Αόριστο ολοκλήρωμα.

- $\int sinx\ dx = -cosx + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $sinx = (-cosx + c)'$.
- $\int cosx\ dx = sinx + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $cosx = (sinx + c)'$.
- $\int e^x\ dx = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $e^x = (e^x + c)'$.
- $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $x^2 = \left(\frac{x^3}{3} + c\right)'$.
- $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $x^3 = \left(\frac{x^4}{4} + c\right)'$.
- $\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $x = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)'$.
- $\int dx = \int 1\ dx = x + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $1 = (x + c)'$.
- $\int 0\ dx = c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $0 = c'$.
- $\int 2^x\ dx = \frac{2^x}{ln2} + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $2^x = \left(\frac{2^x}{ln2} + c\right)'$.
- $\int x^{-3}\ dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $x^{-3} = \left(\frac{x^{-2}}{-2} + c\right)'$.
- $\int \frac{dx}{cos^2x} = tanx + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $\frac{1}{cos^2x} = (tanx + c)'$.
- $\int \frac{-dx}{sin^2x} = σφx + c,\ c \in \mathbb{R}$ διότι $\frac{-1}{sin^2x} = (σφx + c)'$.
- $\int (cf(x))\ dx = c\int f(x)\ dx,\ c \in \mathbb{R}$.
- $\int 2e^x\ dx = 2\int e^x\ dx = 2e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$.
- $\int (5sinx)\ dx = 5\int sinx\ dx = -5cosx + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int (3cosx)\ dx = 3\int cosx\ dx = 3sinx + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int 4x^7\ dx = 4\int x^7\ dx = 4\frac{x^8}{8} + c = \frac{x^8}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$.
- $\int (f(x) - g(x))\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$.
- $\int (x^2 - 5x + 6)\ dx = \int x^2\ dx - \int 5x\ dx + \int 6\ dx = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x + c,\ c \in \mathbb{R}$.
- $\int \frac{1}{sin^2x \cdot cos^2x}\ dx = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x}\ dx = \int \frac{sin^2x}{sin^2x \cdot cos^2x}\ dx + \int \frac{cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x}\ dx =$
$\int \frac{1}{cos^2x}\ dx + \int \frac{1}{sin^2x}\ dx = εφx + σφx + c,\ c \in \mathbb{R}$

- $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}\,dx = ln\left(x^2+1\right)+c,\ \ c \in \mathbb{R}$
- $\int tanx\,dx = \int \frac{sinx}{cosx}\,dx = -\int \frac{(cosx)'}{cosx}\,dx = -ln|cosx|+c,\ \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \sigma\varphi x\,dx = \int \frac{cosx}{sinx}\,dx = \int \frac{(sinx)'}{sinx}\,dx = ln|sinx|+c,\ \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{1}{x-5}\,dx = \int \frac{(x-5)'}{x-5}\,dx = ln|x-5|+c,\ \ c \in \mathbb{R}$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

- Βρείτε το $\int sin(3x)\,dx$. Θέτω $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$.

Είναι $\int sin(3x)\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = \frac{-1}{3}\cos t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Άρα $\int sin(3x)\,dx = \frac{-1}{3}\cos(3x)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

- Βρείτε το $\int cos(2x+3)\,dx$. Θέτω $t = 2x+3 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

Είναι $\int cos(2x+3)\,dx = \int cost\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}sint+c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

Άρα $\int cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}sin(2x+3)+c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

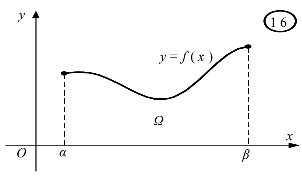
Παραγοντική ολοκλήρωση.

- $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$
- $\int xe^x\,dx = \int x\left(e^x\right)'\,dx = xe^x - \int x'e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$
- $\int x \cdot cosx\,dx = \int x(sinx)'\,dx = x \cdot sinx - \int x'sinx\,dx =$

$$x \cdot sinx - \int sinx\,dx = x \cdot sinx + cosx + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

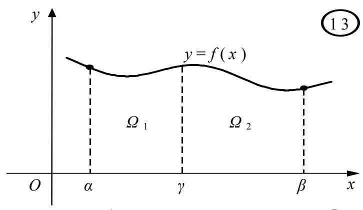
Ορισμένο ολοκλήρωμα.

- Ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το σημείο a έως το σημείο β και συμβολίζεται ως $\int_a^\beta f(x)dx$, η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$, όπου F μία παράγουσα (ή αρχική συνάρτηση) της συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$.

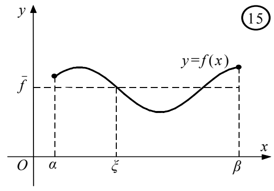


- Το ορισμένο ολοκλήρωμα ορίζεται σε διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ με $a < \beta$. Τα a, β ονομάζονται άκρα της ολοκλήρωσης.

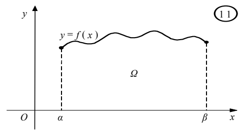
- Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σημείο α, τότε ορίζεται $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.
- Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε ορίζεται $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$.
- Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\ \beta]$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} cf(x)dx = c\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.



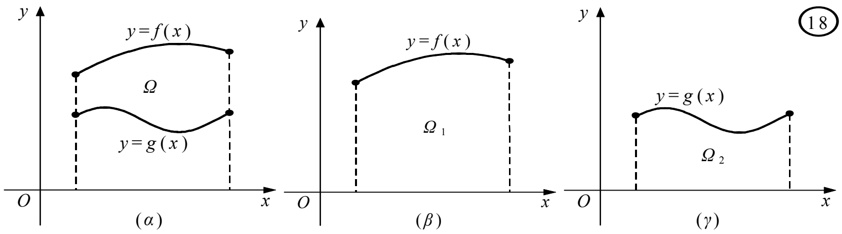
- Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ και $\gamma \in (\alpha,\ \beta)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$.



- Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ έτσι ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως το 1$^{\text{ο}}$ θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.



- Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ και $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha,\ \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [\alpha,\ \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.



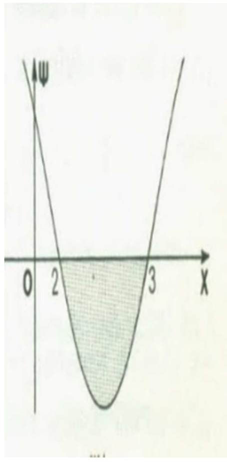
- $\int_0^1 \left(x+e^x\right) dx = \int_0^1 x\ dx + \int_0^1 e^x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} + e^1 - e^0 = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$
- $\int_1^2 e^x\ dx = \left[e^x\right]_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1)$
- $\int_5^6 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_5^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{5^3}{3}$
- $\int_1^2 x^3\ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}$
- $\int_0^{\pi} cosx\ dx = \left[sinx\right]_0^{\pi} = sin\pi - sin0 = 0 - 0 = 0$

• $\int_{0}^{\pi} sinx\ dx = \left[-cosx\right]_0^{\pi} = -cos\pi + cos0 = -(-1)+1 = 2$

• $\int_{0}^{1}\left(x^2-5x+6\right)\ dx = \left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}-5\frac{1^2}{2}+6\cdot 1\right)-\left(\frac{0^3}{3}-5\frac{0^2}{2}+6\cdot 0\right)=$

$$\frac{1}{3}-2,5+6=\frac{1}{3}+3,5$$

• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-5x+6$ και τον άξονα xx'. Η γραφική παράσταση της ως άνω συνάρτησης τέμνει τον άξονα xx' σε δυο σημεία με τετμημένες 2 και 3.
Όταν $2<x<3$ είναι $f(x)<0$. Συνεπώς, το ζητούμενο εμβαδό είναι:



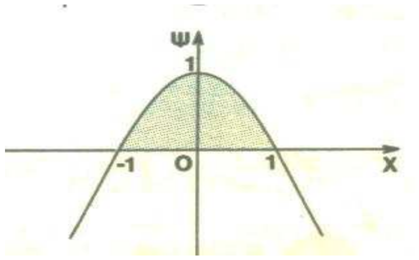
$$E=\int_{2}^{3}-f(x)\ dx=\int_{2}^{3}-\left(x^2-5x+6\right)\ dx=\int_{2}^{3}\left(-x^2+5x-6\right)\ dx=$$

$$\left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x\right]_2^3=\left(-\frac{3^3}{3}+5\frac{3^2}{2}-6\cdot 3\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+5\frac{2^2}{2}-6\cdot 2\right)=\ldots$$

• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^2+1$ και τον άξονα xx'.

$$E=\int_{-1}^{1}f(x)\ dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)\ dx=$$

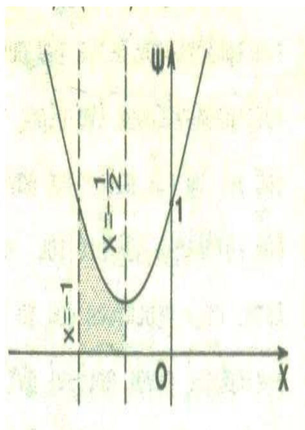
$$\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}=\left(-\frac{1^3}{3}+1\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right)=\frac{4}{3}$$



• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+x+1$, τις ευθείες $x=-1$, $x=\frac{-1}{2}$ και τον άξονα xx'. Ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ ότι $x^2+x+1>0$.

$$E=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}f(x)\ dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+x+1\right)\ dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}=$$

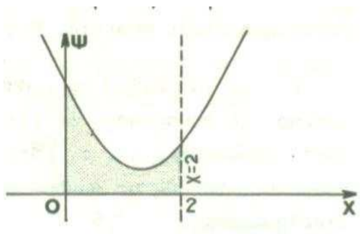
$$\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)=\ldots$$



• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x^2+2$ και τις ευθείες $x=0$, $y=0$ και $x=2$.

$$E=\int_0^2 \left(4x^2+2\right)\,dx=\left[4\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^2=$$

$$\left(4\frac{2^3}{3}+2\cdot 2\right)-\left(4\frac{0^3}{3}+2\cdot 0\right)=\frac{32}{3}+4=\frac{44}{3}$$

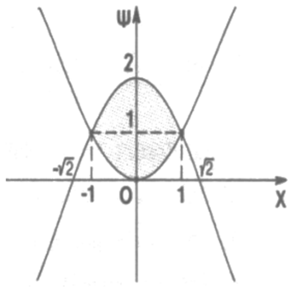


• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x)=-x^2+2$ και $g(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$.

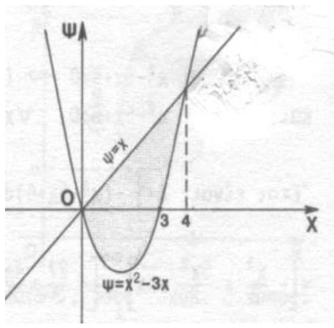
$$E=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\,dx=\int_{-1}^{1}\left[-x^2+2-x^{\frac{2}{3}}\right]\,dx=$$

$$\left[-\frac{x^3}{3}+2x-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_{-1}^{1}=$$

$$\left(-\frac{1^3}{3}+2\cdot 1-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)-\frac{3}{5}(-1)^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{32}{15}$$



• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x$ και την ευθεία $y=x$.

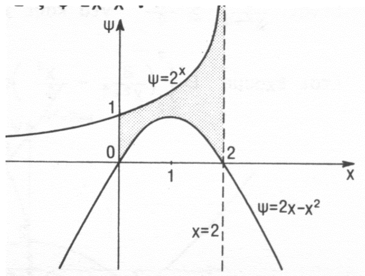


$$E=\int_0^4\left(x-f(x)\right)dx=\int_0^4\left(x-\left(x^2-3x\right)\right)dx=$$

$$\int_0^4\left(4x-x^2\right)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\left(2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}\right)-(0)=32-\frac{64}{3}$$

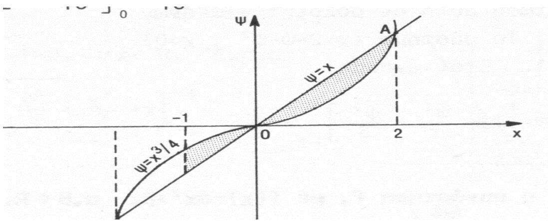
• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=2^x$, $y=2x-x^2$ και τις ευθείες $x=2$, $x=0$.

$$E=\int_0^2\left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)\,dx=\left[\frac{2^x}{ln2}-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{3}{ln2}-\frac{4}{3}$$



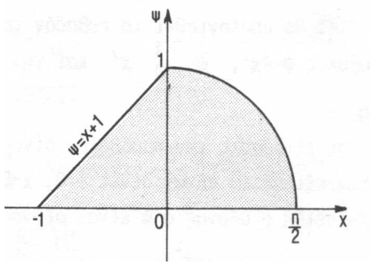
• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x$ και $g(x)=\frac{x^3}{4}$ στο διάστημα $[-1,\ 2]$.

$$E=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^3}{4}-x\right)\,dx+\int_0^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)\,dx=\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right]_0^2=\frac{23}{16}.$$



• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x+1$, $g(x)=cosx$ και τον άξονα xx'.

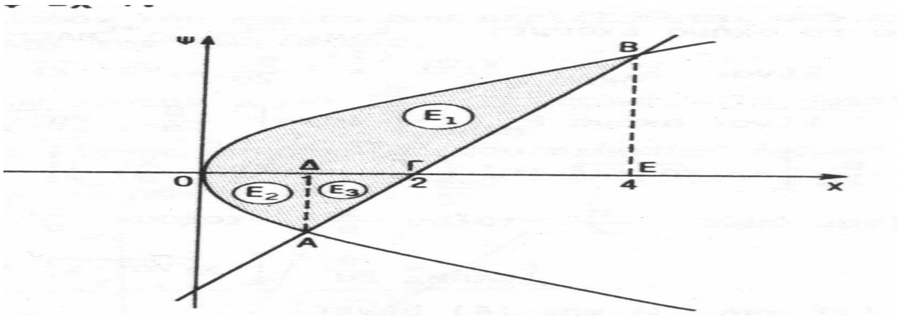
$$E=\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cosx\,dx=\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-1}^{0}+[sinx]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$



• Βρείτε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής $y^2=4x$ και την ευθεία $y=2x-4$.

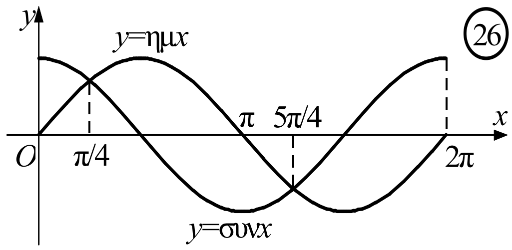
Είναι $E=E_1+E_2+E_3=\left[(\text{ΟΒΕΓΟ})-(\text{ΓΒΕΓ})\right]+(\text{ΑΔΟΑ})+(\text{ΑΓΔΑ})=$

$$\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx-\int_2^4(2x-4)\,dx+\int_0^1-\left(-2\sqrt{x}\right)dx+\int_1^2-(2x-4)\,dx=...=9.$$



• Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=sinx$, $g(x)=cosx$ και τις ευθείες $x=0$, $x=2\pi$.

Βρίσκω τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο $[0,\ 2\pi]$. Είναι



$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow sinx=cosx\Leftrightarrow tanx=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\ ή\ x=\frac{5\pi}{4}\ .$$

Συνεπώς, το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)=sinx-cosx$ είναι

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f(x)-g(x)$		–	0	+	0	–	

Άρα $\text{E}(\Omega)=\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx$

$$=\int_0^{\pi/4}(-\sin x+\cos x)\,dx+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{5\pi/4}^{2\pi}(-\sin x+\cos x)\,dx$$

$$=[\cos x+\sin x]_0^{\pi/4}+[-\cos x-\sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4}+[\cos x+\sin x]_{5\pi/4}^{2\pi}$$

$$=\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=4\sqrt{2}\ .$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

• Ο αριθμητής έχει μικρότερο βαθμό από τον παρονομαστή.

Έστω κλάσμα $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό πολυωνύμου $P(x)$ < από βαθμό πολυωνύμου $Q(x)$ ή συμβολικά $\partial P(x) < \partial Q(x)$.

Αν το $Q(x)$ έχει ως απλές του ρίζες τους $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ..., \rho_\nu \in \mathbb{R}$ δηλαδή $Q(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)...(x-\rho_\nu)$ τότε υπάρχουν $c_1, c_2, c_3, ..., c_\nu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{c_1}{x-\rho_1} + \dfrac{c_2}{x-\rho_2} + \dfrac{c_3}{x-\rho_3} + ... + \dfrac{c_\nu}{x-\rho_\nu}$.

Παράδειγμα 1. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

Λύση.

Είναι $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Προσδιορισμός των $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{(x-1)(x+1)}$$

Συνεπώς $\left\{\begin{matrix} a+b=0 \\ a-b=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right.$

Άρα $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right] dx = \int_2^3 \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right] dx =$

$$\int_2^3 \left[\frac{1}{2}\frac{(x-1)'}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{(x+1)'}{x+1}\right] dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x-1)'}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x+1)'}{x+1}dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}ln|x-1|\right]_2^3 - \left[\frac{1}{2}ln|x+1|\right]_2^3 = \frac{1}{2}ln2 - \cancel{\frac{1}{2}ln1} - \frac{1}{2}ln4 + \frac{1}{2}ln3 = \frac{1}{2}(ln2 - ln4 + ln3) =$$

$$\frac{1}{2}ln\frac{2\cdot 3}{4} = \frac{1}{2}ln\frac{3}{2} = \frac{1}{2}(ln3 - ln2).$$

Παράδειγμα 2. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$.

Λύση.

Είναι $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Προσδιορισμός των $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\frac{b(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

Συνεπώς $\left\{\begin{matrix}a+b=1\\-2a-b=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a=-2\\b=3\end{matrix}\right.$.

Άρα $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{-2}{x-1}\,dx+\int_{-1}^{0}\frac{3}{x-2}\,dx=$

$\displaystyle -2\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)'}{x-1}\,dx+3\int_{-1}^{0}\frac{(x-2)'}{x-2}\,dx=-2\big[\ln|x-1|\big]_{-1}^{0}+3\big[\ln|x-2|\big]_{-1}^{0}=$

$\displaystyle \cancel{-2\ln1}+2\ln2+3\ln2-3\ln3=5\ln2-3\ln3=\ln32-\ln27=\ln\frac{32}{27}$.

Παράδειγμα 3. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x^3-x}\,dx$.

Λύση.

Είναι $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x^3-x}\,dx=\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

Ισχύει ότι $\displaystyle\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$ όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Προσδιορισμός των $a,b,c\in\mathbb{R}$.

$$\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}=\frac{a(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{bx(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$\frac{(a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x(x-1)(x+1)}.$$

Συνεπώς $\left\{\begin{matrix}a+b+c=1\\b-c=1\\-a=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a=-1\\b=\frac{3}{2}\\c=\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$

Άρα $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x^3-x}\,dx=\int_{2}^{3}\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx=\int_{2}^{3}\left[\frac{-1}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right]dx=$

$\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{-1}{x}\,dx+\frac{3}{2}\int_{2}^{3}\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{2}\int_{2}^{3}\frac{1}{x+1}\,dx=\big[-\ln|x|\big]_{2}^{3}+\frac{3}{2}\big[\ln|x-1|\big]_{2}^{3}+\frac{1}{2}\big[\ln|x+1|\big]_{2}^{3}=$

$\displaystyle -\ln3+\ln2+\frac{3}{2}\ln2-\cancel{\frac{3}{2}\ln1}+\frac{1}{2}\ln4-\frac{1}{2}\ln3=\frac{7}{2}\ln2-\frac{3}{2}\ln3$.

• Αν ο παρονομαστής $Q(x)$ έχει ως ρίζα πολλαπλότητας k τον $\rho \in \mathbb{R}$, τότε στον παράγοντα $(x-\rho)^k$ αντιστοιχούν τα κλάσματα $\frac{c_1}{x-\rho}$, $\frac{c_2}{(x-\rho)^2}$, …, $\frac{c_k}{(x-\rho)^k}$, όπου $c_1, c_2, \ldots, c_k$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 4. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3+x^2}\,dx$.

Λύση.

