1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Α' ΕΚΔΟΣΗ 1995

ISBN 960-337-012-6

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Θ. ΠΑΠΑΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ
ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ν. ΚΑΪΤΣΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

Πρῶτον, οἶμαι, τῶν ἐν ἀνθρώποις ἐστὶ παίδευσις
(Πρώτο από τα ανθρώπινα αγαθά , νομίζω ότι είναι η μόρφωση)
Ἀντιφῶν

Το πιο πολύτιμο απ' όλα τα κεφάλαια, είναι αυτό που έχει επενδυθεί στον άνθρωπο.
Alfrend Marchal (1842 - 1924)

ΑΘΗΝΑ
1997

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Στατιστική κατέχει σήμερα εξέχουσα θέση στο χώρο των επιστημών, η δε σπουδαιότητα και χρησιμότητά της είναι φανερή και από το γεγονός ότι διδάσκεται πλέον σ' όλες σχεδόν τις πανεπιστημιακές σχολές.

Όσον αφορά τη χρησιμότητα της Στατιστικής για τη σύγχρονη επιχείρηση, δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε, ότι αποτελεί ένα από τα βασικά και απαραίτητα εργαλεία στην άσκηση της διοικήσεως των επιχειρήσεων. Ο ορθός επιχειρηματικός προγραμματισμός, η στρατηγική έρευνας και κατακτήσεως της αγοράς από τις επιχειρήσεις, η λήψη ορθών επιχειρηματικών αποφάσεων κ.ά., είναι αδύνατον να γίνουν χωρίς τη βοήθεια της Στατιστικής.

Οικονομολόγοι και στελέχη επιχειρήσεων, είτε του ιδιωτικού είτε του δημόσιου τομέα, θα πρέπει να έχουν γνώσεις Στατιστικής για να μπορούν να δίνουν ορθές απαντήσεις στα σύνθετα, από τη φύση τους, οικονομικά προβλήματα, τα οποία γίνονται περισσότερο πολύπλοκα και δισεπίλυτα με τη συνεχή ανάπτυξη της οικονομίας.

Στο βιβλίο αυτό, το οποίο γράφτηκε με βάση το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα και απευθύνεται σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαιδεύσεως, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε οι διάφορες στατιστικές έννοιες να παρουσιάζονται με τρόπο απλό και σύντομο. Ο δε υπολογισμός των διαφόρων στατιστικών μέτρων να μην γίνεται με ένα απλό «μηχανιστικό» τρόπο στατιστικών υπολογισμών, όπου ο μαθητής αδυνατεί να κατανοήσει επαρκώς τη χρησιμότητά τους, αλλά έτσι ώστε αυτός να συμμετέχει πραγματικά στη διαδικασία ευρέσεως κάποιου στατιστικού μέτρου, γνωρίζοντας τι βρίσκει και γιατί. Έτσι πιστεύομε, ότι ο μαθητής εύκολα θα αντιληφθεί την αξία των διαφόρων στατιστικών μέτρων και τη δυνατότητα εφαρμογής τους στο χώρο των επιχειρήσεων.

Για την καλύτερη επιτυχία του σκοπού του βιβλίου, δίνεται μαζί με την ελληνική ορολογία και η αγγλική για να συνηθίζει σιγά - σιγά ο μαθητής στη διεθνή στατιστική ορολογία, κάτι που θα αποβεί χρήσιμο σ' όσους συνεχίσουν τις σπουδές τους.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει ειδική παράγραφος όπου παρουσιάζονται επιχειρηματικές εφαρμογές, ώστε να αντιληφθεί ο μαθητής, πώς εφαρμόζονται από τα στελέχη επιχειρήσεων οι στατιστικές μέθοδοι. Κατόπιν ακολουθεί η ανακεφαλαίωση, όπου περιλαμβάνονται τα πιο σημαντικά μέρη του κεφαλαίου και τέλος υπάρχει η παράγραφος των ερωτήσεων και ασκήσεων. Οι ασκήσεις επισημαίνονται με έναν αστερίσκο, οι πιο απλές, και μέχρι τρεις αστερίσκους, οι πιο σύνθετες έτσι, ώστε η εμπέδωση και ο έλεγχος κατανοήσεως της θεωρίας να γίνεται σταδιακά.

Ευχόμενοι καλή επιτυχία στο έργο όλων μας, καθηγητών και μαθητών, θα ήμασταν ευγνώμονες αν μας επισημαίνονταν από συναδέλφους περιθώρια βελτιώσεως του παρόντος.

Οι συγγραφείς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά για τη Στατιστική.
1.2 Ο ρόλος της Στατιστικής στο χώρο των επιχειρήσεων.
1.3 Πληθυσμός - Μεταβλητές.
1.4 Περιγραφική και Επαγωγική Στατιστική.

Τοσαύτας καὶ τηλικαύτας ἔχοντος τοῦ ἀριθμοῦ δυνάμεις

(...Τόσες πολλές λοιπόν και τόσες μεγάλες δυνάμεις έχει ο αριθμός).

Πλουτάρχου Ἠθικά.

Όταν μπορείς να μετρήσεις αυτό για το οποίο μιλάς και να το εκφράσεις με αριθμούς, τότε γνωρίζεις κάτι γι' αυτό.

Lord Kelvin (1824-1907)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά για τη Στατιστική.

α) Έννοια - Περιεχόμενο.

Η Στατιστική μπορεί να ορισθεί ως η επιστήμη που ασχολείται με τη συλλογή, επεξεργασία, παρουσίαση και ανάλυση αριθμητικών δεδομένων, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων χρησίμων στη λήψη ορθών αποφάσεων.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, σε μια στατιστική έρευνα μπορούμε να διακρίνομε τρία στάδια:

α) Τη συλλογή του στατιστικού υλικού.

β) Την επεξεργασία και παρουσίασή του και τέλος

γ) την ανάλυση του στατιστικού υλικού και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η Στατιστική επιτυγχάνει τη συλλογή, επεξεργασία, παρουσίαση και ανάλυση των στατιστικών στοιχείων (αριθμητικών δεδομένων) με την εφαρμογή καταλλήλων για κάθε περίπτωση στατιστικών μεθόδων, οι οποίες και συνιστούν το περιεχόμενό της.

Η λέξη Στατιστική χρησιμοποιείται, μερικές φορές, με διαφορετική έννοια απ' αυτή που δώσαμε. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει αυτά τα ίδια τα αριθμητικά δεδομένα, όπως π.χ. τα αριθμητικά δεδομένα που αναφέρονται στις εισαγωγές και εξαγωγές του κράτους ή στα τροχαία ατυχήματα κ.ά., οπότε χρησιμοποιούμε αντίστοιχα τις εκφράσεις «στατιστικές του εξωτερικού εμπορίου», «στατιστικές των τροχαίων ατυχημάτων» κ.ά.

β) Ιστορική εξέλιξη - Σύντομη αναφορά.

Αξίζει να αναφέρομε ότι οι πρώτες προσπάθειες συλλογής στατιστικών στοιχείων ανάγονται στους αρχαιότατους χρόνους. Από την ιστορία πληροφορούμαστε ότι σε απογραφές πληθυσμού, γης κ.λπ. προέβαιναν και λαοί της αρχαιότητας (Έλληνες, Κινέζοι, Αιγύπτιοι κ.λπ.). Αργότερα, στο τέλος του μεσαίωνα, στην Ευρώπη, διάφορες κυβερνήσεις άρχισαν να συγκεντρώνουν συστηματικά στατιστικά στοιχεία γεννήσεων, θανάτων, γάμων κ.λπ.

Ως αυτοτελής επιστήμη η Στατιστική εφαρμόζεται ήδη από τον 17ο αιώνα. Τότε, άρχισε να διαμορφώνεται ένας νέος κλάδος, που προήλθε από τη μελέτη των τυχερών παιγνιδιών, η θεωρία των πιθανοτήτων, η οποία προάγεται και συμπληρώνεται κυρίως από τους Bernoulli, Gauss, Laplace. Έτσι, περί τα τέλη του 19ου αιώνα η Στατιστική έχει το κατάλληλο επιστημονικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη στατιστικών μεθόδων και ιδίως της Επαγωγικής Στατιστικής, στην οποία θα αναφερθούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Θα πρέπει να αναφέρομε τη συμβολή στην ανάπτυξη αυτής της προσπάθειας, των Άγγλων Karl Pearson (1857-1936) και του R.A. Fisher (1890-1962), οι οποίοι συνέβαλαν σημαντικότατα στη θεμελίωση της σύγχρονης Στατιστικής. Αξίζει επίσης να αναφέρομε, ότι το πρώτο διεθνές συνέδριο Στατιστικής οργανώθηκε το έτος 1853 από το μεγάλο Βέλγο στατιστικολόγο Α. Quetelet.

Όσον αφορά την προέλευση της λέξεως στατιστική, σύμφωνα με τις απόψεις που διατυπώνονται στα περισσότερα ετυμολογικά λεξικά, αυτή έλκει την καταγωγή της από το ελληνικό στατίζω, που σημαίνει τοποθετώ, διαπιστώνω, προσδιορίζω [στατιστικός -ή -ό (γαλλ. statistique < (στατίζω)].

1.2 Ο ρόλος της Στατιστικής στο χώρο των επιχειρήσεων.

Η μέχρι τώρα διεθνής εμπειρία από τις εφαρμογές της Στατιστικής στον επιχειρηματικό τομέα, έχει καταστήσει τις στατιστικές μεθόδους ένα απαραίτητο πλέον εργαλείο στην άσκηση της σύγχρονης επιχειρηματικής δράσεως.

Τα στατιστικά στοιχεία που αφορούν την περιουσιακή κατάσταση και εξέλιξη των επιχειρήσεων, όπως τα αναφερόμενα στα αποθέματα, τον κεφαλαιουχικό εξοπλισμό, τις αγορές και τις πωλήσεις, τα αποτελέσματα των διαφημιστικών δαπανών κ.λπ., μπορούν, αφού μελετηθούν κατάλληλα, να μας βοηθήσουν σημαντικά στην κατάρτιση σωστών επιχειρηματικών προγραμμάτων.

Στις γνωστές έρευνες αγοράς, που διεξάγουν οι σύγχρονες επιχειρήσεις, ο ρόλος της Στατιστικής είναι καθοριστικός και τα εξαγόμενα συμπεράσματα πραγματικά είναι πολύτιμα για το μέλλον της επιχειρήσεως.

Ακόμη, με τη βοήθεια της Στατιστικής, οι επιχειρήσεις μπορούν να κάνουν προβλέψεις για την εξέλιξη των πωλήσεών τους, των εξόδων τους κ.λπ. Επίσης εξασφαλίζεται ο έλεγχος της ποιότητας των μαζικά παραγομένων προϊόντων, ώστε να ελαττωθεί ο αριθμός των ελαττωματικών, στο χαμηλότερο δυνατό επίπεδο, να ελεγχθεί καλύτερα το κόστος παραγωγής κ.λπ.

Είναι γεγονός, ότι η ανάπτυξη ολοκλήρων επιστημονικών κλάδων, όπως η Οικονομετρία, η Επιχειρησιακή Έρευνα, η Διαφήμιση κ.ά. οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη Στατιστική, της οποίας η χρησιμότητα γίνεται κάθε μέρα και περισσότερο εμφανής.

Απαραίτητη, λοιπόν, είναι σήμερα η Στατιστική στη σύγχρονη Διοίκηση Επιχειρήσεων, η οποία απαιτεί, όπως ο επιχειρηματικός προγραμματισμός, η λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων και η όλη επιχειρηματική δράση να βασίζονται πάνω σε επιστημονικές μεθόδους και όχι στη διαίσθηση του επιχειρηματία ή στην τύχη.

1.3 Πληθυσμός - Μεταβλητές.

Στη Στατιστική, ως πληθυσμό (population, universe) εννοούμε το σύνολο των μετρήσεων ή γενικά των παρατηρήσεων, οι οποίες αναφέρονται σ' ένα χαρακτηριστικό ή ιδιότητα των μονάδων του συνόλου που εξετάζομε.

Έτσι τα ύψη των αναστημάτων των μαθητών των Τεχνικών - Επαγγελματικών Λυκείων αποτελούν έναν πληθυσμό αναστημάτων, η βαθμολογία στα Μαθηματικά των μαθητών των Ενιαίων Πολυκλαδικών Λυκείων αποτελεί έναν πληθυσμό βαθμών στα Μαθηματικά. Τα ημερομίσθια των εργατών ενός εργοστασίου αποτελούν τον πληθυσμό ημερομισθίων αυτού του εργοστασίου.

Αυτά λοιπόν τα χαρακτηριστικά ή ιδιότητες των στατιστικών μονάδων, ως προς τα οποία εξετάζομε έναν πληθυσμό, τα ονομάζομε μεταβλητές (variables), και τις συμβολίζομε συνήθως με τα γράμματα X, Y, Z, ... Οι δε αριθμητικές ή άλλες συμβολικές εκφράσεις αυτών λέγονται ***τιμές της μεταβλητής.***

Παραθέτομε τον παρακάτω πίνακα παραδειγμάτων, για καλύτερη κατανόηση των μεταβλητών και των τιμών τους:

Μεταβλητές:	***Τιμές:***
— Αριθμός υπαλλήλων ενός λογιστηρίου	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...
— Οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως	Άγαμος, έγγαμος, χήρος, διαζευγμένος
— Φύλο ανθρώπων	Αρσενικό, θηλυκό
— Εβδομαδιαίες πωλήσεις μιας αντιπροσωπείας αυτοκινήτων	0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
— Αναστήματα μαθητών (σε εκατ.) ενός σχολείου	158, 160, 161, 171, 180, ...

Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

1) Σε ***ποιοτικές μεταβλητές (qualitative variables),*** οι οποίες δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν και τις εκφράζομε με λέξεις όπως για παράδειγμα το φύλο, η οικογενειακή κατάσταση, η κατάσταση της υγείας ενός ανθρώπου κ.λπ.

2) Σε ***ποσοτικές μεταβλητές (quantitative variables),*** οι οποίες επιδέχονται μέτρηση και οι τιμές τους εκφράζονται με αριθμούς, όπως π.χ. οι ετήσιες πωληθείσες ποσότητες ενός αγαθού, οι μισθοί των δημοσίων υπαλλήλων, τα βάρη ή τα αναστήματα των μαθητών των Λυκείων κ.λπ.

Οι ποσοτικές μεταβλητές τώρα διακρίνονται σε συνεχείς και διακριτές (ασυνεχείς):

α) ***Συνεχείς μεταβλητές (continous variables),*** είναι εκείνες, οι οποίες μπορούν να πάρουν (θεωρητικά τουλάχιστον) όλες τις τιμές ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών. Π.χ. το βάρος, το ανάστημα, η ηλικία κ.λπ.

β) ***Διακριτές μεταβλητές (discrete variables),*** είναι εκείνες, οι οποίες παίρνουν «μεμονωμένες» τιμές μόνον. Π.χ. ο ετήσιος αριθμός τροχαίων ατυχημάτων, ο αριθμός των μελών μιας οικογένειας, ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων σε μια βιομηχανική γραμμή παραγωγής κ.λπ.

Επίσης, πρέπει να αναφέρομε, ότι πολλές φορές δεν εξετάζομε όλο το στατιστικό πληθυσμό, αλλά μόνο ένα μέρος του, το οποίο ονομάζομε ***δείγμα.*** Φυσικά το δείγμα για να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται, πρέπει να έχει επιλεγεί σύμφωνα με τις επιστημονικές μεθόδους της δειγματοληψίας (για τη δειγματοληψία θα αναφερθούμε σε επόμενο κεφάλαιο).

1.4 Περιγραφική και Επαγωγική Στατιστική.

Αν ο σκοπός μας είναι η εξέταση και μελέτη των στατιστικών μονάδων ενός συνόλου, για να εξάγομε συμπεράσματα αναφερόμενα αποκλειστικά στο σύνολο που εξετάσαμε – το οποίο έχει πλέον θέση πληθυσμού – χωρίς να προχωρούμε σε περαιτέρω γενικεύσεις αυτών των συμπερασμάτων, τότε λέμε ότι ακολουθούμε τις τεχνικές και μεθόδους της ***Περιγραφικής Στατιστικής*** (Descriptive Statistics).
Αντίθετα, η ***Επαγωγική Στατιστική*** (Inductive Statistics) ασχολείται με τις μεθόδους εκείνες, οι οποίες καθιστούν δυνατή τη γενίκευση των συμπερασμάτων ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος σε όλο τον πληθυσμό, από τον οποίο προήλθε το δείγμα. Εμείς στο βιβλίο αυτό θα μελετήσομε τις τεχνικές και μεθόδους της Περιγραφικής Στατιστικής με παράλληλη χρησιμοποίηση παραδειγμάτων από το χώρο των επιχειρήσεων, ώστε να γνωρίσει ο μαθητής πώς εφαρμόζονται αυτές οι τεχνικές στον επιχειρηματικό τομέα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΥΛΛΟΓΗ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Πρός τε γὰρ οἰκονομίαν καὶ πρὸς πολιτείαν καὶ πρὸς τέχνας πάσας ἓν οὐδὲν οὕτω ἔχει δύναμιν· παίδειον μάθημα μεγάλην, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή.

(Διότι σχετικά με την οικονομία και το κράτος και όλες τις τέχνες, κανένα άλλο μάθημα δεν έχει τόση μορφωτική δύναμη, όσο η μελέτη των αριθμών).

Πλάτωνος Νόμοι, Ε', 747

Η Στατιστική αρχίζει με τη συλλογή αριθμών. Αυτοί οι αριθμοί, συλλεγόμενοι πάνω σε μια μεγάλη κλίμακα με φροντίδα και σύνεση, έχουν να αποκαλύψουν ενδιαφέροντα πράγματα...

Adolphe Quetelet (1796-1874)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΥΛΛΟΓΗ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

2.1 Συλλογή στατιστικών δεδομένων.

Η συλλογή των στατιστικών δεδομένων αποτελεί σημαντικό στάδιο κάθε στατιστικής έρευνας. Απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή διότι, εάν τα στοιχεία που θα συγκεντρώσομε είναι ανακριβή και αναξιόπιστα, τότε θα οδηγηθούμε σε παραπλανητικά συμπεράσματα και λανθασμένες αποφάσεις.

Στη χώρα μας, τα στατιστικά στοιχεία συλλέγονται από διάφορους φορείς, όπως υπουργεία, οργανισμούς του Δημοσίου, ερευνητικά κέντρα, τράπεζες, ιδιωτικές επιχειρήσεις κ.λπ. Ο μεγαλύτερος φορέας, όμως, που ασχολείται με τη συλλογή και επεξεργασία στοιχείων καθώς και την έκδοση στατιστικών δημοσιευμάτων, είναι η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος (ΕΣΥΕ).

Οι κυριότερες μέθοδοι συλλογής στατιστικών στοιχείων είναι:

1) *Η **απογραφή*** (census), η οποία συνίσταται στην καταγραφή των στοιχείων που μας ενδιαφέρουν από ***όλες*** τις μονάδες του πληθυσμού.

Αξίζει να αναφέρομε, ότι πολύ σημαντική είναι η απογραφή πληθυσμού που γίνεται στη χώρα μας κάθε 10 χρόνια και αποτελεί κύρια πηγή δεδομένων δημογραφικού, οικονομικού κ.λπ. χαρακτήρα.

2) Η ***δειγματοληψία*** (sampling), η οποία συνίσταται στη συλλογή δεδομένων μόνο από ένα μέρος του πληθυσμού, που ονομάζεται ***δείγμα*** (sample). Η επιλογή του δείγματος αποτελεί πολύ σοβαρή και δύσκολη διαδικασία. Το δείγμα το οποίο θα πάρομε, θα πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται, ώστε να μπορέσομε την πληροφόρηση που θα λάβομε απ' αυτό να τη γενικεύσομε σε όλο τον πληθυσμό.

Ο κίνδυνος κακής σχεδιάσεως και εκτελέσεως της δειγματοληπτικής έρευνας, η μη αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος, η ενδεχόμενη ακατάλληλη επιλογή δειγματοληπτικής μεθόδου αποτελούν μερικά βασικά μειονεκτήματα της δειγματοληψίας, τα οποία βέβαια δεν υπάρχουν στην απογραφή. Όμως, με την εφαρμογή της δειγματοληψίας κερδίζομε χρόνο και χρήμα. Επίσης, επειδή στις απογραφές απαιτείται μεγάλος αριθμός απογραφέων, αναγκαζόμαστε πολλές φορές και χρησιμοποιούμε μη επαρκώς εκπαιδευμένους απογραφείς με κίνδυνο να σημειώνονται λάθη οφειλόμενα σ' αυτούς.

Είτε τη μέθοδο απογραφής ακολουθούμε, είτε της δειγματοληψίας, τις πληροφορίες που συλλέγομε τις καταγράφομε σε ειδικά έντυπα που λέγονται ***ερωτηματολόγια.***

Μετά τη συγκέντρωση του στατιστικού υλικού, ακολουθεί το στάδιο της επεξεργασίας του. Εδώ πρέπει να επισημανθεί η σημαντική συμβολή και η μεγάλη χρησιμότητα των υπολογιστών, κατά το στάδιο της επεξεργασίας του στατιστικού υλικού.

2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων.

Τα στατιστικά δεδομένα πρέπει να παρουσιάζονται με τρόπο απλό, συνοπτικό και σαφή, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους από τον κάθε ενδιαφερόμενο. Η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους, ήτοι:

α) Με ***συνοπτικές εκθέσεις ή αναφορές,***

β) με ***στατιστικούς πίνακες*** και

γ) με ***διαγράμματα.***

Ο πρώτος τρόπος (εκθέσεις ή αναφορές), όπου έχομε ενσωματώσει τα στατιστικά μας στοιχεία στο κείμενο των εκθέσεων, είναι φανερό ότι δεν έχει το πλεονέκτημα της συνοπτικής παρουσιάσεως των δεδομένων μας, που έχουν οι άλλοι δύο. Έτσι, πολλές φορές, ο αναγνώστης κουράζεται διαβάζοντας το κείμενο της εκθέσεως, ενώ επιπλέον χρειάζεται να έχει καλή μνήμη για να συγκρατήσει τα πιο σημαντικά στοιχεία της εκθέσεως κ.λπ. Στις αμέσως επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται οι δύο άλλοι τρόποι. *(Οι εκθέσεις ή αναφορές χρησιμεύουν συνήθως ως ερμηνευτικά σημειώματα των αποτελεσμάτων μιας έρευνας και γι' αυτό χρησιμοποιούνται συνήθως από κοινού με τους πίνακες και τα διαγράμματα).*

2.3 Στατιστικοί πίνακες.

Με τους στατιστικούς πίνακες, οι οποίοι αποτελούν συστηματικές κατατάξεις αριθμητικών δεδομένων σε γραμμές και στήλες, επιτυγχάνομε τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων μας, ώστε να διευκολυνόμαστε σε τυχόν συγκρίσεις και επίσης να ενημερώνεται ο κάθε ενδιαφερόμενος εύκολα και γρήγορα.

Οι πίνακες μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες:

α) Τους ***γενικούς πίνακες,*** οι οποίοι περιέχουν κάθε πληροφορία που μας έχει δώσει μια μεγάλη στατιστική έρευνα, είναι μεγάλου μεγέθους, περιλαμβάνουν πολλά λεπτομερειακά στοιχεία και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών.

β) Τους ***ειδικούς πίνακες,*** οι οποίοι είναι μικρού μεγέθους, συνοπτικοί και απλού περιεχομένου, των οποίων τα στατιστικά στοιχεία έχουν συνήθως ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Σε κάθε πίνακα, που έχει συνταχθεί σωστά, εκτός από το ***κύριο σώμα*** (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στίς γραμμές και στήλες τα στατιστικά μας δεδομένα, παρατηρούμε και τα εξής ειδικότερα στοιχεία:

α) Τον ***τίτλο,*** που γράφεται στο επάνω μέρος του και πρέπει με σαφήνεια να δηλώνει το περιεχόμενο του πίνακα και να είναι περιληπτικός.

β) Τις ***επικεφαλίδες των στηλών*** (και γραμμών), που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τη μονάδα μετρήσεως των δεδομένων μας.

γ) Την ***πηγή,*** που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών δεδομένων μας.

δ) Τις ***υποσημειώσεις,*** που τις γράφομε στο κάτω μέρος του πίνακα και πριν από την πηγή, αν νομίζομε ότι πρέπει να δώσομε κάποιες επεξηγήσεις, σχετικά με τις επικεφαλίδες των στηλών ή τις μονάδες μετρήσεως των δεδομένων κ.λπ.

2.3.1 Τύποι στατιστικών πινάκων.

Εμείς θα ασχοληθούμε με τη μελέτη και παρουσίαση των ειδικών πινάκων, οι οποίοι διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

α) ***Πίνακες απλής εισόδου.*** Όταν οι μονάδες του εξεταζόμενου πληθυσμού ερευνώνται ως προς ένα ποιοτικό ή ποσοτικό χαρακτηριστικό τους, τότε παρουσιάζονται με τους ***πίνακες απλής εισόδου.*** Τέτοιο πίνακες είναι οι πίνακες 2.3.1, 2.3.2 και 2.3.3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.1
Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας
Σε εκατομμύρια ΩΧΒ

Έτος	Παραγωγή
1980	21.045
1981	21.657
1982	21.554
1983	22.049
1984	22.820
1985	25.344
1986	25.617
1987	27.334
1988	29.971

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.2
Πληθυσμός Ελλάδος

Μέσον έτους	Πληθυσμός
1980	9.642.505
1981	9.729.350
1982	9.789.513
1983	9.846.627
1984	9.895.801
1985	9.934.294
1986	9.963.604
1987	10.000.644
1988	10.037.037
1989	10.089.550
1990	10.160.551
1991	10.247.341
1992	10.321.883
1993	10.379.453
1994	10.426.289

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

β) ***Πίνακες διπλής εισόδου.*** Όταν οι μονάδες του εξεταζόμενου πληθυσμού μελετώνται συγχρόνως ως προς δύο ποιοτικά ή ποσοτικά χαρακτηριστικά, τότε χρησιμοποιούμε τους ***πίνακες διπλής εισόδου.*** Τέτοιοι πίνακες είναι οι πίνακες 2.3.4 και 2.3.5·

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.3
Κατά κεφαλή εισόδημα διαφόρων χωρών σε τρέχουσες τιμές αγοράς και σε $ ΗΠΑ

Χώρες	1990	1991
Η.Π.Α.	21.825	22.560
Αγγλία	16.080	16.750
Γαλλία	19.590	20.600
Ιταλία	16.880	18.580
Κύπρος	9.858	10.118
Γερμανία	22.360	23.650
Ελλάδα	6.010	6.230
Τουρκία	1.640	1.820
Ισπανία	11.010	12.460
Ιαπωνία	25.840	26.920
Ελβετία	32.250	33.510

Πηγή: Διεθνής Τράπεζα

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.4
Ο ελληνικός πληθυσμός κατά οικογενειακή κατάσταση και φύλο, ηλικίας άνω των 10 ετών.

Φύλο	Οικογενειακή κατάσταση			Σύνολο
	Άγαμοι	Έγγαμοι	Χήροι & διαζευγμένοι	
Άνδρες	1.622.885	2.653.164	152.138	4.428.187
Γυναίκες	1.264.896	2.688.218	658.178	4.611.292
Σύνολο	2.887.781	5.341.382	810.316	9.039.479

Απογραφή 1991
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.5
Υπολογιζόμενος πληθυσμός την 30ή Ιουνίου 1994, κατά ομάδες ηλικιών και φύλο

Ομάδες ηλικιών	Άρρενες	Θήλεις	Σύνολο
Σύνολο	5.148.361	5.277.928	10.426.289
0 - 4 ετών	268.507	252.666	521.173
5 - 9 ετών	298.511	282.508	581.019
10-14 ετών	363.058	342.737	705.795
15-19 ετών	395.751	374.378	770.129
20-24 ετών	404.028	385.328	789.356
25-29 ετών	400.125	393.334	793.459
30-34 ετών	372.939	374.626	747.565
35-39 ετών	361.133	362.407	723.540
40-44 ετών	343.875	340.220	684.095
45-49 ετών	326.337	327.748	654.085
50-54 ετών	291.214	299.465	590.679
55-59 ετών	313.019	332.497	645.516
60-64 ετών	307.975	329.846	637.821
65-69 ετών	261.472	298.474	559.946
70-74 ετών	174.251	215.876	390.127
75-79 ετών	118.348	158.538	276.886
80-84 ετών	87.702	122.900	210.602
85 ετών και άνω	66.116	84.380	144.496

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

2.4 Πίνακες κατανομής συχνοτήτων.

Μια πολύ συνηθισμένη μορφή πινάκων, που χρησιμοποιούμε στη Στατιστική για τη μελέτη των στατιστικών στοιχείων, είναι οι πίνακες κατανομής συχνοτήτων. Οι πίνακες αυτοί συντάσσονται με κατάλληλη κατάταξη και συστηματική ομαδοποίηση των τιμών της μεταβλητής που εξετάζομε.

Εδώ θα παρουσιάσομε πώς γίνεται η σύνταξη αυτών των πινάκων, όταν έχομε να μελετήσομε: α) Μια διακριτή μεταβλητή και β) μια συνεχή μεταβλητή.

α) ***Διακριτή μεταβλητή.*** Τα παρακάτω δεδομένα (παρατηρήσεις) αφορούν τον αριθμό υπαλλήλων λογιστηρίου 30 εμπορικών επιχειρήσεων:

5, 6, 7, 2, 4, 5, 3, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 4, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 5, 4, 7, 7, 4.

Κατ' αρχήν τοποθετούμε τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά (από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τιμή), δηλαδή:

1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7.

Όπως παρατηρούμε, η μεταβλητή μας, Χ= αριθμός υπαλλήλων λογιστηρίου, παίρνει τιμές από 1 μέχρι και 7, τις οποίες αναγράφομε στην πρώτη στήλη του πίνακα 2.4.1 που ακολουθεί. Στη δεύτερη στήλη ***(στήλη συχνοτήτων)*** σημειώνομε τις αντίστοιχες συχνότητες (frequency).

Συχνότητα (f) είναι ο αριθμός που δείχνει πόσο συχνά (πόσες φορές) εμφανίζεται η κάθε τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής. Έτσι, από τον πίνακα 2.4.1 –Πίνακα Συχνοτήτων– βλέπομε ότι η τιμή 2 εμφανίζεται 3 φορές, η 4 εμφανίζεται 8 φορές κ.λπ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.1

Αριθμός υπαλλήλων λογιστηρίου (x)	Συχνότητες (f)
1	1
2	3
3	4
4	8
5	7
6	4
7	3
	Σf:30

Είναι φανερό ότι το άθροισμα των συχνοτήτων Σf ισούται με το σύνολο των παρατηρήσεών μας, δηλαδή Σf=N. *(Χάρη ευκολίας θα χρησιμοποιούμε το απλό σύμβολο Σ, που μας βοηθάει να γράφομε με συντομία εκτεταμένα αθροίσματα της γενικής μορφής, π.χ.* $x_1 + x_2 + \ldots + x_v = \Sigma x$*).*

β) ***Συνεχής μεταβλητή.*** Στην περίπτωση αυτή ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις μας χωρίζοντας το διάστημα μεταβολής (a_0, a_k) της μεταβλητής x σε υποδιαστήματα της μορφής $[a_{i-1}, a_i)$, που ονομάζονται ***τάξεις*** (κλάσεις).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.2

Τάξεις	Κεντρικοί όροι (x)	Συχνότητες (f)
$\alpha_0 - \alpha_1$	x_1	f_1
$\alpha_1 - \alpha_2$	x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_{i-1} - \alpha_i$	x_i	f_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_{k-1} - \alpha_k$	x_k	f_k
		$\Sigma f = N$

Τα άκρα των τάξεων λέγονται αντίστοιχα (βλέπε πίνακα 2.4.2), το μεν α_{i-1} ***κατώτερο όριο*** (lower limit), το δε α_i ***ανώτερο όριο*** (upper limit) της τάξεως. Η διαφορά $\alpha_{i-1} - \alpha_i$ ονομάζεται ***πλάτος*** (class width) ή ***διάστημα τάξεως*** (class interval) και συμβολίζεται με δ. Το δε ημιάθροισμα του κατώτερου και ανώτερου ορίου κάθε τάξεως, δηλαδή ο αριθμός

$$x=\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}$$

ονομάζεται ***κεντρικός όρος ή μέση τιμή της τάξεως.***

Οι συχνότητες f μας δίνουν τον αριθμό των παρατηρήσεων που περιέχονται στις αντίστοιχες τάξεις.

Ακόμα με ***M*** και ***m*** συμβολίζομε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή αντίστοιχα που έχει πάρει η μεταβλητή x.

Ένα ερώτημα σημαντικό είναι: Σε πόσα υποδιαστήματα -τάξεις- θα χωρίσομε το διάστημα μεταβολής της x; Υπάρχουν κάποιοι εμπειρικοί τύποι* που δίνουν απάντηση σε ορισμένες περιπτώσεις, γενικά όμως δεχόμαστε ότι πρέπει να επιτυγχάνονται η ομοιογένεια των δεδομένων μας και η απλότητα της παρουσιάσεώς τους. Στις πρακτικές εφαρμογές, ο αριθμός των τάξεων κυμαίνεται κατά μέσον όρο στις 8 με 10. Επίσης, στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών έχομε τάξεις ίσου πλάτους. Φυσικά όμως υπάρχουν και περιπτώσεις όπου αναγκαζόμαστε να έχομε τάξεις άνισου πλάτους, όπως π.χ. στις κατανομές δαπανών, ημερών ανεργίας κ.λπ.

Παράδειγμα:

Δίνονται τα αναστήματα σε εκατοστόμετρα μιας ομάδας 50 μαθητών της Γ' τάξεως Λυκείου. (Χάρη ευκολίας τα δεδομένα παρουσιάζονται κατ' ευθείαν

---

* *Τέτοιος είναι ο τύπος του Sturges που δίνει με προσέγγιση το διάστημα κάθε τάξεως όταν έχομε ν δεδομένα.*

$$\delta=\frac{M-m}{1+3.3\log\nu}$$

τοποθετημένα κατ' αύξουσα σειρά):

155, 156, 159, 160, 162, 162, 164, 166, 166, 167, 167, 167, 167, 167, 168, 168, 169, 171, 171, 171, 171, 172, 172, 172, 172, 172, 172, 172, 173, 174, 176, 176, 177, 177, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 181, 181, 181, 182, 182, 183, 184, 185, 186, 189.

Επειδή η διαφορά μεταξύ μεγαλύτερης τιμής M=189 και μικρότερης τιμής m=155 (189 – 155=34) είναι σχετικά μικρή, χωρίζομε το διάστημα μεταβολής της x σε 7 τάξεις πλάτους δ=5. Τιμές ίσες με τα ανώτερα όρια των τάξεων τις συμπεριλαμβάνομε στις αμέσως επόμενες τάξεις. Έτσι, η τιμή 160 συμπεριλαμβάνεται στη 2η τάξη και η 185 στην 7η τάξη (πίν. 2.4.3).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.3

Τάξεις αναστημάτων	Κεντρικοί όροι (x)	Συχνότητες (f)
155-160	157,5	3
160-165	162,5	4
165-170	167,5	10
170-175	172,5	13
175-180	177,5	10
180-185	182,5	7
185-190	187,5	3

Κεντρικός όρος 1ης τάξεως: $\dfrac{155+160}{2}=157{,}5$

Κεντρικός όρος 2ης τάξεως: $\dfrac{160+165}{2}=162{,}5$ κ.ο.κ

Πλάτος 1ης τάξεως: δ=160 – 155=5.
Πλάτος 2ης τάξεως: δ=165 – 160=5 κ.ο.κ.
Εδώ όλες οι τάξεις έχουν το ίδιο πλάδος, δ=5.

2.5 Στατιστικά διαγράμματα.

Τα στατιστικά ***διαγράμματα*** (diagrams) ή γραφικές απεικονίσεις, αποτελούν έναν τρόπο παρουσιάσεως των στατιστικών μας δεδομένων με τη χρησιμοποίηση γεωμετρικών σχημάτων ή άλλων συμβόλων. Η χρησιμότητα των διαγραμμάτων είναι μεγάλη, διότι παρέχουν πιο σαφή εικόνα ενός φαινομένου σε σχέση με τους πίνακες, προκαλούν την προσοχή μας, διατηρούνται εύκολα στη μνήμη μας κ.λπ.

Όπως και στην περίπτωση των πινάκων έτσι και εδώ ένα στατιστικό διάγραμμα πρέπει να έχει τα εξής βασικά στοιχεία:

α) ***Τον τίτλο.***

β) ***Την κλίμακα με τις τιμές των μεγεθών,*** που απεικονίζονται.

γ) ***Το υπόμνημα,*** που επεξηγεί τις διάφορες γραμμές κ.λπ., που υπάρχουν στο διάγραμμα και γράφεται κάτω από το κύριο σώμα αυτού.

δ) ***Την πηγή.***

Παρακάτω παραθέτομε μερικά από τα κυριότερα είδη διαγραμμάτων:

1) Ακιδωτά διαγράμματα ή ραβδογράμματα (bar diagrams).

Αυτά χρησιμοποιούνται κυρίως για τη γραφική απεικόνιση ποιοτικών κατατάξεων και αποτελούνται από κατακόρυφα (ή οριζόντια) ορθογώνια ίσου πλάτους, ενώ το μήκος είναι ανάλογο των τιμών που λαμβάνει το απεικονιζόμενο μέγεθος.

Τέτοια διαγράμματα είναι το 2.5.1 που αντιστοιχεί στον πίνακα 2.5.1 και απεικονίζει την κατανομή του σχολικού πληθυσμού (σε χιλιάδες φοιτώντων) κατά βαθμίδα εκπαιδεύσεως το 1985 και το διάγραμμα 2.5.2 (απασχολούμενοι 14 ετών και άνω κατά κλάδο οικονομικής δραστηριότητας το 1987).

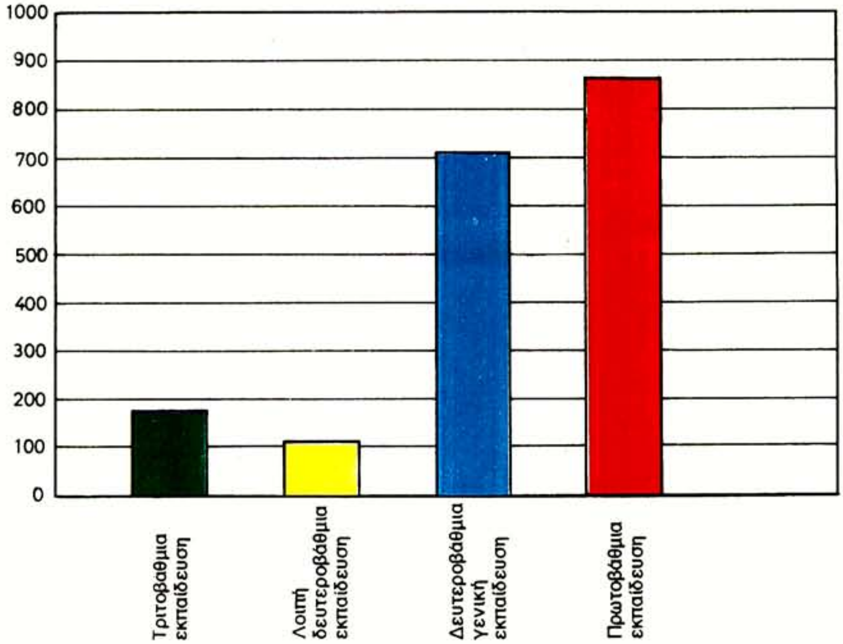
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.5.1
Κατανομή του σχολικού πληθυσμού της Ελλάδος κατά βαθμίδα εκπαιδεύσεως

Σε χιλιάδες φοιτώντων

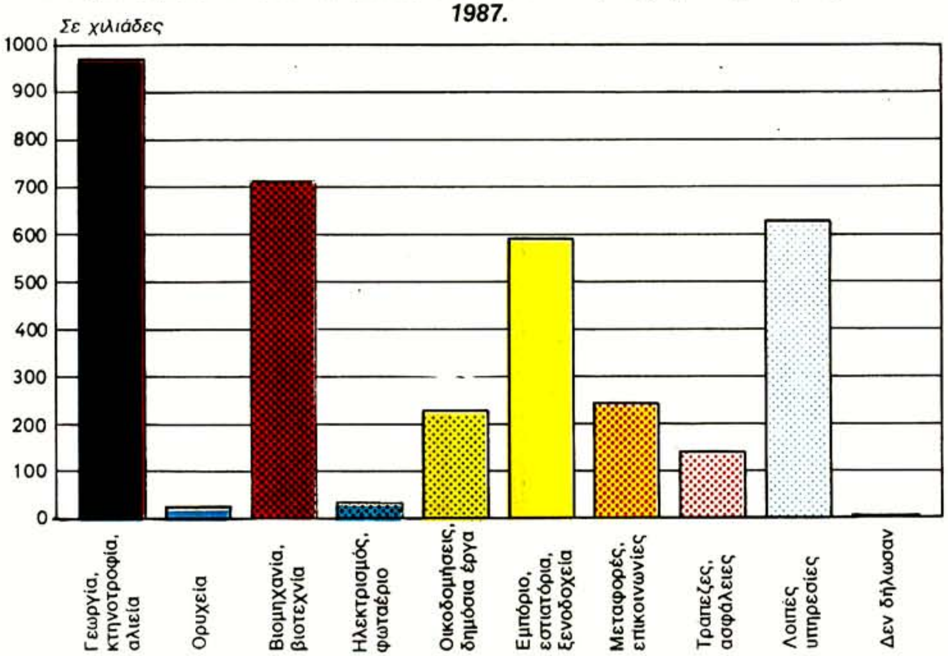
Βαθμίδες εκπαιδεύσεως	Αριθμός φοιτώντων
Τριτοβάθμια εκπαίδευση	182
Λοιπή δευτεροβάθμια εκπαίδευση	109
Δευτεροβάθμια γενική εκπαίδευση	704
Πρωτοβάθμια εκπαίδευση	888

Έτος 1985
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.1
Κατανομή του σχολικού πληθυσμού κατά βαθμίδα εκπαιδεύσεως



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.2
Απασχολούμενοι 14 ετών και άνω κατά κλάδο οικονομικής δραστηριότητας κατά το 1987.



Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

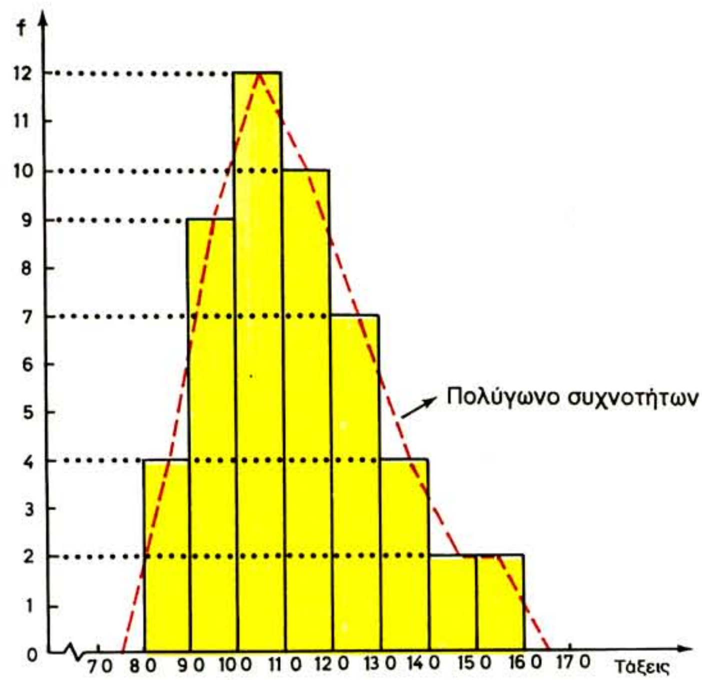
2) Ιστογράμματα (histograms).

Χρησιμοποιούνται για τη γραφική απεικόνιση ποσοτικών κατανομών, αποτελούνται δε από διαδοχικά ορθογώνια, που έχουν βάσεις ίσες με τα διαστήματα των τάξεων $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ τοποθετημένες επάνω στον οριζόντιο άξονα. Το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης τάξεως (διάγραμμα 2.5.3).

Επίσης, αν ενώσομε τα μέσα των επάνω βάσεων των ορθογωνίων ενός ιστογράμματος, σχηματίζεται τεθλασμένη γραμμή, που λέγεται ***πολύγωνο συχνοτήτων*** (frequency polygon). Επίσης, θα μπορούσαμε, αφού έχομε χωρίσει τον οριζόντιο άξονα σε διαστήματα, που αντιστοιχούν στις ίσου πλάτους τάξεις, να ορίσομε σημείο επάνω από το μέσο κάθε διαστήματος και σε ύψος ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα κάθε τάξεως. Στη συνέχεια, ενώνοντας αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζομε το πολύγωνο συχνοτήτων.

Ο πίνακας 2.5.2 δίνει τις ετήσιες πωλήσεις 50 ομοειδών εμπορικών καταστημάτων σε εκατομμύρια δραχμές, δίπλα δε παρατίθεται το αντίστοιχο ιστόγραμμα (διάγραμμα 2.5.3).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.3
Ετήσιες πωλήσεις 50 εμπορικών καταστημάτων σε εκατομμύρια δρχ.



Πηγή: Βάσει του πίνακα 2.5.2

ΠΙΝΑΚΑΣ

Τάξεις πωλήσεων	Συχνότητες (f)
80- 90	4
90-100	9
100-110	12
110-120	10
120-130	7
130-140	4
140-150	2
150-160	2
	Σf:50

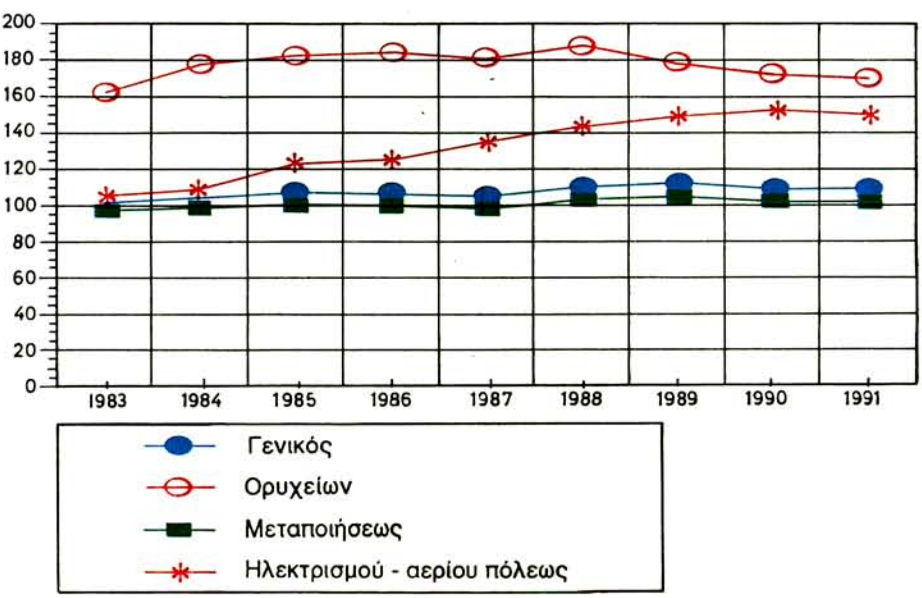
Πηγή: Υποθετικά δεδομένα

3) Χρονολογικά διαγράμματα ή χρονοδιαγράμματα (time charts).

Αυτά χρησιμοποιούνται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξελίξεως ενός μεγέθους οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου είδους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται ως άξονας μετρήσεως του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μετρήσεως της εξεταζόμενης μεταβλητής (διαγράμματα 2.5.4, 2.5.5, 2.5.6 και 2.5.7). Για τα χρονοδιαγράμματα θα αναφερθούμε εκτενέστερα στο κεφάλαιο των χρονολογικών σειρών.

