Διαφορική εξίσωση (ΔΕ) ονομάζεται μία εξίσωση που περιέχει παραγώγους μίας άγνωστης συνάρτησης. Οι ΔΕ διακρίνονται σε:

• Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση $y$ είναι συνάρτηση μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής.

• Μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση $y$ είναι συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών.

**Τάξη** μίας ΔΕ ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

**Βαθμός** μίας ΔΕ, που μπορεί να γραφεί σε μορφή πολυωνύμου ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της, ονομάζεται η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η ανώτερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Αν μία ΔΕ δε μπορεί να γραφεί σε μορφή πολυωνύμου ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της, δε διακρίνουμε το βαθμό αυτής.

**Γραμμική** ονομάζεται μία ΔΕ αν είναι $1^{ου}$ βαθμού ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της. Μία γραμμική ΔΕ είναι $1^{ου}$ βαθμού, ενώ μία $1^{ου}$ βαθμού ΔΕ δεν είναι πάντα γραμμική.

**Επίλυση** ή ολοκλήρωση μίας ΔΕ ονομάζεται η εύρεση της άγνωστης συνάρτησης της οποίας κάποιες παράγωγοι εμφανίζονται στη ΔΕ. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται «**γενική λύση**» ή «**ολοκλήρωμα**» της ΔΕ. Από τη γενική λύση, δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στη σταθερά, λαμβάνουμε διάφορες λύσεις οι οποίες κατά αντιδιαστολή προς τη γενική λύση ονομάζονται **μερικές λύσεις**. Οι γραφικές παραστάσεις των μερικών λύσεων μίας ΔΕ ονομάζονται ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ. Αντικειμενικός σκοπός της μελέτης μίας ΔΕ δεν είναι μόνο η εύρεση των λύσεων, όταν αυτό είναι δυνατό, αλλά και η μελέτη της ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων.

- $dy+(xy-\cos x)dx=0$, $1^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθμού
- $5\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+7y=0$, $2^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθμού
- $8y'''+7xy''+5y(y')^2-xy=0$, $3^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθμού
- $4\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{dy}{dx}+3x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-7y=0$, $2^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθμού
- $4\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2-5\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^4-xy=0$, $3^{ης}$ τάξης, $2^{ου}$ βαθμού
- $y'-x=(y-xy')^{-3}$ ή $y'-x=\dfrac{1}{(y-xy')^3}$, $1^{ης}$ τάξης, $4^{ου}$ βαθμού
- $\sqrt{\rho'+\rho}=\cos\theta$, ή $\rho'+\rho=cos^2\theta$, $1^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθμού
- $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}=\sqrt[4]{\rho+\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$, ή $\left(\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}\right)^4=\rho+\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2$, $2^{ης}$ τάξης, $4^{ου}$ βαθμού
- $\dfrac{dy}{dx}=4x^2y^3-7$, $1^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθμού, όχι γραμμική διότι υπάρχει το $y^3$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{4}{x}\dfrac{dy}{dx}=0$, $2^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθμού

- $4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+3\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$, $2^{ης}$ τάξης, $2^{ου}$ βαθμού
- $e^y\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=3$, $2^{ης}$ τάξης, δεν υπάρχει βαθμός διότι υπάρχει ο παράγοντας $e^y$ που δε γράφεται σε μορφή πολυωνύμου.
- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+6xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=9x-12$, $2^{ης}$ τάξης, $2^{ου}$ βαθμού.

Στις ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης ανήκουν οι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, των οποίων ζητείται να βρεθούν οι γενικές λύσεις. Υπάρχουν δύο γενικές μορφές ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.

**$1^η$ μορφή**

$$A(x)+B(y)y'=0 \Leftrightarrow B(y)y'=-A(x) \Leftrightarrow$$
$$B(y)\frac{dy}{dx}=-A(x) \Leftrightarrow B(y)dy=-A(x)dx \Leftrightarrow \int B(y)\,dy=-\int A(x)\,dx+c$$

**$2^η$ μορφή**

$$y'=A(x)B(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=A(x)B(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{B(y)}=A(x)dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{B(y)}=\int A(x)\,dx+c$$

## Άσκηση 1

Λύστε τη ΔΕ $x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0$.