Είναι $\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2(2x+1)}\,dx = \int_1^2 \left[\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{2x+1}\right]dx$

Προσδιορισμός των $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{2x+1} = \frac{ax(2x+1)}{x^2(2x+1)} + \frac{b(2x+1)}{x^2(2x+1)} + \frac{cx^2}{x^2(2x+1)} = \frac{(2a+c)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(2x+1)}$$

Συνεπώς $\left\{\begin{matrix} 2a+c=0 \\ a+2b=1 \\ b=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a=3 \\ b=-1 \\ c=-6 \end{matrix}\right.$. Άρα,

$$\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2(2x+1)}\,dx = \int_1^2 \left[\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{2x+1}\right]dx = \int_1^2 \left[\frac{3}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-6}{2x+1}\right]dx =$$

$$3\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx - 3\int_1^2 \frac{2}{2x+1}\,dx = 3\left[ln|x|\right]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 - 3\left[ln|2x+1|\right]_1^2 =$$

$$3\cdot ln2 \cancel{-3\cdot ln1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - 3\cdot ln5 + 3\cdot ln3 = 3ln2 - \frac{1}{2} - 3ln5 + 3ln3 = ln2^3 - \frac{1}{2} - ln5^3 + ln3^3 =$$

$$-\frac{1}{2} + ln\frac{(2\cdot 3)^3}{5^3} = -\frac{1}{2} + ln\left(\frac{6}{5}\right)^3 = -\frac{1}{2} + 3ln\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{1}{2} + 3(ln6 - ln5).$$

Παράδειγμα 5. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3x^3+x^2-11x-3}{x^4-2x^2+1}\,dx$.

Λύση.

Είναι $x^4-2x^2+1 = (x^2-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)^2$

Άρα $\frac{3x^3+x^2-11x-3}{x^4-2x^2+1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Κατά τα γνωστά, αποδεικνύεται ότι $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{3}{2}$.

Συνεπώς $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3x^3+x^2-11x-3}{x^4-2x^2+1}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}\right]dx =$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{5}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{5}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{(x+1)^2}\right]dx=$$

$$\frac{5}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{5}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=$$

$$\frac{5}{2}\left[ln|x-1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}\left[\frac{1}{x-1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left[ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\ldots=-2ln3-\frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 6. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int\frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3}dx$.

Λύση.

$$\frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{d}{(x+1)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}+\frac{-5}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}$$

Άρα, $\int\frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3}dx=\int\frac{1}{x-2}\,dx+3\int\frac{1}{x+1}\,dx-5\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx+2\int\frac{1}{(x+1)^3}\,dx=$

$ln|x-2|+3ln|x+1|+5\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

• Ο αριθμητής έχει βαθμό ≥ από το βαθμό του παρονομαστή. Έστω το κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό $P(x)$ ≥από βαθμό $Q(x)$ ή συμβολικά $\partial P(x)\geq\partial Q(x)$.

Εκτελώ τη διαίρεση $P(x):Q(x)$ και έστω ότι $\begin{array}{l|l} P(x) & \underline{Q(x)} \\ \\ \upsilon(x) & \Pi(x)\end{array}$ δηλαδή $P(x)=Q(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)$.

Άρα, $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)}{Q(x)}=\Pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$. Το κλάσμα $\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$ ολοκληρώνεται σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση διότι $\partial\upsilon(x)<\partial Q(x)$.

Παράδειγμα 7. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int\frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}\,dx$.

Λύση.

Είναι $x^3-3x+2=(x^2-5x+6)(x+5)+16x-28$

Άρα $\frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{(x^2-5x+6)(x+5)+16x-28}{x^2-5x+6}=\frac{(x^2-5x+6)(x+5)}{x^2-5x+6}+\frac{16x-28}{x^2-5x+6}=$

$$(x+5)+\frac{16x-28}{x^2-5x+6}=(x+5)+\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}$$ Είναι

$$\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}=\frac{a(x-3)}{(x-2)(x-3)}+\frac{b(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(a+b)x-(3a+2b)}{(x-2)(x-3)}$$

Συνεπώς $\left.\begin{cases}a+b=16\\3a+2b=28\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=20\end{cases}$ Άρα,

$$\int\frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}\,dx=\int\left[(x+5)+\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}\right]dx=\int(x+5)\,dx+\int\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+5x+\int\left[\frac{-4}{x-2}+\frac{20}{x-3}\right]dx=\frac{x^2}{2}+5x+\int\frac{-4}{x-2}dx+\int\frac{20}{x-3}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+5x-4\int\frac{1}{x-2}dx+20\int\frac{1}{x-3}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+5x-4\cdot ln|x-2|+20\cdot ln|x-3|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση 1.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int(3x-2)^5\,dx$, $\int\sqrt[3]{2x+1}\,dx$, $\int\frac{ln^2x}{x}\,dx$, $\int cos^4x\cdot sinx\,dx$.

Λύση.

•

$$\int(3x-2)^5\,dx=\frac{1}{3}\int3(3x-2)^5\,dx=\frac{1}{3}\underbrace{\int(3x-2)'(3x-2)^5\,dx}_{\text{ΒΛΕΠΕ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^6}{6}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

•

$$\int\sqrt[3]{2x+1}\,dx=\int(2x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{2}\int2(2x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int(2x+1)'\cdot(2x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx}_{\text{ΒΛΕΠΕ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c=\frac{3(2x+1)^{\frac{4}{3}}}{8}+c=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^4}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

• $$\int\frac{ln^2x}{x}\,dx=\int\frac{1}{x}\,ln^2x\,dx=\int(lnx)'\,ln^2x\,dx=\frac{(lnx)^{2+1}}{2+1}+c=\frac{ln^3x}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

• $$\int cos^4x\cdot sinx\,dx=-\int cos^4x\cdot(cosx)'\,dx=-\frac{(cosx)^{4+1}}{4+1}+c=-\frac{cos^5x}{5}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Επεξήγηση.

Ισχύει ότι $\int f^{\nu}(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 2.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int x\, e^{x^2} dx$, $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$, $\int 2^x \cos\left(2^x+1\right)\, dx$, $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx$.

Λύση.

- $\int x\, e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} 2x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(x^2\right)' e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \left(\sqrt{x}\right)' e^{\sqrt{x}}\, dx = 2e^{\sqrt{x}} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int 2^x \cos\left(2^x+1\right)\, dx = \int \frac{1}{ln2}\left(2^x+1\right)' \cos\left(2^x+1\right)\, dx =$

$$\frac{1}{ln2} \underbrace{\int \left(2^x+1\right)' \cos\left(2^x+1\right)\, dx}_{\text{ΒΛΕΠΕ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ}} = \frac{1}{ln2} \sin\left(2^x+1\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

- $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx = \int \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\, dx = \int \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}\, dx =$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \int \frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}\, dx = ln\left|e^x+1\right| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Επεξηγήσεις.

Ισχύει ότι $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Ισχύει ότι $\int \cos\left[f(x)\right] \cdot f'(x)\, dx = \sin\left[f(x)\right] + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Ισχύει ότι $\int \sin\left[f(x)\right] \cdot f'(x)\, dx = -\cos\left[f(x)\right] + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Ισχύει ότι $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln\left|f(x)\right| + c,\ c \in \mathbb{R}$

Άσκηση 3.

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int x\sqrt{x^2+4}\, dx$.

Λύση.

$$\int x\sqrt{x^2+4}\, dx = \int x\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int 2x\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\int \left(x^2+4\right)' \left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}} dx}_{\text{ΒΛΕΠΕ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + c =$$

$$\frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{1}{3} \sqrt{\left(x^2+4\right)^3} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Επεξήγηση.

Ισχύει ότι $\int f^{\nu}(x)\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 4.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int\dfrac{1}{x+2}\,dx$, $\int\dfrac{5}{3x-4}\,dx$, $\int\dfrac{x}{x^2+3}\,dx$, $\int\dfrac{1}{x\cdot lnx}\,dx$.

Λύση.

- $\int\dfrac{1}{x+2}\,dx=\int\dfrac{(x+2)'}{x+2}\,dx=ln|x+2|+c,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int\dfrac{5}{3x-4}\,dx=\dfrac{5}{3}\int\dfrac{3}{3x-4}\,dx=\dfrac{5}{3}\int\dfrac{(3x-4)'}{3x-4}\,dx=\dfrac{5}{3}ln|3x-4|+c,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int\dfrac{x}{x^2+3}\,dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{x^2+3}\,dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx=$

$\dfrac{1}{2}ln|x^2+3|+c=\dfrac{1}{2}ln(x^2+3)+c,\ c\in\mathbb{R}$

- $\int\dfrac{1}{x\cdot lnx}\,dx=\int\dfrac{\frac{1}{x}}{lnx}\,dx=\int\dfrac{(lnx)'}{lnx}\,dx=ln|lnx|+c,\ c\in\mathbb{R}$

Υπενθύμιση.

$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx=ln|f(x)|+c,\ c\in\mathbb{R}$

Άσκηση 5.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int[3sin(2x)-4cos(3x)]\,dx$, $\int(e^{3x}-5e^{-x}+6)\,dx$, $\int[sin(3x+2)+e^{2x+1}]\,dx$.

Λύση.

- $\int[3sin(2x)-4cos(3x)]\,dx=3\int sin(2x)\,dx-4\int cos(3x)\,dx=$

$3\left[-\dfrac{1}{2}cos(2x)\right]-4\left[\dfrac{1}{3}sin(3x)\right]=\dfrac{-3\cdot cos(2x)}{2}-\dfrac{4\cdot sin(3x)}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}$

- $\int(e^{3x}-5e^{-x}+6)\,dx=\int e^{3x}\,dx-5\int e^{-x}\,dx+\int 6\,dx=$

$\dfrac{1}{3}e^{3x}+5e^{-x}+x+c,\ c\in\mathbb{R}$

- $\int[sin(3x+2)+e^{2x+1}]\,dx=\int sin(3x+2)dx+\int e^{2x+1}dx=$

$-\dfrac{1}{3}cos(3x+2)+\dfrac{1}{2}e^{2x+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Επεξηγήσεις.

- $\int sin(ax)\ dx = -\frac{1}{a}cos(ax)+c,\ a,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$
- $\int sin(ax+\beta)\ dx = -\frac{1}{a}cos(ax+\beta)+c,\ \ a,\beta,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$
- $\int cos(ax)\ dx = \frac{1}{a}sin(ax)+c,\ a,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$
- $\int cos(ax+\beta)\ dx = \frac{1}{a}sin(ax+\beta)+c,\ \ a,\beta,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$
- $\int \frac{1}{cos^2(ax)}\ dx = \frac{1}{a}\ tan(ax)+c,\ a,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$
- $\int \frac{1}{sin^2(ax)}\ dx = -\frac{1}{a}\ \sigma\varphi(ax)+c,\ a,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$
- $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c,\ \ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

Άσκηση 6.

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου

(**α**) Ω_1 που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα xx' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

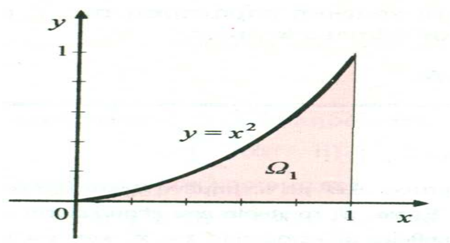
(**β**) Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$, τον άξονα xx' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$.

(**γ**) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^3$, τον άξονα xx' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=2$.

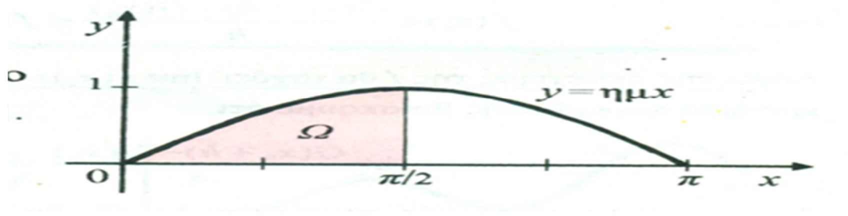
Λύση.

(**α**) Είναι

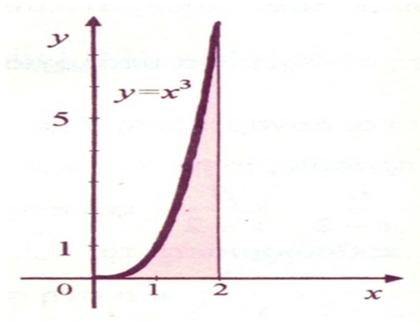
$$\mathrm{E}(\Omega_1)=\int_0^1 x^2\ dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$$



(**β**) Είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x\ dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}=\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)-(-\sigma\upsilon\nu 0)=0-(-1)=1$.



(γ) Είναι $\mathrm{E}=\int_0^2 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{16}{4}=4$.



Άσκηση 7.

(α) Βρείτε τον $\beta\in\mathbb{R}$ με $\beta>1$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=lnx$, τον άξονα xx' και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=\beta$ να ισούται με 1.

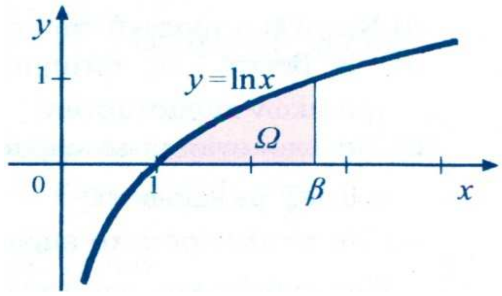
(β) Βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=x^2$ και $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$.

Λύση.

(α) Είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^\beta lnx\,dx=\left[x(lnx-1)\right]_1^\beta=\beta(ln\beta-1)-1(\cancel{ln1}-1)=\beta(ln\beta-1)+1$

Συνεπώς

$$\mathrm{E}(\Omega)=1\Leftrightarrow\beta(ln\beta-1)+1=1$$
$$\Leftrightarrow\beta(ln\beta-1)=0$$
$$\Leftrightarrow ln\beta-1=0$$
$$\Leftrightarrow\beta=e$$



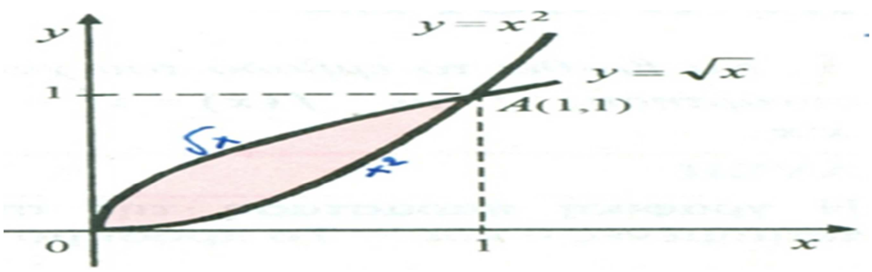
(β) Εύρεση των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f,\ g$.

$$g(x)=f(x)\Leftrightarrow x^2=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^4=x\Leftrightarrow x^4-x=0\Leftrightarrow x(x^3-1)=0\Leftrightarrow x=\begin{cases}0\\ ή\\ 1\end{cases}$$

Είναι $f(x)>g(x)\quad\forall x\in[0,\ 1]$.

Συνεπώς $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=$

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

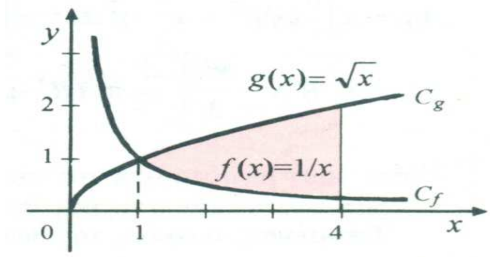


Άσκηση 8.

Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει όταν περιστραφεί περί τον άξονα xx' το χωρίο που περικλείεται από

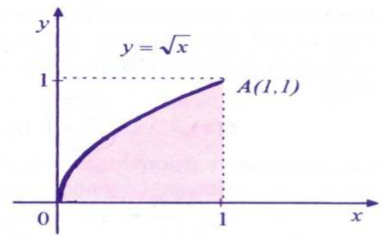
(**α**) τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x},\ \ 0\le x\le 1$, τον άξονα xx' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

(**β**) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=4$.



Λύση.

(**α**) Είναι



$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2\,dx=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

(**β**) Ισχύει ότι $\sqrt{x}\ge\dfrac{1}{x}\ge 0\ \ \forall x\in[1,\ 4]$. Συνεπώς,

$$V=\pi\int_1^4\left[g^2(x)-f^2(x)\right]dx=\pi\int_1^4\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]dx=\pi\int_1^4\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$\pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right]_1^4=\pi\left[\left(\frac{4^2}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1^2}{2}+\frac{1}{1}\right)\right]=\pi\left(8+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1\right)=\pi\left(7-\frac{1}{4}\right)=\frac{27\pi}{4}.$$

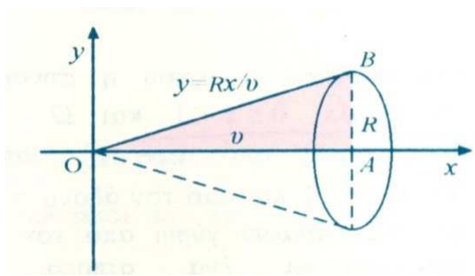
Άσκηση 9.

(**α**) Βρείτε τον όγκο V του κώνου που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ αν $\upsilon=\text{ΟΑ}$ και $\text{ΑΒ}=R$.

(**β**) Βρείτε τον όγκο V σφαίρας ακτίνας R.

Λύση.

(**α**) Τα σημεία $\text{Ο}(0,\ 0)$ και $\text{Β}(\upsilon,\ R)$ ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ που έχει κλίση $\lambda=\dfrac{R}{\upsilon}$.

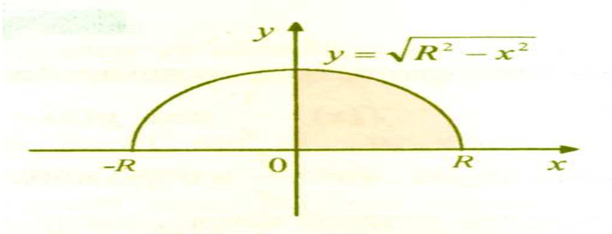


Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{R}{\upsilon}x$ με $x\in[0,\ \upsilon]$.

Άρα, $V=\pi\int_0^{\upsilon}\left(\frac{R}{\upsilon}x\right)^2\,dx=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon}x^2\,dx=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\upsilon}=\pi\frac{R^2}{\cancel{\upsilon^2}}\frac{\upsilon^3}{3}=\frac{\pi R^2\upsilon}{3}$.

(β) Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ με $x\in[-R,\ R]$.

Έστω Ω το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα xx' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=R$.



Το στερεό σώμα που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου Ω περί τον άξονα xx' έχει όγκο

$$V'=\pi\int_0^R\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\,dx=\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{2\pi R^3}{3}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος όγκος V της σφαίρας είναι $V=2V'=\frac{4\pi R^3}{3}$.

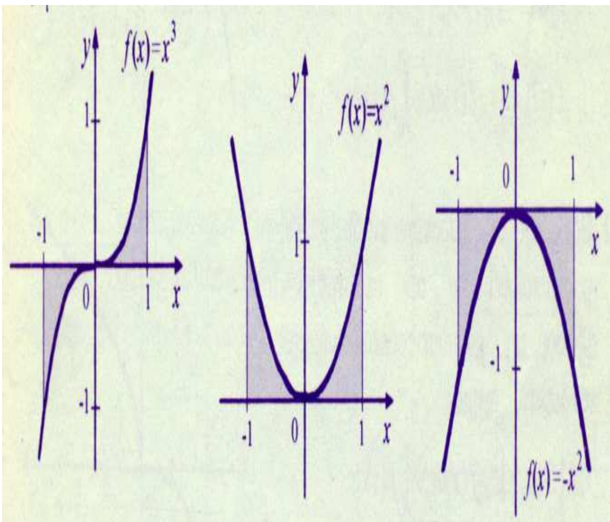
Άσκηση 10.

(α) Αντιστοιχίστε τους ακόλουθους τύπους που δίνουν το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω με καθένα από τα τρία σχήματα.

(i) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$,

(ii) $\mathrm{E}(\Omega)=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$,

(iii) $\mathrm{E}(\Omega)=-\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$



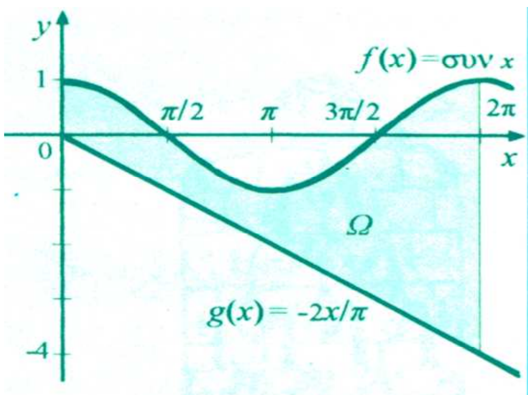
Σχήμα I. Σχήμα II. Σχήμα III.

(β) Ποιος τύπος περιγράφει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω του σχήματος; (α) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{2\pi}f(x)\,dx$

(β) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{2\pi}g(x)\,dx$

(γ) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{2\pi}\left[f(x)-g(x)\right]dx$

(δ) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{2\pi}\left[g(x)-f(x)\right]dx$



(ε) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{2\pi}\left[f(x)-g(x)\right]^2\,dx$

(στ) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{2\pi}\left[g(x)-f(x)\right]^2\,dx$

(ζ) $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{\pi/2}\left[f(x)-g(x)\right]dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left[-f(x)-g(x)\right]dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left[f(x)-g(x)\right]dx$

Λύση.