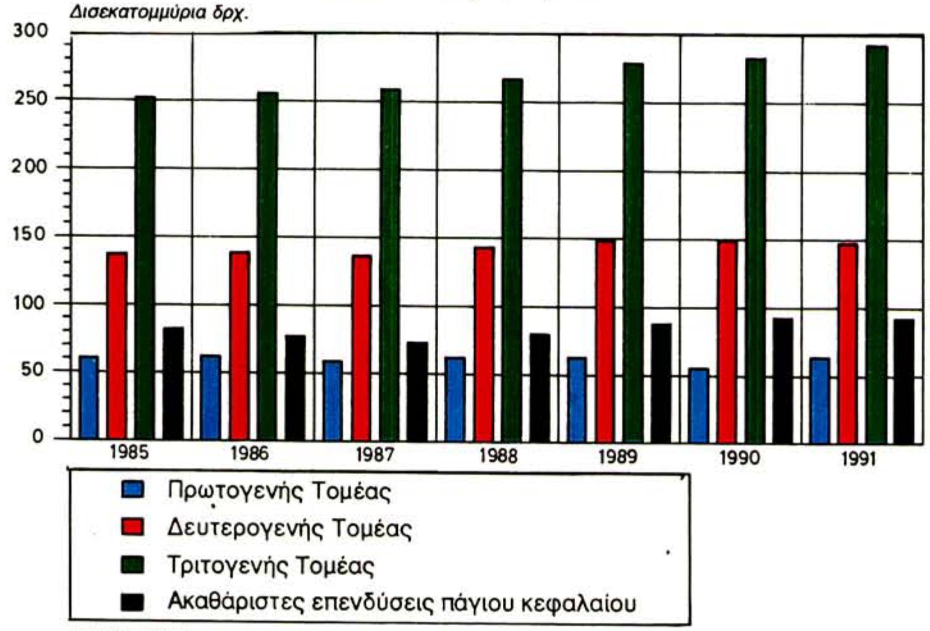
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.4

Δείκτης παραγωγής ορυχείων, μεταποιήσεως και ηλεκτρισμού - αερίου πόλεως



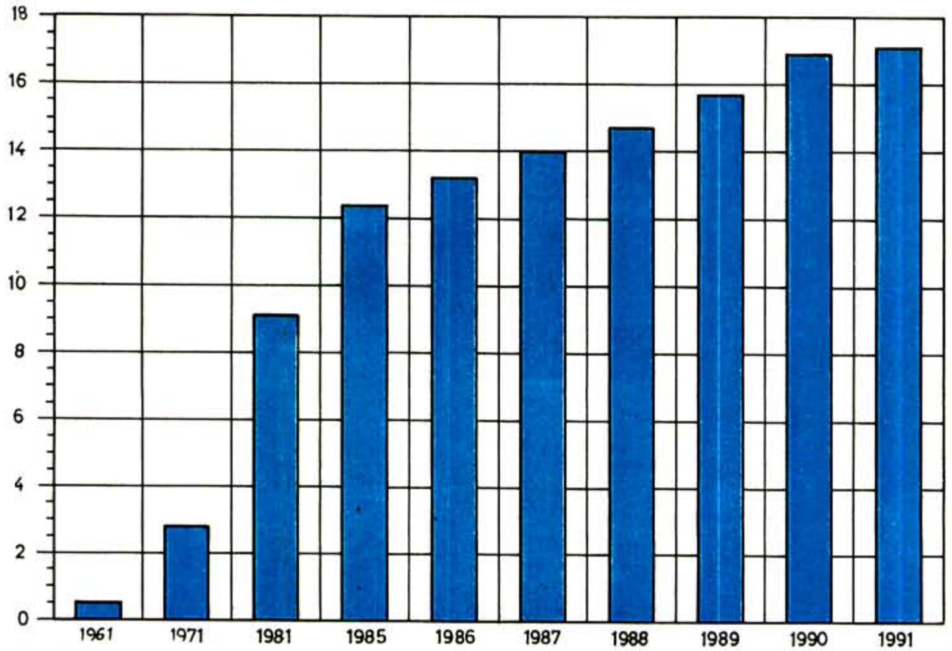
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.5
Ακαθάριστο εγχώριο προϊόν και ακαθάριστες επενδύσεις παγίου κεφαλαίου σε σταθερές τιμές 1970



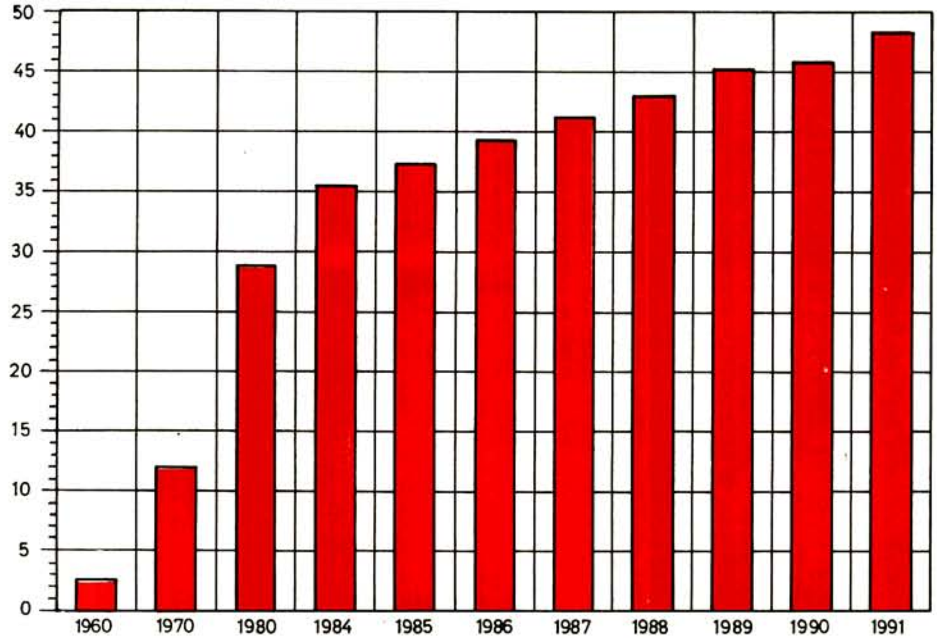
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.6
Επιβατηγά αυτοκίνητα Ι.Χ. ανά 100 κατοίκους



Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.7
Τηλέφωνα ανά 100 κατοίκους



Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

4) Κυκλικά διαγράμματα (pie diagrams ή charts).

Αυτά είναι κύκλος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς και κάθε κυκλικός τομέας αντιστοιχεί σ' ένα τμήμα του απεικονιζόμενου συνόλου (σε μια τιμή της μεταβλητής x). Επειδή τα απόλυτα μεγέθη των τμημάτων μετατρέπονται σε ποσοστά επί τοις % του συνόλου*, γι' αυτό τα κυκλικά διαγράμματα ενδείκνυνται όταν

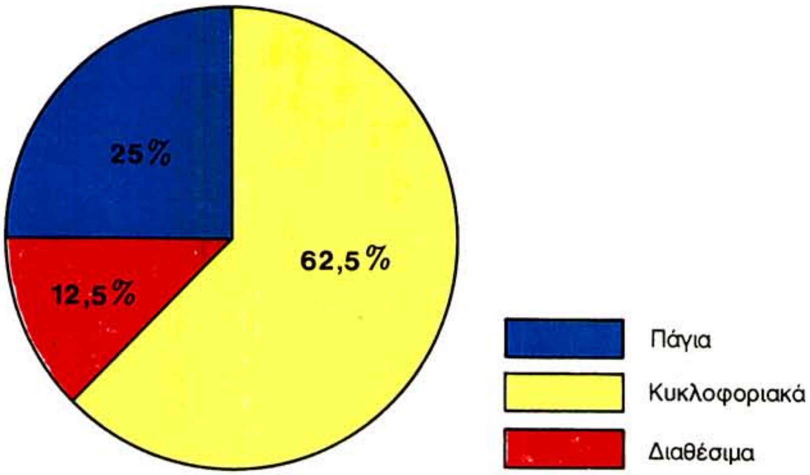
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.5.3
Ποσοστική διάρθρωση στοιχείων του ενεργητικού εμπορικής επιχειρήσεως

Ενεργητικό	Αξία	Ποσοστό %	Μοίρες
Πάγια	50	25	90
Κυκλοφοριακά	125	62,5	225
Διαθέσιμα	25	12,5	45
	200	100,0	360

Σε εκατ. δρχ. Πηγή: Υποθετικά δεδομένα

** Η γωνία του κυκλικού τομέα είναι ανάλογη με την αντίστοιχη σχετική συχνότητα (f/N) της τιμής της μεταβλητής. Π.χ. ο κυκλικός τομέας που παριστάνει την τιμή παγίων στοιχείων έχει γωνία (25:100) · 360°=90° (διάγραμμα 2.5.8).*

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.8
Ποσοστιαία διάρθρωση των στοιχείων του ενεργητικού εμπορικής επιχειρήσεως



Πηγή:Βάσει πίνακα 2.5.3

θέλομε να παρουσιάσομε την ποσοστιαία σύνθεση του εξεταζόμενου συνόλου ή να συγκρίνομε τις ποσοστιαίες συνθέσεις δύο ή περισσοτέρων συνόλων. Τέτοια διαγράμματα είναι τα 2.5.8 και 2.5.9. Το διάγραμμα 2.5.10 όπως βλέπομε έχει σχήμα ελλείψεως.

5) Ειδογράμματα (pickograms).

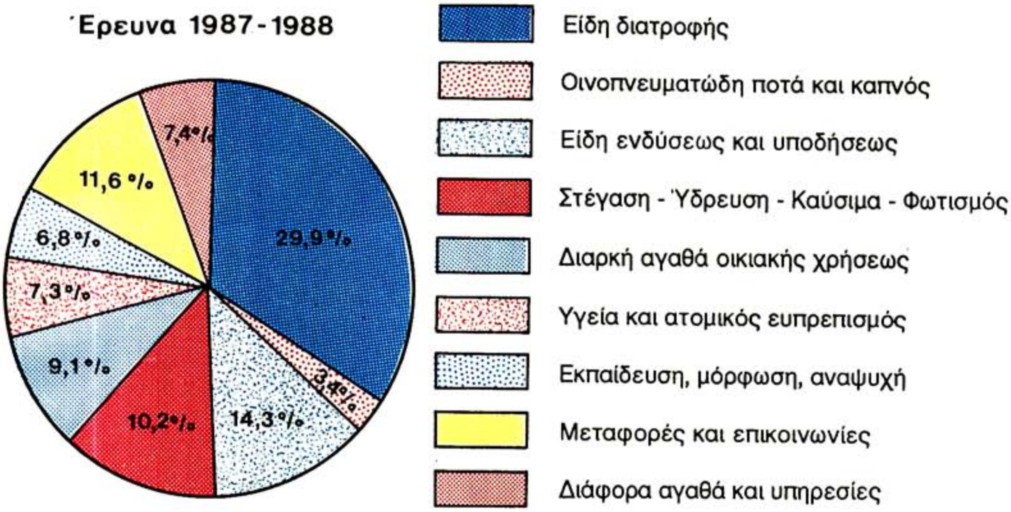
Αυτά αποτελούνται από εικόνες ομοειδών προσώπων ή πραγμάτων και παρουσιάζουν τη διαχρονική εξέλιξη του απεικονιζόμενου μεγέθους με τρόπο εκφραστικό (χρησιμοποιούνται πάρα πολύ στη διαφήμιση).

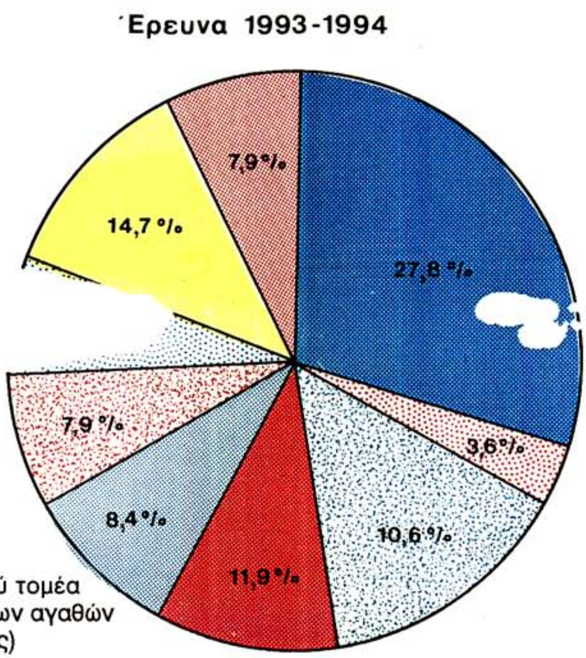
[illegible] χρησιμεύουν και για συγκρίσεις μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεγεθών. Τέτοιο διάγραμμα είναι το 2.5.11, που απεικονίζει την καθαρή μετανάστευση μεταξύ των ετών 1980-81 και 1987-88 από το Μίτσιγκαν προς την Καλιφόρνια και τη Φλόριδα, καθώς και από τη Ν. Υόρκη προς την Καλιφόρνια και τη Φλόριδα.

6) Χαρτοδιαγράμματα (map charts).

Εδώ η γραφική παράσταση των δεδομένων μας γίνεται πάνω σε γεωγραφικούς χάρτες και τα στατιστικά δεδομένα, απεικονίζονται στις αντίστοιχες γεωγραφικές περιοχές με διάφορα χρώματα ή διαγραμμίσεις, που δείχνουν το μέγεθος της εξεταζόμενης μεταβλητής, στο δε υπόμνημα εξηγείται η αντιστοιχία χρωμάτων (ή διαγραμμίσεων) και τιμών της μεταβλητής (διάγραμμα 2.5.12).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.9
Δαπάνες αγορών των νοικοκυριών

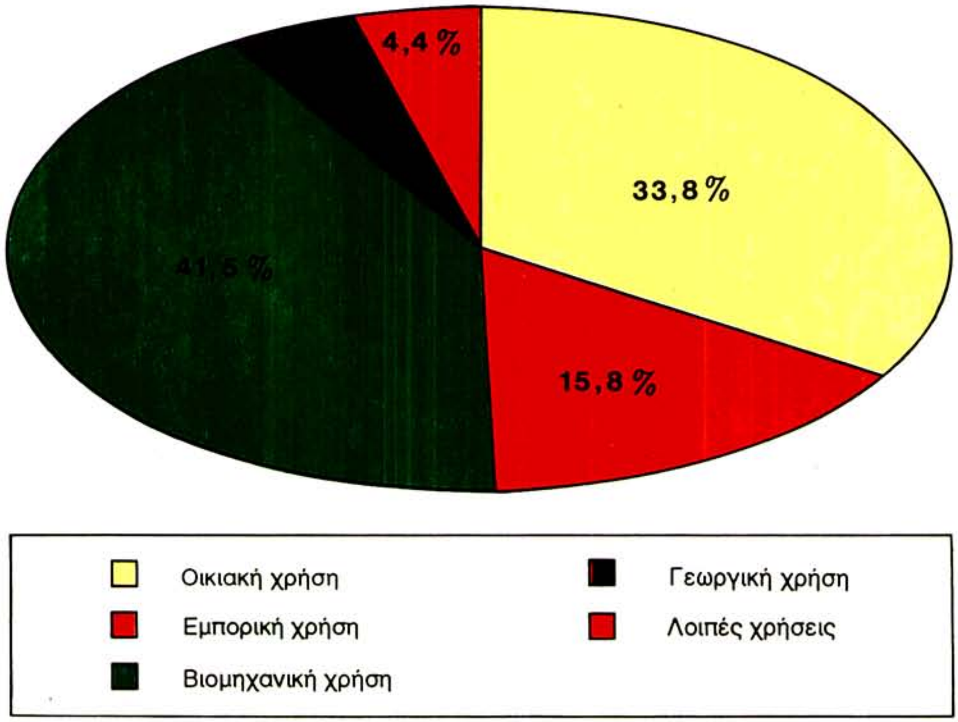




Η επιφάνεια κάθε κυκλικού τομέα
είναι ανάλογη της αξίας των αγαθών
(Σε τρέχουσες τιμές)

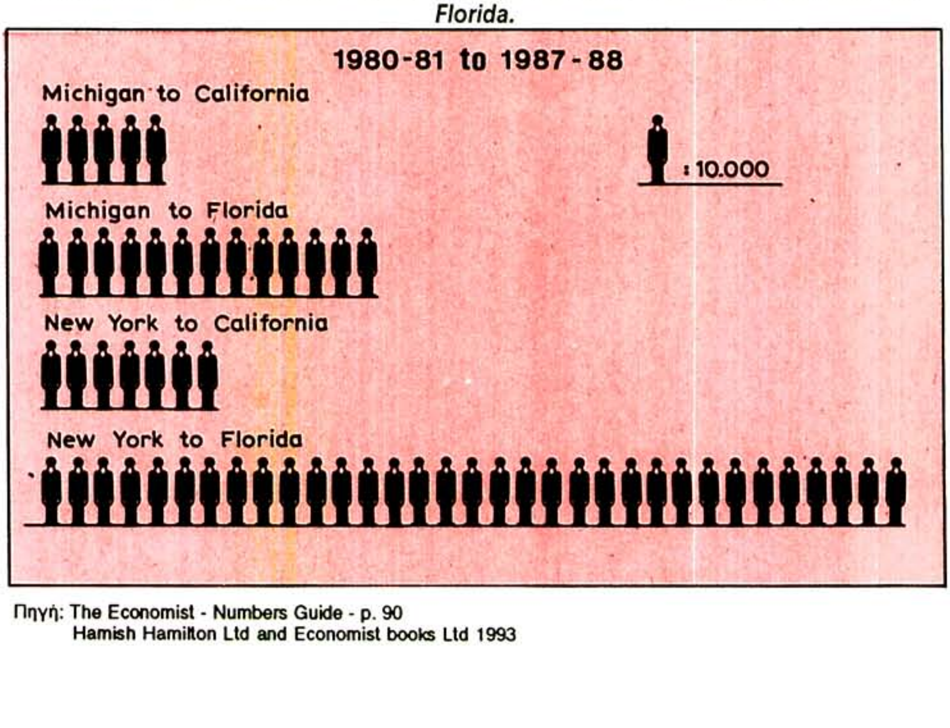
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.10
Κατανάλωση ενέργειας: 1991



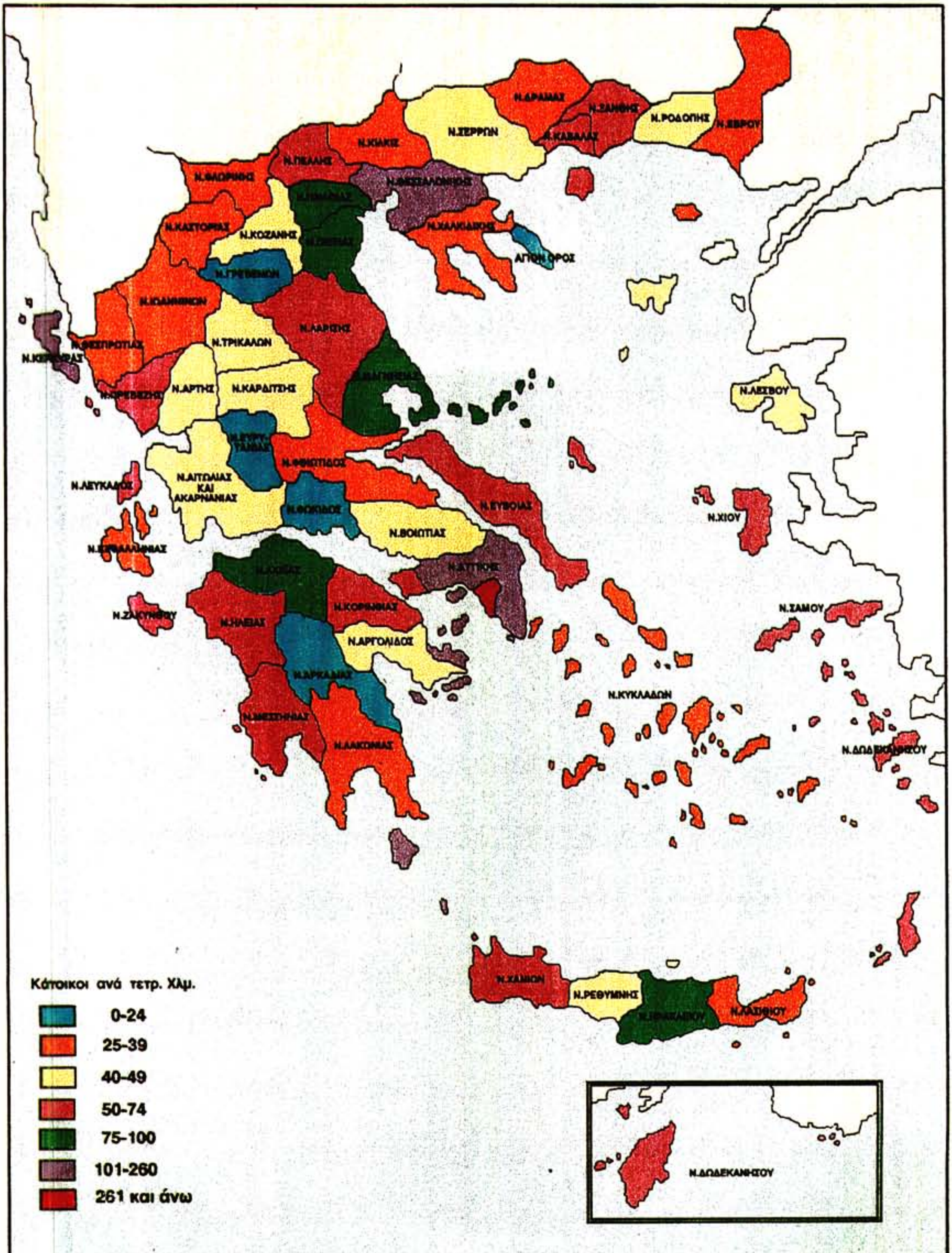
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.11
Απεικόνιση της μεταναστεύσεως από Michigan και από N. York προς California και Florida.



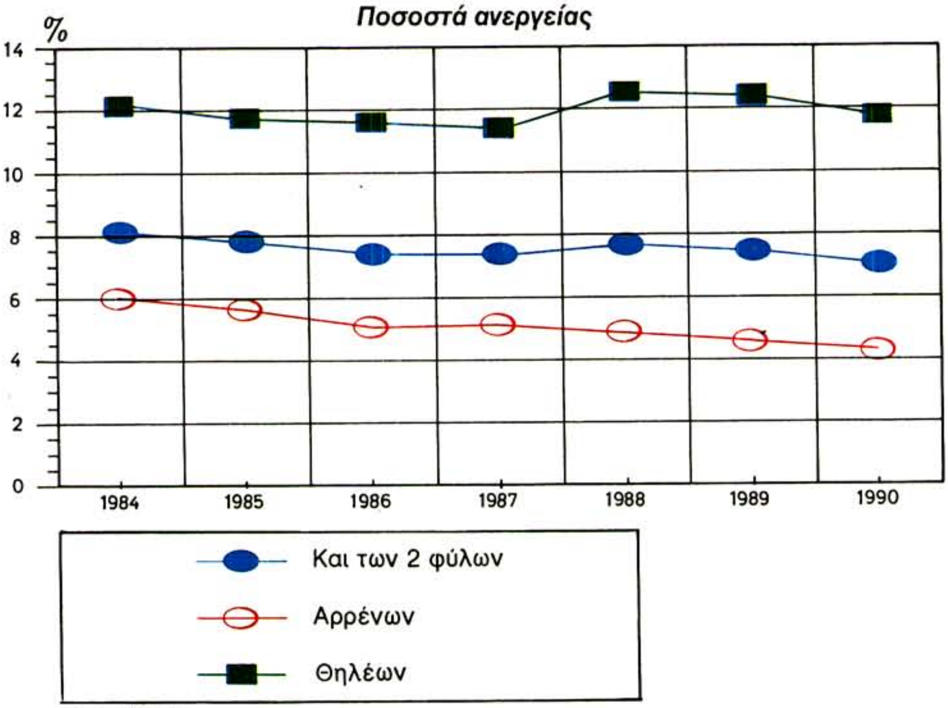
Πηγή: The Economist - Numbers Guide - p. 90
Hamish Hamilton Ltd and Economist books Ltd 1993

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.12
Νομοί της Ελλάδος αναλόγως της πληθυσμιακής τους πυκνότητας.
Απογραφή πληθυσμού 1991



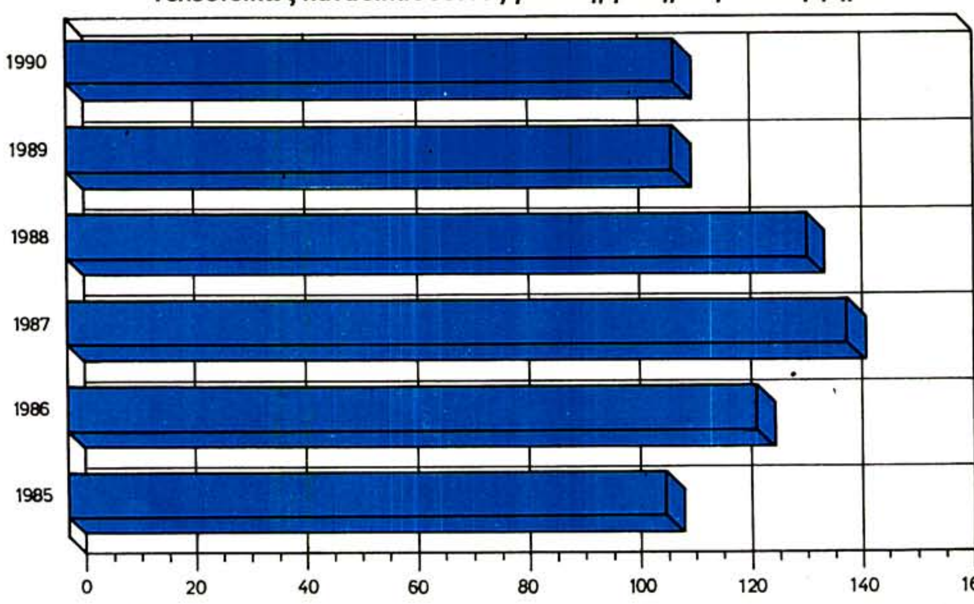
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.13
Ποσοστά ανεργείας



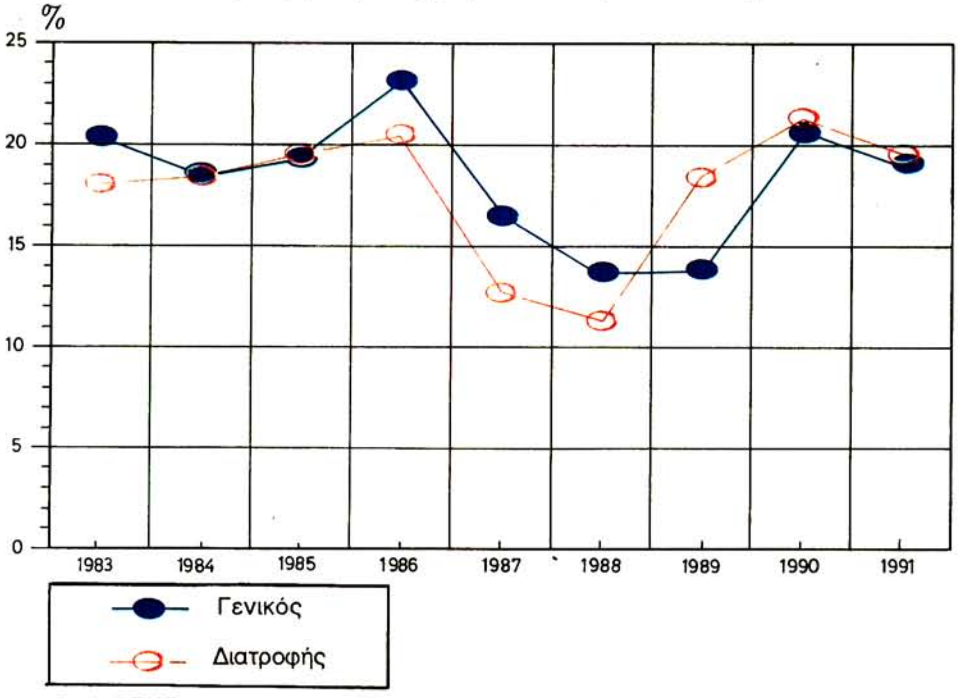
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.14
Τελεσιδίκως καταδικασθέντες για πλημμέλημα ή κακούργημα



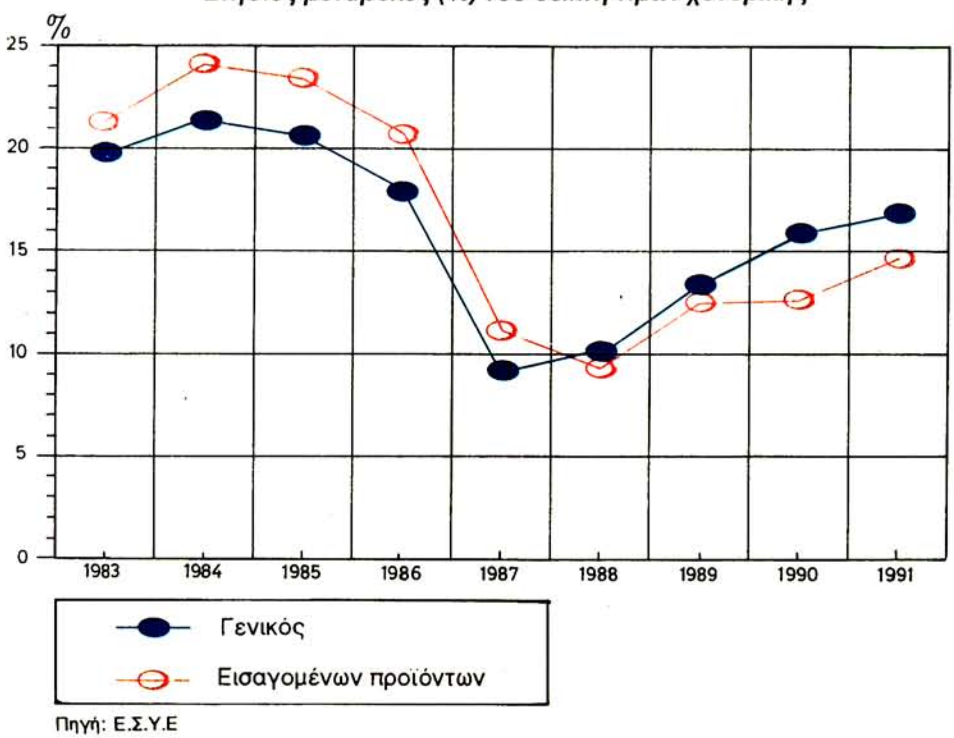
Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.15
Ετήσιες μεταβολές (%) του δείκτη καταναλωτή



Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.5.16
Ετήσιες μεταβολές (%) του δείκτη τιμών χονδρικής



Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε

2.6 Ανακεφαλαίωση.

1) Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τη συλλογή, επεξεργασία, παρουσίαση και ανάλυση αριθμητικών δεδομένων, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων χρησίμων στη λήψη ορθών αποφάσεων.

2) Σε μια στατιστική έρευνα μπορούμε να διακρίνομε τρία στάδια:

α) Τη συλλογή του στατιστικού υλικού.

β) Την επεξεργασία και παρουσίασή του και

γ) την ανάλυση του στατιστικού υλικού και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

3) Πληθυσμός είναι το σύνολο των μετρήσεων ή γενικά των παρατηρήσεων, που αναφέρονται σ' ένα χαρακτηριστικό ή ιδιότητα των μονάδων του συνόλου που εξετάζομε.

4) Τα χαρακτηριστικά ή ιδιότητες των στατιστικών μονάδων ενός πληθυσμού τα ονομάζομε μεταβλητές και τις συμβολίζομε με τα γράμματα Χ, Υ, Ζ, ..., οι δε αριθμητικές ή άλλες συμβολικές εκφράσεις τους λέγονται τιμές της μεταβλητής.

5) Οι μεταβλητές διακρίνονται σε ποιοτικές και ποσοτικές μεταβλητές. Οι ποσοτικές διακρίνονται σε συνεχείς και διακριτές (ασυνεχείς) μεταβλητές.

6) Οι σπουδαιότερες μέθοδοι συλλογής στατιστικών στοιχείων είναι:

α) Η απογραφή, που συνίσταται στην καταγραφή όλων των στοιχείων του πληθυσμού και

β) η δειγματοληψία, που συνίσταται στη συλλογή δεδομένων μόνο από ένα μέρος του πληθυσμού.

7) Η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:

α) Με συνοπτικές εκθέσεις ή αναφορές.

β) Με στατιστικούς πίνακες και

γ) με διαγράμματα.

8) Σε κάθε πίνακα διακρίνομε: το κύριο σώμα ή κορμό του πίνακα, τον τίτλο, τις επικεφαλίδες των στηλών και γραμμών, την πηγή και τις υποσημειώσεις.

9) Όταν οι μονάδες του εξεταζόμενου πληθυσμού ερευνώνται ως προς ένα χαρακτηριστικό τους, χρησιμοποιούμε τους πίνακες απλής εισόδου και όταν ερευνώνται συγχρόνως ως προς δύο χαρακτηριστικά τους, χρησιμοποιούμε τους πίνακες διπλής εισόδου.

10) Συχνότητα είναι ο αριθμός που δείχνει πόσο συχνά (πόσες φορές) εμφανίζεται στο σύνολο που έχομε η κάθε τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής.

11) Τα στατιστικά διαγράμματα αποτελούν ένα τρόπο παρουσιάσεως των στατιστικών μας δεδομένων με τη χρησιμοποίηση γεωμετρικών σχημάτων και συμβόλων. Σε ένα στατιστικό διάγραμμα μπορούμε να διακρίνομε: τον τίτλο, την κλίμακα με τις τιμές των μεγεθών, το υπόμνημα και την πηγή.

12) Μερικά από τα κυριότερα είδη διαγραμμάτων είναι: Τα ακιδωτά διαγράμματα ή ραβδογράμματα, τα ιστογράμματα, τα χρονοδιαγράμματα, τα κυκλικά διαγράμματα, τα ειδογράμματα και τα χαρτοδιαγράμματα.

2.7 Ερωτήσεις.

1. Τι είναι η Στατιστική;
2. Ποια στάδια μπορούμε να διακρίνομε σε μια στατιστική έρευνα;
3. Πόσο απαραίτητη είναι η στατιστική στη σύγχρονη επιχειρηματική δράση; Απαντήστε συνοπτικά.
4. Τι εννοούμε στη στατιστική με τον όρο πληθυσμός;
5. Τι ονομάζομε στατιστικές μεταβλητές; Τι ονομάζομε τιμές της μεταβλητής;
6. Τι είναι οι ποιοτικές μεταβλητές; Τι είναι οι ποσοτικές μεταβλητές;
7. Τι είναι οι συνεχείς και τι οι διακριτές μεταβλητές;
8. Τι είναι η Περιγραφική Στατιστική και η Επαγωγική Στατιστική;
9. Τι γνωρίζετε για την απογραφή και τη δειγματοληψία;
10. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων;
11. Τι επιτυγχάνομε με τη βοήθεια των στατιστικών πινάκων;
12. Ποια είναι τα κυριότερα στοιχεία που μπορούμε να διακρίνομε σ' έναν πίνακα;
13. Πότε χρησιμοποιούμε τους πίνακες απλής εισόδου και πότε τους πίνακες διπλής εισόδου;
14. Τι γνωρίζετε για τους πίνακες κατανομής συχνοτήτων;
15. Τι γνωρίζετε για τα στατιστικά διαγράμματα;
16. Ποια είναι τα βασικά στοιχεία ενός στατιστικού διαγράμματος;
17. Αναφέρατε μερικά είδη στατιστικών διαγραμμάτων.

2.8 Ασκήσεις.

*1. Δίνεται ο αριθμός των απασχολουμένων υπαλλήλων 25 εμπορικών καταστημάτων: 6, 1, 2, 8, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 6, 5, 6, 5, 5, 4, 7, 7, 8, 7, 8, 4, 6, 3, 2.
Να συνταχθεί ο σχετικός πίνακας κατανομής συχνοτήτων.

*2. Η βαθμολογία 30 σπουδαστών στις εξετάσεις του μαθήματος της Στατιστικής είναι: 9, 0, 2, 3, 6, 6, 4, 3, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 7, 8, 8, 1, 7, 10, 7, 2, 10, 9, 9, 2, 5, 6, 7, 7.
Να ομαδοποιηθούν οι παρατηρήσεις σε μορφή κατανομής συχνοτήτων χρησιμοποιώντας 5 τάξεις.

*3. Δίνεται ο αριθμός πλοίων των έξι μεγαλυτέρων ναυτιλιακών χωρών – Έτος 1987.

Χώρες	Αριθμός πλοίων
Ιαπωνία	9.822
ΗΠΑ	6.427
ΕΣΣΔ	6.705
Ηνωμένο Βασίλειο	2.165
Νορβηγία	1.979
Ελλάς	1.948

Πηγή: Loyd's Register of shipping, Statistical Tables (ΕΣΥΕ).

Να απεικονισθούν τα παραπάνω δεδομένα με ακιδωτό διάγραμμα.

*4. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον πληθυσμό 5 γεωγραφικών περιοχών μιας γεωγραφικής περιφέρειας σε χιλιάδες κατοίκους.

Περιοχές	Πληθυσμός
Α	200
Β	250
Γ	350
Δ	150
Ε	100

Να απεικονισθούν τα παραπάνω δεδομένα με ακιδωτό διάγραμμα.

*5. Δίνεται το κατά κεφαλήν ακαθάριστο εθνικό εισόδημα της Ελλάδος για τα έτη 1984-1991 σε τρέχουσες τιμές και $ ΗΠΑ.

Έτη	ΗΠΑ
1984	3017
1985	2989
1986	3446
1987	3995
1988	4595
1989	4747
1990	5740
1991	5948

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

Να παρασταθεί η εξέλιξη του κατά κεφαλήν εισοδήματος με χρονολογικό διάγραμμα.

*6. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το σύνολο των κυκλοφορούντων οχημάτων σε χιλιάδες, κατά τα έτη 1983-89.

Έτη	Σύνολο οχημάτων
1983	1763
1984	1886
1985	2037
1986	2170
1987	2282
1988	2406
1989	2570

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε.

Να απεικονισθεί η αυξητική εξέλιξη των κυκλοφορούντων οχημάτων με χρονολογικό διάγραμμα.

*7. Δίνεται η ποσοστιαία σύνθεση (%) του παθητικού του ισολογισμού μιας επιχειρήσεως.

Παθητικό	Ποσοστό (%)
Πραγματικό παθητικό	25
Καθαρή περιουσία	75

Να απεικονισθούν τα παραπάνω δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

*8. Δίνεται η ποσοστιαία σύνθεση (%) του προσωπικού μιας επιχειρήσεως ως προς το μορφωτικό τους επίπεδο.

Επίπεδο μορφώσεως	Ποσοστό (%)
Πτυχιούχοι Τριτ/θμιας Εκπαιδεύσεως	25
Απόφοιτοι Λυκείου	50
Απόφοιτοι Γυμνασίου	25

Να απεικονισθούν τα παραπάνω δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

*9. Οι ετήσιες πωλήσεις σε εκατ. δρχ. 50 εμπορικών επιχειρήσεων ήταν:

Τάξεις πωλήσεων	Αριθμός εμπορικών επιχειρήσεων (συχνότητες) f
50-100	5
100-150	10
150-200	20
200-250	10
250-300	5

Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

πιχειρήσεως, σύμφωνα με το επίπεδο ειδικεύσεώς τους.

Επίπεδο ειδικεύσεως	Αριθμός εργαζομένων
Ειδικευμένοι	50
Ημιειδικευμένοι	25
Ανειδίκευτοι	25

Να απεικονισθούν τα παραπάνω δεδομένα.
I. Με κυκλικό διάγραμμα.
II. Με ακιδωτό διάγραμμα.

**11. Οι αποδοχές 25 εργαζομένων μιας επιχειρήσεως σε χιλιάδες δραχμών ήταν: 205, 240, 210, 315, 320, 345, 230, 335, 380, 360, 365, 370, 390, 245, 325, 340, 235, 330, 385, 365, 375, 210, 355, 310, 395.
Ζητείται:
I. Τα παραπάνω δεδομένα να παρασταθούν σε πίνακα κατανομής συχνοτήτων χρησιμοποιώντας 5 τάξεις.
II. Να συνταχθεί το αντίστοιχο ιστόγραμμα και
III. το πολύγωνο συχνοτήτων.

**12. Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν την οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως.
Άνδρες ανύπαντροι: 22, Γυναίκες ανύπαντρες: 8, Άνδρες παντρεμένοι: 50, Γυναίκες παντρεμένες: 15, Άνδρες διαζευγμένοι: 3, Γυναίκες διαζευγμένες: 2.
Ζητείται:
I. Να παρουσιασθεί η οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων της επιχειρήσεως με τη βοήθεια πίνακα διπλής εισόδου.
II. Να απεικονισθούν τα παραπάνω δεδομένα της οικογενειακής καταστάσεως των υπαλλήλων με ακιδωτό διάγραμμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ – ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΕΩΣ

Τὸ δὲ νῦν ἐστι μεσότης τις.

Το παρόν είναι κάποια μεσαία θέση, το μέσον (ανάμεσα στο παρελθόν και το μέλλον).

Αριστοτέλης, Φυσικά Η' $251^{\beta}20$

Ο στατιστικός μέσος είναι η περιγραφή, η αντιπροσωπευτική ποσότητα που τίθεται για όλη την ομάδα, ο άριστος αντιπρόσωπος της ομάδας...

George Udny Yule (1871-1951)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΕΩΣ

3.1 Τι είναι τα μέτρα θέσεως.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τη συλλογή και την παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων και είδαμε, πώς μπορούμε να τα εμφανίσομε συνοπτικά με τη μορφή κατανομής συχνοτήτων. Όμως, τις περισσότερες φορές, μάς είναι δύσκολο να θυμόμαστε ολόκληρους πίνακες δεδομένων και αντιμετωπίζομε σοβαρότατο πρόβλημα, όταν θέλομε να προχωρήσομε στη σύγκριση δύο κατανομών συχνοτήτων. Έτσι, λοιπόν, προσπαθούμε να αντικαταστήσομε το σύνολο των δεδομένων μας με ορισμένους αντιπροσωπευτικούς αριθμούς, ορισμένα δηλαδή στατιστικά μέτρα, που ονομάζονται ***παράμετροι*** της κατανομής. *(Οι παράμετροι είναι αριθμοί, που συνοψίζουν βασικά χαρακτηριστικά των παρατηρήσεών μας που αναφέρονται στο ερευνούμενο φαινόμενο).*

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσομε τα ***μέτρα θέσεως*** *ή* ***μέσους όρους***, που είναι στατιστικές παράμετροι, οι οποίες καθορίζουν μια τιμή της μεταβλητής που εξετάζομε και γύρω από την οποία τείνουν να συγκεντρωθούν οι παρατηρήσεις μας. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τι είναι και τα μέτρα διασποράς, τα οποία μας είναι απαραίτητα για να έχομε πληρέστερη εικόνα του φαινομένου που εξετάζομε.

3.2 Μέσος αριθμητικός.

Ο μέσος αριθμητικός (arithmetic mean) ***(μ)*** είναι το πιο σημαντικό και συχνά χρησιμοποιούμενο στην πράξη στατιστικό μέτρο και ***ορίζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών*** $x_1, x_2, ... x_N$ ***που παίρνει μια μεταβλητή x δια του πλήθους των τιμών της.*** Αν εξετάζομε όλο τον πληθυσμό, ο μέσος αριθμητικός συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα μ, ενώ αν αναφερόμαστε σε δείγμα συμβολίζεται με $\overline{x}$. Έχομε, λοιπόν:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} \tag{3.1}$$

ή

$$\mu = \frac{\Sigma x}{N} \tag{3.2}$$

Αν όμως πρόκειται για δείγμα έχομε:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{\nu} \tag{3.3}$$

Παράδειγμα 1.

Τα ημερομίσθια σε χιλιάδες δρχ. μιας ομάδας 5 εργατών είναι: 7, 9, 10, 11, 13. Να βρεθεί το μέσο ημερομίσθιό τους.

Λύση:

$$\mu = \frac{7 + 9 + 10 + 11 + 13}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

Αν δηλαδή ο εργοδότης πλήρωνε με το ίδιο ημερομίσθιο και τους 5 εργάτες θα έπρεπε να δίνει στον καθένα 10.000 δρχ. την ημέρα. Επίσης, αντί να θυμόμαστε τα πέντε διαφορετικά ημερομίσθια (στην πραγματικότητα συνήθως οι παρατηρήσεις μας είναι πολύ περισσότερες), θυμόμαστε έναν αριθμό· ότι δηλαδή τα ημερομίσθια των 5 εργατών είναι περίπου γύρω στις 10.000 δρχ., ή ότι η μέση ημερήσια αμοιβή των 5 εργατών είναι 10.000 δρχ.

Παράδειγμα 2.

Τα ετήσια διαφημιστικά έξοδα σε εκατομμύρια δρχ. των 10 πρώτων σε πωλήσεις εμπορικών επιχειρήσεων μιας πόλεως ήταν:

60, 70, 80, 90, 100, 100, 110, 120, 130, 140.

Να υπολογισθεί το μέσο ετήσιο ύψος διαφημιστικών εξόδων τους.

Λύση:

$$\mu = \frac{60+70+80+90+100+100+110+120+130+140}{10} = \frac{1000}{10} = 100$$

δηλαδή 100.000.000 δρχ.

Το μέσο ετήσιο ύψος διαφημιστικών εξόδων λοιπόν αυτών των 10 επιχειρήσεων είναι 100.000.000 δρχ. Δηλαδή αυτές οι 10 επιχειρήσεις τη χρονιά που πέρασε ξόδεψαν κατά μέσο όρο 100.000.000 δρχ. για διαφήμιση.

3.2.1 Υπολογισμός μέσου αριθμητικού από πίνακα συχνοτήτων.

Για να υπολογίσομε τον μέσο αριθμητικό μ από πίνακα συχνοτήτων, πολλαπλασιάζομε την κάθε τιμή της μεταβλητής x επί την αντίστοιχη συχνότητά της (η οποία μας δείχνει όπως έχομε μάθει πόσες φορές εμφανίσθηκε αυτή η τιμή στο σύνολο που εξετάζομε) και τα γινόμενα που θα προκύψουν τα αθροίζομε.

Στη συνέχεια διαιρούμε το άθροισμα Σfx που βρήκαμε δια του αθροίσματος (Σf) των συχνοτήτων, δηλαδή με το σύνολο των παρατηρήσεών μας Ν (Σf=N).

Συνεπώς έχομε:

$$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k}{f_1 + f_2 + ... + f_k} \qquad (3.4)$$

ή

$$\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \qquad (3.5)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ***Επικρατούσα τιμή*** ή ***τύπος*** είναι η τιμή που παρουσιάζεται περισσότερες φορές (έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα) σε μια ομάδα στατιστικών στοιχείων.

Παράδειγμα 3.

Ο αριθμός των απασχολουμένων υπαλλήλων λογιστηρίου μιας ομάδας 40 εμπορικών επιχειρήσεων παρέχεται από τον πίνακα 3.2.1. Ζητείται να βρεθεί ο μέσος αριθμός των απασχολουμένων υπαλλήλων λογιστηρίου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2.1

(1) Αριθμός υπαλλήλων	(2) Αριθμός επιχειρήσεων (συχνότητες)	(3) Γινόμενα (1) Χ (2)
x	f	fx
1	3	3
2	3	6
3	7	21
4	12	48
5	8	40
6	6	36
7	1	7
	Σf=40	Σfx=161

Λύση:

Δημιουργούμε τη στήλη 3 (fx), πολλαπλασιάζοντας κάθε τιμή της x επί την αντίστοιχη συχνότητά της. Στη συνέχεια αθροίζομε τα προκύψαντα γινόμενα και βρίσκομε Σfx=161, το οποίο διαιρούμε με το άθροισμα Σf=40 της στήλης 2 (f) των συχνοτήτων. Συνεπώς έχομε:

$$\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{161}{40} = 4{,}025 \simeq 4$$

Δηλαδή, ο μέσος αριθμός των απασχολουμένων υπαλλήλων λογιστηρίου σ' αυτή την ομάδα των 40 επιχειρήσεων που εξετάσαμε, είναι περίπου 4 υπάλληλοι.