### Λύση

$$x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0 \Leftrightarrow x(1+y^2)+y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x\cancel{(1+y^2)}}{\cancel{(1+y^2)}(1+x^2)}+\frac{y\cancel{(1+x^2)}}{(1+y^2)\cancel{(1+x^2)}}\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2}\,dy=-\frac{x}{1+x^2}\,dx \Leftrightarrow$$
$$\int\frac{y}{1+y^2}\,dy=-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx+c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+y^2}\,dy=-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx+c_1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}ln(1+y^2)=-\frac{1}{2}ln(1+x^2)+\frac{1}{2}lnc \Leftrightarrow ln(1+y^2)=ln\frac{c}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$1+y^2=\frac{c}{1+x^2} \Leftrightarrow (1+y^2)(1+x^2)=c$ γενική λύση της ΣΔΕ με $c,c_1\in\mathbb{R}$ και $c>0$.

## Άσκηση 2

Λύστε τη ΔΕ $(x^2-y^2)dx+2\cdot x\cdot y\cdot dy=0$.

### Λύση

Αν $f(x,y)=(x^2-y^2)dx+2\cdot x\cdot y\cdot dy$ ισχύει ότι:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\left((\lambda x)^2-(\lambda y)^2\right)dx+2\cdot\lambda x\cdot\lambda y\cdot dy=\lambda^2\left(x^2-y^2\right)dx+\lambda^2 2\cdot x\cdot y\cdot dy=$$

$$\lambda^2\left[\left(x^2-y^2\right)dx+2\cdot x\cdot y\cdot dy\right]=\lambda^2\cdot f(x,y)$$

Συνεπώς, η ΔΕ $f(x,y)=\underbrace{\left(x^2-y^2\right)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{2\cdot x\cdot y}_{N(x,y)}dy=0$ είναι ομογενής ως προς $x,y$ βαθμού ομοιογένειας 2.

Θέτω $\frac{y}{x}=\omega\Leftrightarrow y=x\omega\Leftrightarrow y'=x'\omega+x\omega'\Leftrightarrow y'=\omega+x\omega'$

και αντικαθιστώντας στην $\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=0$ προκύπτει ότι

$$\left(x^2-x^2\omega^2\right)dx+2xx\omega\left(\omega+x\omega'\right)=0\Leftrightarrow \cancel{x^2}\left(1-\omega^2\right)+2\cancel{x^2}\omega\left(\omega+x\omega'\right)=0\underbrace{\Leftrightarrow}_{x\neq 0}$$

$$\left(1-\omega^2\right)+2\omega\left(\omega+x\omega'\right)=0\Leftrightarrow 1-\omega^2+2\omega^2+2x\omega\frac{d\omega}{dx}=0\Leftrightarrow$$

$$1+\omega^2+2x\omega\frac{d\omega}{dx}=0\Leftrightarrow 2x\omega\frac{d\omega}{dx}=-\left(1+\omega^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{dx}=-\frac{1+\omega^2}{2\omega d\omega}\Leftrightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{2\omega}{1+\omega^2}d\omega\Leftrightarrow$$

$$lnx=-ln\left(1+\omega^2\right)+lnc\Leftrightarrow lnx=ln\frac{c}{1+\omega^2}\Leftrightarrow x=\frac{c}{1+\omega^2}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{c}{1+\frac{y^2}{x^2}}\Leftrightarrow x=\frac{c}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\Leftrightarrow \cancel{x}=\frac{cx^{\cancel{2}}}{x^2+y^2}\Leftrightarrow 1=\frac{cx}{x^2+y^2}$$

Άρα, $x^2+y^2=cx$, με $c>0$.

## Άσκηση 3

(**α**) Λύστε τη ΔΕ $y'=x^2\cdot y^3$.

(**β**) Υπολογίστε τους $c_1,\ c_2\in\mathbb{R}$ ώστε η $y(x)=c_1\cdot e^x+c_2\cdot x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$ να ικανοποιεί τις συνθήκες $y(1)=1$ & $y'(1)=-1$.