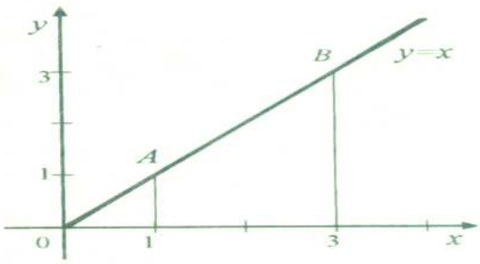
(α)

Σχήμα I	Σχήμα II	Σχήμα III
iii	i	ii

(β) Σωστός είναι ο τύπος (γ).

Άσκηση 11.

(α) Ποιός τύπος περιγράφει τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ περί τον άξονα xx';



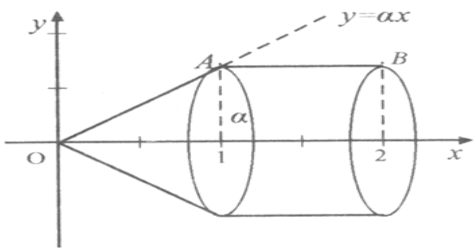
(α) $V=\int_1^3 x\,dx$ (β) $V=\int_1^3 x^2\,dx$

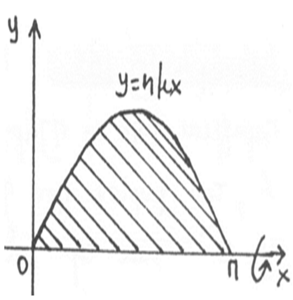
(γ) $V=\int_1^3 x^3\,dx$ (δ) $V=\pi\int_1^3 x\,dx$

(ε) $V=\pi\int_1^3 x^2\,dx$ (στ) $V=\pi\int_1^3 x^3\,dx$ (ζ) $V=\pi^2\int_1^3 x\,dx$ (η) $V=\pi^2\int_1^3 x^2\,dx$

(θ) $V=\pi^2\int_1^3 x^3\,dx$

(β) Ποιός τύπος περιγράφει τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' της τεθλασμένης γραμμής ΟΑΒ;





(γ) Βρείτε τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\eta\mu x$ με $x\in[0,\ \pi]$ και τον άξονα xx'.

Λύση.

(α) Σωστός είναι ο τύπος (ε) $V=\pi\int_1^3 x^2\,dx$.

(**β**) Είναι $V=\pi\int_0^1(\alpha x)^2\,dx+\pi\int_1^2\alpha^2\,dx$.

(**γ**) Είναι

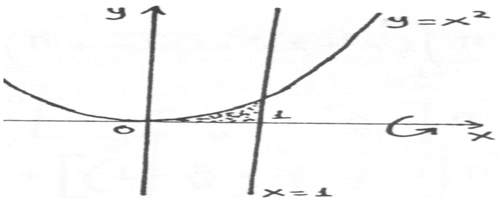
$$V=\pi\int_0^\pi y^2\,dx=\pi\int_0^\pi \eta\mu^2 x\,dx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(1-\sigma\upsilon\nu(2x)\right)dx=$$

$$\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\eta\mu(2x)\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}\left[\pi-\frac{1}{2}\eta\mu(2\pi)-0+\frac{1}{2}\eta\mu 0\right]=\frac{\pi}{2}\left(\pi\cancel{-\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}0}\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

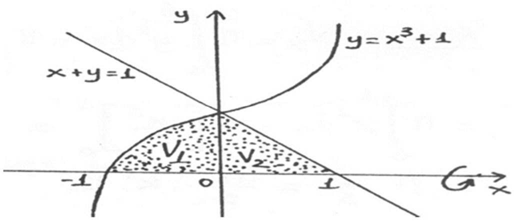
Άσκηση 12.

Βρείτε τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση

(**α**) της συνάρτησης $y=x^2$, τον θετικό ημιάξονα Ox και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.



(**β**) των συναρτήσεων $y=x^3+1$, $y=1-x$ και από τον άξονα xx'.



Λύση.

(**α**) Είναι $V=\pi\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right)=\frac{\pi}{5}$.

(**β**) Είναι

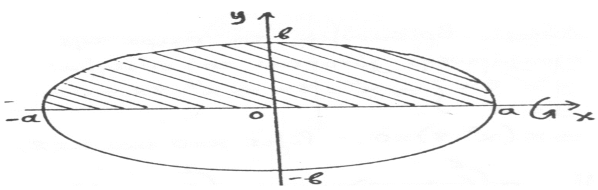
$$V=V_1+V_2=\pi\int_{-1}^0\left(x^3+1\right)^2dx+\pi\int_0^1(1-x)^2\,dx=\pi\int_{-1}^0\left(x^6+2x^3+1\right)dx+\pi\int_0^1(x-1)^2\,dx=$$

$$\pi\left[\frac{x^7}{7}+\frac{2x^4}{4}+x\right]_{-1}^0+\pi\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\pi\left[0-\left(-\frac{1}{7}+\frac{2}{4}-1\right)\right]+\pi\left[0-\frac{(-1)^3}{3}\right]=$$

$$\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{4}+1+\frac{1}{3}\right)=\pi\frac{6-21+42+14}{42}=\frac{41\pi}{42}.$$

Άσκηση 13.

Βρείτε τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει όταν το χωρίο που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, περιστραφεί κατά γωνία π περί τον άξονα (**α**) xx' (**β**) yy'.



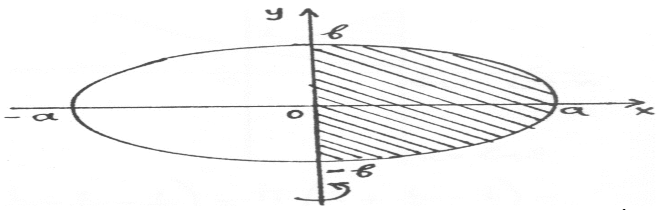
Λύση.

Όταν η έλλειψη στραφεί περί τον οριζόντιο άξονα xx' κατά γωνία π, παράγει τον ίδιο όγκο που παράγεται από την περιστροφή του γραμμοσκιασμένου άνω μισού τμήματος της έλλειψης κατά γωνία 2π, δηλαδή κατά μία ολόκληρη περιστροφή.

Είναι $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{\beta^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=\beta^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Συνεπώς,

$$V=\pi\int_{-\alpha}^{a} y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\beta^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\beta^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi\beta^2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$2\pi\beta^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=2\pi\beta^2\left[a-\frac{a^{\cancel{3}}}{3\cancel{a^2}}\right]=2\pi\beta^2\frac{2a}{3}=\frac{4\pi a\beta^2}{3}.$$



Όταν η έλλειψη στραφεί περί τον κατακόρυφο άξονα yy' κατά γωνία π, παράγει τον ίδιο όγκο που παράγεται από την περιστροφή του γραμμοσκιασμένου δεξιού μισού τμήματος της έλλειψης κατά γωνία 2π, δηλαδή κατά μία ολόκληρη περιστροφή.

Είναι $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}=1-\dfrac{y^2}{\beta^2} \Leftrightarrow x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{\beta^2}\right)$. Συνεπώς,

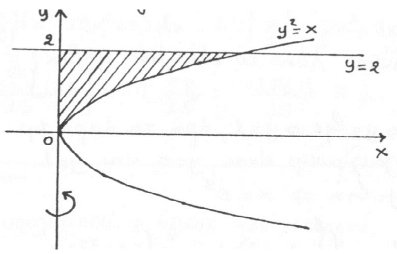
$$V=\pi\int_{-\beta}^{\beta} x^2\,dy=\pi\int_{-\beta}^{\beta}a^2\left(1-\frac{y^2}{\beta^2}\right)dy=\pi a^2\int_{-\beta}^{\beta}\left(1-\frac{y^2}{\beta^2}\right)dy=2\pi\alpha^2\int_{0}^{\beta}\left(1-\frac{y^2}{\beta^2}\right)dy=$$

$$2\pi a^2\left[y-\frac{y^3}{3\beta^2}\right]_0^\beta=2\pi\alpha^2\left[\beta-\frac{\beta^{\cancel{3}}}{3\cancel{\beta^2}}\right]=2\pi\alpha^2\frac{2\beta}{3}=\frac{4\pi a^2\beta}{3}.$$

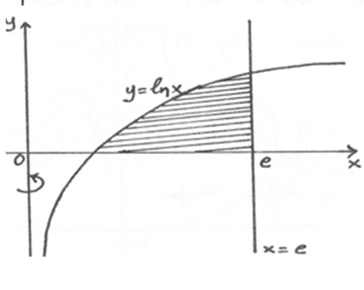
Άσκηση 14.

Βρείτε τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα yy' του χωρίου που περικλείεται από την

(**α**) καμπύλη με εξίσωση $y^2=x$, την ευθεία με εξίσωση $y=2$ και τον άξονα yy'.



(**β**) γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y=lnx$, τον άξονα xx' και την ευθεία με εξίσωση $x=e$.



Λύση.

(**α**) Είναι $V=\pi\int_0^2 x^2\ dy=\pi\int_0^2 y^4\ dy=\pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^5=\frac{32\pi}{5}$.

(**β**) Λύνω το σύστημα $\left\{\begin{matrix} y=lnx \\ x=e \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow y=lne=1$.

Άρα τα άκρα της ολοκλήρωσης είναι $y=0$ και $y=1$. Επίσης $y=lnx\Leftrightarrow x=e^y$.

$$V=\pi\int_\alpha^\beta\left(x_1^2-x_2^2\right)\ dy=\pi\int_0^1\left(e^2-e^{2y}\right)\ dy=\pi\left[ye^2-\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1=$$

$$\pi\left[e^2-\frac{1}{2}e^2-0+\frac{1}{2}e^0\right]=\pi\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)=\pi\frac{e^2+1}{2}.$$

Έργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη.

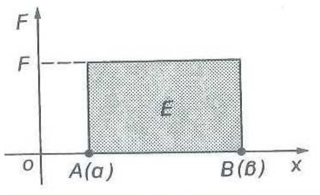
Αν η δύναμη F είναι σταθερή, το έργο W που παράγεται από τη δύναμη, όταν εφαρμόζεται σε υλικό σημείο και έχει ως διεύθυνση, τη διεύθυνση της κινήσεως και μετακινεί το σημείο απόσταση S από την αρχική θέση, κινούμενο επί ευθύγραμμης τροχιάς, είναι $W=F\cdot s$.

• Έστω υλικό σημείο που κινείται στον άξονα xx'. Θεωρώ ως θετική φορά του άξονα, τη φορά κίνησης του σημείου. Η θέση Α του σημείου στον άξονα, καθορίζεται από την απόσταση του από την αρχή Ο. Αν στο σημείο ασκείται δύναμη της οποίας το μέτρο εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου, η συνάρτηση που δίνει το μέτρο της δύναμης είναι y = F(x) όπου x η απόσταση του κινητού από την αρχή Ο.

Για τον υπολογισμό του έργου που παράγει η δύναμη, όταν μετατοπίζει το υλικό σημείο στον άξονα από τη θέση Α(α) στη θέση Β(β) διακρίνομε τις περιπτώσεις:

Α. Αν η δύναμη έχει τη φορά κινήσεως και είναι ανεξάρτητη του x, δηλαδή σταθερή, η συνάρτηση της δύναμης είναι y=F (σταθερή) και το ζητούμενο έργο W είναι $W=F\left(\beta-\alpha\right)=F\cdot s$ (**1**) Το έργο δίνεται αριθμητικά από το εμβαδό του χωρίου Ε (σχ. 1) και

$$E=W=\int_a^\beta F\ dx=F\int_a^\beta\ dx=F\left(\beta-\alpha\right)$$



Σχ. 1

Β. Αν η δύναμη έχει φορά που σχηματίζει γωνία θ με τη φορά κινήσεως και είναι ανεξάρτητη του x, δηλαδή σταθερή, αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη προς τη διεύθυνση κινήσεως μέτρου $F_x=F\cdot cos\theta$. Η κάθετη συνιστώσα δεν παράγει έργο, ενώ η επιτρόχια συνιστώσα είναι σταθερή κατά μέτρο και με διεύθυνση τη διεύθυνση κινήσεως, άρα το παραγόμενο έργο είναι

$$W=\int_a^\beta F\cdot cos\theta\ dx=F\cdot cos\theta\int_a^\beta\ dx=F\cdot cos\theta\left(\beta-\alpha\right)=F\cdot cos\theta\cdot s=F_x\cdot s \qquad (2)$$

Το πρόσημο του έργου καθορίζεται από το συνημίτονα της γωνίας θ. Αν $0^0<\theta<90^0$ το έργο είναι θετικό. Αν $\theta=90^0$ το έργο είναι μηδέν. Αν $90^0<\theta<180^0$ το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή καταναλισκόμενο.

Γ. Αν η δύναμη έχει τη φορά κινήσεως και εξαρτάται από το x, η συνάρτηση δυνάμεως είναι η συνεχής συνάρτηση $y=F\left(x\right)$ ορισμένη στο $\left[\alpha,\ \beta\right]$. Για τον υπολογισμό του ζητούμενου έργου ισοδιαμερίζω το $\left[\alpha,\ \beta\right]$ με τα διαιρετικά σημεία

$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$ και το πλάτος κάθε υποδιαστήματος είναι $\Delta_x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\beta-\alpha}{\nu} = 0$. Έτσι μπορώ να δεχτώ ότι σε καθένα από τα υποδιαστήματα $[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],...,[x_{\nu-1},\ x_\nu]$ η F διατηρεί σταθερή τιμή, έστω την τιμή που έχει στο αριστερό άκρο. Άρα, από (1) το έργο που παράγει η δύναμη από x_0 έως x_1 είναι $W_1 = F(x_0)(x_1 - x_0) = F(x_0)\cdot\dfrac{\beta-\alpha}{\nu} = F(x_0)\cdot\Delta_x$

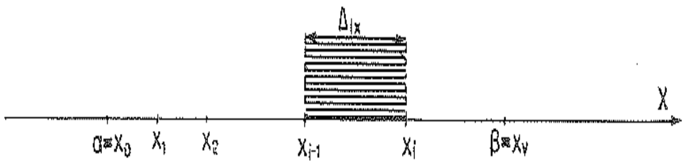
Όμοια, από x_1 έως x_2 είναι $W_2 = F(x_1)\cdot\Delta_x$ και τελικά από $x_{\nu-1}$ έως x_ν είναι $W_\nu = F(x_{\nu-1})\cdot\Delta_x$. Έτσι το παραγόμενο έργο στο $[\alpha,\ \beta]$ είναι $W = \lim\limits_{\Delta_x\to+\infty}\left[F(x_0)\cdot\Delta_x + F(x_1)\cdot\Delta_x + ... + F(x_{\nu-1})\cdot\Delta_x\right]$ όπου $\Delta_x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος για το έργο της F στο $[\alpha,\ \beta]$ είναι $W = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x)\ dx$ (3)

Έργο παραγόμενο από μεταβλητή δύναμη.

Αν η δύναμη δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται σε κάθε θέση x του υλικού σημείου, προκειμένου να βρω το έργο που παράγεται, όταν εφαρμόζεται στο υλικό σημείο και μετακινεί αυτό από τη θέση $x = a$ στη θέση $x = \beta$, εργάζομαι ως εξής:

Αφού η δύναμη μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, είναι συνάρτηση της τετμημένης x (παίρνω το δρόμο ως άξονα xx'), δηλαδή F(x) και έστω ότι είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$. Κάνω μία διαμέριση Δ_ν, του $[\alpha,\ \beta]$ την $\Delta_\nu = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta\}$:



Σχ. 9.1

Αν $\lambda \to 0$ και σε κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης θεωρηθεί η δύναμη σταθερή, η δύναμη στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1},\ x_i]$ μήκους $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ είναι F (ξ_i), όπου $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$ συνεπώς παράγει ένα στοιχειώδες έργο από x_{i-1} μέχρι x_i που είναι λόγω της (1) W_i=F (ξ_i) Δ_i χ, i=1,2,…….,ν. Αν πάρω το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών έργων είναι $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ W_i = $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ F(ξ_i) Δ_i x (2) που παρέχει μια πρώτη προσέγγιση του όλου έργου που παράγεται από την $F_{(X)}$ στο $[\alpha,\ \beta]$.

Παίρνοντας το όριο της (2) με $\lambda \to 0$ έχω, αφού υπέθεσα την F(x) συνεχή

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Wi = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi i)\Delta ix = \int_{\alpha}^{\beta} F(x)dx \quad \text{ή} \quad W = \int_{\alpha}^{\beta} F(x)dx \qquad (3)$$

Η (3) δίνει το έργο που παράγει η μεταβλητή δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα υλικό σημείο και μετακινεί αυτό, επί ευθυγράμμου τροχιάς, από α μέχρι β .

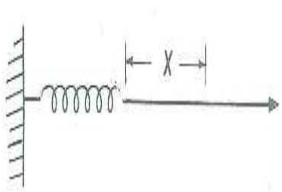
- Μάζα m από σημείο Α που απέχει r_A από το κέντρο της Γης ανυψώνεται σε σημείο Β που απέχει r_B από το κέντρο της γης. Για τον υπολογισμό της διαφοράς δυναμικής ενέργειας $E(B)-E(A)$, ισοδιαμερίζω το $[r_A, r_B]$ με τα διαιρετικά σημεία $r_0=r_A<r_1<r_2<\ldots<r_{\nu-1}<r_\nu=r_B$. Το πλάτος του κάθε υποδιαστήματος είναι $\Delta_r=\dfrac{r_B-r_A}{\nu}$ όπου $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\Delta_r=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{r_B-r_A}{\nu}=0$. Αν g_k η επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο που απέχει από το κέντρο της Γης r_k, τότε $g_k=\dfrac{G\cdot M}{r_k^2}$ όπου G η παγκόσμια σταθερά και M η μάζα της Γης. Η δυναμική ενέργεια της m στο σημείο αυτό είναι $m\cdot g\cdot r_k$ και η διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ του σημείου $P_{\kappa-1}$ με απόσταση $r_{\kappa-1}$ και του σημείου P_κ με απόσταση r_κ, είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{P}_\kappa)-\mathrm{E}(\mathrm{P}_{\kappa-1})=mg_\kappa\Delta r=m\cdot\frac{G\cdot M}{r_\kappa^2}\Delta r=G\cdot m\cdot M\cdot\frac{1}{r_\kappa^2}\Delta r$$

Τότε $E(B)-E(A)=\lim\limits_{\Delta_r\to0}\left[\dfrac{G\cdot m\cdot M}{r_1^2}\Delta_r+\dfrac{G\cdot m\cdot M}{r_2^2}\Delta_r+\ldots+\dfrac{G\cdot m\cdot M}{r_\nu^2}\Delta_r\right]$ και από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είναι

$$E(B)-E(A)=GmM\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=GmM\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}=GmM\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

• Σε ιδανικό ελατήριο ασκείται δύναμη ώστε να το επιμηκύνει κατά x. Η αντίσταση του ελατηρίου είναι μία δύναμη μέτρου F ανάλογου της επιμήκυνσης (νόμος Hooke) δηλαδή $F=k\cdot x$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου. Η διεύθυνση της F είναι η διεύθυνση της κίνησης, άρα ο (3) για το έργο της F και την απομάκρυνση από τη θέση x=α έως x=β είναι:



$$W=\int_a^\beta (k\cdot x)\,dx=k\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^\beta=k\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}.$$

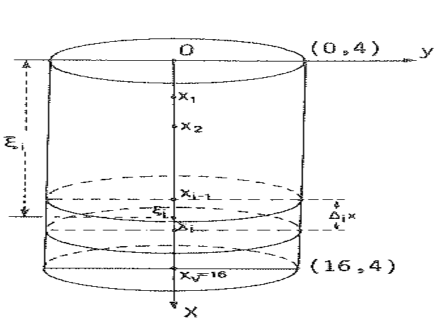
• Η επιμήκυνση του μήκους 10 cm ελατηρίου, είναι ανάλογη με τη δύναμη F που του ασκείται. Ποιό το έργο W της F=25 Kp, όταν το ελατήριο επιμηκύνεται κατά το $1/5$ του αρχικού του μήκους;

Λύση: Είναι F(x)=Kx, K=σταθερά και $x=\dfrac{1}{5}10=2\ cm=\dfrac{2}{100}\ m$ άρα

$F=k\cdot x\Leftrightarrow 25=k\dfrac{2}{100}\Leftrightarrow k=1.250$ οπότε

$$W=\int_0^{0,02}1250x\,dx=1250\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,02}=0,5KPm$$

• Ορθό κυλινδρικό δοχείο ακτίνας R=4 cm και ύψους υ=16 cm είναι γεμάτο νερό. Ποιό το έργο που παράγεται αντλώντας το νερό από την κορυφή του δοχείου;



Λύση: Έστω ο κύλινδρος του σχήματος και το σύστημα αξόνων xy που παίρνω ώστε η αρχή να είναι το κέντρο της βάσεως του κυλίνδρου και ο

xx' άξονας κατακόρυφος. Παίρνω ένα διαμερισμό του διαστήματος $[0,\ 16]$ και έστω $[x_{i-1},\ x_i]$ το τυχών υποδιάστημα με $\lambda \to 0$. Λόγω του διαμερισμού, ο κύλινδρος χωρίζεται σε στοιχειώδεις κυλίνδρους πάχους $\Delta_i x$, i =1,2,……….ν (**1**) το δε βάρος αυτού είναι $W_i = \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x$ με ε το ειδικό βάρος του νερού. Για όλους τους στοιχειώδεις κυλίνδρους, το παραγόμενο έργο είναι $\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x$, άρα

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x = \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \int_0^{16} x dx$$

Συνεπώς, $W = 16 \cdot \varepsilon \cdot \pi \left[\dfrac{x^2}{2} \right]_0^{16} = 16 \cdot \varepsilon \cdot \pi \cdot 128 = 2.048 \cdot \pi$ erg με $\varepsilon = 1 \ \dfrac{g}{cm^3}$.