Η δε επικρατούσα τιμή είναι ίση με 4, γιατί σ' αυτήν την τιμή αντιστοιχεί η μεγαλύτερη συχνότητα, δηλαδή ο μεγαλύτερος αριθμός επιχειρήσεων (12).

Αν έχομε ομαδοποιημένες κατά τάξεις παρατηρήσεις, βρίσκομε τον κεντρικό όρο (μέση τιμή) κάθε τάξεως και στη συνέχεια εργαζόμαστε για τον υπολογισμό του μέσου αριθμητικού μ, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα ετήσια κέρδη σε εκατομμύρια δρχ. των 50 πρώτων (σε κέρδη) εμπορικών καταστημάτων μιας πόλεως.

Τάξεις κερδών	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
Αριθμός επιχειρήσεων	10	10	7	6	7	5	5

Ζητείται να βρεθεί το μέσο ετήσιο κέρδος των καταστημάτων.

Λύση:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2.2

(1) Τάξεις κερδών	(2) Αριθμός επιχειρήσεων f	(3) Κεντρικοί όροι τάξεων x	(4) Γινόμενα (2) × (3) fx
50- 60	10	55	550
60- 70	10	65	650
70- 80	7	75	525
80- 90	6	85	510
90-100	7	95	665
100-110	5	105	525
110-120	5	115	575
	Σf:50		Σfx: 4000

Δημιουργούμε τη στήλη 3 (πιν. 3.2.2), βρίσκοντας τον κεντρικό όρο κάθε τάξεως και στη συνέχεια εργαζόμενοι, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, πολλαπλασιάζομε τους όρους της στήλης 3 επί τους αντίστοιχους της στήλης 2. Έτσι δημιουργούμε τη στήλη 4, βρίσκοντας Σfx=4000 και Σf=50, τα οποία και αντικαθιστούμε στον τύπο ευρέσεως του μ.

Συνεπώς $$\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{4000}{50} = 80$$

Δηλαδή το μέσο ετήσιο κέρδος αυτών των 50 επιχειρήσεων ήταν 80.000.000 δρχ.

3.2.2 Έμμεσος τρόπος υπολογισμού του μέσου αριθμητικού.

Για να απλουστεύσομε τους υπολογισμούς ευρέσεως του μέσου αριθμητικού χρησιμοποιούμε έναν έμμεσο τρόπο προσδιορισμού του. Συγκεκριμένα αφαιρούμε από όλες τις τιμές x έναν αριθμό x_o (συνήθως αφαιρούμε μια από τις μεσαίες τιμές ή την τιμή της x με τη μεγαλύτερη συχνότητα) για να επιτύχομε τη μεγαλύτερη απλούστευση. Αν οι διαφορές $x - x_o$ που θα προκύψουν είναι μεγάλοι αριθμοί, τότε τις διαιρούμε με τον αριθμό δ (πλάτος τάξεως). Έτσι προκύπτει μια νέα μεταβλητή ξ, και ακολουθώντας τη γνωστή μας πορεία βρίσκομε πόσο είναι το άθροισμα Σfξ. Η νέα μεταβλητή ξ συνδέεται με τη μεταβλητή x, με την εξής σχέση:

$$\xi = \frac{x - x_o}{\delta}$$

Ο μέσος αριθμητικός μ, με έμμεσο τρόπο, δίνεται από τον τύπο:

$$\mu = x_o + \delta \ \frac{\Sigma f\xi}{\Sigma f} \qquad (3.6)$$

Παράδειγμα 5.

Ας εφαρμόσομε τώρα τη διαδικασία υπολογισμού του μέσου αριθμητικού (πιν. 3.2.3) με τον έμμεσο τρόπο στα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος 4.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2.3

(1) Τάξεις κερδών	(2) Αριθμός επιχειρήσεων	(3) Κεντρικές τιμές τάξεων	(4)	(5)	(6)
	f	x	x−85	$\xi = \frac{x-85}{10}$	fξ
50- 60	10	55	−30	−3	−30
60- 70	10	65	−20	−2	−20
70- 80	7	75	−10	−1	−7
80- 90	6	$85 = x_o$	0	0	0
90-100	7	95	10	1	7
100-110	5	105	20	2	10
110-120	5	115	30	3	15
	Σf: 50				Σfξ=−25

Απ' όλες τις τιμές της στήλης 3 αφαιρούμε το x_o=85, οπότε προκύπτει η στήλη 4. Κατόπιν διαιρούμε τους όρους της στήλης 4 διά του δ=10, οπότε προκύπτει η στήλη 5, δηλαδή μια νέα μεταβλητή η ξ. Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη γνωστή πορεία βρίσκομε $\Sigma f\xi=-25$.

Άρα ο μ είναι:

$$\mu = x_o + \delta \frac{\Sigma f\xi}{\Sigma f} = 85 + 10 \times \frac{(-25)}{50} = 80$$

Δηλαδή 80.000.000 δρχ.

Βλέπομε, λοιπόν, ότι βρήκαμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα που είχαμε βρει με τον άμεσο τρόπο.

3.2.3 Ιδιότητες του μέσου αριθμητικού.

Αναφέρομε παρακάτω ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες του μέσου αριθμητικού μ, των οποίων η χρήση καθιστά ταχύτερους τους υπολογισμούς για την εύρεσή του:

1) Αν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής x προσθέσομε (ή αφαιρέσομε) μια σταθερή ποσότητα x_o, τότε ο μ αυξάνεται (ή μειώνεται) κατά τη σταθερή αυτή ποσότητα x_o.

2) Αν $x_1=x_2=...x_N=\kappa$ τότε και $\mu=\kappa$.

3) Αν όλες οι τιμές της x πολλαπλασιασθούν επί μια σταθερή ποσότητα κ, τότε και ο μ πολλαπλασιάζεται επί κ.

4) Αν απ' όλες τις τιμές της x αφαιρέσομε τον μ, τότε το άθροισμα των διαφορών $x-\mu$, δηλαδή το $\Sigma(x-\mu)$ είναι ίσον με 0, ήτοι $\Sigma(x-\mu)=0$.

5) Αν ένας πληθυσμός χωρισθεί σε κ υποπληθυσμούς, που ο καθένας τους έχει $N_1, N_2, ...N_\kappa$ μονάδες και οι αντίστοιχοι μέσοι των κ υποπληθυσμών είναι $\mu_1, \mu_2, ... \mu_\kappa$, τότε ο μέσος αριθμητικός όλου του πληθυσμού είναι:

$$\mu = \frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + ... + N_\kappa\mu_\kappa}{N_1+N_2 + ... + N_\kappa}$$

3.3 Διάμεσος (median).

Αν οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή τοποθετηθούν κατ' αύξουσα φυσική τάξη, δηλαδή από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τιμή, ***τότε η τιμή της μεταβλητής που χωρίζει το σύνολο των τιμών σε δύο ισοπληθείς ομάδες λέγεται διάμεσος τιμή*** ή απλά ***διάμεσος Μ.*** Συνεπώς το 50% του συνόλου των τιμών της μεταβλητής βρίσκονται κάτω από τη διάμεσο και το άλλο 50% πάνω από τη διάμεσο.

Στην περίπτωση που οι τιμές της x δεν περιέχονται σε πίνακα συχνοτήτων, τότε η M δίνεται από τον $\frac{N+1}{2}$ όρο, όπου N είναι το πλήθος των τιμών της μεταβλητής x που έχουν τοποθετηθεί κατ' αύξουσα τάξη.

α) Το πλήθος των τιμών είναι περιττός αριθμός.

Παράδειγμα 6.

Έστω ότι τα ημερομίσθια 5 εργατών σε χιλιάδες δρχ. είναι: 10, 8, 10, 13, 12.

Για να βρούμε τη διάμεσο Μ τοποθετούμε κατ' αρχήν τα δεδομένα μας κατ' αύξουσα τάξη, δηλαδή:

$$\begin{array}{c} 8,\ 10,\ \underset{\substack{\uparrow \\ M}}{10},\ 12,\ 13 \end{array}$$

Το πλήθος των δεδομένων μας είναι Ν=5, οπότε έχομε:

$$M = \frac{N+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

Δηλαδή ο 3ος όρος είναι η τιμή της διαμέσου, άρα το διάμεσο ημερομίσθιο είναι 10.000 δρχ.

β) Το πλήθος των τιμών είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα 7.

Ας υποθέσομε ότι ο αριθμός υπαλλήλων μιας ομάδας έξι (6) εμπορικών επιχειρήσεων είναι: 12, 16, 16, 14, 18, 10.

Τοποθετούμε τα δεδομένα κατ' αύξουσα τάξη, δηλαδή:

$$10,\ 12,\ 14,\ \underset{\substack{\uparrow \\ M}}{\ }\ 16,\ 16,\ 18$$

Εδώ έχομε Ν=6, οπότε και

$$\frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5$$

Αυτό σημαίνει ότι η Μ βρίσκεται μεταξύ του 3ου και 4ου όρου, δηλαδή μεταξύ των αριθμών 14 και 16. Άρα ο διάμεσος αριθμός υπαλλήλων θα είναι:

$$M = \frac{14+16}{2} = 15$$

3.3.1 Υπολογισμός διαμέσου από πίνακα συχνοτήτων.

Στην περίπτωση αυτή, από τη γνωστή μας στήλη συχνοτήτων f συνθέτομε μια νέα στήλη, των αθροιστικών συχνοτήτων F. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη αθροιστική συχνότητα F_1 ισούται με τη συχνότητα f_1, η δεύτερη αθροιστική συχνότητα F_2 ισούται με το άθροισμα των συχνοτήτων f_1 και f_2, η δε F_3 ισούται με $f_1+f_2+f_3$ κ.ο.κ. Τέλος, η τελευταία αθροιστική συχνότητα F_v θα ισούται με το άθροισμα όλων των συχνοτήτων f, δηλαδή $F_v=f_1+f_2+\ldots f_N=\Sigma f=N$.

Ο τελευταίος λοιπόν όρος της στήλης των αθροιστικών συχνοτήτων F ισούται με Σf, με το σύνολο δηλαδή των ν παρατηρήσεών μας.

Στη συνέχεια βρίσκομε μεταξύ ποιων αθροιστικών συχνοτήτων F_{i-1} και F_i βρίσκεται ο αριθμός N/2. Η τιμή της μεταβλητής x που έχει αθροιστική συχνότητα F_i είναι η διάμεσος.

Παράδειγμα 8.

Ας βρούμε τη διάμεσο Μ, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παραδείγματος 3.

Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως, συνθέτομε τη στήλη 3 των αθροιστικών συχνοτήτων (F).

Κατόπιν προσδιορίζομε τα Σf=N=40 και N/2=40/2=20. Συνεπώς, το N/2 βρίσκεται μεταξύ της 3ης και της 4ης αθροιστικής συχνότητας, δηλαδή μεταξύ $F_{i-1}=13$ και $F_i=25$. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η τιμή 4 της x είναι εκείνη που έχει αθροιστική συχνότητα $F_i=25$. Άρα λοιπόν η διάμεσος είναι M=4, δηλαδή το 50% των επιχειρήσεων έχει 4 υπαλλήλους και κάτω και το άλλο 50% έχει 4 ή περισσότερους υπαλλήλους (πιν. 3.3.1).

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1

(1) Αριθμός υπαλλήλων	(2) Αριθμός επιχειρήσεων (συχνότητες)	(3) Αθροιστικές συχνότητες
x	f	F
1	3	3
2	3	6
3	7	$20=\frac{N}{2}\rightarrow$ 13 ← F_{i-1}
M → 4	12	25 ← F_i
5	8	33
6	6	39
7	1	40
	Σf=40	

Όταν έχομε ομαδοποιημένες κατά τάξεις παρατηρήσεις, αφού βρούμε πάλι μεταξύ ποιων αθροιστικών συχνοτήτων F_{i-1} και F_i βρίσκεται το N/2, εντοπίζομε την τάξη $\alpha_{i-1}-\alpha_i$, στην οποία αντιστοιχεί η αθροιστική συχνότητα F_i (και φυσικά και η συχνότητα f_i). Η δε διάμεσος που βρίσκεται εντός των ορίων της παραπάνω τάξεως $[\alpha_{i-1}-\alpha_i)$ δίνεται από τον τύπο:

$$M=\alpha_{i-1}+\frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{2}-F_{i-1}\right) \tag{3.7}$$

όπου δ=το πλάτος της τάξεως

$$[\alpha_{i-1}-\alpha_i)$$

Παράδειγμα 9.

Από τους δημοσιευθέντες ισολογισμούς μιας ομάδας 80 μεταποιητικών επιχειρήσεων ενός κλάδου, προέκυψε ο πίνακας 3.3.2, που δείχνει το ύψος των επενδεδυμένων παγίων κεφαλαίων τους σε εκατομμύρια δρχ. (*Το πάγιο κεφάλαιο περιλαμβάνει εκείνα τα περιουσιακά στοιχεία, που δεν προορίζονται για μεταπώληση, αλλά παραμένουν στην επιχείρηση μόνιμα και χρησιμοποιούνται απ' αυτή για τη δράση της, όπως κτίρια, μηχανήματα, έπιπλα και σκεύη κ.λπ.).*

Ζητείται να βρεθεί και να ερμηνευθεί η διάμεσος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.2

(1) Τάξεις παγίων κεφαλαίων	(2) Αριθμός επιχειρήσεων (συχνότητες)	(3) Αθροιστικές (συχνότητες)
	f	F
200-300	10	10
300-400	10	20
400-500	15	35 ← F_{i-1}
a_{i-1} → 500-600 ← a_i	f_i → 20	$40 = \frac{\nu}{2}$ → 55 ← F_{i-1}
600-700	15	70
700-800	10	80
	$\Sigma f=80$	

Λύση:

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{2} - F_{i-1}\right)$$

και

$$M = 500 + \frac{100}{20}\ (40-35) = 525$$

Βήμα I. Δημιουργούμε κατά τα γνωστά τη στήλη 3 των αθροιστικών συχνοτήτων.

Βήμα II. Εντοπίζομε στη στήλη 3 τις δύο αθροιστικές συχνότητες $F_{i-1}=35$ και $F_i=55$, μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο $N/2=80/2=40$.

Βήμα III. Προσδιορίζομε την τάξη $a_{i-1}-a_i$ (500-600), στην οποία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη αθροιστική συχνότητα $F_i=55$. Η συχνότητα της τάξεως είναι η $f_i=20$, το κατώτερο όριο της τάξεως είναι το $a_{i-1}=500$ και το πλάτος της είναι $\delta=100$.

Βήμα IV. Αντικαθιστούμε στον τύπο ευρέσεως της διαμέσου όλα τα παραπάνω στοιχεία:

$a_{i-1}=500$, $f_i=20$
$F_{i-1}=35$, $N/2=80/2=40$
$\delta=100$

Έτσι βρήκαμε ότι η διάμεσος M=525 , δηλαδή M=525 εκατ. δρχ.

Χάρη της αποκτήσεως μιας πληρέστερης εικόνας του προβλήματος που εξετάζομε, αναφέρομε ότι ο μέσος αριθμητικός είναι $\mu=512{,}5$ εκατ. δρχ. (Ο μαθητής αν θέλει ας κάνει την όλη διαδικασία υπολογισμού του μ).

Δηλαδή, το μέσο ύψος των επενδεδυμένων παγίων κεφαλαίων της ομάδας των 100 επιχειρήσεων που εξετάσαμε είναι $\mu=512{,}5$ εκατ. δρχ. Το δε 50% αυτών των επιχειρήσεων έχει επενδεδυμένα πάγια κεφάλαια ύψους 525 εκατ. δρχ. και κάτω και το άλλο 50% των επιχειρήσεων έχει πάγια κεφάλαια ύψους 525 εκατ. δρχ. και άνω.

3.4 Τεταρτημόρια - δεκατημόρια.

Α. Τεταρτημόρια.

Οι τιμές εκείνες της μεταβλητής, που χωρίζουν το συνολικό αριθμό των τιμών της σε 4 ισοπληθείς ομάδες, λέγονται τεταρτημόρια (quartiles). Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι η τιμή της μεταβλητής x κάτω της οποίας βρίσκεται το 25% του συνολικού αριθμού των τιμών της x και φυσικά πάνω από το Q_1 βρίσκει το 75% των τιμών. Όπως είναι φανερό το ***Q_2 είναι η διάμεσος M*** και τέλος το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 είναι εκείνη η τιμή της μεταβλητής, κάτω από την οποία βρίσκεται το 75% του συνόλου των τιμών της x και πάνω από το Q_3 βρίσκεται φυσικά το υπόλοιπο 25% των τιμών.

Στην περίπτωση που τα δεδομένα μας δεν είναι ταξινομημένα σε κατανομή συχνοτήτων, το Q_1 εντοπίζεται στη θέση $N+1/4$ και το Q_3 στη θέση $3(N+1)/4$.

Παράδειγμα 10.

Έστω ότι η x παίρνει τις τιμές: 13, 6, 3, 2, 7, 7, 12, 11, 8, 9, 10 και ζητούμε να βρούμε τα Q_1 και Q_3.

Λύση:

Κατ' αρχήν τοποθετούμε κατ' αύξουσα τάξη τις τιμές της x

$$2,\ 3,\ \underset{\substack{\uparrow\\ Q_1}}{6},\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \underset{\substack{\uparrow\\ Q_3}}{11},\ 12,\ 13$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το N=11, έχομε:

$$\frac{N+1}{4}=\frac{11+1}{4}=3$$

Δηλαδή το Q_1 εντοπίζεται στην 3η θέση, άρα $Q_1=6$ και

$$\frac{3\,(N+1)}{4}=\frac{3\,(11+1)}{4}=\frac{36}{4}=9$$

Δηλαδή το Q_3 εντοπίζεται στην 9η θέση, άρα $Q_3=11$.

Εάν έχομε τα δεδομένα μας ταξινομημένα σε κατανομή συχνοτήτων, όπως στο παράδειγμα 8, το Q_1 εντοπίζεται στη θέση N/4 και το Q_3 στη θέση 3N/4. Για τον υπολογισμό λοιπόν του Q_1 έχομε:

$$\frac{N}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Ο αριθμός 10 περιέχεται μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων 6 και 13 (βλέπε πίνακα 3.3.1) και επειδή το Q_1 είναι η τιμή της x, που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη αθροιστική συχνότητα, έχομε $Q_1=3$.

Και για τον υπολογισμό του Q_3, έχομε:

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 40}{4} = 30$$

Το 30 περιέχεται μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων 25 και 33 και συνεπώς είναι $Q_3=5$.

Εάν έχομε ομαδοποιημένες κατά τάξεις παρατηρήσεις, χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$Q_1 \doteq a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{4} - F_{i-1}\right) \tag{3.8}$$

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{3N}{4} - F_{i-1}\right) \tag{3.8}$$

Εργαζόμαστε δε, κατά τρόπο παρόμοιο με αυτόν της ευρέσεως της διαμέσου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1

(1) Τάξεις προφορικών απαιτήσεων	(2) Αριθμός επιχειρήσεων (συχνότητες)	(3) Αθροιστικές (συχνότητες)
	f	F
0- 10	4	4
10- 20	11	15
20- 30	12	27
30- 40	13	40
40- 50	25	65
50- 60	15	80
60- 70	8	88
70- 80	7	95
80- 90	3	98
90-100	2	100
	Σf=100	

Παράδειγμα 11.

Από την εξέταση των Ισολογισμών μιας ομάδας 100 επιχειρήσεων ενός κλάδου, προέκυψε ο πίνακας 3.4.1, που δείχνει το ύψος του προφορικών τους απαιτήσεων –πελατών και χρεωστών *(στους πελάτες περιλαμβάνονται οι προφορικές απαιτήσεις της επιχειρήσεως που προήλθαν από πωλήσεις εμπορευμάτων και στους χρεώστες οι προφορικές απαιτήσεις της επιχειρήσεως που προήλθαν από άλλες εκτός της πωλήσεως εμπορευμάτων αιτίες)* – σε εκατομμύρια δρχ.

Να βρεθούν και να ερμηνευθούν το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

Λύση:

Ο αριθμός $\frac{N}{4} = \frac{100}{4} = 25$ βρίσκεται μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων 15 και 27, συνεπώς το Q_1 εντοπίζεται στην τάξη 20-30, δηλαδή έχομε: $\alpha_{i-1}=20$, $\delta=10$, $f_i=12$ και $F_{i-1}=15$ και

$$Q_1 = 20 + \frac{10}{12}(25-15) = 28{,}33$$

Δηλαδή το 25% των επιχειρήσεων έχει προφορικές απαιτήσεις ύψους 28,33 εκατ. δρχ. και κάτω και το άλλο 75% 28,33 εκατ. δρχ. και άνω.

Ομοίως εργαζόμενοι για το Q_3 έχομε:

$$\frac{3N}{4} = 75,\ \alpha_{i-1}= 50,\ \delta=10,\ f_i=15 \text{ και } F_{i-1}=65$$

και

$$Q_3 = 50 + \frac{10}{15}(75-65) = 56{,}66$$

Δηλαδή το 75% των επιχειρήσεων έχει προφορικές απαιτήσεις ύψους 56,66 εκατ. δρχ. και κάτω και το υπόλοιπο 25% 56,66 εκατ. δρχ. και άνω.

3.4.2 Δεκατημόρια.

Ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη με αυτήν της ευρέσεως των τεταρτημορίων μπορούμε να υπολογίσομε ***εκείνες τις τιμές της μεταβλητής x–δεκατημόρια (deciles) D– που χωρίζουν το συνολικό αριθμό των τιμών της μεταβλητής σε 10 ίσα μέρη.***

Παράδειγμα 12.

Έστω ότι η βαθμολογία 14 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής είναι:

$$8, 9, 9, 10, 10, \underset{\underset{D_4}{\uparrow}}{11}, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 18, 19$$

Η θέση π.χ. του 4ου δεκατημορίου D_4 προσδιορίζεται από τον αριθμό

$$\frac{4\,(N+1)}{10} = \frac{4\,(14+1)}{10} = 6$$

Άρα το D_4 είναι ο 6ος όρος, δηλαδή το 11.

Στην περίπτωση των ομαδοποιημένων κατά τάξεις παρατηρήσεων, τα δεκατημόρια υπολογίζονται από τον τύπο:

$$D_K = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{KN}{10} - F_{i-1}\right) \tag{3.10}$$

Με βάση τα δεδομένα του παραδείγματος 11 για το 9ο δεκατημόριο θα έχομε:

$$\frac{KN}{10} = \frac{9 \times 100}{10} = 90,\ a_{i-1} = 70,\ \delta = 10,\ f_i = 7,\ F_{i-1} = 88$$

και

$$D_9 = 70 + \frac{10}{7}\,(90 - 88) = 72{,}857 \simeq 73$$

Δηλαδή το 90% των επιχειρήσεων είχε προφορικές απαιτήσεις 73 εκατομ. δρχ. και κάτω και το υπόλοιπο 10% 73 εκατομ. δρχ. και άνω.

3.5 Η σημασία των μέτρων θέσεως για τις επιχειρήσεις.

Αναφερόμενοι πολύ σύντομα στη χρησιμοποίηση των μέτρων θέσεως, σημειώνομε ότι ο Βέλγος Quetelet ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν πολύ συστηματικά και σε έκταση το πρόβλημα των μέσων τιμών. Παραδέχεται, όμως, ότι η έννοια των μέσων τιμών χρησιμοποιήθηκε σχεδόν ενστικτωδώς στην προεπιστημονική εποχή. Στη συνέχεια πολλοί σοφοί της αρχαιότητας χρησιμοποίησαν τις μέσες τιμές στις έρευνές τους, όπως ο Αρχιμήδης, ο Μέτων κ.ά.

Θα πρέπει να γνωρίζομε ότι τα μέτρα θέσεως που μελετήσαμε και ιδιαίτερα ο μέσος αριθμητικός και η διάμεσος, είναι από τα πλέον συχνά χρησιμοποιούμενα στατιστικά μέτρα στην πράξη και αποτελούν πληροφοριακό υλικό πολύτιμο για την άσκηση οποιασδήποτε επιχειρηματικής πολιτικής. Φυσικά το ίδιο ενδιαφέρον επιδεικνύεται και από πλευράς κράτους για την άσκηση ορθής οικονομικής, κοινωνικής κ.λπ. πολιτικής.

Θα πρέπει να επισημάνομε ότι τα μέτρα θέσεως είναι μεν πολύ σημαντικά και απαραίτητα, όμως δεν μας δίνουν πλήρη εικόνα του φαινομένου που εξετάζομε. Έτσι, τις περισσότερες φορές δεν προχωρούμε σε εξαγωγή συμπερασμάτων και σε λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων, αν δεν λάβομε υπόψη μας και τις πρόσθετες πληροφορίες, που παρέχουν τα μέτρα διασποράς, για τα οποία θα μιλήσομε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο και με τη βοήθεια των οποίων αποκτούμε πληρέστερη και σαφέστερη εικόνα του φαινομένου που εξετάζομε.

Αμέσως παρακάτω, για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση όσων εξετάσαμε, παρατίθεται ένα απλό πρόβλημα από τον επιχειρηματικό χώρο, όπου θα εφαρμόσομε όλα τα στατιστικά μέτρα που μάθαμε μέχρι τώρα.

Επιχειρηματική εφαρμογή.

Ο νέος γενικός διευθυντής της «Α.Ε. Ελλάς και Ερμής Ξενοδοχειακές Επιχειρήσεις» σκέπτεται να αναδιοργανώσει και να θέσει σε νέες βάσεις την όλη λειτουργία της ξενοδοχειακής μονάδας, για να αυξήσει την πληρότητα του ξενοδοχείου που διευθύνει.

Έτσι επιχειρεί μια πρώτη προσέγγιση του προβλήματος, εξετάζοντας τις ημέρες παραμονής των 300 πελατών που είχε η επιχείρηση – πίνακας 3.5.1– κατά την πιο κρίσιμη, από άποψη πληρότητας, χρονική περίοδο. Ο νέος γενικός διευθυντής πιστεύει ότι από τη μελέτη αυτού του πίνακα, είναι δυνατό να αντλήσει χρήσιμες πληροφορίες για την υπόψη χρονική περίοδο.

Ας δούμε λοιπόν, πώς μελέτησε τον πίνακα και τι πληροφορίες έδωσε αυτή η πρώτη προσέγγιση του προβλήματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1

Ημέρες παραμονής	Αριθμός πελατών
0- 4	20
4- 8	80
8-12	100
12-16	60
16-20	20
20-24	10
24-28	5
28-32	5

Ας συνθέσομε τον πίνακα 3.5.2 για να βρούμε τον μέσο αριθμητικό μ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.2

Τάξεις	Συχνότητες (f)	Κεντρικές τιμές (x)	(fx)
0- 4	20	2	40
4- 8	80	6	480
8-12	100	10	1000
12-16	60	14	840
16-20	20	18	360
20-24	10	22	220
24-28	5	26	130
28-32	5	30	150
	Σf:300		Σf:3220

Άρα

$$\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{3220}{300} = 10{,}7 \simeq 11 \text{ ημέρες}$$

Στη συνέχεια συνθέτομε τον πίνακα 3.5.3 για να βρούμε τη διάμεσο:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.3

Τάξεις	f	F
0- 4	20	20
4- 8	80	100
8-12	100	200
12-16	60	260
16-20	20	280
20-24	10	290
24-28	5	295
28-32	5	300
	Σf:300	

Εργαζόμενοι όπως έχομε μάθει στα προηγούμενα, έχομε:

$\frac{N}{2} = \frac{300}{2} = 150$, δηλαδή το $\frac{N}{2} = 150$ είναι μεταξύ $F_{i-1} = 100$ και $F_i = 200$ και επομένως η M εντοπίζεται στην τάξη 8-12, που έχει $f_i = 100$, το δε $a_{i-1} = 8$ και $\delta = 4$.

Άρα η διάμεσος $M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{2} - F_{i-1}\right) = 8 + \frac{4}{100}\ (150 - 100) = 10$

Άρα M=10 ημέρες.

Με βάση πάλι τον πίνακα 3.5.3 ας βρούμε το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 και το τρίτο Q_3.

Έχομε $\frac{N}{4} = 75$, δηλαδή το $\frac{N}{4}$ είναι μεταξύ $F_{i-1} = 20$ και $F_i = 100$ και το Q_1 εντοπίζεται στην τάξη 4-8 που έχει $f_i = 80$, το δε $a_{i-1} = 4$ και $\delta = 4$.

Άρα έχομε:

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{4} - F_{i-1}\right) = 4 + \frac{4}{80}\ (75 - 20) = 6{,}75$$

και $Q_1 = 6{,}75 \simeq 7$ ημέρες

Όμοια σκεπτόμενοι βρίσκομε:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{3N}{4} - F_{i-1}\right) = 12 + \frac{4}{60}\left(\frac{3 \times 300}{4} - 200\right) = 13{,}66$$

και $Q_1 \simeq 14$ ημέρες

Με βάση πάλι τον πίνακα 3.5.3, ας βρούμε το πρώτο δεκατημόριο D_1:

Έχομε λοιπόν:

$$D_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{KN}{10} - F_{i-1}\right) = 4 + \frac{4}{80}\left(\frac{300}{10} - 20\right) = 4{,}5$$

D_1=4,5 ημέρες.

Μπορούμε λοιπόν τώρα να γνωρίζομε ότι, κατά την εξεταζόμενη χρονική περίοδο, η μέση διάρκεια παραμονής των πελατών στο ξενοδοχείο είναι 11 ημέρες, ενώ το 50% των πελατών έχει διάρκεια παραμονής μικρότερη ή ίση με 10 ημέρες και το άλλο 50% μεγαλύτερη ή ίση με 10 ημέρες.

Επίσης, το 25% (Q_1) των πελατών του ξενοδοχείου παρέμεινε 7 ημέρες και κάτω και το υπόλοιπο 75% 7 ημέρες και πάνω. Ακόμη, το 75% (Q_3) των πελατών παρέμεινε 14 ημέρες και κάτω και το υπόλοιπο 25% 14 ημέρες και άνω.

Ακόμη, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι η τιμή, που έχει το τρίτο τεταρτημόριο (Q_3=14 ημέρες) είναι διπλάσια από αυτήν του πρώτου (Q_1=7 ημέρες).

Τέλος, το 10% των πελατών παρέμεινε 4,5 ημέρες και κάτω, ενώ το υπόλοιπο 90% 4,5 ημέρες και άνω.

Η πληροφόρηση που αντλήσαμε μπορεί να γίνει και περισσότερη, αν βρούμε και άλλα δεκατημόρια.

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΕΩΣ

3.6 Ανακεφαλαίωση.

1) Τα μέτρα θέσεως ή μέσοι όροι είναι στατιστικές παράμετροι, που καθορίζουν μια τιμή της μεταβλητής που εξετάζομε, γύρω από την οποία τείνουν να συγκεντρωθούν οι παρατηρήσεις μας.

2) Ο μέσος αριθμητικός είναι το πιο σημαντικό και συχνά χρησιμοποιούμενο στην πράξη στατιστικό μέτρο και ορίζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών x_1, x_2, ... x_N που παίρνει μια μεταβλητή x διά του πλήθους των τιμών της.

3) Στην περίπτωση που έχομε αταξινόμητα δεδομένα, ο μέσος αριθμητικός παρίσταται από τον τύπο:

$$\mu = \frac{\Sigma x}{N}$$

4) Για τον υπολογισμό του μέσου αριθμητικού, από πίνακα συχνοτήτων, χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \qquad \text{(άμεσος τρόπος)}$$

και

$$\mu = x_o + \delta\,\frac{\Sigma f\xi}{\Sigma f} \qquad \text{(έμμεσος τρόπος)}$$

5) Η τιμή εκείνη της μεταβλητής, η οποία αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη συχνότητα της εξεταζόμενης κατανομής, ονομάζεται επικρατούσα τιμή ή τύπος.

6) Αν οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή τοποθετηθούν κατ' αύξουσα φυσική τάξη, δηλαδή από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη, τότε η τιμή της μεταβλητής που χωρίζει το σύνολο των τιμών σε δύο ισοπληθείς ομάδες, καλείται διάμεσος τιμή ή πιο απλά διάμεσος.

7) Για τον υπολογισμό της διαμέσου από πίνακα συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_1}\left(\frac{N}{2} - F_{i-1}\right)$$

8) Οι τιμές εκείνες της μεταβλητής, που χωρίζουν το συνολικό αριθμό των τιμών της σε 4 ισοπληθείς ομάδες, λέγονται τεταρτημόρια. Το δεύτερο τεταρτημόριο Q_2 είναι η διάμεσος.

9) Για τον υπολογισμό των τεταρτημορίων από πίνακα συχνοτήτων, χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{4} - F_{i-1}\right)$$

και

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{3N}{4} - F_{i-1}\right)$$

10) Οι τιμές εκείνες της μεταβλητής, που χωρίζουν το συνολικό αριθμό των τιμών της σε 10 ισοπληθείς ομάδες, λέγονται δεκατημόρια.

11) Για τον υπολογισμό των δεκατημορίων από πίνακα συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$D = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{KN}{10} - F_{i-1}\right)$$

3.7 Ερωτήσεις.

1. Τι είναι τα μέτρα θέσεως;
2. Τι είναι ο μέσος αριθμητικός;
3. Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού του μέσου αριθμητικού από πίνακα συχνοτήτων με τον άμεσο τρόπο;
4. Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού του μέσου αριθμητικού με τον έμμεσο τρόπο;
5. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μέσου αριθμητικού;
6. Τι γνωρίζετε για τη διάμεσο τιμή;

7. Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού της διαμέσου, όταν έχομε ομαδοποιημένες κατά τάξεις παρατηρήσεις;
8. Τι είναι τα τεταρτημόρια;
9. Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού των τεταρτημορίων, όταν έχομε ομαδοποιημένες κατά τάξεις παρατηρήσεις;
10. Τι είναι τα δεκατημόρια;
11. Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού του δεκατημορίου όταν έχομε ομαδοποιημένες κατά τάξεις παρατηρήσεις;
12. Με συντομία αναφέρατε ό,τι γνωρίζετε για τη σημασία των μέτρων θέσεως για τις επιχειρήσεις.

3.8 Ασκήσεις.

*1. Οι ετήσιες πωλήσεις σε εκατ. δρχ. μιας ομάδας 7 εμπορικών επιχειρήσεων ήταν:
35, 30, 25, 20, 20, 35, 40.
Να βρεθεί το μέσο και το διάμεσο ετήσιο ύψος πωλήσεων.

*2. Η βαθμολογία 11 σπουδαστών στις εξετάσεις του μαθήματος Στατιστική Επιχειρήσεων είναι:
2, 5, 6, 3, 2, 7, 7, 6, 7, 8, 9
Να βρεθούν: α) Η μέση και η διάμεση βαθμολογία και β) η επικρατούσα τιμή.

*3. Τα ετήσια κέρδη σε εκατ. δρχ. μιας ομάδας 10 βιομηχανικών επιχειρήσεων ήταν:
10, 15, 25, 25, 20, 10, 15, 20, 25, 25.
Να βρεθούν: α) Το μέσο και το διάμεσο ύψος ετησίων κερδών και β) η επικρατούσα τιμή.

*4. Οι ηλικίες των υπαλλήλων ενός εμπορικού καταστήματος είναι:
25, 22, 20, 20, 23, 25, 25, 30, 35, 40.
Να βρεθούν: α) Η μέση και η διάμεση ηλικία και β) το πρώτο τεταρτημόριο.

*5. Οι μηνιαίες αποδοχές των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως σε χιλιάδες δρχ. είναι 210, 220, 200, 180, 150, 150, 160, 180, 200, 250, 260.
Να βρεθεί: α) Το ύψος του μέσου μηνιαίου μισθού και του διάμεσου μισθού και β) το πρώτο τεταρτημόριο.

*6. Ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως είναι 250 χιλιάδες δρχ. Αν ο μισθός κάθε υπαλλήλου αυξηθεί κατά 30 χιλιάδες δρχ., ποια μεταβολή θα επέλθει στο μέσο μηνιαίο μισθό;

*7. Ο μέσος μηνιαίος μισθός των εργαζομένων σε μια βιομηχανική επιχείρηση είναι 200 χιλιάδες δρχ. Αν αυξηθούν οι μισθοί όλων των εργαζομένων κατά 10%

ποια μεταβολή θα επέλθει στο μέσο μηνιαίο μισθό;

**8. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τον αριθμό ωρών υπερωριακής απασχολήσεως, που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου, από τους εργάτες μιας βιομηχανίας.

Ώρες (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Εργάτες (f)	5	5	10	15	15	20	15	10	10	10	5

Ζητείται να βρεθούν και να ερμηνευθούν: α) Ο μέσος αριθμητικός. β) Η διάμεσος. γ) Το πρώτο τεταρτημόριο.

**9. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις ημέρες απουσίας (x) των εργαζομένων μιας επιχειρήσεως, κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου:

Ημέρες	Εργαζόμενοι f
0- 4	12
4- 8	6
8-12	5
12-16	3
16-20	2
20-24	1
24-28	1

Ζητείται να βρεθούν και να ερμηνευθούν:
α) Ο μέσος αριθμητικός με τον άμεσο και τον έμμεσο τρόπο και β) η διάμεσος.

**10. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη βαθμολογία που πήρε στις εξετάσεις του μαθήματος της Στατιστικής μια ομάδα 100 σπουδαστών:

Βαθμός x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σπουδαστές f	5	3	5	2	20	20	25	10	5	5

Να υπολογισθούν: α) Η μέση βαθμολογία. β) Η διάμεση βαθμολογία. γ) Η επικρατούσα τιμή.

**11. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τα έσοδα από πωλήσεις σε εκατομ. δρχ. μιας ομάδας 100 εμπορικών επιχειρήσεων, κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου:

Έσοδα	Επιχειρήσεις f
0- 10	4
10- 20	11
20- 30	12
30- 40	13
40- 50	25
50- 60	15
60- 70	8
70- 80	7
80- 90	3
90-100	2

Ζητούνται:
α) Το μέσο ύψος εσόδων με τον άμεσο και έμμεσο τρόπο και β) το διάμεσο ύψος εσόδων.

**12. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ετήσια κέρδη σε εκατομ. δρχ. 50 εμπορικών επιχειρήσεων:

Κέρδη	Αριθμός επιχειρήσεων
0- 20	2
20- 40	2
40- 60	4
60- 80	6
80-100	10
100-120	9
120-140	8
140-160	5
160-180	2
180-200	2

Υπολογίστε: α) Το διάμεσο ύψος κερδών και β) το 1ο και το 3ο τεταρτημόριο.

**13. Από τη μελέτη των ισολογισμών 100 επιχειρήσεων προέκυψε ο παρακάτω πίνακας, που δείχνει το ύψος των προφορικών απαιτήσεων — πελάτες και χρεώστες — αυτών των επιχειρήσεων σε εκατομ. δρχ.

Απαιτήσεις	Επιχειρήσεις f
0-100	5
100-200	5
200-300	10
300-400	20
400-500	30
500-600	15
600-700	10
700-800	5

Να υπολογισθούν: α) Το μέσο ύψος των προφορικών απαιτήσεων και β) το διάμεσο ύψος των προφορικών απαιτήσεων.

**14. Οι μηνιαίες αποδοχές (μισθοί) των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως σε χιλιάδες δρχ. περιέχονται στον παρακάτω πίνακα:

Αποδοχές	Υπάλληλοι
140-160	10
160-180	20
180-200	20
200-220	30
220-240	25
240-260	10
260-280	3
280-300	2

Να υπολογισθούν και να ερμηνευθούν: α) Ο μέσος μισθός και β) ο διάμεσος μισθός.

**15. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ετήσια έξοδα πληρωμής σε χιλιάδες δρχ. λογαριασμών Ο.Τ.Ε. των 1.200 νοικοκυριών μιας κωμοπόλεως:

Τηλεφωνικά έξοδα	Αριθμός νοικοκυριών
0- 20	100
20- 40	200
40- 60	250
60- 80	250
80-100	200
100-120	100
120-140	60
140-160	20
160-180	10
180-200	10

Να βρεθούν και να ερμηνευθούν: α) Η διάμεσος και β) το 1ο και το 3ο τεταρτημόριο.

**16. Από τη μελέτη ισολογισμών ομάδας 100 ομοειδών επιχειρήσεων, προέκυψε ο παρακάτω πίνακας, που δείχνει τις προφορικές τους απαιτήσεις σε εκατομ. δρχ. από πωλήσεις εμπορευμάτων (πελάτες).

Απαιτήσεις	Αριθμός επιχειρήσεων
0-10	5
10-20	10
20-30	15
30-40	25
40-50	30
50-60	10
60-70	5

Να υπολογισθούν: α) Το διάμεσο ύψος απαιτήσεων και β) το 1ο και το 3ο τεταρτημόριο.

**17. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ετήσια έξοδα πληρωμής λογαριασμών καταναλώσεως ηλεκτρικού ρεύματος σε χιλιάδες δρχ. μιας ομάδας 100 νοικοκυριών:

Έξοδα	Αριθμός νοικοκυριών
40- 60	5
60- 80	10
80-100	10
100-120	15
120-140	20
140-160	20
160-180	10
180-200	5
200-220	5

Να υπολογισθούν και να ερμηνευθούν: α) Ο μέσος αριθμητικός και β) η διάμεσος.

***18. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ετήσια διαφημιστικά έξοδα των 100 πρώτων σε πωλήσεις εμπορικών επιχειρήσεων μιας πόλεως σε εκατομ. δρχ.:

Έξοδα διαφημίσεως	Αριθμός επιχειρήσεων
0- 20	2
20- 40	5
40- 60	10
60- 80	15
80-100	30
100-120	25
120-140	10
140-160	3

Να βρεθούν και να ερμηνευθούν: α) Ο μέσος αριθμητικός. β) Η διάμεσος. γ) Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. δ) Το πρώτο δεκατημόριο.

***19. Οι μηνιαίες αποδοχές των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως σε χιλιάδες δρχ. περιέχονται στον παρακάτω πίνακα:

Μισθοί	Αριθμός υπαλλήλων
140-160	3
160-180	10
180-200	15
200-220	25
220-240	25
240-260	17
260-280	3
280-300	2

Να βρεθούν και να ερμηνευθούν: α) Ο μέσος αριθμητικός με τον έμμεσο τρόπο. β) Η διάμεσος. γ) Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. δ) Το πρώτο δεκατημόριο.

***20. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ύψη των πωλήσεων σε εκατομ. δρχ., που έγιναν από τους περιφερειακούς πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου:

Πωλήσεις	Αριθμός πωλητών
0- 5	1
5-10	2
10-15	3
15-20	10
20-25	8
25-30	4
30-35	2

Να βρεθούν και να ερμηνευθούν: α) Ο μέσος αριθμητικός. β) Η διάμεσος γ) Το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. δ) Το ένατο δεκατημόριο.

***21. Από τους ισολογισμούς 40 επιχειρήσεων πήραμε τα παρακάτω στοιχεία, που είναι οι οφειλές (υποχρεώσεις) αυτών των επιχειρήσεων στους προμηθευτές τους, σε εκατομ. δρχ.: 2, 4, 3, 7, 18, 16, 13, 62, 66, 68, 68, 74, 76, 76, 77, 51, 52, 54, 54, 56, 58, 22, 26, 26, 28, 32, 32, 33, 34, 37, 38, 38, 42, 44, 46, 48, 48, 48, 49, 49.

Ζητούνται:

α) Να ομαδοποιηθούν τα παραπάνω δεδομένα σε τάξεις ίσου πλάτους. β) Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή. γ) Να υπολογισθεί ο μέσος αριθμητικός. δ) Η διάμεσος. ε) Το πρώτο τεταρτημόριο και το τρίτο τεταρτημόριο.

***22. Οι μηνιαίες αποδοχές 100 υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως κυμαίνονται μεταξύ 200 και 300 χιλιάδων δρχ. Ακόμη γνωρίζομε ότι:

10 υπάλληλοι αμείβονται με 220 χιλ. δρχ. και κάτω.
30 υπάλληλοι αμείβονται με 240 χιλ. δρχ. και κάτω.
40 υπάλληλοι έχουν μισθούς μεγαλύτερους από 260 χιλ. δρχ.και
10 υπάλληλοι έχουν μισθούς μεγαλύτερους από 280 χιλ. δρχ.

Ζητούνται:

α) Να υπολογισθεί ο μέσος αριθμητικός με τον άμεσο τρόπο. β) Να υπολογισθεί ο μέσος αριθμητικός με τον έμμεσο τρόπο. γ) Η διάμεσος. δ) Το πρώτο τεταρτημόριο και το τρίτο τεταρτημόριο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ - ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Σοφὸν τὸ σαφές, οὐ τὸ μὴ σαφές.

Ευριπίδης, Ορέστης, στ. 397

Κάθε μέρα οι μεγάλες εργασίες των Pascal, Leibniz, Condorcet, Bernoulli, Laplace κ.λπ. δέχονται νέες εφαρμογές που παράγουν ενδιαφέροντα και χρήσιμα αποτελέσματα.

Adolphe Quetelet (1796-1874)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

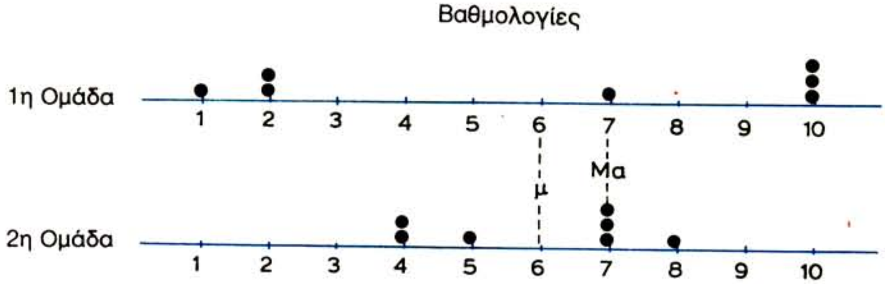
4.1 Γενικά.

Ας υποθέσομε ότι έχομε τις βαθμολογίες δύο ομάδων φοιτητών στη Στατιστική Επιχειρήσεων:

1η ομάδα: 1, 2, 2, 7, 10, 10, 10

2η ομάδα: 4, 4, 5, 7, 7, 7, 8

Οι δύο ομάδες συμβαίνει να έχουν τον ίδιο μέσο αριθμητικό μ=6 και επίσης την ίδια διάμεσο Μ=7. Παρατηρούντες, όμως, πιο προσεκτικά τις βαθμολογίες των δύο ομάδων, βλέπομε ότι η βαθμολογία των σπουδαστών της δεύτερης ομάδας, που κυμαίνεται από 4 μέχρι 8, παρουσιάζει καλύτερη ομοιογένεια από αυτή της πρώτης που κυμαίνεται από 1 μέχρι 10. Πιο συγκεκριμένα, η βαθμολογία της δεύτερης ομάδας είναι λιγότερο «απλωμένη», λιγότερο διεσπαρμένη, από αυτήν της πρώτης ομάδας.



Είναι λοιπόν φανερό ότι για να μπορούμε να εξάγομε αξιόπιστα συμπεράσματα από τη μελέτη μιας σειράς δεδομένων και για να μπορούμε επίσης να συγκρίνομε ασφαλώς με μια άλλη σειρά δεδομένων, τα μέχρι τώρα στατιστικά μέτρα (μέτρα θέσεως) που γνωρίσαμε, δεν επαρκούν. Θα πρέπει να γνωρίζομε επί πλέον και το βαθμό διασποράς των δεδομένων μας γύρω από κάποιο μέτρο θέσεως. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε τα ***μέτρα διασποράς*** (measures of dispersion).