## Λύση

(**α**) $y'=x^2\cdot y^3\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=x^2\cdot y^3\Leftrightarrow\frac{dy}{y^3}=x^2dx\Leftrightarrow$

$$\int\frac{dy}{y^3}=\int x^2dx\Leftrightarrow\frac{y^{-2}}{-2}=\frac{x^3}{3}+c\Leftrightarrow\frac{1}{-2y^2}=\frac{x^3+3c}{3}\Leftrightarrow -2y^2=\frac{3}{x^3+3c}$$

Η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι $2y^2=\frac{-3}{x^3+c_1}$ με $c,c_1\in\mathbb{R}$.

(**β**) $y(1)=1\Leftrightarrow c_1\cdot e^1+c_2\cdot 1\cdot e^1+1^2\cdot e^1=1\Leftrightarrow c_1e+c_2e+e=1$

$$y'(x)=c_1e^x+c_2xe^x+c_2e^x+x^2e^x+2xe^x$$

$$y'(1)=-1\Leftrightarrow c_1e^1+c_21e^1+c_2e^1+1^2e^1+2\cdot 1e^1=-1\Leftrightarrow$$

$$c_1e+c_2e+c_2e+e+2e=-1\Leftrightarrow c_1e+2c_2e+3e=-1$$

Ισχύει ότι

$$\begin{cases} c_1 e + c_2 e + e = 1 \\ c_1 e + 2c_2 e + 3e = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e(c_1 + c_2 + 1) = 1 \\ e(c_1 + 2c_2 + 3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = \dfrac{1}{e} \\ c_1 + 2c_2 + 3 = \dfrac{-1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{e} - c_2 - 1 \\ \dfrac{1}{e} - c_2 - 1 + 2c_2 + 3 = \dfrac{-1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{e} - c_2 - 1 \\ c_2 + 2 = \dfrac{-2}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{e} - c_2 - 1 \\ c_2 = -2 - \dfrac{2}{e} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{e} + 2 + \dfrac{2}{e} - 1 \\ c_2 = -2 - \dfrac{2}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 + \dfrac{3}{e} \\ c_2 = -2 - \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

## Άσκηση 4

Λύστε τις ΔΕ (**α**) $(1+y^2)dx + x \cdot y \cdot dy = 0$,

(**β**) $x(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0$.

## Λύση

(**α**) $(1+y^2)dx + x \cdot y\ dy = 0 \Leftrightarrow x \cdot y\ dy = -(1+y^2)dx \Leftrightarrow \dfrac{y}{1+y^2}\ dy = -\dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow$

$\displaystyle\int \frac{y}{1+y^2}\ dy = -\int \frac{dx}{x} + c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} ln(1+y^2) = -lnx + lnc \Leftrightarrow$

$ln\sqrt{1+y^2} = ln\dfrac{c}{x} \Leftrightarrow 1+y^2 = \dfrac{c}{x^2} \Leftrightarrow c = x^2(1+y^2)$

(**β**) $x(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0 \Leftrightarrow x(y^2-1)dx = y(x^2-1)dy \Leftrightarrow$

$\dfrac{x}{x^2-1}dx = \dfrac{y}{y^2-1}dy \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\ dx = \int \frac{y}{y^2-1}\ dy + c_1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-1}\ dy + c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} ln(x^2-1) = \frac{1}{2} ln(y^2-1) + lnc_2 \Leftrightarrow$

$ln(x^2-1) = ln(y^2-1) + 2lnc_2 \Leftrightarrow$

$ln(x^2-1) = ln\left[2c_2(y^2-1)\right] \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2c_2(y^2-1)$

$x^2 - 1 = c(y^2-1)$ με $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ και $c_2, c > 0$.

## Άσκηση 5

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι λύσεις της ΔΕ $y'' = y$;

(**α**) $y(x) = e^x$ (**β**) $y(x) = sinx$ (**γ**) $y(x) = 4e^{-x}$ (**δ**) $y(x) = 0$

## Λύση

(**α**) $\left.\begin{aligned} y(x) &= e^x \\ y'(x) &= e^x \\ y''(x) &= e^x \end{aligned}\right\} y'' = y$ (**β**) $\left.\begin{aligned} y(x) &= sinx \\ y'(x) &= cosx \\ y''(x) &= -sinx \end{aligned}\right\} y'' \neq y$

$$(\gamma)\ \left.\begin{aligned} y(x)&=4e^{-x}\\ y'(x)&=-4e^{-x}\\ y''(x)&=4e^{-x}\end{aligned}\right\} y''=y \qquad (\delta)\ \left.\begin{aligned} y(x)&=0\\ y'(x)&=0\\ y''(x)&=0\end{aligned}\right\} y''=y$$