• Μια δεξαμενή χωρητικότητας V_0=200 L περιέχει αέρα με πίεση $P_0=10^7$ N/m^3 που εκτονώνεται, σε σταθερή θερμοκρασία, μέχρι η πίεση να γίνει $P_1=10^5$ N/m^3, μέσα σε μηχανή χωρίς τριβές. Πόσο έργο παράγεται από αυτή την εκτόνωση;

Υποθέτω ότι ο αέρας ακολουθεί τον νόμο των Boyle-Marriott δηλαδή $P_1V_1=P_0V_0=C$ σταθερά (**1**). Έστω s το εμβαδό του κυλίνδρου της μηχανής μέσα στο οποίο εκτονώνεται ο αέρας της δεξαμενής. Το έμβολο του κυλίνδρου θα μετατοπισθεί κατά dx (ο κύλινδρος της μηχανής έχει τοποθετηθεί σε ένα σύστημα αξόνων xOy, ώστε ο xx' άξονας να είναι άξων του κυλίνδρου). Τότε παράγεται ένα έργο στοιχειώδες dw = Fdx (**2**), όπου F η ολική δύναμη. Είναι $P_1 = \dfrac{F}{S}$ ή $F = SP_1$ (**3**)

Άρα, η (2) γράφεται $dW = SP_1dx = P_1dV_1$ (**4**) Διότι $Sdx=dV_1$

Από (1) είναι $V_1 = \dfrac{P_0 \cdot V_0}{P_1}$ και παραγωγίζοντας $P_1dv_1+V_1dP_1=0$ ή $dV_1 = \dfrac{V_1 dP_1}{P_1}$ οπότε η (4) γράφεται $dW = -P_1V_1\dfrac{dP_1}{P_1} = -P_0V_0\dfrac{dP_1}{P_1}$. Ολοκληρώνοντας είναι:

$$W = -P_0V_0\int_{P_0}^{P_1}\frac{dP_1}{P_1} = -P_0V_0\left[\log P_1\right]_{P_0}^{P_1} = -P_0V_0\left(\log P_1 - \log P_0\right) = P_0V_0\log\frac{P_0}{P_1}$$

Και αντικαθιστώντας $W = 10^7 \cdot 0{,}2 \cdot \log 100 = 10^7 \cdot 0{,}2 \cdot 4{,}6 = 9{,}2 \cdot 10^6 \, Joules$

• Ποιό έργο παράγεται από τη δύναμη F με την οποία ηλεκτρικό φορτίο q_1 απωθεί άλλο q_2 από την θέση A_1 που απέχει από το q_1 απόσταση R_1 στη θέση A_2 που απέχει απόσταση R_2 από το q_1, αν το q_1 είναι τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος αξόνων;

Είναι $F = K\dfrac{q_1 . q_2}{R^2}$, άρα $W = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} FdR = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Kq_1q_2}{R^2} = Kq_1q_2\left[-\frac{1}{R}\right]_{R_1}^{R_2} = Kq_1q_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Ροπές επιπέδων χωρίων και στερεών εκ περιστροφής – κέντρα βάρους.

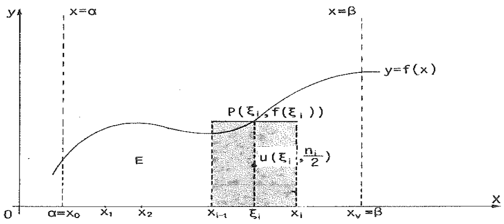
Η μάζα ενός στερεού σώματος είναι το μέτρο της ποσότητας της ύλης από την οποία αυτό αποτελείται, ενώ ο όγκος του είναι το μέτρο του χώρου που αυτό καταλαμβάνει στο διάστημα. Αν η μάζα, ανά μονάδα όγκου είναι ίδια, σε όλη την έκταση του σώματος, λέγεται ομογενές. Θα θεωρώ την πυκνότητα ίση με τη μονάδα. Συνηθίζεται (σε μηχανική και φυσική) να θεωρώ μια δεδομένη μάζα συγκεντρωμένη σε ένα σημείο που καλείται κέντρο μάζας (ή κέντρο βαρύτητας). Για ένα ομογενές σώμα αυτό το σημείο συμπίπτει με το κέντρο βάρους ή το γεωμετρικό του κέντρο. Π.χ το κέντρο μάζας μιας λαστιχένιας μπάλας συμπίπτει με το κέντρο βάρους (κέντρο) της μπάλας που υποτίθεται σαν γεωμετρικό στερεό (σφαίρα).

Το κέντρο βάρους ενός ορθογωνίου φύλλου χαρτιού κείται στη μέση απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών, αλλά μπορεί να θεωρηθεί τοποθετημένο σε μία των επιφανειών του, στην τομή των διαγώνιων. Άρα, το κέντρο μάζας ενός λεπτού ελάσματος ταυτίζεται με το κέντρο βάρους αυτού, που θεωρείται ως επίπεδη επιφάνεια, το δε εμβαδό της επιφάνειας ταυτίζεται αριθμητικά με τη μάζα του ελάσματος.

• Ονομάζω ροπή $M_Γ$ μίας επίπεδης επιφάνειας, ως προς μια γραμμή Γ, το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας επί την απόσταση d του κέντρου βάρους (κέντρο μάζας) από τη γραμμή Γ. Η ροπή μίας σύνθετης επιφάνειας, ως προς τη Γ, είναι το άθροισμα των ροπών των ανεξαρτήτων επιπέδων ως προς τη γραμμή Γ.

Αν η επιφάνεια αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy, τότε ροπή $M_χ$ αντίστοιχα M_y της επιφάνειας ως προς τους xx' και yy' άξονες, ονομάζω το γινόμενο του εμβαδού αυτής, επί την απόσταση του κέντρου βάρους της από τους xx' και yy' άξονες, αντίστοιχα. Αν μια επίπεδη επιφάνεια έχει εμβαδό Ε και κέντρο βάρους $K\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ με ροπές M_X, M_y, ως προς τους xx' και yy' άξονες αντίστοιχα, τότε από τον ορισμό $E\bullet\overline{X}=M_y$ και $E\bullet\overline{Y}=M_x$ (**1**)

Έστω ότι το κέντρο βάρους ενός ορθογωνίου είναι το σημείο τομής των διαγώνιων (το κέντρο αυτού). Μπορώ να υπολογίσω το κέντρο βάρους (συντεταγμένες) ενός επιπέδου χωρίου Ε που ορίζεται από συνάρτηση y=f(x) ορισμένη και συνεχή στο $[a,\ \beta]$, τις ευθείες $x=a,\ x=\beta$ και του xx' άξονα με $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,\ \beta]$.



Σχ.9.2

Έστω μια τυχούσα διαμέριση Δ_ν του $[a,\ \beta]$ την $\Delta_\nu=\{\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_\nu=\beta\}$ και $[x_{i-1},\ x_i]$ ένα τυχαίο υποδιάστημα αυτής.

Έστω σημείο $\xi_i\in(x_{i-1},\ x_i)$ το μέσο του.

Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $χ_{i-1}=\Delta_i x$ και ύψος $n_i=f(\xi_i)$ (Σχ. 9.2), τότε για το εμβαδό του στοιχειώδους αυτού ορθογωνίου είναι $E_i=n_i\Delta_i x$ με $i=1,2,...,\nu$ και για ροπή αυτού ως προς τον xx' άξονα $M_i x=\frac{n_i}{2}n_i\Delta_i x=\frac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\Delta_i x,\quad i=1,2,...,\nu$ και αν σχηματίσω τα αθροίσματα Riemann είναι $\sum_{i=1}^{\nu}M_i x=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)]^2\Delta_i x$.

Επειδή υπέθεσα ότι η f συνεχής $\forall x\in[\alpha,\beta]$, το όριο της υπάρχει και

$$M_x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}M_i x=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)]^2\Delta_i x=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(x)]^2dx \text{ ή } M_x=\frac{1}{2}\int_\beta^\alpha[f(x)]^2dx\ .$$

Επειδή $E=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ η (1) λόγω της (3) γίνεται $\overline{Y}\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(x)]^2dx$ ή

$\overline{\mathrm{Y}}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx}{\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx}$ (**4**) Αν λάβω τη ροπή του (2), ως προς τον y-άξονα είναι $M_iy=\xi_i n_i\Delta_i x=\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x$, i=1, 2,…ν και πάρω τα αθροίσματα Riemann, προκύπτει $M_y=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}M_iy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx$ ή $M_y=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx$ (**5**) οπότε η (1) λόγω της (5) γράφεται $\overline{X}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx$ ή $\overline{X}=\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx}$ (**6**)

• Ονομάζω ροπή του όγκου V ενός στερεού, που παράγεται από την περιστροφή επίπεδης επιφάνειας, περί άξονα συντεταγμένων, σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων και κάθετης στους άξονες, το γινόμενο του όγκου V επί την κάθετη απόσταση d του κέντρου βάρους της επιφάνειας από το κάθετο επίπεδο στους άξονες. Αν η επίπεδη επιφάνεια περιστραφεί περί τον xx' άξονα, το κέντρο βάρους της $K(\overline{X},\overline{Y})$ βρίσκεται στον xx' άξονα. Αν M_{yz} η ροπή του στερεού, σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και κάθετου στον xx' άξονα είναι $V\cdot\overline{x}=M_{yz},\ \overline{y}=0$ (**7**) δηλαδή το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $(\overline{x},0)$.

Αν η επίπεδη επιφάνεια περιστραφεί περί τον yy' άξονα, το κέντρο βάρους της $K(\overline{X},\overline{Y})$ βρίσκεται στον yy' άξονα. Αν M_{xz} η ροπή του στερεού σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και κάθετου στον yy' άξονα είναι $V\cdot\overline{y}=M_{xz},\ \overline{x}=0$ (**8**) δηλαδή το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $(0,\overline{y})$.

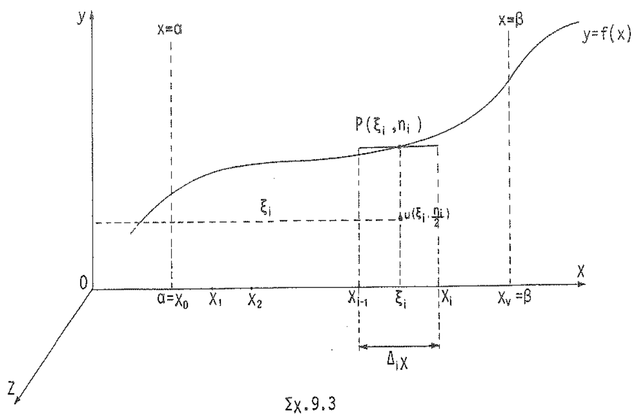
Με ανάλογο τρόπο, όπως στην περίπτωση του επίπεδου χωρίου βρίσκω $M_{yz}=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx$ (**9**) και αν $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx$ (**10**) ο όγκος εκ περιστροφής, ο (7) γράφεται λόγω των (9), (10) $\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx\cdot\overline{x}=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx$ ή $\overline{\mathrm{X}}=\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx}{\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx}$ με $\overline{y}=0$ (**11**) όταν ο άξονας περιστροφής περνά από το κέντρο βάρους.

1^{ο} Θεώρημα Πάππου. Αν μία επίπεδη επιφάνεια έχει περιστραφεί περί άξονα, που κείται στο επίπεδό της και δεν τέμνει την επιφάνεια, ο όγκος του στερεού που παράγεται ισούται με το γινόμενο της επιφάνειας (εμβαδού) και του μήκους του κύκλου που γράφεται από το κέντρο βάρους της επιφάνειας. Έτσι αν y=f(x)/[α,β] συνεχής με $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ και πάρω μια διαμέριση Δ_ν του $[a,\ \beta]$ την $\Delta_\nu=\{\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_\nu=\beta\}$ με $\lambda\to 0$ και στο τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$ αντιστοιχίσω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $x_i-x_{i-1}=\Delta_i x$

και ύψος $n_i = f(\xi_i)$, όπου $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ το μέσο αυτού (Σχ. 9.3) έχω, όταν αυτό περιστραφεί περί τον yy' άξονα,

ότι το $u\left(\xi_i, \frac{n_i}{2}\right)$ διαγράφει κύκλο ακτίνας ξ_i και μήκους $2\pi\xi_i$. Άρα, από θεώρημα του Πάππου, για τον όγκο που παράγει το στοιχειώδες ορθογώνιο είναι $V_i = 2\pi\xi_i \cdot f(\xi_i)\Delta_i x$, i=1,2,…,ν .

Αν πάρω το άθροισμα των στοιχειωδών όγκων V_i είναι



Σχ.9.3

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} V_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)dx \quad (12)$$

Η ροπή του στοιχειώδους όγκου V_i λόγω της (8) είναι $M_i xz = 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x \cdot \frac{f(\xi_i)}{2}$, i=1,2,…,ν . Αν πάρω το άθροισμα των ροπών $M_i xz$, λόγω της συνέχειας της f είναι

$$M_{xz} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} M_i xz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} 2\pi\xi_i \frac{[f(\xi_i)]^2}{2}\Delta_i x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx \quad \text{ή} \quad M_{xz} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx$$

(13). Η (8) από (12), (13) γράφεται

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)dx \cdot \overline{\mathrm{Y}} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx \ \text{ή} \ \overline{\mathrm{Y}} = \frac{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)dx}$$

με $\overline{X} = 0$ (14) όταν ο άξων περιστροφής περνά από το κβ.

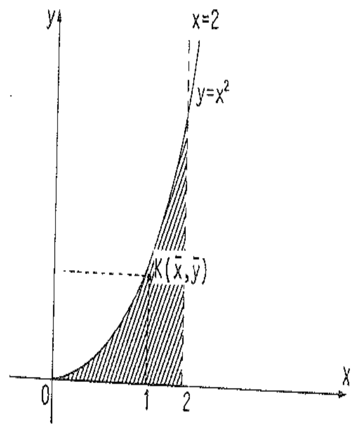
• Εύρεση κβ επιπέδου χωρίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=x^2$, την ευθεία x=2 και τον x-άξονα (Σχ. 9.4)

Λύση: Η καμπύλη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έτσι,

$$E = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \qquad M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16}{5}$$

$$M_y = \int_0^2 x \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4$$ Από (4), (6) είναι $\overline{\mathrm{Y}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{6}{5}$,

$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2}$ άρα $\mathrm{K}\left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right)$.



Σχ.9.4

• Εύρεση κβ του επιπέδου χωρίου που περιορίζεται από την καμπύλη $y=9-x^2$ και τις ευθείες x=0, y=0 (πρώτο τεταρτημόριο)

Λύση: Η καμπύλη τέμνει τους άξονες Ox, Oy στα σημεία (3, 0) & (0, 9) αντίστοιχα.

Έτσι, $$\mathrm{E}=\int_0^3\left(9-x^2\right)dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{54}{3}=18 \qquad M_x=\frac{1}{2}\int_0^3\left(9-x^2\right)^2dx=\frac{324}{5}$$

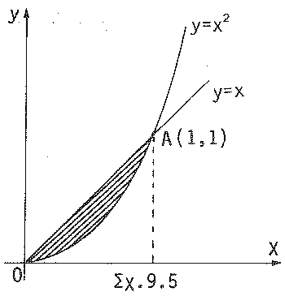
$$M_y=\int_0^3 x\left(9-x^2\right)dx=\frac{81}{4}$$. Τότε $\overline{X}=\dfrac{\frac{81}{4}}{18}=\dfrac{9}{8}$, $\overline{Y}=\dfrac{\frac{324}{5}}{18}=\dfrac{18}{5}$ άρα $K\left(\dfrac{9}{8},\dfrac{18}{5}\right)$.

• Εύρεση κβ του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=x$ (Σχ. 9.5)

Λύση: Τα σημεία που τέμνονται οι καμπύλες είναι A(1,1) και O(0,0). Τότε $\mathrm{E}=\int_0^1(x-x^2)dx=\dfrac{1}{6}$,

$$M_y=\int x(x-x^2)dx=\frac{1}{12} \quad M_x=\frac{1}{2}\int_0^1(x+x^2)(x-x^2)dx=\frac{1}{15}.$$

Από (4), (5) είναι $\overline{y}=\dfrac{2}{5}$, $\overline{x}=\dfrac{1}{2}$ άρα $K(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5})$.



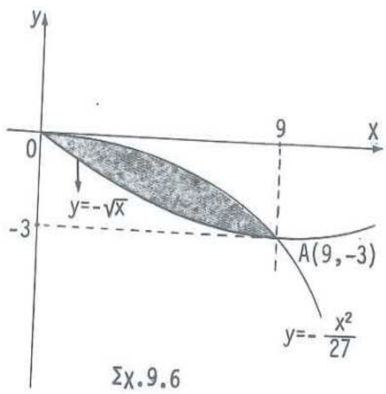
• Εύρεση κβ του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $x=y^2$ και $x^2=-27y$.

Λύση: Τα σημεία τομής των καμπυλών είναι (9,-3) και (0,0), οι δε καμπύλες γράφονται $y=-\sqrt{x}$ και $y=-\dfrac{x^2}{27}$, οπότε

$$\mathrm{E}=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}-(-\sqrt{x})\right)dx=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)dx=9$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int\left(-\frac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)\left(-\frac{x}{27}-\sqrt{x}\right)dx=-\frac{243}{20}$$

$$M_y=\int_0^9 x\left(-\frac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)dx=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{729}{20}.$$



Από (4), (5) $\overline{Y}=\dfrac{\frac{-243}{20}}{9}=-\dfrac{27}{20}$, $\overline{X}=\dfrac{\frac{729}{20}}{9}=\dfrac{81}{20}$.

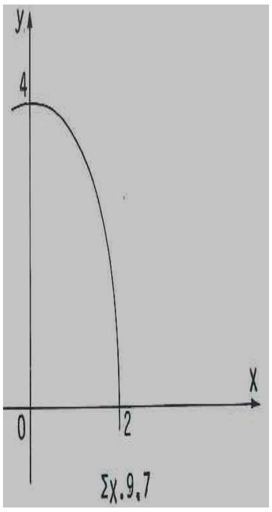
Άρα το κέντρο βάρους είναι $K(\dfrac{81}{20},-\dfrac{27}{20})$.

• Εύρεση κβ $K(\overline{X},0)$ του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από την καμπύλη $y=4-x^2$ και τις ευθείες x=0, y=0, περί άξονα xx'

Λύση: Η καμπύλη τέμνει τους άξονες στα σημεία (2, 0) και (0, 4).

Τότε $V=\pi\int_0^2\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_0^2(4-x^2)^2dx=\dfrac{256\pi}{15}$

$M_{yz}=\pi\int_0^2 x[f(x)]^2dx=\pi\int_0^2 x(4-x^2)^2dx=\dfrac{32\pi}{3}$ και από (11) είναι



$$\overline{X}=\frac{\dfrac{32\pi}{2}}{\dfrac{256\pi}{15}}=\frac{5}{8} \text{ άρα } \mathrm{K}(\frac{5}{8},0).$$

• Εύρεση κβ $\mathrm{K}(0,\overline{y})$ του στερεού του προηγούμενου προβλήματος, αν η περιστροφή γίνει γύρω από τον y-άξονα.

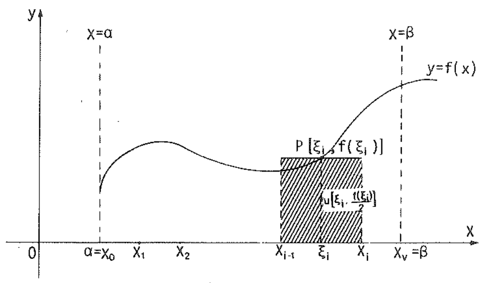
Λύση: Από (12), (13) είναι αντίστοιχα $V=2\pi\int_0^2 xf(x)dx=2\pi\int_0^2 x(4-x^2)dx=8\pi$

$$M_{xz}=\pi\int_0^2 x(4-x^2)^2dx=\frac{32\pi}{3} \text{ και από (14) } \overline{Y}=\frac{\dfrac{32\pi}{3}}{8\pi}=\frac{4}{3} \text{ άρα } K(0,\overline{y})=K(0,\frac{4}{3}).$$

Ροπές αδρανείας επιπέδων επιφανειών & στερεών εκ περιστροφής.