Τα μέτρα διασποράς, με τα οποία εμείς θα ασχοληθούμε στο παρόν κεφάλαιο, είναι:

α) Το εύρος μεταβολής.

β) Η μέση απόκλιση.

γ) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση και

δ) ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

Το πιο απλό μέτρο διασποράς είναι το ***εύρος*** (range) ***μεταβολής,*** που ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη και χαμηλότερη τιμή των δεδομένων μας. Στο παράδειγμά μας, το εύρος μεταβολής για την 1η ομάδα είναι: $10-1=9$ και για τη 2η είναι: $8-4=4$.

Το μειονέκτημα του εύρους μεταβολής είναι ότι εξαρτάται αποκλειστικά από τις ακραίες τιμές της εξεταζόμενης μεταβλητής.

Όμως χρησιμοποιείται και από τους οικονομολόγους σ' αρκετές περιπτώσεις, π.χ. στο χρηματιστήριο για τις τιμές των μετοχών, στη μελέτη του εύρους (ανοίγματος) μεταξύ κατωτάτων και ανωτάτων μισθών κ.ά.

4.2 Μέση απόκλιση.

Άλλο μέτρο διασποράς είναι επίσης ***ο μέσος αριθμητικός των απολύτων διαφορών (αποκλίσεων) των τιμών που παίρνει μια μεταβλητή από το μέσο αριθμητικό της μ και ονομάζεται μέση απόκλιση (Μ.Α.)*** (mean deviation). Δίνεται από τον τύπο:

$$\text{Μ.Α.} = \frac{\Sigma\left|x-\mu\right|}{N} \qquad (4.1)$$

όπου Ν ο αριθμός των παρατηρήσεων.

Αν, π.χ., η x παίρνει τις τιμές 1, 3, 5, 7, 9 τότε έχομε

$$\mu = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = 5$$

και

$$\text{Μ.Α.} = \frac{\Sigma\left|x-\mu\right|}{N} = \frac{\left|1-5\right| + \left|3-5\right| + \left|5-5\right| + \left|7-5\right| + \left|9-5\right|}{5}$$

δηλαδή

$$\text{Μ.Α.} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Όσο μικρότερο είναι το αποτέλεσμα που καταλήγομε, τόσο πιο κοντά γύρω από το μέσο αριθμητικό μ βρίσκονται οι παρατηρήσεις μας, που σημαίνει ότι τόσο πιο αντιπροσωπευτικός και πιο αξιόπιστος είναι ο μέσος αριθμητικός των παρατηρήσεών μας. Χρησιμοποιούμε δε το $\Sigma\left|x-\mu\right|$ επειδή το $\Sigma\,(x-\mu)$ ισούται με μηδέν.

Όμως, θα πρέπει να πούμε ότι η Μ.Α. μειονεκτεί στο ότι δεν προσφέρεται για εύκολους αλγεβρικούς υπολογισμούς, λόγω των απολύτων τιμών και γι' αυτό συνήθως χρησιμοποιούμε άλλα μέτρα διασποράς, τα οποία παρουσιάζομε αμέσως παρακάτω.

4.3 Διακύμανση και τυπική απόκλιση.

Τα πλέον συχνά χρησιμοποιούμενα μέτρα διασποράς είναι η ***διακύμανση*** και η

τυπική απόκλιση (variance and standard deviation).

Η διακύμανση είναι ο μέσος αριθμητικός των τετραγώνων των διαφορών (αποκλίσεων) των τιμών μιας μεταβλητής από το μέσο αριθμητικό της.

Η διακύμανση συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα σ στο τετράγωνο ***(σ^2)*** όταν εξετάζομε όλο τον πληθυσμό και με ***s^2,*** όταν εξετάζομε δείγμα του. Δίνεται δε από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\,(x-\mu)^2}{N} \qquad (4.2)$$

Ενώ όταν πρόκειται για δείγμα έχομε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu-1}\,\Sigma\,(x-\bar{x})^2 \qquad (4.3)$$

Επειδή η διακύμανση εκφράζεται μέσω του τετραγώνου της μεταβλητής x που εξετάζομε (αν π.χ. οι τιμές της x εκφράζονται σε μέτρα, η σ^2 εκφράζεται σε μέτρα στο τετράγωνο), γι' αυτό παίρνουμε τη ***θετική τετραγωνική ρίζα της διακυμάνσεως που ονομάζεται τυπική απόκλιση*** και η οποία εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μετρήσεως με τις οποίες εκφράζονται και οι τιμές της μεταβλητής x. Η τυπική απόκλιση επομένως ορίζεται από τον τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\mu)^2}{N}} \qquad (4.4)$$

Όσο μικρότερες είναι οι τιμές της διακυμάνσεως και της τυπικής αποκλίσεως, τόσο πιο συγκεντρωμένες γύρω από το μέσο αριθμητικό μ βρίσκονται οι τιμές της μεταβλητής x.

Επίσης είναι φανερό ότι οι τιμές της σ κυμαίνονται μεταξύ 0 και ∞

Στην πράξη, χάριν ευκολίας των υπολογισμών, χρησιμοποιούμε συχνά τους τύπους:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \mu^2 \qquad (4.5)$$

και

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \mu^2} \qquad (4.6)$$

Έτσι, ***για την 1η ομάδα φοιτητών*** του παραδείγματος της παραγράφου. 4.1, έχομε:

x: 1, 2, 2, 7, 10, 10, 10 και μ=6

x^2: 1, 4, 4, 49, 100, 100, 100 και Σx^2= 358

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\Sigma x^2}{N} - \mu^2 = \frac{358}{7} - 6^2 = \mathbf{15{,}142}$$

και $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15{,}142} \simeq \mathbf{3{,}89}$

Για δε τη 2η ομάδα έχομε:

x: 4, 4, 5, 7, 7, 7, 8, x^2= 16, 16, 25, 49, 49, 49, 64 και $\Sigma x^2=268$

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\Sigma x^2}{N} - \mu^2 = \frac{268}{7} - 36 = \mathbf{2{,}285}$$

και $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2{,}285} \simeq \mathbf{1{,}51}$

Παρατηρούμε πόσο πιο μικρή σ^2 και σ έχει η 2η ομάδα, οι βαθμοί της οποίας είναι πολύ πιο συγκεντρωμένοι γύρω από το μέσο αριθμητικό, συγκριτικά με την 1η ομάδα.

4.4 Υπολογισμός διακυμάνσεως από πίνακα συχνοτήτων.

Στην περίπτωση που τα δεδομένα μας είναι ταξινομημένα σε κατανομή συχνοτήτων, η διακύμανση δίνεται από τους τύπους:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f\,(x - \mu)^2}{N} \tag{4.7}$$

ή

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)^2 \tag{4.8}$$

ή

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \mu^2 \tag{4.9}$$

Παράδειγμα:

Ο πίνακας 4.4.1 δείχνει τις τακτικές μηνιαίες αποδοχές σε δεκάδες χιλιάδες δρχ. 20 οικονομικών στελεχών μιας εταιρείας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4.1

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών			
Αποδοχές (1)	f (2)	x (3)	fx (4)	x^2 (5)	fx^2 (6)
20-30	1	25	25	625	625
30-40	4	35	140	1225	4900
40-50	8	45	360	2025	16200
50-60	5	55	275	3025	15125
60-70	2	65	130	4225	8450
	Σf = N = 20		Σfx=930		Σfx^2=45.300

Να υπολογισθούν η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Λύση:

Τα βήματα που ακολουθούμε για τον υπολογισμό της διακυμάνσεως είναι:

Βήμα Ι. Βρίσκομε το μέσο (κεντρικό όρο) κάθε τάξεως και έτσι δημιουργούμε τη στήλη 3 (x). Κατόπιν πολλαπλασιάζομε κάθε τιμή της στήλης 2 επί την αντίστοιχη της στήλης 3 και έτσι δημιουργούμε τη στήλη 4 (fx).

Βήμα ΙΙ. Υψώνομε κάθε τιμή της στήλης 3 στο τετράγωνο και τη γράφομε στην αντίστοιχη θέση της στήλης 5 (x^2). Κατόπιν πολλαπλασιάζομε τις τιμές της στήλης 2 επί τις αντίστοιχες της στήλης 5 και έτσι δημιουργούμε τη στήλη 6 (fx^2).

Βήμα ΙΙΙ. Αθροίζομε τις τιμές των στηλών 2 (f), 4 (fx) και 6 (fx^2) και βρίσκομε τα $\Sigma f = N = 20$, $\Sigma fx = 930$ και $\Sigma fx^2 = 45.300$.

Βήμα IV. Αντικαθιστούμε τα υπολογισθέντα αθροίσματα στον τύπο (4.8) και βρίσκομε τη διακύμανση

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma fx^2}{N} \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2 = \frac{45.300}{20} - \left(\frac{930}{20}\right)^2 = 102,75$$

και την

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{102,75} = 101\ 136$$

Υπενθυμίζομε ότι η τυπική απόκλιση σ εκφράζεται στις ίδιες μονάδες μετρήσεως που εκφράζεται και η μεταβλητή x και επειδή εδώ οι μηνιαίες αποδοχές ήταν σε δεκάδες χιλιάδες δρχ., γι' αυτό και $\sigma = 10,136$ δεκάδες χιλιάδες δρχ. ή $\sigma = 101360$ δρχ.

4.5 Έμμεσος τρόπος υπολογισμού διακυμάνσεως.

Όταν οι τιμές της μεταβλητής x είναι αρκετά μεγάλες, τότε για να αποφύγομε τους κοπιαστικούς υπολογισμούς εφαρμόζομε τον έμμεσο τρόπο υπολογισμού της σ^2.

Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε μέθοδο ανάλογη με αυτή που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του μέσου αριθμητικού. Αφαιρούμε δηλαδή, από όλες τις τιμές της x ένα αριθμό x_o και στη συνέχεια τις νέες τιμές που προέκυψαν μπορούμε να τις διαιρέσομε ή να τις πολλαπλασιάσομε με τον αριθμό δ. Έτσι προκύπτει η νέα μεταβλητή, η $\xi = x - x_o/\delta$ και ο τύπος υπολογισμού της διακυμάνσεως με τον έμμεσο τρόπο είναι:

$$\sigma^2 = \delta^2 \left[\frac{\Sigma f\xi^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f\xi}{N}\right)^2 \right] \tag{4.10}$$

Με βάση πάλι τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, που αφορούσε στις αμοιβές των 20 οικονομικών στελεχών μιας εταιρείας, θα υπολογίσομε ξανά τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση, ακολουθώντας τώρα τον έμμεσο τρόπο (πίνακας 4.5.1).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5.1

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών					
Μισθοί (1)	f (2)	x (3)	x-45 (4)	$\xi = \frac{x-45}{10}$ (5)	ξ^2 (6)	$f\xi$ (7)	$f\xi^2$ (8)
20-30	1	25	−20	−2	4	−2	4
30-40	4	35	−10	−1	1	−4	4
40-50	8	45	0	0	0	0	0
50-60	5	55	10	1	1	5	5
60-70	2	65	20	2	4	4	8
	$\Sigma f=20$					$\Sigma f\xi=3$	$\Sigma f\xi^2=21$

Βρίσκοντας το μέσο κάθε τάξεως δημιουργούμε τη στήλη (3). Κατόπιν, από όλες τις τιμές της στήλης (3) αφαιρούμε το $x_0=45$ και έτσι, προκύπτει η στήλη (4) $(x-45)$. Στη συνέχεια κάθε τιμή της στήλης (4) τη διαιρούμε διά του 10, οπότε προκύπτει η στήλη (5) $(\xi=x-45/10)$, δηλαδή μια νέα μεταβλητή, η ξ. Οι υπόλοιπες στήλες του πίνακα γίνονται κατά τα γνωστά, όπως εργασθήκαμε στα 4 βήματα του προηγούμενου παραδείγματος, με μόνη διαφορά ότι έχομε τώρα τη μεταβλητή ξ αντί της x.

Τέλος, αντικαθιστούμε τα αθροίσματα $\Sigma f=N=20$, $\Sigma f\xi=3$, $\Sigma f\xi^2=21$ καθώς και το $\delta=10$ στον τύπο 4.10.

Δηλαδή:

$$\sigma^2 = \delta^2 \left[\frac{\Sigma f\xi^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f\xi}{N} \right)^2 \right]$$

$$\sigma^2 = 100 \left\{ \left[\frac{21}{20} \right] - \left(\frac{3}{20} \right)^2 \right\} = 102{,}75$$

και

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{102{,}75} = 10{,}136$$

σε δεκάδες χιλιάδες δρχ.

Βλέπομε λοιπόν πόσο πολύ μας βοηθεί ο έμμεσος τρόπος στον υπολογισμό της διακυμάνσεως σ^2, αφού έτσι αποφεύγομε τυχόν λάθη οφειλόμενα σε δύσκολους υπολογισμούς.

Ιδιότητες της διακυμάνσεως.

Ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες της σ^2 είναι:

1) Αν έχομε $x_1=x_2=...=x_v=\alpha$, τότε $\sigma^2=0$.

2) Αν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής προσθέσομε (ή αφαιρέσομε) μια σταθερή ποσότητα α, τότε η σ^2 και η σ παραμένουν αμετάβλητες.

3) Αν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής πολλαπλασιασθούν (ή διαιρεθούν) με μια σταθερή ποσότητα λ, τότε η σ^2 πολλαπλασιάζεται (ή διαιρείται) με λ^2 και η σ πολλαπλασιάζεται (ή διαιρείται) με λ.

4.6 Συντελεστής μεταβλητικότητας.

Ας υποθέσομε ότι στο παράδειγμα της παραγράφου 4.4 εξετάσαμε και τις μηνιαίες αποδοχές των απλών, μη ειδικευμένων υπαλλήλων, της επιχειρήσεως και βρήκαμε ότι ο μέσος μισθός τους είναι $\mu=250$ χιλιάδες δρχ. και η τυπική απόκλιση $\sigma=101,36$ χιλιάδες δρχ.

Ο δε μέσος μισθός των 20 οικονομικών στελεχών που εξετάσαμε ήταν $\mu=465$ χιλιάδες δρχ. και η σ, όπως βρήκαμε, ήταν $\sigma=101,36$ χιλιάδες δρχ. Όπως αντιλαμβανόμαστε είναι λάθος να πούμε ότι οι αποδοχές των 2 ομάδων εργαζομένων έχουν τον ίδιο βαθμό διασποράς, επειδή οι τυπικές αποκλίσεις τους είναι ίσες (101,36 χιλ. δρχ.). Και τούτο, διότι η βαρύτητα που έχει η $\sigma=101,36$ χιλιάδες δρχ. για την ομάδα των απλών υπαλλήλων, όπου ο μέσος μισθός είναι 250 χιλ. δρχ. είναι διαφορετική από αυτή των οικονομικών στελεχών, όπου ο μέσος μισθός είναι 465 χιλιάδες δρχ. Ένα μέτρο, το οποίο μας βοηθά να αντιμετωπίσομε τέτοιες περιπτώσεις και γενικά να μπορούμε να προβαίνομε σε συγκρίσεις, είναι ο ***συντελεστής μεταβλητικότητας (CV)*** (έχει προταθεί από τον K. Pearson), που είναι ένας καθαρός αριθμός, δηλαδή απαλλαγμένος από τις μονάδες μετρήσεως της μεταβλητής.

Ο συντελεστής μεταβλητικότητας C.V. (coefficient of variation) ***ορίζεται ως ο λόγος της τυπικής αποκλίσεως σ διά του μέσου αριθμητικού μ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις %.***

Δηλαδή,

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 \qquad (4.11)$$

Έτσι, ***για την ομάδα των μη ειδικευμένων υπαλλήλων έχομε:***

$$CV = \frac{101,36}{250} \times 100 = 40,54\%$$

Για δε την ομάδα των οικονομικών στελεχών, έχομε:

$$CV = \frac{101,36}{465} \times 100 = 21,79\%$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στην ομάδα των οικονομικών στελεχών υπάρχει μεγαλύτερη ομοιογένεια στις αμοιβές τους απ' ό,τι υπάρχει στην ομάδα των απλών μη ειδικευμένων υπαλλήλων.

4.7 Τα μέτρα διασποράς στην επιχείρηση.

Από όσα αναφέραμε μέχρι τώρα για τα μέτρα διασποράς, προκύπτει το συμπέρασμα ότι για να έχομε μια πλήρη και ασφαλή εικόνα ενός συνόλου δεδομένων που μελετούμε, θα πρέπει οι γνώσεις μας για τα μέτρα θέσεως να συμπληρώνονται με αυτές των μέτρων διασποράς. Αν για παράδειγμα ένας οικονομολόγος, ο οποίος έχει αναλάβει να κάνει κάποια μελέτη για λογαριασμό μιας επιχειρήσεως, παρατηρήσει ότι η διασπορά των δεδομένων που εξετάζει γύρω από το μέσο αριθμητικό τους είναι μεγάλη, τότε θα πρέπει αυτές τις πληροφορίες που προέρχονται από το μέσο αριθμητικό, να τις εξετάσει με μεγάλη προσοχή και να προβληματισθεί πάρα πολύ, ως προς τη λήψη κάποιας αποφάσεως.

Τα μέτρα διασποράς αποτελούν, και για τις οικονομικές και επιχειρηματικές εφαρμογές, σημαντικό συμπλήρωμα των μελετών που κάνομε για να γνωρίζομε το βαθμό αξιοπιστίας και αντιπροσωπευτικότητας των μέτρων θέσεως. Με τη βοήθεια λοιπόν των μέτρων διασποράς, επιτυγχάνομε στο χώρο των επιχειρήσεων να έχομε πληρέστερη εικόνα της καταστάσεως που εξετάζομε και συνεπώς να προχωρούμε στην κατά το δυνατόν ασφαλέστερη λήψη ορθών επιχειρηματικών αποφάσεων.

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι δυνατότητες εφαρμογής των μέτρων διασποράς στο πεδίο των επιχειρηματικών εφαρμογών, αμέσως παρακάτω, παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα σχετικό με το χώρο των επιχειρήσεων.

Επιχειρηματική εφαρμογή.

Η επιχείρηση «Αθηναϊκή Εμπορική Άριστον–3Α» έχει 18 περιφερειακούς πωλητές υπεύθυνους για την προώθηση των πωλήσεών της σε 18, κατά το δυνατόν ισοδύναμα χωρισμένες από πλευράς πωλήσεων, περιοχές. Η προηγούμενη όμως οικονομική χρήση έκλεισε με ένα άνοιγμα πωλήσεων μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου σε πωλήσεις περιφερειακού πωλητή, της τάξεως των 28 εκατ. δρχ., το δε μέσο ύψος πωλήσεων και των 18 πωλητών ήταν $\mu_1 = 37$ εκατ. δρχ. και η τυπική απόκλιση $\sigma_1 = 4{,}8$ εκατ. δρχ.

Η επιχείρηση όμως φέτος, αφού αναδιοργανώθηκε στη βάση των κανόνων της σύγχρονης οργανώσεως και διοικήσεως επιχειρήσεων, ακολουθώντας νέα τακτική στη στρατηγική έρευνας και κατακτήσεως της αγοράς, έκλεισε τη χρήση της παρουσιάζοντας τα παρακάτω ύψη πωλήσεων των 18 περιφερειακών πωλητών της σε εκατ. δρχ.

42, 45, 46, 47, 49, 50, 50, 50, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 57, 58, 59, 62.

Ας δούμε ποια συμπεράσματα μπορεί να βγάλει ο γενικός διευθυντής της επιχειρήσεως, σχετικά με τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά την αναδιοργάνωσή της.

Ας ξεκινήσομε πρώτα να υπολογίσομε το νέο μέσο ύψος πωλήσεων μ_2 των 18 πωλητών (πιν. 4.7.1).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.7.1

Πωλήσεις	f	x	x^2	fx	fx^2
40-44	1	42	1764	42	1764
44-48	3	46	2116	138	6348
48-52	5	50	2500	250	12500
52-56	5	54	2916	270	14580
56-60	3	58	3364	174	10092
60-64	1	62	3844	62	3844
	$\Sigma f = N = 18$			$\Sigma fx = 936$	$\Sigma fx^2 = 49128$

Το νέο μέσο ύψος πωλήσεων των 18 πωλητών είναι:

$$\mu_2 = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{936}{18} = 52 \text{ εκατ. δρχ.}$$

Η δε νέα τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \mu^2} = \sqrt{\frac{49128}{18} - 52^2}$$

και

$$\sigma_2 = 5{,}033 \simeq 5 \text{ εκατ. δρχ.}$$

Το ότι η νέα τυπική απόκλιση $\sigma_2=5$ εκατ. δρχ. είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη $\sigma_1=4{,}8$ εκατ. δρχ., μήπως σημαίνει ότι έχομε τώρα μεγαλύτερη διασπορά στις πωλήσεις που πραγματοποιήθηκαν από τους 18 πωλητές, μετά την αναδιοργάνωση της επιχειρήσεως. Ασφαλώς όχι! Για να βγάλομε ασφαλή συμπεράσματα θα πρέπει να συγκρίνομε τον προηγούμενο συντελεστή μεταβλητικότητας CV_1 με το νέο CV_2.

Έχομε λοιπόν,

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\mu_1}\,100 = \frac{4{,}8}{37}\,100 = 12{,}972\% \simeq 13\%$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\mu_2}\,100 = \frac{5}{52}\,100 = 9{,}615\%$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η νέα εικόνα που παρουσιάζει η επιχείρηση είναι καλύτερη από την προηγούμενη, διότι έχομε, κατ' αρχήν, το σημαντικό γεγονός της αυξήσεως των πωλήσεων – το μέσο ύψος πωλήσεων αυξήθηκε από $\mu_1=37$ εκατ. δρχ. σε $\mu_2=52$ εκατ. δραχμές. Επίσης, οι πωλήσεις τώρα παρουσιάζουν σχετικά μικρότερη διασπορά, δηλαδή έχομε μεγαλύτερη ομοιογένεια από πριν, αφού $cv_2=9{,}615\% < cv_1=13\%$. Τέλος, θα μπορούσαμε ακόμη να παρατηρήσομε ότι είχαμε και μια μείωση του εύρους μεταβολής από 28 εκατ. δραχμές σε 20 εκατ. δρχ. (62 – 42 = 20).

4.8 Ανακεφαλαίωση.

1) Τα μέτρα διασποράς μας χρησιμεύουν για να γνωρίζομε το βαθμό διασποράς των παρατηρήσεών μας, γύρω από κάποιο μέτρο θέσεως. Τα μέτρα διασποράς που εμείς εξετάσαμε ήταν: Το εύρος μεταβολής, η μέση απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση καθώς και ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

2) Το εύρος μεταβολής ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη και χαμηλότερη τιμή των παρατηρήσεών μας. Μειονεκτεί στο ότι εξαρτάται αποκλειστικά από τις ακραίες τιμές της εξεταζόμενης μεταβλητής.

3) Μέση απόκλιση (Μ.Α.) ονομάζεται ο μέσος αριθμητικός των απολύτων διαφορών των τιμών που παίρνει μια μεταβλητή από το μέσο αριθμητικό της μ. Η μέση απόκλιση μειονεκτεί στο ότι δεν προσφέρεται για εύκολους αλγεβρικούς υπολογισμούς.

4) Η διακύμανση ορίζεται ως ο μέσος αριθμητικός των τετραγώνων των διαφορών των τιμών μιας μεταβλητής, από το μέσο αριθμητικό της. Η διακύμανση, όταν εξετάζομε όλο τον πληθυσμό συμβολίζεται με σ^2 και όταν εξετάζομε δείγμα του πληθυσμού με s^2.

5) Τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακυμάνσεως και εκφράζεται στις ίδιες μονάδες που εκφράζονται και οι τιμές της μεταβλητής x. Όσο μικρότερες είναι οι τιμές της διακυμάνσεως και της τυπικής αποκλίσεως, τόσο πιο συγκεντρωμένες γύρω από το μέσο μ, βρίσκονται οι τιμές της μεταβλητής x.

6) Για τον υπολογισμό της διακυμάνσεως, όταν έχομε αταξινόμητα δεδομένα, χρησιμοποιούμε συνήθως τους τύπους:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (x-\mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \mu^2$$

7) Για τον υπολογισμό της διακυμάνσεως από πίνακα συχνοτήτων, χρησιμοποιούμε συνήθως τους τύπους:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f (x-\mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N} \right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \mu^2$$

8) Στον έμμεσο τρόπο υπολογισμού της διακυμάνσεως χρησιμοποιούμε συνήθως τον τύπο:

$$\sigma^2 = \delta^2 \left[\frac{\Sigma f \xi^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f \xi}{N} \right)^2 \right]$$

όπου

$$\xi = \frac{x - x_0}{\delta}$$

9) Αν έχομε $x_1 = x_2 = \ldots = x_v = \alpha$, τότε $\sigma^2 = 0$.

Αν σ' όλες τις τιμές της x προσθέσομε (ή αφαιρέσομε) μια σταθερή ποσότητα α, τότε η σ^2 παραμένει αμετάβλητη.

Αν όλες οι τιμές της x πολλαπλασιασθούν (ή διαιρεθούν) με μια σταθερή ποσότητα λ, τότε η σ^2 πολλαπλασιάζεται (ή διαιρείται) με λ^2.

10) Ο συντελεστής μεταβλητικότητας (CV) ορίζεται ως ο λόγος της τυπικής αποκλίσεως σ διά του μέσου αριθμητικού μ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις %. Ο CV είναι ένας καθαρός αριθμός

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$$

11) Τα μέτρα διασποράς αποτελούν, και για τις οικονομικές και επιχειρηματικές εφαρμογές, σημαντικό συμπλήρωμα των μελετών που κάνομε για να γνωρίζομε το βαθμό αξιοπιστίας και αντιπροσωπευτικότητας των μέτρων θέσεως.

4.9 Ερωτήσεις.

1. Σε τι μας χρησιμεύουν τα μέτρα διασποράς;
2. Τι είναι εύρος μεταβολής;
3. Ποιο είναι το μειονέκτημα του εύρους μεταβολής;
4. Τι είναι η μέση απόκλιση;
5. Ποιο είναι το μειονέκτημα της μέσης αποκλίσεως;
6. Τι είναι η διακύμανση;
7. Τι είναι η τυπική απόκλιση;
8. Ποιοι είναι οι τύποι που χρησιμοποιούμε συνήθως, στην πράξη, για τον υπολογισμό της διακυμάνσεως, όταν έχομε αταξινόμητα δεδομένα;
9. Ποιοι είναι οι τύποι που χρησιμοποιούμε συνήθως στην πράξη για τον

υπολογισμό της διακυμάνσεως από πίνακα συχνοτήτων;
10. Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού της διακυμάνσεως που συνήθως χρησιμοποιείται, στην πράξη, όταν εφαρμόζεται η έμμεση μέθοδος;
11. Τι είναι ο συντελεστής μεταβλητικότητας και σε τι μας χρησιμεύει;
12. Ο συντελεστής μεταβλητικότητας είναι ένας καθαρός αριθμός ή όχι;
13. Αναφέρατε με συντομία το ρόλο που παίζουν τα μέτρα διασποράς στο χώρο των επιχειρήσεων.

ΦΥΛΛΟ ΑΥΤΟΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΑ ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

1. Η τιμή της μεταβλητής, η οποία χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεών μας σε δύο ισοπληθείς ομάδες, ονομάζεται:
   α) Μέσος αριθμητικός.
   β) Διάμεσος.
   γ) Πρώτο τεταρτημόριο.
   δ) Επικρατούσα τιμή.

2. Η τιμή που παρουσιάζεται περισσότερες φορές σε μια ομάδα στατιστικών στοιχείων, ονομάζεται:
   α) Μέσος αριθμητικός.
   β) Διάμεσος.
   γ) Επικρατούσα τιμή.
   δ) Πρώτο τεταρτημόριο.

3. Το δεύτερο τεταρτημόριο είναι:
   α) Ο μέσος αριθμητικός.
   β) Η διάμεσος.
   γ) Η επικρατούσα τιμή.
   δ) Τίποτα από τα παραπάνω.

4. Ο μέσος αριθμητικός και η διάμεσος:
   α) Έχουν πάντα την ίδια τιμή.
   β) Ποτέ δεν έχουν την ίδια τιμή.
   γ) Μπορεί να έχουν είτε την ίδια είτε διαφορετική τιμή.

5. Το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών που παίρνει μια μεταβλητή x, διά του συνόλου των τιμών της ονομάζεται:
   α) Επικρατούσα τιμή.
   β) Διάμεσος.
   γ) Μέσος αριθμητικός.
   δ) Πρώτο τεταρτημόριο.

6. Στις ίδιες μονάδες που εκφράζονται οι τιμές της μεταβλητής x εκφράζεται και:

α) Η τυπική απόκλιση.
β) Η διακύμανση.
γ) Ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

7. Δεν προσφέρεται για αλγεβρικούς υπολογισμούς:
α) Η διακύμανση.
β) Η τυπική απόκλιση.
γ) Η μέση απόκλιση.
δ) Ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

8. Στα μέτρα θέσεως ανήκουν:
α) Η διάμεσος και ο μέσος αριθμητικός.
β) Η διάμεσος και η διακύμανση.
γ) Η διακύμανση και τυπική απόκλιση.
δ) Το εύρος μεταβολής και η επικρατούσα τιμή.

9. Αν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής πολλαπλασιασθούν επί μια σταθερή ποσότητα λ τότε:
α) Η διακύμανση πολλαπλασιάζεται επί λ.
β) Η διακύμανση πολλαπλασιάζεται επί λ^2.
γ) Η διακύμανση παραμένει αμετάβλητη.

10. Η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα:
α) Της διαμέσου.
β) Της διακυμάνσεως.
γ) Του μέσου αριθμητικού.

11. Η διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης τιμής των δεδομένων μας, δίνεται:
α) Από την επικρατούσα τιμή.
β) Από το εύρος μεταβολής.
γ) Από το συντελεστή μεταβλητικότητας.
δ) Από την τυπική απόκλιση.

12. Ο συντελεστής μεταβλητικότητας δίνεται από το πηλίκο:
α) Της διακυμάνσεως διά του μέσου αριθμητικού.
β) Της διακυμάνσεως διά της τυπικής αποκλίσεως.
γ) Της τυπικής αποκλίσεως διά του μέσου αριθμητικού.
δ) Του μέσου αριθμητικού διά της τυπικής αποκλίσεως.

13. Από τα παρακάτω στατιστικά μέτρα καθαρός αριθμός είναι:
α) Η διακύμανση.
β) Η τυπική απόκλιση.
γ) Ο μέσος αριθμητικός.

δ) Ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

4.10 Ασκήσεις.

*1. Να υπολογισθεί η μέση απόκλιση και το εύρος μεταβολής των παρακάτω παρατηρήσεων της μεταβλητής x:
2, 3, 5, 7, 8

*2. Να υπολογισθεί η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των παρακάτω παρατηρήσεων της μεταβλητής x:
3, 4, 6, 7, 8, 10, 11

*3. Η βαθμολογία μιας ομάδας 7 σπουδαστών σ' ένα τεστ του μαθήματος της λογιστικής είναι:
2, 3, 5, 5, 6, 6, 8
Να υπολογισθούν: α) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση και β) το εύρος μεταβολής.

*4. Οι ημέρες απουσίας μιας ομάδας 7 εργαζομένων κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου ήταν:
1, 2, 3, 3, 4, 6, 8
Να υπολογισθούν: α) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση και β) το εύρος μεταβολής.

*5. Τα χρόνια υπηρεσίας που έχουν 7 εργαζόμενοι σε μια επιχείρηση είναι:
1, 2, 3, 5, 7, 7, 10
Να υπολογισθεί η μέση απόκλιση και η διακύμανση.

*6. Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να βρεθεί η διακύμανση και η τυπική απόκλιση

x	1	3	4	5	7
f	3	4	5	4	2

*7. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το μέγεθος σε τετραγωνικά μέτρα που είχαν 80 εμπορικά καταστήματα ενός εμπορικού δρόμου μιας πόλεως:

Τετραγωνικά μέτρα	Αριθμός
0- 40	5
40- 80	25
80-120	25
120-160	15
160-200	5
200-240	3
240-280	1
280-320	1

Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

*8. Με βάση τις πιο κάτω παρατηρήσεις της μεταβλητής x να βρεθεί ο συντελεστής μεταβλητικότητας CV.
x: 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12.

*9. Να βρεθεί η διακύμανση σ^2 της μεταβλητής x, αν γνωρίζομε ότι CV=40%, Σx=100 και N=20.

**10. Η βαθμολογία (x) 25 σπουδαστών στις εξετάσεις της Στατιστικής είναι:

x	2	3	5	6	7	8	9	10
f	1	2	6	7	4	2	2	1

Να βρεθούν και να ερμηνευθούν:
α) Ο μέσος αριθμητικός.
β) Η διάμεσος.
γ) Το εύρος μεταβολής.
δ) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

**11. Η βαθμολογία που πήραν στις εξετάσεις των μαθηματικών 30 μαθητές είναι:

Βαθμολογία	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
Αριθμός μαθητών	3	5	8	10	4

Να βρεθούν και να ερμηνευθούν:
α) Ο μέσος αριθμητικός.
β) Η διάμεσος.
γ) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

**12. Οι πωλήσεις μιας επιχειρήσεως κατά την 1η και 2η εβδομάδα του μήνα Νοεμβρίου, δίνονται παρακάτω. Τα δεδομένα εκφράζουν χιλιάδες δρχ.
1η εβδομάδα: 100 120 125 100 120 130
2η εβδομάδα: 100 110 120 100 125 140
Να βρεθούν:
α) Το μέσος ύψος πωλήσεων κάθε εβδομάδας.
β) Η τυπική απόκλιση κάθε εβδομάδας.
γ) Να συγκριθούν και να σχολιασθούν τα αποτελέσματα που θα προκύψουν.

**13. Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
f	1	2	4	6	6	5	4	4	3

ζητείται να βρεθούν:

α) Η διακύμανση με τον άμεσο τρόπο.
β) Η διακύμανση με τον έμμεσο τρόπο και
γ) το εύρος μεταβολής.

**14. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων:

Τάξεις	f
0- 20	2
20- 40	3
40- 60	10
60- 80	25
80-100	30
100-120	15
120-140	10
140-160	5

Ζητείται να βρεθούν:

α) Η διακύμανση με τον άμεσο τρόπο.
β) Η διακύμανση με τον έμμεσο τρόπο.
γ) Η τυπική απόκλιση.

**15. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις μηνιαίες αποδοχές 100 υπαλλήλων μιας εταιρείας σε χιλιάδες δρχ.

Μηνιαίες αποδοχές	Αριθμός υπαλλήλων
100-140	5
140-180	5
180-220	10
220-260	20
260-300	25
300-340	20
340-380	10
380-420	5

Ζητείται να υπολογισθούν:

α) Η διακύμανση με τον άμεσο τρόπο.
β) Η διακύμανση με τον έμμεσο τρόπο.
γ) Η τυπική απόκλιση.

**16. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις ετήσιες πωλήσεις σε εκατ. δρχ. 100 εμπορικών επιχειρήσεων.

Ετήσιες πωλήσεις	Αριθμός επιχειρήσεων
0- 40	5
40- 80	5
80-120	15
120-160	15
160-200	20
200-240	20
240-280	10
280-320	10

Ζητείται να υπολογισθούν και να ερμηνευθούν:
α) Ο μέσος αριθμητικός.
β) Η διακύμανση.
γ) Η τυπική απόκλιση.

**17. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα ύψη των ετησίων διαφημιστικών εξόδων σε εκατ. δρχ. που έγιναν από τις 30 πρώτες σε πωλήσεις επιχειρήσεις, ενός εμπορικού κλάδου.

Διαφημιστικά έξοδα	Αριθμός επιχειρήσεων
0 - 20	2
20 - 40	3
40 - 60	8
60 - 80	10
80 - 100	4
100 - 120	2
120 - 140	1

Ζητείται να υπολογισθούν και να ερμηνευθούν:

α) Ο μέσος αριθμητικός.

β) Η διακύμανση.
γ) Η τυπική απόκλιση.

**18. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό ημερών παραμονής 1000 πελατών μιας ξενοδοχειακής Α.Ε. κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου.

Ημέρες παραμονής	Αριθμός πελατών
0- 4	100
4- 8	150
8-12	300
12-16	200
16-20	150
20-24	50
24-28	30
28-32	20

Ζητείται να υπολογισθούν:
α) Η μέση χρονική διάρκεια παραμονής των πελατών.
β) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

***19. Οι μηνιαίες αποδοχές 20 στελεχών μιας επιχειρήσεως σε δεκάδες χιλιάδων δρχ. είναι:

x	25	30	35	40	45	50
f	3	3	6	5	2	1

Ζητείται να υπολογισθούν και να ερμηνευθούν:
α) Ο μέσος αριθμητικός.
β) Η διάμεσος.
γ) Το εύρος μεταβολής.
δ) Η τυπική απόκλιση.
ε) Ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

***20. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις μηνιαίες αποδοχές μιας ομάδας 30 υπαλλήλων σε μια επιχείρηση, σε δεκάδες χιλιάδες δρχ.

Μηνιαίες αποδοχές	Αριθμός υπαλλήλων
20-25	5
25-30	15
30-35	5
35-40	3
40-45	1
45-50	1

Ζητείται:

α) Ποιο είναι το ύψος του μέσου μηνιαίου μισθού.

β) Ποιο είναι το ύψος του μηνιαίου μισθού κάτω από το οποίο βρίσκεται το 50% των εργαζομένων.

γ) Να υπολογισθεί ο συντελεστής μεταβλητικότητας (συγκρίνετε και σχολιάσετε τον ευρεθέντα CV με αυτόν της ασκήσεως 19).

***21. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα ετήσια κέρδη (x) σε εκατ. δρχ. 100 εμπορικών επιχειρήσεων.

x	f
0 - 20	10
20 - 40	15
40 - 60	20
60 - 80	20
80-100	15
100-120	10
120-140	5
140-160	5

Ζητείται να βρεθεί:

α) Το μέσο ετήσιο κέρδος των εξεταζομένων επιχειρήσεων.

β) Το ύψος του ετήσιου κέρδους, άνω του οποίου βρίσκεται το 50% των επιχειρήσεων.

γ) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

δ) Ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

***22. Οι ετήσιες πωλήσεις (x) των 15 καταστημάτων – παραρτημάτων (αλυσίδα καταστημάτων), που έχει μεγάλη εμπορική επιχείρηση, δίνονται σε εκατ. δρχ. από τον παρακάτω πίνακα:

x	50	60	70	80	90	100	110
f	1	2	4	4	2	1	1

Ζητείται να υπολογισθούν:
α) Το μέσο ετήσιο ύψος πωλήσεων των 15 καταστημάτων.
β) Το εύρος μεταβολής.
γ) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.
δ) Ο συντελεστής μεταβλητικότητας.

Επίσης, συγκρίνατε και σχολιάσετε τα αποτελέσματα με άλλη επιχείρηση –αλυσίδας καταστημάτων– του ίδιου εμπορικού κλάδου που παρουσίασε μέσο ετήσιο ύψος πωλήσεων 70 εκατ. δρχ. και τυπική απόκλιση 17.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ - ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Ἀνάγκη διὰ τῶν κοινῶν ποιεῖσθαι τὰς πίστεις καὶ τοὺς λόγους.

(Είναι ανάγκη να προσκομίζομε τις αποδείξεις και τα επιχειρήματα με τρόπο, που να τα καταλαβαίνουν όλοι).

Ἀριστοτέλης, Ρητορική Τέχνη, 1355α, 27

Με τη στατιστική, όπως και ο κάθε οικονομολόγος, μπόρεσα να θεμελιώσω τις θεωρίες μου˙ και τούτο, διότι αυτή (η στατιστική) παρέχει στον οικονομολόγο τα γεγονότα, με τα οποία στηρίζει τις θεωρίες του ή αποδεικνύει αυτές.

Alfred Marchal (1842-1924)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ - ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

5.1 Γενικά.

Στα μέχρι τώρα κεφάλαια, ασχοληθήκαμε με τη μελέτη μιας μεταβλητής, ενός χαρακτηριστικού. Εξετάσαμε π.χ., τις πωλήσεις ενός κλάδου επιχειρήσεων ή εξετάσαμε τις διαφημιστικές δαπάνες κάποιου κλάδου επιχειρήσεων κ.λπ. Όμως, αυτή η χωριστή μελέτη των εξεταζομένων χαρακτηριστικών, δηλαδή των εξεταζομένων μεταβλητών, δεν ικανοποιεί πάντοτε τους οικονομολόγους. Έτσι, συχνά προχωρούμε στην ταυτόχρονη μελέτη δύο ή και περισσοτέρων μεταβλητών, για να εξετάσομε την τυχόν υπάρχουσα ανάμεσά τους σχέση εξαρτήσεως. Μελετάμε π.χ. τις πωλήσεις ενός προϊόντος σε σχέση με τις διαφημιστικές δαπάνες του ή τη ζήτηση ενός αγαθού σε σχέση με την τιμή του κ.λπ.

Στο κεφάλαιο αυτό της παλινδρομήσεως (regression), θα ασχοληθούμε με την από κοινού μελέτη δύο μεταβλητών x και y, προσπαθώντας να βρούμε πώς επηρεάζεται, ενδεχομένως, η μια μεταβλητή y, την οποία θα θεωρούμε εξαρτημένη μεταβλητή (dependent variable) από τη x, την οποία θα θεωρούμε ανεξάρτητη μεταβλητή (independent variable), και η οποία συνηθίζεται να λέγεται και ***ερμηνευτική μεταβλητή.*** Θα προσπαθήσομε, δηλαδή, να δούμε αν υπάρχει κάποιο είδος εξαρτήσεως μεταξύ των x και y και στη συνέχεια θα αναζητήσομε μια σχέση που να περιγράφει, κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο, την υπάρχουσα μεταξύ των δύο μεταβλητών εξάρτηση.

Βέβαια, το ιδεώδες θα ήταν, αν η μεταξύ των δύο μεταβλητών τυχόν υπάρχουσα σχέση ήταν τέτοια, που να μας επιτρέπει να προβλέπομε επακριβώς τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής y από την αντίστοιχη μεταβολή της ανεξάρτητης x, όπως συμβαίνει στα Μαθηματικά, όπου εάν μεταβληθεί π.χ. το μήκος της πλευράς α ενός τετραγώνου, γνωρίζομε επακριβώς τη μεταβολή στο εμβαδόν του Ε ($E=\alpha^2$). Όμως στην οικονομία, συνήθως, αυτό δεν ισχύει.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί επακριβώς η μεταβολή στις δαπάνες διατροφής (y) ενός νοικοκυριού λόγω μεταβολής του εισοδήματός του (x) ή πόσο θα μεταβληθούν τα έσοδα (y) μιας επιχειρήσεως λόγω μεταβολής των διαφημιστικών δαπανών της (x) κ.λπ.

Στις αμέσως επόμενες παραγράφους θα δούμε πώς μπορούμε να προσδιορίσομε μια σχέση εξαρτήσεως μεταξύ των από κοινού εξεταζομένων μεταβλητών x και y, ώστε να μπορούμε να εκτιμήσομε τη μια μεταβλητή (y), με βάση την άλλη μεταβλητή (x). Στο δε επόμενο κεφάλαιο (Συσχέτιση), που αναφέρεται και αυτό στους διμεταβλητούς πληθυσμούς, θα μελετήσομε το πώς μπορεί να μετρηθεί η ένταση της μεταξύ των δύο μεταβλητών τυχόν υπάρχουσας σχέσεως εξαρτήσεως.

Ο όρος παλινδρόμηση (regression) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1877 από τον Άγγλο Sir Francis Galton (1822-1911), ο οποίος μελετώντας την υπάρχουσα σχέση μεταξύ των αναστημάτων των γονέων και των αναστημάτων των παιδιών τους, παρατήρησε ένα είδος επαναφοράς (παλινδρόμησης) των αναστημάτων των παιδιών στα αναστήματα των γονέων τους.

5.2 Το στικτό διάγραμμα.

Ένας απλός τρόπος για να αρχίσει κάποιος την από κοινού μελέτη δύο μεταβλητών είναι να κατασκευάσει το λεγόμενο στικτό διάγραμμα του οποίου η κατασκευή είναι πολύ απλή.

Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου στον οριζόντιο άξονα είναι οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x και στον κάθετο οι τιμές της εξαρτημένης y. Αφού πρόκειται για την ταυτόχρονη μελέτη δύο μεταβλητών x και y οι παρατηρήσεις μας θα προσδιορίζονται από τα ζεύγη τιμών:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_i, y_i), \dots, (x_N, y_N)$$

και σε κάθε ζεύγος αντιστοιχίζεται ένα σημείο του επιπέδου με τετμημένη x_i και τεταγμένη y_i.

Όπως παρατηρούμε στο διάγραμμα 5.2.1, οι παρατηρήσεις μας σχηματίζουν ένα πλήθος σημείων, που λέγεται ***νέφος σημείων ή διάγραμμα διασποράς ή στικτό διάγραμμα*** (scatter diagram).

Η προσεκτική παρατήρηση ενός διαγράμματος διασποράς, μπορεί να μας δώσει σημαντικές πληροφορίες για τη σχέση εξαρτήσεως που ενδεχομένως υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών x και y.

Παρατηρώντας τα διαγράμματα διασποράς 5.2.1, αντιλαμβανόμαστε ότι στα διαγράμματα 5.2.1α και 5.2.1β, υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών μια σχέση θετικής εξαρτήσεως, ενώ στα 5.2.1γ και 5.2.1δ η σχέση αυτή είναι αρνητική. Για το 5.2.1ε δεν φαίνεται να υπάρχει κανενός είδους σχέση εξαρτήσεως μεταξύ των x και y (οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες).

Επίσης παρατηρώντας τα διαγράμματα 5.2.1α και 5.2.1δ μπορούμε να φαντασθούμε ότι τα σημεία του νέφους, δηλαδή οι παρατηρήσεις μας, κείνται γύρω από μια νοητή ευθεία γραμμή, ενώ στα διαγράμματα 5.2.1β και 5.2.1γ ακολουθούν μια καμπύλη.