## Άσκηση 6

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι λύσεις της ΔΕ $y''-4y'+4y=e^x$;

(α) $y(x)=e^x$ (β) $y(x)=e^{2x}$ (γ) $y(x)=e^x+e^{2x}$ (δ) $y(x)=xe^x+e^{2x}$

(ε) $y(x)=e^x+xe^{2x}$.

## Λύση

$$(\alpha)\ \left.\begin{aligned} y&=e^x \Rightarrow 4y=4e^x\\ y'&=e^x \Rightarrow -4y'=-4e^x\\ y''&=e^x\end{aligned}\right\} y''-4y'+4y=e^x$$

$$(\beta)\ \left.\begin{aligned} y&=e^{2x} \Rightarrow 4y=4e^{2x}\\ y'&=2e^{2x} \Rightarrow -4y'=-8e^{2x}\\ y''&=4e^{2x}\end{aligned}\right\} y''-4y'+4y=0$$

$$(\gamma)\ \left.\begin{aligned} y&=e^x+e^{2x} \Rightarrow 4y=\cancel{4e^x}+\cancel{4e^{2x}}\\ y'&=e^x+2e^{2x} \Rightarrow -4y'=\cancel{-4e^x}\cancel{-8e^{2x}}\\ y''&=e^x+\cancel{4e^{2x}}\end{aligned}\right\} y''-4y'+4y=e^x$$

## Άσκηση 7

Λύστε τη ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών $y=2xy'$. Ποιά η ολοκληρωτική γραμμή που διέρχεται από το σημείο $(1,\ 2)$;

## Λύση

$$y=2xy' \Leftrightarrow y=2x\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dx}{2x}=\frac{dy}{y} \Leftrightarrow \int\frac{dx}{2x}+c_1=\int\frac{dy}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+c_1=\int\frac{dy}{y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln|x|+\ln|c|=\ln|y| \Leftrightarrow ln|x|+2\cdot ln|c|=2\cdot ln|y| \Leftrightarrow ln|x|+ln|c|^2=ln|y|^2 \Leftrightarrow$$

$$ln\left(|x||c|^2\right)=ln|y|^2 \Leftrightarrow |x||c|^2=|y|^2 \Leftrightarrow xc^2=y^2$$

Στη γενική λύση θέτω $x=1$ και $y=2$ οπότε $1c^2=2^2 \Leftrightarrow c=2$

Συνεπώς, η ζητούμενη ολοκληρωτική γραμμή είναι $y^2=4x$.

**Ολοκληρωτική καμπύλη** είναι η καμπύλη που αντιστοιχεί σε κάθε μία μερική λύση της ΔΕ, στο επίπεδο των ορθογωνίων αξόνων.

**Οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών** ή επίπεδο γένος καμπυλών, είναι το σύνολο των καμπυλών που προκύπτουν από τη γενική λύση της ΔΕ, στο επίπεδο των καρτεσιανών αξόνων. Δηλαδή, πρόκειται για ένα πλήθος επίπεδων καμπυλών, που ορίζονται από μία εξίσωση, που περιέχει μόνο μία παράμετρο της μορφής $f(x,y,c_1)=0$.

## Άσκηση 8

Βρείτε τη γενική λύση των ΔΕ (**α**) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{2x}$,

(**β**) $(x-1)^2\, y\, dx + x^2(y+1)\, dy = 0$

**Λύση**

(**α**) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{2x} \Leftrightarrow \frac{2dy}{y}=\frac{-3dx}{x} \Leftrightarrow \frac{2dy}{y}+\frac{3dx}{x}=0 \Leftrightarrow \int\frac{2dy}{y}+\int\frac{3dx}{x}=c_1 \Leftrightarrow$

$2\cdot lny+3\cdot lnx=lnc \Leftrightarrow lny^2+lnx^3=lnc \Leftrightarrow ln\left(y^2x^3\right)=lnc \Leftrightarrow y^2x^3=c$

Επειδή η σταθερά $c_1$ είναι αυθαίρετη, μπορώ αντί $c_1$ να θέσω $lnc$ όπου $c>0$ άλλη αυθαίρετη σταθερά.

