Ακρότατα συναρτήσεων.
1^{o} κριτήριο.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(a,\ \beta)$ και $x_0 \in (a,\ \beta)$ με $f'(x_0)=0$. Η f παρουσιάζει:

- Τοπικό μέγιστο στο x_0, όταν $f'(x_0) \geq 0\ \forall x \in (a,\ x_0]$ και $f'(x_0) \leq 0\ \forall x \in [x_0,\ \beta)$.
- Τοπικό ελάχιστο στο x_0, όταν $f'(x_0) \leq 0\ \forall x \in (a,\ x_0]$ και $f'(x_0) \geq 0\ \forall x \in [x_0,\ \beta)$.

Παρατηρήσεις.

1. Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και όταν $a=-\infty$ ή $\beta=+\infty$.

2. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο $x_0 \in (a,\ \beta)$ όταν η f' μηδενίζεται στο x_0 αλλάζοντας πρόσημο. (Από $+$ σε $-$ έχομε τοπικό μέγιστο. Από $-$ σε $+$ έχομε τοπικό ελάχιστο.)

3. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in (a,\ \beta)$ και είναι συνεχής στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 όταν η f' αλλάζει πρόσημο στο σημείο αυτό.

4. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[a,\ \beta] \to \mathbb{R}$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο β και τοπικό ελάχιστο στο a.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο a και τοπικό ελάχιστο στο β.

5. Από τα παραπάνω συνάγεται πως για να βρούμε τα τοπικά ακρότατα μίας συναρτήσεως, πρέπει πρώτα να τη μελετήσομε ως προς τη μονοτονία.

2^{o} κριτήριο.

Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(a,\ \beta)$ και $x_0 \in (a,\ \beta)$ με $f'(x_0)=0$.

Όταν $f''(x_0)>0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Όταν $f''(x_0)<0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Παρατηρήσεις.

1. Όταν $f''(x_0)=0$, τότε εξετάζομε με το 1^{o} κριτήριο αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

2. Συνήθως το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται όταν είναι δύσκολη η εύρεση του προσήμου της f'.

Κριτήριο μονοτονίας.

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,\ \beta]$.

Όταν $f'(x)>0 \quad \forall x \in (a,\ \beta) \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[a,\ \beta]$.

Όταν $f'(x)<0\ \ \forall x\in(a,\ \beta)\Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[a,\ \beta]$.

Παρατηρήσεις.

1. Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η μονοτονία μίας συναρτήσεως εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου της και εξετάζετε πάντοτε σε διάστημα ή διαστήματα.

2. Το κριτήριο ισχύει και για διάστημα της μορφής $[a,\ \beta)$ ή $(a,\ \beta]$ ή $(a,\ \beta)$.

3. Αν η f είναι αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $(a,\ \beta)$, τότε ισχύει ότι $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,\ \beta)$.

Πράγματι αφού η f είναι αύξουσα στο $(a,\ \beta)$, προκύπτει ότι $\forall x, x_0\in(a,\ \beta)$ με $x\neq x_0$ ισχύει ότι: $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)\geq 0$, δηλαδή $f'(x_0)\geq 0$.

Το αντίστροφο της προτάσεως αυτής γενικά δεν ισχύει. Δηλαδή είναι δυνατό να ισχύει $f'(x)\geq 0$ και όμως η συνάρτηση f να μην είναι γνησίως αύξουσα στο $(a,\ \beta)$. Ανάλογη πρόταση ισχύει και για φθίνουσα συνάρτηση.

4. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(a,\ \beta)$, τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(\kappa,\ \lambda)$, όπου $\kappa=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ και $\lambda=\lim\limits_{x\to \beta^-}f(x)$.

Αν όμως η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(a,\ \beta)$, τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(\lambda,\ \kappa)$.

Παραδείγματα.

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=-x^2+2x-1$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=-2(x-1)$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	
			Ολικό max		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $(1,\ f(1))=(1,\ 0)$.

2. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=3(x-1)(x-3)$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\ \eta\ x=3$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ.max		Τοπ.min		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $\left(1,\ f(1)\right)$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $\left(3,\ f(3)\right)$.

3. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=-x^4+4x^2-3$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Είναι $f'(x)=-4x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=\sqrt{2}$ η $x=-\sqrt{2}$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Τοπ.max		Τοπ.min		Τοπ.max		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στις θέσεις $\left(-\sqrt{2},\ f\left(-\sqrt{2}\right)\right)$ και $\left(\sqrt{2},\ f\left(\sqrt{2}\right)\right)$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $(0,\ -3)$.

4. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2(x+2)^3$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Είναι $f'(x)=(x+2)^2(x-1)(5x+1)$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ η $x=-2$ η $x=\frac{-1}{5}$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{5}$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ.min		Τοπ.max		Τοπ.min		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $\left(\frac{-1}{5},\ f\left(\frac{-1}{5}\right)\right)$ και τοπικά ελάχιστα στις θέσεις $\left(-2,\ f(-2)\right)$ και $\left(1,\ f(1)\right)$.

5. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$. Η f ως ρητή παραγωγίσιμη στο $D(f)$.
Είναι $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Η $f'(x)$ έχει ίδιο πρόσημο με το $x(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	II	$\searrow$		$\nearrow$	
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$								$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
			Τοπ. max				Τοπ.min		
			$(-2,\ -4)$				$(0,\ 0)$		

6. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Η f ως ρητή παραγωγίσιμη στο $D(f)$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{-7}{(2x-1)^2}$ και $f'(x)<0\ \ \forall x\in D(f)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

7. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}^*$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$. Είναι $f'(x)=\dfrac{-x-2}{x^3}$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με το γινόμενο $x(-x-2)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	II	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	II	$\searrow$	
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$						$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
			Τοπ.min		Τοπ. max		

8. Να λυθεί η εξίσωση $3x^4+x+2lnx=4$.
Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=3x^4+x+2lnx-4$ με $D(f)=(0,\ +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=12x^3+1+\dfrac{2}{x}$.

Είναι $f'(x)>0\ \ \forall x\in D(f)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $D(f)$.

Όταν $x=1$ τότε $f(1)=0$. Η λύση $x=1$ είναι η μοναδική λύση της εξισώσεως $3x^4+x+2lnx=4$.

9. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\lambda x^2}{1+x}$ στο πεδίο ορισμού της;

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $f'(x)=\dfrac{\lambda x^2+2\lambda x-1}{(1+x)^2}$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $P(x)=\lambda x^2+2\lambda x-1$.

• Όταν $\lambda = 0$ τότε $P(x) = -1 < 0$
• Όταν $\lambda \neq 0$ τότε για το τριώνυμο $P(x)$ πρέπει να είναι

$$\left.\begin{cases}\Delta \leq 0 \\ \alpha = \lambda < 0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}4\lambda(1+\lambda) \leq 0 \\ \lambda < 0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow -1 \leq \lambda < 0.$$

Άρα όταν $-1 \leq \lambda < 0$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

10. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x - lnx$.

Είναι $D(f) = (0,\ +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $x-1$.

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

11. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^x - x + 1$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό min
$(0,\ 1)$

Επεξηγήσεις.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$.

12. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}^*$. Η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x) = \dfrac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $x(x-1)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0) \cup [1,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$.

13. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x^x$.

Είναι $D(f) = (0,\ +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x) = x^x(1 + lnx)$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $1 + lnx$.

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό min

Επεξηγήσεις.

$1+lnx=0 \Leftrightarrow lnx=-1 \Leftrightarrow lnx=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

$1+lnx>0 \Leftrightarrow lnx>-1 \Leftrightarrow lnx>\ln e^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

$1+lnx<0 \Leftrightarrow lnx<-1 \Leftrightarrow lnx<\ln e^{-1} \Leftrightarrow x<e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

14. Να δειχθεί ότι $\forall x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $x \cdot sinx + cosx > 1$.