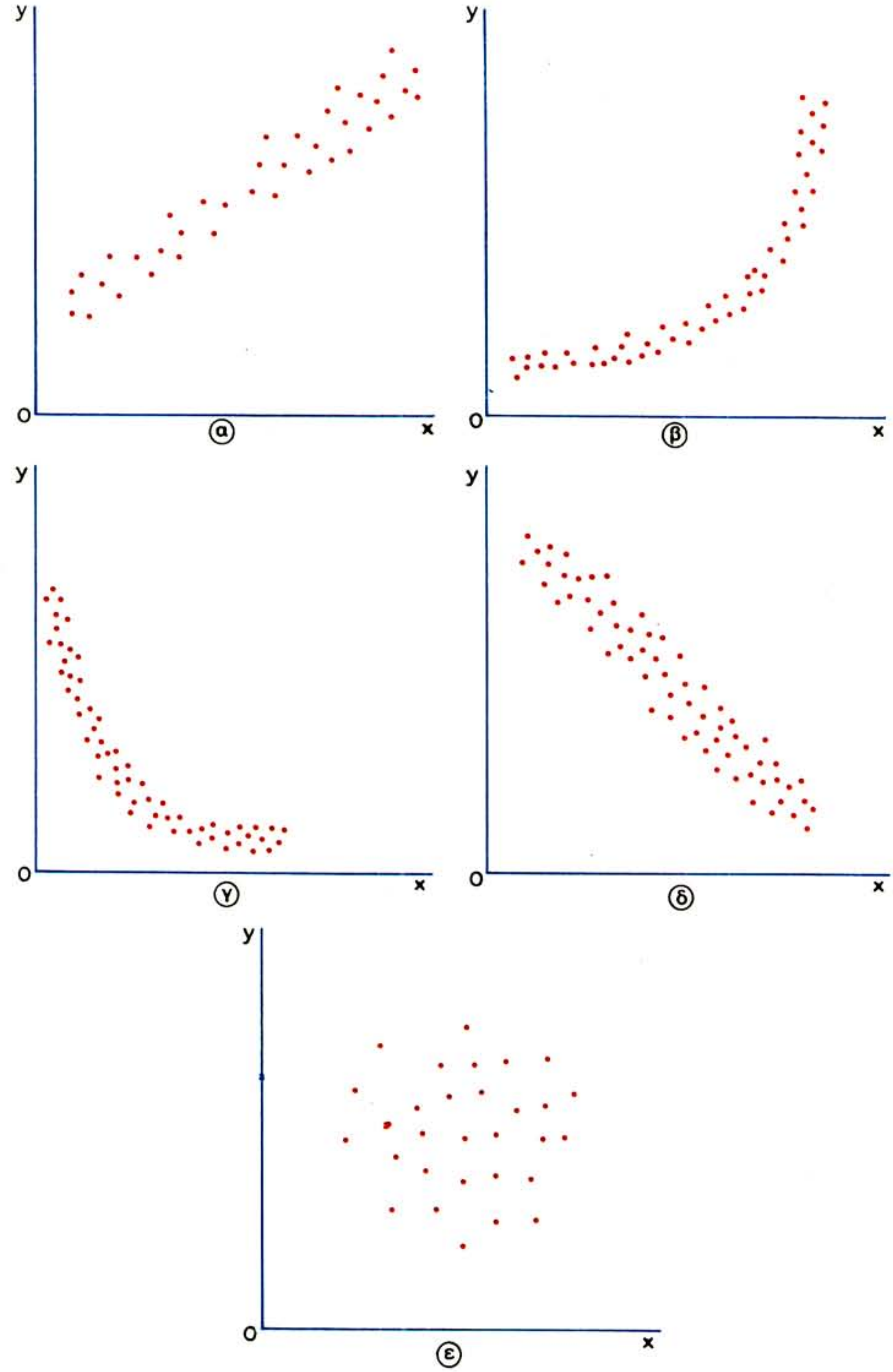
Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, εάν θα μπορούσε να χαραχθεί στα διαγράμματα διασποράς μια ευθεία ή καμπύλη γραμμή, ανάλογα με την περίπτωση, η οποία να αναπαριστά (να περιγράφει) κατά το δυνατόν καλύτερα, την υπάρχουσα μεταξύ των δύο μεταβλητών σχέση εξαρτήσεως.

Στις επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με την αναζήτηση της απαντήσεως στο πρόβλημα αυτό.

5.3 Η γραμμική παλινδρόμηση.

Εδώ θα εξετάσομε την απλή γραμμική παλινδρόμηση (simple linear regression)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5.2.1



[Πρέπει να γνωρίζομε ότι εκτός από την ταυτόχρονη μελέτη δύο μεταβλητών, η οποία αποτελεί την περίπτωση της ***απλής παλινδρομήσεως*** (simple regression) έχομε και την περίπτωση της ***πολλαπλής παλινδρομήσεως*** (multiple regression), όπου μας απασχολεί η μελέτη περισσοτέρων των δύο μεταβλητών. Π.χ. εξετάζομε τη ζητούμενη ποσότητα y ενός αγαθού που εξαρτάται από την τιμή του x, από το διαθέσιμο εισόδημα z κ.λπ.]. Εδώ θα ασχοληθούμε με την από κοινού μελέτη δύο μεταβλητών των οποίων τα διαγράμματα διασποράς τους θα είναι ανάλογα με αυτά των 5.2.1α και 5.2.1δ, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

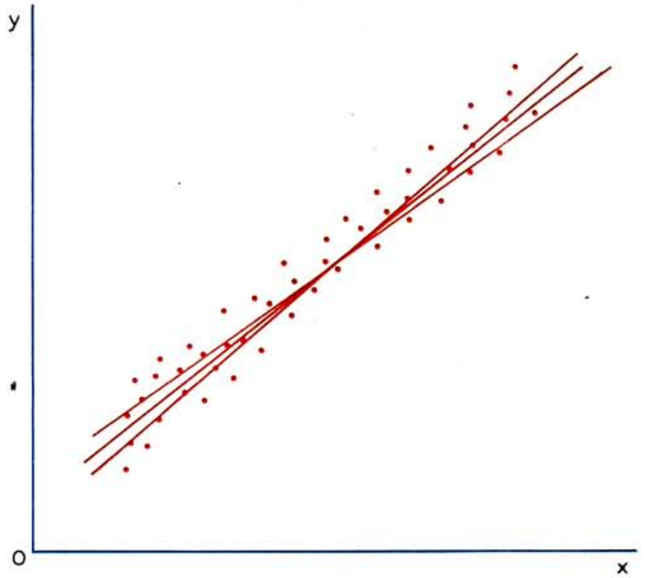
Ας επικεντρώσομε τώρα το ενδιαφέρον μας στο διάγραμμα διασποράς 5.2.1α. Παρατηρώντας προσεκτικά το διάγραμμα αυτό, προσπαθούμε να βρούμε μια γραμμή με εξίσωση της μορφής

$$y=\alpha+\beta x \tag{5.1}$$

δηλαδή μια ευθεία, που να προσαρμόζεται στο διάγραμμα 5.2.1α κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μας δίνει την καλύτερη δυνατή περιγραφή, της υπάρχουσας μεταξύ των μεταβλητών x και y σχέσεως.

Σημειώνομε ότι στην αναζήτηση ευθείας μας οδηγεί η προσεγγιστικά «ευθύγραμμη» μορφή του νέφους των σημείων του διαγράμματος.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5.2.1α



Παρατηρώντας πάλι το ίδιο διάγραμμα στο οποίο έχομε φέρει τώρα, π.χ. 3 ευθείες (διάγρ. 5.2.1α), διερωτάται κανείς ποια από τις 3 αυτές ευθείες μπορεί να αναπαριστά καλύτερα την υπάρχουσα σχέση εξαρτήσεως μεταξύ των δύο μεταβλητών (φυσικά είναι άπειρες οι ευθείες που μπορούμε να προσαρμόσομε). ***Το πρόβλημα, λοιπόν, εντοπίζεται στον προσδιορισμό μιας ευθείας – ευθείας***

παλινδρομήσεως- που θα μας δίνει την καλύτερη, από κάθε άλλη ευθεία, δυνατή περιγραφή της υπάρχουσας μεταξύ των δύο μεταβλητών σχέσεως.

5.4 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Η χρησιμοποιούμενη σήμερα, σχεδόν αποκλειστικά, μέθοδος για τον προσδιορισμό της ευθείας που περιγράφει, καλύτερα από κάθε άλλη ευθεία, την μεταξύ των δύο μεταβλητών σχέση, είναι γνωστή ως μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (method of least squares). Το 1806 μια εργασία του Γάλλου Legendre Adrien - Marie (1752-1833) περιείχε την πρώτη δημοσιευμένη αναφορά με την πρώτη ολοκληρωμένη ανάπτυξη της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (Nouvelles methodes pour la determination des orbites cometes).

Κατά τη μέθοδο αυτή απαιτείται η ευθεία, που θα προσαρμόσομε στα δεδομένα μας, να περνά όσο το δυνατόν πιο κοντά από τα σημεία των παρατηρήσεών μας, δηλαδή δεν θα υπάρχει άλλη ευθεία που να μπορεί να διέρχεται πιο κοντά από αυτά.

Το πρόβλημα, λοιπόν, εντοπίζεται τώρα στον προσδιορισμό της συγκεκριμένης πλέον ευθείας — ευθείας παλινδρομήσεως — με τέτοιες εκτιμώμενες παραμέτρους $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, ώστε να διέρχεται όσο το δυνατόν πλησιέστερα από τα σημεία που αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις μας.

Αποδεικνύεται ότι οι τιμές των παραμέτρων α και β σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$\Sigma y = N\alpha + \beta\Sigma x \tag{5.2}$$

$$\Sigma xy = \alpha\Sigma x + \beta\Sigma x^2 \tag{5.3}$$

γνωστού ως συστήματος κανονικών εξισώσεων (normal equations).

Στην πράξη, για τον υπολογισμό (εκτίμηση) των παραμέτρων α και β χρησιμοποιούμε συνήθως τους παρακάτω τύπους

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x \tag{5.4}$$

και

$$\hat{\beta} = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{5.5}$$

ή

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma xy - N\mu_x\mu_y}{\Sigma x^2 - N\mu_x^2} \tag{5.6}$$

όπου:

$$\mu_x = \frac{\Sigma x}{N}$$

και

$$\mu_y = \frac{\Sigma y}{N}$$

Επίσης N = το πλήθος των ζευγών των παρατηρήσεών μας.

Η ευθεία, λοιπόν, που διέρχεται όσο το δυνατόν πιο κοντά από τις παρατήρήσεις μας – ***ευθεία (εξίσωση) παλινδρομήσεως***– θα είναι η

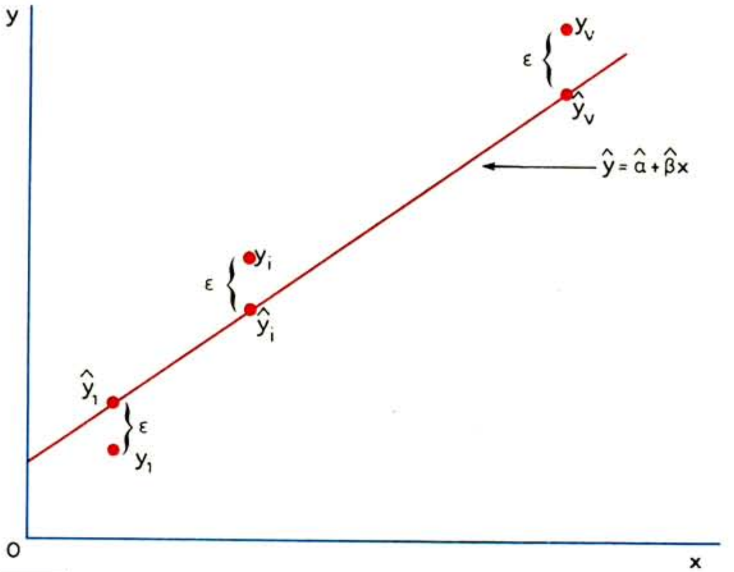
$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x \tag{5.7}$$

Οι τιμές της y που προκύπτουν από την εξίσωση παλινδρομήσεως (5.7) για αντίστοιχες τιμές της x, συμβολίζονται με $\hat{y}$, ώστε να μπορούμε να τις διακρίνομε από τις πραγματικές τιμές y.

Επίσης το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών των πραγματικών τιμών y από τις αντίστοιχες $\hat{y}$, που κείνται επάνω στην ευθεία παλινδρομήσεως (διάγρ. 5.4.1), $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, δηλαδή το $\Sigma (y - \hat{y})^2$ είναι ελάχιστο, το πλέον μικρό που μπορούμε να έχομε, γι' αυτό και η μέθοδος ονομάστηκε μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων*.

Οι διαφορές $y - \hat{y}$ συμβολίζονται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα ε, όταν αναφερόμαστε στη μελέτη πληθυσμού και με e, όταν εξετάζομε δείγματα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5.4.1



* Λαμβάνομε το άθροισμα $\Sigma (y - \hat{y})^2$ και όχι το $\Sigma (y - \hat{y})$, επειδή οι θετικές και αρνητικές διαφορές $(y - \hat{y})$, αθροιζόμενες, αλληλοαναιρούνται, δηλαδή $\Sigma (y - \hat{y}) = 0$. Ακόμη η πλήρης και ακριβής διατύπωση της εξισώσεως που αντιπροσωπεύει το μοντέλο γραμμικής παλινδρομήσεως, είναι $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, όπου ε είναι ο όρος τυχαίο σφάλμα (random error term).

Αριθμητικό παράδειγμα.

Ο πίνακας 5.4.1 περιέχει απλά αριθμητικά δεδομένα, όπου με x συμβολίζεται η ανεξάρτητη (ερμηνευτική) μεταβλητή και με y η εξαρτημένη.

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα 5.4.1 θα προσδιορισθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως της y επάνω στη x και θα χαραχθεί η αντίστοιχη ευθεία παλινδρομήσεως.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.4.1

x	y
1	3
3	4
4	5
5	6
7	8
9	10

Λύση:

Δημιουργούμε ένα νέο πίνακα, τον 5.4.2, στον οποίο περιλαμβάνονται οι νέες στήλες που πρέπει να κατασκευάσομε – στήλες υπολογισμών (3) και (4)– για να βρούμε τις τιμές των $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, ώστε να προσδιορίσομε την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.4.2

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών	
(1) x	(2) y	(3) xy	(4) x^2
1	3	3	1
3	4	12	9
4	5	20	16
5	6	30	25
7	8	56	49
9	10	90	81
Σx=29	Σy=36	Σxy=211	Σx^2=181

Τα βήματα που ακολουθούμε είναι:

Βήμα I: Υπολογισμός των Σx, Σy, μ_x και μ_y.
όπου μ_x: ο μέσος αριθμητικός της x και
μ_y: ο μέσος αριθμητικός της y

Το Σx=29 και:

$$\mu_x = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{29}{6} = 4{,}833$$

Το Σy=36 και:

$$\mu_y = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{36}{6} = 6$$

Βήμα ΙΙ: Υπολογισμός των Σxy και Σx^2.

$$\Sigma xy = 211$$

$$\Sigma x^2 = 181$$

Βήμα ΙΙΙ: Υπολογισμός του $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{6 \times 211 - 29 \times 36}{6 \times 181 - (29)^2}$$

$$\hat{\beta} = 0{,}9$$

Βήμα IV: Υπολογισμός του $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x$$

$$\hat{\alpha} = 6 - 0{,}9 \times 4{,}833$$

$$\hat{\alpha} = 1{,}65$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση παλινδρομήσεως είναι:

$$y = 1{,}65 + 0{,}9x \tag{5.8}$$

Η χάραξη της ευθείας παλινδρομήσεως είναι απλή. Επειδή αποδεικνύεται ότι η ευθεία παλινδρομήσεως διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες (μ_x, μ_y), φέρομε μια ευθεία, που να διέρχεται από τα σημεία (x=0, y=1,65) και (μ_x=4,833, μ_y=6). Διάγραμμα 5.5.1.

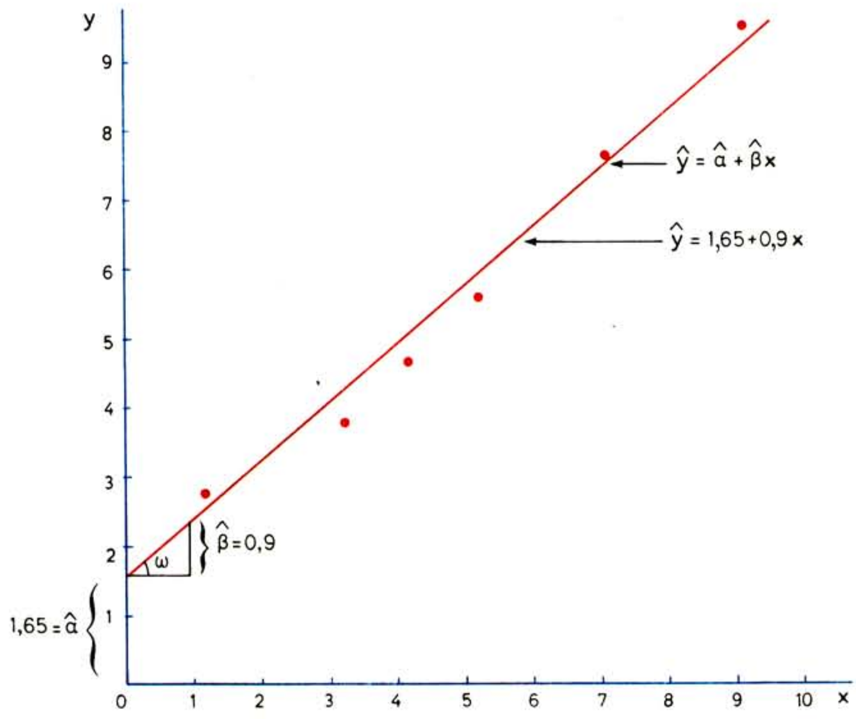
5.5 Ερμηνεία των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της εξισώσεως γραμμικής παλινδρομήσεως.

Από την εξίσωση 5.8 προκύπτει ότι αν x=0 έχομε y=1,65, δηλαδή τιμή ίση με την $\hat{\alpha}$. Η παράμετρος λοιπόν $\hat{\alpha}$, παριστά την αναμενόμενη να πραγματοποιηθεί τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής y, όταν x=0, ήτοι $\hat{y}$= 1,65 − 0,9 × 0 και $\hat{y}$ = 1,65.

Δηλαδή η τιμή του $\hat{\alpha}$ μας προσδιορίζει το σημείο τομής του κατακόρυφου άξονα y από την ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ (διάγραμμα 5.5.1).

Πιο σημαντικό εύρημα όμως αποτελεί το $\hat{\beta}$, γνωστό ως γωνιακός συντελεστής της ευθείας παλινδρομήσεως ή απλά συντελεστής παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$, και ο οποίος ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω (διαγρ. 5.5.1).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5.5.1



Το $\hat{\beta}$ προσδιορίζει τη μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή y όταν η x μεταβληθεί κατά μια μονάδα. Αν το $\hat{\beta}$ είναι θετικό ($\hat{\beta} > 0$), όπως στο παράδειγμά μας όπου $\hat{\beta} = 0{,}9$, τότε η εξάρτηση είναι θετική και σε μια αύξηση της x κατά μια μονάδα η εξαρτημένη μεταβλητή αυξάνεται κατά $\hat{\beta} = 0{,}9$. Το αντίθετο βέβαια συμβαίνει όταν το $\hat{\beta}$ είναι αρνητικό ($\hat{\beta} < 0$) όπου σε αύξηση της x κατά μια μονάδα επέρχεται μείωση της y ίση με $\hat{\beta}$.

Ο προσδιορισμός της $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}x$ μας επιτρέπει ακόμη τον κατά προσέγγιση υπολογισμό τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής y όταν δίδονται αντίστοιχες τιμές της x.

Με βάση το παράδειγμά μας έχομε:

Για $x = 2 \quad \hat{y} = 1{,}65 + 0{,}9 \times 2 = 3{,}45$

$x = 5 \quad \hat{y} = 1{,}65 + 0{,}9 \times 5 = 6{,}15$

Δηλαδή, αν μας ρωτούσε κάποιος, με βάση τα δεδομένα του πίνακα 5.4.1 ποια τιμή μπορούμε να αναμένομε για την εξαρτημένη μεταβλητή όταν το x=2, θα απαντούσαμε ότι είναι η $\hat{y} = 3{,}45$ όπως επίσης για $x=5$ έχομε $\hat{y} = 6{,}15$, ενώ η αντίστοιχη πραγματική τιμή είναι $y=6$.

5.6 Η σημασία της παλινδρομήσεως για τη σύγχρονη επιχείρηση.

Η παλινδρόμηση και η συσχέτιση, στην οποία θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο, παρά τις όποιες αδυναμίες που παρουσιάζονται ως προς την ακρίβεια, αποτελούν μεθόδους εφαρμογών βασικές και ίσως τις πλέον εφαρμοσμένες τεχνικές εκτιμήσεως οικονομικών σχέσεων. Αποτελούν σημαντικό μέσο για την ποσοτική διερεύνηση των σχέσεων, οι οποίες υφίστανται μεταξύ των διαφόρων οικονομικών μεγεθών και μας βοηθούν σημαντικά στη χάραξη της οικονομικής πολιτικής, που ασκείται είτε από το κράτος, είτε από ιδιωτικές επιχειρήσεις.

Για τη σύγχρονη επιχείρηση είναι ένα πολύ χρήσιμο μέσο που συμβάλλει σημαντικά στην επιχειρηματική πρόβλεψη, στον προγραμματισμό της επιχειρηματικής δράσεως, στη λήψη ορθών επιχειρηματικών αποφάσεων κ.λπ. Ολόκληροι κλάδοι της οικονομίας οφείλουν πάρα πολλά στην παλινδρόμηση και συσχέτιση, όπως η οικονομετρία, οι τεχνικές έρευνας της αγοράς κ.λπ. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι όργανο εργασίας και έρευνας σημαντικότατο για το σημερινό οικονομολόγο, όπως και για άλλους ερευνητές και επιστήμονες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.6.1

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών	
(1)	(2)	(3)	(4)
Τιμή x	Ποσότητα (y)	xy	x^2
9	11	99	81
11	10	110	121
12	9	108	144
13	9	117	169
15	7	105	225
16	5	80	256
17	4	68	289
19	3	57	361
20	2	40	400
22	2	44	484
$\Sigma x=154$	$\Sigma y=62$	$\Sigma xy=828$	$\Sigma x^2=2530$

Για να βοηθήσομε το μαθητή να αποκτήσει μια απλή έστω εικόνα των σημαντικών δυνατοτήτων εφαρμογής της παλινδρομήσεως στον επιχειρηματικό και οικονομικό χώρο, παραθέτομε ένα πίνακα οικονομικών στοιχείων, τον οποίο θα μελετήσομε με τη βοήθεια της παλινδρομήσεως. Η μελέτη του πίνακα αυτού, αφορά στο γνωστό πρόβλημα της ζητήσεως ενός αγαθού σε σχέση με την τιμή του. Είναι ένα πρόβλημα που ενδιαφέρει σε μεγάλο βαθμό, τόσο τις επιχειρήσεις όσο και την οικονομία γενικότερα.

Παράδειγμα.

Μελέτη πίνακα οικονομικών δεδομένων με τη βοήθεια της παλινδρομήσεως.

Τα στοιχεία του πίνακα 5.6.1 — στήλες δεδομένων — αφορούν τις ζητούμενες ποσότητες (y σε kg) και τις αντίστοιχες τιμές (x σε εκατοντάδες δραχμές) ενός αγαθού κατά ορισμένη χρονική περίοδο.

Ζητείται:

Α) Να προσδιορισθεί η εξίσωση γραμμικής παλινδρομήσεως (εξίσωση ζητήσεως) της y πάνω στη x.

Β) Να ερμηνευθεί η έννοια των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της ευρεθείσας εξισώσεως παλινδρομήσεως.

Γ) Με βάση την εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ ποιες είναι οι αναμενόμενες ζητούμενες ποσότητες, όταν x=6, και x=8;

Δ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα διασποράς και να χαραχθεί η αντίστοιχη ευθεία παλινδρομήσεως.

Λύση.

Α) Για τον προσδιορισμό της εξισώσεως παλινδρομήσεως θα ακολουθήσομε τα εξής βήματα:

Βήμα Ι: Υπολογισμός των Σx, Σy, μ_x και μ_y

$$\Sigma x = 154 \qquad \mu_x = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{154}{10} = 15,4$$

$$\Sigma y = 62 \qquad \mu_y = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{62}{10} = 6,2$$

Βήμα ΙΙ: Υπολογισμός των Σxy και Σx^2

$$\Sigma xy = 828$$
$$\Sigma x^2 = 2530$$

Βήμα ΙΙΙ: Υπολογισμός του $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{10 \times 828 - 154 \times 62}{10 \times 2530 - 154^2}$$

$$\hat{\beta} = -0,8$$

Βήμα IV: Υπολογισμός του $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x$$

$$\hat{\alpha} = 6,2 - (-0,8) \times 15,4$$

$$\hat{\alpha} = 18,52$$

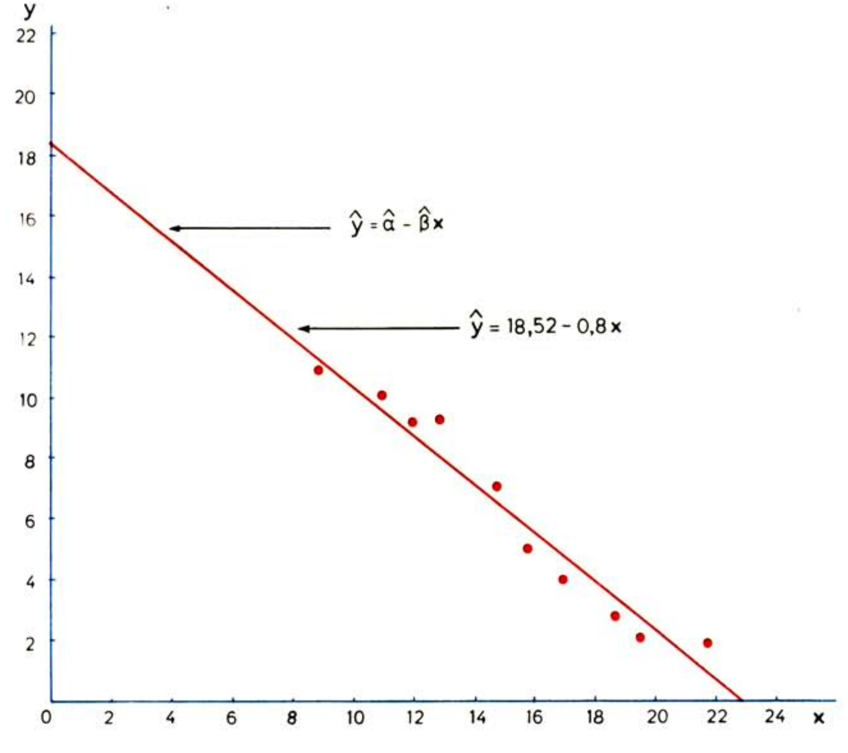
Οπότε η εξίσωση παλινδρομήσεως (ζητήσεως) θα είναι:

$$\hat{y} = 18,52 - 0,8x$$

Β) α) Ο γωνιακός συντελεστής της ευθείας παλινδρομήσεως $\hat{\beta} = -0,8$ δηλώνει ότι, αν η τιμή του αγαθού αυξηθεί, κατά την εξεταζόμενη περίοδο, κατά μία μονάδα, δηλαδή εδώ κατά ένα εκατοντάδραχμο (επειδή η x εκφράζει εκατοντάδες δρχ.), τότε η ζήτησή του θα μειωθεί κατά 0,8 kg.

β) Η σταθερά $\hat{\alpha}$ προσδιορίζει τη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού, αν η τιμή του αγαθού μηδενιζόταν, δηλαδή x=0. Για παράδειγμα αν υποθέσομε ότι το αγαθό γινόταν ελεύθερο, οπότε η τιμή του θα γινόταν ίση με μηδέν, τότε η ζητούμενη

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5.6.2



ποσότητά του θα ήταν α=18,52. (Ελεύθερα είναι τα αγαθά που αφθονούν στη φύση και μπορεί κάθε άτομο να τα αποκτήσει χωρίς καμιά οικονομική θυσία).

Γ) Με βάση τώρα την $\hat{y} = 18{,}52 - 0{,}8\,x$ έχομε:

Για x=6

$$\hat{y} = 18{,}52 - 0{,}8 \times 6$$

$$\hat{y} = 13{,}72$$

Για x=8

$$\hat{y} = 18{,}52 - 0{,}8 \times 8$$

$$\hat{y} = 12{,}12$$

Δ) Για τη χάραξη της ευθείας παλινδρομήσεως, φέρομε την ευθεία $\hat{y} = 18{,}52 - 0{,}8x$, η οποία διέρχεται χάρη ευκολίας από δύο σημεία που έχομε ήδη βρει, π.χ. (x=0, y=18,52) και (x=8, y=12,12).

5.7 Ανακεφαλαίωση.

1) Η ***παλινδρόμηση*** αναφέρεται στον προσδιορισμό μιας ποσοτικής εκφράσεως, η οποία περιγράφει την τυχόν υπάρχουσα σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, ενώ ο σκοπός της ***συσχετίσεως*** είναι να μετρήσει το βαθμό εντάσεως αυτής τη σχέσεως.

2) Ασχοληθήκαμε με τη ***μελέτη δύο μεταβλητών*** θεωρώντας την ***x ανεξάρτητη*** και την ***y εξαρτημένη*** μεταβλητή και πιο συγκεκριμένα εξετάσαμε την ευθύγραμμη παλινδρόμηση.

3) Αν απεικονίσομε τις τιμές των μεταβλητών πάνω σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, τότε τα ζεύγη τιμών (x_i, y_i) των παρατηρήσεών μας, δημιουργούν ένα νέφος σημείων, το οποίο ονομάζεται ***διάγραμμα διασποράς.*** Το διάγραμμα διασποράς μας δίνει μια πρώτη εικόνα της μεταξύ των δύο μεταβλητών υφισταμένης σχέσεως, ως προς το είδος της εξαρτήσεως και ως προς το βαθμό εντάσεως της συσχετίσεως μεταξύ των δύο μεταβλητών.

4) Με τη βοήθεια της ***μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων*** μπορούμε να προσαρμόσομε μια ευθεία γραμμή ή καμπύλη σ' ένα διάγραμμα διασποράς που θα περιγράφει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη σχέση μεταξύ των y και x. Ασχοληθήκαμε συγκεκριμένα με την προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής.

5) Οι τιμές των ***παραμέτρων*** α και β σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων, γνωστού ως συστήματος κανονικών εξισώσεων.

$$\Sigma y = N\alpha + \beta\Sigma x$$

$$\Sigma xy = \alpha\Sigma x + \beta\Sigma x^2$$

6) Στην εξίσωση γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ η παράμετρος $\hat{\alpha}$ μας

δείχνει το σημείο τομής του κάθετου άξονα y από την ευθεία παλινδρομήσεως, δηλαδή η $\hat{\alpha}$ μας δίνει την τιμή της y για x = 0.

7) Η παράμετρος $\hat{\beta}$ προσδιορίζει τη μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή y όταν η x μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Αν το $\hat{\beta}$ είναι θετικό ($\hat{\beta}>0$), τότε η υπάρχουσα μεταξύ των δύο μεταβλητών εξάρτηση είναι θετική, ενώ αν το $\hat{\beta}$ είναι αρνητικό ($\hat{\beta}<0$), τότε η εξάρτηση είναι αρνητική.

8. Οι τύποι υπολογισμού των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της εξισώσεως παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ είναι:

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x$$

και

$$\hat{\beta} = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

ή

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma xy - N\mu_x\mu_y}{\Sigma x^2 - N\mu_x^2}$$

9) Οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής που υπολογίζονται με τη βοήθεια της εξισώσεως παλινδρομήσεως συμβολίζονται με $\hat{y}$ για να διακρίνονται από τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές y, οι δε διαφορές $y - \hat{y}$ συμβολίζονται με ε.

5.8 Ερωτήσεις.

1. Σε ποιο ερώτημα προσπαθούμε να απαντήσομε με τη βοήθεια της παλινδρομήσεως;
2. Τι γνωρίζετε για το στικτό διάγραμμα;
3. Κατασκευάστε με δικά σας δεδομένα ένα στικτό διάγραμμα.
4. Να γράψετε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων.
5. Να γράψετε τον τύπο που χρησιμοποιούμε συνήθως στην πράξη για τον υπολογισμό της παραμέτρου $\hat{\alpha}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
6. Γράψτε τους τύπους που χρησιμοποιούμε συνήθως στην πράξη για τον υπολογισμό της παραμέτρου $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
7. Να ερμηνεύσετε την παράμετρο $\hat{\alpha}$.
8. Να ερμηνεύσετε την παράμετρο $\hat{\beta}$.
9. Τι συμβολίζομε με το y και τι συμβολίζομε με το $\hat{y}$.
10. Πόσο σημαντικός και γιατί είναι ο ρόλος της παλινδρομήσεως για τις σύγχρονες επιχειρήσεις;

5.9 Ασκήσεις.

*1 Έχετε τα παρακάτω δεδομένα:

x:	1	3	4	6	7
y:	1	5	6	8	9

Ζητείται να υπολογισθούν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, οι παράμετροι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ και της εξισώσεως γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

*2 Δίνονται τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

x:	1	3	4	5	7	9	10
y:	9	8	8	6	5	4	4

Ζητείται να υπολογίσετε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τις παραμέτρους $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ και επίσης να απεικονίσετε γραφικά την ευρεθείσα ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

*3 Η από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y μας έδωσε τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

x:	1	2	3	5	6	7	9
y:	2	3	5	7	8	9	9

Ζητείται:
α) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Ποιες τιμές εκτιμάτε ότι παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή όταν $x=4$ και $x=6$;

*4 Η από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y μας έδωσε μετά τους απαιτούμενους υπολογισμούς τα παρακάτω αθροίσματα:

$\Sigma xy=7072$, $\Sigma x=1322$, $\Sigma y=78$
$\Sigma x^2=117.532$ και $N=15$.

Να βρεθεί η ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

*5. Τα ζεύγη τιμών x και y του παρακάτω πίνακα προέκυψαν από την από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y.

x:	2	3	5	6	7	9	10
y:	8	7	7	5	3	2	2

Ζητείται:
α) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα διασποράς και να χαραχθεί η ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

*6 Δίνονται τα βάρη (y) σε kg μιας ομάδας 8 ατόμων και τα αντίστοιχα ύψη τους (x) σε cm.

Ύψος (x)	165	170	172	175	177	180	182	185
Βάρος (y)	63	68	75	75	80	80	85	90

Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

**7 Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις ζητούμενες ποσότητες y, σε kg και τις αντίστοιχες τιμές x σε εκατοντάδες δρχ. ενός αγαθού για μια ορισμένη χρονική περίοδο.

Τιμή (x)	4	5	7	8	9	10	11	13
Ποσότητα (y)	11	10	10	9	7	6	4	3

Ζητείται:
α) Να βρεθεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων η εξίσωση ζητήσεως του αγαθού $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Να ερμηνευθούν οι παράμετροι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

**8 Οι προσφερόμενες ποσότητες σε τόνους και οι αντίστοιχες τιμές x σε χιλιάδες δρχ. ενός αγαθού για τα έτη 1986 - 1993 περιέχονται στον παρακάτω πίνακα:

Έτη	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Τιμή (x)	8	9	10	12	14	16	18	20
Ποσότητα (y)	10	12	15	16	18	20	20	22

Ζητείται:
α) Να προσαρμόσετε στα παραπάνω δεδομένα του πίνακα την ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Να ερμηνεύσετε την παράμετρο $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

**9 Τα ύψη των επενδεδυμένων κεφαλαίων (y) και τα αντίστοιχα κέρδη (x) ομάδας 10 ομοειδών βιομηχανικών επιχειρήσεων περιέχονται στον παρακάτω πίνακα (τα δεδομένα εκφράζουν εκατομμύρια δρχ.).

Κεφάλαιο (x)	80	90	100	120	150	180	200	250	300	350
Κέρδη (y)	15	20	25	25	30	30	40	40	60	80

Ζητείται:

α) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Ποιες οι αναμενόμενες τιμές της y, εάν x=35 και x=70.

**10 Η βαθμολογία μιας ομάδας επτά φοιτητών στα μαθηματικά x και στην πολιτική οικονομία y περιέχεται στον παρακάτω πίνακα:

Μαθηματικά (x)	2	3	5	6	7	9	10
Πολιτική οικονομία (y)	4	5	6	7	8	10	10

Ζητείται:
α) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Να χαραχθεί η ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
γ) Να εκτιμήσετε τη βαθμολογία που θα είχε ένας φοιτητής στην πολιτική οικονομία εάν στα μαθηματικά είχε: α) x=4 και β) x=8.

**11 Από την από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y βρήκαμε ότι $\mu_x = 2$ και $\mu_y = 5$. Επίσης γνωρίζομε ότι η ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ τέμνει τον κάθετο άξονα y στο σημείο y=1.
Να βρεθεί και να χαραχθεί η ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

**12 Δίνονται τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

x:	1	3	5	6	7	9	10	12	15
y:	10	10	8	7	5	5	4	3	3

Ζητείται:
α) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Να γίνει το διάγραμμα διασποράς και να χαραχθεί η ευθεία παλινδρομήσεως.

***13 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το μηνιαίο εισόδημα x και τις αντίστοιχες δαπάνες διατροφής y μιας ομάδας επτά νοικοκυριών, σε δεκάδες χιλιάδες δρχ.

Εισόδημα (x)	22	32	16	37	12	27	17
Δαπάνες διατροφής (y)	7	8	5	10	4	6	6

Ζητείται:
α) Να προσδιορισθούν οι παράμετροι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της εξισώσεως παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Σε ποιο ύψος (σημείο) θα τέμνει η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ τον κάθετο άξονα y;
γ) Να ερμηνευθεί η παράμετρος $\hat{\beta}$.

δ) Ποιες οι προβλεπόμενες δαπάνες διατροφής, εάν ένα νοικοκυριό έχει μηνιαίο εισόδημα : α) 200.000 δρχ. και β) 300.000 δρχ.;

***14 Ο παρακάτω πίνακας περιέχει την ηλικία x (σε έτη) 8 μεταχειρισμένων αυτοκινήτων συγκεκριμένης μάρκας και τύπου και τις αντίστοιχες τιμές, στις οποίες πωλήθηκαν (σε εκατ. δρχ.) το μήνα Νοέμβριο 1993, από μια επιχείρηση εμπορίας αυτοκινήτων.

Ηλικία αυτ/των (x)	2	3	3	5	6	6	8	9
Τιμή Πωλήσεως (y)	2,2	2	1,9	1,7	1,5	1,4	1,2	1

Ζητείται:
α) Να προσδιορισθούν οι παράμετροι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.
β) Να χαραχθεί η ευθεία παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
γ) Να ερμηνευθούν οι παράμετροι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
δ) Σε ποια τιμή εκτιμάτε ότι θα πωλούσε τον ίδιο μήνα ένα αυτοκίνητο του ίδιου τύπου, ηλικίας 7 ετών η επιχείρηση;

***15 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει σε m^2 (x) τα μεγέθη 7 καινούργιων πρωτοενοικιασθέντων κατοικιών και τα αντίστοιχα μηνιαία ποσά ενοικίου (y) σε δεκάδες χιλιάδες δρχ. μιας ορισμένης περιοχής των Αθηνών κατά το Νοέμβριο 1993.

Τετραγωνικά μέτρα (x)	50	65	75	85	95	100	120
Ενοίκιο (y)	5	7	9	9	10	11	13

Ζητείται:
α) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
β) Να γίνει η ερμηνεία της παραμέτρου $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.
γ) Ποιο εκτιμάτε ότι είναι το αναμενόμενο ύψος ενοικίου μιας κατοικίας 105 m^2;
δ) Με βάση τα παραπάνω δεδομένα εάν είχατε μια κατοικία 90 m^2 και σας προσέφεραν μηνιαίο ενοίκιο 110.000 δρχ. θα ήσασταν ευχαριστημένοι σχετικά με το ύψος του ενοικίου και γιατί;

***16 Από τη μελέτη των ετησίων δεδομένων σχετικά με τις προσφερόμενες ποσότητες (y) ενός αγαθού σε τόνους και την τιμή του (x) σε δεκάδες χιλιάδες δρχ. κατά τόνο την τελευταία 7ετία προέκυψαν τα παρακάτω δεδομένα:

$\Sigma x = 118$ $\Sigma y = 236$ $\Sigma x^2 = 2440$
$\Sigma xy = 4880$

Ζητείται:

α) Να προσδιορισθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}x$.

β) Να ερμηνευθεί η παράμετρος $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}x$.

γ) Ποιες εκτιμάτε ότι είναι οι προσφερόμενες ποσότητες του αγαθού όταν έχομε: α) $x=8$ και β) $x=13$;

δ) Να χαραχθεί η υπολογισθείσα ευθεία παλινδρομήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ - ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Οὐδενὸς γὰρ οὔτ' ἀναίτιος ἡ γένεσις οὔτ' ἄλογος ἡ πρόγνωσις.

(Κανενός πράγματος η ύπαρξη είναι δίχως αιτία, ούτε η πρόγνωσή του είναι δυνατή χωρίς να στηρίζεται στην ορθή σκέψη).

Πλούταρχος, Ηθικά, 387β.

Η έρευνα των αιτιωδών σχέσεων μεταξύ των οικονομικών φαινομένων παρουσιάζει αρκετά προβλήματα με ιδιαίτερη δυσκολία. Επειδή ο στατιστικός μπορεί σπάνια ή καθόλου να πειραματισθεί ο ίδιος, πρέπει να δεχθεί τα δεδομένα της καθημερινής εμπειρίας...

George Adny Yule (1871-1951)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ — ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

6.1 Γενικά για τη συσχέτιση.

Στη μέχρι τώρα μελέτη των διμεταβλητών πληθυσμών (παλινδρόμηση), προσδιορίσαμε τη σχέση εξαρτήσεως μεταξύ των δύο μεταβλητών υπολογίζοντας στην περίπτωσή μας (γραμμική παλινδρόμηση) τα $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$. Έτσι από την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ με βάση τις τιμές της μιας μεταβλητής, της θεωρούμενης ως ανεξάρτητης, υπολογίζομε (εκτιμούμε, προβλέπομε) με προσέγγιση τις αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Εδώ τώρα τίθεται ένα ακόμη ερώτημα: ***πόσο έντονη είναι η μεταξύ των δύο μεταβλητών σχέση εξαρτήσεως (συσχέτιση);*** Πόσο δηλαδή, η μεταξύ των δύο μεταβλητών σχέση εξαρτήσεως μπορεί να είναι ισχυρή ή ασθενής ή ενδεχομένως και ανύπαρκτη.

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται η απάντηση στο ερώτημα που διατυπώθηκε και που αφορά στον ποσοτικό προσδιορισμό του βαθμού εντάσεως της εξαρτήσεως που υπάρχει μεταξύ των δύο μεταβλητών.

6.2 Συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως.

Ο ποσοτικός προσδιορισμός του βαθμού εντάσεως της εξαρτήσεως γίνεται με τη βοήθεια ενός κατάλληλου δείκτη, που ονομάζεται ***συντελεστής συσχετίσεως*** (coefficient of correlation) και για την περίπτωση της γραμμικής παλινδρομήσεως ***συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως*** (linear correlation coefficient). Με το συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως διαπιστώνομε, αν η υπάρχουσα σχέση εξαρτήσεως μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι έντονη, μέτρια, ασθενής ή ανύπαρκτη, υπό τον όρο βέβαια ότι αναφερόμαστε σε γραμμικής μορφής σχέση εξαρτήσεως.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως μετρά πόσο κοντά στην ευθεία παλινδρομήσεως, σ' ένα διάγραμμα διασποράς, βρίσκονται τα σημεία των παρατηρήσεών μας. Όσο δηλαδή πιο κοντά είναι οι παρατηρήσεις μας στην ευθεία παλινδρομήσεως, τόσο εντονότερη είναι η μεταξύ των δύο μεταβλητών υπάρχουσα συσχέτιση (correlation). Ο συντελεστής συσχετίσεως θα πρέπει να πούμε ότι συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα ρ, όταν αναφερόμαστε στη μελέτη πληθυσμών, και με το τ, όταν μελετούμε δείγματα.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως παριστάνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\rho = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right] \cdot \left[N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]}} \quad (6.1)$$

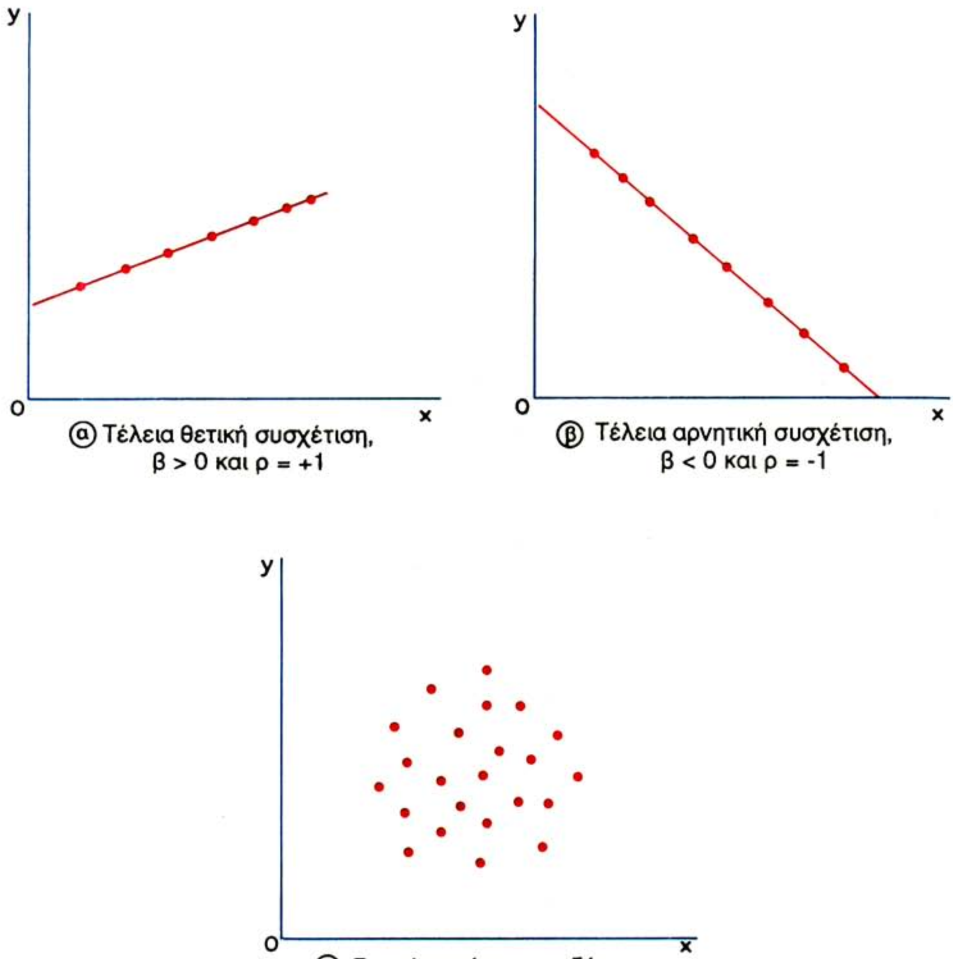
Για το συντελεστή συσχετίσεως θα πρέπει να γνωρίζομε ότι ισχύουν τα εξής:

1) Ο ρ είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μετρήσεως.

2) Ο ρ είναι ανεξάρτητος των χρησιμοποιουμένων μονάδων μετρήσεως των x και y. Δηλαδή εάν οι τιμές των x και y πολλαπλασιασθούν ή διαιρεθούν με ένα αριθμό κ, τότε ο ρ παραμένει αμετάβλητος.

3) Έχει το ίδιο πρόσημο με το συντελεστή παλινδρομήσεως β της $y=\alpha+\beta x$.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.2.1



ⓐ Τέλεια θετική συσχέτιση, $\beta > 0$ και $\rho = +1$

ⓑ Τέλεια αρνητική συσχέτιση, $\beta < 0$ και $\rho = -1$

ⓨ Συσχέτιση ίση με μηδέν, δηλαδή $\rho = 0$

4) Η τιμή του ρ κυμαίνεται μεταξύ −1 και +1
δηλαδή,

$$-1 \leq \rho \leq +1$$

Μπορούμε ακόμη να πούμε για το συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως ρ ότι:

Α) ***Αν ρ=1,*** τότε έχομε ***τέλεια θετική συσχέτιση*** (perfect positive linear correlation) και όλες οι παρατηρήσεις μας βρίσκονται επάνω στην ευθεία παλινδρομήσεως, η οποία έχει βέβαια θετική κλίση ($\hat{\beta} > 0$) (διάγραμμα 6.2.1α).

Β) ***Αν ρ=−1***, τότε έχομε ***τέλεια αρνητική συσχέτιση*** (perfect negative linear correlation) και όλες οι παρατηρήσεις μας βρίσκονται επάνω στην ευθεία παλινδρομήσεως, η οποία έχει αρνητική κλίση ($\hat{\beta} > 0$) (διάγραμμα 6.2.1β).

Γ) ***Αν ρ=0***, τότε δεν υπάρχει ***γραμμική συσχέτιση*** (no linear correlation) μεταξύ των δύο μεταβλητών (διάγραμμα 6.2.1γ).