(**β**) Θεωρώ ότι $xy\neq 0$.

$(x-1)^2\, y\, dx + x^2(y+1)\, dy = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2\cancel{y}}{x^2\cancel{y}}dx+\frac{\cancel{x^2}(y+1)}{\cancel{x^2}y}\, dy=0 \Leftrightarrow$

$\frac{(x-1)^2}{x^2}dx+\frac{(y+1)}{y}\, dy=0 \Leftrightarrow \int\frac{(x-1)^2}{x^2}dx+\int\frac{y+1}{y}\, dy=c \Leftrightarrow$

$\int\frac{x^2-2x+1}{x^2}dx+\int\frac{y}{y}\, dy+\int\frac{1}{y}\, dy=c \Leftrightarrow$

$\int 1\, dx-\int\frac{2}{x}\, dx+\int\frac{1}{x^2}\, dx+\int 1\, dy+lny=c \Leftrightarrow x-2lnx-\frac{1}{x}+y+lny=c$.

**Άσκηση 9**

(**α**) Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $\left(1+x^3\right)dy-x^2ydx=0$.

(**β**) Αφού βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $e^xdx-ydy=0$ να υπολογιστεί η καμπύλη ολοκλήρωσης της που διέρχεται από το σημείο $(0,\ 1)$.

(**γ**) Λύστε την ομογενή ΔΕ $2\cdot x\cdot y\ \frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

**Λύση**

(**α**) $\left(1+x^3\right)dy-x^2ydx=0 \Leftrightarrow \left(1+x^3\right)dy=x^2ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{x^2}{1+x^3}dx \Leftrightarrow$

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x^2}{1+x^3}\, dx+c \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{1+x^3}\, dx+c_1 \Leftrightarrow$

$lny=\frac{1}{3}ln\left(1+x^3\right)+lnc \Leftrightarrow lny=ln\sqrt[3]{1+x^3}+lnc \Leftrightarrow lny=ln\left(c\sqrt[3]{1+x^3}\right) \Leftrightarrow$

$y=c\sqrt[3]{1+x^3}$. Επειδή η σταθερά $c_1$ είναι αυθαίρετη, μπορώ αντί $c_1$ να θέσω $lnc$ όπου $c>0$ άλλη αυθαίρετη σταθερά.

(**β**) $e^xdx-ydy=0 \Leftrightarrow e^xdx=ydy \Leftrightarrow \int e^xdx=\int y\, dy+c_1 \Leftrightarrow$

$e^x=\frac{y^2}{2}+c_1 \Leftrightarrow 2e^x=y^2+2c_1 \Leftrightarrow y^2=2e^x-2c_1$

**Γενική λύση**

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στην ανωτέρω εξίσωση προκύπτει ότι $1^2 = 2e^0 - 2c_1 \Leftrightarrow 1 = 2 - 2c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$. Συνεπώς, η ζητούμενη καμπύλη είναι $y^2 = 2e^x - 2c_1 = 2e^x - 1$ ή ισοδυνάμως $y = \sqrt{2e^x - 1}$.

(γ) Η ΔΕ είναι ομογενής ως προς $x, y$ με βαθμό ομογένειας 2.

Είναι $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2 \cdot x \cdot y} = \frac{x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2y}{x}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$ (1)

Θέτω $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ και αντικαθιστώ στην (1)

$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} - u = \frac{1+u^2-2u^2}{2u} = \frac{1-u^2}{2u}$

Άρα $\frac{2 \cdot u\ du}{1-u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2 \cdot u}{1-u^2}\ du = \int \frac{1}{x}\ dx + c_1 \Rightarrow -ln\left(1-u^2\right) = lnx + lnc \Rightarrow$

$ln\frac{1}{1-u^2} = ln\left(x \cdot c\right) \Rightarrow \frac{1}{1-u^2} = x \cdot c \Rightarrow \frac{1}{x \cdot c} = 1 - u^2 = 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2}$

Συνεπώς, $\frac{1}{c} = \frac{x^2-y^2}{x}$.