Έστω συνάρτηση $f(x)=x\cdot sinx+cosx-1$. Είναι $D(f)=\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)>0\ \ \forall x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x\cdot cosx$.

Είναι $f'(x)>0\ \forall x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε $\forall x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$.

15. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1-|x|}{1+|x|}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x}, & x\geq 0\\[2ex] \dfrac{1+x}{1-x}, & x<0\end{cases}$ και $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(1+x)^2}, & x>0\\[2ex] \dfrac{2}{(1-x)^2}, & x<0\end{cases}$.

Δεν υπάρχει το $f'(0)$ διότι $f'_{\delta}(0)=-2\neq 2=f'_{\alpha}(0)$.

$\forall x>0$ είναι $f'(x)<0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\ +\infty)$.

$\forall x<0$ είναι $f'(x)>0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$.

16. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+2$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=3(x-1)(x+1)$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. max $(-1,\ 4)$		Τοπ.min $(1,\ 0)$		

17. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=9x-x^3$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και $f'(x)=9-3x^2$.

Είναι $D(f')=\mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $D(f')$ και $f''(x)=-6x$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

Είναι $f''\left(\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3}<0$, άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0=\sqrt{3}$, ίσο με $f\left(\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$.

Είναι $f''\left(-\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}>0$, άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0=-\sqrt{3}$, ίσο με $f\left(-\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3}$.

18. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x^4-8x^2+5$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$.
Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=\pm 2$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. min $(-2,\ -11)$		Τοπ.max $(0,\ 5)$		Τοπ. min $(2,\ -11)$		

19. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=2$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.
Θέση πιθανού ακροτάτου είναι και η θέση $x_0=1$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	II	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	II	$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ.max $(0,\ 0)$				Τοπ. min $(2,\ 4)$		

20. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^x$.
Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=e^x(x+1)$.
Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό min $\left(-1,\ \dfrac{-1}{e}\right)$		

21. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x\cdot lnx$.
Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=1+lnx$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό min

$\left(e^{-1},\ -e^{-1}\right)$

22. Ποια τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$;

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2ax+\beta$ $f'(x)=2ax+\beta$ και $f''(x)=2a$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-\beta}{2a}$ θέση πιθανού ακροτάτου.

Όταν $\alpha>0$ τότε $f''\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=2a>0$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0=\dfrac{-\beta}{2a}$, ίσο με $f\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$.

Όταν $\alpha<0$ τότε $f''\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=2a<0$, άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0=\dfrac{-\beta}{2a}$, ίσο με $f\left(\dfrac{-\beta}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$.

23. Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f:(1,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x}{lnx}$. Να συγκριθούν οι αριθμοί e^x και x^e όταν $x>0$.

Είναι $D(f)=(1,\ +\infty)$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{lnx-1}{ln^2x}$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $(lnx-1)$.

x	$-\infty$		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ολικό min

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(e,\ e)$.

Επεξηγήσεις.

$\forall x>1\Rightarrow f(x)\geq e\Rightarrow\dfrac{x}{lnx}\geq e\Rightarrow x\geq elnx\Rightarrow x\geq lnx^e\Rightarrow lne^x\geq lnx^e\Rightarrow e^x\geq x^e$

$\forall x\in(0,\ 1)\Rightarrow 0<x<1\Rightarrow e^x>e^0=1\geq x^e$

Άρα $\forall x>0$ είναι $e^x\geq x^e$.

24. Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$.

Είναι $D(f)=[0,\ 3]$. Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0,\ 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ 3)$ με $f'(x)=\dfrac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $3-2x$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ και ολικό ελάχιστο $f(0)=f(3)=0$.

x	0		$3/2$		3
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

25. Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με $f'(x)=\dfrac{-2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

Η f συνεχής στη θέση $x_0=1$.

Η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την παράσταση $-2(x-1)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	ΙΙ	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ολικό max

$(1, f(1))=(1,\ 1)$

Παρατήρηση.

Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0\in(\alpha,\ \beta)$ και είναι συνεχής στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 όταν η f' αλλάζει πρόσημο στο σημείο αυτό.

26. Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{lnx}{x}$.

Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$. Η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ολικό max

$(e,\ f(e))=(e,\ e^{-1})$

Σημείωση. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

27. Να δειχθεί ότι $e^x\geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Αρκεί να δειχθεί ότι $e^x-x\geq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Έστω συνάρτηση $f(x)=e^x-x$ με $D(f)=\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-1$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ θέση πιθανού ακροτάτου.

$\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό min $(0,\ 1)$		

28. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x \cdot lnx$.

Είναι $D(f) = (0,\ +\infty)$ και η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x) = 1 + lnx$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow lnx = -1 \Leftrightarrow lnx = ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό min $\left(e^{-1}, f\left(e^{-1}\right)\right) = \left(e^{-1},\ -e^{-1}\right)$		

Επεξήγηση.

$1 + lnx > 0 \Leftrightarrow lnx > -1 \Leftrightarrow lnx > lne^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$.

29. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & x < 0 \end{cases}$

Δεν υπάρχει το $f'(0)$. Η θέση $x_0 = 0$ είναι θέση πιθανού ακροτάτου.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 0$.

Πράγματι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0$, άρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	ΙΙ	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό min $(0,\ f(0)) = (0,\ 0)$		

30. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 6$.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x - 1$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό min $\left(1,\ f(1)\right)$		

31. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συναρτήσεως $f(x)=x^4-8x^2+17$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=\pm 2$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. min $\left(-2,\ f(-2)\right)$		Τοπ.max $\left(0,\ f(0)\right)$		Τοπ. min $\left(2,\ f(2)\right)$		

32. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συναρτήσεως $f(x)=lnx-x$.

Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ θέση πιθανού ακροτάτου.

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	
			Ολικό max $\left(1,\ f(1)\right)=(1,\ -1)$		

33. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^5(x+1)^4$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη με $f'(x)=(x-2)^4(x+1)^2(x+1)(9x-3)$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ η $x=-1$ η $x=\dfrac{1}{3}$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. max $\left(-1, f(-1)\right)$		Τοπ. min $\left(\frac{1}{3},\ f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$				

34. Να δειχθεί ότι $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}<ln(x+1)$, $\forall x>0$.

Έστω συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-ln(x+1)$ με $D(f)=(0,\ +\infty)$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{-x^4}{x+1}$ και επειδή $f'(x)<0$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
Άρα $f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$.

35. Να δειχθεί ότι $(1+x)^a>1+ax$, $\forall x>0$.

Έστω συνάρτηση $f(x)=(1+x)^a-1-ax$, $D(f)=(0,\ +\infty)$.

Η f παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=a\left[(1+x)^{a-1}-1\right]$.

Η f' δε μηδενίζεται ποτέ. $\forall x>0$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$.

Είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow(1+x)^a-1-ax>0\Leftrightarrow(1+x)^a>1+ax$, $\forall x\in(0,\ +\infty)$.

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f		$\nearrow$	

36. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=ln\left(x^2-9\right)$.

Είναι $D(f)=(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$ και $f'(x)=\dfrac{2x}{(x-3)(x+3)}$.

Είναι $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$, άρα δεν υπάρχουν πιθανά ακρότατα.

x	0		-3		3		$+\infty$
f'		$-$		-----		$+$	
f	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	

37. Να βρεθεί ο $a\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}+\dfrac{17}{4}$, $a\in\mathbb{R}$ να έχει ακρότατο το 0 στη θέση $x_0=\dfrac{-1}{2}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}^*$, $f'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x^2}$ και $f'\left(\dfrac{-1}{2}\right)=0\Leftrightarrow a=5$ για πιθανό ακρότατο στη θέση $x_0=\dfrac{-1}{2}$. Είναι $f'(x)=2\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+2x-2\right)}{x^2}$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$\dfrac{-1}{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	Τοπ. max	$\searrow$		$\nearrow$	

$$\left(\frac{-1}{2},\ f\left(\frac{-1}{2}\right)\right)=\left(\frac{-1}{2},\ 0\right)$$

38. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x+a)(x+\beta)}{(x-a)(x-\beta)}$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}-\{\alpha,\beta\}$ και $f'(x)=\dfrac{-2(\alpha+\beta)(x^2-\alpha\beta)}{(x-a)^2(x-\beta)^2}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a\beta}$, θέσεις πιθανών ακροτάτων $x_0=a,\ x_0=\beta,\ x_0=\pm\sqrt{a\beta}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{a\beta}$		a		$\sqrt{a\beta}$		β		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	II	$+$	0	$-$	II	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	II	$\nearrow$		$\searrow$	II	$\searrow$	
			Τοπ.min				Τοπ.max				

39. Να δειχθεί ότι $\forall x>0$ και $0<a<1$ είναι $x^a-ax\le 1-a$.

Αρκεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^a-ax$ έχει μέγιστο το $1-a$.

Είναι $D(f)=(0,\ +\infty)$.

Η f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με $f'(x)=a\left(x^{a-1}-1\right)$ και $f(x)=a(a-1)x^{a-2}$. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Είναι $f''(1)=a(a-1)<0$, άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο το οποίο είναι $f(1)=1-a$.

40. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=4x^5-5x^4+2$.

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=20x^3(x-1)$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $x=1$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. max		Τοπ. min		
			$(0,\ 2)$		$(1,\ 1)$		

Σχόλιο.

$f''(x)=80x^3-60x^2=20x^2(4x-3)$, $f''(0)=0$.

41. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$.

Είναι $D(f)=\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6(x-1)(x-2)$. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ η $x=2$ θέσεις πιθανών ακροτάτων.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπ. max		Τοπ. min		
			$(1,\ 7)$		$(2, f(2))$		

Σχόλιο.
$f''(x)=12x-18$
$f''(1)=-6<0$, άρα για $x_0=1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
$f''(2)=6>0$, άρα για $x_0=2$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

42. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=x^4$.
$\forall x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq f(0)$. Άρα στη θέση $x_0=0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.
Αλλά $f'(x)=4x^3$ και $f'(0)=0$.
Επίσης $f''(x)=12x^2$ και $f''(0)=0$.

Δηλαδή οι συνθήκες $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)\neq 0$ είναι ικανές για την ύπαρξη ακροτάτου. Δεν είναι αναγκαίες.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ολικό min.		

Ασκήσεις.

1. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια υποτείνουσα a, ποιο έχει: (**α**) μέγιστο εμβαδό, (**β**) μέγιστη περίμετρο;

2. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια περίμετρο, ποιο έχει τη μικρότερη υποτείνουσα;

3. Σε σφαίρα ακτίνας R να εγγραφεί ορθός κύλινδρος με μέγιστο όγκο.

4. Σε κώνο να εγγράψετε κύλινδρο με μέγιστη ολική επιφάνεια.

5. Σε σφαίρα (O,R) να εγγράψετε ορθό κώνο με μέγιστη παράπλευρη επιφάνεια.

6. Σε τρίγωνο να εγγραφεί ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδό.

7. Από όλους τους κώνους με τον ίδιο όγκο, ποιος έχει τη μικρότερη παράπλευρη επιφάνεια;

8. Σε τετράγωνο πλευράς a να εγγράψετε άλλο τετράγωνο με ελάχιστο εμβαδό.

9. Ποια τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=x^3-ax+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

10. Ποια τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως $f(x)=e^x sinx$.

11. Ομοίως για τη συνάρτηση $f(x)=(2x-3)e^x+2x(1-x)+1$.

12. Βρείτε το σημείο της ευθείας $x+2y=6$, του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα σημεία $\mathrm{A}(3,\ 5)$ και $\mathrm{B}(-7,\ -3)$ είναι ελάχιστο.