Πρέπει να τονιστεί ότι αν οι μεταβλητές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, τότε το ρ=0. Επίσης θα πρέπει να προσέξομε ότι, όταν έχομε ρ=0 δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, αλλά μόνον ***ότι μεταξύ τους δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση,*** ενδέχεται όμως, να υπάρχει καμπυλόγραμμη συσχέτιση.

Στην πράξη, σπάνια συναντούμε παραδείγματα περιπτώσεων με τέλεια θετική ή αρνητική συσχέτιση. Οι περιπτώσεις που συνήθως συναντούμε έχουν είτε ισχυρή θετική ή αρνητική συσχέτιση, δηλαδή το $|\rho|$ παίρνει τιμές κοντά στο $|1|$ είτε μέτριου βαθμού συσχέτιση, όπου το $|\rho|$ παίρνει τιμές λίγο υψηλότερες του $|0{,}5|$. Έχομε επίσης και περιπτώσεις ασθενούς συσχετίσεως, όπου το $|\rho|$ παίρνει τιμές κάτω του $|0{,}5|$. Φυσικά, όσο πλησιάζει το $|\rho|$ προς το μηδέν τόσο περισσότερο εξασθενεί ο βαθμός συσχετίσεως (γενικά δεχόμαστε ότι έχομε έντονη θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών, όταν $|\rho| > 0{,}85$).

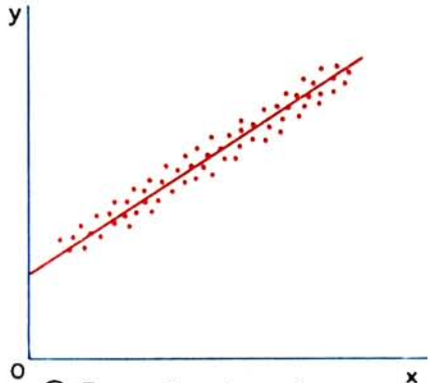
Τα διαγράμματα διασποράς, που παρουσιάζονται στο διάγραμμα 6.2.2, δείχνουν συσχετίσεις διαφόρων βαθμών. Όπως παρατηρούμε, στα διαγράμματα 6.2.2α και 6.2.2β έχομε ισχυρή και ασθενή αντίστοιχα θετική συσχέτιση. Στα διαγράμματα 6.2.2γ και 6.2.2δ έχομε ισχυρή και ασθενή αντίτοιχα αρνητική συσχέτιση. Στο διάγραμμα 6.2.2ε οι μεταβλητές μας είναι ασυσχέτιστες. Για δε το διάγραμμα 6.2.2στ θα πρέπει να πούμε ότι, ναι μεν δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών, ενδέχεται όμως να υπάρχει καμπυλόγραμμη συσχέτιση.

6.3 Η σημαντικότητα της συσχετίσεως για τις επιχειρήσεις.

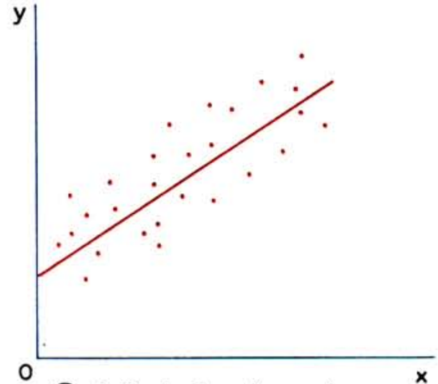
Όπως είδαμε, η συσχέτιση αποτελεί ένα άλλο τρόπο μελέτης των διμεταβλητών πληθυσμών και μας παρέχει τη σημαντική πληροφόρηση για το πόσο έντονος, μέτριος, ασθενής ή και μηδενικός είναι ο βαθμός εντάσεως της εξαρτήσεως μεταξύ των εξεταζομένων μεταβλητών καθώς επίσης, αν πρόκειται για μια θετική ή αρνητική συσχέτιση.

Αν λοιπόν, στην πράξη, κατά τη διερεύνηση τυχόν υπάρχουσας σχέσεως εξαρτήσεως μεταξύ των δύο μεταβλητών, μας ενδιαφέρει μόνον ο βαθμός εντάσεως αυτής και αν πρόκειται για θετική ή αρνητική συσχέτιση, τότε η πληροφόρηση που μας παρέχει ο συντελεστής συσχετίσεως είναι επαρκής. Αν όμως θέλομε να έχομε

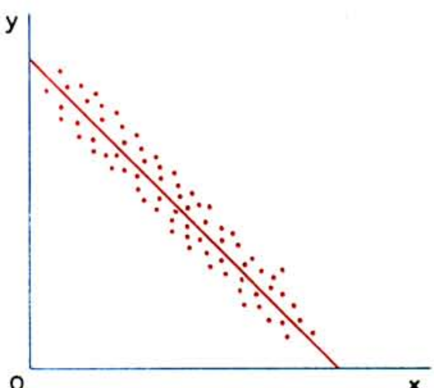
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.2.2



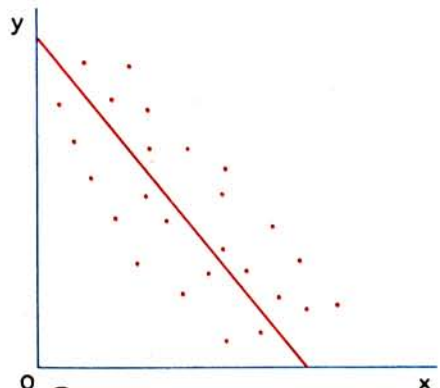
ⓐ Έντονη θετική συσχέτιση



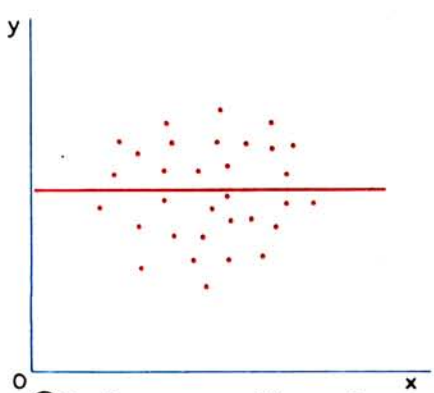
ⓑ Ασθενής θετική συσχέτιση



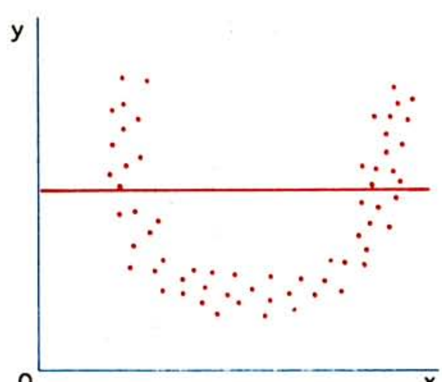
ⓒ Έντονη αρνητική συσχέτιση



ⓓ Ασθενής αρνητική συσχέτιση



ⓔ Ο ρ ίσος με το μηδέν, ρ = 0



(στ) Ο ρ ίσος με το μηδέν, ρ = 0

πληρέστερη πληροφόρηση για τη μεταξύ των δύο μεταβλητών ενδεχόμενη εξάρτηση, τότε προχωρούμε και στην εφαρμογή της παλινδρομήσεως, την οποία γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι αντλούμε επί πλέον πληροφορίες. Καταφεύγει λοιπόν κάποιος είτε στη συσχέτιση είτε στην παλινδρόμηση ανάλογα με το τι είδους πληροφόρηση ζητεί. Θα πρέπει όμως να αναφερθεί ότι πολύ συχνά στην πράξη εφαρμόζομε τη συσχέτιση και την παλινδρόμηση μαζί, γιατί η εικόνα που προκύπτει από τη συνεξέταση των δύο μεταβλητών είναι πληρέστερη και πιο ολοκληρωμένη. Η σημασία της συσχετίσεως στο πεδίο της οικονομίας και των επιχειρήσεων είναι πολύ σημαντική, είτε αυτή εφαρμόζεται μόνη της, είτε μαζί με την παλινδρόμηση.

Για την καλύτερη κατανόηση όλων όσων αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους, παρουσιάζομε κατά τρόπο απλό, την αντιμετώπιση δύο επιχειρηματικών προβλημάτων, με τη βοήθεια της παλινδρομήσεως και της συσχετίσεως.

Πρόβλημα 1.

Η «Α.Ε. Ελλάς - Ήλεκτρον», μια από τις 12 πρώτες σε πωλήσεις βιομηχανικές επιχειρήσεις του κλάδου της, προσέλαβε τελευταία ένα οικονομικό σύμβουλο ειδικό στην έρευνα αγοράς, για να την βοηθήσει να αναπτύξει μια πιο επιθετική πολιτική στον τομέα των πωλήσεων.

Ο σύμβουλος λογικά σκεπτόμενος ότι οι πωλήσεις των προϊόντων, πιθανότατα μεταξύ των άλλων, επηρεάζονται και από τις αντίστοιχες διαφημιστικές δαπάνες, αποφάσισε να μελετήσει τις πωλήσεις σε σχέση με τις αντίστοιχες διαφημιστικές δαπάνες.

Έτσι άρχισε εξετάζοντας τις πωλήσεις της προηγούμενης οικονομικής χρήσεως των 12 πρώτων σε πωλήσεις βιομηχανικών επιχειρήσεων του κλάδου, σε σχέση με τις αντίστοιχες διαφημιστικές τους δαπάνες (πιν. 6.3.1), εφαρμόζοντας τη μέθοδο της παλινδρομήσεως και συσχετίσεως.

Ας δούμε λοιπόν, ποιες πληροφορίες προέκυψαν από αυτή την πρώτη προσέγγιση του προβλήματος.

(x) Διαφημιστικές δαπάνες	1,8	2	2	2,2	2,6	2,8	2,8	3	3,2	3,6	3,6	3,8
(y) Πωλήσεις	110	90	90	100	90	100	130	150	144	170	170	160

Τα δεδομένα εκφράζουν δεκάδες εκατ. δρχ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3.1

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών		
(1) Διαφημιστικές δαπάνες x	(2) Πωλήσεις y	(3) xy	(4) x^2	(5) y^2
1,8	110	198	3,24	12100
2	90	180	4	8100
2	90	180	4	8100
2,2	100	220	4,84	10000
2,6	90	234	6.76	8100
2,8	100	280	7,84	10000
2,8	130	364	7,84	16900
3	150	450	9	22500
3,2	144	460,8	10,24	20736
3,6	170	612	12,96	28900
3,6	170	612	12,96	28900
3,8	160	608	14,44	25600
Σx:33,4	Σy:1504	Σxy:4398,8	Σx^2:98,12	Σy^2:199936

Λύση.

Α) Υπολογισμός του συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως ρ.

Βήμα I: Υπολογίζομε τα αθροίσματα των στηλών (1) και (2), (στήλες δεδομένων).

Έχομε λοιπόν, $\Sigma x = 33{,}4$

$\Sigma y = 1504$

Βήμα II: Συνθέτομε τις στήλες (3), (4) και (5) και βρίσκομε τα αθροίσματά τους:

$\Sigma xy = 4398{,}8$

$\Sigma x^2 = 98{,}12$

$\Sigma y^2 = 199936$

Βήμα III: Αντικαθιστούμε τις τιμές που έχομε βρει στον παρακάτω τύπο του ρ:

$$\rho = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\rho = \frac{12 \times 4398,8 - 33,4 \times 1504}{\sqrt{12 \times 98,12 - 33,4^2} \cdot \sqrt{12 \times 199936 - 1504^2}}$$

$$\rho = 0,875$$

Επειδή το ρ είναι θετικό, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των διαφημιστικών δαπανών (x) και των πωλήσεων (y), δηλαδή οι πωλήσεις επηρεάζονται θετικά από μια αύξηση των διαφημιστικών δαπανών. Ακόμη παρατηρούμε ότι αυτή η γραμμική συσχέτιση μεταξύ διαφημιστικών δαπανών και πωλήσεων είναι έντονη, γιατί το ρ είναι κοντά στη μονάδα.

Β. Προσδιορισμός της εξισώσεως παλινδρομήσεως.

Ακολουθώντας τη γνωστή μας πορεία έχομε:

Βήμα Ι:

$$\mu_x = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{33,4}{12} = 2,783$$

$$\mu_y = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{1504}{12} = 125,333$$

Βήμα ΙΙ:

$$\Sigma xy = 4398,8$$

$$\Sigma x^2 = 98,12$$

Βήμα ΙΙΙ:

$$\hat{\beta} = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{12 \times 4398,8 - 33,4 \times 1504}{12 \times 98,12 - 33,4^2}$$

$$\hat{\beta} = 41,241$$

Βήμα ΙV:

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x$$

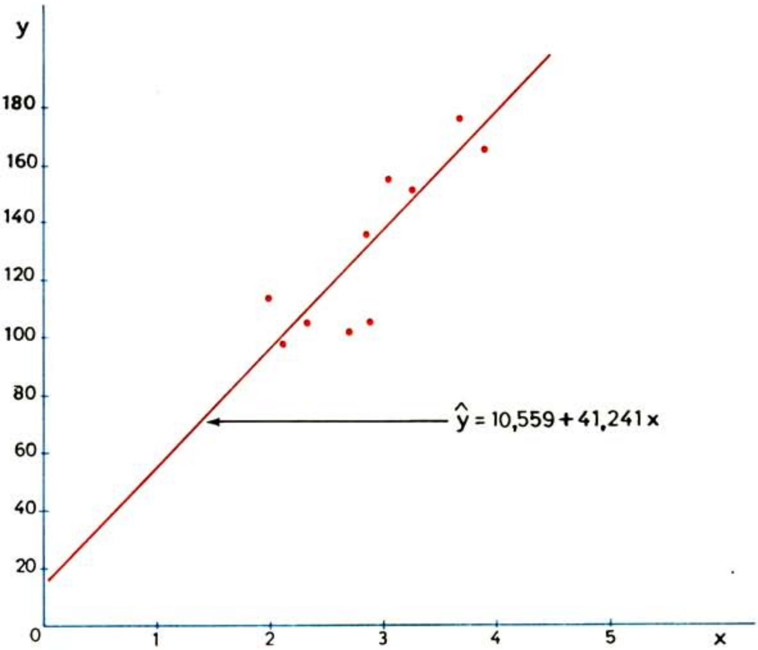
$$\hat{\alpha} = 125,333 - 41,241 \times 2,783$$

$$\hat{\alpha} = 10,559$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση παλινδρομήσεως του ύψους των πωλήσεων y σε δεκάδες εκατ. δρχ. επί των δαπανών για διαφήμιση x σε δεκάδες εκατ. δρχ. θα είναι (βλ. διάγραμμα 6.3.1):

$$\hat{y} = 10,559 + 41,241x$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.3.1



Η παράμετρος $\hat{\beta}$ = 41,241 δηλώνει ότι σε αύξηση των διαφημιστικών δαπανών κατά μια μονάδα (δηλαδή 10 εκατ. δρχ.) αναμένεται να σημειωθεί αύξηση των πωλήσεων κατά 41,24 δεκάδες εκατ. δρχ. (δηλαδή 412 εκατ. δρχ. περίπου). Η παράμετρος $\hat{\alpha}$ δηλώνει ότι το ύψος των πωλήσεων μιας επιχειρήσεως, η οποία δεν προβαίνει σε καμιά διαφημιστική δαπάνη θα ήταν 10,559 δεκάδες εκατ. δρχ. (105,5 εκατ. δρχ. περίπου).

Πρόβλημα 2.

Η επιχείρηση "3Α Αθηναϊκή Εμπορική - Α.Ε.", μια δυναμικά ανερχόμενη επιχείρηση, για να καλύψει τις ανάγκες της σε προσωπικό της διευθύνσεως οικονομικών και διοικητικών υπηρεσιών της, προσέλαβε ένα νέο υπάλληλο πανεπιστημιακής εκπαιδεύσεως με διετή επαγγελματική εμπειρία. ***Η διοίκηση της επιχειρήσεως έχει δώσει εντολή στον αρμόδιο διευθυντή, ώστε το ύψος των τακτικών μηνιαίων αποδοχών, που θα προτείνει για το νέο υπάλληλο, να είναι σύμφωνο με την ακολουθούμενη από την επιχείρηση πολιτική μισθών.***

Ανατίθεται λοιπόν σ' έναν ειδικό επιστήμονα η μελέτη του πίνακα 6.3.1, ο οποίος παρουσιάζει τα χρόνια συνολικής επαγγελματικής εμπειρίας των 10 υπαλλήλων πανεπιστημιακής εκπαιδεύσεως που εργάζονται στη διεύθυνση οικονομικών και διοικητικών υπηρεσιών και τις αντίστοιχες τακτικές μηνιαίες αποδοχές τους σε χιλιάδες δρχ. (Δηλαδή δεν περιλαμβάνονται διάφορες έκτακτες οικονομικές παροχές, όπως «πριμ» καλής αποδόσεως, διάφορα άλλα «bonus» κ.λπ.).

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3.1

Έτη εμπειρίας (x)	1	1	3	4	5	5	7	7	8	9
Μηναίες αποδοχές (y) σε χιλ. δρχ.	250	260	280	280	290	310	330	340	370	350

Ας δούμε τώρα την πορεία που ακολουθήθηκε για την επίλυση αυτού του προβλήματος και τα συμπεράσματα που προέκυψαν (πιν. 6.3.2).

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3.2

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών		
(1) Έτη x	(2) Αποδοχές y	(3) xy	(4) x^2	(5) y^2
1	250	250	1	62500
1	260	260	1	67600
3	280	840	9	78400
4	280	1120	16	78400
5	290	1450	25	84100
5	310	1550	25	96100
7	330	2310	49	108900
7	340	2380	49	115600
8	370	2960	64	136900
9	350	3450	81	122500
$\Sigma x=50$	$\Sigma y=3060$	$\Sigma xy=16270$	$\Sigma x^2=320$	$\Sigma y^2=951000$

Λύση:

Ξεκινάμε να υπολογίσομε το συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως για να διαπιστώσομε αν και σε πιο βαθμό εντάσεως υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών που μελετάμε (έτη εμπειρίας και μηνιαίες αποδοχές).

Α) Υπολογισμός του ρ.

Βήμα Ι:

$$\Sigma x=50$$
$$\Sigma y=3060$$

Βήμα ΙΙ:

$$\Sigma xy=16270$$
$$\Sigma x^2=320$$
$$\Sigma y^2=951000$$

Βήμα III:

$$\rho = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\rho = \frac{10 \times 16.270 - 50 \times 3060}{\sqrt{10 \times 320 - 50^2} \cdot \sqrt{10 \times 951.000 - 3060^2}}$$

$$\rho = 0{,}958$$

Η υψηλή τιμή του συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως ($\rho \simeq 0{,}96$), μας δείχνει ότι υπάρχει πολύ έντονη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των εξεταζομένων μεταβλητών και μάλιστα θετική. Δηλαδή, σε αύξηση των χρόνων επαγγελματικής εμπειρίας έχομε αύξηση του ύψους των μηνιαίων τακτικών αποδοχών.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στον προσδιορισμό της εξισώσεως παλινδρομήσεως της μεταβλητής y (ύψος μηνιαίων τακτικών αποδοχών) επί της x (αριθμός χρόνων επαγγελματικής εμπειρίας).

Β) Προσδιορισμός εξισώσεως παλινδρομήσεως.

Ακολουθώντας τη γνωστή μας πλέον πορεία, έχομε:

$$\mu_x = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\mu_y = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{3060}{10} = 306$$

$$\Sigma xy = 16.270$$

$$\Sigma x^2 = 320$$

Τότε το $\hat{\beta}$ είναι:

$$\hat{\beta} = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{10 \times 16270 - 50 \times 3060}{10 \times 320 - 50^2}$$

$$\hat{\beta} = 13{,}857$$

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x$$

$$\hat{\alpha} = 306 - 13{,}857 \times 5$$

$$\hat{\alpha} = 236{,}714$$

Η ζητούμενη λοιπόν εξίσωση παλινδρομήσεως είναι:

$$\hat{y} = 236{,}714 + 13{,}857\,x$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν ο αριθμός των χρόνων επαγγελματικής εμπειρίας αυξάνει κατά ένα χρόνο, οι αναμενόμενες αντίστοιχες αποδοχές αυξάνουν περίπου κατά 13.857 δρχ. ($\hat{\beta} = 13{,}857$). Το $\hat{a} = 236{,}714$ δηλώνει ότι, αν κάποιος εισήρχετο για πρώτη φορά στην αγορά εργασίας, δηλαδή διέθετε μηδενική επαγγελματική εμπειρία ($x=0$), τότε το ύψος αποδοχών που αναμένεται να του δώσει η επιχείρηση θα είναι 236.714 δρχ. το μήνα.

Η απάντηση στο πρόβλημα που τέθηκε στον αρμόδιο διευθυντή, εύκολα προκύπτει πλέον από την εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = 236{,}714 + 13{,}857x$, αν, όπου x (αριθμός χρόνων επαγγελματικής εμπειρίας), θέσομε $x=2$. Δηλαδή:

$$\hat{y} = 236{,}714 + 13{,}857\,x$$

$$\hat{y} = 236{,}714 + 13{,}857 \times 2$$

$$\hat{y} = 264{,}42$$

Άρα το προτεινόμενο ύψος τακτικών μηνιαίων αποδοχών του νεοπροσληφθέντος υπαλλήλου πρέπει να είναι 264.420 δρχ.

Εύκολα θα μπορούσε κατά τα γνωστά να χαραχθεί και η αντίστοιχη ευθεία παλινδρομήσεως, $\hat{y} = 236{,}714 + 13{,}857x$.

6.4 Ανακεφαλαίωση.

1) Στο κεφάλαιο αυτό δόθηκε απάντηση στο ερώτημα του ποσοτικού προσδιορισμού του βαθμού εντάσεως της εξαρτήσεως, που υπάρχει μεταξύ των δύο μεταβλητών.

2) Με το συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως ρ μπορούμε και μετρούμε το βαθμό εξαρτήσεως μεταξύ δύο εξεταζομένων μεταβλητών, με την προϋπόθεση φυσικά, ότι η σχέση εξαρτήσεως έχει γραμμική μορφή.

3) Όσο πιο κοντά είναι οι παρατηρήσεις μας στην ευθεία παλινδρομήσεως, τόσο πιο έντονη είναι η μεταξύ των δύο μεταβλητών υπάρχουσα συσχέτιση.

4) Ο συντελεστής συσχετίσεως είναι ανεξάρτητος από τις χρησιμοποιούμενες μονάδες μετρήσεως των εξεταζομένων μεταβλητών. Ο συντελεστής συσχετίσεως είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μετρήσεως.

5) Ο συντελεστής συσχετίσεως ρ και ο συντελεστής παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ έχουν πάντοτε το ίδιο πρόσημο (+ ή −).

Η τιμή του συντελεστή συσχετίσεως κυμαίνεται μεταξύ −1 και +1. Δηλαδή:

$$-1 \leq \rho \leq +1$$

6) Αν $\rho = +1$, έχομε τέλεια θετική συσχέτιση.
Αν $\rho = -1$, έχομε τέλεια αρνητική συσχέτιση.
Αν $\rho = 0$, οι μεταβλητές είναι γραμμικά ασυσχέτιστες.

7) Αν οι μεταβλητές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, τότε ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως $\rho = 0$. Αν όμως έχομε $\rho = 0$ δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Απλά δεν υπάρχει μεταξύ τους γραμμική συσχέτιση.

8) Ο τύπος υπολογισμού του συντελεστή συσχετίσεως ρ είναι:

$$\rho = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

6.5 Ερωτήσεις.

1. Σε ποιο ερώτημα προσπαθούμε να απαντήσομε με τη βοήθεια της συσχετίσεως;
2. Σε τι μας χρησιμεύει ο συντελεστής συσχετίσεως;
3. Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού του συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως;
4. Τι πρέπει να γνωρίζομε ότι ισχύει για το συντελεστή συσχετίσεως;
5. Ποιο είναι το πεδίο τιμών του συντελεστή συσχετίσεως;
6. Ποιες τιμές παίρνει ο ρ όταν έχομε: α) Τέλεια θετική συσχέτιση και β) τέλεια αρνητική συσχέτιση;
7. Τι σημαίνει το γεγονός ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ισούται με το μηδέν;
8. Να κατασκευάσετε τρία διαγράμματα διασποράς που να δείχνουν χαμηλή, μέτρια και υψηλή συσχέτιση.
9. Να κατασκευάσετε δύο διαγράμματα διασποράς, από τα οποία το ένα να δείχνει τέλεια θετική συσχέτιση και το άλλο τέλεια αρνητική συσχέτιση.
10. Πόσο σημαντικός και γιατί είναι ο ρόλος της παλινδρομήσεως και της συσχετίσεως για τις σύγχρονες επιχειρήσεις;

ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ – ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ
ΦΥΛΛΟ ΑΥΤΟΕΛΕΓΧΟΥ

1) Στη γραμμική παλινδρόμηση η σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής και της εξαρτημένης είναι αυτή της:

I. Ευθείας γραμμής.

II. Καμπύλης γραμμής.

2) Ο συντελεστής γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ μας δείχνει:

I. Την ποσοστιαία μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή από μια μεταβολή της ανεξάρτητης κατά 1%.

II. Την ποσοστιαία μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή από μια μεταβολή της ανεξάρτητης κατά 10%.

III. Τη μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή από μια μοναδιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

3) Ο συντελεστής γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ έχει πρόσημο:

I. Πάντα θετικό.

II. Πάντα αρνητικό.

III. Είτε θετικό, είτε αρνητικό.

4) Στην εξίσωση παλινδρομήσεως με $\hat{y}$.

I. Συμβολίζομε τις πραγματικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής.

II. Συμβολίζομε τις «θεωρητικές» τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, που μας δίνει η εξίσωση παλινδρομήσεως.

III. Συμβολίζομε και τις πραγματικές και τις θεωρητικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής.

IV. Συμβολίζομε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

5) Η παράμετρος $\hat{\alpha}$ της γραμμικής παλινδρομήσεως δίνεται από τον τύπο:

I. $\hat{\alpha} = y - \hat{\beta} x$

II. $\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} \mu_x$

III. $\hat{\alpha} = \hat{y} - \hat{\beta} x$

IV. $\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta} x$

6) Αν στην εξίσωση γραμμικής παλινδρομήσεως είναι το $x=0$, τότε θα έχομε:

I. $\hat{y} = \hat{\beta}$

II. $\hat{y} = \alpha$

III. $\hat{y} = -\beta$

7) Η παλινδρόμηση και η συσχέτιση χρησιμοποιούνται για τη μελέτη:

I. Μόνο μονομεταβλητών πληθυσμών.

II. Μόνο διμεταβλητών πληθυσμών.

III. Μόνο πολυμεταβλητών πληθυσμών.

IV. Είτε διμεταβλητών είτε πολυμεταβλητών πληθυσμών.

8) Ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως παίρνει τιμές:

I. Από 0 έως 1.

II. Από -1 έως 0.

III. Από -1 έως 1.

IV. Από $-\infty$ έως $+\infty$.

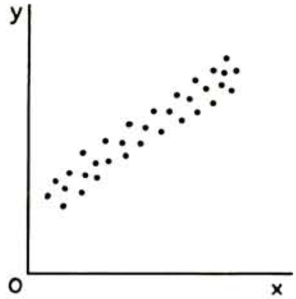
9) Ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ και ο συντελεστής γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ έχουν:

I. Πάντοτε το ίδιο πρόσημο.

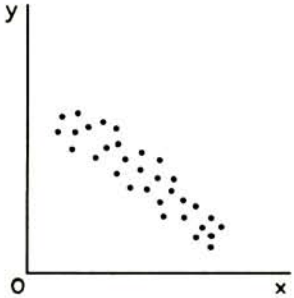
II. Πάντοτε διαφορετικό πρόσημο.

III. Άλλοτε το ίδιο και άλλοτε διαφορετικό πρόσημο.

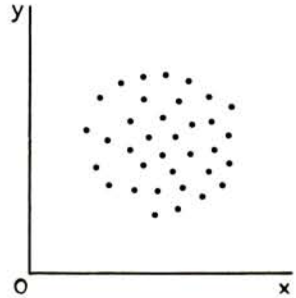
10) Η μεταξύ των μεταβλητών υπάρχουσα συσχέτιση είναι:



I. Θετική
II. Αρνητική
III. Δεν υπάρχει συσχέτιση



I. Θετική
II. Αρνητική
III. Δεν υπάρχει συσχέτιση



I. Θετική
II. Αρνητική
III. Δεν υπάρχει συσχέτιση

6.6 Ασκήσεις.

*1 Δίνονται τα παρακάτω δεδομένα:

x:	1	2	4	6	7	9
y:	2	3	5	6	8	9

Ζητείται να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.

*2 Η από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y μας έδωσε τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

x:	5	7	10	12	15	16
y:	10	10	12	15	17	20

Ζητείται να υπολογισθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.

*3 Η από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y μας έδωσε τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

x:	1	2	4	5	7	9	10
y:	8	7	5	4	4	3	2

Ζητείται να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.

*4 Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η βαθμολογία μιας ομάδας 6 σπουδαστών στα μαθηματικά x και στη στατιστική y:

Μαθηματικά (x)	1	2	5	6	7	9
Στατιστική (y)	2	2	5	7	8	9

Ζητείται να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα.

*5 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αναστήματα x 8 πατέρων σε εκατοστά του μέτρου και τα αντίστοιχα αναστήματα των γιων τους y σε εκατοστά του μέτρου:

Πατέρες (x)	165	167	170	175	178	180	185	190
Γιοι (y)	168	170	174	178	180	182	183	187

Ζητείται να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.

*6 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα έτη υπηρεσίας x και το ύψος των μηνιαίων τακτικών αποδοχών y σε χιλιάδες δρχ. 8 εργατών ενός τμήματος παραγωγής σ' ένα εργοστάσιο:

Έτη (x)	1	3	4	5	5	6	6	8
Αποδοχές (y)	150	160	165	165	170	170	175	180

Ζητείται να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα.

**7 Με βάση τα δεδομένα της ασκήσεως 9, της παραγράφου 5.9.
α) Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ, να σχολιασθεί το αποτέλεσμα και β) να ερμηνευθεί η παράμετρος $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

**8 Η από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y μας έδωσε, μετά από υπολογισμούς, τα παρακάτω αθροίσματα:

$\Sigma x=30$, $\Sigma y=33$, $\Sigma x^2=196$

$\Sigma xy=210$, $\Sigma y^2=227$, $N=6$

Ζητείται:
α) Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.
β) Να βρεθεί η εξίσωση γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$

**9 Η από κοινού μελέτη των μεταβλητών x και y μας έδωσε, κατόπιν υπολογισμών, τα παρακάτω δεδομένα:

$\mu_x=2$, $\mu_y=2{,}5$, $\Sigma x^2=18$

$N=4$, $\Sigma xy=21$, $\Sigma y^2=26$

Ζητείται:

α) Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.
β) Να βρεθεί η εξίσωση γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

*10 Με βάση τα δεδομένα της ασκήσεως 7, της παραγράφου 5.9, να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής παλινδρομήσεως ρ και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα που θα προκύψει.

*11 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ετήσια εισοδήματα x σε δεκάδες χιλιάδες δρχ. και τα αντίστοιχα ετήσια έξοδα τηλεφωνικών λογαριασμών y σε δεκάδες χιλιάδες δρχ. μιας ομάδας 8 νοικοκυριών:

x:	300	350	400	450	500	550	600
y:	9	8	10	13	13	16	15

Ζητείται:
α) Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.
β) Να υπολογισθούν οι παράμετροι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της εξισώσεως παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

**12 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα ετήσια εισοδήματα x σε εκατομμύρια δρχ. και τις αντίστοιχες δαπάνες διατροφής y σε εκατομμύρια δρχ. μιας ομάδας 7 νοικοκυριών:

x:	3	3,3	3,5	3,8	4	4,2	4,3
y:	1,3	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,7

Ζητείται:
α) Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ.
β) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

***13 Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται σε 10 ομοειδείς εμπορικές επιχειρή-σεις και δείχνει τις ετήσιες πωλήσεις τους y και τις αντίστοιχες ετήσιες διαφημιστικές τους δαπάνες x.
Τα δεδομένα εκφράζονται σε εκατ. δρχ.:

x:	20	22	25	30	32	35	40	50	60	70
y:	250	270	260	350	330	300	370	480	450	500

Ζητείται:
α) Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως ρ και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα.
β) Να προσδιορισθεί η εξίσωση γραμμικής παλινδρομήσεως.

γ) Να ερμηνευθούν οι ευρεθείσες τιμές των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

δ) Ποιο αναμένεται να είναι το ετήσιο ύψος των πωλήσεων εμπορικής επιχειρήσεως με ετήσιο ύψος διαφημιστικών δαπανών 45 εκατ. δρχ.;

***14 Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις ζητούμενες ποσότητες y σε τόνους και τις αντίστοιχες τιμές x σε χιλιάδες δρχ. κατά τόνο, ενός αγαθού, για ορισμένη χρονική περίοδο:

x:	30	33	35	38	40	42	43
y:	58	55	55	52	50	50	48

Ζητείται:

α) Να βρεθεί και να σχολιασθεί η τιμή του συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως ρ.

β) Να βρεθεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

γ) Να ερμηνευθούν οι τιμές των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, που έχουν βρεθεί.

δ) Να υπολογισθούν οι αναμενόμενες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, όταν x=25 και x=45.

*15 Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει τη μέση ετήσια κατά κεφαλή κατανάλωση y σε κιλά ενός αγαθού, σε σχέση με το κατά κεφαλή εισόδημα x σε δεκάδες χιλιάδες δρχ., μιας ομάδας ατόμων.

x:	65	68	70	73	75	78	85	90
y:	40	40	41	43	45	48	50	50

Ζητείται:

α) Να βρεθεί και να σχολιασθεί η τιμή του συντελεστή γραμμικής συσχετίσεως ρ.

β) Να προσδιορισθεί η εξίσωση γραμμικής παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

γ) Να ερμηνευθούν οι τιμές των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και β της εξισώσεως παλινδρομήσεως.

δ) Να βρεθούν οι διαφορές μεταξύ των πραγματικών τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής y και των αντιστοίχων τιμών που μας δίνει η $\hat{y} = \hat{\alpha} + \beta x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Βουλευόμενος παραδείγματα ποιοῦ τὰ παρεληλυθότα τῶν μελλόντων.

(Όταν σκέπτεσαι για να πάρεις αποφάσεις, να στηρίζεις την απόφασή σου για τα μελλοντικά σε παραδείγματα του παρελθόντος).

Ισοκράτης, Α' 34.

Η διοίκηση απαιτεί ακριβείς υπολογισμούς, στατιστικές μεθόδους, χρονολογικούς πίνακες και τυποποιημένες διαδικασίες.

Από ομιλία του Lord Slim (1891-1970) στην Αυστραλιανή Εταιρεία Δοικήσεως

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

7.1 Έννοια και χρησιμότητα των χρονολογικών σειρών για την οικονομία και τις επιχειρήσεις.

Υπό τον όρο χρονολογική σειρά (time series), εννοούμε τη σειρά τιμών που παίρνει μια μεταβλητή σε προκαθορισμένα και συνήθως ισαπέχοντα χρονικά σημεία ή σε διαδοχικές χρονικές περιόδους, που έχουν συνήθως την ίδια διάρκεια.

Οι πωλήσεις π.χ. μιας επιχειρήσεως κατά τη διάρκεια ενός μήνα ή ο όγκος των εισαγωγών και των εξαγωγών κατά τη διάρκεια ενός έτους, ή ο ετήσιος δείκτης τιμών καταναλωτή που τοποθετείται συνήθως στο μέσο του χρόνου, δηλαδή την 1η Ιουλίου, συνιστούν χρονολογική σειρά. Συνοπτικότερα θα μπορούσαμε να πούμε ότι χρονολογική σειρά είναι μια σειρά δεδομένων που έχουν καταταχθεί χρονολογικά.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της διαχρονικής εξελίξεως της εξεταζόμενης μεταβλητής και ακόμη με την πρόβλεψη της συμπεριφοράς της στο μέλλον. Δηλαδή, μελετώντας και αναλύοντας τα δεδομένα του παρελθόντος, θα προσπαθήσομε να προβλέψομε, έστω και με προσέγγιση, το μέλλον. Την υπό μελέτη μεταβλητή, την οποία θα θεωρούμε ως συνάρτηση του χρόνου t, θα την συμβολίζομε με y. Οι παρατηρήσεις μας θα αποτελούνται από ζεύγη τιμών της μορφής:

$$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots, (t_i, y_i), \ldots, (t_N, y_N).$$

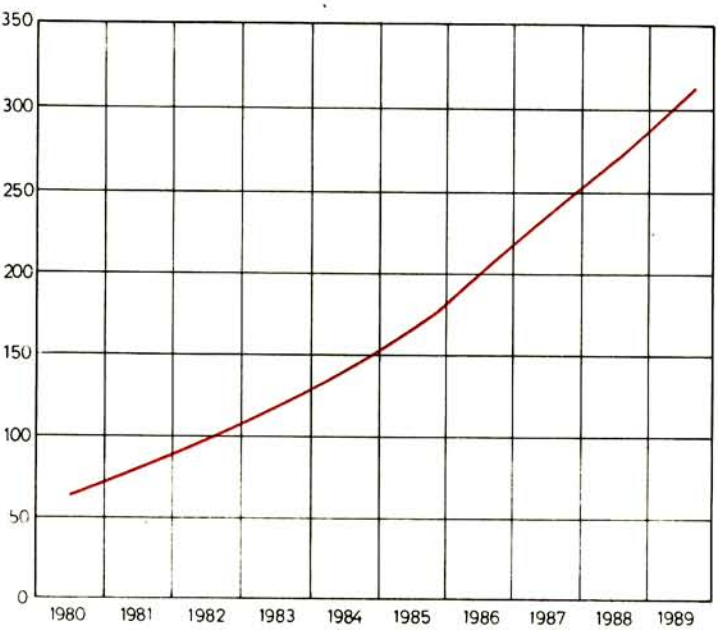
Η σύγχρονη επιχειρηματική δραστηριότητα, αλλά και η οικονομική δραστηριότητα, γενικότερα, στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στη μελέτη δεδομένων του παρελθόντος και στην πρόβλεψη για το μέλλον. Ένα καλά οργανωμένο π.χ. κράτος, που ενδιαφέρεται να καταρτίσει ένα σωστό προγραμματισμό, θα πρέπει να γνωρίζει το προβλεπόμενο ποσοστό αυξήσεως των κυκλοφορούντων αυτοκινήτων κατά την επόμενη δεκαετία ή το ποσοστό αυξήσεως των υπερηλίκων ατόμων κατά τα επόμενα χρόνια κ.λπ., ώστε να αποφασίσει έγκαιρα και κατά το δυνατόν ορθότερα τη σύνταξη των αναγκαίων προγραμμάτων.

Οι σύγχρονες επιχειρήσεις προχωρούν και αυτές σε κατάρτιση προγραμμάτων για το μέλλον, προγραμμάτων που σχετίζονται με το ύψος της μελλοντικής παραγωγής τους και των πωλήσεών τους, με την κατά το δυνατόν ασφαλέστερη πρόβλεψη επιχειρηματικών κλάδων, που παρουσιάζουν επενδυτικές προοπτικές καλύτερες από άλλους κ.λπ. Αυτού του είδους ο προγραμματισμός είναι πλέον απαραίτητος σε μια επιχείρηση, γιατί την βοηθά σε μεγάλο βαθμό να μειώσει, κατά το δυνατόν, τον επιχειρηματικό κίνδυνο, να ανταπεξέλθει στον ανταγωνισμό και φυσικά να αυξήσει τα κέρδη της. Εδώ θα πρέπει να πούμε ότι οι χρονολογικές σειρές, που αναφέρονται στη μελέτη μιας μεταβλητής οικονομικού χαρακτήρα, ονομάζονται ***οικονομικές χρονολογικές σειρές.***

Η γραφική απεικόνιση των χρονολογικών σειρών γίνεται με τα χρονολογικά διαγράμματα ή χρονογράμματα. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται για τη μέτρηση του χρόνου t και ο κάθετος για την εξεταζόμενη μεταβλητή.y, ενώ οι παρατηρήσεις μας αντιστοιχίζονται με τα ζεύγη τιμών (t_i, y_i) (βλέπε διαγράμματα 7.1.1, 7.1.2 και 7.1.3).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.1.1

Δείκτης τιμών καταναλωτού

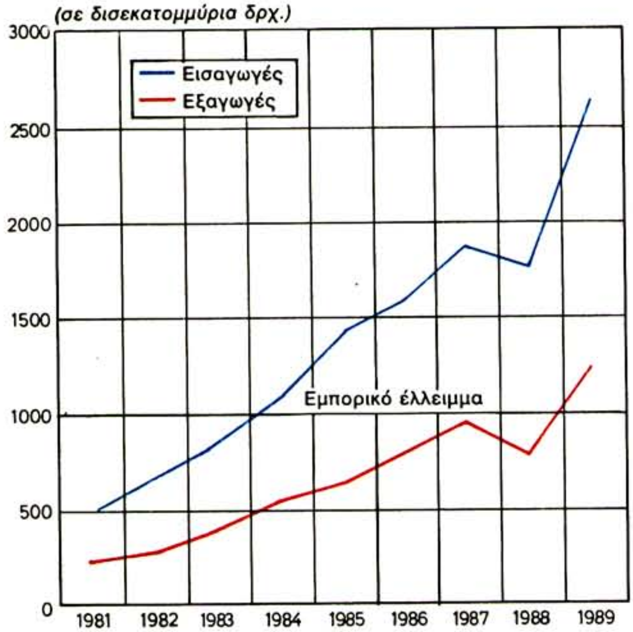


7.2 Συνιστώσες χρονολογικής σειράς.

Η βασική ιδέα που χαρακτηρίζει τη μελέτη των χρονολογικών σειρών είναι ότι συστηματικές επιδράσεις που σχετίζονται με το χρόνο, επιδρούν στις τιμές των χρονολογικών σειρών. Η εξέταση λοιπόν μιας χρονολογικής σειράς, η μελέτη δηλαδή της διαχρονικής εξελίξεως μιας μεταβλητής, μας αποκαλύπτει ότι οι τιμές της μεταβλητής διαμορφώνονται κυρίως υπό την επίδραση τεσσάρων επιρροών, συνιστωσών (time - series components), που είναι:

1) Η μακροχρόνια τάση (secular trend) ή απλά τάση, (T).
2) Οι κυκλικές κυμάνσεις (cyclical fluctuations), (C).
3) Οι εποχιακές κυμάνσεις (seasonal fluctuations), (S).
4) Οι τυχαίες ή άρρυθμες κινήσεις (random or irregular movements), (I).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.1.2
Εισαγωγές, εξαγωγές, εμπορικό ισοζύγιο

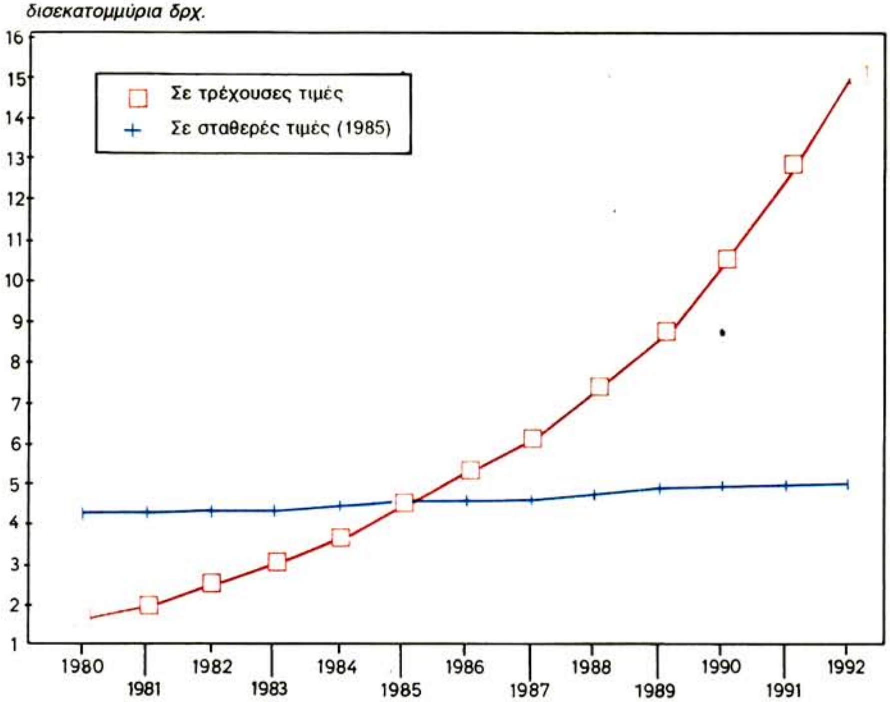


1) Η μακροχρόνια τάση είναι η γενική μακράς διάρκειας κίνηση — ανοδική ή καθοδική — που θα ακολουθεί μια χρονολογική σειρά. Αν σ' ένα χρονοδιάγραμμα παρατηρήσομε ότι η χρονολογική σειρά ακολουθεί πορεία παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα t, στην περίπτωση αυτή η χρονολογική σειρά δεν έχει τάση. Διάφοροι παράγοντες επιδρούν αυξητικά στην τάση, όπως η αύξηση του πληθυσμού, η τεχνολογική πρόοδος, η συνεχής καλυτέρευση του βιοτικού επιπέδου κ.λπ. Μειωτικά επηρεάζουν παράγοντες, όπως είναι η παραγωγή νέου προϊόντος που επιδρά στη ζήτηση του παλαιού, όταν ικανοποιούν την ίδια ανάγκη (όπως έγινε με το αυτοκίνητο και την ιπποκίνητη άμαξα ή την έγχρωμη και ασπρόμαυρη τηλεόραση κ.λπ.), η εμφάνιση ενός υποκατάστατου προϊόντος κ.λπ.

2) Κυκλικές κυμάνσεις είναι οι περιοδικές κινήσεις, οι οποίες έχουν διάρκεια μεγαλύτερη του έτους και παρουσιάζουν για κάποιο χρονικό διάστημα ανοδική κίνηση και εν συνεχεία καθοδική. Τέτοιες κυκλικές κυμάνσεις παρατηρούμε κατά τη μελέτη διαφόρων μακροοικονομικών μεγεθών, όπως π.χ. του εθνικού εισοδήματος, της συνολικής απασχολήσεως κ.λπ., το ίδιο δε φαινόμενο παρατηρείται και στην παραγωγή ορισμένων γεωργικών προϊόντων. Ο προσδιορισμός και η αξιολόγηση των κυκλικών κυμάνσεων είναι δυσχερής στην πράξη, επειδή απαιτούνται χρονολογικές σειρές πολυετών περιόδων. Το μήκος της περιόδου των κυκλικών κυμάνσεων δεν είναι σταθερό και μερικές φορές είναι δύσκολο να ξεχωρίσει κάποιος το ανοδικό ή καθοδικό σκέλος ενός κύκλου.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.1.3

Ακαθάριστο εγχώριο προϊόν σε τρέχουσες και σταθερές τιμές

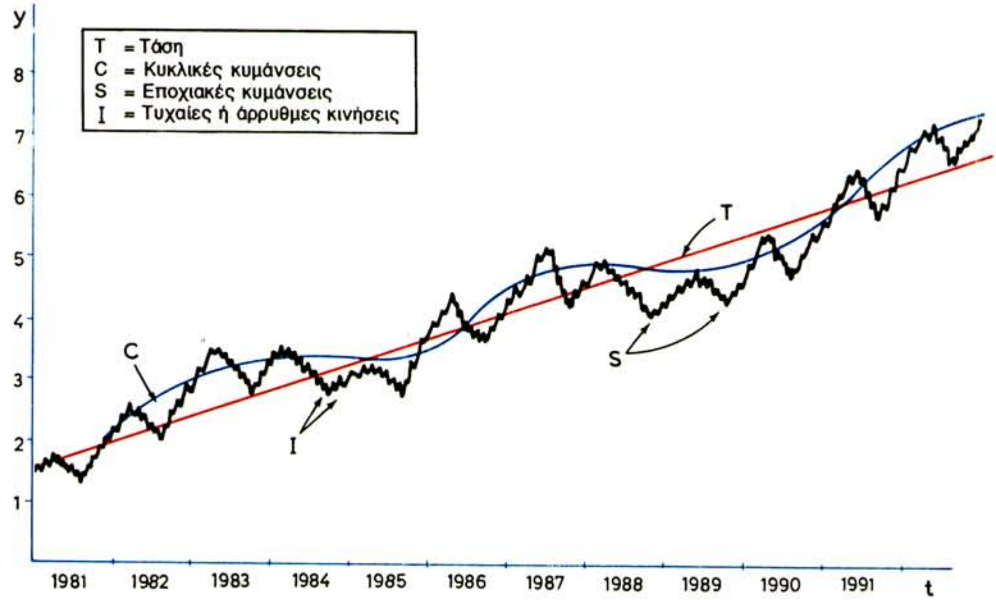


Πηγή: Τράπεζα Ελλάδος

3) Εποχικές κυμάνσεις είναι περιοδικές κινήσεις, που εξαντλούν μέσα σ' ένα έτος όλες τις ανοδικές και τις καθοδικές κινήσεις τους και απαιτούνται μηνιαία ή τριμηνιαία στατιστικά δεδομένα για τη μελέτη τους. Οι περισσότερες οικονομικές χρονολογικές σειρές δέχονται εποχιακές επιρροές διαφόρων αιτιών (θρησκευτικών, κλιματολογικών, θεσμικών κ.λπ.). Τέτοιες π.χ. είναι η αύξηση των πωλήσεων των εμπορικών καταστημάτων κατά τους μήνες των εκπτώσεων και των εορτών, η αύξηση της καταναλώσεως αναψυκτικών ποτών τους θερινούς μήνες κ.λπ.

