Μελέτη της μονοτονίας .....                                     | 25 |
| Εφαρμογή 49 Απόδειξη ανισότητας.....                                        | 25 |
| Εφαρμογή 50 Εύρεση των ακρότατων .....                                      | 26 |
| Εφαρμογή 51 Εύρεση των ακρότατων .....                                      | 26 |
| Εφαρμογή 52 Εύρεση των ακρότατων .....                                      | 26 |
| Εφαρμογή 53 Μεγιστοποίηση εσόδων.....                                       | 27 |
| Εφαρμογή 54 Μεγιστοποίηση κέρδους.....                                      | 27 |
| Εφαρμογή 55 Ορθογώνιο μεγίστου εμβαδού .....                                | 28 |
| Εφαρμογή 55 Ορθογώνιο σταθερού εμβαδού .....                                | 28 |
| Εφαρμογή 56 Εγγραφή κώνου σε σφαίρα.....                                    | 28 |
| 6.4 Κυρτές συναρτήσεις – σημεία καμψής.....                                 | 29 |
| 6.4.1 Ειδική περίπτωση .....                                                | 29 |
| 6.4.2 Γεωμετρική ερμηνεία .....                                             | 29 |
| Εφαρμογή 57 Μελέτη της κυρτότητας.....                                      | 30 |
| Εφαρμογή 58 Μελέτη της κυρτότητας.....                                      | 30 |
| Εφαρμογή 59 Μελέτη της κυρτότητας.....                                      | 30 |
| Εφαρμογή 60 Εύρεση παραμέτρων.....                                          | 31 |
| Εφαρμογή 61 Εφαπτομένη .....                                                | 31 |
| Εφαρμογή 62 Σύνθεση συναρτήσεων και κυρτότητα .....                         | 31 |
| Εφαρμογή 63 Συνευθειακά σημεία καμψής .....                                 | 32 |
| Εφαρμογή 64 Εύρεση των σημείων καμψής .....                                 | 32 |
| Εφαρμογή 65 Εύρεση των σημείων καμψής .....                                 | 33 |
| Εφαρμογή 66 Εύρεση των σημείων καμψής .....                                 | 33 |
| Εφαρμογή 67 Εύρεση των σημείων καμψής .....                                 | 33 |
| 6.5 Απροσδιόριστες μορφές .....                                             | 34 |
| 6.5.1 Παρατηρήσεις.....                                                     | 35 |
| Εφαρμογή 68 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 35 |
| Εφαρμογή 69 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 35 |
| Εφαρμογή 70 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 36 |
| Εφαρμογή 71 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 36 |
| Εφαρμογή 72 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 37 |
| Εφαρμογή 73 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 37 |
| Εφαρμογή 74 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 37 |
| Εφαρμογή 75 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 37 |
| Εφαρμογή 76 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 38 |
| Εφαρμογή 77 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 38 |
| Εφαρμογή 78 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 39 |
| Εφαρμογή 79 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> και 3 <sup>ης</sup> μορφής ..... | 39 |
| Εφαρμογή 80 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 39 |
| Εφαρμογή 81 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                      | 39 |

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Εφαρμογή 82 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                                       | 40 |
| Εφαρμογή 83 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> και 3 <sup>ης</sup> μορφής.....                   | 40 |
| Εφαρμογή 84 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> και 3 <sup>ης</sup> μορφής.....                   | 41 |
| Εφαρμογή 85 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> , 3 <sup>ης</sup> και 4 <sup>ης</sup> μορφής..... | 41 |
| Εφαρμογή 86 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> , 3 <sup>ης</sup> και 4 <sup>ης</sup> μορφής..... | 42 |
| Εφαρμογή 87 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> και 2 <sup>ης</sup> μορφής.....                   | 43 |
| Εφαρμογή 88 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                                       | 44 |
| Εφαρμογή 89 Απροσδιοριστία 1 <sup>ης</sup> μορφής.....                                       | 44 |
| 6.6 Ασύμπτωτες.....                                                                          | 45 |
| Εφαρμογή 90 Οριζόντια ασύμπτωτη.....                                                         | 45 |
| Εφαρμογή 91 Πλάγια ασύμπτωτη.....                                                            | 45 |
| Εφαρμογή 92 Πλάγια ασύμπτωτη.....                                                            | 46 |
| 6.6.1 Παρατηρήσεις.....                                                                      | 46 |
| Εφαρμογή 93 Κατακόρυφες ασύμπτωτες.....                                                      | 46 |
| Εφαρμογή 94 Οριζόντια ασύμπτωτη.....                                                         | 47 |
| Εφαρμογή 95 Κατακόρυφη και οριζόντια ασύμπτωτη.....                                          | 47 |
| Εφαρμογή 96 Κατακόρυφη και πλάγια ασύμπτωτη.....                                             | 48 |
| Εφαρμογή 97 Εύρεση παραμέτρων.....                                                           | 48 |
| 6.6.2 Παρατήρηση.....                                                                        | 48 |
| 6.6.3 Μελέτη περιπτώσεων.....                                                                | 48 |
| Εφαρμογή 98 Πλάγια ασύμπτωτη.....                                                            | 49 |
| 6.7 Θεώρημα του Fermat.....                                                                  | 49 |
| 6.7.1 Παρατηρήσεις.....                                                                      | 49 |
| Εφαρμογή 99.....                                                                             | 50 |
| Εφαρμογή 100.....                                                                            | 50 |
| Εφαρμογή 101.....                                                                            | 51 |
| 6.8 Θεώρημα του Rolle.....                                                                   | 51 |
| 6.8.1 Πόρισμα.....                                                                           | 51 |
| 6.8.2 Παρατηρήσεις.....                                                                      | 52 |
| Εφαρμογή 102.....                                                                            | 53 |
| Εφαρμογή 103.....                                                                            | 53 |
| Εφαρμογή 104.....                                                                            | 53 |
| Εφαρμογή 105.....                                                                            | 54 |
| Εφαρμογή 106.....                                                                            | 54 |
| Εφαρμογή 107.....                                                                            | 54 |
| Εφαρμογή 108.....                                                                            | 55 |
| Θεώρημα.....                                                                                 | 55 |
| Εφαρμογή 109.....                                                                            | 55 |
| Εφαρμογή 110.....                                                                            | 55 |
| Εφαρμογή 111.....                                                                            | 56 |
| Εφαρμογή 112.....                                                                            | 56 |
| Εφαρμογή 113.....                                                                            | 56 |
| Μέθοδος εργασίας 1.....                                                                      | 57 |
| Μέθοδος εργασίας 2.....                                                                      | 57 |
| Μέθοδος εργασίας 3.....                                                                      | 57 |
| Εφαρμογή 114.....                                                                            | 57 |
| Εφαρμογή 115.....                                                                            | 57 |
| Εφαρμογή 116.....                                                                            | 57 |
| Εφαρμογή 117.....                                                                            | 58 |
| Εφαρμογή 118.....                                                                            | 58 |
| Εφαρμογή 119.....                                                                            | 58 |
| Εφαρμογή 120.....                                                                            | 59 |
| Εφαρμογή 121.....                                                                            | 59 |
| Εφαρμογή 122.....                                                                            | 60 |
| Εφαρμογή 123.....                                                                            | 60 |

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Εφαρμογή 124 .....                                      | 61 |
| Εφαρμογή 125 .....                                      | 61 |
| Εφαρμογή 126 .....                                      | 62 |
| Εφαρμογή 127 .....                                      | 62 |
| Εφαρμογή 128 .....                                      | 63 |
| Εφαρμογή 129 .....                                      | 63 |
| 6.9 Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού .....   | 63 |
| 6.9.1 Γεωμετρική ερμηνεία .....                         | 64 |
| 6.9.2 Παρατηρήσεις .....                                | 64 |
| Εφαρμογή 130 .....                                      | 65 |
| Εφαρμογή 131 .....                                      | 65 |
| Εφαρμογή 132 .....                                      | 65 |
| Εφαρμογή 133 .....                                      | 66 |
| Εφαρμογή 134 .....                                      | 66 |
| Εφαρμογή 135 .....                                      | 66 |
| 6.10 Άλυτες ασκήσεις .....                              | 67 |
| Άσκηση 1 Μελέτη της μονοτονίας .....                    | 67 |
| Άσκηση 2 Διαστήματα κοιλότητας και σημεία καμπής .....  | 67 |
| Άσκηση 3 Παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων .....            | 67 |
| Άσκηση 4 Παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων .....            | 67 |
| Άσκηση 5 Παράγωγος με αναδρομικό τύπο .....             | 67 |
| Άσκηση 6 Παράγωγος άρτιας συνάρτησης .....              | 67 |
| Άσκηση 7 Εύρεση πρώτης παραγώγου .....                  | 67 |
| Άσκηση 8 Παράγωγος αριθμός συνάρτησης .....             | 67 |
| Άσκηση 9 Εύρεση πρώτης παραγώγου .....                  | 68 |
| Άσκηση 10 Εξισώσεις εφαπτομένων .....                   | 69 |
| Άσκηση 11 Εξίσωση εφαπτομένης .....                     | 69 |
| Άσκηση 12 Εξίσωση εφαπτομένης .....                     | 69 |
| Άσκηση 13 Εξίσωση εφαπτομένης .....                     | 69 |
| Άσκηση 14 Μεγιστοποίηση εμβαδού και περιμέτρου .....    | 69 |
| Άσκηση 15 Ελαχιστοποίησης υποτείνουσας .....            | 69 |
| Άσκηση 16 Εγγραφή κυλίνδρου σε σφαίρα .....             | 69 |
| Άσκηση 17 Εγγραφή κυλίνδρου σε κώνο .....               | 69 |
| Άσκηση 18 Εγγραφή ορθού κώνου σε σφαίρα .....           | 69 |
| Άσκηση 19 Εγγραφή ορθογωνίου σε τρίγωνο .....           | 69 |
| Άσκηση 20 Ελαχιστοποίηση εμβαδού .....                  | 70 |
| Άσκηση 21 Εγγραφή τετραγώνου σε τετράγωνο .....         | 70 |
| Άσκηση 22 Τοπικά ακρότατα .....                         | 70 |
| Άσκηση 23 Ελαχιστοποίησης αποστάσεων .....              | 70 |
| Άσκηση 24 Σημεία καμπής και διαστήματα κοιλότητας ..... | 70 |
| Άσκηση 25 Πλευρικές παράγωγοι .....                     | 70 |
| Άσκηση 26 Πλευρικές παράγωγοι .....                     | 70 |
| Άσκηση 27 Παράγωγος και απόλυτη τιμή .....              | 70 |
| Άσκηση 28 Εύρεση ορίων .....                            | 71 |
| Άσκηση 29 Πλευρικές παράγωγοι .....                     | 71 |
| Άσκηση 30 Πλευρικές παράγωγοι .....                     | 71 |
| Άσκηση 31 Πλευρικές παράγωγοι .....                     | 71 |
| Άσκηση 32 Πλευρικές παράγωγοι .....                     | 71 |
| Άσκηση 33 Ασύμπτωτες .....                              | 71 |
| Άσκηση 34 Εύρεση παραμέτρων και όρια .....              | 72 |
| Άσκηση 35 Εύρεση παραμέτρων και ασύμπτωτες .....        | 72 |
| Άσκηση 36 Θεώρημα Rolle .....                           | 72 |
| Άσκηση 37 Θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής .....         | 72 |

## 6.1 Κανόνες παραγώγισης

### 6.1.1 Παραγώγιση αθροίσματος

$\forall x \in D(f) \cap D(g)$  για το οποίο υπάρχουν οι  $f'(x), g'(x)$  ισχύει ότι  $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$  Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι για πεπερασμένο πλήθος προσθετέων ισχύει ότι  $[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x)$

#### Παρατήρηση 1

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση  $x_0$ , είναι πιθανόν η συνάρτηση  $f + g$  να είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0$

Πράγματι, οι  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$  δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση  $x_0 = 0$ , ενώ η  $h(x) = f(x) + g(x) = x$  είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 0$

#### Παραδείγματα

- $(x^4 + 5x^2 + 3)' = (x^4)' + (5x^2)' + (3)' = 4x^3 + 10x + 0 = 4x^3 + 10x = 2x(2x^2 + 5)$
- $(1 + \sin x)' = 1' + (\sin x)' = 0 + \cos x = \cos x$
- $(x^3 + \cos x)' = (x^3)' + (\cos x)' = 3x^2 - \sin x$
- $\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' + \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 1' = \frac{1}{5}(x^5)' + \frac{1}{3}(x^3)' + 1' = x^4 + x^2$

### 6.1.2 Παραγώγιση διαφοράς

$\forall x \in D(f) \cap D(g)$  για το οποίο υπάρχουν οι  $f'(x), g'(x)$  ισχύει ότι  $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

#### Παρατήρηση 2

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση  $x_0$ , είναι πιθανόν η συναρτήσεις  $f - g, g - f$  να είναι παραγωγίσιμες στη θέση  $x_0$

### 6.1.3 Παραγώγιση γινομένου

$\forall x \in D(f) \cap D(g)$  για το οποίο υπάρχουν οι  $f'(x), g'(x)$  ισχύει ότι  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Γενικεύοντας, ισχύει  $[(fgh)(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

#### Παρατήρηση 3

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν είναι παραγωγίσιμες στη θέση  $x_0$ , είναι πιθανόν η συνάρτηση  $fg$  να είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0$

Πράγματι, οι  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  και  $g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  δεν είναι παραγωγίσιμες στην

θέση  $x_0 = 0$ , ενώ η συνάρτηση  $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x$  είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 0$

### Ειδική περίπτωση

Αν  $c \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη ισχύει ότι  $(cf)'(x) = cf'(x)$

### Παραδείγματα

- $\left[ x^2 \cdot \sin x \right]' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$
- $(e^x \cdot \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x} = e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$
- $(x^2 \cdot e^x \cdot \ln x)' = (x^2)' e^x \ln x + x^2 (e^x)' \ln x + x^2 e^x (\ln x)' = 2xe^x \ln x + x^2 e^x \ln x + xe^x = xe^x (2 \ln x + x \ln x + 1)$
- $(e^x \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$
- $(2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x)' = (2x \sin x)' - [(x^2 - 2) \cos x]' = 2(x \sin x)' - [(x^2 - 2)' \cos x + (x^2 - 2)(\cos x)'] = 2(x' \sin x + x \cos x) - [2x \cos x + (x^2 - 2)(-\sin x)] = 2(\sin x + x \cos x) - 2x \cos x + x^2 \sin x - 2 \sin x = x^2 \sin x$
- $\left( x^3 \cdot \log x - \frac{1}{3} x^3 \right)' = (x^3 \cdot \log x)' - \left( \frac{1}{3} x^3 \right)' = (x^3)' \log x + x^3 (\log x)' - \frac{1}{3} (x^3)' = 3x^2 \log x + x^3 \left( \frac{\ln x}{\ln 10} \right)' - x^2 = 3x^2 \log x + x^3 \frac{1}{x \ln 10} - x^2 = 3x^2 \log x + \frac{x^2}{\ln 10} - x^2 = x^2 \left( 3 \log x + \frac{1}{\ln 10} - 1 \right)$

### 6.1.4 Παραγωγή της ημίλογου

$\forall x \in D(f) \cap D(g)$  για το οποίο υπάρχουν οι  $f'(x), g'(x)$  και  $g(x) \neq 0$

ισχύει ότι  $\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

### Παραδείγματα

- $(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

- $(\sigma\phi x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1'x - 1x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$
- $\left(\frac{5}{x}\right)' = \frac{5'x - 5x'}{x^2} = \frac{-5}{x^2}$
- $(\log x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{(\ln x)' \ln 10 - \ln x (\ln 10)'}{\ln^2 10} = \frac{\frac{1}{x} \ln 10 - 0}{\ln^2 10} = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$
- $\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x)' x^2 - e^x (x^2)'}{x^4} = \frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} = \frac{e^x x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x (x-2)}{x^3}$
- $\left(\frac{e^x}{2^x}\right)' = \frac{(e^x)' 2^x - e^x (2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{e^x 2^x - e^x 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{e^x - e^x \ln 2}{2^x} = \frac{e^x (1 - \ln 2)}{2^x}$
- $\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

### 6.1.5 Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων

- $\left[\sin e^x\right]' = (e^x)' \cos e^x = e^x \cos e^x$
- $\left[(x^2 + 1)^5\right]' = 5(x^2 + 1)^4 (x^2 + 1)' = 10x(x^2 + 1)^4$
- $\left[\cos(3x + 2)\right]' = -\sin(3x + 2) \cdot (3x + 2)' = -3\sin(3x + 2)$
- $\left[\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \left(\frac{3x}{2}\right)' = -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$
- $\left[\sin(3x)\right]' = (3x)' \cos(3x) = 3\cos(3x)$
- $\left[\sin(x^2 + 1)\right]' = (x^2 + 1)' \cos(x^2 + 1) = 2x \cdot \cos(x^2 + 1)$
- $\left[\sin(\cos x)\right]' = \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$
- $\left[(x^2 + 1)^3\right]' = 3(x^2 + 1)^2 (x^2 + 1)' = 6x(x^2 + 1)^2$
- $\left[e^{x^2}\right]' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}$
- $\left[\log(x^2 + 1)\right]' = \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 10}\right]' = \frac{1}{\ln 10} [\ln(x^2 + 1)]' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 10}$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left( \sqrt{x^2+1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\
& \bullet \left[ \cos^2(3x) + \sin^2(2x) \right]' = \left[ \cos^2(3x) \right]' + \left[ \sin^2(2x) \right]' = \\
& \quad 2\cos(3x) \left[ \cos(3x) \right]' + 2\sin(2x) \left[ \sin(2x) \right]' = \\
& \quad -2\cos(3x) \cdot \sin(3x) \cdot (3x)' + 2\sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot (2x)' = \\
& \quad -6\cos(3x) \cdot \sin(3x) + 4\sin(2x) \cdot \cos(2x) \\
& \bullet \\
& \left[ \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right]' = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right]' = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(3x + \frac{\pi}{4}\right)' = \\
& 6\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

### Εφαρμογή 1 Εύρεση $f'(x)$

Αν  $f(x) = (x^2 + 1)^x$ , να υπολογισθεί η  $f'(x)$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  και  $x^2 + 1 = e^{\ln(x^2+1)} \Leftrightarrow (x^2 + 1)^x = \left[ e^{\ln(x^2+1)} \right]^x \Leftrightarrow (x^2 + 1)^x = e^{x \cdot \ln(x^2+1)}$

Είναι  $f(x) = (x^2 + 1)^x = e^{x \cdot \ln(x^2+1)}$

Άρα  $f'(x) = \left[ e^{x \cdot \ln(x^2+1)} \right]' = e^{x \cdot \ln(x^2+1)} \left[ x \cdot \ln(x^2 + 1) \right]' =$

$$(x^2 + 1)^x \left[ x' \cdot \ln(x^2 + 1) + x \cdot \ln'(x^2 + 1) \right] = (x^2 + 1)^x \left[ \ln(x^2 + 1) + x \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \right] =$$

$$(x^2 + 1)^x \left[ \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right]$$

### Εφαρμογή 2 Παράγωγος άρτιων, περιττών και περιοδικών συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Δείξτε ότι: (α) Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε η  $f'$  είναι περιττή.

