

Κεφάλαιο 7

7.8 Ερωτήσεις κατανόησης, σελίδες 374 – 377.

Α/Α	Απαντήσεις	Επεξηγήσεις
1	Σωστό	
2	Λάθος	Είναι πρώτης τάξεως.
3	Λάθος	Είναι συνήθης διαφορική εξίσωση.
4	Σωστό	
5	Σωστό	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
6	Λάθος	Διότι δεν την επαληθεύει.
7	Λάθος	
8	Σωστό	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
9	Λάθος	
10	Σωστό	
11	Σωστό	
12	Σωστό	
13	Σωστό	
14	Λάθος	
15	Σωστό	
16	Λάθος	
17	Σωστό	
18	Λάθος	Είναι πρώτου βαθμού.
19	Σωστό	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις. Βαθμός ομογένειας 2.
20	Λάθος	Το σωστό είναι $z = \frac{y}{x}$
21	Σωστό	
22	Λάθος	Είναι πρώτης τάξεως, αλλά όχι γραμμική. Η μορφή της 1 ^{ης} τάξεως γραμμικής ΔΕ είναι $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.
23	Σωστό	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
24	Λάθος	Το σωστό είναι $\Delta = p^2 - 4q > 0$.
25	Σωστό	
26	Σωστό	

$$5. \quad y(x) = 2e^{-x} + x \cdot e^{-x}, \quad y'(x) = -e^{-x} - x \cdot e^{-x}, \quad y''(x) = x \cdot e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = \cancel{x \cdot e^{-x}} - 2e^{-x} - \cancel{2x \cdot e^{-x}} + 2e^{-x} + \cancel{x \cdot e^{-x}} = 0$$

$$7, 8, 9. \quad y(x) = \sin(2x) + c, \quad y'(x) = 2 \cdot \cos(2x), \quad y''(x) = -4 \cdot \sin(2x)$$

$$y'' + 4 \cdot y = 0 \Leftrightarrow -4 \cdot \sin(2x) + 4 \cdot (\sin(2x) + c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$19. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \Leftrightarrow (x^2 - y^2) dy = 2xy dx \Leftrightarrow P(x, y) dy = Q(x, y) dx$$

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 - y^2) = \lambda^2 P(x, y)$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = 2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2 \cdot 2xy = \lambda^2 Q(x, y)$$

23.

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ y'(x) &= -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} \\ y''(x) &= c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'' - y' - 2y = 0$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, Σελίδες 376 – 377.

Α/Α	Απαντήσεις	Επεξηγήσεις
1	β	Είναι $\frac{dy}{y^2} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Leftrightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x \Leftrightarrow \frac{-1}{y} = x$
2	β	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
3	γ	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
4	δ	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
5		
6	α	
7		
8	β	
9	α	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
10	γ	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
11		
12		
13	γ	Βλέπε τις παρακάτω επεξηγήσεις.
14		
15		

2.

Επίλυση

$$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1} \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = 2x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int 2x dx + c \Leftrightarrow 2\sqrt{y-1} = x^2 + c \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{y-1} = \frac{x^2 + c}{2} \Leftrightarrow y-1 = \frac{(x^2 + c)^2}{4} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{(x^2 + c)^2}{4}$$

Επαλήθευση

$$y = 1 + \frac{(x^2 + c)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x(x^2 + c)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot 2 \cdot \sqrt{y-1} = 2 \cdot x \sqrt{\frac{(x^2 + c)^2}{4}} = 2 \cdot x \frac{x^2 + c}{2} = x(x^2 + c)$$

$$\text{Επεξήγηση. } y-1 = \frac{(x^2 + c)^2}{4} \Leftrightarrow 4(y-1) = (x^2 + c)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{y-1} = x^2 + c$$

$$3. \quad y = \frac{x^5}{3} + cx^2, \quad 2y = \frac{2x^5}{3} + 2cx^2, \quad \frac{2y}{x} = \frac{2x^4}{3} + 2cx$$

$$y' = \frac{5x^4}{3} + 2cx, \quad y' - \frac{2y}{x} = \frac{5x^4}{3} + 2cx - \frac{2x^4}{3} - 2cx = \frac{3x^4}{3} = x^4$$

$$4. \quad y = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad y(0)=1, \quad y' = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$2xy = 2x \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x}{x^2+1}$$

$$(1+x^2)y' = \cancel{(1+x^2)} \frac{-x^2-2x+1}{\cancel{(x^2+1)}^2} = \frac{-x^2-2x+1}{x^2+1}$$

$$(1+x^2)y' + 2xy = \frac{-x^2-2x+1}{x^2+1} + \frac{2x^2+2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$$

$$9. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1} \Leftrightarrow (y^4+1)dy = (x+1)dx \Leftrightarrow \int (y^4+1)dy = \int (x+1)dx + c \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^5}{5} + y = \frac{x^2}{2} + x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$10. \quad y = \frac{1}{3+\ln x}, \quad y^2 = \frac{1}{(3+\ln x)^2}, \quad \frac{-y^2}{x} = \frac{-1}{x(3+\ln x)^2}$$

$$y' = \frac{1' \cancel{(3+\ln x)} - 1(3+\ln x)'}{(3+\ln x)^2} = \frac{-1 \frac{1}{x}}{(3+\ln x)^2} = \frac{-1}{x(3+\ln x)^2}$$

$$13. \quad y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4}, \quad y' = -x + x^2 + 3x^3, \quad y'' = -1 + 2x + 9x^2$$