Έστω y=f(x)/$[a,\ \beta]$ συνεχής, με $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,\ \beta]$ και Ε το εμβαδό το οριζόμενο από την f(x), τις ευθείες x=α, x=β, και τον xx' άξονα, ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων.

Ονομάζω ροπή αδράνειας I_x, I_y, ως προς xx', yy' άξονες ενός ορθογωνίου συστήματος, μιας επίπεδης επιφάνειας, το γινόμενο του εμβαδού Ε αυτής επί το τετράγωνο της αποστάσεως του κέντρου βάρους της από τους Οx αντίστοιχα Οy άξονες του συστήματος.



Σχ.9.8

Αν πάρω μία διαμέριση Δ_ν του $[a,\ \beta]$ την $\Delta_\nu=\{\alpha=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_\nu=\beta\}$ και θεωρήσω το τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1},\ x_i]$ και σε αυτό αντιστοιχίσω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση x_i-x_{i-1}=Δ_ix και ύψος f(ξ_i) που αντιστοιχεί στο σημείο $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ μέσο αυτού.

Τότε εξ΄ ορισμού είναι $\mathrm{I}_i x=\frac{[f(\xi_i)]^2}{4}f(\xi_i)\Delta_i x$ αντίστοιχα $\mathrm{I}_i y=\xi_i^2 f(\xi_i)\Delta_i x$ με i=1,2,…,ν και αν αθροίσω όλες τις στοιχειώδεις ροπές που αντιστοιχούν στα στοιχειώδη ορθογώνια στη δεδομένη διαμέριση είναι

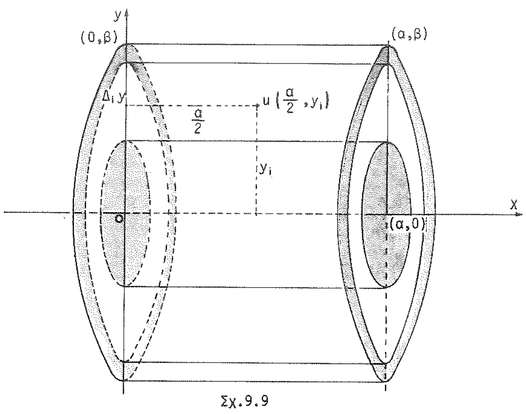
$$\mathrm{I}_x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{[f(\xi_i)]^2}{4}f(\xi_i)\Delta_i x \text{ αντίστοιχα } \mathrm{I}_y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2 f(\xi_i)\Delta_i x$$

και επειδή η f(x)/[α,β] είναι συνεχής, τα ανωτέρω όρια υπάρχουν και δίνουν

$$\mathrm{I}_x=\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta [f(x)]_3 dx \text{ αντίστοιχα } \mathrm{I}_y=\int_\alpha^\beta x^2 f(x)dx \ (15)$$

• Ονομάζω ροπή αδρανείας του όγκου V ενός στερεού που παράγεται από την περιστροφή μιας επίπεδης επιφάνειας περί άξονα (άξονα στερεού), το γινόμενο του όγκου του παραγόμενου στερεού επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου βάρους της επιφάνειας από τον άξονα.

Έστω ότι θέλω να βρω τη ροπή αδρανείας ενός κυλίνδρου, ως προς τον άξονα αυτού, που παράγεται από ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β που περιστρέφεται περί την α.



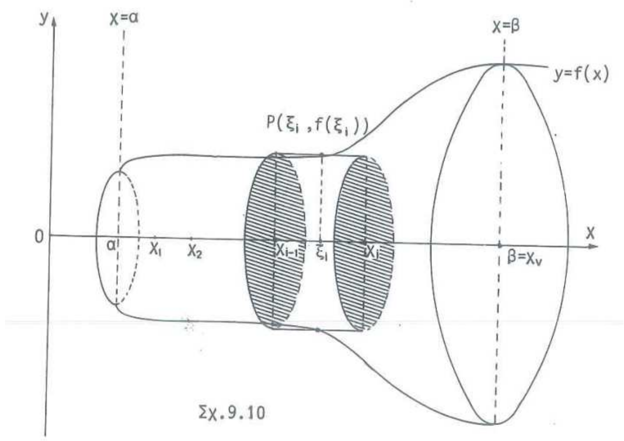
Παίρνω ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy έτσι ώστε οι Ox, Oy να βρίσκονται στις διαδοχικές πλευρές του ορθογωνίου. Παίρνω το στοιχειώδες ορθογώνιο που έχει βάση α και ύψος Δ_iy. Αυτό έχει κέντρο βάρους $u(\frac{\alpha}{2}, y_i)$, συνεπώς η ροπή αδρανείας αυτού ως προς τον x-άξονα είναι $J_i x = y_i^2(\alpha\Delta_i y)$, i=1,2,…ν του δε στερεού που παράγεται από το στοιχειώδες ορθογώνιο βάσει του θεωρήματος του Πάππου είναι

$\mathrm{I}_i x = 2\pi y_i y_i^2 \alpha \Delta_i y$, i=1,2,…,ν και αν πάρω το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών ροπών αδρανείας, ως προς τον x-άξονα είναι

$$\mathrm{I}_x = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i x = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i=1}^{\nu} 2\pi y_i y_i^2 \alpha \Delta_i x = 2\pi\alpha\int_0^{\beta} y^3 dy = 2\pi\alpha\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{\beta} = \frac{\pi\alpha\beta^4}{2} = \frac{1}{2}\pi\alpha\beta^2\cdot\beta^2$$

και αν λάβω υπόψη ότι το δοθέν ορθογώνιο περιστρεφόμενο περί τον x-άξονα παράγει κύλινδρο όγκου V=πβα τότε η ανωτέρω γράφεται $\mathrm{I}_x = \frac{1}{2}V\beta^2$ (**16**) όπου β ακτίνα του κυλίνδρου, όταν περιστρέφεται περί τον x-άξονα.

Αν το ορθογώνιο περιστρέφεται περί τον y-άξονα η ροπή, ως προς αυτόν τον άξονα είναι $\mathrm{I}_y = \frac{1}{2}V\alpha^2$ (**17**) όπου α ακτίνα του κυλίνδρου.



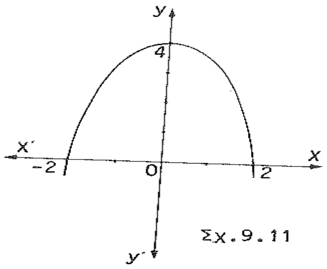
Από (16) και (17) μπορώ να βρω τη ροπή αδρανείας του όγκου στερεού που παράγεται από την περιστροφή μίας επίπεδης επιφάνειας περί τον x-άξονα, ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων και που περικλείεται από την συνεχή καμπύλη y=f(x)/[α,β] τις ευθείες x=α, x=β και τον x-άξονα (Σχ. 9.10)

Κάνω μια διαμέριση Δ_ν του [α,β] την $\Delta_\nu = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta\}$ με $\lambda \to 0$, παίρνω τον τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, i=1,2,…,ν και σχηματίζω τους στοιχειώδεις κυλίνδρους που παράγονται από τα στοιχειώδη ορθογώνια με βάσεις $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ και ύψος $f(\xi_i)$, i=1,2,…,ν περιστρεφόμενα περί τον x-άξονα.

Οι στοιχειώδεις αυτοί κύλινδροι έχουν ύψος Δ_ix και ακτίνα $f(\xi_i)$, όπου $\xi_i \in (x_{i-1,} x_i)$ μέσον αυτού. Κάθε στοιχειώδης κύλινδρος έχει όγκο $\Pi[f(\xi_i)]^2\Delta_i x$ η δε ροπή αδρανείας, ως προς τον x-άξονα, από (16) είναι $\mathrm{I}_i x = \frac{1}{2}\pi[f(\xi_i)]^2\Delta_i x[f(\xi_i)]^2 = \frac{1}{2}\pi[f(\xi_i)]^4\Delta_i x$ και αν αθροίσω τις ροπές αδρανείας όλων των στοιχειωδών κυλίνδρων είναι $\mathrm{I}_x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{2}\pi[f(\xi_i)]^4\Delta_i x$ και επειδή η f(x)/[α,β] είναι συνεχής, το όριο υπάρχει και συνεπώς $\mathrm{I}_x = \frac{\pi}{2}\int_\alpha^\beta [f(x)]^4 dx$

(**18**) . Ομοίως προκύπτει $\mathrm{I}_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x^3 f(x)dx$ (**19**)

• Ακτίνα ροπής αδρανείας καλείται ο θετικός αριθμός R που καθορίζεται από τη σχέση $I\varepsilon = ER^2$, στην περίπτωση επίπεδης επιφάνειας εμβαδού E και από τη σχέση $I\varepsilon = VR^2$, στην περίπτωση στερεού εκ περιστροφής όγκου V, σε σχέση με τον άξονα (ε).

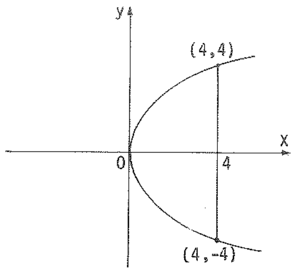


Σχ.9.11

• Εύρεση ροπής αδρανείας ως προς y-άξονα του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y=4-x^2$ και τον x-άξονα.

Λύση: Η παραβολή τέμνει τον x-άξονα στα σημεία (-2,0), (2,0) και από (15) είναι $\mathrm{I}_y = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)dx = 2\int_0^2 (4x^2-x^4)dx = 2\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128}{15}$ Επειδή $\mathrm{E} = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$ είναι για την ακτίνα ροπής αδρανείας από τον τύπο $\mathrm{I}_y = ER^2$ ή $\frac{128}{15} = \frac{32}{3}R^2$ ή $R = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

• Εύρεση η ροπή αδρανείας, ως προς τον x-άξονα, του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2=4x$ και την ευθεία x=4.



Σχ.9.12

Λύση: Από (15) για το μισό του χωρίου που είναι πάνω από τον x-άξονα $\mathrm{I}_1 x = \frac{1}{4}\int_0^4 y^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}} dx$

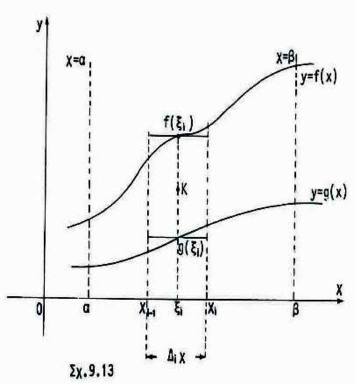
Άρα, η ροπή αδρανείας ολοκλήρου του επιπέδου χωρίου είναι $\mathrm{I}_x = 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}4^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{256}{5}$

Το εμβαδό του χωρίου είναι $\mathrm{E} = 2\int_0^4 f(x)dx = 2\int_0^4 (4x)^{\frac{1}{2}}dx = 2\cdot 4^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{64}{3}$

Συνεπώς, $R^2 = \frac{\mathrm{I}_x}{E} = \frac{\frac{256}{5}}{\frac{64}{3}} = \frac{12}{5}$ ή $R = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

• Εύρεση ροπής αδρανείας του επιπέδου χωρίου, που ορίζεται από τις καμπύλες y=f(x) και y=g(x) ορισμένων στο [α,β] και συνεχών, ως προς τους άξονες x και y

Λύση: Αν πάρω μια διαμέριση του $[\alpha,\ \beta]$ και στο τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1},\ x_i]$ ένα ενδιάμεσο σημείο ξ_i, το μέσο αυτού είναι για το κέντρο βάρους του τυχόντος



Σχ.9.13

ορθογωνίου $K(\xi_i, \frac{f(\xi_i)-g(\xi_i)}{2})$. Η απόσταση του Κ από τον x-άξονα είναι $\frac{f(\xi_i)+g(\xi_i)}{2}$. Εξ΄ ορισμού είναι για το ορθογώνιο $I_i x = \frac{[f(\xi_i)+g(\xi_i)]^2}{4}[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\Delta_i x$ αντίστοιχα $I_i y = \xi_i^2[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\Delta_i x$ και αν πάρω τα αθροίσματα για όλα τα ορθογώνια είναι $I_x = \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta [f^2(x)-g^2(x)][f(x)+g(x)]dx$ αντίστοιχα $I_y = \int_\alpha^\beta x^2[f(x)-g(x)]dx$

• Εύρεση ροπής αδρανείας, περί τον άξονα των x, του στερεού που παράγεται με περιστροφή του επίπεδου χωρίου που περιέχεται στο πρώτο τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος αξόνων και ορίζεται από τις γραμμές $y^2=4x$, $y=0$, $x=3$, αν αυτό περιστραφεί περί τον x-άξονα.

Λύση: Από (18) είναι $I_x = \frac{\pi}{2}\int_0^3 [f(x)]^4 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^3 (4x)^2 dx = 8\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 72\pi$

Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $V = \pi\int_0^3 4x dx = 4\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 18\pi$ και για την ακτίνα ροπής είναι $R^2 = \frac{I_x}{V} = \frac{72\pi}{18\pi} = 4$ άρα R=2

• Εύρεση ροπής αδρανείας, ως προς τον y-άξονα, του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του επιπέδου χωρίου του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση: Από (19) $I_y = 2\pi\int_0^3 x^3 f(x)dx = 4\pi\int_0^3 x^3 x^{\frac{1}{2}} dx = 4\pi\int_0^3 x^{\frac{7}{2}} dx = 4\pi\left[\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\right]_0^3 = 72\sqrt{3}\pi$

Κέντρο βάρους & ροπές αδρανείας επίπεδης καμπύλης.

• Ονομάζω ροπή υλικού σημείου μάζας m ως προς ευθεία Γ, το γινόμενο της μάζας m επί την απόσταση d του υλικού σημείου από τη Γ. Το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί d^2 ορίζεται ως ροπή αδρανείας του υλικού σημείου ως προς τη Γ. Είναι αντίστοιχα $M_Γ = md$ και $I_Γ = md^2$ (1)

• Αν υπάρχει στο επίπεδο, ένα σύστημα υλικών σημείων που μαζών m_i, i=1,2,…,ν με αντίστοιχες αποστάσεις από την ευθεία Γ,d_i, i=1,2,…,ν τότε ορίζω ως ροπή και ροπή αδρανείας, τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{\nu} M_{iΓ} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i d_i$ αντίστοιχα $\sum_{i=1}^{\nu} I_{iΓ} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i d_i^2$ (2)

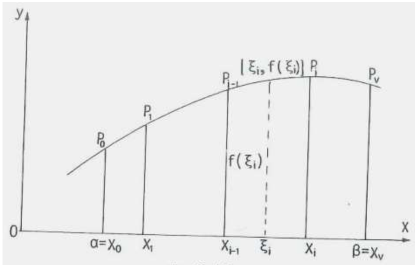
Έστω ότι στο επίπεδο που ανήκει το υλικό σημείο μάζας m υπάρχει σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy. Τότε έχει συντεταγμένες (x,y) άρα οι (1) γράφονται $M_x=my$, $M_y=mx$ (3) αντίστοιχα $I_x=my^2$, $I_y=mx^2$ (4). Αν (x_i,y_i) είναι οι συντεταγμένες των σημείων μαζών m_i, i=1,2,…,ν οι (2) γράφονται $\sum_{i=1}^{\nu} M_i x = \sum_{i=1}^{\nu} m_i y_i$, $\sum_{i=1}^{\nu} M_i y = \sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i$ (5) αντίστοιχα $\sum_{i=1}^{\nu} I_i x = \sum_{i=1}^{\nu} m_i y_i^2$, $\sum_{i=1}^{\nu} I_i y = \sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i^2$ (6)

Αν για το σύστημα των υλικών σημείων m_i , i=1,2,…,ν θεωρήσω σημείο $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$, του συστήματος αξόνων, στο οποίο είναι συγκεντρωμένες οι μάζες αυτές, ώστε $\sum_{i=1}^{\nu} m_i\bar{x}=\sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i$, $\sum_{i=1}^{\nu} m_i\bar{y}=\sum_{i=1}^{\nu} m_i y_i$ (**7**), το σημείο $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ ονομάζεται κέντρο βάρους του συστήματος m_i , i=1,2,…,ν.

Κέντρο βάρους επίπεδης καμπύλης &ροπές αδρανείας.

Έστω καμπύλη εξίσωσης y=f(x)/[α,β] συνεχής, με συνεχή f ΄(x) $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Την καμπύλη αυτή θεωρώ ως σύνολο υλικών σημείων και ομογενή. Στην ομογενή καμπύλη, η μάζα ενός μέρους της είναι ανάλογη του μήκους του μέρους αυτού. Θεωρώ ότι η πυκνότητα P=1, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα του προβλήματος.

Έστω $P_0\,P_\nu$ το τόξο της καμπύλης που ορίζεται από την y=f(x)/[α,β]. Κάνω ένα διαμερισμό Δ_ν του [α,β] τον $\Delta_\nu=\{\alpha=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_\nu=\beta\}$ με $\lambda\to 0$ και παίρνω το τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$, i=1,2,…,ν. Από τα σημεία της διαμερίσεως φέρω παραλλήλους προς τον άξονα των y που τέμνουν το τόξο $P_0\,P_\nu$ στα σημεία $P_0, P_1,…, P_{i-1}, P_i,…, P_\nu$ και ορίζουν στοιχειώδη τόξα.



Σχ.9.14

Έστω $P_{i-1}P_i=\Delta_i S$ ένα τέτοιο τόξο, i=1,2,…,ν. Τότε $\Delta_i S$ έχει μάζα $\Delta m_i=P\Delta_i S=\Delta_i S$, i=1,2,…,ν (1) διότι θεώρησα ότι πυκνότητα P=1.

Έστω $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ένα ενδιάμεσο σημείο του τυχαίου υποδιαστήματος. Στο τόξο $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i=\Delta_i S$ αντιστοιχεί το σημείο $(\xi_i, f(\xi_i))$ στο οποίο θεωρώ συγκεντρωμένη τη μάζα αυτού, άρα από (5) είναι $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_i x=\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta_i S$, $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_i y=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\Delta_i S$ και επειδή η συνάρτηση y=f(x) είναι συνεχής $\forall x\in[\alpha,\beta]$ υπάρχει το όριο, με $\lambda\to 0$ οπότε

$$\mathrm{M}_x=\lim\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_i x=\lim\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta_i S=\int_\alpha^\beta f(x)dS\,,\ \mathrm{M}_y=\lim\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_i y=\lim\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\Delta_i S=\int_\alpha^\beta x dS$$

Άρα, οι ροπές του τόξου που ορίζεται από την καμπύλη με εξίσωση y=f(x) και τις ευθείες x=α, x=β ως προς τους x,y άξονες είναι $\mathrm{M}_x=\int_\alpha^\beta f(x)dS$, $\mathrm{M}_y=\int_\alpha^\beta x dS$ (**8**)

ή $\mathrm{M}_x=\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, $\mathrm{M}_y=\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ (**9**)

Επίσης, από (6) είναι $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i x=\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2\Delta_i S$, $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i y=\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2\Delta_i S$ οπότε

$$\mathrm{I}_x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)]^2\Delta_i S=\int_\alpha^\beta y^2 dS \text{ και } \mathrm{I}_y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_i y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2\Delta_i S=\int_\alpha^\beta x^2 dS$$

Άρα, οι ροπές αδρανείας του τόξου που ορίζεται από την καμπύλη y=f(x) και τις ευθείες x=α, x=β ως προς τους x,y άξονες είναι $\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta y^2 dS$, $\mathrm{I}_y=\int_\alpha^\beta x^2 dS$ ή

$$\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta [f(x)]^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\quad \mathrm{I}_y=\int_\alpha^\beta x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\ (\mathbf{10})$$

Από (7) είναι $\sum_{i=1}^{\nu}\bar{x}\Delta_i S=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\Delta_i S$, $\sum_{i=1}^{\nu}\bar{y}\Delta_i S=\sum_{i=1}^{\nu}f(\xi_i)\Delta_i S$ και επειδή τα όρια υπάρχουν λόγω της συνεχείας έχω τελικά με $\lambda\to 0$ $\bar{x}\cdot S=\int_\alpha^\beta xdS$, $\bar{y}\cdot S=\int_\alpha^\beta ydS$ **(10΄)** ή επειδή

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \text{ είναι } \bar{x}=\frac{\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx},\ \bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx} \quad \textbf{(11)}$$

• Εύρεση κ.β. 1^ου^ τεταρτημορίου τόξου του κύκλου $x^2+y^2=9$.