(β) Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε η  $f'$  είναι άρτια.

(γ) Αν η  $f$  είναι περιοδική, τότε η  $f'$  είναι περιοδική, ίδιας περιόδου.

**Απόδειξη**

$$(\alpha) f \text{ άρτια} \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ 2. f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι } f(x) = f(-x) \Leftrightarrow f'(x) = [f(-x)]' = f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(-x) \quad (3)$$

Από (1), (3) έπεται ότι η  $f'$  είναι περιττή.



$$(\beta) f \text{ περιττή} \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ 2. f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι } f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow f'(x) = [-f(-x)]' = -f'(-x) \cdot (-x)' = f'(-x) \quad (3)$$

Από (1), (3) έπεται ότι η  $f'$  είναι άρτια.

$$(\gamma) f \text{ περιοδική περιόδου } T \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + T \in \mathbb{R} \\ 2. f(x) = f(x + T) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$f(x) = f(x + T) \Leftrightarrow f'(x) = [f(x + T)]' = f'(x + T) \cdot (x + T)' = f'(x + T) \quad (3)$$

Από (1), (3) έπεται ότι η  $f'$  είναι περιοδική περιόδου  $T$

### Εφαρμογή 3 Σύνθεση συναρτήσεων και παράγωγος

Ισχύει ότι  $x = e^{\ln x}$  διότι  $\ln x = \ln(e^{\ln x}) = \ln x \cdot \ln e = \ln x \cdot 1 = \ln x$

- Είναι  $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \cdot \ln x}$

$$\text{Άρα, } (x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} (x \cdot \ln x)' = x^x \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (1 + \ln x)$$

- Είναι  $5^{\sin x} = e^{\ln 5^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln 5}$

$$\text{Άρα, } (5^{\sin x})' = (e^{\sin x \cdot \ln 5})' = e^{\sin x \cdot \ln 5} (\sin x \cdot \ln 5)' = 5^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 5$$

- Είναι  $(\ln x)^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \cdot \ln(\ln x)}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } [(\ln x)^x]' &= [e^{x \cdot \ln(\ln x)}]' = e^{x \cdot \ln(\ln x)} [x \cdot \ln(\ln x)]' = \\ (\ln x)^x \left[ \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right] &= (\ln x)^x \left[ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] \end{aligned}$$

- Είναι  $(x^2 + 1)^{x^2} = e^{\ln(x^2 + 1)^{x^2}} = e^{x^2 \ln(x^2 + 1)}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } [(x^2 + 1)^{x^2}]' &= [e^{x^2 \ln(x^2 + 1)}]' = e^{x^2 \ln(x^2 + 1)} [x^2 \ln(x^2 + 1)]' = \\ (x^2 + 1)^{x^2} \left[ 2x \ln(x^2 + 1) + \frac{x^2 \cdot 2x}{x^2 + 1} \right] &= (x^2 + 1)^{x^2} 2x \left[ \ln(x^2 + 1) + \frac{x^2}{x^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

- Είναι  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$$\text{Άρα, } \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]' = \left[e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right]' = e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]' =$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)' \right] &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2} \right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right] \end{aligned}$$

## 6.2 Εξίσωση εφαπτομένης

### Εφαρμογή 4 Εύρεση γωνίας της εφαπτομένης

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $xx'$ , η εφαπτομένη στο σημείο  $M(\alpha, \beta)$  της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \frac{a^2}{x}$

Είναι  $f'(x) = \frac{-a^2}{x^2}$  και  $f'(a) = \frac{-a^2}{a^2} = -1$ . Αν  $\hat{\omega}$  είναι η ζητούμενη γωνία, τότε  $\tan \hat{\omega} = f'(a) = -1$  άρα,  $\hat{\omega} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$

### Εφαρμογή 5 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης

Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \sin x + \cos x$  στο σημείο της που έχει τετμημένη  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ;

Είναι  $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$  και  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-8}{3}$  και  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $M\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = M\left(\frac{\pi}{6}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$  είναι

$$y - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow y - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{-8}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

### Εφαρμογή 6 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = 2x^2 + x + 3$  στο σημείο  $M(0, 3)$

Είναι  $f'(x) = 4x + 1$  και  $f'(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο  $M(0, 3)$  είναι  $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 3 = 1x \Leftrightarrow y = x + 3$

### Εφαρμογή 7 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 1$  στο σημείο  $M\left(1, \frac{23}{6}\right)$ . Ακολουθώς βρείτε σε ποιο σημείο

τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα  $xx'$

Είναι  $f'(x) = x^2 - 5x + 7$  και  $f'(1) = 3$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο  $M\left(1, \frac{23}{6}\right)$  είναι

$$y - \frac{23}{6} = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x + \frac{5}{6} \quad \text{Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα } xx' \text{ στο σημείο}$$

$$A(x_A, 0) \text{ όπου } 0 = 3x_A + \frac{5}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{6} = 3x_A \Leftrightarrow x_A = -\frac{5}{18} \quad \text{Άρα, είναι } A\left(-\frac{5}{18}, 0\right)$$

### Εφαρμογή 8 Υπολογισμός παραμέτρων

Να προσδιορισθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το σημείο  $A(2, -10)$  να ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12$  και η εφαπτομένη στο σημείο  $A$  να έχει συντελεστή διεύθυνσης  $-3$

Αφού το  $A(2, -10)$  ανήκει στη γραφική παράσταση, ισχύει ότι  $-10 = \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 12 \Leftrightarrow -4 = 2\alpha + \beta \quad (1)$

Είναι  $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + 9$  και  $f'(2) = 12\alpha + 4\beta + 9$

Ισχύει ότι  $f'(2) = -3 \Leftrightarrow 12\alpha + 4\beta + 9 = -3 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = -3 \quad (2)$

Από (1), (2) προκύπτει ότι  $\alpha = 1, \beta = -6$

### Εφαρμογή 9 Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \sqrt{x+3} + x - 3$  στο σημείο της που έχει τετμημένη  $x_0 = -3$

$$\text{Είναι } D(f) = [-3, +\infty), \quad f(x_0) = f(-3) = -6, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + 1$$

Για τον υπολογισμό του  $f'(-3)$ , θα γίνει χρήση του ορισμού, οπότε

$$f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+3} + x - 3 + 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+3} + (x+3)}{x+3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \lim_{x \rightarrow -3^+} 1 = (+\infty) + 1 = +\infty \quad \text{Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής}$$

παράστασης στο σημείο  $A(-3, -6)$  είναι  $x = -3$

$$\text{Επεξήγηση } x \rightarrow -3^+ \Leftrightarrow x > -3 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+3}} \xrightarrow{x \rightarrow -3^+} +\infty$$

### Εφαρμογή 10 Εύρεση του σημείου επαφής

Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2 + 3x + \beta$  στο οποίο η εφαπτομένη της είναι:

(α) Παράλληλη προς τον άξονα  $xx'$

(β) Παράλληλη προς την ευθεία  $y = 2x - 3$

(γ) Παράλληλη προς την ευθεία  $y = x$

Είναι  $f'(x) = 2x + 3$  και  $f'(x_0) = 2x_0 + 3$

(α) Έστω  $M(x_0, y_0)$  το ζητούμενο σημείο. Για να είναι η εφαπτομένη στο σημείο αυτό παράλληλη προς τον άξονα  $xx'$ , πρέπει

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-3}{2}$$

$$\text{Είναι } f(x_0) = f\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-3}{2}\right) + \beta = \frac{-9}{4} + \beta$$

$$\text{Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το } M\left(\frac{-3}{2}, \frac{-9}{4} + \beta\right)$$

(β) Η ευθεία  $y = 2x - 3$  έχει συντελεστή διεύθυνσης 2. Αν  $M(x_0, y_0)$  το ζητούμενο σημείο, πρέπει  $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 + 3 = 2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-1}{2}$

$$\text{Είναι } f(x_0) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-1}{2}\right) + \beta = \frac{-5}{4} + \beta$$

$$\text{Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το } M\left(\frac{-1}{2}, \frac{-5}{4} + \beta\right)$$

$$(γ) \text{ Ομοίως, πρέπει } f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

$$\text{Είναι } f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + \beta = -2 + \beta$$

$$\text{Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το } M(-1, -2 + \beta)$$

### 6.3 Ακρότατα συναρτήσεων

#### 6.3.1 Πρώτο κριτήριο

Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(a, \beta)$  και  $x_0 \in (a, \beta)$  με  $f'(x_0) = 0$ . Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό:

- μέγιστο στο  $x_0$ , όταν  $f'(x_0) \geq 0 \ \forall x \in (a, x_0]$  και  $f'(x_0) \leq 0 \ \forall x \in [x_0, \beta)$
- ελάχιστο στο  $x_0$ , όταν  $f'(x_0) \leq 0 \ \forall x \in (a, x_0]$  και  $f'(x_0) \geq 0 \ \forall x \in [x_0, \beta)$

#### Παρατηρήσεις

1 Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και όταν  $a = -\infty$  ή  $\beta = -\infty$

2 Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο  $x_0 \in (a, \beta)$  όταν η  $f'$  μηδενίζεται στο  $x_0$  αλλάζοντας πρόσημο. (Από + σε - έχω τοπικό μέγιστο. Από - σε + έχω τοπικό ελάχιστο.)

3 Αν η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in (a, \beta)$  αλλά είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ , αν η  $f'$  αλλάζει πρόσημο στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση  $f, f(x) = |x|$  στο σημείο  $x_0 = 0$

4 Έστω μία συνεχής συνάρτηση  $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

• Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο  $\beta$  και τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $a$

• Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο  $a$  και τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $\beta$

5 Από τα παραπάνω συνάγεται πως για να βρω τα τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης, πρέπει πρώτα να τη μελετήσω ως προς τη μονοτονία.

### 6.3.2 Δεύτερο κριτήριο

Έστω συνάρτηση  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(a, \beta)$  και  $x_0 \in (a, \beta)$  με  $f'(x_0) = 0$

- Όταν  $f''(x_0) > 0$  τότε η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$
- Όταν  $f''(x_0) < 0$  τότε η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$

#### Παρατηρήσεις

1 Όταν  $f''(x_0) = 0$ , τότε εξετάζω με το 1<sup>ο</sup> κριτήριο αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$

2 Συνήθως αυτό το κριτήριο χρησιμοποιείται όταν είναι δύσκολη η εύρεση του πρόσημου της  $f'$

### 6.3.3 Κριτήριο μονοτονίας

Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[a, \beta]$

- Όταν  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, \beta) \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα στο  $[a, \beta]$
- Όταν  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, \beta) \Rightarrow f$  γνησίως φθίνουσα στο  $[a, \beta]$

#### Παρατηρήσεις

1 Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η μονοτονία μίας συνάρτησης εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου της και εξετάζετε πάντα σε διάστημα ή διαστήματα.

2 Το κριτήριο ισχύει και για διάστημα της μορφής  $[a, \beta)$  ή  $(a, \beta]$  ή  $(a, \beta)$

3 Αν η συνάρτηση  $f$  είναι αύξουσα και παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$ , τότε ισχύει ότι  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, \beta)$

Πράγματι, αφού η  $f$  είναι αύξουσα στο  $(a, \beta)$ , προκύπτει ότι  $\forall x, x_0 \in (a, \beta)$  με

$$x \neq x_0 \text{ ισχύει ότι } \lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda(x) \geq 0, \text{ δηλαδή } f'(x_0) \geq 0$$

Το αντίστροφο της πρότασης αυτής γενικά δεν ισχύει. Δηλαδή είναι δυνατό να ισχύει  $f'(x) \geq 0$  και όμως η συνάρτηση  $f$  να μην είναι γνησίως αύξουσα στο  $(a, \beta)$ . Ανάλογη πρόταση ισχύει και για φθίνουσα συνάρτηση.

4 Αν η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $(a, \beta)$ , τότε έχει ως σύνολο τιμών το διάστημα  $(\kappa, \lambda)$ , όπου  $\kappa = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  και  $\lambda = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

Αν όμως η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $(a, \beta)$ , τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα  $(\lambda, \kappa)$

### Εφαρμογή 11 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η  $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ . Η  $f$  ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Είναι  $f'(x) = -2(x-1)$  και  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  θέση πιθανού ακρότατου.

|      |           |            |   |            |           |
|------|-----------|------------|---|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |            | 1 |            | $+\infty$ |
| $f'$ |           | +          | 0 | -          |           |
| $f$  |           | $\nearrow$ |   | $\searrow$ |           |

Ολικό maximum

Η  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση  $(1, f(1)) = (1, 0)$

### Εφαρμογή 12 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ . Η  $f$  ως πολωνυμική παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Είναι  $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = 3$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

|      |           |            |   |            |   |            |           |
|------|-----------|------------|---|------------|---|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |            | 1 |            | 3 |            | $+\infty$ |
| $f'$ |           | +          | 0 | -          | 0 | +          |           |
| $f$  |           | $\nearrow$ |   | $\searrow$ |   | $\nearrow$ |           |

Τοπ. max      Τοπ. min

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση  $(1, f(1))$  και τοπικό ελάχιστο στη θέση  $(3, f(3))$

### Εφαρμογή 13 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η  $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 3$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ . Η  $f$  ως πολωνυμική παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Είναι  $f'(x) = -4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = \sqrt{2}$  ή  $x = -\sqrt{2}$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

|      |           |            |             |            |   |            |            |            |           |
|------|-----------|------------|-------------|------------|---|------------|------------|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |            | $-\sqrt{2}$ |            | 0 |            | $\sqrt{2}$ |            | $+\infty$ |
| $f'$ |           | +          | 0           | -          | 0 | +          | 0          | -          |           |
| $f$  |           | $\nearrow$ |             | $\searrow$ |   | $\nearrow$ |            | $\searrow$ |           |

Τοπ. max      Τοπ. min      Τοπ. max

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στις θέσεις  $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}))$  και  $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$  Έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση  $(0, -3)$

### Εφαρμογή 14 Εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η  $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ . Η  $f$  ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Είναι  $f'(x) = (x+2)^2(x-1)(5x+1)$  και  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  η  $x = -2$  η  $x = -\frac{1}{5}$   
θέσεις πιθανών ακρότατων.

|      |           |            |                |            |           |            |          |            |
|------|-----------|------------|----------------|------------|-----------|------------|----------|------------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$       | $-\frac{1}{5}$ | $1$        | $+\infty$ |            |          |            |
| $f'$ |           | $-$        | $0$            | $+$        | $0$       | $-$        | $0$      | $+$        |
| $f$  |           | $\searrow$ |                | $\nearrow$ |           | $\searrow$ |          | $\nearrow$ |
|      |           |            | Τοπ. min       |            | Τοπ. max  |            | Τοπ. min |            |

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση  $\left(-\frac{1}{5}, f\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$  και τοπικά ελάχιστα στις θέσεις  $(-2, f(-2))$  και  $(1, f(1))$

### Εφαρμογή 15 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ . Η  $f$  ως ρητή παραγωγίσιμη στο  $D(f)$

Είναι  $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$  Η  $f'(x)$  έχει ίδιο πρόσημο με το  $x(x+2)$

|      |                                               |                   |            |                   |                                               |     |
|------|-----------------------------------------------|-------------------|------------|-------------------|-----------------------------------------------|-----|
| $x$  | $-\infty$                                     | $-2$              | $-1$       | $0$               | $+\infty$                                     |     |
| $f'$ |                                               | $+$               | $0$        | $-$               | $0$                                           | $+$ |
| $f$  |                                               | $\nearrow$        | $\searrow$ | $\searrow$        | $\nearrow$                                    |     |
|      | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ |                   | $\Pi$      |                   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ |     |
|      |                                               | $\text{Τοπ. max}$ |            | $\text{Τοπ. min}$ |                                               |     |
|      |                                               | $(-2, -4)$        |            | $(0, 0)$          |                                               |     |

### Εφαρμογή 16 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ . Η  $f$ , ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με

$f'(x) = \frac{-7}{(2x-1)^2}$ ,  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in D(f)$ , άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο  $D(f)$

### Εφαρμογή 17 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}^*$  Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$ ,  $f'(x) = \frac{-x-2}{x^3}$  Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με το γινόμενο  $x(-x-2)$

| $x$  | $-\infty$                               | $-2$       | $0$        | $+\infty$                               |
|------|-----------------------------------------|------------|------------|-----------------------------------------|
| $f'$ |                                         | $-$        | $0$        | $+$                                     |
| $f$  |                                         | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$                              |
|      | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ |            |            | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ |
|      |                                         | Τοπ. min   | Τοπ. max   |                                         |

### Εφαρμογή 18 Επίλυση εξίσωσης

Να λυθεί η  $3x^4 + x + 2 \ln x = 4$

Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(x) = 3x^4 + x + 2 \ln x - 4$  με  $D(f) = (0, +\infty)$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με  $f'(x) = 12x^3 + 1 + \frac{2}{x}$

Είναι  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in D(f)$  άρα, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $D(f)$

Όταν  $x = 1$  τότε  $f(1) = 0$  Η  $x = 1$  είναι η μοναδική λύση της  $3x^4 + x + 2 \ln x = 4$

### Εφαρμογή 19 Εύρεση παραμέτρου

Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως φθίνουσα η  $f(x) = \frac{1 + \lambda x^2}{1 + x}$  στο πεδίο ορισμού της; Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της,

$$f'(x) = \frac{\lambda x^2 + 2\lambda x - 1}{(1+x)^2}$$

Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $P(x) = \lambda x^2 + 2\lambda x - 1$

- Όταν  $\lambda = 0$  τότε  $P(x) = -1 < 0$
- Όταν  $\lambda \neq 0$  τότε για το τριώνυμο  $P(x)$  πρέπει να είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \leq 0 \\ \alpha = \lambda < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda(1+\lambda) \leq 0 \\ \lambda < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -1 \leq \lambda < 0$$

Άρα, όταν  $-1 \leq \lambda < 0$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

### Εφαρμογή 20 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = x - \ln x$

Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  και  $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $x-1$ , άρα η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$

### Εφαρμογή 21 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = e^x - x + 1$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = e^x - 1$



|      |           |     |           |
|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f'$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f$  |           |     |           |

Ολικό minimum  
(0, 1)

**Επεξηγήσεις**

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$

**Εφαρμογή 22 Μελέτη της μονοτονίας**

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}^*$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ . Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $x(x-1)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$

**Εφαρμογή 23 Μελέτη της μονοτονίας**

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = x^x$

Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = x^x (1 + \ln x)$ . Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $1 + \ln x$

|      |           |          |           |
|------|-----------|----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $e^{-1}$ | $+\infty$ |
| $f'$ | $-$       | $0$      | $+$       |
| $f$  |           |          |           |

Ολικό minimum

**Επεξηγήσεις**

$$1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Leftrightarrow x < e^{-1} = \frac{1}{e}$$