4) Τυχαίες ή άρρυθμες κινήσεις. Εκτός από την τάση και τις κυκλικές και εποχικές κυμάνσεις, που αναφέραμε προηγουμένως, ***υπάρχει περίπτωση να εμφανίζει μια χρονολογική σειρά μεγάλες ή μικρές και χωρίς καμία κανονικότητα ή ρυθμό κινήσεις, τις οποίες ονομάζομε τυχαίες ή άρρυθμες κινήσεις.*** Αυτές οι κινήσεις οφείλονται είτε σε σοβαρά και καθαρά συμπτωματικά γεγονότα (πόλεμοι, σεισμοί, πλημμύρες, επιδημίες κ.λπ.), είτε σε πολυάριθμους άγνωστους παράγοντες ή όπως συνηθίζομε να λέμε στην τύχη. Στο διάγραμμα 7.2.1, που έχει γίνει με υποθετικά δεδομένα, παρουσιάζονται και οι τέσσερις χρονολογικές συνιστώσες που αναφέραμε πιο πάνω.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.2.1
Συνιστώσες χρονολογικές σειρές



7.3 Προσδιορισμός της τάσεως.

Την τάση, τη γενική δηλαδή κίνηση ή αλλιώς μακρόχρονη πορεία μιας χρονολογικής σειράς, την προσδιορίζομε χρησιμοποιώντας, συνήθως, ετήσια δεδομένα. Φυσικά, στην περίπτωση αυτή εξαλείφεται η εποχική συνιστώσα που έχει περίοδο μικρότερη από 12 μήνες.

Μια πολύ απλή μέθοδος προσδιορισμού της τάσεως είναι ***η χάραξη της τάσεως με το χέρι*** (freehand method). Στην περίπτωση αυτή, ο ερευνητής, ο οποίος πρέπει να είναι έμπειρος, πολύ προσεκτικά χαράσσει με το χέρι μια ευθεία ή καμπύλη γραμμή – γραμμή τάσεως – η οποία διέρχεται ανάμεσα από την πολυγωνική γραμμή του χρονοδιαγράμματος. Βέβαια, εδώ απαιτείται μεγάλη εξάσκηση και προσοχή από μέρους του ερευνητή, ώστε η χάραξη της τάσεως να εκφράζει με επιτυχία τη μακρόχρονη πορεία της χρονολογικής σειράς και φυσικά σε κάθε περίπτωση η χάραξη είναι υποκειμενική.

Μια άλλη απλή μέθοδος προσδιορισμού της τάσεως, στην περίπτωση της ευθύγραμμης τάσεως, είναι ***η μέθοδος των δύο μέσων σημείων,*** κατά την οποία χωρίζομε τις παρατηρήσεις μας σε δύο ίσες ομάδες και βρίσκομε το μέσο αριθμητικό της κάθε ομάδας. Στη συνέχεια στο αντίστοιχο διάγραμμα βρίσκομε τα σημεία (t_1, y_1) και (t_2, y_2), τα οποία ενώνομε με μια ευθεία, όπου t_1 και t_2 είναι τα μέσα των χρονικών διαστημάτων των δύο ομάδων και y_1 και y_2 είναι οι αντίστοιχοι μέσοι αριθμητικοί των δύο ομάδων.

Παράδειγμα.

Ο πίνακας 7.3.1 περιέχει τις παραχθείσες ποσότητες (y) ενός αγαθού σε τόνους μιας βιομηχανικής επιχειρήσεως για τα έτη 1984 μέχρι 1993. Ζητείται να γίνει το χρονοδιάγραμμα και να χαραχθεί η ευθεία τάσεως.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3.1

	Έτη	t	Παραγωγή y
ομάδα 1η	1984	0	5
	1985	1	10
	1986	2	10
	1987	3	15
	1988	4	20
		$10:5=2=t_1$	$60:5=12=y_1$
ομάδα 2η	1989	5	20
	1990	6	25
	1991	7	30
	1992	8	30
	1993	9	35
		$35:5=7=t_2$	$140:5=28=y_2$

Αφού χωρίσαμε τη χρονολογική σειρά σε δύο ίσες ομάδες παρατηρήσεων, η πρώτη ομάδα αναφέρεται στα έτη 1984-88 και η δεύτερη στα έτη 1989-1993, βρήκαμε τους αντίστοιχους μέσους των ομάδων. Για μεν την πρώτη ομάδα έχομε μέσο αριθμητικό $y_1 = \frac{60}{5} = 12$, για δε τη δεύτερη $y_2 = \frac{140}{5} = 28$. Κατόπιν (διάγραμμα 7.3.1), φέρνομε στο χρονοδιάγραμμα μια ευθεία — ευθεία τάσεως — που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2 που έχουν τετμημένες τα μέσα των χρονικών διαστημάτων των δύο ομάδων (έτη 1986 και 1991) και τεταγμένες τους μέσους $y_1=12$ και $y_2=28$, δηλαδή M_1 ($t_1=2$, $y_1=12$) και M_2 ($t_2=7$, $y_2=28$).

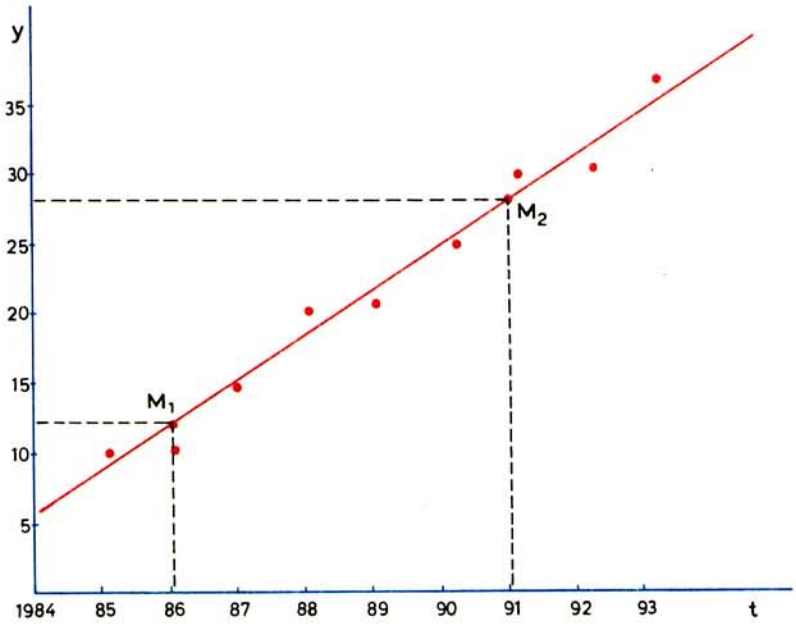
Η εξίσωση της ευθείας τάσεως M_1M_2 που διέρχεται από τα σημεία M_1 ($t_1=2$, $y_1=12$) και M_2 ($t_2=7$, $y_2=28$) είναι:

$$\frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{\hat{y}-y_1}{y_2-y_1} \quad ή \quad \frac{t-2}{7-2} = \frac{\hat{y}-12}{28-12} \quad και \quad \hat{y} = 5{,}6 + 3{,}2t$$

7.3.1 Προσδιορισμός ευθύγραμμης τάσεως με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Από όλες όμως τις μεθόδους, η πιο συνηθισμένη, που εφαρμόζεται στην πράξη για τον προσδιορισμό της τάσεως, είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, που γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.3.1



Αν λοιπόν η διαχρονική εξέλιξη της εξεταζόμενης μεταβλητής y μπορεί να αναπαρασταθεί ικανοποιητικά από μια γραμμή της μορφής

$$y=\alpha+\beta t \tag{7.1}$$

τότε ο προσδιορισμός της συγκεκριμένης ευθείας — ευθείας τάσεως — γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Από το γνωστό μας σύστημα κανονικών εξισώσεων

$$\Sigma y=N\alpha+\beta\Sigma t \tag{7.2}$$

$$\Sigma yt=\alpha\Sigma t+\beta\Sigma t^2 \tag{7.3}$$

παίρνομε τις τιμές των παραμέτρων α και β. Επειδή όμως, στην περίπτωση των χρονολογικών σειρών, μπορούμε να πάρομε ως αρχή (t=0) το κεντρικό έτος της χρονολογικής σειράς, οπότε το Σt=0, το ***σύστημα των χρονολογικών εξισώσεων απλοποιείται*** και γίνεται:

$$\Sigma y=N\alpha \tag{7.4}$$

$$\Sigma yt=\beta\Sigma t^2 \tag{7.5}$$

οπότε έχομε:

$$\hat{\alpha}=\frac{\Sigma y}{N} \qquad \hat{\beta}=\frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2}$$

Έτσι ο υπολογισμός των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ όπως βλέπομε, είναι πολύ απλούστερος. Ο συντελεστής κατευθύνσεως της ευθείας τάσεως, ο $\hat{\beta}$, δείχνει τη μέση ετήσια μεταβολή της τάσεως. Αν έχομε $\hat{\beta} > 0$ υπάρχει ανοδική τάση, αν $\hat{\beta} < 0$ υπάρχει καθοδική τάση, αν $\hat{\beta} = 0$ τότε η χρονολογική σειρά κινείται παράλληλα προς τον άξονα t και δεν έχει τάση.

Εδώ θα πρέπει να πούμε ότι για να εφαρμόσομε τους τύπους (7.4) και (7.5) του απλοποιημένου συστήματος εξισώσεων, ώστε $\Sigma t = 0$, αν μεν έχομε περιττό αριθμό ετών παίρνομε ως αρχή $t = 0$, το μεσαίο έτος της χρονολογικής σειράς. Π.χ. εάν έχομε 7 έτη, 1987-1993, ορίζομε την αντιστοιχία

−3	−2	−1	0	1	2	3
1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993

Ενώ για άρτιο αριθμό ετών (1989-1994) παίρνομε ως διάμεσο έτος το ημιάθροισμα των δύο κεντρικών ετών (1991 και 1992), οπότε έχομε:

−2,5	−1,5	−0,5	0,5	1,5	2,5
1989	1990	1991	1992	1993	1994

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω παραθέτομε τις ακόλουθες δύο εφαρμογές.

Εφαρμογές από το χώρο των επιχειρήσεων και της οικονομίας.

Εφαρμογή 1 (περιττός αριθμός ετών).

Ο πίνακας 7.3.2 δείχνει τον αριθμό μοτοσυκλετών ***(σε χιλιάδες)*** που κυκλοφορούσαν στην Ελλάδα τη χρονική περίοδο 1977-1989. Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση τάσεως, να γίνει το χρονοδιάγραμμα και να χαραχθεί επάνω σ' αυτό η ευθεία τάσεως.

Βήμα Ι: Δημιουργία της στήλης t. Δημουργούμε τη στήλη (3) του πίνακα 7.3.2 αντιστοιχίζοντας το μεσαίο έτος 1983 στην υποδιαίρεση μηδέν του άξονα t (επειδή έχομε περιττό αριθμό ετών).

Βήμα ΙΙ: Υπολογισμός Σy, Σyt και Σt^2. Αθροίζοντας τους όρους της στήλης (2) βρίσκομε $\Sigma y = 1860$.

Πολλαπλασιάζοντας τους όρους της στήλης (2) επί τους αντίστοιχους της στήλης (3), δημιουργούμε τη στήλη (4). Η άθροιση των όρων της στήλης (4) μας δίνει το Σyt, δηλαδή $\Sigma yt = 1891$.

Από τη στήλη (3) δημιουργούμε τη στήλη (5), υψώνοντας στο τετράγωνο τους όρους της στήλης (3). Η άθροιση των όρων της στήλης (5) μας δίνει το Σt^2, δηλαδή $\Sigma t^2 = 182$.

Βήμα ΙΙΙ: Υπολογισμός των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

$$\hat{\alpha} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{1860}{13} = 143{,}077$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2} = \frac{1891}{182} = 10{,}39$$

Επομένως, η εξίσωση ευθύγραμμης τάσεως της χρονολογικής σειράς είναι:

$$y = 143{,}077 + 10{,}39t$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3.2

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών		
Έτη (1)	Μοτοσυκλέτες (y) (2)	t (3)	yt (4)	t^2 (5)
1977	97	−6	−582	36
1978	101	−5	−505	25
1979	110	−4	−440	16
1980	96	−3	−288	9
1981	106	−2	−212	4
1982	122	−1	−122	1
1983	139	0	0	0
1984	152	1	152	1
1985	162	2	324	4
1986	174	3	522	9
1987	183	4	732	16
1988	198	5	990	25
1989	220	6	1320	36
	Σy=1860	Σt=0	Σyt=1891	Σt^2=182

Πηγή: ΕΣΥΕ

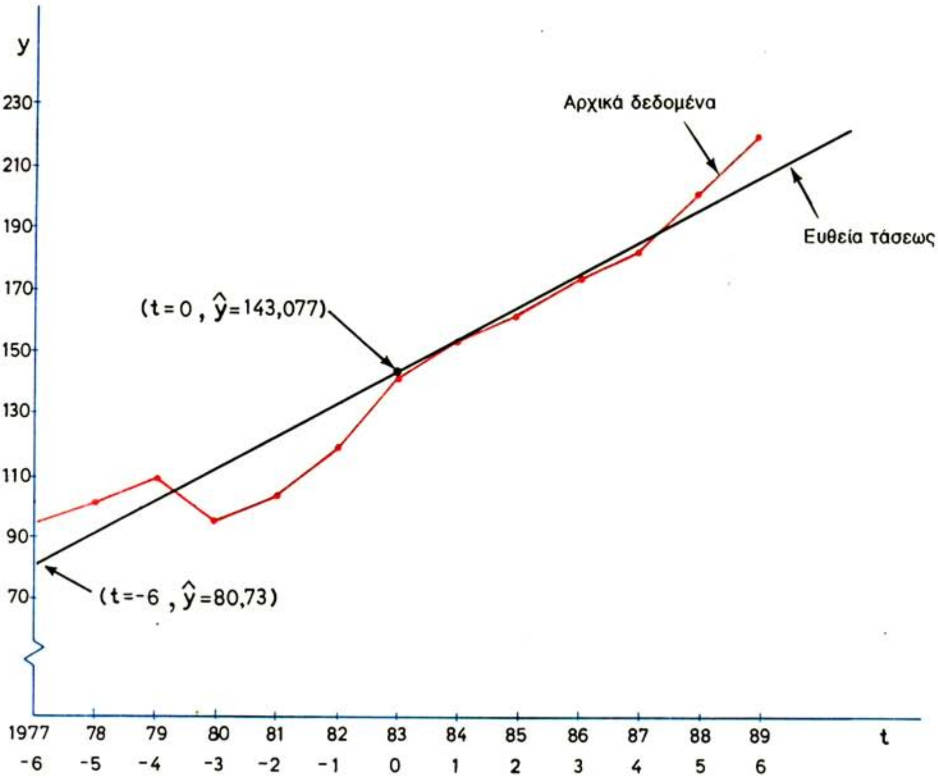
Σημείωση: Τα δεδομένα της στήλης 2 έχουν στρογγυλοποιηθεί σε ακέραιες χιλιάδες χάρη ευκολίας των υπολογισμών.

Επειδή εδώ έχομε αντιστοιχίσει το έτος 1983 στην υποδιαίρεση 0 του οριζόντιου άξονα, γι' αυτό η ευθεία της τάσεως και ο κάθετος άξονας τέμνονται στο σημείο (t=−6, y=80,73) (διάγρ. 7.3.2), διότι Y=143,077+10,39 × (−6) και Y=80,73.

Ας υποθέσομε τώρα ότι το κράτος ή η διοίκηση μιας επιχειρήσεως, με κύκλο επιχειρηματικών δραστηριοτήτων επηρεαζόμενο από τον αριθμό των μοτοσυκλετών, που κυκλοφορούν (π.χ. εταιρείες ασφαλιστικές, ανταλλακτικών κ.α.), επιθυμεί, πριν προχωρήσει στη λήψη αποφάσεων για την πορεία της επιχειρήσεως, να συμπληρώσει το «πακέτο πληροφορήσεώς» της και με την κατά προσέγγιση έστω πρόβλεψη του αριθμού των μοτοσυκλετών που θα κυκλοφορούν στην Ελλάδα μετά τρία χρόνια, δηλαδή το 1992. Ακόμη να γνωρίζει ποια ήταν κατά τα τελευταία 13 χρόνια

(1977-1989) η μέση ετήσια μεταβολή του αριθμού των μοτοσυκλετών που κυκλοφορούσαν.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.3.2



Πρόβλεψη για το 1992.

Επειδή το 1992 αντιστοιχεί σε t=9 έχομε:

$$\hat{y} = 143{,}077 + 10{,}39 \times 9$$

$$\hat{y} = 236{,}587$$

Δηλαδή προβλέπεται να κυκλοφορούν περίπου 236,587 χιλιάδες μοτοσυκλέτες.

Επίσης, επειδή $\hat{\beta} = 10{,}39$ σημαίνει ότι κατά την περίοδο 1977-1989 οι κυκλοφορούσες μοτοσυκλέτες παρουσίασαν μέση ετήσια αύξηση ($\hat{\beta} > 0$) ίση με 10.390 μοτοσυκλέτες.

Εφαρμογή 2: (άρτιος αριθμός ετών).

Ο πίνακας 7.3.3 παρουσιάζει την κατά κεφαλήν ακαθάριστη επένδυση πάγιου κεφαλαίου (per capita expenditure on gross fixed capital formation) στην Ελλάδα κατά την 10ετία, 1982-1991.

Ζητείται να ευρεθεί η εξίσωση τάσεως αυτής της χρονολογικής σειράς.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3.3

Στήλες δεδομένων		Στήλες υπολογισμών		
Έτη (1)	$ΗΠΑ (y) (2)	t (3)	yt (4)	t^2 (5)
1982	286	−4,5	−1287	20,25
1983	281	−3,5	−983,5	12,25
1984	264	−2,5	−660	6,25
1985	276	−1,5	−414	2,25
1986	258	−0,5	−129	0,25
1987	245	0,5	122,5	0,25
1988	266	1,5	399	2,25
1989	292	2,5	730	6,25
1990	578	3,5	2023	12,25
1991	489	4,5	2200,5	20,25
	Σy=3235	Σt=0	Σyt=2001,5	Σt^2=82,5

Σταθερές τιμές (1970)
Πηγή: ΕΣΥΕ

Βήμα Ι: Επειδή εδώ έχομε άρτιο αριθμό ετών, παίρνομε διάμεσο έτος το ημιάθροισμα των ετών 1986 και 1987 (1986,5) και δημιουργούμε στήλη (3) του πίνακα 7.3.3.

Βήμα ΙΙ: Υπολογίζομε, κατά τα γνωστά, τα αθροίσματα

$$\Sigma yt = 2001{,}5$$

$$\Sigma t^2 = 82{,}5$$

Βήμα ΙΙΙ: Υπολογισμός των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$

$$\hat{\alpha} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{3235}{10} = 323{,}5$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2} = \frac{2001{,}5}{82{,}5} = 24{,}260$$

Επομένως, η εξίσωση ευθύγραμμης τάσεως της χρονολογικής σειράς είναι:

$$\hat{y} = 323{,}5 + 24{,}26\,t$$

Αν θέλομε π.χ. να κάνομε μια πρόβλεψη για το έτος 1993, θέτομε t=6,5 (1993-1986,5), οπότε έχομε:

$$\hat{y} = 323{,}5 + 24{,}2 \times 6{,}5$$

$$\hat{y} = 481{,}19$$

7.4 Δείκτες εποχικότητας.

Θα μελετήσομε τώρα μια άλλη συνιστώσα των χρονολογικών σειρών, την εποχική κύμανση ή απλά εποχικότητα. Δηλαδή θα ασχοληθούμε με τη μελέτη χρονολογικών σειρών που παρουσιάζουν μεταβολές, οι οποίες επαναλαμβάνονται την ίδια εποχή κάθε έτους (εποχιακές μεταβολές). Η μέτρηση της εποχικότητας γίνεται με τους δείκτες εποχικότητας (seasonal indexes) και υπάρχουν διάφορες μέθοδοι υπολογισμού αυτών των δεικτών. Εδώ θα παρουσιάσομε τη μέθοδο των ποσοστών ως προς το μηνιαίο μέσο. Πρόκειται για μια απλή μέθοδο και για την καλύτερη κατανόησή της θα την παρουσιάσομε με τη βοήθεια του παρακάτω παραδείγματος.

Παράδειγμα.

Ο πίνακας 7.4.1 περιέχει τη μηνιαία παραγωγή σε τόνους ενός βιομηχανικού προϊόντος τα έτη 1991-1993. Ζητείται να βρεθούν και να ερμηνευθούν οι δείκτες εποχικότητας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.4.1

Μήνες / Έτη	Ι.	Φ.	Μ.	Α.	Μ.	Ι.	Ι.	Α.	Σ.	Ο.	Ν.	Δ.
1991	105	112	115	117	120	135	140	135	130	125	120	110
1992	110	113	115	125	135	140	145	140	135	133	125	120
1993	121	125	130	135	145	150	155	145	145	140	135	130

Για τον υπολογισμό των δεικτών εποχικότητας εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα Ι: Αθροίζομε (οριζόντια άθροιση) τα δεδομένα, των μηνών του κάθε έτους. Π.χ. για το 1992 έχομε: 110+113+115+...+120=1536. Έτσι, δημιουργούμε τη στήλη ***ετήσια αθροίσματα*** - προτελευταία στήλη του πίνακα 7.4.2.

Βήμα ΙΙ: Διαιρούμε τα ετήσια αθροίσματα δια του 12, οπότε, προκύπτει η στήλη των ***μηνιαίων μέσων*** – τελευταία στήλη του πίνακα 7.4.2 (π.χ. για το 1992 έχομε 1536:12=128).

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.4.2

Έτη	Ι.	Φ.	Μ.	Α.	Μ.	Ι.	Ι.	Α.	Σ.	Ο.	Ν.	Δ.	Ετήσια αθροίσματα	Μηνιαίοι μέσοι
1991	105	112	115	117	120	135	140	135	130	125	120	110	1464	122
1992	110	113	115	125	135	140	145	140	135	133	125	120	1536	128
1993	121	125	130	135	145	150	155	145	145	140	135	130	1656	138

Βήμα III: Διαιρούμε τα μηνιαία δεδομένα κάθε έτους δια του αντίστοιχου μηνιαίου μέσου και πολλαπλασιάζομε τα πηλίκα επί 100. Με τα αποτελέσματα που προκύπτουν δημιουργούμε τον πίνακα 7.4.3. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Για τον Ιαν. του 1991: 105/122 $\times$ 100=86,06%

Για τον Φεβρ. του 1991: 112/122 $\times$100=91,8%

• • •

• • •

• • •

Για τον Δεκ. του 1993: 130/138 $\times$ 100=94,20%

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.4.3

Μήνες / Έτη	Ι.	Φ.	Μ.	Α.	Μ.	Ι.	Ι.	Α.	Σ.	Ο.	Ν.	Δ.
1991	86,06	91,8	94,26	95,90	98,36	110,65	114,75	110,65	106,55	102,45	98,36	90,16
1992	85,93	88,28	89,84	97,65	105,46	109,37	113,28	109,37	105,46	103,9	97,65	93,75
1993	87,67	90,57	94,2	97,82	105,07	108,69	112,31	105,07	105,07	101,45	97,8	94,2
Αθροίσματα	259,67	270,65	278,3	291,37	308,89	328,71	340,34	325,09	317,08	307,8	293,8	278,11
Δείκτες εποχικότητας	86,55	90,216	92,766	97,123	102,96	109,57	113,44	108,36	105,69	102,6	97,93	92,7

Βήμα IV: Υπολογίζομε το άθροισμα κάθε στήλης του πίνακα 7.4.3, οπότε προκύπτει η προτελευταία γραμμή – των αθροισμάτων – του πίνακα 7.4.3. Στη συνέχεια διαιρούμε αυτά τα αθροίσματα δια του 3, οπότε προκύπτει η τελευταία γραμμή του πίνακα.

Π.χ. για τον Ιανουάριο έχομε: 259,67:3=86,55% και για τον Φεβρουάριο: 270,65: 3=90,216% κ.ο.κ.

Οι όροι λοιπόν, της τελευταίας γραμμής του πίνακα 7.4.3 είναι οι ζητούμενοι δείκτες εποχικότητας, οι οποίοι στο παράδειγμά μας, δείχνουν ***πόσο τοις εκατό (%)*** υψηλότερη ή χαμηλότερη είναι η παραγωγή κάθε μήνα από τη μέση παραγωγή της εξεταζόμενης περιόδου, δηλαδή της τριετίας. Για τον Ιούλιο π.χ. κατά τον οποίο ο δείκτης είναι 113,44% σημαίνει ότι η παραγωγή αυτού του μήνα είναι γενικά κατά 13,44% υψηλότερη από τη μέση μηνιαία παράγωγή του έτους, ενώ η παραγωγή του Φεβρουαρίου είναι κατά 9,784% (100-90,216) χαμηλότερη κ.ο.κ.

7.5 Ανακεφαλαίωση.

1) Χρονολογική σειρά είναι η σειρά τιμών που παίρνει μια μεταβλητή σε προκαθορισμένα και συνήθως ισαπέχοντα χρονικά σημεία ή σε διαδοχικές, της αυτής διάρκειας συνήθως, χρονικές περιόδους.

2) Η γραφική απεικόνιση των χρονολογικών σειρών γίνεται με τα χρονολογικά διαγράμματα ή χρονογράμματα. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται για τη μέτρηση του χρόνου t και ο κάθετος για την εξεταζόμενη μεταβλητή y.

3) Οι συνιστώσες μιας χρονολογικής σειράς είναι:

α) Η μακροχρόνια τάση.

β) Οι κυκλικές κυμάνσεις.

γ) Οι εποχικές κυμάνσεις.

δ) Οι τυχαίες ή άρρυθμες κινήσεις.

4) Η πιο συχνά εφαρμοζόμενη στην πράξη μέθοδος προσδιορισμού της τάσεως είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

5) Το γνωστό μας σύστημα κανονικών εξισώσεων στην περίπτωση της ευθύγραμμης τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,x$ απλοποιούμενο κατάλληλα γίνεται:

$$\Sigma y = N\alpha$$

$$\Sigma yt = \beta \Sigma t^2$$

6) Οι τύποι υπολογισμού των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της εξισώσεως τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,t$ που προέρχονται από το απλοποιημένο σύστημα εξισώσων είναι:

$$\hat{\alpha} = \frac{\Sigma y}{N} \qquad \hat{\beta} = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2}$$

7) Η παράμετρος $\hat{\beta}$ της εξισώσεως τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,t$ είναι ο συντελεστής κατευθύνσεως της ευθείας τάσεως και μας δίνει την μέση ετήσια μεταβολή της τάσεως.

8) Η παράμετρος $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,t$ αν είναι:

$\hat{\beta} > 0$, τότε η χρονολογική σειρά έχει ανοδική τάση.

$\hat{\beta} < 0$, τότε η χρονολογική σειρά έχει καθοδική τάση.

$\hat{\beta} = 0$, τότε η χρονολική σειρά δεν έχει τάση.

9) Η μέτρηση της εποχικότητας γίνεται με τους δείκτες εποχικότητας. Οι δείκτες εποχικότητας είναι συνήθως 12, ένας δείκτης δηλαδή για κάθε μήνα του έτους.

7.6 Ερωτήσεις.

1. Τι είναι χρονολογική σειρά;
2. Σε τι χρησιμεύει η μελέτη των χρονολογικών σειρών;
3. Τι είναι τα χρονολογικά διαγράμματα ή χρονοδιαγράμματα;
4. Ποια είναι η άποψή σας για τη χρησιμότητα των χρονολογικών σειρών για τις επιχειρήσεις και την οικονομία γενικότερα;
5. Αναφέρατε τις συνιστώσες μιας χρονολογικής σειράς.
6. Τι είναι η μακροχρόνια τάση;
7. Τι είναι οι κυκλικές και τι οι εποχικές κυμάνσεις;
8. Τι είναι οι τυχαίες ή άρρυθμες κινήσεις;
9. Αναφέρατε δύο μεθόδους προσδιορισμού της τάσεως.
10. Τι γνωρίζετε για τον προσδιορισμό της τάσεως με τη μέθοδο των δύο σημείων;
11. Γράψτε το απλοποιημένο σύστημα κανονικών εξισώσεων.
12. Γράψτε τους τύπους υπολογισμού των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,t$.
13. Τι τάση έχει μια χρονολογική σειρά, όταν ο συντελεστής κατευθύνσεως της ευθείας τάσεως είναι: α) $\beta>0$, β) $\beta<0$ και γ) $\beta=0$;

14. Με δικά σας δεδομένα κατασκευάστε δύο χρονοδιαγράμματα, όπου ο συντελεστής κατευθύνσεως της ευθείας τάσεως είναι: i) $\beta=1$ και ii) $\beta=-1$.
15. Σε τι χρησιμεύουν οι δείκτες εποχικότητας;

7.7 Ασκήσεις.

*1. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το σύνολο των αυτοκινήτων (σε εκατοντάδες χιλιάδες) που κυκλοφορούσαν στην Ελλάδα κατά τα έτη 1981-89.

Έτη	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Αριθμός αυτοκινήτων (y):	15	16	17	19	20	21	22	24

Πηγή: ΕΣΥΕ

Ζητείται να συνταχθεί το σχετικό χρονοδιάγραμμα.

*2. Ο αριθμός των κυκλοφορούντων επιβατηγών αυτοκινήτων (σε δεκάδες χιλιάδες) στην περιφέρεια Αθηνών κατά τα έτη 1985-1989, ήταν όπως ο παρακάτω πίνακας.

Έτη	Αριθμός αυτοκινήτων (y)
1985	67
1986	72
1987	76
1988	80
1989	90

Πηγή: ΕΣΥΕ

Ζητείται να προσδιορισθεί (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) η ευθεία τάσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\beta x$.

*3. Ο αριθμός των ελληνικής πλοιοκτησίας, αλλά με ξένη σημαία πλοίων κατά τα έτη 1982-87, ήταν:

Έτη	Αριθμός πλοίων (y)
1982	440
1983	406
1984	338
1985	326
1986	276
1987	236

Πηγή: ΕΣΥΕ-ΝΑΤ

Ζητείται να γίνει το χρονοδιάγραμμα και να χαραχθεί με τη μέθοδο των δύο μέσων σημείων η ευθεία τάσεως.

*4. Η παραγωγή (x) σε χιλιάδες τόνους ενός προϊόντος από μια βιομηχανική επιχείρηση κατά τα έτη 1988-1993, ήταν:

Έτη	y
1988	10
1989	15
1990	20
1991	15
1992	30
1993	25

Ζητείται να προσδιορισθεί (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) η ευθεία τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \beta t$.

**5. Οι ετήσιες πωλήσεις (y) σε εκατομμύρια δρχ. μιας εμπορικής επιχειρήσεως κατά τα έτη 1987-1993, ήταν:

Έτη	y
1987	20
1988	25
1989	30
1990	40
1991	35
1992	45
1993	60

Ζητείται:

α) Να προσδιορισθεί η ευθεία τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t$.

β) Να γίνει η πρόβλεψη των πωλήσεων για τα έτη 1994, 1995 και 1996.

**6. Η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας y σε δισεκατομμύρια ΩΧΒ κατά τα έτη 1983-1987, ήταν:

Έτη	y
1983	22
1984	23
1985	25
1986	26
1987	27
1988	30
1989	31

Πηγή: ΕΣΥΕ

Ζητείται:

α) Να προσδιορισθεί η ευθεία τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t$.

β) Με βάση την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}t$ να εκτιμηθούν οι τιμές της y για τα έτη 1983-1989.
γ) Να προβλεφθεί η παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια για τα έτη 1990 και 1991.

**7. Με βάση τα δεδομένα της ασκήσεως 1, ζητείται:
α) Να προσδιορισθεί η ευθεία τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}t$.
β) Να γίνει πρόβλεψη για τα έτη 1992, 1993 και 1995.
γ) Να ερμηνευθεί ο συντελεστής $\hat{\beta}$.

***8. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των ελληνικής ιδιοκτησίας, αλλά με ξένη σημαία εμπορικών πλοίων κατά τα έτη 1979-1987.

Έτη	Αριθμός πλοίων y
1979	617
1980	483
1981	455
1982	440
1983	406
1984	338
1985	326
1986	276
1987	236

Πηγή: ΕΣΥΕ

Ζητείται:
α) Να βρεθεί η ευθεία τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}t$.
β) Με βάση την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}t$ να εκτιμηθούν οι τιμές της y για τα έτη 1979-1987.
γ) Ποια ήταν η μέση ετήσια μεταβολή του αριθμού των πλοίων αυτής της κατηγορίας κατά την περίοδο 1979-87;
δ) Ποιος προβλέπεται να είναι ο αριθμός των πλοίων αυτής της κατηγορίας το έτος 1988 και το έτος 1990;

***9. Το κατά κεφαλήν ακαθάριστο εθνικό εισόδημα (y) σε σταθερές τιμές 1970 και σε χιλιάδες δρχ., ήταν:

Έτη	y
1984	49,6
1985	50,5
1986	51
1987	50,5
1988	52,6
1989	54,1
1990	54
1991	54,6

Πηγή: ΕΣΥΕ

Ζητείται:

α) Να βρεθεί η ευθεία τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t$.

β) Να εκτιμηθούν οι τιμές της y για τα έτη 1984-91 με βάση την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t$.

γ) Να βρεθούν οι διαφορές των τιμών y της χρονολογικής σειράς από τις αντίστοιχες $\hat{y}$ που μας δίνει η $\hat{y} = \hat{\alpha} + \beta t$.

δ) Ποια ήταν η μέση ετήσια μεταβολή του κατά κεφαλήν ακαθάριστου εθνικού εισοδήματος, κατά την εξεταζόμενη χρονική περίοδο.

ε) Πόσο προβλέπεται ότι θα είναι το κατά κεφαλήν ακαθάριστο εθνικό εισόδημα το 1992.

***10. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει σε σταθερές τιμές και σε δολάρια ΗΠΑ την κατά κεφαλήν εθνική ιδιωτική κατανάλωση (y) κατά τα έτη 1982-1990.

Έτη	y
1982	1150
1983	1150
1984	1160
1985	1200
1986	1210
1987	1120
1988	1260
1989	1310
1990	1320

Πηγή: ΕΣΥΕ

Ζητείται:

α) Να βρεθεί η εξίσωση γραμμικής τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t$.

β) Να γίνει το χρονοδιάγραμμα και να χαραχθεί πάνω σ' αυτό η ευθεία τάσεως $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t$.

γ) Κατά την εξεταζόμενη χρονική περίοδο, ποια ήταν η μέση ετήσια μεταβολή της κατά κεφαλήν εθνικής ιδιωτικής καταναλώσεως.

δ) Πόσο προβλέπεται ότι θα είναι το ύψος της κατά κεφαλήν ιδιωτικής καταναλώσεως τα επόμενα 3 έτη, 1991, 1992 και 1993.

ε) Να εκτιμήσετε επίσης το ύψος του εξεταζόμενου μεγέθους με βάση την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \beta t$ για τα έτη 1995 και 1998.

***11. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη μηνιαία παραγωγή σε τόνους μιας βιομηχανικής επιχειρήσεως, κατά τα έτη 1991-1993.

Έτη \ Μήνες	Ι.	Φ.	Μ.	Α.	Μ.	Ι.	Ι.	Α.	Σ	Ο.	Ν.	Δ
1991	115	123	125	128	130	145	150	145	140	135	130	121
1992	122	124	125	135	145	150	155	150	145	142	135	130
1993	132	135	140	145	155	160	165	155	155	150	145	140

Ζητείται να βρεθούν και να ερμηνευθούν οι δείκτες εποχικότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΕΣ

Κανόσι καὶ σταθμοῖς καὶ μέτροις καὶ ἀριθμοῖς πανταχοῦ χρώμεθα, ἵνα μηδαμοῦ τὸ εἰκῆ καὶ ὡς ἔτυχε τοῖς ἔργοις ἐγγένηται.

(Κανόνες, σταθμά, μέτρα και αριθμούς χρησιμοποιούμε σ' όλες τις εκδηλώσεις της ζωής μας, ώστε πουθενά σε κάθε μας έργο να μην επιτρέπεται να ενεργούμε άσκοπα και στην τύχη).

Πλούταρχος, Περί τύχης, 3

Ο διευθυντής μιας επιχειρήσεως για να επιτύχει, πρέπει να γνωρίζει τις στατιστικές μεθόδους και να κατευθύνεται από αυτές στις αποφάσεις του.

Nightingale (1820-1910)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΕΣ

8.1 Έννοια και χρησιμότητα των αριθμοδεικτών για τις επιχειρήσεις και την οικονομία γενικότερα.

Αριθμοδείκτες (index nambers) ή απλά δείκτες είναι σχετικοί αριθμοί που δείχνουν τις ποσοστιαίες μεταβολές διαφόρων μεγεθών (οικονομικών κυρίως αλλά και άλλων) μεταξύ δύο χρονικών σημείων ή περιόδων (χρονολογικοί αριθμοδείκτες) ή μεταξύ δύο γεωγραφικών περιοχών (γεωγραφικοί αριθμοδείκτες).

Με τη βοήθεια λοιπόν των αριθμοδεικτών (ή απλά δεικτών) μπορούμε π.χ. να συγκρίνομε την ετήσια βιομηχανική παραγωγή για το έτος 1993 μεταξύ δύο χωρών, ή αναφερόμενοι στη μια χώρα να συγκρίνομε τη βιομηχανική παραγωγή του έτους 1993 με αυτήν του 1992 ή του 1990 κ.λπ. Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των χρονολογικών αριθμοδεικτών, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ευρύτατα στο χώρο της οικονομίας.

Ο ρόλος των αριθμοδεικτών είναι πολύ σημαντικός, τόσο για την καλή λειτουργία του κράτους, όσο και γι' αυτήν των επιχειρήσεων. Οι δείκτες τιμών π.χ. μας βοηθούν να γνωρίζομε την πορεία του γενικού επιπέδου τιμών, η γνώση δε αυτή είναι απαραίτητη στο κράτος για να ασκήσει στον οικονομικό, στον κοινωνικό και σε άλλους τομείς σωστή πολιτική.

Είναι φυσικά απαραίτητη και για τις επιχειρήσεις, γιατί, ως γνωστόν, οι μεταβολές στις τιμές επηρεάζουν τη ζήτηση για κατανάλωση, την παραγωγή και προσφορά κ.λπ. Επίσης μια επιχείρηση για να εφαρμόσει σωστή πολιτική τιμών στα παραγόμενα από αυτήν προϊόντα θα πρέπει, μεταξύ άλλων, να λάβει υπόψη της και τις διακυμάνσεις της πορείας του γενικού επιπέδου τιμών κ.λπ.

Τέλος δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε ότι ο σημερινός άνθρωπος, σχεδόν καθημερινά, δέχεται πληροφορίες από τα μέσα ενημερώσεως για τις τιμές διαφόρων οικονομικού χαρακτήρα δεικτών. Εμείς στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την εξέταση των πιο σημαντικών ειδών αριθμοδεικτών.

8.2 Απλοί αριθμοδείκτες.

Σε όσες περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε να μετρήσομε τις ποσοστιαίες μεταβολές, οι οποίες αναφέρονται στην τιμή ή στην ποσότητα ή στην αξία ενός και μόνο αγαθού, χρησιμοποιούμε τους απλούς αριθμοδείκτες ή απλά δείκτες (simple index nambers). Έχομε αντίστοιχα, τριών ειδών απλούς αριθμοδείκτες: α) Τον απλό δείκτη τιμών. β) Τον απλό δείκτη ποσότητας και γ) τον απλό δείκτη αξίας.

1) Απλός δείκτης τιμής (simple price index) ενός αγαθού ή σχετική τιμή ενός αγαθού.

Αν την τιμή του αγαθού κατά την τρέχουσα, την εξεταζόμενη περίοδο, την συμβολίσομε P_1 (περίοδος 1) και την τιμή του σε μια προηγούμενη (αρχική) περίοδο, με την οποία γίνεται σύγκριση και η οποία ονομάζεται περίοδος βάσεως (περίοδος 0) την συμβολίζομε με p_0, τότε ο απλός δείκτης τιμής ενός αγαθού (p_{10}) παρέχεται από τον τύπο:

$$p_{10} = \frac{p_1}{p_0} \times 100 \qquad (8.1)$$

Π.χ. αν η τιμή ενός αγαθού ήταν το 1990 (έτος βάσεως) 1000 δρχ. και το 1992 ήταν 1200 δρχ., τότε ο απλός δείκτης τιμών του αγαθού που βασίζεται σ' αυτά τα δεδομένα είναι:

$$p_{10} = \frac{p_1}{p_0} \times 100 = \frac{1200}{1000} \times 100 = 120\%$$

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του αγαθού μεταξύ των ετών 1990 και 1992 αυξήθηκε κατά 20%.

2) Απλός δείκτης ποσότητας (simple quantity index) ενός αγαθού.

Εάν συμβολίσομε με q_1 την ποσότητα ενός αγαθού κατά την τρέχουσα περίοδο (περίοδος 1) και με q_0 κατά την περίοδο βάσεως (περίοδος 0), τότε ο απλός δείκτης ποσότητας (Q_{10}) δίνεται από τον τύπο:

$$Q_{10} = \frac{q_1}{q_0} \times 100 \qquad (8.2)$$

Π.χ. Αν η παραγωγή ενός αγαθού στην Ελλάδα ήταν το 1990 (περίοδος βάσεως) 10.000 τόνοι και το 1993 έφθασε τους 13.000 τόνους, τότε έχομε:

$$Q_{10} = \frac{q_1}{q_0} \times 100 = \frac{13.000}{10.000} \times 100 = 130\%$$

Εδώ ο απλός δείκτης ποσότητας του αγαθού μας δείχνει ότι μεταξύ των ετών 1990 και 1993 είχαμε αύξηση της παραγόμενης ποσότητας του αγαθού ύψους 30%.

3) Απλός δείκτης αξίας (simple value index) ενός αγαθού.

Εδώ το γινόμενο $p_1 \cdot q_1$ μας δίνει την αξία ενός αγαθού κατά την τρέχουσα περίοδο (1) και το γινόμενο $p_0 \cdot q_0$ την αξία του κατά την περίοδο βάσεως (0). Ο λόγος $p_1 \cdot q_1/p_0 \cdot q_0$ πολλαπλασιαζόμενος επί 100 μας δίνει τον απλό δείκτη αξίας ενός αγαθού (V_{10}).

$$V_{10} = \frac{p_1 \cdot q_1}{p_o \cdot q_0} \times 100 \qquad (8.3)$$

Π.χ. έχομε τις παραχθείσες ποσότητες (σε τόνους) και τις αντίστοιχες τιμές κατά τόνο ενός αγαθού για τα έτη 1990 και 1993, και ζητούμε το δείκτη αξίας V_{10}·

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.2.1

Έτη	Τιμές	Ποσότητες
1990	10.000	4.000
1993	12.000	5.000

$$V_{10} = \frac{p_1 \cdot q_1}{p_o \cdot q_0} \times 100 = \frac{12.000 \times 5000}{10.000 \times 4000} = 150\%$$

Η αξία παραγωγής του αγαθού το 1993 ήταν κατά 50% υψηλότερη από αυτή του 1990.

8.3 Σύνθετος αριθμοδείκτης.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τις ποσοστιαίες μεταβολές που αναφέρονταν στην τιμή ή στην ποσότητα ή στην αξία ενός και μόνον αγαθού. Πολλές φορές όμως, στην πράξη, ενδιαφερόμαστε να μάθομε για τις μεταβολές που παρουσιάζονται σ' ένα σύνολο αγαθών και όχι σ' ένα αγαθό μεμονωμένα. Έτσι χρησιμοποιούμε τους ***σύνθετους αριθμοδείκτες*** — ή απλά σύνθετους δείκτες (aggregate or composite index numbers) — τους οποίους εξετάζομε στις αμέσως επόμενες παραγράφους.

Οι τιμές των Ν εξεταζομένων αγαθών της ομάδας θα συμβολίζονται στην τρέχουσα περίοδο (1) με $p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, ..., p_1^{(N)}$ και στην περίοδο βάσεως (0) με $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, ..., p_0^{(N)}$. Οι δε ποσότητες με $q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, ..., q_1^{(N)}$ για την περίοδο (1) και με $q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, ..., q_0^{(N)}$ για την περίοδο (0).

8.3.1 Αστάθμητοι αριθμοδείκτες.

Όταν εξετάζομε τη μεταξύ περιόδου βάσεως (0) και τρέχουσας περιόδου (1) μεταβολή του γενικού επιπέδου τιμών μιας ομάδας αγαθών, χρησιμοποιούμε το ***μέσο αριθμητικό των σχετικών τιμών.*** Αυτός ο μέσος είναι ένας αστάθμητος δείκτης τιμών (anweighted index numbers) (αστάθμητος τιμάριθμος), δηλαδή θεωρεί ότι τα αγαθά της ομάδας που εξετάζομε έχουν όλα την ίδια σημασία (βαρύτητα).

Ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών παρέχεται από τον τύπο:

$$p_{10} = \frac{1}{N}\left(\frac{p_1^{(1)}}{p_0^{(1)}} + \frac{p_1^{(2)}}{p_0^{(2)}} + ... + \frac{p_1^{(N)}}{p_0^{(N)}}\right) \times 100 \qquad (8.4)$$

ή

$$p_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \times 100$$

Παρόμοια όταν εξετάζομε τις μεταβολές των ποσοτήτων (του όγκου) ανάμεσα στην περίοδο βάσεως (0) και την τρέχουσα περίοδο (1) μιας ομάδας αγαθών χρησιμοποιούμε το ***μέσο αριθμητικό των αντιστοίχων απλών δεικτών όγκου,*** που είναι ένας αστάθμητος δείκτης όγκου Q_{10} και δίνεται από τον τύπο:

$$Q_{10} = \frac{1}{N} \left(\frac{q_1^{(1)}}{q_0^{(1)}} + \frac{q_1^{(2)}}{q_0^{(2)}} + \ldots + \frac{q_1^{(N)}}{q_0^{(N)}} \right) \times 100 \qquad (8.5)$$

ή

$$Q_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{q_1}{q_0} \right) \times 100$$

Παράδειγμα.