## Άσκηση 10

Λύστε τις ομογενείς ΔΕ (α) $\left(y^2 - x^2\right)dx + xy\ dy = 0$, (β) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$

## Λύση

(α) Είναι $f\left(x,y\right) = \left(y^2 - x^2\right)dx + x \cdot y\ dy$ Άρα:

$$f\left(\lambda x, \lambda y\right) = \left[\left(\lambda y\right)^2 - \left(\lambda x\right)^2\right]dx + \lambda x \cdot \lambda y\ dy = \lambda^2\left(y^2 - x^2\right)dx + \lambda^2 x \cdot y\ dy = \lambda^2 f\left(x,y\right)$$

Συνεπώς, η ΔΕ είναι ομογενής ως προς $x, y$ βαθμού ομογένειας 2.

Θέτω $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow dy = u\ dx + x\ du$.

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση προκύπτει ότι:

$\left(x^2u^2 - x^2\right)\ dx + x \cdot u \cdot x\left(u\ dx + x\ du\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2u^2\ dx - x^2\ dx + x^2u^2\ dx + x^3u\ du = 0 \Leftrightarrow x^2\left(2u^2-1\right)dx + x^3udu = 0$

Διαιρώ δια $x^2$, υποθέτοντας ότι $x \neq 0$ και προκύπτει ότι $\left(2u^2-1\right)dx + xudu = 0$

➤ Αν $2u^2 - 1 \neq 0$ είναι: $\frac{\cancel{\left(2u^2-1\right)}dx}{x\cancel{\left(2u^2-1\right)}} + \frac{\cancel{x}u\ du}{\cancel{x}\left(2u^2-1\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{u\ du}{\left(2u^2-1\right)} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\frac{4u\ du}{\left(2u^2-1\right)} = 0 \Leftrightarrow \int\frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\int\frac{4u\ du}{\left(2u^2-1\right)} = c \Leftrightarrow lnx + \frac{1}{4}ln\left(2u^2-1\right) = c \Leftrightarrow$

$4 \cdot lnx + ln\left(2u^2-1\right) = 4c \Leftrightarrow lnx^4 + ln\left(2u^2-1\right) = 4c \Leftrightarrow ln\left[x^4\left(2u^2-1\right)\right] = lnc' \Leftrightarrow$

$x^4\left(2u^2-1\right)=c' \Leftrightarrow x^4\left(2\frac{y^2}{x^2}-1\right)=c' \Leftrightarrow 2x^2y^2-x^4=c'$

- Αν $2u^2-1=0 \Rightarrow u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

(**β**) Είναι $f\left(x,y\right)=xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$

Άρα, $f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda\cdot x\ dy-\lambda\cdot y\ dx=\sqrt{\left(\lambda x\right)^2+\left(\lambda y\right)^2}dx=$

$\lambda\left(xdy-ydx\right)=\lambda\sqrt{x^2+y^2}dx=\lambda f\left(x,y\right)$

Συνεπώς, η ΔΕ είναι ομογενής ως προς $x,y$ βαθμού ομογένειας 1.

Είναι $x\ dy-y\ dx=\sqrt{x^2+y^2}dx \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}dy}{\cancel{x}dx}-\frac{y\cancel{dx}}{x\cancel{dx}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cancel{dx}}{x\cancel{dx}} \Leftrightarrow$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ (1)

Θέτω $u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=u\cdot x \Rightarrow y'=u+x\frac{du}{dx}$ και αντικαθιστώντας στην (1)

προκύπτει ότι $\cancel{u}+x\frac{du}{dx}=\cancel{u}+\sqrt{1+u^2} \Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2} \Leftrightarrow \frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Leftrightarrow$

$\int\frac{dx}{x}+c_1=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Leftrightarrow \ln x+\ln c=ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) \Leftrightarrow x\cdot c=u+\sqrt{1+u^2} \Leftrightarrow$

$xc=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

Άρα $x^2c=y+\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2c-y=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(x^2c-y\right)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow$

$x^4c^2+\cancel{y^2}-2\cdot x^2c\cdot y=x^2+\cancel{y^2} \Leftrightarrow x^4c^2-2\cdot x^2c\cdot y=x^2 \Leftrightarrow x^2c^2-2\cdot c\cdot y=1 \Leftrightarrow$

$x^2c^2-1=2\cdot c\cdot y \Leftrightarrow \frac{x^2c^2-1}{2\cdot c}=y$ όπου $c\in\mathbb{R}$ με $c>0$.