**Εφαρμογή 24 Απόδειξη ανισότητας**

Να δειχθεί ότι  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι  $x \cdot \sin x + \cos x > 1$

Έστω συνάρτηση  $f(x) = x \cdot \sin x + \cos x - 1$ . Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$

Είναι  $f(x) > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = x \cos x$

Είναι  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , οπότε

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ισχύει ότι } x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

### Εφαρμογή 25 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}$

$$\text{Είναι } D(f) = \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1+x}{1-x}, & x < 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

Δεν υπάρχει το  $f'(0)$  διότι  $f'_s(0) = -2 \neq 2 = f'_a(0)$

$\forall x > 0$  είναι  $f'(x) < 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$

$\forall x < 0$  είναι  $f'(x) > 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$

### Εφαρμογή 26 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

| $x$  | $-\infty$ |            | $-1$                |            | $1$                |            | $+\infty$ |
|------|-----------|------------|---------------------|------------|--------------------|------------|-----------|
| $f'$ |           | +          | 0                   | -          | 0                  | +          |           |
| $f$  |           | $\nearrow$ |                     | $\searrow$ |                    | $\nearrow$ |           |
|      |           |            | Τοπ. max<br>(-1, 4) |            | Τοπ. min<br>(1, 0) |            |           |

### Εφαρμογή 27 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = 9x - x^3$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  και  $f'(x) = 9 - 3x^2$

Είναι  $D(f') = \mathbb{R}$ . Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f')$  και  $f''(x) = -6x$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

• Είναι  $f''(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση  $x_0 = \sqrt{3}$ ,  
ίσο με  $f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

• Είναι  $f''(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση  
 $x_0 = -\sqrt{3}$ , ίσο με  $f(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$

### Εφαρμογή 28 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = 2$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

| $x$  | $-\infty$ | $-2$                    | $0$                  | $2$                    | $+\infty$  |     |
|------|-----------|-------------------------|----------------------|------------------------|------------|-----|
| $f'$ |           | $-$                     | $0$                  | $-$                    | $0$        | $+$ |
| $f$  |           | $\searrow$              | $\nearrow$           | $\searrow$             | $\nearrow$ |     |
|      |           | Τοπ. min<br>$(-2, -11)$ | Τοπ. max<br>$(0, 5)$ | Τοπ. min<br>$(2, -11)$ |            |     |

### Εφαρμογή 29 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = 2$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

Θέση πιθανού ακρότατου είναι και η θέση  $x_0 = 1$

| $x$  | $-\infty$ | $0$                | $1$        | $2$                | $+\infty$  |
|------|-----------|--------------------|------------|--------------------|------------|
| $f'$ |           | $+$                | $0$        | $-$                | $+$        |
| $f$  |           | $\nearrow$         | $\searrow$ | $\searrow$         | $\nearrow$ |
|      |           | Τοπ. max<br>(0, 0) | Π          | Τοπ. min<br>(2, 4) |            |

### Εφαρμογή 30 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η  $f(x) = x \cdot e^x$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = e^x(x+1)$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$  θέση πιθανού ακρότατου.

| $x$  | $-\infty$ | $-1$                                             | $+\infty$  |
|------|-----------|--------------------------------------------------|------------|
| $f'$ |           | $-$                                              | $+$        |
| $f$  |           | $\searrow$                                       | $\nearrow$ |
|      |           | Ολικό minimum<br>$\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$ |            |

### Εφαρμογή 31 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η  $f(x) = x \cdot \ln x$

Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = 1 + \ln x$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$  θέση πιθανού ακρότατου.

|      |           |          |           |
|------|-----------|----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $e^{-1}$ | $+\infty$ |
| $f'$ |           | 0        |           |
| $f$  |           |          |           |

$\searrow$   $\nearrow$   
 Ολικό minimum  
 $(e^{-1}, -e^{-1})$

### Εφαρμογή 32 Εύρεση των ακρότατων

Ποια τα ακρότατα της  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \neq 0$ ; Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  και η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 2\alpha x + \beta$  και  $f''(x) = 2\alpha$ . Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\beta}{2\alpha}$  θέση πιθανού ακρότατου.

- Όταν  $\alpha > 0$  τότε  $f''\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = 2\alpha > 0$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση  $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ , ίσο με  $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$
- Όταν  $\alpha < 0$  τότε  $f''\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = 2\alpha < 0$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στη θέση  $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ , ίσο με  $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$

### Εφαρμογή 33 Εύρεση των ακρότατων

Να βρεθούν τα ακρότατα της  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ . Να συγκριθούν οι αριθμοί  $e^x$  και  $x^e$  όταν  $x > 0$ .  
 Είναι  $D(f) = (1, +\infty)$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ .  
 Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $(\ln x - 1)$

|      |           |     |           |
|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $e$ | $+\infty$ |
| $f'$ |           | 0   |           |
| $f$  |           |     |           |

$\searrow$   $\nearrow$   
 Ολικό minimum

Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο  $(e, e)$

#### Επεξηγήσεις

$$\forall x > 1 \Rightarrow f(x) \geq e \Rightarrow \frac{x}{\ln x} \geq e \Rightarrow x \geq e \ln x \Rightarrow x \geq \ln x^e \Rightarrow \ln e^x \geq \ln x^e \Rightarrow e^x \geq x^e$$

$$\forall x \in (0, 1) \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow e^x > e^0 = 1 \geq x^e, \text{ άρα } \forall x > 0 \text{ είναι } e^x \geq x^e$$

### Εφαρμογή 34 Εύρεση των ακρότατων

Να βρεθούν τα ακρότατα της  $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

Είναι  $D(f)=[0, 3]$  Η  $f$  είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα  $[0, 3]$  και

παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 3)$  με  $f'(x)=\frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$

Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $3-2x$

Η  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο  $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$  και ολικό ελάχιστο  $f(0)=f(3)=0$

| $x$  | 0 | $\frac{3}{2}$ | 3 |
|------|---|---------------|---|
| $f'$ |   | +             | - |
| $f$  |   | ↗             | ↘ |

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0=\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

### Εφαρμογή 35 Εύρεση των ακρότατων

Να βρεθούν τα ακρότατα της  $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$

Είναι  $D(g)=\mathbb{R}$  Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}-\{1\}$  με  $f'(x)=\frac{-2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

Η  $f$  συνεχής στη θέση  $x_0=1$  Η  $f'$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $-2(x-1)$

| $x$  | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|------|-----------|---|-----------|
| $f'$ |           | + | -         |
| $f$  |           | ↗ | ↘         |

Ολικό maximum  
 $(1, f(1))=(1, 1)$

### Παρατήρηση

Αν η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in (a, \beta)$  ενώ είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  όταν η  $f'$  αλλάζει πρόσημο στο  $x_0$

### Εφαρμογή 36 Εύρεση των ακρότατων

Να βρεθούν τα ακρότατα της  $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

Είναι  $D(f)=(0, +\infty)$  Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

Είναι  $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$  θέση πιθανού ακρότατου.

| $x$  | 0 | $e$ | $+\infty$ |
|------|---|-----|-----------|
| $f'$ |   | +   | -         |
| $f$  |   | ↗   | ↘         |

Ολικό maximum  
 $(e, f(e))=(e, e^{-1})$

**Σημείωση** Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=-\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$

### Εφαρμογή 37 Απόδειξη ανισότητας

Να δειχθεί ότι  $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  Αρκεί να δειχθεί ότι  $e^x - x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
 Έστω συνάρτηση  $f(x) = e^x - x$  με  $D(f) = \mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x - 1$  Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  θέση πιθανού ακρότατου.  
 $\forall x \in \mathbb{R}$  είναι  $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$

| $x$  | $-\infty$ | $0$        | $+\infty$  |
|------|-----------|------------|------------|
| $f'$ |           | 0          |            |
|      |           | -          | +          |
| $f$  |           |            |            |
|      |           | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Ολικό minimum  
(0, 1)

### Εφαρμογή 38 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = x \cdot \ln x$   
 Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = 1 + \ln x$   
 Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$  θέση πιθανού ακρότατου.

| $x$  | $0$ | $e^{-1}$   | $+\infty$  |
|------|-----|------------|------------|
| $f'$ |     | 0          |            |
|      |     | -          | +          |
| $f$  |     |            |            |
|      |     | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Ολικό minimum  
( $e^{-1}, f(e^{-1})$ ) = ( $e^{-1}, -e^{-1}$ )

**Επεξήγηση**  $1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$

### Εφαρμογή 39 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  και η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x < 0 \end{cases}$

Δεν υπάρχει το  $f'(0)$  Η θέση  $x_0 = 0$  είναι θέση πιθανού ακρότατου. Η  $f$  είναι συνεχής στη θέση  $x_0 = 0$  Πράγματι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$ ,  
 άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

| $x$  | $-\infty$ | $0$        | $+\infty$  |
|------|-----------|------------|------------|
| $f'$ |           | Π          |            |
|      |           | -          | +          |
| $f$  |           |            |            |
|      |           | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Ολικό minimum  
(0,  $f(0)$ ) = (0, 0)

#### Εφαρμογή 40 Διαστήματα μονοτονίας

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 6$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = x - 1$  Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  θέση πιθανού ακρότατου.

| $x$  | $-\infty$ |            | $1$ |            | $+\infty$ |
|------|-----------|------------|-----|------------|-----------|
| $f'$ |           | $-$        | $0$ | $+$        |           |
| $f$  |           | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |           |

Ολικό minimum  
 $(1, f(1))$

#### Εφαρμογή 41 Διαστήματα μονοτονίας

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 17$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  Η  $f$  ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$  Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = \pm 2$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

| $x$  | $-\infty$ |            | $-2$ |            | $0$ |            | $2$ |            | $+\infty$ |
|------|-----------|------------|------|------------|-----|------------|-----|------------|-----------|
| $f'$ |           | $-$        | $0$  | $+$        | $0$ | $-$        | $0$ | $+$        |           |
| $f$  |           | $\searrow$ |      | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |           |

Τοπ. min  $(-2, f(-2))$     Τοπ. max  $(0, f(0))$     Τοπ. min  $(2, f(2))$

#### Εφαρμογή 42 Διαστήματα μονοτονίας

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $f(x) = \ln x - x$

Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$  Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = \frac{1-x}{x}$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  θέση πιθανού ακρότατου.

| $x$  | $0$ |            | $1$ |            | $+\infty$ |
|------|-----|------------|-----|------------|-----------|
| $f'$ |     | $+$        | $0$ | $-$        |           |
| $f$  |     | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |           |

Ολικό maximum  
 $(1, f(1)) = (1, -1)$

#### Εφαρμογή 43 Μελέτη μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = (x-2)^5 (x+1)^4$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  και  $f$  παραγωγίσιμη με  $f'(x) = (x-2)^4 (x+1)^2 (x+1)(9x-3)$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$  ή  $x = -1$  ή  $x = \frac{1}{3}$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

|      |           |                             |               |                                                                     |           |            |
|------|-----------|-----------------------------|---------------|---------------------------------------------------------------------|-----------|------------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$                        | $\frac{1}{3}$ | $2$                                                                 | $+\infty$ |            |
| $f'$ |           | $+$                         | $0$           | $-$                                                                 | $0$       | $+$        |
| $f$  |           | $\nearrow$                  |               | $\searrow$                                                          |           | $\nearrow$ |
|      |           | Τοπικό max<br>$(-1, f(-1))$ |               | Τοπικό min<br>$\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ |           |            |

#### Εφαρμογή 44 Απόδειξη ανισότητας

Ναδειχθεί ότι  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(x+1)$ ,  $\forall x > 0$

Έστω συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ln(x+1)$  με  $D(f) = (0, +\infty)$

Είναι  $f'(x) = \frac{-x^4}{x+1}$  και επειδή  $f'(x) < 0$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα,  $f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$

#### Εφαρμογή 45 Απόδειξη ανισότητας

Ναδειχθεί ότι  $(1+x)^a > 1+ax$ ,  $\forall x > 0$

Έστω συνάρτηση  $f(x) = (1+x)^a - 1 - ax$ ,  $D(f) = (0, +\infty)$

Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = a[(1+x)^{a-1} - 1]$

Η  $f'$  δε μηδενίζεται ποτέ.  $\forall x > 0$  είναι  $f'(x) > 0$ , άρα η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

Είναι  $f(x) > f(0) \Leftrightarrow (1+x)^a - 1 - ax > 0 \Leftrightarrow (1+x)^a > 1+ax$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$

|      |     |            |
|------|-----|------------|
| $x$  | $0$ | $+\infty$  |
| $f'$ |     | $+$        |
| $f$  |     | $\nearrow$ |

#### Εφαρμογή 46 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

Είναι  $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$  και  $f'(x) = \frac{2x}{(x-3)(x+3)}$

Είναι  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ , άρα δεν υπάρχουν πιθανά ακρότατα.



|      |                             |                                                                                   |                             |           |
|------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------|
| $x$  | 0                           | -3                                                                                | 3                           | $+\infty$ |
| $f'$ | -                           | -----                                                                             | +                           |           |
| $f$  | $+\infty$<br>↘<br>$-\infty$ |  | $-\infty$<br>↗<br>$+\infty$ |           |

#### Εφαρμογή 47 Εύρεση παραμέτρου

Να βρεθεί ο  $a \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x} + \frac{17}{4}$  να έχει ακρότατο το 0 στη θέση  $x_0 = \frac{-1}{2}$ . Είναι  $D(f) = \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = 2x + a - \frac{1}{x^2}$  και  $f'\left(\frac{-1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a = 5$  για

πιθανό ακρότατο στη θέση  $x_0 = \frac{-1}{2}$ . Είναι  $f'(x) = 2 \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2x - 2)}{x^2}$

|      |           |               |                |              |           |
|------|-----------|---------------|----------------|--------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1-\sqrt{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $1+\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $f'$ | -         | 0             | +              | 0            | -         |
| $f$  | ↘         |               | ↗              |              | ↘         |

↗

↘

↗

Τοπικό maximum

$$\left(\frac{-1}{2}, f\left(\frac{-1}{2}\right)\right)=\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

#### Εφαρμογή 48 Μελέτη της μονοτονίας

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η  $f(x) = \frac{(x+a)(x+\beta)}{(x-a)(x-\beta)}$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{\alpha, \beta\}$  και  $f'(x) = \frac{-2(\alpha+\beta)(x^2-\alpha\beta)}{(x-a)^2(x-\beta)^2}$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a\beta}$ , θέσεις πιθανών ακρότατων  $x_0 = a$ ,  $x_0 = \beta$ ,  $x_0 = \pm\sqrt{a\beta}$

|      |           |                  |     |                 |         |           |
|------|-----------|------------------|-----|-----------------|---------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-\sqrt{a\beta}$ | $a$ | $\sqrt{a\beta}$ | $\beta$ | $+\infty$ |
| $f'$ | -         | 0                | +   | 0               | -       | -         |
| $f$  | ↘         | ↗                | ↗   | ↘               | ↘       |           |

Τοπικό minimum                      Τοπικό maximum

#### Εφαρμογή 49 Απόδειξη ανισότητας

Ναδειχθεί ότι  $\forall x > 0$  και  $0 < a < 1$  είναι  $x^a - ax \leq 1 - a$

Αρκεί ναδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^a - ax$  έχει μέγιστο το  $1 - a$

Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$  Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $D(f)$  με  $f'(x) = a(x^{a-1} - 1)$  και  $f(x) = a(a-1)x^{a-2}$  Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  και  $f''(1) = a(a-1) < 0$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο το οποίο είναι  $f(1) = 1 - a$

### Εφαρμογή 50 Εύρεση των ακρότατων

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της  $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2$

Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  Είναι  $f'(x) = 20x^3(x-1)$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = 1$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

| $x$  | $-\infty$ | 0                    | 1                    | $+\infty$ |   |   |
|------|-----------|----------------------|----------------------|-----------|---|---|
| $f'$ |           | +                    | 0                    | -         | 0 | + |
| $f$  |           | ↗                    | ↘                    | ↗         |   |   |
|      |           | Τοπικό max<br>(0, 2) | Τοπικό min<br>(1, 1) |           |   |   |

**Σχόλιο**  $f''(x) = 80x^3 - 60x^2 = 20x^2(4x-3)$ ,  $f''(0) = 0$

### Εφαρμογή 51 Εύρεση των ακρότατων

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  ως πολυωνυμική. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$f'(x) = 6(x-1)(x-2)$  Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = 2$  θέσεις πιθανών ακρότατων.

|      |           |            |              |           |   |   |
|------|-----------|------------|--------------|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 1          | 2            | $+\infty$ |   |   |
| $f'$ |           | +          | 0            | -         | 0 | + |
| $f$  |           | ↗          | ↘            | ↗         |   |   |
|      |           | Τοπικό max | Τοπικό min   |           |   |   |
|      |           | (1, 7)     | (2, $f(2)$ ) |           |   |   |

**Σχόλιο**

$$f''(x) = 12x - 18$$

$f''(1) = -6 < 0$ , άρα για  $x_0 = 1$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

$f''(2) = 6 > 0$ , άρα για  $x_0 = 2$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

### Εφαρμογή 52 Εύρεση των ακρότατων

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της  $f(x) = x^4$

$\forall x \in \mathbb{R}$  είναι  $f(x) \geq f(0)$  άρα στη θέση  $x_0 = 0$  η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο. Αλλά

$f'(x) = 4x^3$  και  $f'(0) = 0$  Επίσης  $f''(x) = 12x^2$  και  $f''(0) = 0$  δηλαδή, οι

συνθήκες  $f'(\xi) = 0$  και  $f''(\xi) \neq 0$  είναι ικανές για την ύπαρξη ακρότατου. Δεν είναι αναγκαίες.

|      |            |     |            |
|------|------------|-----|------------|
| $x$  | $-\infty$  | $0$ | $+\infty$  |
| $f'$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $f$  | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |

Ολικό minimum

### Εφαρμογή 53 Μεγιστοποίηση εσόδων

Ο αριθμός  $x$  των τόνων πετρελαίου που πουλά μία εταιρεία, εξαρτάται από την τιμή  $k$  (σε €) του ενός τόνου. Αν  $x = 100 - \frac{k}{10}$ , όπου  $100 \leq k \leq 1.000$ , ποια είναι τα έσοδα από την πώληση  $x$  τόνων; Για ποια τιμή του  $k$  μεγιστοποιούνται τα έσοδα;

Τα έσοδα από την πώληση  $x$  τόνων είναι  $f(k) = x \cdot k = \left(100 - \frac{k}{10}\right)k = 100k - \frac{k^2}{10}$

άρα,  $f'(k) = 100 - \frac{k}{5}$  Είναι  $f'(k) = 0 \Leftrightarrow k = 500$  Ισχύει ότι

$f'(k) > 0 \Leftrightarrow 100 - \frac{k}{5} > 0 \Leftrightarrow k < 500$  Ισχύει ότι  $f'(k) < 0 \Leftrightarrow 100 - \frac{k}{5} < 0 \Leftrightarrow k > 500$

Άρα, τα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν ο τόνος πωλείται προς 500 €

|         |            |           |            |
|---------|------------|-----------|------------|
| $k$     | 100        | 500       | 1.000      |
| $f'(k)$ | $+$        | $0$       | $-$        |
| $f(k)$  | $\nearrow$ | Ολικό max | $\searrow$ |

### Εφαρμογή 54 Μεγιστοποίηση κέρδους

Τα έσοδα από την παραγωγή  $x$  τεμαχίων προϊόντος είναι  $E(x) = 500x - 20x^2$   
Το κόστος για την παραγωγή τους είναι  $K(x) = x^3 - 50x^2 + 500x + 250$ , με  $0 \leq x \leq 35$  Βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία μεγιστοποιείται το κέρδος.