Δίνονται τα παρακάτω δεδομένα (πίνακας 8.3.1) τιμών (p) και ποσοτήτων (q) των ετών 1991 (έτος βάσεως) και 1993, για τρία αγαθά Α, Β και Γ. Να υπολογισθούν οι μέσοι αριθμητικοί των σχετικών τιμών και των αντιστοίχων απλών δεικτών όγκου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.3.1

	1991		1993		Στήλες υπολογισμών					
Αγαθά	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1/p_0	q_1/q_0	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
Α	100	500	110	600	1,1	1,2	50.000	55.000	60.000	66.000
Β	130	300	150	350	1,15	1,16	39.000	45.000	45.500	52.500
Γ	120	400	140	450	1,16	1,12	48.000	56.000	54.000	63.000
Άθροισμα					3,41	3,48	137.000	156.000	159.500	181.500

1) Εφαρμόζοντας τον τύπο 8.4 (βλέπε και στήλη 5 του πίνακα 8.3.1) έχομε:

$$p_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \times 100 = \frac{1}{3} \times 3{,}41 \times 100 = 113{,}66$$

Δηλαδή, είχαμε μια αύξηση του μέσου επιπέδου των τιμών των τριών προϊόντων, μεταξύ των ετών 1991 και 1993, της τάξεως του 13,66%.

2) Εφαρμόζοντας τον τύπο 8.5 (βλέπε και στήλη 6 του πίνακα 8.3.1) έχομε:

$$Q_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{q_1}{q_0} \right) \times 100 = \frac{1}{3} \times 3{,}48 \times 100 = 116$$

Δηλαδή, είχαμε μια μέση αύξηση της βιομηχανικής παραγωγής των τριών προϊόντων, μεταξύ των ετών 1991 και 1993, της τάξεως του 16%.

8.3.2 Σταθμικοί αριθμοδείκτες (weighted index nambers).

Στην προηγούμενη παράγραφο θεωρήσαμε ότι τα αγαθά που συμμετείχαν στο σχηματισμό του δείκτη είχαν την ίδια σημασία, την ίδια βαρύτητα. Όμως, συχνά στην πράξη, δεχόμαστε ότι σε κάθε αγαθό πρέπει να δίνεται η πρέπουσα σ' αυτό βαρύτητα, ανάλογα με τη σχετική σπουδαιότητά του. Έτσι, για τους δείκτες τιμών πολλαπλασιάζομε την τιμή κάθε αγαθού επί ένα συντελεστή σταθμίσεως, που είναι οι ποσότητες του αγαθού σε μια ορισμένη χρονική περίοδο, οπότε προκύπτουν οι σταθμικοί δείκτες τιμών. Για τους σταθμικούς δείκτες ποσοτήτων χρησιμοποιούμε για συντελεστή σταθμίσεως του κάθε αγαθού την τιμή του, σε μια ορισμένη χρονική περίοδο.

Α) Σταθμικοί δείκτες τιμών (weighted price indices).

Όταν χρησιμοποιούμε ως συντελεστές σταθμίσεως τις ποσότητες των αγαθών της περιόδου βάσεως (0), τότε ο σταθμικός δείκτης τιμών δίνεται από τον παρακάτω τύπο (8.6), γνωστό ως ***τιμάριθμο*** του ***Laspeyres.***

$$p_{10} = \frac{p_1^{(1)} q_0^{(1)} + p_1^{(2)} q_0^{(2)} + \ldots + p_1^{(N)} q_0^{(N)}}{p_0^{(1)} q_0^{(1)} + p_0^{(2)} q_0^{(2)} + \ldots + p_0^{(N)} q_0^{(N)}} \times 100 \qquad (8.6)$$

ή

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

Αν χρησιμοποιήσομε ως συντελεστές σταθμίσεως τις ποσότητες των αγαθών της περιόδου (1), τότε έχομε το γνωστό ***τιμάριθμο του paasche*** που δίνεται από τον τύπο:

$$p_{10} = \frac{p_1^{(1)} q_1^{(1)} + p_1^{(2)} q_1^{2)} + \ldots + p_1^{(N)} q_1^{(N)}}{p_0^{(1)} q_1^{(1)} + p_0^{(2)} q_1^{(2)} + \ldots + p_0^{(N)} q_1^{(N)}} \times 100 \qquad (8.7)$$

ή

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

Παράδειγμα.

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα 8.3.1 και εφαρμόζοντας τον τύπο 8.6 (βλέπε και στήλες 8 και 7 του πίνακα 8.3.1), ο τιμάριθμος του Laspeyres είναι:

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_0}{\Sigma p_o \cdot q_0} \times 100 = \frac{156.000}{137.000} \times 100 = 113{,}86\%$$

και ο τιμάριθμος του Paasche (βλέπε στήλες 10 και 9 του πίνακα 8.3.1) εφαρμόζοντας τον τύπο 8.7, είναι:

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_1}{\Sigma p_o \cdot q_1} \times 100 = \frac{181.500}{159.500} \times 100 = 113{,}79\%$$

Παρατηρούμε, ότι το μέσο επίπεδο των τιμών των τριών προϊόντων ήταν κατά το 1993 μεγαλύτερο από αυτό του 1991 κατά 13,86%, σύμφωνα με τον τύπο του Laspeyres και κατά 13,79% σύμφωνα με τον τύπο του Paasche.

Β) Σταθμικοί δείκτες ποσοτήτων ή όγκου (weighted quantity indices).

Στους σταθμικούς δείκτες ποσοτήτων ή όγκου, οι ποσότητες των αγαθών σταθμίζονται με τις τιμές των αγαθών. Έτσι έχομε τους σταθμικούς δείκτες όγκου:

α) Του ***Laspeyres*** (8.8), όπου ως συντελεστή σταθμίσεως χρησιμοποιούμε τις τιμές που είχαν τα αγαθά στην περίοδο βάσεως (0) και

β) του ***Paasche*** (8.9) όπου ως συντελεστές σταθμίσεως χρησιμοποιούμε τις τιμές που είχαν τα αγαθά την περίοδο (1).

Τύπος Laspeyres:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 \cdot p_0}{\Sigma q_0 \cdot p_0} \times 100 \qquad (8.8)$$

Τύπος Paasche:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 \cdot p_1}{\Sigma q_0 \cdot p_1} \times 100 \qquad (8.9)$$

Παράδειγμα.

Με βάση πάλι τα δεδομένα του πίνακα 8.3.1 έχομε:

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Laspeyres:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 \cdot p_0}{\Sigma q_o \cdot p_0} \times 100 = \frac{159.500}{137.000} \times 100 = 116{,}42\%$$

Με εφαρμογή του τύπου του Paasche:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 \cdot p_1}{\Sigma q_o \cdot p_1} \times 100 = \frac{181.500}{156.000} \times 100 = 116{,}34\%$$

Επομένως, ο μέσος όγκος παραγωγής των τριών προϊόντων αυξήθηκε το 1993 σε σχέση με το 1991 κατά 16,42% σύμφωνα με τον τύπο του Laspeyres, και σύμφωνα με του Paasche κατά 16,34%.

8.3.3 Δείκτης συνολικής αξίας.

Το δείκτη συνολικής αξίας (aggregate value index), που συμβολίζεται με V_{10} και δίνεται από τον παρακάτω τύπο 8.10, τον χρησιμοποιούμε όταν ενδιαφερόμαστε για τις ποσοστιαίες διαχρονικές μεταβολές στη συνολική αξία μιας ομάδας αγαθών.

$$V_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_1}{\Sigma p_0 \cdot q_0} \times 100 \qquad (8.10)$$

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα 8.3.1 έχουμε:

$$V_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_1}{\Sigma p_o \cdot q_0} \times 100 = \frac{181.500}{137.000} \times 100 = 132,48\%$$

Δηλαδή, η συνολική αξία των τριών παραγομένων προϊόντων αυξήθηκε κατά 32,48%.

8.4 Ανακεφαλαίωση.

1) Αριθμοδείκτες είναι σχετικοί αριθμοί, που δείχνουν τις ποσοστιαίες μεταβολές διαφόρων μεγεθών, μεταξύ δύο χρονικών σημείων ή περιόδων ή μεταξύ δύο γεωγραφικών περιοχών.

2) Όταν ενδιαφερόμαστε να μετρήσομε τις ποσοστιαίες μεταβολές, που αναφέρονται στην τιμή ή στην ποσότητα ή στην αξία ενός και μόνο αγαθού, χρησιμοποιούμε απλούς αριθμοδείκτες.

3) Έχομε τρία είδη απλών αριθμοδεικτών:

α) Απλός δείκτης τιμής ενός αγαθού:

$$p_{10} = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

β) Απλός δείκτης ποσότητας ενός αγαθού:

$$Q_{10} = \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

γ) Απλός δείκτης αξίας ενός αγαθού:

$$V_{10} = \frac{p_1 \cdot q_1}{p_o \cdot q_0} \times 100$$

4) Όταν ενδιαφερόμαστε για τις μεταβολές των τιμών, των ποσοτήτων ή των αξιών ενός συνόλου αγαθών, και όχι για ένα αγαθό μεμονωμένα, τότε χρησιμοποιούμε τους σύνθετους δείκτες.

5) ***Αστάθμητοι δείκτες.***
Μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών που δίνεται από τον τύπο:

$$P_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \times 100$$

Μέσος αριθμητικός των απλών δεικτών όγκου που δίνεται από τον τύπο:

$$Q_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{q_1}{q_0} \right) \times 100$$

6) ***Σταθμικοί δείκτες τιμών.***
Τιμάριθμος του Laspeyres:

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_0}{\Sigma p_0 \cdot q_0} \times 100$$

Τιμάριθμος του Paasche:

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_1}{\Sigma p_0 \cdot q_1} \times 100$$

7) ***Σταθμικοί δείκτες όγκου.***
Τύπος Lapeyres:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 \cdot p_0}{\Sigma q_0 \cdot p_0} \times 100$$

Τύπος Paasche:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 \cdot p_1}{\Sigma q_0 \cdot p_1} \times 100$$

8) Δείκτης συνολικής αξίας:

$$V_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_1}{\Sigma p_0 \cdot q_0} \times 100$$

8.5 Ερωτήσεις.

1. Τι είναι οι αριθμοδείκτες;

2. Τι είναι οι απλοί αριθμοδείκτες;
3. Πόσα είδη απλών αριθμοδεικτών έχομε;
4. Τι γνωρίζετε για τους σύνθετους αριθμοδείκτες;
5. Τι γνωρίζετε για τους αστάθμητους αριθμοδείκτες;
6. Τι γνωρίζετε για τους σταθμικούς τιμάριθμους; Γράψτε τους σχετικούς τύπους του Laspeyres και του Paasche.
7. Τι γνωρίζετε για τους σταθμικούς δείκτες ποσοτήτων; Γράψτε τους σχετικούς τύπους του Laspeyres και του Paasche.
8. Τι είναι ο δείκτης συνολικής αξίας; Γράψτε το σχετικό τύπο.

8.6 Ασκήσεις.

*1. Δίνονται οι παραχθείσες ποσότητες σε τόνους και οι αντίστοιχες τιμές σε δρχ. κατά τόνο ενός αγαθού για τα έτη 1990 και 1993.

Έτη	Τιμές	Ποσότητες
1990	10.000	5.000
1993	13.000	6.000

Με έτος βάσεως το 1990 να υπολογισθούν για το 1993:
α) Ο απλός δείκτης τιμών.
β) Ο απλός δείκτης ποσότητας.

*2. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα δεδομένα τιμών και ποσοτήτων δύο αγαθών που καταναλώθηκαν κατά τα έτη 1991 και 1993.

Αγαθά	Τιμές		Ποσότητες	
	1991	1993	1991	1993
Α	1.000	1.200	5.000	7.000
Β	1.500	1.600	3.000	4.500

Με έτος βάσεως το 1991, να υπολογίσετε για το 1993 και για τα δύο αγαθά:
α) Τους απλούς δείκτες τιμών.
β) Τους απλούς δείκτες ποσοτήτων.

*3. Με βάση τα δεδομένα της προηγούμενης ασκήσεως (άσκηση 2) να υπολογίσετε για το 1993 (έτος βάσεως 1991) και για τα δύο αγαθά τους απλούς δείκτες αξίας.

*4. Δίνονται τα παρακάτω δεδομένα των τιμών (p) και ποσοτήτων (q) των ετών 1990 (έτος βάσεως) και 1992 για τρία αγαθά Α, Β και Γ.

Έτη	1990		1992	
Αγαθά	p_0	q_0	p_1	q_1
Α	1.000	600	1.100	700
Β	1.200	400	1.400	500
Γ	1.100	500	1.300	600

Να υπολογισθούν:

α) Ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών και β) ο μέσος αριθμητικός των απλών δεικτών όγκου.

**5. Με βάση τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα (άσκηση 4) να υπολογισθούν:

α) Ο τιμάριθμος του Laspeyres.

β) Ο τιμάριθμος του Paasche.

γ) Ο δείκτης συνολικής αξίας.

**6. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις τιμές (p) και τις ποσότητες (Q) τριών αγαθών Α,Β,Γ που καταναλώθηκαν κατά τα έτη 1989 (έτος βάσεως) και 1991.

Έτη	1989		1991	
Αγαθά	p_0	q_0	p_1	q_1
Α	700	1.500	800	1.700
Β	1.000	1.400	1.100	1.600
Γ	1.200	1.300	1.400	1.500

Ζητείται να υπολογισθούν:

α) Ο σταθμικός δείκτης όγκου του Laspeyres.

β) Ο σταθμικός δείκτης όγκου του Paasche.

γ) Ο δείκτης συνολικής αξίας.

**7. Με βάση τα δεδομένα του πίνακα της ασκήσεως 6 ζητείται να υπολογισθούν:

α) Ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών.

β) Ο τιμάριθμος του Laspeyres.

γ) Ο τιμάριθμος του Paasche.

***8. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται η τιμή (p) και η ποσότητα (q) των ετών 1991 (έτος βάσεως) και 1993 για τρία αγαθά Α, Β και Γ.

Έτη	1991		1993	
Αγαθά	p_0	q_0	p_1	q_1
Α	2.000	1.000	2.200	1.200
Β	2.200	1.100	2.500	1.400
Γ	2.100	1.300	2.300	1.500

Ζητείται να υπολογισθούν:
α) Ο τιμάριθμος του Laspeyres.
β) Ο τιμάριθμος του Paasche.
γ) Ο σταθμικός δείκτης όγκου του Laspeyres.
δ) Ο σταθμικός δείκτης όγκου του Paasche.
ε) Ο δείκτης συνολικής αξίας.

***9. Δίνονται οι παραχθείσες ποσότητες σε τόνους και οι αντίστοιχες τιμές σε δρχ. κατά τόνο τεσσάρων αγαθών για τα έτη 1990 (έτος βάσεως) και 1992.

Έτη	1990		1992	
Αγαθά	p_0	q_0	p_1	q_1
Α	1.000	5.000	1.100	6.000
Β	1.200	7.000	1.300	8.000
Γ	1.400	8.000	1.600	10.000
Δ	1.500	6.000	1.700	7.000

Ζητείται να υπολογισθούν:
α) Ο μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών.
β) Ο μέσος αριθμητικός των απλών δεικτών όγκου.
γ) Ο τιμάριθμος του Laspeyres.
δ) Ο τιμάριθμος του Paasche.
ε) Ο σταθμικός δείκτης όγκου του Laspeyres.
στ) Ο σταθμικός δείκτης όγκου του Paasche.
ζ) Ο δείκτης συνολικής αξίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α. ΣΥΜΒΟΛΑ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ.

Β. ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Α. ΣΥΜΒΟΛΑ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

I. Μέτρα θέσεως.
II. Μέτρα διασποράς.
III. Παλινδρόμηση.
IV. Συσχέτιση.
V. Χρονολογικές σειρές.
VI. Αριθμοδείκτες.

ΣΥΜΒΟΛΑ

$\hat{\alpha}$	το σημείο τομής του κάθετου άξονα y από την ευθεία παλινδρομήσεως.
α_i	το ανώτερο όριο της i τάξεως μιας κατανομής.
α_{i-1}	το κατώτερο όριο της i τάξεως μιας κατανομής.
$\hat{\beta}$	ο γωνιακός συντελεστής της ευθείας παλινδρομήσεως (συντελεστής παλινδρομήσεως).
CV	ο συντελεστής μεταβλητικότητας.
δ_i	το εύρος (πλάτος) της i τάξεως μιας κατανομής.
$D_1, D_2, \ldots D_{10}$	το πρώτο, το δεύτερο, ..., το δέκατο δεκατημόριο.
ε	ο όρος τυχαίο σφάλμα του μοντέλου παλινδρομήσεως, $\varepsilon = y - \hat{y}$.
f	η συχνότητα (βλ. πίνακες κατανομής συχνοτήτων).
F	η αθροιστική συχνότητα (βλ. διάμεσο, τεταρτημόρια).
Q_1, Q_2, Q_3	το πρώτο, το δεύτερο και το τρίτο τεταρτημόριο.
Q_{10}	ο δείκτης ποσότητας αγαθού.

M	η διάμεσος τιμή του x.
M και m	η μεγαλύτερη και η μικρότερη αντίστοιχα τιμή της μεταβλητής x.
Μ.Α.	η μέση απόκλιση.
μ	ο μέσος αριθμητικός του εξεταζόμενου πληθυσμού.
μ_x	η μέση τιμή της μεταβλητής x — περίπτωση γραμμικής παλινδρομήσεως.
μ_y	η μέση τιμή της μεταβλητής y — περίπτωση γραμμικής παλινδρομήσεως.
N	ο αριθμός των παρατηρήσεων του εξεταζόμενου πληθυσμού.
ν	ο αριθμός των παρατηρήσεων του εξεταζόμενου δείγματος.
ξ	η νέα μεταβλητή $\xi = \dfrac{x - x_0}{\delta}$ που χρησιμοποιείται στην έμμεση μέθοδο υπολογισμού του μ και της σ^2.
p_{10}	ο δείκτης τιμής αγαθού.
ρ	ο συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως.
σ	η τυπική απόκλιση πληθυσμού.
σ^2	η διακύμανση πληθυσμού.
s	η τυπική απόκλιση δείγματος.
s^2	η διακύμανση δείγματος.
Σ	το άθροισμα.
$\Sigma f = N$	το πλήθος των παρατηρήσεων του εξεταζόμενου πληθυσμού.
x	α) μεταβλητή, β) ανεξάρτητη μεταβλητή της εξισώσεως της ευθείας παλινδρομήσεως.
$\bar{x}$	ο μέσος αριθμητικός δείγματος.
y	α) μεταβλητή, β) εξαρτημένη μεταβλητή της ευθείας της εξισώσεως παλινδρομήσεως.

$\hat{y}$ α) η εκτιμώμενη ή προβλεπόμενη τιμή που δίνεται από την εξίσωση παλινδρομήσεως, β) η προβλεπόμενη τιμή που δίνεται από την εξίσωση της ευθείας τάσεως.

V_{10} δείκτης αξίας αγαθού.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

I. Μέτρα θέσεως.

Α. Μέσος αριθμητικός.

α) Τύπος υπολογισμού μέσου αριθμητικού (μ):

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

$$\mu = \frac{\Sigma x}{N}$$

β) Τύπος υπολογισμού μέσου αριθμητικού (μ) από πίνακα συχνοτήτων:

— Άμεσος τρόπος:

$$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_Nx_N}{f_1 + f_2 + \ldots + f_N}$$

$$\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

— Έμμεσος τρόπος:

$$\mu = x_0 + \delta\frac{\Sigma f\xi}{\Sigma f}$$

$$\xi = \frac{x - x_0}{\delta}$$

Β. Διάμεσος.

Τύπος υπολογισμού διαμέσου (ομαδοποιημένες κατά τάξεις, παρατηρήσεις):

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_1}\left(\frac{N}{2} - F_{i-1}\right)$$

Γ. Τεταρτημόρια - Δεκατημόρια.

(Ομαδοποιημένες κατά τάξεις παρατηρήσεις).

α) Τύπος υπολογισμού πρώτου (Q_1) και τρίτου (Q_3) τεταρτημορίου:

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{4} - F_{i-1}\right)$$

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{3N}{4} - F_{i-1}\right)$$

β) Τύπος υπολογισμού δεκατημορίων:

$$D_\kappa = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{\kappa N}{10} - F_{i-1}\right)$$

II. Μέτρα διασποράς.

Α. Διακύμανση.

α) Τύπος υπολογισμού διακυμάνσεως (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \mu^2$$

β) Τύπος υπολογισμού διακυμάνσεως (σ^2) από πίνακα συχνοτήτων.

— Άμεσος τρόπος:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f(x-\mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{N} - \mu^2$$

— Έμμεσος τρόπος:

$$\sigma^2 = \delta^2 \left[\frac{\Sigma f\xi^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f\xi}{N} \right)^2 \right]$$

$$\xi = \frac{x - x_0}{\delta}$$

Β. Συντελεστής μεταβλητικότητας.

α) Τύπος υπολογισμού συντελεστή μεταβλητικότητας:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} 100$$

ΙΙΙ. ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ.

Α. Σύστημα κανονικών εξισώσεων:

$$\Sigma y = N\alpha + \beta\Sigma x$$

$$\Sigma xy = \alpha\Sigma x + \beta\Sigma x^2$$

Β. Τύποι υπολογισμών των παραμέτρων $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$:

$$\hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x$$

$$\hat{\beta} = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma xy - N\mu_x \cdot \mu_y}{\Sigma x^2 - N\mu_x^2}$$

V. ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ.

Α. Τύπος υπολογισμού του συντελεστή συσχετίσεως (ρ).

$$\rho = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

VI. ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ.

Α. Απλοποιημένο σύστημα κανονικών εξισώσεων:

$$\Sigma y = N\alpha$$

$$\Sigma yt = \beta\Sigma t^2$$

B. Τύποι υπολογισμών των $\hat{a}$ και $\hat{\beta}$:

$$\hat{a} = \frac{\Sigma y}{N}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2}$$

$\beta > 0$, η χρονολογική σειρά έχει ανοδική τάση.
$\beta < 0$, η χρονολογική σειρά έχει καθοδική τάση.
$\beta = 0$, η χρονολογική σειρά δεν έχει τάση.

VII. ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΕΣ.

Α. Απλοί αριθμοδείκτες.

α) Απλός δείκτης τιμής:

$$p_{10} = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

β) Απλός δείκτης ποσότητας:

$$Q_{10} = \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

γ) Απλός δείκτης αξίας:

$$V_{10} = \frac{p_1 \cdot q_1}{p_o \cdot q_0} \times 100$$

Β. Αστάθμητοι αριθμοδείκτες.

α). Μέσος αριθμητικός των σχετικών τιμών:

$$p_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \times 100$$

β) Μέσος αριθμητικός των απλών δεικτών όγκου:

$$Q_{10} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{q_1}{q_0} \right) \times 100$$

Γ. Σταθμικοί αριθμοδείκτες.

α) Σταθμικοί τιμάριθμοι.
Τύπος του Laspeyres:

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_0}{\Sigma p_0 \cdot q_0} \times 100$$

Τύπος του Paasche:

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_1}{\Sigma p_0 \cdot q_1} \times 100$$

β) Σταθμικοί δείκτες ποσοτήτων ή όγκου.
Τύπος του Laspeyres:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 \cdot p_0}{\Sigma q_0 \cdot p_0} \times 100$$

Τύπος του Paasche:

$$Q_{10} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100$$

γ) Δείκτης συνολικής αξίας:

$$V_{10} = \frac{\Sigma p_1 \cdot q_1}{\Sigma p_0 \cdot q_0} \times 100$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

«I eulogise the archons of the Panethnic Numismatic thesaurus and the Ecumenical Trapeza for the orthodoxy of their axioms, methods and policies, although there is an episode of cacophony of the Trapeza with HELLAS. With enthusiasm we dialogue and synagonize at the synods of our didymous organizations in which polymorphous economic ideas and dogmas are analyzed and synthetized. Our critical problems such as the numismatic plethora generate some agony and melancholy. This phenomenon is characteristic of our epoch. But, to my thesis, we have the dynamism to program therapeutic practices as a prophylaxis from chaos and catastrophe. In parallel, a panethnic unhypocritical economic synergy and harmonization in a democratic climate is basic.

I emphasize my eucharisties to you. Kyrie, to the eugenic and generous American ethnos and to the organizers and protagonists of this amhpictiony and the gastronomic symposia».

Από την ομιλία του καθηγητή και Ακαδημαϊκού κ. Ξενοφώντα Ζολώτα στο Διεθνές Νομισματικό Ταμείο την 26-9-1957.

Οι χρησιμοποιηθείσες λέξεις της αγγλικής γλώσσας έχουν όλες ελληνική ρίζα.

Β. ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Ι. Αγγλοελληνική

Α

abscissa = τετμημένη
absolute = απόλυτος
aggregative index = γενικός δείκτης
analysis = ανάλυση
annual mean = μέσος ετήσιος
approximation = προσέγγιση
arithmetic mean = αριθμητικός μέσος όρος
ascribable to x = αποδιδόμενη στη x
asymptotic = ασυμπτωτικός
attribute data = ποιοτικά δεδομένα
average = μέσος όρος
average deviation = μέση απόκλιση
average production = μέση παραγωγή

Β

bar charts or bar diagrams = ακιδωτά διαγράμματα (ραβδογράμματα)
base period or base year = περίοδος βάσεως ή έτος βάσεως
block =κομμάτι, τμήμα
boundary = σύνορο, όριο
boundary, lower, upper = όριο τάξεως, κατώτερο, ανώτερο

business cycle = επιχειρηματικός κύκλος
business forecasting = επιχειρηματική πρόγνωση
business statistics = στατιστική επιχειρήσεων

C

calculation = υπολογισμός
category = κατηγορία, κλάση
central tendency = κεντρική τάση
charts = διαγράμματα
class = τάξη (κλάση)
class boundaries = όρια τάξεως
class frequency = συχνότητα τάξεως
class interval = διάστημα τάξεως
class limits = όρια διαστήματος τάξεως
classification = ταξινόμηση
classification of data = κατάταξη δεδομένων
classification table = πίνακας ταξινομήσεως
closed interval = κλειστό διάστημα
coding method = κωδικοποιημένη μέθοδος
coefficient = συντελεστής
coefficient of correlation = συντελεστής συσχετίσεως
coefficient of regression = συντελεστής παλινδρομήσεως
coefficient of variability = συντελεστής μεταβλητικότητας
collection = συλλογή
column = στήλη
complex = πολύπλοκος, σύνθετος
components = συνιστώσες
computation = υπολογισμός
condition = όρος, συνθήκη
constant = σταθερά
continnous = συνεχής
continnous variable = συνεχής μεταβλητή
coordinates = συντεταγμένες
correlation = συσχέτιση
correlation coefficient = συντελεστής συσχετίσεως
cumulant diagrams = αθροιστικά διαγράμματα
cumulative = αθροιστικός
cumulative frequency distribution = αθροιστική κατανομή συχνότητας
cumulative frequency polygon = πολύγωνο αθροιστικής συχνότητας
curve = καμπύλη
curvilinear tegression = καμπυλόγραμμος παλινδρόμηση
curve fitting = προσαρμογή καμπύλης

D

data = δεδομένα

decile = δεκατημόριο
dependence = εξάρτηση
dependence variables = εξαρτημένες μεταβλητές
descriptive = περιγραφικός
descriptive statistics = περιγραφική στατιστική
deviation = απόκλιση
diagram = διάγραμμα
difference = διαφορά
dimension = διάσταση
discontinuous distribution = ασυνεχής κατανομή
discrete = διακεκριμένος, διακριτός
discrete variable = διακριτή (απαριθμητή) μεταβλητή
dispersion = διασπορά
dispersion parameters = παράμετρος διασποράς
distribution = κατανομή
distribution curve = καμπύλη κατανομής

E

economic statistic = οικονομική στατιστική
effect = αποτέλεσμα
efficiency = αποτελεσματικότητα, αποδοτικότητα
elementary = στοιχειώδης, βασικός
elementary event = στοιχειώδες γεγονός
elements of statistics = στοιχεία στατιστικής
error = σφάλμα
error of sampling = σφάλμα δειγματοληψίας
estimated regression equation = εκτιμηθείσα εξίσωση παλινδρομήσεως
estimation = εκτίμηση
even number = άρτιος αριθμός
explanatory variable = ερμηνευτική μεταβλητή
exponential = εκθετικός
exponential curve = εκθετική καμπύλη
exponential regression = εκθετική παλινδρόμηση

F

factor = παράγοντας
finite = πεπερασμένος
finite population = πεπερασμένος πληθυσμός
fit = προσαρμόζω - γη
fitting = προσαρμογή
fitted line = προσαρμοσθείσα γραμμή
fluctuation = διακύμανση
formula = τύπος
frequency = συχνότητα
frequency curve = καμπύλη συχνοτήτων

frequency distribution = κατανομή συχνότητας
frequency polygon = πολύγωνο συχνότητας
frequency table = πίνακας συχνότητας
function = συνάρτηση
fundamental = θεμελιώδης, βασικός

G
gathering of data = συλλογή δεδομένων
general = γενικός
general wholesale price index = γενικός τιμάριθμος χονδρικής πωλήσεως
generalization = γενίκευση
goodness of fit = προσαρμοστική ικανότητα
graph = γραφική παράσταση
graph paper = χαρτί σχεδιάσεως
graphic method = γραφική μέθοδος
group = ομάδα
grouped data = ταξινομημένα σ' ομάδες δεδομένα

H
half = μισός
highly significant result = πολύ σημαντικό αποτέλεσμα
histogram = ιστόγραμμα
historical series or time series = ιστορικές ή χρονολογικές σειρές
hypothesis = υπόθεση

I
independence = ανεξαρτησία
independent events = ανεξάρτητα γεγονότα
independent variables = ανεξάρτητες μεταβλητές
index number = αριθμοδείκτες
index numbers Laspeyres = αριθμοδείκτης του Laspeyres
index numbers Paasche = αριθμοδείκτης του Paasche
index numbers unweighted = αστάθμητοι αριθμοδείκτες
indexes or indices = αριθμοδείκτες
inefficient = μη αποτελεσματικός, μη αποδοτικός
inequality = ανισότητα
inference = συμπέρασμα
infinite = άπειρος
infinite population = άπειρος πληθυσμός
infinity = άπειρο
intercept (on x-axis) = τομή (με τον άξονα x)
interpretation = ερμηνεία
interval = διάστημα
inverse = αντίστροφος
inversion = αντιστροφή

L

least square estimate = εκτίμηση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων
least squares line = ευθεία ελαχίστων τετραγώνων
least squares method = μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων
limit = όριο
line = γραμμή, ευθεία
linear = γραμμικός
linear correlation = γραμμική συσχέτιση
linear correlation coefficient = συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως
linear function = γραμμική συνάρτηση
linear model = γραμμικό υπόδειγμα
linear relationship = γραμμική σχέση
linear regression equation = γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως
linear relationship = γραμμική σχέση εξαρτήσεως
linearity = γραμμικότητα

M

map charts = χαρτοδιαγράμματα
maximizing = μεγιστοποίηση
maximum = μέγιστος
mean = μέση τιμή
mean deviation = μέση απόκλιση
means = μέσο, μέσα
measurable = μετρήσιμος
measurable set = μετρήσιμο σύνολο
measure = μέτρο
measurement = μέτρηση
measures of location = στατιστικά μέτρα θέσεως
measures of central tendency = μέτρα κεντρικής τάσεως
measures of dispersion = μέτρα διασποράς
median = διάμεσος
method = μέθοδος
minimum = ελάχιστος
mode = επικρατούσα τιμή της μεταβλητής ή τύπος
model = υπόδειγμα
monthly index = μηνιαίος δείκτης

N

national statistical service = εθνική στατική υπηρεσία
negative = αρνητικός
nonlinear relationship = μη γραμμική σχέση
non linear correlation = μη ευθύγραμμη συσχέτιση
normal = κανονικός, κάθετος
normal curve = κανονική καμπύλη

normal equations = κανονικές εξισώσεις
notation = συμβολισμός

O

observation = παρατήρηση
observed frequency = παρατηρούμενη συχνότητα
odd = περιττός
odd number = περιττός αριθμός
open interval = ανοικτό διάστημα
operation = επιχείρηση, πράξη
origin = αρχή
original = αρχικός
original data = αρχικά αριθμητικά δεδομένα
orthogonal = ορθογώνιος

P

pair = ζεύγος
parabola = παραβολή
parabolic regression = παραβολική παλινδρόμηση
parameter = παράμετρος
parity index = δείκτης ισοτιμίας
percentages = ποσοστά
percentage change = ποσοστιαία μεταβολή
porcentile = εκατοστημόριο
percentiles or percentile values = εκατοστιαία σημεία
Perfect linear correlation = πλήρης γραμμική συσχέτιση
permutation = διάταξη
pictograms or pictographs = ειδοδιαγράμματα
pie diagram = κυκλικό διάγραμμα
plane = επίπεδο
point = σημείο
polygon = πολύγωνο
polygon graph or frequency polygon = πολύγωνο συχνότητας
population = πληθυσμός
population size = μέγεθος πληθυσμού
precision = ακρίβεια
prediction = πρόβλεψη
price index = δείκτης τιμών
price relative = σχετική τιμή
price consumer index = δείκτης τιμών καταναλωτή
principle = αρχή
probability = πιθανότητα
probable = πιθανός
production = παραγωγή
provisional data = προσωρινά στοιχεία

Q

quality = ποιότητα
quality control = έλεγχος ποιότητας
quantity = ποσότητα
quantity index number = αριθμοδείκτης ποσότητας
quantity price relation = σχέση ποσότητας και τιμής
quantum index = δείκτης όγκου
quotient = πηλίκο

R

random = τυχαίος
randomization = τυχαιότητα
random number = τυχαίος αριθμός
ratio = λόγος
raw data = ακατέργαστα δεδομένα
real number = πραγματικός αριθμός
regression = παλινδρόμηση
regression coefficient = συντελεστής παλινδρομήσεως
regression curve = καμπύλη παλινδρομήσεως
regression equation = εξίσωση παλινδρομήσεως
regression line = ευθεία παλινδρομήσεως
relation = σχέση
relationship = σχέση
relative = σχετικός
relative frequency = σχετική συχνότητα
reliability = αξιοπιστία
representative = αντιπροσωπευτικός
retail price index = δείκτης τιμών λιανικής πωλήσεως
rule = κανόνας

S

sample = δείγμα
sample mean = μέση τιμή δείγματος
sample size = μέγεθος δείγματος
sampling = δειγματοληψία
sampling technique = τεχνική δειγματοληψία
scale = κλίμακα
seasonal variation = εποχική μεταβολή
shape = μορφή, σχήμα
slope = κλίση
standard score = τυπικό αποτέλεσμα
standard unit = τυπική μονάδα
statistical analysis = στατιστική ανάλυση
statistical data = στατιστικά δεδομένα
statistical decision = στατιστική απόφαση
statistical hypothesis = στατιστική υπόθεση

statistical inference = στατιστική συμπερασματολογία
statistics = στατιστική
sum = άθροισμα
summation signs = σύμβολα αθροίσεως
sure event = βέβαιο γεγονός

T
table = πίνακας
tendency = τάση
term = όρος
theoretical = θεωρητικός
time = χρόνος
time chart or time series chart = χρονοδιάγραμμα
time series = χρονολογικές σειρές
tolerance = ανοχή
total = σύνολο, ολικός
transformation = μετασχηματισμός
triangle = τρίγωνο
type = τύπος

U
uncorrelated variables = ασυσχέτιστες μεταβλητές
unequal = άνισος
ungrouped data = αταξινόμητα δεδομένα
uniform distribution = ομοιόμορφη κατανομή
unit = μονάδα
unit value index = δείκτης μέσης αξίας
universal set = βασικό σύνολο
unweighted price indices = αστάθμητος αριθμοδείκτης τιμών

V
value = αξία, τιμή
value indices = δείκτης αξίας
variable = μεταβλητή
variance = διακύμανση
variance analysis = ανάλυση διακυμάνσεως
variation = μεταβλητικότητα (μεταβολή)
variation, coefficient of = συντελεστής μεταβλητικότητας
volume indices = δείκτης όγκου

W
weights = συντελεστές σταθμίσεως
weighted aggregative price index = σταθμικός δείκτης τιμών
weighted price indices = σταθμικοί αριθμοδείκτες τιμών
weighted relative price index = σταθμικός δείκτης των σχετικών τιμών
width or class interval = πλάτος ή διάστημα τάξεως

II. ΕΛΛΗΝΟΑΓΓΛΙΚΗ

Α

άθροισμα = sum
αθροιστικός = cumulative
αθροιστικά διαγράμματα = cumulat diagrams
αθροιστική κατανομή συχνότητας = cumulative frequency distribution
ακατέργαστα δεδομένα = raw data
ακιδωτά διαγράμματα (ραβδογράμματα) = bar charts or bar diagrams
ακρίβεια = precision
ανάλυση = analysis
ανάλυση διακυμάνσεως = variance analysis
αναποτελεσματικός = inefficient
ανεξαρτησία = independence
ανεξάρτητα γεγονότα = independent events
ανεξάρτητες μεταβλητές = independent variables
άνισος = unequal
ανισότητα = inequality
ανοικτό διάστημα = open interval
ανοχή = tolerance
αντιστροφή = inversion
αντίστροφος = inverse
αντιπροσωπευτικός = representative
αξία = value
αξιοπιστία = reliability
αποδιδόμενη στη X = ascribable to X
αποδοτικότητα = efficiency
απόκλιση = deviation
απόλυτος = absolute
αποτέλεσμα = effect
άπειρο = infinity
άπειρος = infinite
άπειρος πληθυσμός = infinite population
αριθμητικός =arithmetic
αριθμητικός μέσος όρος = arithmetic mean
αριθμοδείκτης = index number
αριθμοδείκτης του Laspeyres = index numbers Laspeyres
αριθμοδείκτης του Paasche = index numbers Paasche
αριθμοδείκτης ποσότητας = quantity index number
αρνητικός = negative
αρνητικός αριθμός = negative number
άρτιος αριθμός = even number
αρχές =principles
αρχή = origin
αρχικός = original

αρχικά δεδομένα =original data
αστάθμητος αριθμοδείκτης τιμών = unweighted price index
ασυμπτωτικός = asymptotic
ασυνεχής κατανομή = discontinous distribution
ασυσχέτιστες μεταβλητές = uncorrelated variables
αταξινόμητα δεδομένα = ungrouped data

Β

βασικό σύνολο = universal set

Γ

γενίκευση = generalization
γενικός = general
γενικός δείκτης = aggregative index
γενικός τιμάριθμος χονδρικής πωλήσεως =general wholesale price index
γραφική μέθοδος = graphic method
γραφική παράσταση = graph
γραμμή = line
γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως = linear regression equation
γραμμική συνάρτηση = linear function
γραμμική συσχέτιση = linear correlation
γραμμική σχέση = linear relationship
γραμμική σχέση εξαρτήσεως = linear relation ship
γραμμικός = linear
γραμμικότητα = linearity

Δ

δεδομένα = data
δείγμα =sample
δειγματοληψία = sampling
δείκτες αξίας = value indices
δείκτης ισοτιμίας = parity index
δείκτης μέσης αξίας = unit value index
δείκτης όγκου = volume index, quantum index
δείκτης τιμών = price index
δείκτης τιμών καταναλωτή = price consumer index
δείκτης τιμών λιανικής πωλήσεως = retail price index
δεκατημόριο = decile
διάγραμμα = chart, diagram
διακριτή μεταβλητή = discrete variable
διακριτός, διακεκριμένος = discrete
διακύμανση = fluctuation, variance
διάμεσος = medium
διασπορά = dispersion
διάσταση = dimension
διάστημα = interval

διάστημα τάξεως = class interval
διάταξη = permutation

Ε

Εθνική Στατιστική Υπηρεσία =National Statistical Service
ειδοδιαγράμματα = pictograms or pictographs
εκατοστιαία σημεία = percentiles or percentile values
εκατοστημόριο = percentile
εκθετική καμπύλη = exponential curve
εκθετική παλινδρόμηση = exponential regression
εκθετικός = exponential
εκτιμηθείσα εξίσωση παλινδρομήσεως = estimated regression equation
εκτίμηση = estimation
εκτίμηση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων = least square estimate
ελάχιστος = minimum
έλεγχος ποιότητας = quality control
εξάρτηση = dependence
εξαρτημένη μεταβλητή = dependence variable
εξίσωση παλινδρομήσεως = regression equation
επικρατούσα τιμή της μεταβλητής ή τύπος = mode
επίπεδο = plane
εποχική μεταβολή = seasonal variation
επιχείρηση = operation
επιχειρηματική πρόγνωση = business forecasting
επιχειρηματικός κύκλος = business cycle
ερμηνεία = interpretation
ερμηνευτική μεταβλητή = explanatory variable
ετήσιος μέσος = annual mean
ευθεία = line
ευθεία ελαχίστων τετραγώνων = least squares line
ευθεία παλινδρομήσεως = regression line

Ζ

ζεύγος = pair

Θ

θεμελιώδης, βασικός = fundamental
θεωρητικός = theoretical

Ι

ιδιότητα = property
ιστόγραμμα = histogram
ιστορικές ή χρονολογικές σειρές = historical series or time series

Κ

καμπύλη = curve
καμπύλη κατανομής = distribution curve

καμπύλη παλινδρομήσεως = regression curve
καμπύλη συχνοτήτων = frequency curve
καμπυλόγραμμος παλινδρόμηση = curvilinear regression
κανονικές εξισώσεις = normal equations
κανονική καμπύλη = normal curve
κανονικός = normal
κανόνας = rule
κατανομή = distribution
κατανομή συχνότητας = frequency distribution
κατάταξη δεδομένων = classification of data
κατηγορία, κλάση = category
κεντρική τάση = central tendency
κλάση (τάξη) = class
κλειστό διάστημα = closed interval
κλίμακα = scale
κλίση = slope
κομμάτι, τμήμα = block
κυκλικό διάγραμμα = pie diagram
κωδικοποιημένη μέθοδος = coding method

Λ

λόγος = ration

M

μέγεθος δείγματος = sample size
μέγεθος πληθυσμού = population size
μεγιστοποίηση = maximizing
μέγιστος = maximum
μέθοδος = method
μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων = least squares method
μέσα = means
μέση απόκλιση = average deviation, mean deviation
μέση παραγωγή = average production
μέση τιμή = mean
μέση τιμή δείγματος = sample mean
μέσος όρος = average
μεταβλητικότητα = variation
μεταβλητή = variable
μετασχηματισμός = transformation
μέτρα διασποράς = measures of dispersion
μέτρα κεντρικής τάσεως = measures of central tendency
μετρήσιμος = measurable
μετρήσιμο σύνολο = measurable set
μέτρηση = measurement
μέτρο = measure
μη γραμμική σχέση = non linear relationship

μη ευθύγραμμη συσχέτιση = non linear correlation
μηνιαίος δείκτης = monthly index
μονάδα = unit
μορφή, σχήμα = shape

Ο

οικονομική στατιστική = economic statistic
ολικός, σύνολο = total
ορθογώνιος = orthogonal
όρια διαστήματος τάξεως = class limits
όρια τάξεως = class boundaries
όριο, σύνορο = boundary – όριο = limit
όριο τάξεως, κατώτερο, ανώτερο = boundary lower, upper
όρος, συνθήκη = condition
όρος = term

Π

παλινδρόμηση = regression
παραβολή = parabola
παραβολική παλινδρόμηση = parabolic regression
παράγοντας = factor
παραγωγή = production
παράμετρος = parameter
παράμετρος διασποράς = dispersion parameters
παρατήρηση = observation
παρατηρούμενη συχνότητα = observed frequency
πεπερασμένος = finite
πεπερασμένος πληθυσμός = finite population
περιγραφικός = descriptive
περιγραφική στατιστική = descriptive statistics
περίοδος βάσεως και έτος βάσεως = base period or base year
περιττός = odd
περιττός αριθμός = odd number
πηλίκο = quotient
πιθανότητα = probability
πίνακας = table
πίνακας συχνότητας = frequency table
πίνακας ταξινομήσεως = classification table
πλάτος ή διάστημα τάξεως = width or class interval
πληθυσμός = population
ποιότητα = quality
ποιοτικά δεδομένα = attribute data
πολύ σημαντικό αποτέλεσμα = highly significant result
πολύγωνο = polygon
πολύγωνο αθροιστικής συχνότητας = cumulative frequency polygon

πολύγωνο συχνότητας = frequency polygon or polygon graph
πολύπλοκος, σύνθετος =complex
ποσοστιαία μεταβολή = percentage change
ποσοστό = percentage
ποσότητα = quantity
πρόβλεψη = prediction
προσαρμογή = fitting
προσαρμογή καμπύλης = curve fitting
προσαρμοσθείσα γραμμή= fitted line
προσαρμοστική ικανότητα = goodnes of fit
προσέγγιση = approximation
προσωρινά στοιχεία = provisional data

Σ

σημείο = point
σταθερά =constant
σταθμικοί αριθμοδείκτες τιμών = weighted price indices
σταθμικός δείκτης σχετικών τιμών = weighted relative price index
σταθμικός δείκτης τιμών = weighted aggregative price index
στατιστικά δεδομένα = statistical data
στατιστική ανάλυση = statistical analysis
στατιστική απόφαση = statistical decision
στατιστική υπόθεση =statistical hypothesis
στατιστική = statistics
στατιστική επιχειρήσεων = business statistics
στατιστικό μέτρο θέσεως = measure of location
στήλη = column
στοιχεία στατιστικής = elements of statistics
στοιχειώδες γεγονός = elementary event
στοιχειώδης = elementary
συλλογή = collection
συλλογή δεδομένων = gathering of data
σύμβολο αθροίσεως = summation signs
συμβολισμός = notation
σύμβολο = symbol
συμπέρασμα = inference
συνάρτηση = function
συνεχής = continuous
συνεχής μεταβλητή = continuous variable
συνιστώσα = component
συντελεστές σταθμίσεως = weights
συντελεστής = coefficient
συντελεστής γραμμικής συσχετίσεως = linear correlation coefficient
συντελεστής μεταβλητικότητας = coefficient of variability
συντελεστής παλινδρομήσεως = coefficient of regression

συντελεστής συσχετίσεως = coefficient of correlation
συντεταγμένες = coordinates
συσχέτιση = correlation
συχνότητα = frequency
συχνότητα τάξεως = classe frequency
σφάλμα = error
σφάλμα δειγματοληψίας = error of sampling
σχέση = relation, relationship
σχέση ποσότητας και τιμής = quantity price relation
σχετικός = relative
σχετική συχνότητα = relative frequency
σχετική τιμή = price relative

Τ

ταξινόμηση = classification
ταξινομημένα σε ομάδες δεδομένα = grouped data
τέλεια (πλήρης) γραμμική συσχέτιση = perfect linear correlation
τετμημένη = abscissa
τεχνική δειγματοληψίας = sampling technique
τιμή, αξία = value
τομή = intercept
τομή (με τον άξονα y) = intercept (on y - axis)
τρίγωνο = triangle
τυπικό αποτέλεσμα = standard score
τυπική μονάδα =standard unit
τύπος = formula
τύπος = type
τυχαίος = random
τυχαίος αριθμός = random number
τυχαιότητα = randomization

Υ

υπόδειγμα = model
υποσύνολο = subset
υπολογισμός = calculation

Φ

φύλλο = sheet

Χ

χαρτοδιαγράμματα = map charts
χρονοδιάγραμμα = time chart or time series chart
χρονολογικές σειρές = time series
χρόνος = time
χώρος = space

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Εισαγωγή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Συλλογή και παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Μονομεταβλητοί πληθυσμοί - Μέτρα θέσεως

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Μονομεταβλητοί πληθυσμοί - Μέτρα διασποράς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Δισμετάβλητοι πληθυσμοί - Παλινδρόμηση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Διμετάβλητοι πληθυσμοί - Συσχέτιση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Χρονολογικές σειρές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

Αριθμοδείκτες

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