Λύση. Είναι $f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, $1+[f'(x)]^2=1+\frac{x^2}{y^2}=\frac{9}{y^2}$, $y=\sqrt{9-x^2}$, από (11)

είναι $$\bar{x}=\frac{\int_0^3 x\frac{3}{y}dx}{\int_0^3\frac{3}{y}dx}=\frac{3\int_0^3\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx}{3\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}}=\frac{-[\sqrt{9-x^2}]_0^3}{[\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{3}]_0^3}=\frac{6}{\pi},\quad \bar{y}=\frac{\int_0^3 y\frac{3}{y}dx}{3\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{\pi},$$ άρα

$K(\bar{x},\bar{y})=K(\frac{6}{\pi},\frac{6}{\pi})$. Οι ροπές του τεταρτημορίου είναι, ως προς τους x,y-άξονες, από

(9) $\mathrm{M}_x=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=3\int_0^3 dx=9$,

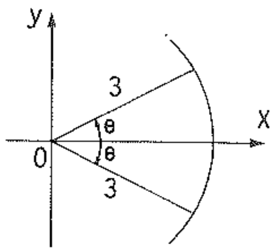
$\mathrm{M}_y=\int_0^3 x\frac{3}{y}dx=3\int_0^3\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=-3\left[\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3=9$

Για ροπές αδρανείας είναι από (10) $\mathrm{I}_x=\int_0^3(9-x^2)\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=3\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=\frac{27\pi}{4}$

$$\mathrm{I}_y=\int_0^3 x^2\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=3\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{27\pi}{4}$$

• Εύρεση κ.β.κυκλικού τόξου ακτίνας R=3 και επίκεντρης γωνίας 2θ.

Λύση. Παίρνω τόξο όπως στο σχήμα και το κέντρο βάρους είναι $(\bar{x},0)$. Η εξίσωση της περιφερείας του κύκλου που ανήκει το τόξο είναι $x^2+y^2=9$ άρα $\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$ και από (7) είναι $dS=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ $dy=\frac{3}{x}dy$. Το y μεταβάλλεται από 0 μέχρι 3ημθ διότι το $\bar{x}$ του τόξου ταυτίζεται με το $\bar{x}$ του άνω μισού. Έτσι,



Σχ.9.15

$\bar{\mathrm{X}}=\frac{\int_0^{3\eta\mu\theta}x\frac{3}{x}dy}{3\theta}=\frac{3[y]_0^{3\eta\mu\theta}}{3\theta}=\frac{3\eta\mu\theta}{\theta}$, $\bar{y}=0$ (το τόξο που έχει γωνία θ σε ακτίνα έχει μήκος S=Rθ).

• Εύρεση ροπής αδρανείας της υποκυκλοειδούς $x=R\eta\mu^3t$, $y=R\sigma\upsilon\nu^3t$, ως προς xx΄.

Λύση. Από (10) $\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta y^2\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ και $\frac{dx}{dt}=3R\eta\mu^2 t\sigma\upsilon\nu t dt$, $\frac{dy}{dt}=-3R\sigma\upsilon\nu^2 t\eta\mu t dt$. Η Ιx είναι τετραπλάσια της ροπής του 1ου τεταρτημορίου λόγω συμμετρίας. Άρα,

$$\mathrm{I}_x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sigma\upsilon\nu^6 t\cdot 3R\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t dt=-12R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^7 t\cdot d\sigma\upsilon\nu t=\frac{3}{2}R^3$$

Άρα, $\mathrm{I}_x=\frac{3}{2}R^3$.

Κέντρο βάρους & ροπές αδρανείας επιφάνειας εκ περιστροφής.

2ο Θεώρημα του Πάππου. Αν ένα τόξο καμπύλης περιστρέφεται περί άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του, αλλά δεν τέμνει το τόξο, το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή αυτού, ισούται με το γινόμενο του μήκους του τόξου και του μήκους της περιφέρειας του κύκλου που διαγράφει το κέντρο βάρους του τόξου. Έστω η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή του τόξου P_0P_ν (Σχ.9.14) της (9.4.1), περί x-άξονα, με τις προϋποθέσεις που τέθεισαν εκεί για την καμπύλη y=f(x). Το στοιχειώδες τόξο Δ_iS παράγει μία επιφάνεια εμβαδού $\mathrm{E}_i=2\pi f(\xi_i)\Delta_i S$ (1) και συνεπώς ροπή $\mathrm{M}_i y=2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta_i S$. Το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή του τόξου P_0P_ν είναι συνεπώς

$$\mathrm{E}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{E}_i=2\pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta_i S=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)dS \text{ ή}$$

$$\mathrm{E}=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \quad (2) \text{ και η ροπή}$$

$$\mathrm{M}_y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_i y=2\pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i f(\xi_i)\Delta_i S=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)dS \text{ ή}$$

$$\mathrm{M}_y=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \quad (3)$$

Ο (1) από (2), (3) γράφεται

$$2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\cdot\overline{\mathrm{X}}=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \text{ ή}$$

$$\overline{\mathrm{X}}=\frac{\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx},\ \overline{y}=0 \quad (4)$$

Για τη ροπή αδρανείας του στοιχειώδους εμβαδού είναι $\mathrm{I}_i x=2\pi f(\xi_i)\Delta_i S\cdot[f(\xi_i)]^2=2\pi[f(\xi_i)]^3 dS$ άρα,

$$\mathrm{I}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_i x = 2\pi \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)]^3 dS = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^3 dS$$ ή

$$\mathrm{I}x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^3\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \quad (5)$$

• Εύρεση κ.β. της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της $4_y+3_x=8$ από 0 μέχρι 2 γύρω από τον x-άξονα.

Λύση. Είναι $y=\dfrac{8-3x}{4}$, $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=-\dfrac{3}{4}$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\dfrac{5}{4}$ άρα,

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\int_0^2 x(8-3x)dx}{\int_0^2 (8-3x)dx} = \frac{4}{5},\ \overline{y}=0 \text{ άρα } \mathrm{K}(\overline{x},\overline{y}) = \mathrm{K}(\frac{4}{5},0).$$

• Εύρεση ροπής αδρανείας της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της y=2x περί τον x-άξονα από 0 μέχρι 2.

Λύση. Είναι $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=2$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\sqrt{5}$ άρα από (5) είναι

$$\mathrm{I}_x = 2\pi\int_0^2 (2x)^3\sqrt{5}dx = 16\sqrt{5}\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 64\sqrt{5}\pi.$$ Συνεπώς, $\mathrm{I}_x = 64\sqrt{5}\pi$

Πίεση ρευστών.

Πίεση καλείται η δύναμη που ασκείται στη μονάδα του εμβαδού, δηλαδή η κάθετη δύναμη F που ασκείται σε μια (επίπεδη) επιφάνεια δεδομένου εμβαδού S δια της επιφάνειας στην οποία η F είναι κατανεμημένη, δηλαδή $\mathrm{P}=\dfrac{F}{S}$ (1)

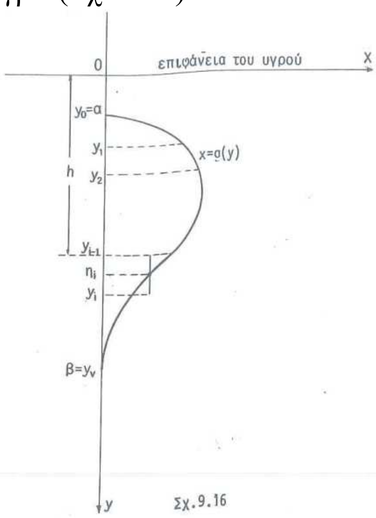
Η πίεση P σε οριζόντια επιφάνεια εμβαδού S, που μια στήλη ενός υγρού ύψους h έχει σαν βάση είναι P=εh (2) όπου ε=ειδικό βάρος υγρού είναι F=PS ή $F=\varepsilon\cdot h\cdot S$ (3)

Η πίεση που ασκείται από ένα υγρό σε οποιοδήποτε σημείο μέσα σε αυτό, είναι η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις. Όλα τα πιο πάνω με την προϋπόθεση ότι το υγρό βρίσκεται σε ισορροπία.

Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια βυθισμένη σε υγρό.

Έστω επίπεδη επιφάνεια βυθισμένη κατακόρυφα σε υγρό (Σχ. 9.16) ειδικού βάρος ε. Θεωρώ τη βυθισμένη επίπεδη επιφάνεια στο xy-επίπεδο με τον x-άξονα στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και τον θετικό y-άξονα κατευθυνόμενο προς τα κάτω.

Αν x=g(y)/[α,β], συνεχής είναι η καμπύλη που με τον άξονα ορίζουν τη βυθισμένη επιφάνει και α το ανώτερο σημείο της επιφάνειας αυτής και β το κατώτερο σημείο. Για να υπολογίσω τη δύναμη που ασκείται σε αυτή εργάζομαι ως εξής: Παίρνω ένα διαμερισμό Δ_ν του α,β τον $\Delta_\nu=\{\alpha=y_0<y_1<\ldots<y_{i-1}<y_i<\ldots<\beta=y_\nu\}$ με $\lambda\to 0$ και από τα σημεία της διαμερίσεως φέρνω παράλληλες προς



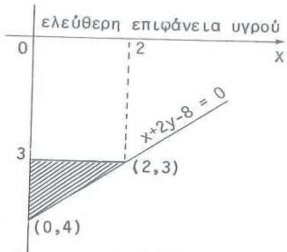
Σχ.9.16

την επιφάνεια του υγρού και έστω $[y_{i-1},y_i]$ το τυχόν υποδιάστημα.

Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο με πλάτος $y_i-y_{i-1}=\Delta_i y$ και μήκος $g(n_i)$ με $i=1, 2, \ldots, \nu$ όπου $n_i \in [y_{i-1}, y_i]$.

Έστω h το βάθος της πάνω βάσης του στοιχειώδους αυτού ορθογωνίου από την επιφάνεια του υγρού. Η δύναμη που ασκείται στο στοιχειώδες ορθογώνιο με διαστάσεις $\Delta_i y$ και $g(n_i)$ είναι $F_i = \varepsilon n_i g(n_i)\Delta_i y$. Το άθροισμα Riemann $\sum_{i=1}^{\nu} F_i = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon n_i g(n_i)\Delta_i y$ (**4**) δίνει κατά προσέγγιση τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια του (Σχ. 9.16). Και επειδή $x=g(y)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει το όριο του (4) και είναι $F = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu} F_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon n_i g(n_i)\Delta_i y = \varepsilon\int_{\alpha}^{\beta} y g(y)dy$. Συνεπώς, η ολική δύναμη που ασκείται στην βυθισμένη επιφάνεια δίνεται από τον τύπο

$$F = \varepsilon\int_{\alpha}^{\beta} y g(y)dy \quad (\mathbf{5})$$

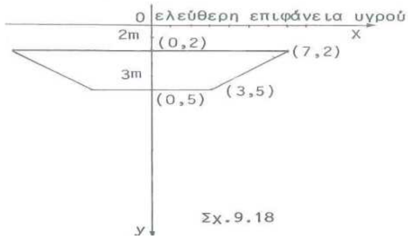


Σχ.9.17

• Εύρεση δύναμης που ασκείται στη μία όψη επιφάνειας που ορίζεται από τις γραμμές $x=0$, $y=3$ και $x+2y-8=0$ και είναι βυθισμένη σε υγρό ειδικού βάρους ε.

Λύση: Η $x+2y-8=0$ τέμνεται με την $y=3$ στο σημείο (2,3) και τέμνει τον y-άξονα στο σημείο (0,4). Από την $x+2y-8=0$ είναι $x=8-2y$ και ο (5) δίνει

$$F = \varepsilon\int_3^4 y(8-2y)dy = \varepsilon\int_3^4 (8y-2y^2)dy = \varepsilon\left[4y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_3^4 = \frac{10}{3}\varepsilon$$



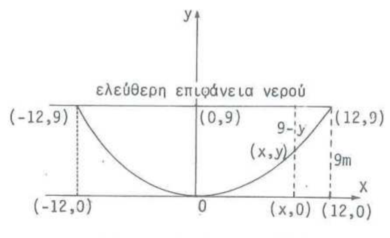
Σχ.9.18

• Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει μικρή βάση 6 m, μεγάλη βάση 14 m, ύψος 3 m και είναι βυθισμένο κατακόρυφα σε υγρό με τη μικρή βάση προς τα κάτω και σε απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια σε σχέση με την μεγάλη βάση 2 m.

Βρείτε την ολική δύναμη που ασκείται σε αυτό από το υγρό (δίνεται ειδικό βάρος υγρού ε)

Λύση: Παίρνω τους άξονες όπως στο διπλανό σχήμα. Η ευθεία που περνά από τα σημεία (3, 5). (7, 2) έχει εξίσωση $x = \frac{29}{3} - \frac{4y}{3}$ και από (5) για την ολική δύναμη

$$F = 2\varepsilon\int_2^5 y\left(\frac{29}{3} - \frac{4y}{3}\right)dy = 2\varepsilon\int_2^5\left(\frac{29}{3}y - \frac{4y^2}{3}\right)dy = 2\varepsilon\left[\frac{29y^2}{6} - \frac{4y^3}{9}\right]_2^5 = 99\varepsilon$$



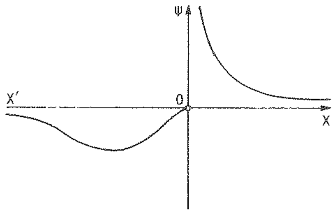
Σχ.9.19

• Δίσκος που έχει μορφή παραβολικού τμήματος με βάση 24 m και ύψος 9 m, είναι βυθισμένος σε υγρό ειδικού βάρους ε, έτσι ώστε η βάση του, να είναι στο ίδιο επίπεδο με την επιφάνεια του νερού. Ποιά η δύναμη που ασκείται στην πλευρά του δίσκου;

Λύση: Η παραβολή έχει εξίσωση $x^2=\kappa y$ και επειδή περνάει από το σημείο (12, 9) ισχύει $12^2 = \kappa\cdot 9 \Rightarrow \kappa = 16$ άρα $x^2=16y$. Από (5) για την ολική δύναμη είναι

$$F = 2\varepsilon\int_0^9 (9-y)4\sqrt{y}dy = 8\varepsilon\int_0^9 (9y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}})dy = 8\varepsilon\left[6y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^9 = \frac{2592}{5}\varepsilon$$

- Εύρεση όγκου του στερεού που παράγεται από περιστροφή περί άξονα x΄x του χωρίου που περικλείεται από το τόξο της καμπύλης (c) με εξίσωση $y = \frac{1}{x}e^{1/x}$ όταν $x \in (-\infty, 0)$ και τον ημιάξονα 0x΄.

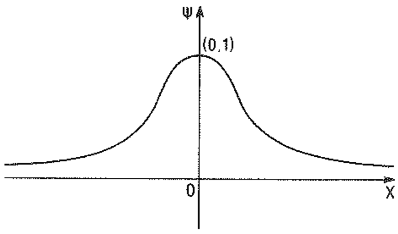


Λύση: Είναι

$$V = \pi\int_{-\infty}^{0} y^2dx = \pi\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}e^{2/x}dx = \pi\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^-\\ \lambda\to-\infty}}\int_\lambda^\varepsilon \frac{1}{x^2}e^{2/x}dx = -\frac{\pi}{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^-\\ \lambda\to-\infty}}\int_\lambda^\varepsilon e^{2/x}d(2/x) =$$

$$-\frac{\pi}{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^-\\ \lambda\to-\infty}}\left[e^{2/x}\right]_\lambda^\varepsilon = -\frac{\pi}{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^-\\ \lambda\to-\infty}}\left[e^{2/\varepsilon} - e^{2/\lambda}\right] = -\frac{\pi}{2}\left[\lim_{\varepsilon\to 0^-} e^{2/\varepsilon} - \lim_{\lambda\to-\infty} e^{2/\lambda}\right] = -\frac{\pi}{2}(0-1) = \frac{\pi}{2}$$

- Εύρεση όγκου του στερεού που προκύπτει από περιστροφή του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ περί την οριζόντια ασύμπτωτή της.



Λύση: Είναι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Άρα η ψ=0 δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι $V = \pi\int_{-\infty}^{+\infty} y^2dx = \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Θέτω x=εφω (1)

$dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = (1+\varepsilon\varphi^2\omega)d\omega$. Όταν $x\to-\infty$ από (1) είναι $\omega\to-\frac{\pi}{2}$. Όταν $x\to+\infty$ από (1) είναι $\omega\to\frac{\pi}{2}$. Έτσι,

$$V = \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega}{(1+\varepsilon\varphi^2\omega)^2}d\omega = \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\omega\, d\omega = \pi\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\sin(2\omega)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}$$

.

Εφαρμογές στη μηχανική & τη φυσική.

Ροπές και κέντρο βάρους επίπεδου σχήματος.

- Θεωρώ επίπεδο χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x), τον άξονα xx' και τις ευθείες x=α, x=β. Ονομάζω γεωμετρική ροπή βαθμού ν του χωρίου ως προς τον άξονα yy' το ολοκλήρωμα $\mathrm{P}_\nu = \int_\alpha^\beta (x^\nu y)\, dx$ (με $\nu\in\mathrm{N}$).

➤ Αν ν=0 τότε P_0 δίνει το εμβαδόν Ε του χωρίου.

➤ Αν ν=1 τότε ο P_1 δίνει τη στατική ροπή (ή απλά ροπή) του χωρίου ως προς τον άξονα yy'. Έτσι η στατική ροπή P_1 ως προς τον άξονα yy' δίνεται από τον τύπο $\mathrm{P}_1 = \mathrm{M}_y = \int_\alpha^\beta xy\, dx$ (**1**)

Η στατική ροπή ως προς τον x΄x δίνεται από $\mathrm{M}_x = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} y^2\, dx$ (2)

➢Αν ν=2 τότε ο $\mathrm{P}_2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 y\, dx$ δίνει την ροπή αδρανείας του χωρίου ως προς τον yy'

• Αν το χωρίο είναι ομογενές, ονομάζω κ.β. το σημείο K(x_0, y_0) με $x_0 = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} xy\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y\, dx}$,

$y_0 = \dfrac{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y\, dx}$ (3) (είναι $x_0 = \dfrac{M_y}{\mathrm{E}}$, $y_0 = \dfrac{M_x}{\mathrm{E}}$).

• Αν το χωρίο περικλείεται από τις καμπύλες (c_1), (c_2) με εξισώσεις y=φ(x), y=σ(x), οι συντεταγμένες του κ.β. είναι $x_0 = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} x[\varphi(x)-\sigma(x)]dx}{\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(x)-\sigma(x)]dx}$, $y_0 = \dfrac{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi^2(x)-\sigma^2(x)]dx}{\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(x)-\sigma(x)]dx}$

(4)

Ροπές και κέντρο μάζας επίπεδης καμπύλης.

• Η στατική ροπή του τμήματος ΑΒ μια καμπύλης (c) με εξίσωση y=f(x), ως προς τον άξονα xx' είναι από $\mathrm{M}_x = \int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{1+(y')^2}dx$ (5). Η στατική ροπή ως προς τον άξονα yy' είναι $\mathrm{M}_y = \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1+(y')^2}dx$ (6). Η ροπή αδρανείας του τμήματος ΑΒ μιας καμπύλης με εξίσωση y=f(x) ως προς τον άξονα xx' είναι $I_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2\sqrt{1+(y')^2}dx$ (7).
Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα yy' είναι $I_y = \int_{\alpha}^{\beta} x^2\sqrt{1+(y')^2}dx$ (8).

• Το κ.β. M(x_0, y_0) ομογενούς υλικής γραμμής με εξίσωση y=f(x), $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $x_0 = \dfrac{M_y}{\ell}$, $y_0 = \dfrac{M_x}{\ell}$ (ℓ είναι το μήκος της γραμμής). Δηλαδή $x_0 = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(y')^2}dx}$,

$$y_0=\frac{\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$ (**9**) Αν η εξίσωση της ομογενούς γραμμής δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις x=φ(t), y=σ(t) με $t\in[t_1,t_2]$, οι συντεταγμένες του κ.β. είναι

$$x_0=\frac{\int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt},\quad y_0=\frac{\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt} \qquad (\mathbf{10})$$

Έργο μιας δύναμης που ασκείται σε υλικό σημείο.

Όταν ένα υλικό σημείο κινείται κατά μήκος άξονα xx' από το σημείο x_1=α έως το σημείο x_2=β (α < β) υπό την επίδραση μεταβαλλόμενης δύναμης F_1, παράγεται έργο Α που είναι $A=\int_{\alpha}^{\beta}F(x)dx$ (**11**). Όπου F(x) η προβολή της δύναμης στον άξονα xx'.