Είναι Κέρδος = Έσοδα - Έξοδα άρα, αν  $P(x)$  το κέρδος, ισχύει ότι  $P(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 30x^2 - 250$  Συνεπώς  $P'(x) = -3x(x - 20)$

Άρα  $P'(x) = -3x(x - 20)$  και  $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = 20$

Είναι  $P'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 20)$  και  $P'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 20$  άρα, το κέρδος μεγιστοποιείται όταν παράγονται 20 τεμάχια προϊόντος.

|         |            |           |            |
|---------|------------|-----------|------------|
| $x$     | 0          | 20        | $+\infty$  |
| $P'(x)$ | $+$        | $0$       | $-$        |
| $P(x)$  | $\nearrow$ | Ολικό max | $\searrow$ |

### Εφαρμογή 55 Ορθογώνιο μεγίστου εμβαδού

Βρείτε τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεγίστου εμβαδού, αν οι δύο πλευρές του βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και η μία από τις κορυφές του ανήκει στην ευθεία  $y = -x + 2$

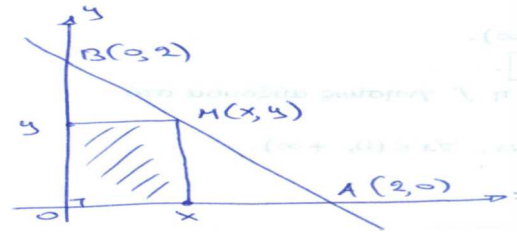
$$E(x) = x \cdot y = x(-x + 2) = -x^2 + 2x$$

$$E'(x) = -2x + 2 = 2(1 - x)$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$E''(x) = -2 < 0$$

Αν  $x = 1 \Rightarrow y = 1$ , άρα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γίνεται τετράγωνο



### Εφαρμογή 55 Ορθογώνιο σταθερού εμβαδού

Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμο με σταθερό εμβαδόν  $k^2$  ( $k > 0$ ), το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

| $E$ | $x$ | $y$ | Περίμετρος |
|-----|-----|-----|------------|
| 100 | 100 | 1   | 202        |
| 100 | 50  | 2   | 104        |
| 100 | 25  | 4   | 58         |
| 100 | 200 | 0,5 | 401        |
| 100 | 10  | 10  | 40         |



$$\left. \begin{array}{l} E = k^2 \\ E = x \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot y = k^2 \Rightarrow y = \frac{k^2}{x}$$

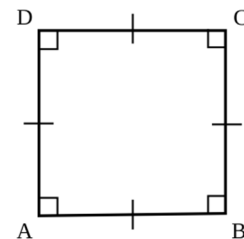
Η περίμετρος είναι  $2(x + y)$  και η ελαχιστοποίηση της σημαίνει ελαχιστοποίηση της παράστασης  $x + y$  δηλαδή της παράστασης  $x + \frac{k^2}{x}$

Έστω συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x + \frac{k^2}{x}$  Είναι  $f'(x) = \frac{(x+k)(x-k)}{x^2}$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} k, & \text{Δεκτή} \\ -k < 0, & \text{Απορρίπτεται} \end{cases}$

Είναι  $f''(x) = \frac{2k^2}{x^3}$ , άρα  $f''(k) = \frac{2k^2}{k^3} = \frac{2}{k} > 0$ , συνεπώς  $x = y = k$

οπότε  $E = x \cdot y = x^2 = k^2$



### Εφαρμογή 56 Εγγραφή κώνου σε σφαίρα

Σε σφαίρα ακτίνας  $R$  να εγγραφεί κώνος με μέγιστο όγκο.

Είναι  $OA = OB = OG = R$  Άρα,  $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (KB)^2 \cdot AK = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 - x^2)(R + x) =$

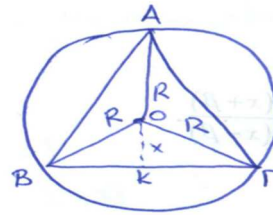
$$\frac{1}{3}\pi \cdot (R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3) = V(x)$$

$x$  : Η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το επίπεδο της βάσης του κώνου.

Είναι  $V'(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 - 2Rx - 3x^2)$  και  $V''(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-2R - 6x)$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow R^2 - 2Rx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -R, & \text{Απόρριψη} \\ \frac{R}{3}, & \text{Δεκτή} \end{cases}$$

$$V''\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{-4}{3} \pi \cdot R < 0 \text{ άρα, } OK = x = \frac{R}{3}$$



Σχήμα. Τομή της σφαίρας και του κώνου

#### 6.4 Κυρτές συναρτήσεις – σημεία καμψής

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[a, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$

- Αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(a, \beta)$ , τότε η  $f$  είναι **κυρτή** ή στρέφει τα **κοίλα πάνω** στο  $[a, \beta]$

- Αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(a, \beta)$ , τότε η  $f$  είναι **μη κυρτή** ή στρέφει τα **κοίλα κάτω** στο  $[a, \beta]$

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει η ακόλουθη πρόταση:

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[a, \beta]$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$

- Όταν  $\forall x \in (a, \beta)$  είναι  $f''(x) > 0$  τότε η  $f$  στρέφει τα κοίλα πάνω στο  $[a, \beta]$

- Όταν  $\forall x \in (a, \beta)$  είναι  $f''(x) < 0$  τότε η  $f$  στρέφει τα κοίλα κάτω στο  $[a, \beta]$

Ένα σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται **σημείο καμψής** της γραφικής παράστασης της  $f$ , όταν

(α) Η  $f$  είναι συνεχής στην θέση  $x_0$

(β) Υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M(x_0, f(x_0))$

(γ) Η  $f''(x)$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου  $x_0$

##### 6.4.1 Ειδική περίπτωση

Αν  $f'(x_0) = 0$  (το  $x_0$  είναι στάσιμο σημείο της  $f$ ), λέμε ότι έχουμε σημείο καμψής με οριζόντια εφαπτομένη. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει η πρόταση:

Αν το  $M(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της  $f$ , τότε είναι  $f''(x_0) = 0$  ή δεν ορίζεται η  $f''$  στο  $x_0$

##### 6.4.2 Γεωμετρική ερμηνεία

- Αν η  $f$  στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα  $\Delta$ , τότε η γραφική της παράσταση μένει πάνω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

- Αν η  $f$  στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα  $\Delta$ , τότε η γραφική της παράσταση μένει κάτω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

• Αν η  $f$  παρουσιάζει καμπή στο σημείο  $x_0$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  «διαπερνά» τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

### Εφαρμογή 57 Μελέτη της κυρτότητας

Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας – κοιλότητας και τα σημεία καμπής της  $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  Η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι  $f'(x) = 6x - 6x^2$  και  $f''(x) = [f'(x)]' = 6 - 12x = 6(1 - 2x)$

Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$  θέση πιθανού σημείου καμπής.

|       |           |                  |           |     |
|-------|-----------|------------------|-----------|-----|
| $x$   | $-\infty$ | $0,5$            | $+\infty$ |     |
| $f''$ |           | $+$              | $0$       | $-$ |
| $f$   |           | $\cup$           | $\cap$    |     |
|       |           | $\sigma. \kappa$ |           |     |

σ.κ

Άρα, σημείο καμπής είναι το  $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

### Εφαρμογή 58 Μελέτη της κυρτότητας

Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας – κοιλότητας και τα σημεία καμπής της  $f(x) = x \ln x - 1$

Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$  Η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι  $f'(x) = 1 + \ln x$  και  $f''(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in D(f)$  είναι  $f''(x) > 0$ , άρα η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω. Δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

### Εφαρμογή 59 Μελέτη της κυρτότητας

Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτότητας – κοιλότητας και τα σημεία καμπής της  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$  Η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο

πεδίο ορισμού της. Είναι  $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2x(3 + x^2)}{(x^2 - 1)^3}$ ,  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

θέση πιθανού σημείου καμπής. Η  $f''$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $\frac{x}{x^2 - 1}$ , δηλαδή με το γινόμενο  $x(x - 1)(x + 1)$

| $x$   | $-\infty$ | $-1$  | $0$    | $1$    | $+\infty$ |        |     |
|-------|-----------|-------|--------|--------|-----------|--------|-----|
| $f''$ | $-$       | $\Pi$ | $+$    | $0$    | $-$       | $\Pi$  | $+$ |
| $f$   | $\cap$    | $\Pi$ | $\cup$ | $\cap$ | $\Pi$     | $\cup$ |     |

Άρα, σημείο καμπής είναι το  $(0, 0)$

### Εφαρμογή 60 Εύρεση παραμέτρων

Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f(x) = \frac{\alpha x}{x^2 + \beta}$  να έχει σημείο καμπής το σημείο  $M\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Η γραφική παράσταση διέρχεται από το M, άρα  $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 3 + \beta$  (1) Για να παρουσιάζει η  $f$  καμπή στο M πρέπει  $f''(\sqrt{3}) = 0$  και η  $f''(x)$  να αλλάζει πρόσημο στη θέση  $x_0 = \sqrt{3}$ . Είναι  $f'(x) = \frac{\alpha\beta - \alpha x^2}{(x^2 + \beta)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2x(\alpha x^2 - 3\alpha\beta)}{(x^2 + \beta)^3}$ ,  $f''(\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha\sqrt{3}(1 - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha(1 - \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$

Αποκλείεται  $\alpha = 0$ , διότι τότε  $f(x) = 0$  και η  $f$  δεν έχει σημείο καμπής.

Από (1) έπεται ότι  $\alpha = 2$  άρα  $f''(x) = \frac{4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$ . Η  $f''$  έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση  $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

|       |           |               |     |               |           |               |   |        |
|-------|-----------|---------------|-----|---------------|-----------|---------------|---|--------|
| $x$   | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$   | $0$ | $\sqrt{3}$    | $+\infty$ |               |   |        |
| $f''$ |           | -             | 0   | +             | 0         | -             | 0 | +      |
| $f$   |           | $\cap$        |     | $\cup$        |           | $\cap$        |   | $\cup$ |
|       |           | Σημείο καμπής |     | Σημείο καμπής |           | Σημείο καμπής |   |        |

### Εφαρμογή 61 Εφαπτομένη

Ναδειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$  σε οποιοδήποτε σημείο της M, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση πλην του M

Αρκεί ναδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης μένει, διαρκώς, πάνω ή κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της, δηλαδή αρκεί ναδειχθεί ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω σε όλο το πεδίο ορισμού της που είναι το σύνολο  $\mathbb{R}$ . Πράγματι,  $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x$  και  $f''(x) = 12x^2 - 6x + 3$ . Είναι  $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  άρα, η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω.

### Εφαρμογή 62 Σύνθεση συναρτήσεων και κυρτότητα

Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Η συνάρτηση  $g$  είναι αύξουσα και στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα  $f(\Delta)$ . Δείξτε ότι η  $g \circ f$  στρέφει τα κοίλα άνω στο  $\Delta$ .

Αρκεί ναδειχθεί ότι  $(g \circ f)''(x) \geq 0$ . Είναι  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Είναι  $(g \circ f)''(x) = g''(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x)$

Ισχύει ότι  $(g \circ f)''(x) \geq 0$ , διότι:

- Η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω, άρα  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \Delta$
- Η  $g$  στρέφει τα κοίλα άνω, άρα  $g''(f(x)) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$
- Η  $g$  αύξουσα άρα  $g'(f(x)) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$
- Ισχύει ότι  $[f'(x)]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$

### Εφαρμογή 63 Συνευθειακά σημεία καμπής

Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  έχει τρία σημεία καμπής

που είναι συνευθειακά.

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  Η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Είναι

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2 + 1)^3} \quad \text{Η } f'' \text{ έχει το ίδιο πρόσημο με}$$

$$\text{το πολυώνυμο } P(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = (x-1)[x - (-2 - \sqrt{3})][x - (-2 + \sqrt{3})]$$

|       |           |               |               |               |           |               |   |        |
|-------|-----------|---------------|---------------|---------------|-----------|---------------|---|--------|
| $x$   | $-\infty$ | $-2-\sqrt{3}$ | $-2+\sqrt{3}$ | $1$           | $+\infty$ |               |   |        |
| $f''$ |           | -             | 0             | +             | 0         | -             | 0 | +      |
| $f$   |           | $\cap$        |               | $\cup$        |           | $\cap$        |   | $\cup$ |
|       |           | Σημείο καμπής |               | Σημείο καμπής |           | Σημείο καμπής |   |        |

$$\text{Είναι } f(-2 - \sqrt{3}) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \quad f(-2 + \sqrt{3}) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \quad \text{και} \quad f(1) = 1$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $\left(-2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\right), \left(-2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)$  έχει

συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{1}{4}$  και εξίσωση  $x - 4y + 3 = 0$  την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες του σημείου  $(1, 1)$

### Εφαρμογή 64 Εύρεση των σημείων καμπής

Εύρεση των σημείων καμπής της  $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)^2}$

$$\text{Είναι } f(x) = |x^2 - 1|, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)2x}{2|x^2 - 1|} = \begin{cases} 2x, & x > 1 \text{ ή } x < -1 \\ -2x, & -1 < x < 1 \end{cases}, \quad D(f') = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$\text{Είναι } f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 1 \text{ ή } x < -1 \\ -2, & -1 < x < 1 \end{cases}, \quad D(f'') = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad \text{Η } f'' \text{ αλλάζει πρόσημο στα}$$

σημεία  $x_0 = 1$  και  $x_0 = -1$  στα οποία και δεν ορίζεται. Η  $f$  είναι συνεχής στα σημεία



$x_0 = 1$  και  $x_0 = -1$ . Η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει εφαπτομένη στα σημεία αυτά. Άρα, η γραφική της παράσταση δεν έχει σημεία καμπής.

### Εφαρμογή 65 Εύρεση των σημείων καμπής

$$\text{Εύρεση των σημείων καμπής της } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x > 0 \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}, & x < 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}, & x > 0 \\ \frac{2}{9\sqrt[3]{(-x)^5}}, & x < 0 \end{cases}$$

- Είναι  $f''(x) < 0$  όταν  $x > 0$
- Είναι  $f''(x) > 0$  όταν  $x < 0$
- Είναι  $f'_s(0) = f'_a(0) = +\infty$ , άρα δεν υπάρχει το  $f'(0)$

Η  $f''$  αλλάζει πρόσημο στη θέση  $x_0 = 0$ . Η  $f$  είναι συνεχής στη θέση  $x_0 = 0$

Η γραφική παράσταση της  $f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $x_0 = 0$

Άρα, το  $(0, f(0)) = (0, 0)$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$

### Εφαρμογή 66 Εύρεση των σημείων καμπής

$$\text{Εύρεση των σημείων καμπής της } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\text{Είναι } D(f) = \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{και} \quad \begin{cases} f''(x) < 0, & \forall x \in (-\infty, 0) \\ f''(x) > 0, & \forall x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Άρα, η θέση  $x_0 = 0$  επειδή δεξιά και αριστερά της αλλάζει πρόσημο η  $f''$  «φαίνεται» να είναι σημείο καμπής. Όμως  $0 \notin D(f)$ , άρα δεν υπάρχει σημείο καμπής.

### Εφαρμογή 67 Εύρεση των σημείων καμπής

$$\text{Εύρεση των σημείων καμπής της } f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 12x^3 - 12x^2, \quad f''(x) = 36x \left( x - \frac{2}{3} \right)$$

Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  η  $x = \frac{2}{3}$  θέσεις πιθανών σημείων καμπής.

| $x$   | $-\infty$ | $0$           | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |   |
|-------|-----------|---------------|---------------|-----------|---|
| $f''$ | +         | 0             | -             | 0         | + |
| $f$   | ∪         | ∩             | ∪             |           |   |
|       |           | Σημείο καμπής | Σημείο καμπής |           |   |

- Όταν  $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ , άρα το  $(0, f(0)) = (0, 1)$  είναι σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

• Όταν  $x = \frac{2}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$ , άρα το  $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$  είναι σημείο καμπής με πλάγια εφαπτομένη.

## 6.5 Απροσδιόριστες μορφές

**1<sup>η</sup> μορφή**  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}$

Εμφανίζεται όταν έχω να υπολογίσω το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Τότε, αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**2<sup>η</sup> μορφή**  $(+\infty)-(+\infty)$  ή  $(-\infty)-(-\infty)$

Εμφανίζεται όταν έχω να υπολογίσω το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$  και είναι

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \\ \text{ή} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$$

Τότε κάνω τη διαφορά (των κλασμάτων) κλάσμα και καταλήγω **πάντα** στη μορφή  $\frac{0}{0}$

**3<sup>η</sup> μορφή**  $0 \cdot (\pm\infty)$  ή  $(\pm\infty) \cdot 0$

Εμφανίζεται όταν έχω να υπολογίσω το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$  με

$$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \text{ και } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ \text{ή} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases}$$

Τότε έχω  $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$  μορφή  $\frac{0}{0}$  ή  $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$  μορφή  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

**Παρατήρηση** Ποτέ δεν αντιστρέφω τη συνάρτηση  $y = \ln x$

**4<sup>η</sup> μορφή**  $0^0$  ή  $(+\infty)^0$  ή  $1^{\pm\infty}$

Εμφανίζεται όταν έχω να υπολογίσω το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$  όπου  $f(x) > 0$  και

$$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , προκύπτει η μορφή  $0^0$
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , προκύπτει η μορφή  $(+\infty)^0$

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ , προκύπτει η μορφή  $1^{\pm\infty}$

Όλες αυτές οι μορφές αντιμετωπίζονται ως εξής:

$$f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{\ln f(x)} \Rightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x)}$$

### 6.5.1 Παρατηρήσεις

**1** Οι συναρτήσεις  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $x^y$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$  είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους. Άρα,  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ , κ.ο.κ. Επίσης, κάθε αλγεβρική παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων, είναι συνεχής.

**2** Κάνοντας χρήση του θεωρήματος της σύγκλισης και σύνθεσης μπορώ να υπολογίσω τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [\ln f(x)]$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [\eta\mu f(x)]$ , κ.ο.κ.