### ΔΕ των οποίων το $1^{\text{ο}}$ μέρος είναι ολικό ή τέλειο διαφορικό

Έχουν τη μορφή $\mathrm{M}\left(x,y\right)dx+\mathrm{N}\left(x,y\right)dy=0$.

### Άσκηση 11

Να λυθεί Η ΔΕ $\left(3x^2+4xy\right)dx+\left(2x^2+3y^2\right)dy=0$.

### Λύση

Είναι $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=4x$, άρα η ΔΕ είναι τέλειο διαφορικό και η γενική της λύση δίνεται

από τον τύπο: $\int_{x_0}^{x}M\left(x,y\right)\ dx+\int_{y_0}^{y}N\left(x_0,y\right)\ dy=c$ δηλαδή

$\int_0^x\left(3x^2+4xy\right)\ dx+\int_0^y\left(2\cdot 0^2+3y^2\right)\ dy=c \Leftrightarrow x^3+2x^2y+y^3=c$

## Άλυτες ασκήσεις διαφορικών εξισώσεων

**1.** Πυροβόλο βάλει βλήμα με ταχύτητα σταθερού μέτρου $v_o$ στο επίπεδο xOz υπό γωνία $\hat{\theta}$ σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο και $0 \leq \theta \leq \pi$. Τα σημεία του ανωτέρω επιπέδου που δεν είναι δυνατό να βληθούν από το κανόνι βρίσκονται πέρα από μία καμπύλη που θα διαγράψει το βλήμα, για τις διάφορες τιμές της γωνίας $\hat{\theta}$. Βρείτε την καμπύλη αυτή που ονομάζεται περιβάλλουσα των τροχιών.

**2.** Δεξαμενή όγκου $V$ είναι γεμάτη με καθαρό νερό. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0''$ αρχίζει να εισρέει στη δεξαμενή θαλασσινό νερό, από σωλήνα παροχής $\Pi$, με αποτέλεσμα να εκρέει από τη δεξαμενή ίσος όγκος νερού ανά μονάδα χρόνου. Αν η συγκέντρωση του αλατιού στο θαλασσινό νερό είναι $x\dfrac{gr}{lit}$ βρείτε τη μάζα $m$ του αλατιού που είναι διαλυμένη στο νερό που περιέχει η δεξαμενή τη χρονική στιγμή $t > 0$ και κάντε τη γραφική παράσταση $m(t)$.

**Παραδοχή.** Το αλάτι που περιέχεται στο θαλασσινό νερό το εισρέον στη δεξαμενή, διαχέεται ακαριαία σε όλο τον όγκο της δεξαμενής, ώστε η εκάστοτε συγκέντρωση αλατιού να είναι σταθερή σε όλο τον όγκο της δεξαμενής.

**3.** Γνωρίζεις ότι σε σώμα που κινείται εντός ρευστού με ταχύτητα $v$, ασκείται από το ρευστό μία δύναμη $F_R$ (αντίσταση ρευστού) ίδιας διεύθυνσης και αντίθετης φοράς από την ταχύτητα του σώματος με μέτρο $F_R = k_1 v$, όπου $k_1$ συντελεστής ανεξάρτητος της ταχύτητος. Σώμα μάζας $m$ πέφτει από ύψος $h_0$ χωρίς αρχική ταχύτητα. Ποιά η ταχύτητα του $v$ την τυχαία χρονική στιγμή $t$, αν η αντίσταση του αέρα δίνεται από τον ανωτέρω τύπο; Να γίνει η γραφική παράσταση $v(t)$.

**4.** Τορπίλη μάζας $m$ εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $v_0$ και επιβραδύνεται από μία δύναμη ανάλογη της ταχύτητας της. Αν στην τορπίλη δεν ασκείται καμία άλλη δύναμη, ποιά η ταχύτητα της μετά τη διέλευση χρόνου $t$ από την εκτόξευση της;