• Εύρεση στατικής ροπής και ροπής αδρανείας του ημικυκλίου $y=\sqrt{r^2-x^2}$ $(x\in[-r,r])$ ως προς τον άξονα xx'.

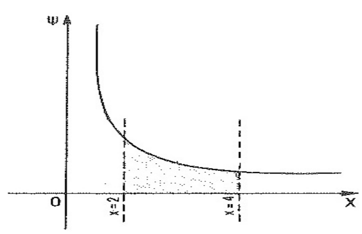
Λύση: Είναι $M_x=\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{1+(y')^2}dx\ dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=r\int_{-r}^{r}dx=2r^2$.

Είναι $I_x=\int_{\alpha}^{\beta} y^2\sqrt{1+(y')^2}dx\ dx=\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}$

$dx=r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=2r\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$ (συνάρτηση άρτια). Για να υπολογίσω το τελευταίο ολοκλήρωμα θέτω x=rsint (1) $\Rightarrow$dx=rcost dt. Αν x=0 τότε t=0. Αν x=r τότε $t=\frac{\pi}{2}$. Άρα, $I_x=2r\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}$

$=r\cdot\cos t\ dt=r^3\int_{0}^{\pi/2}\left[1+\cos(2t)\right]dt=r^3\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi r^3}{2}$

• Εύρεση οι στατικών ροπών και ροπών αδρανείας του τόξου του 1ου τεταρτημορίου της αστροειδούς με εξισώσεις x=αcos³t, y=αsin³t.



Λύση: Λόγω συμμετρίας της καμπύλης ως προς τους άξονες είναι $M_\chi=M_y$ και $I_\chi=I_y$. Στο 1° τεταρτημόριο η παράμετρος t ανήκει στο διάστημα [0, π/2]. Έχω $d\ell=\sqrt{x_t^2+y_t^2}$ dt=3ªsintcostdt. Άρα,

$M_x=\int_{\alpha}^{\beta} y\ d\ell=\int_{0}^{\pi/2}\left(\alpha\cdot\sin^3 t\cdot 3\alpha\cdot\sin t\cdot\cos t\ \right)dt=\left[\frac{3\alpha^2}{5}\sin^5 t\right]_0^{\pi/2}=\frac{3}{5}\alpha^2$ και

$\mathrm{I}_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2 d\ell = \int_0^{\pi/2} \left(\alpha^2 \sin^6 t \cdot 3\alpha \cdot \sin t \cdot \cos t\right) dt = \left[\frac{3}{8}\alpha^3 \sin^8 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\alpha^3$. Άρα, $\mathrm{M}_x = \mathrm{M}_y = \frac{3}{5}\alpha^2$, $\mathrm{I}_x = \mathrm{I}_y = \frac{3}{8}\alpha^3$.

• Εύρεση κέντρου μάζας του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή xy=1 και τις ευθείες x=2, x=4.

Λύση: Οι συντεταγμένες, από (2) είναι $x_0 = \dfrac{\int_2^4 x\frac{1}{x}dx}{\int_2^4 \frac{1}{x}dx} = \dfrac{2}{\ln 2}$, $y_0 = \dfrac{\int_2^4 \frac{1}{x^2}dx}{2\int_2^4 \frac{dx}{x}} = \dfrac{1}{8\ln 2}$.

• Εύρεση κέντρου μάζας τόξου της κυκλοειδούς καμπύλης x=α(t-sint), y=α(1-cost) $0 \le t \le 2\pi$.

Λύση: Είναι x=α(t-sint) ⇒dx=α(1-cost)dt ⇒$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$. Είναι y=α(1-cost) ⇒ dy=αsint dt ⇒$\frac{dy}{dt} = \alpha \cdot \sin t$. Έτσι

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\alpha^2(1+\cos^2 t - 2\cos t)\alpha^2 \sin^2 t} = \alpha\sqrt{2-2\cos t} = \alpha 2\sin\frac{t}{2}$$

Από (10) $x_0 = \dfrac{\int_0^{2\pi} \alpha(t-\sin t)\cdot 2\alpha\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt}{\int_0^{2\pi} 2\alpha\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt}$. Ο αριθμητής δίνει

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t-\sin t)2\alpha\cdot\sin\frac{t}{2}dt = 2\alpha^2\left[-2t\cdot\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} - \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8\pi\alpha^2.$$

Ο παρονομαστής δίνει

$$\int_0^{2\pi} 2\alpha\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt = 16\alpha\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\,d\left(\frac{t}{4}\right) = 16\alpha\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{4}\,d\sin\left(\frac{t}{4}\right) = 8\alpha\left[\sin^2\frac{t}{4}\right]_0^{2\pi} = 8\alpha$$

Άρα, $x_0 = \dfrac{8\pi\alpha^2}{8\alpha} = \pi\alpha$. Είναι

$$y_0 = \frac{\int_0^{2\pi} y2\alpha\cdot\sin\frac{t}{2}dt}{\int_0^{2\pi}\alpha\cdot\sin\frac{t}{2}dt} = \frac{2\alpha\int_0^{2\pi}\alpha(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt}{8\alpha} = \frac{2\alpha^2\left[-4\cos\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}}{8\alpha} = \frac{2\alpha^2\frac{16}{3}}{8\alpha} = \frac{4}{3}\alpha$$

Άρα $\mathrm{K} = (\pi\alpha, \frac{4}{3}\alpha)$.

• Εύρεση έργου του βάρους, κατά την εκτόξευση πυραύλου σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης.

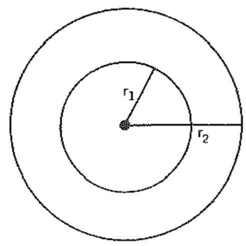
Λύση: Το ζητούμενο έργο Α είναι αρνητικό διότι το βάρος Β του πυραύλου σε κάθε σημείο της τροχιάς του έχει φορά αντίθετη από τη μετατόπιση. Η δύναμη έλξεως του πυραύλου είναι B=G $\dfrac{m_\Pi \cdot m_\Gamma}{x}$ όπου m_Π, m_Γ οι μάζες πυραύλου και Γης αντίστοιχα, x η απόσταση πυραύλου από κέντρο της Γης και G η σταθερά παγκόσμιας έλξης. Έστω R η ακτίνα της Γης. Είναι

$$A = -\int_R^{+\infty} B dx = -\int_R^{+\infty} \frac{Gm_\Pi \cdot m_\Gamma}{x^2} dx = -Gm_\Pi \cdot m_\Gamma \int_R^{+\infty} x^{-2} dx = -Gm_\Pi \cdot m_\Gamma \lim_{\beta \to +\infty} \int_R^{\beta} x^{-2} dx =$$

$$= -Gm_\Pi \cdot m_\Gamma \lim_{\beta \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_R^{\beta} = -Gm_\Pi \cdot m_\Gamma \lim_{\beta \to +\infty} \left[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{R} \right] = -\frac{Gm_\Pi \cdot m_\Gamma}{R} = -\frac{Gm_\Pi \cdot m_\Gamma}{R^2}$$

$R = -B_0 \cdot R$. (Όπου B_0 το βάρος στην επιφάνεια της Γης).

• Εύρεση μεταβολής δυναμικής ενέργειας ηλεκτρονίου όταν μεταπηδά από επιτρεπτή τροχιά ακτίνας r_1 σε άλλη επιτρεπτή r_2 σύμφωνα με τις συνθήκες Bohr.

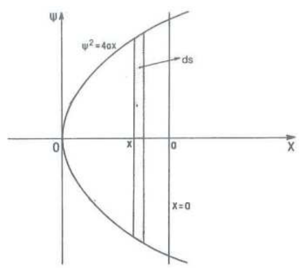


Λύση: Η δύναμη που ασκείται μεταξύ πυρήνα – ηλεκτρονίου είναι από το νόμο Coulomb $F = K\dfrac{Qe}{r^2}$ (όπου Q το φορτίο του πυρήνα, e το φορτίο του ηλεκτρονίου και r η απόσταση πυρήνα – ηλεκτρονίου). Έτσι, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta E_j = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{KQe}{r^2} dr = KQe \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = KQe \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = KQe \left[-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right] = KQe \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Τα r_1, r_2 θα υπολογισθούν από την 1η συνθήκη του Bohr $mur = n\dfrac{h}{2\pi}$ (n=1, 2,…) και την κεντρομόλο δύναμη $\dfrac{mu^2}{r} = K\dfrac{Qe}{r^2}$.

• Εύρεση ροπής αδρανείας ως προς τον yy' του σχήματος που περικλείεται από την παραβολή $y^2=4\alpha x$ και την ευθεία x=α, α>0.

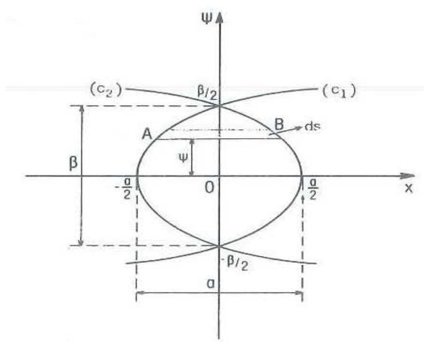


Λύση: Έστω ds το εμβαδόν της στοιχειώδους ζώνης που είναι παράλληλη προς τον άξονα yy'. Είναι $dI_x = x^2 ds$ (**1**)

Είναι $ds = 2|y|dx = 2\sqrt{4ax}\ dx$ (**2**) Έτσι, η (1) δίνει:

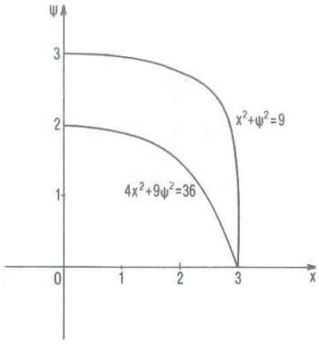
$$dI_x = 4x^2\sqrt{ax}dx \ \Rightarrow I_x = \int_0^{\alpha} 4x^2\sqrt{ax}dx = 4\sqrt{a}\int_0^{\alpha} x^{5/2}\ dx = \ldots = \frac{8}{7}a^4$$

• Εύρεση ροπής αδρανείας ως προς τον xx', του χωρίου που περικλείεται από της παραβολές (c_1): $y^2 = \dfrac{\beta^2}{2\alpha}\left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, και ($c_2$) $y^2 = \dfrac{\beta^2}{2\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{2} - x\right)$ και τον xx'.



Λύση: Είναι $dI_x=y^2ds$ (**1**) όπου ds είναι το εμβαδόν του στοιχειώδους χωρίου που είναι παράλληλο προς τον άξονα xx'. Είναι ds=|AB|dy (**2**). Είναι $|AB| = x_2 - x_1 = 2\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{2\alpha}{\beta^2}y^2\right) = \alpha - \dfrac{4\alpha}{\beta^2}y^2$ (**3**). Άρα, η (1) δίνει (2) και (3) $dI_x = y^2\left(\alpha - \dfrac{4\alpha}{\beta^2}y^2\right)dy \Rightarrow$

$$\mathrm{I}_x = \int_0^{\beta/2} y^2\left(\alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2}y^2\right)dy = ... = \frac{\alpha\beta^3}{60}.$$



• Εύρεση στατικών ροπών ως προς τους άξονες yy', xx' και το κ.β. του ομογενούς χωρίου του 1[ου] τεταρτημορίου που περικλείεται από την έλλειψη $4x^2+9y^2=36$ και τον κύκλο $x^2+y^2=9$.

Λύση: Είναι

$$\mathrm{M}_\psi = \int_0^3 x(y_2 - y_1)dx = \int_0^3 x\left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx = 3$$

$$\mathrm{M}_y = \int_0^3 x(y_2 - y_1)dx = \int_0^3 x\left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx = 3 \text{ και}$$

$$\mathrm{M}_x = \frac{1}{2}\int_0^3\left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^3\left[(9-x^2) - \frac{4}{9}(9-x^2)\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^3\left(5 - \frac{5}{9}x^2\right)dx = 5$$

Έστω x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κ.β. Κ. Είναι $x_0 = \dfrac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{E}}$, $y_0 = \dfrac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{E}}$ όπου Ε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. Είναι $\mathrm{E} = \dfrac{3\pi}{4}$. Άρα, $x_0 = \dfrac{4}{\pi}$, $y_0 = \dfrac{20}{3\pi}$.

• Εύρεση κ.β. του ομογενούς χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \dfrac{2}{\pi}x$, y=sinx $(x \geq 0)$.

Λύση: Τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων είναι (0 ,0), $(\frac{\pi}{2},1)$. Το εμβαδόν του χωρίου είναι $\mathrm{E} = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx = \frac{4-\pi}{4}$. Είναι $x_0 = \dfrac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{E}}$, $y_0 = \dfrac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{E}}$ και

$$\mathrm{M}_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{4x^3}{3\pi^2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{24},$$

$$\mathrm{M}_y = \int_0^{\pi/2} x\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}. \text{ Άρα, } x_0 = \frac{12-\pi^2}{12-3\pi},\ y_0 = \frac{\pi}{6(4-\pi)}$$

• Εύρεση κ.β. του τόξου ΑΒ ομογενούς υλικής γραμμής με εξίσωση y=chx όταν Α(0,1), Β(α, chα).

Λύση: Έστω x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κ.β. Είναι $x_0 = \dfrac{\mathrm{M}_y}{\ell}$, $y_0 = \dfrac{\mathrm{M}_x}{\ell}$

Έχω $\ell = \displaystyle\int_0^\alpha \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^\alpha \sqrt{1+sh^2x}\,dx = \int_0^\alpha chx\,dx = sh\alpha$.

$$\mathrm{M}_y = \int_0^\alpha x\sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_0^\alpha x\sqrt{1+sh^2x}\ dx = \int_0^\alpha xchx\ dx = [xshx]_0^a - \int_0^\alpha shx\ dx = asha - cha + 1$$

Και $$\mathrm{M}_x = \int_0^\alpha y\sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_0^\alpha y\sqrt{1+sh^2x}\ dx = \int_0^\alpha ychx\ dx = \int_0^\alpha ch^2x\ dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a (1+ch(2x))\ dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{sh(2x)}{2}\right]_0^a = \frac{a}{2}+\frac{sh(2a)}{4}.$$ Άρα $x_0 = \dfrac{asha - cha + 1}{sha}$,

$$y_0 = \frac{\frac{a}{2}+\frac{ch2a}{4}}{sha}$$

• Εύρεση στατικής ροπής ως προς τον xx' του τόξου έλλειψης με $y \geq 0$ και του τόξου κύκλου με $y \geq 0$.

Λύση: Έστω $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ η εξίσωση της έλλειψης. Είναι $y^2 = \beta^2 - \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}x^2$.

Θέλω να βρω τη στατική ροπή του τόξου ΑΒ της έλλειψης ως προς τον xx' όπου Α(-α,0), Β(α,0). Είναι

$$\mathrm{M}_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} y\sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_{-a}^{a}\sqrt{y^2+(yy')^2}\ dx = \int_{-a}^{a}\sqrt{\beta^2-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2+\frac{\beta^4}{\alpha^4}x^2}\ dx =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}x^2}dx = \frac{\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}dx =$$

$$= \frac{2\beta}{\alpha}\int_0^\alpha\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}\ dx^* = \frac{\beta}{\alpha}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\tau o\xi\sin\varepsilon\right) =$$

$$\beta\left(\beta+\frac{\alpha}{\varepsilon}\tau o\xi\sin\varepsilon\right) \Leftrightarrow \mathrm{M}_x = \beta\left(\beta+\frac{\alpha}{\varepsilon}\tau o\xi\sin\varepsilon\right).$$

($\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$ εκκεντρότητα έλλειψης). Στην περίπτωση κύκλου είναι α=β, ε=0. Είναι $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\tau o\xi\eta\mu\varepsilon}{\varepsilon}=1$. Άρα $\mathrm{M}_x = \beta(\beta+\alpha) = \beta(\beta+\beta) = 2\beta^2$.

---

*Συνάρτηση άρτια

• Εύρεση κ.β. του τόξου καρδιοειδούς ρ=α(1+cosφ) (1), που περιέχεται μεταξύ των ημιευθειών φ=0, φ=π.

Λύση: Η εξίσωση της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις είναι

$$x = \rho\cdot\cos\varphi \overset{(1)}{=\!=} \alpha(1+\cos\varphi)\cos\varphi\ ,\quad y = \rho\cdot\sin\varphi \overset{(1)}{=\!=} \alpha(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

Είναι $d\ell = \sqrt{(\rho'_\varphi)^2+\rho^2}\ d\varphi = 2\alpha\cdot\cos\dfrac{\varphi}{2}d\varphi *$

Άρα: $\ell = \displaystyle\int_0^\pi\sqrt{(\rho'_\varphi)^2+\rho^2}\ d\varphi = \int_0^\pi \alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 4\alpha$

Είναι $x_0 = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} x\, d\ell = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi}\left[\alpha(1+\cos\varphi)(\cos\varphi)2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] d\varphi =$

$\alpha\int_0^{\pi}\left[\cos\varphi\cdot\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] d\varphi = \alpha\int_0^{\pi}\left[\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi =$

$\alpha\int_0^{\pi}\left[\cos^5\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] d\varphi = \alpha\int_0^{\pi}\left[2\cos^5\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] d\varphi =$

(κάνω την αντικατάσταση $\frac{\varphi}{2} = \omega$)

$= 2\alpha\int_0^{\pi/2}(2\cos^5\omega-\cos^3\omega)\, d\omega = 2\alpha\left[2\int_0^{\pi/2}\cos^4\omega\cdot\cos\omega\, d\omega - \int_0^{\pi/2}\cos^2\omega\cdot\cos\omega\, d\omega\right] =$

$= 4\alpha\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\omega)^2\, d(\sin\omega) - 2\alpha\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\omega)\, d(\sin\omega) = 4\alpha\frac{4}{5}\frac{2}{3} - 2\alpha\frac{2}{3} = \frac{4}{5}\alpha$

Είναι $y_0 = \frac{1}{4\alpha}\int_0^{\pi} y\, d\ell = \frac{1}{4\alpha}\int_0^{\pi}\left[\alpha(1+\cos\varphi)(\sin\varphi)2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] d\varphi =$

$2\alpha\int_0^{\pi}\left[\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] d\varphi = \left[-\frac{4}{5}\alpha\cos^5\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{5}\alpha$.

---

*Είναι:

$\sqrt{(\rho'_{\varphi})^2+\rho^2} = \sqrt{\left(-\alpha\sin\varphi\right)^2+\alpha^2(1+\cos\varphi)^2} = \alpha\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+1+2\cos\varphi} =$

$\alpha\sqrt{2(1+\cos\varphi)} = 2\alpha\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, διότι $0\le\varphi\le\pi \Rightarrow 0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{2}$.

• Εύρεση κ.β. του τόξου καμπύλης εξισώσεως $y = \alpha ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, αν $-\alpha\le x\le\alpha$.

Λύση: Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον yy'. Άρα, το κ.β. βρίσκεται στον άξονα yy'. Έστω x_0, y_0, οι συντεταγμένες του κ.β.

Είναι $x_0=0$ και $y_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} y d\ell = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} y\sqrt{1+(y')^2}dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha}\alpha ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)\sqrt{1+sh^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)}dx =$

$= \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha}\alpha ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha}\alpha ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\alpha}\alpha ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$ (1).

Είναι $\ell = \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\int_0^{\alpha} ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \left[2\alpha sh\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^{\alpha} = 2\alpha sh1$.

Έτσι η (1) δίνει

$y_0 = \frac{2}{2\alpha sh1}\int_0^{\alpha}\alpha ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{sh1}\int_0^{\alpha}ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{2sh1}\int_0^{\alpha}\left[1+ch\left(\frac{2x}{\alpha}\right)\right]dx =$

$= \frac{1}{2sh1}\left[x+\frac{\alpha}{2}sh\left(\frac{2x}{\alpha}\right)\right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{2sh1}\left(1+\frac{1}{2}sh^2\right)$.

• Εύρεση κ.β. ομογενούς χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη x=αcost, y=βsint και από τους άξονες των συντεταγμένων (στο 1ο τεταρτημόριο).

Λύση: Το εμβαδόν $E_{ολ}$ της έλλειψης είναι $E_{ολ}=\pi\alpha\beta$. Άρα το εμβαδόν του χωρίου είναι $E=\frac{\pi\alpha\beta}{4}$. Στο 1ο τεταρτημόριο το x μεταβάλλεται από 0 έως α ενώ το t από π/2 έως 0.

Είναι $x_0=\frac{1}{E}\int_0^{\alpha} xy\,dx=\frac{1}{E}\int_{\pi/2}^{0}\left[\alpha\cos t\cdot\beta\sin t\cdot(-\alpha\sin t)\right]dt=\frac{\alpha^2\beta}{E}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t\cdot\cos t\right)dt=$

$\frac{\alpha^2\beta}{E}\cdot\frac{1}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{\pi/2}=\frac{\alpha^2\beta}{3E}=\frac{4\alpha^2\beta}{3\pi\alpha\beta}=\frac{4\alpha}{3\pi}$.