**3.** Απροσδιόριστες μορφές είναι

- Για την πρόσθεση στο  $\mathbb{R}$  οι μορφές:  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $(-\infty) + (+\infty)$
- Για την αφαίρεση στο  $\mathbb{R}$  οι μορφές:  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (-\infty)$
- Για τον πολλαπλασιασμό στο  $\mathbb{R}$  οι μορφές:  $0(\pm\infty)$ ,  $(\pm\infty)0$
- Για τη διαίρεση στο  $\mathbb{R}$  οι μορφές:  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$
- Για τις δυνάμεις στο  $\mathbb{R}$  οι μορφές:  $(+\infty)^0$ ,  $0^0$ ,  $1^{\pm\infty}$

### Εφαρμογή 68 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left( \frac{+\infty}{+\infty} \right)$  Οι

συναρτήσεις  $\begin{cases} f, f(x) = x \\ g, g(x) = e^x \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  με  $\begin{cases} f', f'(x) = 1 \\ g', g'(x) = e^x \end{cases}$  άρα,

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

### Εφαρμογή 69 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$ , διότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  άρα,

απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left( \frac{+\infty}{+\infty} \right)$

Οι συναρτήσεις  $\begin{cases} f, f(x) = e^x \\ g, g(x) = x^2 + \ln x \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $(0, +\infty)$  με

$$\begin{cases} f', f'(x) = e^x \\ g', g'(x) = 2x + \frac{1}{x} \neq 0 \end{cases} \quad \text{Είναι} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x + \frac{1}{x}}$$

Αλλά  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Οι  $f', g'$  είναι παραγωγίσιμες στο  $(0, +\infty)$  με  $\begin{cases} f'', f''(x) = e^x \\ g'', g''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Είναι} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^x \cdot \frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$$

### Εφαρμογή 70 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

Οι συναρτήσεις  $\begin{cases} f, f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x \\ g, g(x) = x^2 \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  με

$$\begin{cases} f', f'(x) = \eta\mu x \\ g', g'(x) = 2x \neq 0, x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

$$\text{Είναι} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{2}$$

### Εφαρμογή 71 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

Οι συναρτήσεις  $\begin{cases} f, f(x) = e^x + e^{-x} - 2 \\ g, g(x) = 2x^2 \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  με

$$\begin{cases} f', f'(x) = e^x - e^{-x} \\ g', g'(x) = 4x \neq 0, x \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad \text{Είναι} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{4x}$$

αλλά  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x}) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (4x) = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

Οι συναρτήσεις  $f', g'$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$   $\begin{cases} f'', f''(x) = e^x + e^{-x} \\ g'', g''(x) = 4 \neq 0 \end{cases}$  άρα, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4} = \frac{e^0 + e^0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

### Εφαρμογή 72 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x^5}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^5) = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

Συνεπώς,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x^5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^2)'}{(1-x^5)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-5x^4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{5x^3} = \frac{2}{5}$

### Εφαρμογή 73 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x)}{2x}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu 3x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$  (\*) άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

Συνεπώς  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu(3x))'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sigma\upsilon\nu(3x)}{2} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu(3x) = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

(\*) **Επεξήγηση**  $\varphi, \varphi(x) = \eta\mu(3x)$ ,  $\phi = f \circ g$ ,  $\begin{cases} f, f(x) = \eta\mu x \\ g, g(x) = 3x = \psi \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\psi) = \lim_{\psi \rightarrow 0} \eta\mu\psi = 0$

### Εφαρμογή 74 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-\sigma\upsilon\nu x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = 0$  απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

άρα,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x} = \frac{0}{2} = 0$

### Εφαρμογή 75 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta\mu x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

Συνεπώς,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{3x^2}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sigma \nu \nu x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta \mu x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \nu \nu x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma \nu \nu x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{6x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 6x = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta \mu x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \nu x}{6} = \frac{1}{6}$$

### Εφαρμογή 76 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{7x^7 - 8x^5 - x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (7x^7 - 8x^5 - x + 2) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x^2 - x + 1) = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή

$$(?) \left(\frac{0}{0}\right) \text{ άρα, } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{7x^7 - 8x^5 - x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(7x^7 - 8x^5 - x + 2)'}{(x^3 - x^2 - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{49x^6 - 40x^4 - 1}{3x^2 - 2x - 1}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (49x^6 - 40x^4 - 1) = 8$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 2x - 1) = 0$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{7x^7 - 8x^5 - x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (49x^6 - 40x^4 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} = 8 \cdot (+\infty) = +\infty$$

**Επεξήγηση** Είναι  $3x^2 - 2x - 1 = 3 \cdot (x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$

| $x$             | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $3x^2 - 2x - 1$ |           | +              | 0 - | 0 +       |

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} = +\infty$$

### Εφαρμογή 77 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 7}{2x^3 - 1}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^2 + 7) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 1) = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)

$$\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \text{ Άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 7}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 - 5x^2 + 7)'}{(2x^3 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 10}{6x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 10) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 7}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 10}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x - 10)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Εφαρμογή 78 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{10} = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$  άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^{(10)}}{(x^{10})^{(10)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{10!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \frac{1}{10!} (+\infty) = +\infty$$

### Εφαρμογή 79 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x + 1}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x)] = +\infty$  (\*),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)

$$\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \text{ Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(1 + e^x)]'}{(x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $0 \cdot (+\infty)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^x]'}{(1 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

(\*) **Επεξήγηση**  $\varphi, \varphi(x) = \ln(1 + e^x)$ ,  $\phi = f \circ g$ ,  $\begin{cases} f, f(x) = \ln x \\ g, g(x) = 1 + e^x = \psi \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = +\infty, \lim_{\psi \rightarrow +\infty} f(\psi) = \lim_{\psi \rightarrow +\infty} \ln \psi = +\infty$$

### Εφαρμογή 80 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

### Εφαρμογή 81 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \eta \mu x - 1}{\ln(1 + x)}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \eta\mu x - 1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x)] = 0$  (\*) απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \eta\mu x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + \eta\mu x - 1)'}{[\ln(1+x)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1+x) \cdot (e^x + \sigma\upsilon\nu x) \right] = 2$$

(\*) **Επεξήγηση**  $\varphi, \varphi(x) = \ln(1+x)$ ,  $\phi = f \circ g$ ,  $\begin{cases} f, f(x) = \ln x \\ g, g(x) = 1+x = \psi \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1, \lim_{\psi \rightarrow 1} f(\psi) = \lim_{\psi \rightarrow 1} \ln \psi = 0$$

### Εφαρμογή 82 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} - 2x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta\mu x) = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\eta\mu x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x}) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x}) = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$  άρα,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x} = 2$

### Εφαρμογή 83 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^a \cdot \ln x)$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $0 \cdot (-\infty)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^a \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^a}}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^a} = +\infty$$

Άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$



$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^a \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^a}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a}{-a} = \frac{1}{-a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$$

#### Εφαρμογή 84 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> μορφής

Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\varepsilon\phi x \cdot \ln x)$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varepsilon\phi x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $0 \cdot (-\infty)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\varepsilon\phi x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sigma\phi x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\phi x = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\varepsilon\phi x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sigma\phi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\sigma\phi x)'} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu^2 x}{x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu^2 x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\varepsilon\phi x \cdot \ln x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\eta\mu^2 x)'}{x'} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = 0$$

#### Εφαρμογή 85 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> μορφής

Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varepsilon\phi \frac{x}{2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $(0^0)$

$$\text{Είναι } y = e^{\ln y} \text{ άρα } \varepsilon\phi \frac{x}{2} = e^{\ln \varepsilon\phi \frac{x}{2}} \Rightarrow \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)\right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2}\right)\right]} e^1 = e^* .$$

(\*) Επεξήγηση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(\varepsilon\phi \left(\frac{x}{2}\right)\right)\right] = -\infty \text{ και } \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(\varepsilon\phi \left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\ln \left(\varepsilon\phi \left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varepsilon\phi \left(\frac{x}{2}\right) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\varepsilon\phi \left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left[\ln \left(\varepsilon\phi \left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\eta\mu x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\varepsilon \phi \frac{x}{2}\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x'}{(\eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma \upsilon \nu x} = \frac{1}{1} = 1$$

**(\*) Επεξήγηση**

$$\varphi, \varphi(x) = \ln\left(\varepsilon \phi\left(\frac{x}{2}\right)\right), \varphi = f \circ g, \text{ όπου } f(x) = \ln x \text{ και } g(x) = \varepsilon \phi\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \text{ και } \lim_{\psi \rightarrow 0} f(\psi) = \lim_{\psi \rightarrow 0} \ln \psi = -\infty$$

### Εφαρμογή 86 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Υπολογίστε το } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $(1^{-\infty})$

$$\text{Είναι } y = e^{\ln y} \text{ άρα } \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]} = e^1 = e$$

**(\*) Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 1$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 0$  (\*) άρα απροσδιόριστη μορφή (?)  $(-\infty) \cdot 0$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

**(\*) Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 0$

Είναι  $\phi, \phi(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \phi = f \circ g \begin{cases} f(x) = \ln x \\ g(x) = 1 + \frac{1}{x} = \psi \end{cases}, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1,$

$$\lim_{\psi \rightarrow 1} f(\psi) = 0$$

### Εφαρμογή 87 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> μορφής

Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta\mu^2 x} = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $(+\infty) - (+\infty)$

Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2 \cdot \eta\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - \eta\mu^2 x)'}{(x^2 \cdot \eta\mu^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x \cdot \eta\mu^2 x + x^2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}.$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta\mu^2 x + x^2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = 0$

άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$  Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)'}{(x \cdot \eta\mu^2 x + x^2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x + 2 \cdot x \cdot \eta\mu 2x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sigma\upsilon\nu(2x)) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu^2 x + 2 \cdot x \cdot \eta\mu 2x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x) = 0$

άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$  Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu 2x)'}{(\eta\mu^2 x + 2 \cdot x \cdot \eta\mu 2x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x + 3 \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - x^2 \cdot \eta\mu 2x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu(2x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x + 3 \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - x^2 \cdot \eta\mu 2x) = 0$

άρα, απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left(\frac{0}{0}\right)$  Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu 2x)'}{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x + 3 \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - x^2 \cdot \eta\mu 2x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - 4 \cdot x \cdot \eta\mu 2x - x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu(2x) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (3 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - 4 \cdot x \cdot \eta\mu 2x - x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x) = 3$  άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

(\*) **Επεξήγηση** του γιατί ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta \mu^2 x} = +\infty$

Όταν  $x \rightarrow 0 \Rightarrow \eta \mu^2 x > 0$  από  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu^2 x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta \mu^2 x} = +\infty$

### Εφαρμογή 88 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

Βρείτε η τιμή του  $a \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f, f(x) = \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$  να έχει στο σημείο  $x_0 = 0$ , όριο πραγματικό αριθμό.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} - e^x - x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{ άρα, απροσδιόριστη μορφή (?) } \left( \frac{0}{0} \right)$$

Οι συναρτήσεις  $\begin{cases} g, g(x) = e^{ax} - e^x - x \\ h, h(x) = x^2 \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$

$$\text{Είναι } \begin{cases} g', g'(x) = ae^{ax} - e^x - 1 \\ h', h'(x) = 2x \neq 0, \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

$$\text{άρα, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - e^x - 1}{2x} = 1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (ae^{ax} - e^x - 1) = a - 2 \end{cases}$$

Όταν  $a - 2 \neq 0$  το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός άρα,  $a = 2$ , οπότε απροσδιόριστη μορφή (?)  $\left( \frac{0}{0} \right)$ . Οι  $g', h'$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  με

$$\begin{cases} g''(x) = 4e^{2x} - e^x \\ h''(x) = 2 \neq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x)}{h''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^x}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{άρα, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}$$

### Εφαρμογή 89 Απροσδιοριστία 1<sup>ης</sup> μορφής

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f, f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu^2(\pi x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο  $\mathbb{R}$

(β) Εξετάστε αν η  $f'$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$

(α)

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f(x) = \frac{\eta \mu^2(\pi x)}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot \pi \cdot (x-1) \cdot \eta \mu(\pi x) \cdot \sigma \upsilon \nu(\pi x) - \eta \mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}$$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της  $f$  στη θέση  $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu^2(\pi x)}{(x-1)^2} \text{ απροσδιόριστη μορφή (?) } \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\text{Συνεπώς } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\eta\mu^2(\pi x)]'}{[(x-1)^2]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cdot \eta\mu(2\pi x)}{2(x-1)} \text{ απροσδιόριστη μορφή (?) } \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\text{Συνεπώς, } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cdot [\eta\mu(2\pi x)]'}{2(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} (\pi^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi x)) = \pi^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi) = \pi^2$$

Άρα, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

$$f', f'(x) = \begin{cases} \frac{2 \cdot \pi \cdot (x-1) \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) - \eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ \pi^2 & , x = 1 \end{cases}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot \pi \cdot (x-1) \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) - \eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot \pi \cdot (x-1) \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)}{(x-1)^2} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu^2(\pi x)}{(x-1)^2} = 2\pi^2 - \pi^2 = \pi^2 = f'(1)$$

Άρα, η  $f'$  είναι συνεχής στη θέση  $x_0 = 1$

## 6.6 Ασύμπτωτες

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης  $y = f(x)$  είναι οι ευθείες που για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές των  $x, y$  προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη γραφική παράσταση της  $f$

Η  $x = a$  είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  όταν ένα τουλάχιστον από τα  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$

### Εφαρμογή 90 Οριζόντια ασύμπτωτη

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  Άρα, η  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f, f(x) = \frac{1}{x^2}$  Η  $y = \beta$  είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  όταν  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \beta$

### Εφαρμογή 91 Πλάγια ασύμπτωτη

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$  Άρα, η  $y = 2$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f, f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  σε μία περιοχή του  $+\infty$  Η  $y = \lambda x + \beta$  είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  όταν  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ . Η ασύμπτωτη είναι πλάγια όταν  $\lambda \neq 0$  και οριζόντια όταν  $\lambda = 0$

### Εφαρμογή 92 Πλάγια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Άρα, η } y = x \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της}$$

γραφικής παράστασης της  $f, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ . Η εύρεση της οριζόντιας ή πλάγιας ασύμπτωτης γίνεται με χρήση της πρότασης: Η  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ , αν και μόνο αν  $\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \lambda x]$ , όπου  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .

#### 6.6.1 Παρατηρήσεις

**1** Οι γραφικές παραστάσεις των ρητών συναρτήσεων έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες της μορφής  $x = a$ , όπου  $a$  είναι η ρίζα του παρονομαστή μόνο. Αν το  $a$  είναι ρίζα και του αριθμητή, για να είναι η ευθεία  $x = a$  κατακόρυφη ασύμπτωτη πρέπει το  $a$  να είναι ρίζα του παρονομαστή με μεγαλύτερη πολλαπλότητα από αυτήν του αριθμητή.

**2** Καθώς  $x \rightarrow +\infty$  (ή  $x \rightarrow -\infty$ ) δεν είναι δυνατό να υπάρχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης. Άρα, έχω το πολύ δύο ασύμπτωτες της μορφής  $y = \lambda x + \beta$ .

**3** Η γραφική παράσταση πολυωνυμικών συναρτήσεων με βαθμό  $\nu \geq 2$  δεν έχει οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη. Πράγματι, αν  $f, f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , όπου  $a_\nu \neq 0$  και  $\nu \geq 2$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_\nu x^\nu}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_\nu x^{\nu-1}) = a_\nu \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\nu-1} = \pm\infty$  άρα, η γραφική παράσταση της  $f, f(x) = ax + \beta$  που είναι η ευθεία  $y = ax + \beta$  έχει ασύμπτωτη την ίδια την ευθεία.

**4** Είναι δυνατόν η γραφική παράσταση συνάρτησης να τέμνει μία ασύμπτωτη της, σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**5** Για τη γραφική παράσταση των ρητών συναρτήσεων, ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη.
- Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά ένα μεγαλύτερος του βαθμού παρονομαστή, τότε υπάρχει μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη.
- Όταν ο αριθμητής έχει βαθμό τουλάχιστον κατά δυο μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, τότε δεν υπάρχουν ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

**6** Αν  $f(x) = \lambda x + \beta + g(x)$  με  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ , τότε η  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ , διότι  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ .

### Εφαρμογή 93 Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f, f(x) = \frac{x^5}{x^2 - 4}$   
 $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  άρα, οι  $x = \pm 2$  είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  άρα, δεν υπάρχουν οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .

#### Εφαρμογή 94 Οριζόντια ασύμπτωτη

Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f, f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x + 3}$

##### Εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $x^2 + 2x + 3 > 0$  άρα, δεν υπάρχει  $a \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  άρα, η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

##### Εύρεση της οριζόντιας ασύμπτωτης

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = -2$  άρα, η  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε μία περιοχή του  $+\infty$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = -2$  άρα, η  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε μία περιοχή του  $-\infty$

#### Εφαρμογή 95 Κατακόρυφη και οριζόντια ασύμπτωτη

Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f, f(x) = \frac{3|x| - 2x + 1}{x + 3}$

##### Εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -3} (x + 3) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3} [3|x| - 2x + 1] = 16 > 0$  άρα, είναι  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$  άρα, η  $x = -3$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ . Η γραφική παράσταση προσεγγίζει την  $x = -3$  από δεξιά και αριστερά.

##### Εύρεση της οριζόντιας – πλάγιας ασύμπτωτης

Είναι  $f, f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+3}, & x \geq 0 \\ \frac{1-5x}{x+3}, & x < 0 \text{ και } x \neq -3 \end{cases}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = 1$

Άρα, η  $y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε μία περιοχή του  $+\infty$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta = -5$

Άρα, η  $y = -5$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε μία περιοχή του  $-\infty$

### Εφαρμογή 96 Κατακόρυφη και πλάγια ασύμπτωτη

Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

#### Εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης

Είναι  $D(f) = (1, +\infty)$  Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της

$f$  είναι η  $x=1$  Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$  άρα, η  $x=1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη γραφικής παράστασης της  $f$

#### Εύρεση της οριζόντιας ασύμπτωτης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1 = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}}{x-1} = \frac{2}{1+1} = 1 = \beta$$

άρα, η  $y = x + 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$

### Εφαρμογή 97 Εύρεση παραμέτρων

Βρείτε τους  $a, \beta \in \mathbb{R}$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ ax + \beta - \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2} \right] = 0$$

$$\text{Αν } f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + \beta - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + \beta)] = 0$$

άρα, η  $y = ax + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  καθώς

$$x \rightarrow -\infty \text{ άρα, } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = 3$$

### 6.6.2 Παρατήρηση

Έστω συνάρτηση  $f, f(x)$ . Η  $y = ax + \beta$  ονομάζεται πλάγια ασύμπτωτη της  $f$  αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = ax + \beta$  ή ισοδύναμα  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax - \beta] = 0$ . Για την

$$\text{εύρεση των } a, \beta \text{ είναι } a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \beta$$

### 6.6.3 Μελέτη περιπτώσεων

- Όταν  $a = 0$  και  $\beta = 0$ , υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη που είναι ο άξονας  $xx'$
- Όταν  $a = 0$  και  $\beta \neq 0$ , υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη που είναι η  $y = \beta$
- Όταν  $a \neq 0$  και  $\beta = 0$ , υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη που είναι η  $y = ax$
- Όταν  $a \neq 0$  και  $\beta \neq 0$ , υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη που είναι η  $y = ax + \beta$



### Εφαρμογή 98 Πλάγια ασύμπτωτη

Βρείτε σε μία περιοχή του  $+\infty$  την ασύμπτωτη  $y = ax + \beta$  της γραφικής παράστασης της  $f, f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + 1}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ax + \beta \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = 0$  άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + 1} - ax - \beta \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x \left[ \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}} + \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{\beta}{x} \right] \right\} = (+\infty)(4 - a)$$

• Όταν  $4 - a > 0 \Leftrightarrow 4 > a$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = +\infty$

• Όταν  $4 - a < 0 \Leftrightarrow 4 < a$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = -\infty$

• Όταν  $4 - a = 0 \Leftrightarrow 4 = a$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = (+\infty)0(?)$  απροσδιόριστη

μορφή συνεπώς,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + 1} - 4x - \beta \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} - x \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right] - \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + 1} - 4x - \beta \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} - x \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right] - \beta$$

Χρησιμοποιώντας δύο φορές συζυγή παράσταση προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3} - x \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right] - \beta = 0 + 0 - \beta = -\beta$$

Άρα,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - \beta] = 0 \Leftrightarrow a = 4, \beta = 0$

### 6.7 Θεώρημα του Fermat

Αν μία συνάρτηση  $f$ : ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα  $\Delta$

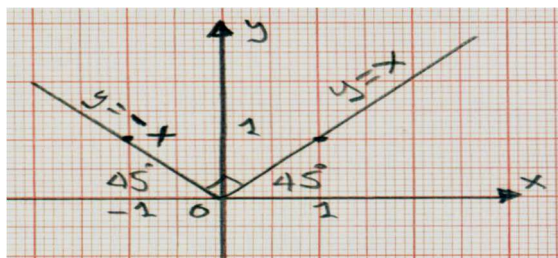
παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 \in \Delta$

είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$

τότε  $f'(x_0) = 0$

#### 6.7.1 Παρατηρήσεις

1 Μία συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Η  $f, f(x) = |x|$  δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 0$ , όμως παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση αυτή. Δηλαδή  $f(x) = |x| \geq 0 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$

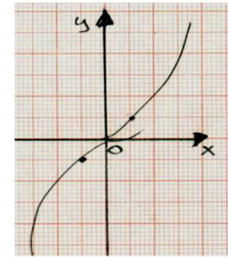


**2** Ο μηδενισμός της παραγώγου μίας συνάρτησης σε ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακρότατου σε αυτό το σημείο.

Η  $f, f(x) = x^3$  έχει παράγωγο συνάρτηση  $f'(x) = 3x^2$  που μηδενίζεται στη θέση  $x_0 = 0$ . Πράγματι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Όμως στη θέση αυτή η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατο.

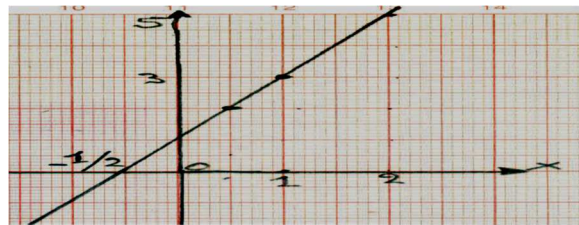
- Δεν παρουσιάζει μέγιστο διότι:  $\forall x > 0$  είναι  $f(x) > 0$
- Δεν παρουσιάζει ελάχιστο διότι:  $\forall x < 0$  είναι  $f(x) < 0$



**3** Η υπόθεση ότι το  $x_0$  είναι σημείο ανοικτού διαστήματος είναι αναγκαία.

Έστω η  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 2x + 1$ . Στη θέση  $x_0 = 1$  η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο διότι  $\forall x \in [0, 1]$  είναι  $f(x) = 2x + 1 \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3 = f(1)$

Όμως η  $f'$  με τύπο  $f'(x) = 2$ , στη θέση  $x_0 = 1$  δεν μηδενίζεται, διότι  $f'(1) = 2 \neq 0$



### Εφαρμογή 99

Βρείτε τα πιθανά ακρότατα της  $f, f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{2 \cdot e^x}$ , στο  $(0, 2\pi)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x} \right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Άρα, τα  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  τα πιθανά ακρότατα.

**Σημείωση** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 2\pi)$  ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

### Εφαρμογή 100

Ισχύει το θεώρημα Fermat για την  $f, f(x) = \eta\mu x$  με  $D(f) = [0, 2\pi]$ ;

- Η  $f$  είναι ορισμένη στο  $(0, 2\pi)$
- Η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο για  $x_0 = \frac{\pi}{2}, x_0 = \frac{3\pi}{2}$
- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στις θέσεις  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

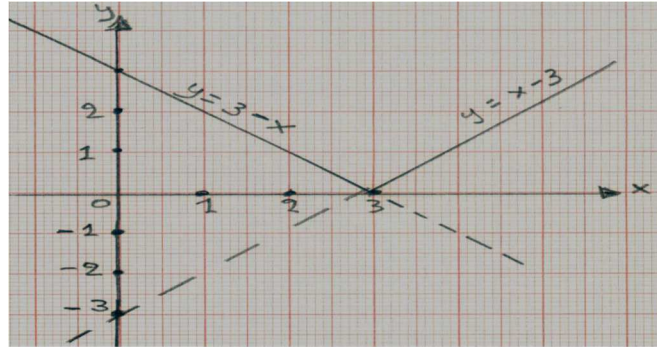
Είναι  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  ολικό μέγιστο και  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  ολικό ελάχιστο.

Πράγματι,  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$  ή  $x = \frac{3\pi}{2}$

ή διαφορετικά  $f'(x) = \sin x$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

### Εφαρμογή 101

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ 3-x, & x < 3 \end{cases}$



Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση  $x_0 = 3$ , το  $f(3)$ , αλλά δεν ισχύει το θεώρημα Fermat. Γιατί;

- $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ , ανοικτό διάστημα
- Η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στη θέση  $x_0 = 3$ , το  $f(x_0) = 0 < f(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- Η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 3$  Πράγματι

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_s(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1 \\ f'_a(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - x}{x - 3} = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f'_s(3) = 1 \neq -1 = f'_a(3) \text{ άρα, δεν υπάρχει}$$

το  $f'(3)$

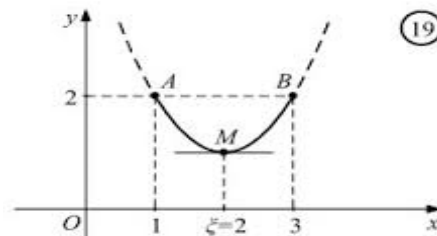
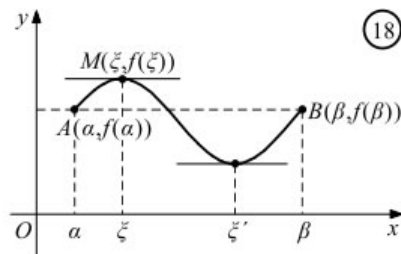
### 6.8 Θεώρημα του Rolle

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι: ορισμένη και συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$

παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$

$$f(\alpha) = f(\beta)$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$

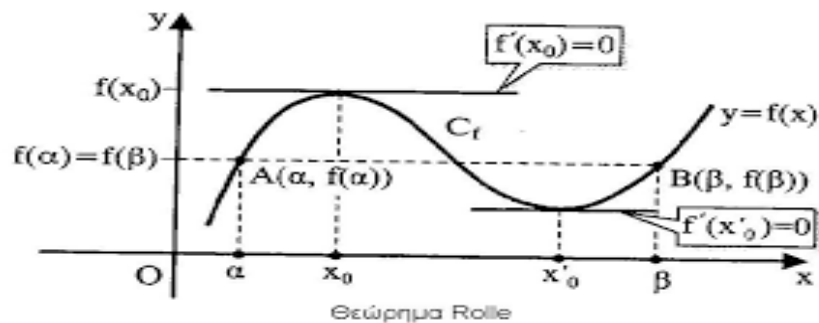


#### 6.8.1 Πρόρισμα

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι: ορισμένη και συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$

παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$

τα  $a, \beta$  είναι ρίζες της  $f(x)$ ,  
τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (a, \beta)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$



### 6.8.2 Παρατηρήσεις

**1** Για την εφαρμογή του θεωρήματος Rolle είναι δυνατό να μην έχει η συνάρτηση  $f$  παράγωγο στα σημεία  $a, \beta$ . Πράγματι, έστω  $f, f(x) = \sqrt{1-x^2}$  τότε:

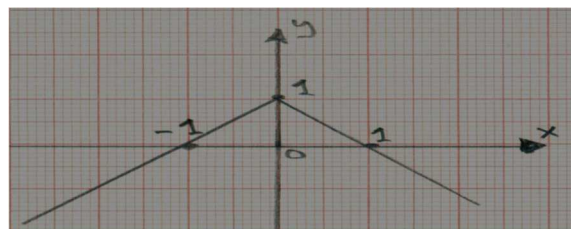
- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$
- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$
- $f(1) = f(-1) = 0$

Συνεπώς, από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (-1, 1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$ . Πράγματι,  $f'(0) = 0$ , δηλαδή  $\xi = 0$ . Και ενώ ισχύουν αυτά, δεν υπάρχουν τα  $f'(1), f'(-1)$ .

**2** Η ύπαρξη της παραγώγου της συνάρτησης στο  $(a, \beta)$  είναι αναγκαία για την εφαρμογή του θεωρήματος. Η  $f, f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1-x, & x \geq 0 \\ 1+x, & x < 0 \end{cases}$ , είναι:

- συνεχής στο  $[-1, 1]$
- $f(1) = f(-1) = 0$
- $f'(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ , δεν υπάρχει το  $f'(0)$

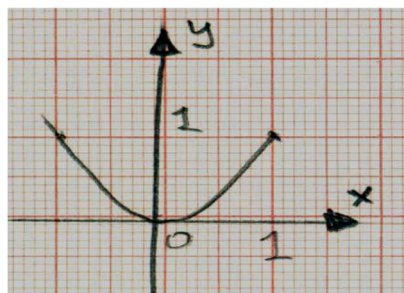
Άρα, η  $f$  όχι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  άρα  $\nexists \xi \in (-1, 1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$  και αυτό διότι δεν υπάρχει η παράγωγος της  $f \ \forall x \in (-1, 1)$



**3** Η υπόθεση  $f(a) = f(\beta)$  για το θεώρημα Rolle είναι αναγκαία. Πράγματι αν  $f, f(x) = x^2$  με  $[\alpha, \beta] = [0, 1]$  είναι:

- συνεχής στο  $[0, 1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  ως πολυωνυμική
- αλλά  $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$ , οπότε  $\nexists \xi \in (0, 1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$

Πράγματι,  $f'(x) = 2x$ ,  $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \notin (0, 1)$



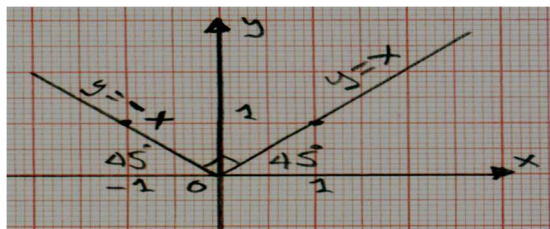
**4** Η υπόθεση της συνέχειας της συνάρτησης στο  $[\alpha, \beta]$  είναι αναγκαία για το θεώρημα Rolle. Πράγματι, έστω  $f, f(x) = \frac{1}{x} + 1$ ,  $D(f) = \mathbb{R}^*$

- $f(0) = f(1) = 2$
- $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$ ,  $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
- $f$  ασυνεχής στη θέση  $x_0 = 0$ . Άρα  $\nexists \xi \in (0,1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$

Πράγματι,  $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\xi^2} = 0$  αδύνατη

### Εφαρμογή 102

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = |x|$ . Είναι συνεχής στο  $[-2, 2]$ ,  $f(2) = f(-2)$ , δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 0$ , άρα ούτε στο  $(-2, 2)$  οπότε δεν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα Rolle.



### Εφαρμογή 103

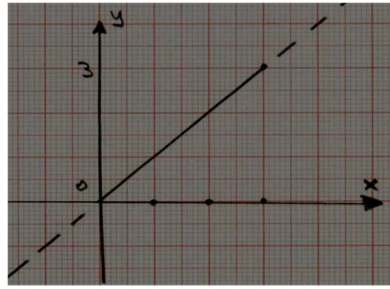
Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = \frac{2}{3}x$ . Είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  αλλά  $f(\alpha) \neq f(\beta)$  άρα, δεν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα Rolle

### Εφαρμογή 104

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ x, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$

Είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 3)$  και ισχύει ότι  $f(0) = f(3) = 3$

Δεν είναι συνεχής στο  $[0, 3]$  διότι δεν είναι συνεχής στη θέση  $x_0 = 0$  άρα, δεν εφαρμόζεται για αυτή το θεώρημα Rolle.



### Εφαρμογή 105

Έστω συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$ . Ισχύει το θεώρημα Rolle στο  $[-1, 1]$ ;

Αν ναι να υπολογίσετε την τιμή του  $\xi$

$$\left. \begin{aligned} \forall x < 0 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ \forall x > 0 \Rightarrow f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}^*$$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της  $f$  στη θέση  $x_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0) = 0$$

Άρα, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνεπώς και συνεχής στο  $\mathbb{R}$

Έτσι, η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  και  $f(1) = f(-1) = 1$

Από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (-1, 1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$

$$\text{Είναι } f', f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}, \text{ άρα } \xi = 0$$

### Εφαρμογή 106

Δείξτε με το θεώρημα Rolle ότι η  $6x^5 - 4x + 1 = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0, 1)$ . Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = 6x^5 - 4x + 1$ . Θεωρώ συνάρτηση  $h, h(x) = x^6 - 2x^2 + x$ , δηλαδή  $h'(x) = f(x)$ . Η  $h$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  άρα και στο  $(0, 1)$

Η  $h$  ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  άρα και στο  $[0, 1]$

Είναι  $h(0) = h(1) = 1$  άρα, από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0, 1)$  έτσι ώστε  $h'(\xi) = 0$  δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0, 1)$  έτσι ώστε  $f(\xi) = 0$  άρα, η  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον μία λύση στο  $(0, 1)$

### Εφαρμογή 107

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = (2x - 1)(x + 3)(x - 5)(x - 7)$  με  $D(f) = \mathbb{R}$ . Βρείτε πόσες πραγματικές ρίζες έχει η  $f'(x) = 0$ . Οι ρίζες της  $f(x) = 0$  είναι  $-3, \frac{1}{2}, 5, 7$ . Η  $f'(x)$  είναι πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού άρα, έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $\mathbb{R}$



- Η  $f$  στο  $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$  ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα  $\exists \xi_1 \in \left(-3, \frac{1}{2}\right)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_1) = 0$
  - Η  $f$  στο  $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$  ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα  $\exists \xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 5\right)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_2) = 0$
  - Η  $f$  στο  $[5, 7]$  ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle, άρα  $\exists \xi_3 \in (5, 7)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_3) = 0$
- Συνεπώς, η  $f'(x) = 0$  έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.

### Εφαρμογή 108

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = x^5 + 4x^3 + 5x + 2012$ . Δείξτε ότι η  $f(x) = 0$  έχει μία πραγματική και τέσσερις μιγαδικές ρίζες.

Το πολυώνυμο είναι περιττού βαθμού, άρα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, έστω την  $\rho$ . Έστω ότι  $\rho_1 \neq \rho$  είναι μία άλλη πραγματική ρίζα του πολυώνυμου.

Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Αν  $\rho_1 < \rho$ , η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο  $[\rho_1, \rho]$ , οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\rho_1, \rho)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$ . Άτοπο, διότι  $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Κατέληξα σε άτοπο διότι δέχθηκα την ύπαρξη και 2<sup>ης</sup> πραγματικής ρίζας της  $f(x) = 0$ , άρα αυτή έχει μία μόνο πραγματική ρίζα, οπότε οι άλλες τέσσερις είναι μιγαδικές.

### Θεώρημα

Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού, έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

### Εφαρμογή 109

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = x^5$  με  $D(f) = \mathbb{R}$ . Ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$  στο  $[-1, 1]$ ; Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Οπότε η  $f$  είναι:

- συνεχής στο  $[-1, 1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$

$$\bullet f(-1) = -1 \neq 1 = f(1)$$

Άρα, δεν ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$  στο  $[-1, 1]$

### Εφαρμογή 110

Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f, f(x) = (1-x)\sin x - \eta\mu x$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0, 1)$

- $f$  συνεχής στο  $[0, 1]$

- $\left. \begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(1)=-\eta\mu 1<0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1)<0$  άρα, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $f$  στο  $(0,1)$

### Εφαρμογή 111

Έστω συνάρτηση  $f, f(x)=1+x^\mu(1-x)^\nu$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ . Χωρίς να υπολογισθεί η  $f'(x)$ , δείξτε ότι η  $f'(x)=0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0,1)$

Η  $f$  ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Από θεώρημα Rolle:

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$
- $f(0)=1=f(1)$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi)=0$

Άρα, η  $f'(x)=0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0,1)$

### Εφαρμογή 112

Έστω συνάρτηση  $f, f(x)=\frac{c_0}{1}x+\frac{c_1}{2}x^2+\dots+\frac{c_\nu}{\nu+1}x^{\nu+1}$ , όπου  $c_0, c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{R}$  με  $\frac{c_0}{1}+\frac{c_1}{2}+\dots+\frac{c_\nu}{\nu+1}=0$ . Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi)=0$ . Η  $f$  ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Από

θεώρημα Rolle: • Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$

- $f(0)=0=f(1)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  έτσι ώστε  $f'(\xi)=0$

### Εφαρμογή 113

Δείξτε ότι η  $a_0x^\nu+a_1x^{\nu-1}+\dots+a_{\nu-1}x+a_\nu=0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$  όταν  $\frac{a_0}{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu}+\dots+\frac{a_{\nu-1}}{2}+a_\nu=0$

Αν  $f, f(x)=a_0x^\nu+a_1x^{\nu-1}+\dots+a_{\nu-1}x+a_\nu$  τότε η συνάρτηση η οποία έχει την

$f$  σαν παράγωγο είναι η  $h, h(x)=\frac{a_0}{\nu+1}x^{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu}x^\nu+\dots+\frac{a_{\nu-1}}{2}x^2+a_\nu x$

Η  $h$ , ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$

Εφαρμόζω το θεώρημα του Rolle.

- Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$
- $h(0)=0=h(1)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  έτσι ώστε  $h'(\xi)=0$

Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  έτσι ώστε  $f(\xi)=0$

Άρα, η  $f$  έχει στο  $(0,1)$  τουλάχιστον μία ρίζα



### Μέθοδος εργασίας 1

Αν θέλω να δείξω ότι η  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ , θα προσδιορίζω μία συνάρτηση  $h, h(x)$  ώστε  $h'(x) = f(x)$  και για την  $h$  θα διαπιστώνω ότι στο  $[\alpha, \beta]$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε θα υπάρχει στο  $(\alpha, \beta)$  μία τουλάχιστον ρίζα για την  $h'(x)$ , δηλαδή για την  $f(x)$

### Μέθοδος εργασίας 2

Υπάρχουν δύο κατηγορίες ασκήσεων στο θεώρημα Rolle.

- Ναδειχθεί αν για μία συγκεκριμένη συνάρτηση τηρούνται, σε κάποιο διάστημα, οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ή αν ισχύει το θεώρημα.
- Ναδειχθεί ότι κάποιο πολώνυμο ή πολωνυμική εξίσωση ή συνάρτηση ή το παράγωγο πολώνυμο ή η παράγωγος εξίσωση ή η παράγωγος συνάρτηση έχει ακριβώς μία ή το πολύ μία ή το πολύ  $k$  ή τουλάχιστον  $k$  ή τουλάχιστον μία ρίζα.

### Μέθοδος εργασίας 3

Αν ζητείται να αποδειχθεί ότι μία εξίσωση έχει  $k$  το πολύ ρίζες, θα το αποδεικνύω ως εξής: Θα υποθέτω ότι έχει  $k+1$  το πλήθος ρίζες και θα καταλήγω σε άτοπο. Θα γίνεται χρήση του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ρίζες.

### Εφαρμογή 114

Δείξτε ότι  $\forall a \in \mathbb{R}$  η  $x^5 + x^3 + 2x + a = 0$  έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = x^5 + x^3 + 2x + a$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Είναι  $f', f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$

Έστω ότι η  $f$  έχει δυο πραγματικές ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  με  $\rho_1 < \rho_2$

Η  $f$  στο  $[\rho_1, \rho_2]$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$

Άτοπο, διότι είναι  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### Εφαρμογή 115

Δείξτε ότι η  $x^3 - 3x + a = 0$  δεν έχει για κανένα  $a \in \mathbb{R}$  δυο ρίζες στο  $(0, 1)$

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = x^3 - 3x + a$  με  $D(f) = \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Έστω ότι  $\exists a \in \mathbb{R}: 0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$  και  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ . Η  $f$  στο  $[\rho_1, \rho_2]$  ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$ . Άτοπο, διότι  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$  και  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

**Σχόλιο**  $\pm 1 \notin (\rho_1, \rho_2) \subset (0, 1)$

### Εφαρμογή 116

Έστω  $\rho \in \mathbb{R}$  απλή ρίζα ενός πολωνύμου  $f(x)$ . Έστω  $\rho \in \mathbb{R}$  απλή ρίζα της παραγώγου  $f'(x)$ . Τότε το  $(x - \rho)^2$  είναι παράγοντας του  $f(x)$

Εξ' υποθέσεως είναι  $f(x) = (x - \rho)P(x)$  και  $f'(x) = (x - \rho)Q(x)$

Επίσης

$$f'(x) = [(x - \rho) \cdot P(x)]' = (x - \rho)' \cdot P(x) + (x - \rho) \cdot P'(x) = P(x) + (x - \rho) \cdot P'(x)$$

$$\text{Συνεπώς, } P(x) = (x - \rho) \cdot Q(x) - (x - \rho) \cdot P'(x) = (x - \rho) \cdot [Q(x) - P'(x)]$$

Από την  $f(x) = (x - \rho)P(x)$  έπεται ότι:

$$f(x) = (x - \rho) \cdot (x - \rho) \cdot [Q(x) - P'(x)] = (x - \rho)^2 \cdot [Q(x) - P'(x)]$$

### Εφαρμογή 117

Αν  $\rho$  είναι ρίζα ενός πολωνύμου  $f(x)$  με πολλαπλότητα  $k \in \mathbb{N}$ , τότε και η παράγωγος του  $f(x)$  η  $f'(x)$ , έχει ρίζα  $\rho$  με πολλαπλότητα  $k - 1$

Εξ' υποθέσεως είναι  $f(x) = (x - \rho)^k P(x)$  άρα,

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x - \rho)^k]' \cdot P(x) + (x - \rho)^k \cdot P'(x) = k \cdot (x - \rho)^{k-1} P(x) + (x - \rho)^k \cdot P'(x) = \\ &= (x - \rho)^{k-1} \cdot [k \cdot P(x) + (x - \rho) \cdot P'(x)] = (x - \rho)^{k-1} \cdot Q(x) \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 118

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = x^{2\nu} + ax + \beta$ , όπου  $a, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  και  $D(f) = \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι δεν έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες.

Η  $f$  ως πολωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$

Έστω ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$  με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

- Στο  $[\rho_1, \rho_2]$  ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$ , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_1) = 0$  (1)

- Στο  $[\rho_2, \rho_3]$  ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$ , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_2) = 0$  (2)

$$\text{Αλλά } f'(x) = 2\nu x^{2\nu-1} + a \text{ και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2\nu-1} = \frac{-a}{2\nu} \Leftrightarrow x = \sqrt[2\nu-1]{\frac{-a}{2\nu}} \quad \text{δηλαδή η}$$

εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα. Από τις (1), (2) καταλήγω σε άτοπο, διότι υπέθεσα ότι η  $f(x) = 0$  έχει τρεις ρίζες.

### Εφαρμογή 119

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = (x^2 - 1)e^x$ . Δείξτε με χρήση του θεωρήματος Rolle ότι υπάρχει  $x_0 \in (-1, 1)$  έτσι ώστε  $f'(x_0) = 0$ . Να βρεθεί το  $x_0$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα, είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$
- Είναι  $f(-1) = 0 = f(1)$

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (-1, 1)$  έτσι ώστε

$$f'(x_0) = 0. \text{ Αλλά } f'(x) = (x^2 - 1 + 2x)e^x,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + 2x = 0 \Leftrightarrow x_0 = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} \in (-1, 1) \\ -1 - \sqrt{2} \notin (-1, 1) \end{cases}$$

### Εφαρμογή 120

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = 2x^3 - 3x - 1$ . Δείξτε ότι η  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα  $\rho \in \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$ . Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Από το θεώρημα Bolzano:

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[ \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
- $\left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1 > 0 \\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - 1 < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$



Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\rho \in \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  έτσι ώστε  $f(\rho) = 0$

Έστω ότι υπάρχει  $\rho_1 \in \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  με  $\rho_1 < \rho$  έτσι ώστε  $f(\rho_1) = 0$

Τότε από το θεώρημα Rolle:

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\rho_1, \rho]$
- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\rho_1, \rho)$
- $f(\rho_1) = 0 = f(\rho)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\rho_1, \rho)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$  άτοπο, διότι

$$f'(x) = 6x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Είναι } (\rho_1, \rho) \subset \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

### Εφαρμογή 121

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = x^2 - x \cdot \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x$ . Δείξτε ότι έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Έστω ότι η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ . Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

• Στο  $[\rho_1, \rho_2]$  ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$ , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_1) = 0$ . (1)

• Στο  $[\rho_2, \rho_3]$  ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$ , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_2) = 0$ . (2)

Όμως  $f'(x) = 2x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x = x \cdot (2 - \sigma\upsilon\nu x)$  και  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x = 2 \text{ Αδύνατο} \end{cases}$

Δηλαδή, η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μοναδική λύση. Άρα, από τα (1), (2) προκύπτει άτοπο.

### Εφαρμογή 122

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \in [-2, 0) \\ \gamma x^2 + 3x + 3, & x \in [0, 2] \end{cases}$ . Βρείτε τους  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$  στο  $[-2, 2]$ .

Προκειμένου να ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση  $f$  στο  $[-2, 2]$ , πρέπει:

• Η  $f$  να είναι συνεχής στο  $[-2, 2]$  άρα συνεχής και στη θέση  $x_0 = 0$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ . Επειδή  $f(0) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \beta$  είναι  $\beta = 3$

• Η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $(-2, 2)$  άρα και στη θέση  $x_0 = 0$ , δηλαδή:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma x^2 + 3x + \beta - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma x + 3) = 3 = f'_\delta(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + ax + \beta - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a = f'_\alpha(0) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} f(2) = 4\gamma + 6 + 3 = 4\gamma + 9 \\ f(-2) = 4 - 6 + 3 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(2) = f(-2) \Leftrightarrow 4\gamma + 9 = 1 \Leftrightarrow \gamma = -2$$

### Εφαρμογή 123

Αν η  $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x = 0$  έχει μία θετική ρίζα  $x_0$ , τότε η  $\nu a_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)a_{\nu-1} x^{\nu-2} + \dots + a_1 = 0$  έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα μικρότερη του  $x_0$

Θεωρώ συνάρτηση  $f, f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x$ . Είναι  $f(0) = f(x_0) = 0$

Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $\mathbb{R}$

• Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, x_0]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, x_0)$

•  $f(0) = f(x_0)$

Άρα, από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0, x_0)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$ . Δηλαδή το  $\xi$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = 0$  και είναι  $\xi < x_0$ , διότι  $\xi \in (0, x_0)$

**Εφαρμογή 124**

Να υπολογισθούν οι  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle στο  $[-1, 1]$

$$\text{για την συνάρτηση } f, f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \gamma, & x \in [-1, 0] \\ ax^2 + 4x + 4, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

• Η  $f$  είναι ορισμένη στο  $[-1, 1]$  και ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

**Εξετάζω τη συνέχεια της  $f$  στη θέση  $x_0 = -1$**

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + \beta x + \gamma) = 1 - \beta + \gamma = f(-1)$$

**Εξετάζω τη συνέχεια της  $f$  στη θέση  $x_0 = 1$**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 4x + 4) = a + 8 = f(1)$$

**Εξετάζω τη συνέχεια της  $f$  στη θέση  $x_0 = 0$**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \beta x + \gamma) = \gamma, \quad f(0) = \gamma, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + 4x + 4) = 4$$

Άρα  $\gamma = 4$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall x \in (-1, 0) &\Rightarrow f(x) = x^2 + \beta x + \gamma \Rightarrow f'(x) = 2x + \beta \\ \forall x \in (0, 1) &\Rightarrow f(x) = ax^2 + 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 4 \end{aligned}$$

**Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της  $f$  στη θέση  $x_0 = 0$**

$$\left. \begin{aligned} f'_a(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \beta x + \cancel{\gamma} - \cancel{\gamma}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + \beta) = \beta \\ f'_s(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + 4x + \cancel{4} - \cancel{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + 4) = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 4$$

$$\bullet \quad \left. \begin{aligned} f(-1) &= 1 - \beta + \gamma = 1 - \cancel{4} + \cancel{4} = 1 \\ f(1) &= a + 8 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a + 8 = 1 \Leftrightarrow a = -7$$

**Εφαρμογή 125**

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = (x - \alpha + 1)(x - \alpha)(x - \alpha - 1)$ . Δείξτε ότι η

$$f'(x) = 0 \text{ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες. Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \alpha - 1 \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{cases}$$

Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$  οπότε:

- Η  $f$  είναι συνεχής στα  $[a-1, a]$ ,  $[a, a+1]$
- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στα  $(a-1, a)$ ,  $(a, a+1)$
- $f(\alpha-1) = f(\alpha) = f(\alpha+1) = 0$

Από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι στο διάστημα:

- $(a-1, a)$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_1$ , έτσι ώστε  $f'(x_1) = 0$  (1)

- $(a, a+1)$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_2$ , έτσι ώστε  $f'(x_2) = 0$  (2)

Αλλά  $f'(x) = 3x^2 - 6ax + (2a^2 - 1)$ , τριώνυμο, άρα έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες. Από (1), (2) έπεται ότι η  $f'(x) = 0$  έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες  $x_1 \in (a-1, a)$ ,  $x_2 \in (a, a+1)$ , οπότε είναι διακεκριμένες.

### Εφαρμογή 126

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ , όπου  $\alpha < \beta < \gamma \in \mathbb{R}$ .

Δείξτε ότι η  $f'(x) = 0$  έχει δυο ακριβώς πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.

Η  $f$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $\mathbb{R}$

Οπότε: • Η  $f$  είναι συνεχής στα  $[\alpha, \beta], [\beta, \gamma]$

- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στα  $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma)$

- Είναι  $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$

- Στο  $[\alpha, \beta]$ , από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_1 \in (\alpha, \beta)$ :  $f'(x_1) = 0$

- Στο  $[\beta, \gamma]$ , από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_2 \in (\beta, \gamma)$ :  $f'(x_2) = 0$

Δηλαδή η  $f', f'(x) = 3x^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$ , που είναι τριώνυμο, έχει τουλάχιστον δυο ρίζες  $x_1 \in (\alpha, \beta)$ ,  $x_2 \in (\beta, \gamma)$ , προφανώς διακεκριμένες. Όμως η  $f'(x) = 0$  ως δευτεροβάθμια εξίσωση έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες. Άρα, αυτές θα είναι οι  $x_1, x_2$

### Εφαρμογή 127

Εξετάστε αν ισχύει το θεώρημα Rolle στο  $[-4, 0]$  για την  $f, f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$

Είναι  $f = (h \circ g) \circ \phi$ , όπου  $h, h(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $D(h) = \mathbb{R}$

$$g, g(x) = x^2, \quad D(g) = \mathbb{R}$$

$$\phi, \phi(x) = x + 2, \quad D(\phi) = \mathbb{R}$$

$$D(h \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \quad D(f) = D((h \circ g) \circ \phi) = \{x \in \mathbb{R} : (x+2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Η  $f$ , ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της δηλαδή το  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $[-4, 0]$ . Επίσης  $f(-4) = f(0) = \sqrt[3]{4}$

Όμως η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(-4, 0)$  διότι δεν είναι παραγωγίσιμη

στη θέση  $-2$  καθόσον  $f', f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

Άρα, δεν ισχύει το θεώρημα Rolle για την  $f$  στο  $[-4, 0]$

### Εφαρμογή 128

Αποδείξτε ότι αν μία πολυωνυμική συνάρτηση  $f$  μηδενίζεται για  $k$  διαφορετικές τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η  $f'$  μηδενίζεται για  $(k-1)$  τουλάχιστον τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ .

Έστω  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{k-1}, \rho_k \in \mathbb{R}$  ρίζες της  $f$ , διαφορετικές ανά δύο μεταξύ τους, με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots < \rho_{k-1} < \rho_k$ . Η  $f$  ως πολυωνυμική έχει  $D(f) = \mathbb{R}$ . Είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Θεωρώ τα διαστήματα  $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], \dots, [\rho_{k-1}, \rho_k]$ . Από το θεώρημα του Rolle για την  $f$  προκύπτει ότι:

- Στο  $[\rho_1, \rho_2]$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_1) = 0$
  - Στο  $[\rho_2, \rho_3]$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_2) = 0$
  - .....
  - Στο  $[\rho_{k-1}, \rho_k]$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_{k-1} \in (\rho_{k-1}, \rho_k)$  έτσι ώστε  $f'(\xi_{k-1}) = 0$
- Άρα, η  $f'$  έχει τουλάχιστον  $k-1$  πραγματικές ρίζες, διακεκριμένες.

### Εφαρμογή 129

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = \log(\eta\mu x)$  με  $D(f) = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ . Δείξτε ότι η  $f'(x) = 0$  έχει μία λύση στο  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  η οποία και να βρεθεί.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \eta\mu x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \pi\} = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο  $D(f)$  άρα:

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  και παραγωγίσιμη στο  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \log \frac{1}{2}$  άρα, από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = 0$

$$\text{Είναι } f'(x) = \sigma\phi x, \quad f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\phi\xi = 0 \Leftrightarrow \sigma\nu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Αλλά } \xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \xi < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k + \frac{1}{2} < \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$1 < 6k + 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < 6k < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{1}{3} \stackrel{k \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k = 0. \quad \text{Άρα, } \xi = k\pi + \frac{\pi}{2} \stackrel{k=0}{=} \frac{\pi}{2}. \quad \text{Δηλαδή,}$$

το  $\xi$  έχει μια μόνο τιμή την  $\frac{\pi}{2}$ , διότι και το  $k$  έχει μία μόνο τιμή, την  $k = 0$

### 6.9 Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι:

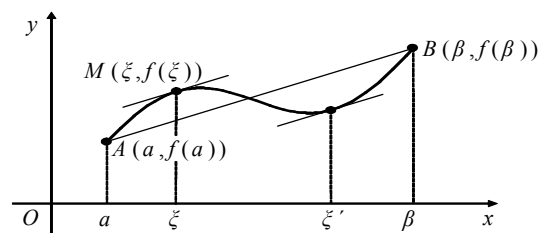
- Συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$

- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  έτσι ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

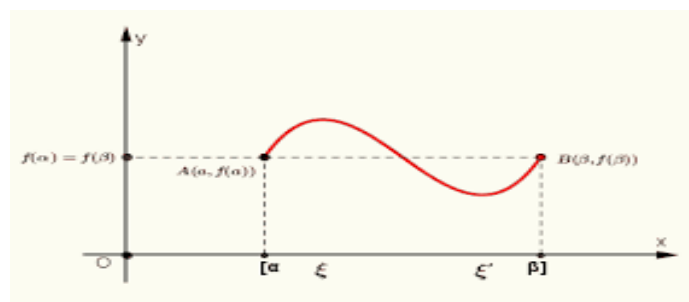
### 6.9.1 Γεωμετρική ερμηνεία

Υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε η εφαπτομένη του διαγράμματος της  $f$ , στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη προς το τμήμα  $AB$ , με  $A(\alpha, f(\alpha))$ ,  $B(\beta, f(\beta))$ , οπότε η κλίση της εφαπτομένης είναι  $f'(\xi)$  και του  $AB$  είναι  $\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ , με  $\lambda_{AB} = f'(\xi)$



### 6.9.2 Παρατηρήσεις

**1** Από το θεώρημα μέσης τιμής, αν  $f(\beta) = f(\alpha)$ , υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f'(\xi) = 0$  δηλαδή προκύπτει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle. Άρα, το θεώρημα Rolle είναι μερική περίπτωση του θεωρήματος μέσης τιμής.



**2** Μεταξύ δύο ριζών μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της παραγώγου συνάρτησης.

#### Απόδειξη

Έστω  $\rho_1, \rho_2$  δυο ρίζες της παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$ . Ισχύει ότι:

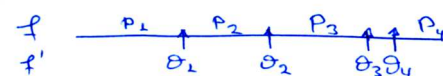
- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\rho_1, \rho_2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\rho_1, \rho_2)$
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$  ώστε  $f'(\xi) = 0$

**3** Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της παραγώγου συνάρτησης, υπάρχει το πολύ μία ρίζα της αρχικής συνάρτησης.