Είναι $y_0=\frac{1}{E}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} y^2dx=\frac{1}{2E}\int_{\pi/2}^{0}\beta^2\sin^2 t(-\alpha\cdot\sin t)dt=\frac{2\alpha\beta^2}{\pi\alpha\beta}\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t)=$

$\frac{2\beta}{\pi}\left[\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi/2}^{0}=\frac{4\beta}{3\pi}$.

Άλυτες ασκήσεις ολοκληρωμάτων.

Περίπτωση 1. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

Άσκηση 1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$, (β) $\int_0^1\frac{1}{x+2}dx$, (γ) $\int_2^3\frac{1}{3x-1}dx$, (δ) $\int_0^1\frac{1}{2x+1}dx$,

(ε) $\int_0^1\frac{3}{x-2}dx$, (στ) $\int_0^1\frac{1}{3-x}dx$, (ζ) $\int_3^4\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$, (η) $\int_{-1}^0\frac{x+1}{x-1}dx$,

(θ) $\int_0^1\frac{3x+1}{x+1}dx$, (ι) $\int_0^1\frac{x+2}{2x+1}dx$, (κ) $\int_{-1}^0\frac{2x^2+1}{x-1}dx$, (λ) $\int_0^1\frac{2x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}dx$,

(μ) $\int_0^1\frac{3x^2+x+1}{x-2}dx$, (ν) $\int_0^1\frac{x^2+x+1}{2x+1}dx$, (ξ) $\int_0^1\frac{2x^3+x+1}{x+1}dx$, (ο) $\int_0^1\frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)}dx$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx$, (β) $\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx$, (γ) $\int_3^4\frac{1}{x^2-3x+2}dx$, (δ) $\int_3^4\frac{1}{x^2+4x+3}dx$,

(ε) $\int_0^1\frac{3}{x^2+5x+6}dx$, (στ) $\int_2^3\frac{x}{x^2+2x-3}dx$, (ζ) $\int_2^3\frac{2x}{x^2+x-2}dx$, (η) $\int_0^1\frac{3x+1}{x^2+5x+6}dx$

(θ) $\int_0^1\frac{x+1}{x^2+3x+2}dx$, (ι) $\int_{-1}^0\frac{2x^2+3}{x^2-4x+3}dx$, (κ) $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}dx$, (λ) $\int_2^3\frac{x^4+x+2}{x-1}dx$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{-1}^0\frac{1}{x^2-2x+1}dx$, (β) $\int_0^1\frac{dx}{x^2-4x+4}$, (γ) $\int_0^1\frac{dx}{4x^2+4x+1}$, (δ) $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2-6x+9}dx$, (ε) $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2+4x+4}\,dx$, (στ) $\int_{-1}^0 \frac{2x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$, (ζ) $\int_0^1 \frac{4x^2-x}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx$.

Περίπτωση 2. Παραγοντική ολοκλήρωση.

Άσκηση 4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 x\cdot e^x\,dx$, (β) $\int_0^1 (x+1)\cdot e^x\,dx$, (γ) $\int_0^1 (x-2)\cdot e^x\,dx$, (δ) $\int_0^1 x^2\cdot e^x\,dx$,

(ε) $\int_0^1 (x^2+1)\cdot e^x\,dx$, (στ) $\int_0^1 (x^2+x+2)\cdot e^x\,dx$, (ζ) $\int_0^1 3x\cdot e^{-x}\,dx$, (η) $\int_0^1 x\cdot e^{3x}\,dx$,

(θ) $\int_0^1 x\cdot e^{2x}\,dx$, (ι) $\int_0^1 (x+3)\cdot e^{-x}\,dx$, (κ) $\int_0^1 e^{-x}\cdot sin3x\,dx$, (λ) $\int_1^e (x^2+x+1)lnx\,dx$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 e^x\cdot sinx\,dx$, (β) $\int_0^1 e^x\cdot cosx\,dx$, (γ) $\int_0^1 e^x\cdot sin2x\,dx$, (δ) $\int_0^1 e^{2x}\cdot cos3x\,dx$,

(ε) $\int_1^e x\cdot lnx\,dx$, (στ) $\int_1^e lnx\,dx$, (ζ) $\int_1^e ln^2x\,dx$, (η) $\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\,dx$, (θ) $\int_1^e \frac{lnx}{\sqrt{x}}\,dx$,

(ι) $\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$, (κ) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\,dx$, (λ) $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x}\,dx$, (μ) $\int_0^1 (x+1)\cdot\sqrt[3]{x+2}\,dx$,

(ν) $\int_0^1 (x^2+1)\cdot\sqrt[5]{x+3}\,dx$, (ξ) $\int_1^e cos(lnx)\,dx$, (ο) $\int_{-0,5}^0 x\cdot ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$, (π) $\int_1^e sin(lnx)\,dx$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sinx\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot cosx\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cdot cosx\,dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cdot sinx\,dx$,

(ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot sinx\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sin^2x\,dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx$,

(θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sin2x\,dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+2)\cdot cosx\,dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cdot cos3x\,dx$, (λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\,dx$

(μ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\cdot cos^2x\,dx$, (ν) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sin3x\cdot cosx\,dx$, (ξ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sinx\cdot sin2x\,dx$.

Άσκηση 7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{x+1}{e^x}\,dx$, (γ) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$, (δ) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} sin\sqrt{x}\,dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sinx\cdot cosx\,dx$

(στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4^{-x}cosx\,dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^x sinx\,dx$, (η) $\int_1^e (lnx)^2\sqrt{x}\,dx$, (θ) $\int_0^1 (x+3)2^x\,dx$,

(ι) $\int_0^1 x\cdot ln(x+1)\,dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2x}{e^x}\,dx$, (λ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{sin^2x}\,dx$, (μ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2x}\,dx$,

Περίπτωση 3. Κανόνες ολοκληρώσεως γινομένου – πηλίκου.

Άσκηση 8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (3x^2e^x + x^3e^x)\,dx$, (β) $\int_0^1 (4x^3e^x + x^4e^x)\,dx$, (γ) $\int_0^1 (2x\cdot sinx + x^2\cdot cosx)\,dx$,

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx - x\cdot sinx)\,dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3x^2\cdot εφx + \frac{x^3}{cos^2x}\right)dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x\cdot sinx + e^x\cdot cosx)\,dx$,

(ζ) $\int_1^2 \left(\frac{sinx}{x} + lnx\cdot cosx\right)dx$, (η) $\int_e^{e^2} \frac{2x\cdot lnx - \frac{x^2+1}{x}}{ln^2x}\,dx$, (θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\cdot sinx - x^2\cdot cosx}{sin^2x}\,dx$.

Άσκηση 9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_e^{2e} \frac{lnx-1}{ln^2x}\,dx$, (β) $\int_e^{e^2} \frac{e^x\cdot lnx - \frac{e^x}{x}}{ln^2x}\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x\cdot cosx + e^x\cdot sinx}{cos^2x}\,dx$,

(δ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{εφx - \frac{x}{cos^2x}}{εφ^2x}\,dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\cdot cosx + x^2\cdot sinx}{cos^2x}\,dx$, (στ) $\int_0^1 \frac{(x^2+2)e^x - 2xe^x}{(x^2+2)^2}\,dx$

Περίπτωση 4. Αλλαγή μεταβλητής.

Άσκηση 10. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (x^2+x+1)^3(2x+1)\,dx$, (β) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$

(δ) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$, (ε) $\int_0^1 (3e^x+2)^4 e^x\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\cdot sin^4x\,dx$,

(ζ) $\int_0^1 \frac{3x^2+1}{(x^3+x+1)^2}\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{εφ^3x}{(cosx)^2}\,dx$, (θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+2σφx}}{sin2x}\,dx$.

Άσκηση 11. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos3x\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sin(x^2+1)\,dx$, (δ) $\int_{\frac{\pi}{2e}}^1 \cdot\frac{sin(lnx)}{x}\,dx$, (ε) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx$, (στ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\cdot cosx}{3\cdot sinx+1}\, dx$, (ζ) $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{2e^x+1}\, dx$, (η) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\, dx$.

(θ) $\int_{0}^{1} e^{3x}\, dx$, (ι) $\int_{0}^{1} x\cdot e^{x^2+1}\, dx$, (κ) $\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$, (λ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{1+sinx}\cdot cosx\, dx$,

(μ) $\int_{0}^{1} e^{x^2+2x+3+ln(x+1)}\, dx$, (ν) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\, dx$, (ξ) $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}\, dx$, (ο) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\, dx$.

Περίπτωση 5. Συνθέσεις του ημιτόνου.

Άσκηση 12. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin2x\, dx$, (β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin3x\, dx$, (γ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin(2x+1)\, dx$, (δ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx$,

(ε) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx$, (στ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cdot sin\left(x^2+x+1\right) dx$, (ζ) $\int_{1}^{2} \frac{sin(lnx)}{x}\, dx$

(η) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot sin\left(2e^x+1\right) dx$, (θ) $\int_{1}^{4} \frac{sin\left(2+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx$, (ι) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\, dx$,

(κ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(1+\sigma\varphi x)}{sin^2 x}\, dx$, (λ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin(\varepsilon\varphi x)}{cos^2 x}\, dx$, (μ) $\int_{0}^{1} \frac{sin\left[ln(x+2)\right]}{x+2}\, dx$.

Περίπτωση 6. Συνθέσεις του συνημιτόνου.

Άσκηση 13. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos2x\, dx$, (β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(3x+2)\, dx$, (γ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) dx$,

(δ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) dx$, (ε) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) dx$, (στ) $\int_{1}^{e} \frac{cos(lnx)}{x}\, dx$,

(ζ) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$, (η) $\int_{0}^{1} \frac{cos\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}\, dx$, (θ) $\int_{0}^{1} \frac{cos\left(1+3e^x\right)}{e^x}\, dx$,

(ι) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cdot cos\left(x^2+2x+4\right) dx$, (κ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(3x^2+1\right)\cdot cos\left(x^3+x+4\right) dx$,

(λ) $\int_{0}^{1} \frac{cos\left[ln(3x+1)\right]}{3x+1}\, dx$, (μ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\cdot cosx}{1+3\cdot sinx}\, dx$.

Περίπτωση 7. Συνθέσεις των $\frac{1}{cos^2 x}$, $\frac{1}{sin^2 x}$.

Άσκηση 14. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{cos^2(2x)}\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{cos^2(2x+1)}\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{21}} \frac{1}{cos^2(3x)}\,dx$,

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2(1+x^2)}\,dx$, (ε) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{-1}}{cos^2\left(\sqrt{x}\right)}\,dx$, (στ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{sin^2(2x)}\,dx$,

(ζ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{sin^2(2x+1)}\,dx$, (η) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sin^2(2+x^2)}\,dx$, (θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{sin^2(x^2+2x+3)}\,dx$,

(ι) $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{-1}}{sin^2\left(\sqrt{x}\right)}\,dx$.

Περίπτωση 8. Συνθέσεις του e^x.

Άσκηση 15. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 e^{4x+2}\,dx$, (β) $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$, (γ) $\int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx$, (δ) $\int_0^1 (2x+1)\cdot e^{x^2+x+1}\,dx$,

(ε) $\int_1^4 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$, (στ) $\int_0^1 (3x^2+1)e^{x^3+x+1}\,dx$, (ζ) $\int_0^1 \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, (η) $\int_0^1 4^x\,dx$,

(θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx-sinx)e^{sinx+cosx}dx$, (ι) $\int_0^1 cosx\cdot e^{sinx}\,dx$, (κ) $\int_0^1 x^2\cdot 5^{x^3}\,dx$, (λ) $\int_0^1 2^x\cdot e^x\,dx$,

(μ) $\int_0^1 \frac{\left(4^x-3^x\right)^2}{4^x\cdot 3^x}dx$, (ν) $\int_0^1 e^{x^2+2x+3+ln(x+1)}\,dx$, (ξ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{cos^2x}dx$, (ο) $\int_1^4 \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$,

(π) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{1+3\cdot\sigma\varphi x}}{sin^2x}dx$.

Περίπτωση 9. Ολοκληρώματα που υπολογίζονται με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων $c\cdot x^a,\ a\in\mathbb{R}-\{-1\}$ και $\frac{c}{x},\ x\neq 0,\ c\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 16. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (x^2+3x+1)dx$, (β) $\int_0^1 (x^2-2x+3)dx$, (γ) $\int_0^1 (2x+1)^2\,dx$,

(δ) $\int_1^2 \left(x+\sqrt{x}\right)dx$, (ε) $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}\right)dx$, (στ) $\int_1^2 \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2\,dx$,

(ζ) $\int_0^1 x(x-2)^3\,dx$, (η) $\int_1^2 \sqrt{x}(x-2)\,dx$, (θ) $\int_1^2 \sqrt{x}(x-2)^2\,dx$, (ι) $\int_1^2 x^2\left(\sqrt{x}-1\right)^2\,dx$.

Άσκηση 17. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2\left(x^2+3x+\frac{1}{x}\right)dx$, (β) $\int_1^e \frac{x^2-3x+1}{x}\,dx$, (γ) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$,

(δ) $\int_1^2 \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$, (ε) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}(x+1)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, (στ) $\int_1^2 \frac{x-3}{\sqrt{x}}\,dx$,

(ζ) $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x}+x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, (η) $\int_1^2 \frac{x^2+3x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, (θ) $\int_1^e\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)dx$

(ι) $\int_1^2 \frac{x^3-2x^2+1}{x^2}\,dx$, (κ) $\int_1^e\left(\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$, (λ) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}+2+\frac{1}{x}\right)dx$.

Περίπτωση 10. Συνθέσεις του $\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Άσκηση 18. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\,dx$, (δ) $\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx$,

(ε) $\int_0^1 \frac{1}{3x-6}\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+sinx}\,dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{1+2cosx}\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx$,

(θ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\,dx$, (ι) $\int_0^1 \frac{e^x}{3e^x+2}\,dx$, (κ) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$, (λ) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$,

(μ) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot lnx}\,dx$, (ν) $\int_1^e \frac{1}{x(1+2\cdot lnx)}\,dx$, (ξ) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, (ο) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Άσκηση 19. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,dx$, (β) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}\,dx$,

(δ) $\int_0^1 \frac{x(2x^2+1)}{x^4+x^2+3}\,dx$, (ε) $\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x+1}\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x+cosx}{e^x+sinx}\,dx$,

(ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx-cosx}{sinx+sinx}\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x ln2+cosx}{2^x+sinx}\,dx$, (θ) $\int_3^4 (x+1)(x-3)^{31}\,dx$.

Άσκηση 20. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^3 (x-2)\sqrt{x+1}\,dx$, (β) $\int_0^3 x^2\sqrt{x+1}\,dx$, (γ) $\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx$, (δ) $\int_0^1 (x+3)\sqrt{8x+1}\,dx$, (ε) $\int_0^1 (x^2-1)\sqrt[3]{x+1}\,dx$, (στ) $\int_{-2}^0 x(x+2)^5\,dx$,

(ζ) $\int_1^2 x^2(x-1)^{55}\,dx$, (η) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 x(2x+1)^{55}\,dx$, (θ) $\int_0^1 (x^2+x+1)(x+1)^6\,dx$.

(ι) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, (κ) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, (λ) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^2}}$, (μ) $\int_0^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$,

(ν) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$, (ξ) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Άσκηση 21. Εξετάστε αν ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

(α) $\frac{3}{2} \le \int_1^2 \frac{2x+1}{x+1}\,dx \le \frac{5}{3}$, (β) $1 \le \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \le \sqrt{2}$

(γ) $2\sqrt{3} \le \int_0^2 \sqrt{x^2+2x+3}\,dx \le 2\sqrt{11}$, (δ) $e \le \int_0^1 e^{x^2+2x+1}\,dx \le e^4$,

(ε) $-2 \le \int_{-1}^1 (x^3-3x+1)\,dx \le 6$, (στ) $\frac{\pi}{4} \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+sinx}\,dx \le \frac{\pi}{2}$,

(ζ) $\frac{1+ln2}{4} \le \int_e^{2e} \frac{lnx}{2x}\,dx \le \frac{1}{2}$.

Περίπτωση 11. Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα.

Άσκηση 22. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin3x\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x+sin6x)\,dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+sin4x)\,dx$,

(ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos3x\,dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos4x\,dx$, (η) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3x+cos6x)\,dx$,

(θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos3x\cdot cosx)\,dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin3x\cdot cosx)\,dx$, (κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin3x\cdot cos4x)\,dx$,

(λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin3x\cdot sin5x)\,dx$, (μ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^3x\cdot cosx)\,dx$, (ν) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^4x\cdot cosx)\,dx$,

(ξ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx\cdot cos^3x)\,dx$, (ο) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sinx}{cos^2x}\,dx$, (π) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3x\,dx$, (ρ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\,dx$.

Άσκηση 23. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\,dx$, (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 2x\,dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\cdot cos^3x\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5x\cdot cos^2x\,dx$.

Άσκηση 24. Αν $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx$ και $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\,dx$ υπολογίστε τα $I_1,\ I_2,\ I_1+I_2,\ I_2-I_1$.

Άσκηση 25. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\cdot cos^2x\,dx$, (β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin4x\cdot sin^2x\,dx$, (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos3x\cdot cos^2x\,dx$,

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4x\cdot sin^2x\,dx$, (ε) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx$, (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2x\,dx$, (ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^3x\,dx$

(η) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^4x\,dx$, (θ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x}{cos^2x}\,dx$, (ι) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^3x}{cos^2x}\,dx$, (κ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\,dx$, (λ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^2x\,dx$,

(μ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^3x\,dx$, (ν) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^4x\,dx$, (ξ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\varphi x}{sin^2x}\,dx$, (ο) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sigma\varphi x}}{sin^2x}\,dx$

Περίπτωση 12. Ολοκληρώματα στα οποία η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι σύνθεση της συναρτήσεως $c\cdot x^a$, $a\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $c\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 26. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \left(x^2+x+1\right)^3(2x+1)\,dx$, (β) $\int_0^1 \left(x^3+x+1\right)^4\left(3x^2+1\right)dx$, (γ) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$,

(δ) $\int_0^1 \left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)\,dx$, (ε) $\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}\,dx$, (στ) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$,

(ζ) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$, (η) $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt[4]{x^2+6x+7}}\,dx$, (θ) $\int_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^4}{\sqrt{x}}\,dx$, (ι) $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$,

(κ) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, (λ) $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Άσκηση 27. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 e^x\left(e^x+1\right)^3\,dx$, (β) $\int_0^1 e^x\sqrt{e^x+2}\,dx$, (γ) $\int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx$, (δ) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x+1}}\,dx$,

(ε) $\int_0^1 e^x\left(2e^x+1\right)^4\,dx$, (στ) $\int_1^e \frac{ln^4x}{x}\,dx$, (ζ) $\int_1^e \frac{\sqrt{lnx}}{x}\,dx$, (η) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot ln^3x}\,dx$, (θ) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{lnx}}\,dx$, (ι) $\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{1+lnx}}{x}\,dx$, (κ) $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x(1+2lnx)^3}$.

Άσκηση 28. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^3x\cdot cosx\,dx$, (β) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^4x\cdot cosx\,dx$, (γ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}sinx\cdot cos^5x\,dx$, (δ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinx}{cos^2x}dx$,

(ε) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{\sqrt{cosx}}dx$, (στ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}sinx\cdot\sqrt[3]{cosx}\,dx$, (ζ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}sinx\cdot\sqrt{2+cosx}\,dx$,

(η) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{sinx}\cdot cosx\,dx$, (θ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{1+sinx}\cdot cosx\,dx$, (ι) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{(2cosx+1)^2}\,dx$,

(κ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{\sqrt{1+sinx}}\,dx$, (λ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{\sqrt[3]{3+2sinx}}\,dx$.

Άσκηση 29. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\varepsilon\varphi^5x}{cos^2x}\,dx$, (β) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}{cos^2x}\,dx$, (γ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+\varepsilon\varphi x}}{cos^2x}\,dx$,

(δ) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\varphi^6x}{sin^2x}\,dx$, (ε) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+3\sigma\varphi x)^3}{sin^2x}\,dx$, (στ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(2+3\varepsilon\varphi x)cos^2x}$,

(ζ) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2+\sigma\varphi x}}{sin^2x}\,dx$, (η) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sin^2x\sqrt{1+\sigma\varphi x}}$, (θ) $\displaystyle\int_0^1\left(e^x+sinx+x\right)^3\left(e^x+cosx+1\right)dx$,

(ι) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{3x+2}{x(2lnx+3x)^2}\,dx$, (κ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sin^5x}{cos^7x}\,dx$, (λ) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3x}{sin^5x}\,dx$, (μ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx-sinx}{(cosx+sinx)^2}\,dx$,

(ν) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{sinx+2^x}\left(cosx+2^xln2\right)dx$.