#### Απόδειξη

Έστω  $\theta_1, \theta_2$  δυο διαδοχικές ρίζες της παραγώγου συνάρτησης. Έστω  $\rho_1, \rho_2$  δυο ρίζες της αρχικής συνάρτησης. Αν  $\rho_1, \rho_2 \in (\theta_1, \theta_2)$  έπεται ότι υπάρχει  $\theta_3 \in (\rho_1, \rho_2)$





όπου  $\theta_3$  ρίζα της παραγώγου συνάρτησης. Άρα, οι ρίζες  $\theta_1, \theta_2$  δεν είναι διαδοχικές, άτοπο.

### Εφαρμογή 130

Δείξτε ότι αν  $0 < x_1 < x_2$ , τότε  $e^{x_1} < \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} < e^{x_2}$

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = e^x$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$

Άρα, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (x_1, x_2)$

έτσι ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$ . Όμως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα,

άρα από  $0 < x_1 < \xi < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^\xi < e^{x_2}$ , δηλαδή  $e^{x_1} < \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} < e^{x_2}$

### Εφαρμογή 131

Δείξτε ότι αν  $0 < x_1 < x_2$ , τότε:  $1 - \frac{x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} - 1$

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = \ln x$ , παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \frac{1}{x}$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$

Άρα, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (x_1, x_2)$

ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right)}{x_2 - x_1}$

Όμως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα από  $0 < x_1 < \xi < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x_1}$

Άρα,  $0 < x_1 < \xi < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2} (x_2 - x_1) < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{1}{x_1} (x_2 - x_1) \Rightarrow$

$$1 - \frac{x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} - 1$$

### Εφαρμογή 132

Δείξτε ότι  $\forall x \in (0, 1)$  είναι  $1 + x < e^x < 1 + ex$

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = e^x$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Επειδή η  $f$  είναι

παραγωγίσιμη στο  $[0, x]$  με  $f'(x) = e^x$ , από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι

υπάρχει  $\xi \in (0, x)$  τέτοιος ώστε  $\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^\xi \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^\xi$

Όμως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και επειδή  $0 < \xi < x < 1$  είναι  $e^0 < e^\xi < e^1$

$$\text{Άρα } e^0 < \frac{e^x - 1}{x} < e^1 \Leftrightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e \Leftrightarrow x < e^x - 1 < ex \Leftrightarrow x + 1 < e^x < ex + 1$$

### Εφαρμογή 133

Δείξτε ότι  $\nu x^{\nu-1}(x-y) \geq x^\nu - y^\nu \geq \nu y^{\nu-1}(x-y)$ , όπου  $x \geq y > 0$

• Όταν  $x = y$  ισχύει η ισότητα.

• Όταν  $x > y$ , θεωρώ τη συνάρτηση  $f, f(x) = x^\nu$  οπότε  $f', f'(x) = \nu x^{\nu-1}$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής στο  $[y, x]$  έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (y, x) \text{ ώστε } \nu \xi^{\nu-1} = \frac{x^\nu - y^\nu}{x - y}. \text{ Θέλω να αποδείξω ότι } \nu x^{\nu-1} \geq \frac{x^\nu - y^\nu}{x - y} \geq \nu y^{\nu-1}$$

$$\text{Αρκεί να δειχθεί ότι } \nu x^{\nu-1} \geq \nu \xi^{\nu-1} \geq \nu y^{\nu-1} \Leftrightarrow x^{\nu-1} \geq \xi^{\nu-1} \geq y^{\nu-1} \Leftrightarrow x \geq \xi \geq y$$

Αυτό όμως ισχύει.

### Εφαρμογή 134

Έστω συνάρτηση  $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3 - x + 1$ . Να βρεθεί  $x_0 \in (0, 3)$  ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(3) - f(0)}{3}$  και να διαπιστώσετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0$ , είναι παράλληλη προς την χορδή που ορίζεται από τα σημεία  $(0, 1)$  και  $(3, 25)$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 3]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 3)$

Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (0, 3)$  ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{f(3) - f(0)}{3} = \frac{25 - 1}{3} = 8$$

$$\text{Επειδή } f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$$

$$\text{Άρα, } 3x_0^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \begin{cases} \sqrt{3} & \text{Δεκτή} \\ -\sqrt{3} & \text{Απορρίπτεται} \end{cases}$$

### Εφαρμογή 135

Δείξτε ότι για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  είναι  $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y|$

• Για  $x = y$  η προς απόδειξη σχέση είναι προφανής, διότι ισχύει η ισότητα.

• Για  $x \neq y$ , χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτω ότι  $x < y$

$$\text{Η προς απόδειξη σχέση γίνεται } \left| \frac{\eta\mu x - \eta\mu y}{x - y} \right| \leq 1$$

Έστω συνάρτηση  $f, f(x) = \eta\mu x$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Στο  $[x, y]$  από το θεώρημα της μέσης τιμής για την  $f$ , έπεται ότι υπάρχει

$$\text{τουλάχιστον ένα } \xi \in (x, y) \text{ ώστε } f', f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu x - \eta\mu y}{x - y}$$

Αρκεί να δειχθεί ότι  $|\sigma\upsilon\nu\xi| \leq 1$  Είναι προφανές ότι ισχύει.

$$\text{Άρα, είναι και } \left| \frac{\eta\mu x - \eta\mu y}{x - y} \right| \leq 1$$

### 6.10 Άλυσες ασκήσεις

#### Άσκηση 1 Μελέτη της μονοτονίας

Μελετήστε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) f(x) = 3x - 2 & (\beta) f(x) = 2x^2 - 3x + 5 & (\gamma) f(x) = 3x - 4x^2 \\
 (\delta) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} & (\epsilon) f(x) = \frac{x+3}{2x-1} & (\sigma\tau) f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \\
 (\zeta) f(x) = -x^2 + 2x - 1 & (\eta) f(x) = -x^4 + 4x^2 - 3 & (\theta) f(x) = x - \ln x \\
 (\iota) f(x) = x \ln x & (\iota\alpha) f(x) = 3 - x - x^2 - x^3 & (\iota\beta) f(x) = x^3 - 3x + 2 \\
 (\gamma) f(x) = e^x - x + 1 & (\iota\delta) f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} & (\iota\epsilon) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1
 \end{array}$$

#### Άσκηση 2 Διαστήματα κοιλότητας και σημεία καμπής

Εύρεση διαστημάτων κοιλότητας και σημείων καμπής των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1 & (\beta) f(x) = \frac{x^2+1}{x} & (\gamma) f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 2 \\
 (\delta) f(x) = 2x - x^3 & (\epsilon) f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1 & (\sigma\tau) f(x) = x \ln x - 1
 \end{array}$$

#### Άσκηση 3 Παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις  $f, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  και  $g, g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Δείξτε ότι  $f'(x) = g(x)$  και  $g'(x) = f(x)$ .

#### Άσκηση 4 Παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων

Αν  $y = a \cos(kx) + b \sin(kx)$  δείξτε ότι  $y'' + k^2 y = 0$ .

#### Άσκηση 5 Παράγωγος με αναδρομικό τύπο

Αν  $f(x) = \cos x - \sin x$  υπολογίστε τη συνάρτηση  $f^{(2000)}(x)$ .

#### Άσκηση 6 Παράγωγος άρτιας συνάρτησης

Έστω άρτια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η  $f'$  είναι περιττή.

#### Άσκηση 7 Εύρεση πρώτης παραγώγου

Παραγωγίστε τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} & g(x) = |x+5| = \begin{cases} x+5, & x \geq -5 \\ -x-5, & x < -5 \end{cases} \\
 h(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ x^2+2, & x \leq 0 \end{cases} & w(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ -x^2+2, & x \in (0, 1) \end{cases}
 \end{array}$$

#### Άσκηση 8 Παράγωγος αριθμός συνάρτησης

Με χρήση του ορισμού, βρείτε τον παράγωγο αριθμό της  $f$ , στη θέση  $x_0$ .

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0 & (\beta) f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0 \\
 (\gamma) f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x_0 = 2 & (\delta) f(x) = x^2 - x - 2, \quad x_0 = -1 \text{ και } x_0 = 5
 \end{array}$$

### Άσκηση 9 Εύρεση πρώτης παραγώγου

Παραγωγίστε τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) f(x) = \sin(x^2 + 1) & (\beta) f(x) = \sin(3x) & (\gamma) f(x) = \sin(e^x) \\
 (\delta) f(x) = \cos(3x + 2) & (\epsilon) f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & (\sigma\tau) f(x) = \cos(x^3) \\
 (\zeta) f(x) = \sin(\cos x) & (\eta) f(x) = (x^2 + 1)^3 & (\theta) f(x) = e^{x^2} \\
 (\iota) f(x) = \log(x^2 + 1) & (\iota\alpha) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} & (\iota\beta) f(x) = \tan(5x) \\
 (\iota\gamma) f(x) = \cot(x^2) & (\iota\delta) f(x) = \sqrt[3]{x} & (\iota\epsilon) f(x) = 1 + \sin x \\
 (\iota\sigma\tau) f(x) = x^3 + \cos x & (\iota\zeta) f(x) = x^2 \cdot \sin x & (\iota\eta) f(x) = x^2 \cdot \ln x \cdot e^x \\
 (\iota\theta) f(x) = x^2 \cdot \ln x & (\kappa) f(x) = e^x \cdot \cos x & (\kappa\alpha) f(x) = e^x \cdot x^3 \\
 (\kappa\beta) f(x) = (x^2 + 1)^5 & (\kappa\gamma) f(x) = \tan x - \cot x & (\kappa\delta) f(x) = x^4 + 5x^2 + 3 \\
 (\kappa\epsilon) f(x) = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x & (\kappa\sigma\tau) f(x) = \frac{e^x}{2^x} & (\kappa\zeta) f(x) = \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2 \\
 (\kappa\eta) f(x) = \frac{x^2}{\log x} & (\kappa\theta) f(x) = x^3 \cdot \log x - \frac{1}{3}x^3 & (\kappa\iota) f(x) = \tan x \\
 (\lambda) f(x) = \cot x & (\lambda\alpha) f(x) = |x-1| + 2 & (\lambda\beta) f(x) = |x^2 - 4x + 3| \\
 (\lambda\gamma) f(x) = |\sin x| & (\lambda\delta) f(x) = (x-1)2^x & (\lambda\epsilon) f(x) = \frac{e^x}{x^2} \\
 (\lambda\sigma\tau) f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2)^2} & (\lambda\zeta) f(x) = (x^2 + 1)^{3x} & (\lambda\eta) f(x) = \frac{\tan x}{x} \\
 (\lambda\theta) f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x} & (\lambda\iota) f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} & (\lambda\kappa) f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x}} \\
 (\mu) f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} & (\mu\alpha) f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x}} & (\mu\beta) f(x) = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x^2} \\
 (\mu\gamma) f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + 1 & (\mu\delta) f(x) = \sin^2 x \cdot \cos(2x) & (\mu\epsilon) f(x) = \sin^2(x^2 + 2x) \\
 (\mu\sigma\tau) f(x) = \cos^2(3x) + \sin^2(2x) & (\mu\zeta) f(x) = |\cos x| & (\mu\eta) f(x) = \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \\
 (\mu\theta) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ (x-2)^2, & x > 1 \end{cases} & (\mu\iota) f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\
 (\mu\kappa) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & & 
 \end{array}$$

**Άσκηση 10 Εξισώσεις εφαπτομένων**

Εύρεση εξισώσεων εφαπτόμενων  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  στα σημεία με τετμημένες  $x_1 = 1$  και  $x_2 = -1$  αντιστοίχως, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ . Εξετάστε αν οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  έχουν και άλλα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της  $f$

**Άσκηση 11 Εξίσωση εφαπτομένης**

Εύρεση  $a \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  να έχει εφαπτομένη την  $y = x$

**Απάντηση**  $\left( a = e^{\frac{1}{e}} \right)$

**Άσκηση 12 Εξίσωση εφαπτομένης**

Εύρεση  $a \in \mathbb{R}$  ώστε το διάγραμμα της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{4}(ax - x^3)$  να τέμνει τον άξονα  $xx'$  υπό γωνία  $\hat{\omega} = 45^\circ$  **Απάντηση**  $a = 4$

**Άσκηση 13 Εξίσωση εφαπτομένης**

Εύρεση ευθειών της μορφής  $y = ax - 1$ , όπου  $a \in \mathbb{R}$  που εφάπτονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2$  και ναδειχθεί ότι τέμνονται μεταξύ τους σε σημείο του άξονα  $yy'$  **Απάντηση**  $(y = \pm 2x - 1, (x_0, y_0) = (0, -1))$

**Άσκηση 14 Μεγιστοποίηση εμβαδού και περιμέτρου**

Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια υποτείνουσα  $a$ , ποιο έχει: (α) μέγιστο εμβαδό, (β) μέγιστη περίμετρο;

**Άσκηση 15 Ελαχιστοποίησης υποτείνουσας**

Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια περίμετρο, ποιο έχει τη μικρότερη υποτείνουσα;

**Άσκηση 16 Εγγραφή κυλίνδρου σε σφαίρα**

Σε σφαίρα ακτίνας  $R$ , να εγγραφεί ορθός κύλινδρος με μέγιστο όγκο.

**Άσκηση 17 Εγγραφή κυλίνδρου σε κώνο**

Σε κώνο, να εγγραφάψετε κύλινδρο με μέγιστη ολική επιφάνεια.

**Άσκηση 18 Εγγραφή ορθού κώνου σε σφαίρα**

Σε σφαίρα  $(O, R)$ , να εγγραφάψετε ορθό κώνο με μέγιστη παράπλευρη επιφάνεια.

**Άσκηση 19 Εγγραφή ορθογωνίου σε τρίγωνο**

Σε τυχαίο τρίγωνο, να εγγραφεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μέγιστο εμβαδό.

**Άσκηση 20 Ελαχιστοποίηση εμβαδού**

Από όλους τους κώνους με τον ίδιο όγκο, ποιος έχει τη μικρότερη παράπλευρη επιφάνεια;

**Άσκηση 21 Εγγραφή τετραγώνου σε τετράγωνο**

Σε τετράγωνο πλευράς  $a$ , να εγγράψετε άλλο τετράγωνο με ελάχιστο εμβαδό.

**Άσκηση 22 Τοπικά ακρότατα**

Εύρεση τοπικών ακρότατων των συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = x^3 - ax + β \text{ με } α, β ∈ ℝ \quad (β) f(x) = e^x \sin x$$

$$(γ) f(x) = (2x - 3)e^x + 2x(1 - x) + 1$$

**Άσκηση 23 Ελαχιστοποίησης αποστάσεων**

Βρείτε το σημείο της  $x + 2y = 6$ , του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα σημεία  $A(3, 5)$  και  $B(-7, -3)$  είναι ελάχιστο.

**Άσκηση 24 Σημεία καμπής και διαστήματα κοιλότητας**

Βρείτε τα διαστήματα κοιλότητας και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = 2x - x^3 \quad (β) f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (γ) f(x) = x \cdot e^x$$

$$(δ) f(x) = x \cdot |x| \quad (ε) f(x) = x^3 - 3x^2 \quad (στ) f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$(ζ) f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (η) f(x) = x^3 \cdot e^{-x^2} \quad (θ) f(x) = e^x \cdot \eta \mu x$$

$$(ι) f(x) = \ln |\ln x| \quad (ια) f(x) = \ln |x^2 - 1| \quad (ιβ) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$(ιγ) f(x) = \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \quad (ιδ) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (ιε) f(x) = x^x$$

$$(ιζ) f(x) = e^x \cdot (7 + x^2 - 5x) \quad (ιη) f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x \quad (ιθ) f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2$$

$$(κ) f(x) = (x-1)^4 (3-x)^3 \quad (κα) f(x) = \frac{a}{x} \ln \left( \frac{a}{x} \right), a > 0$$

$$(κβ) f(x) = \frac{2a\sqrt{2ax-x^2}}{x}, a > 0 \quad (κγ) f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 2$$

**Άσκηση 25 Πλευρικές παράγωγοι**

Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f, f(x) = e^{|x|}$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 0$

**Άσκηση 26 Πλευρικές παράγωγοι**

Δείξτε ότι η συνάρτηση  $g, g(x) = |\ln x|$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 1$

**Άσκηση 27 Παράγωγος και απόλυτη τιμή**

Βρείτε την παράγωγο της  $f, f(x) = a^{|x-\beta|}$ , όπου  $\beta \in \mathbb{R}$  και  $0 < a \neq 1$

**Άσκηση 28 Εύρεση ορίων**

Βρείτε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$

(γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$

(δ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2^x}$

(ε)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

(στ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{e^x}$

(ζ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

(η)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

(θ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x^2 + 1)}$

(ι)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$

(κ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1) \cdot \ln x}$

(λ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$  με  $a, b \in \mathbb{R}^*$

(μ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{\sin(cx) - \sin(dx)}$  με  $c \neq d$  (ν)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \cos(ax)}{e^{bx} - \cos(bx)}$  με  $a, b \in \mathbb{R}^*$

**Άσκηση 29 Πλευρικές παράγωγοι**

$$\text{Παραγωγίστε τη συνάρτηση } f, f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2x), & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

**Άσκηση 30 Πλευρικές παράγωγοι**Βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 0$  η

$$f, f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{2x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu(2x) + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(3x), & x > 0 \end{cases}$$

**Άσκηση 31 Πλευρικές παράγωγοι**Βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τους οποίους οι παρακάτω συναρτήσεις είναι

$$\text{παραγωγίσιμες: } f, f(x) = \begin{cases} ax + \beta, & x > e \\ \ln^3 x, & 0 < x \leq e \end{cases}, \quad g, g(x) = \begin{cases} \ln^4 x, & 0 < x < e \\ ax^2 + \beta x + 1, & x \geq e \end{cases}$$

**Άσκηση 32 Πλευρικές παράγωγοι**

$$\text{Δείξτε ότι η } f, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \leq 0 \\ x \cdot \ln x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{e} \cdot e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases} \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία}$$

0 και 1

**Άσκηση 33 Ασύμπτωτες**

Εύρεση ασύμπτωτων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

(α)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$

(β)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

(γ)  $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

(δ)  $f(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$

(ε)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(στ)  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3}$

$$\begin{array}{lll}
 (\zeta) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} & (\eta) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & (\theta) f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} \\
 (\iota) f(x) = 1 - \frac{|x|}{x-2} & (\kappa) f(x) = -x + \frac{1}{\sqrt{x}} &
 \end{array}$$

### Άσκηση 34 Εύρεση παραμέτρων και όρια

Βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2 + 5x - 1}{x + 2} - (ax + \beta) \right] = 0$  και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ ax + \beta - \sqrt{x^2 + x + 2} \right] = 0$$

### Άσκηση 35 Εύρεση παραμέτρων και ασύμπτωτες

Βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f, f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^2 + ax + \beta}$  να έχει ως κατακόρυφες ασύμπτωτες τις  $x = -1, x = 2$  και εξετάστε αν η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

### Άσκηση 36 Θεώρημα Rolle

Με το θεώρημα του Rolle, ναδειχθεί ότι η  $x^3 + 6x + 1 = 0$  δεν μπορεί να έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες.

### Άσκηση 37 Θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής

Δείξτε ότι η  $x^6 + ax + \beta = 0$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.