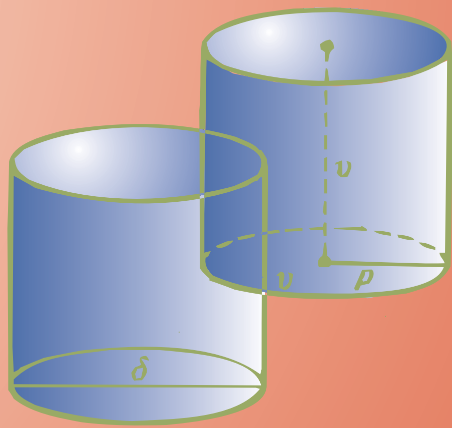
Μαθηματικό περιοδικό για το

Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

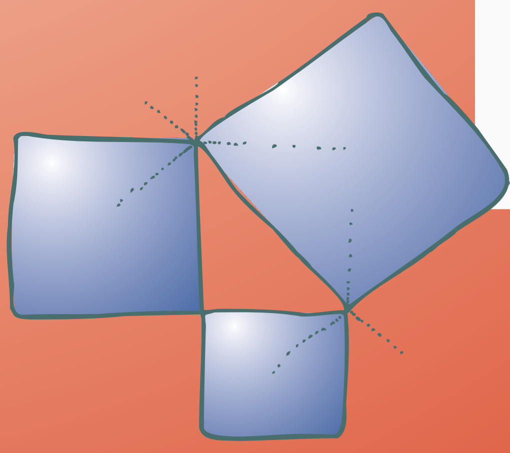
117

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019 ευρώ 3,00



Ασκήσεις Γεωμετρίας με ... Αφαίρεση

Blaise Pascal (1623-1662)



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 117

Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2020

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής
Παναγιώτης Δρούτσας

Επιμέλεια Έκδοσης:
Αρδαβάνη Καλλιόπη
Δοργιάκη Ιωάννα
Κεΐσογλου Στέφανος
Λαγός Γεώργιος
Τριανταφύλλου Ανδρέας

Γράμμα της Σύνταξης

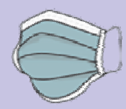
Αγαπητοί / ές αναγνώστες αναγνώστριες.

Αρχικά ευχόμαστε σε όλες και όλους να είναι παραγωγική και δημιουργική η νέα σχολική κυρίως όμως με υγεία. Στο τεύχος αυτό τον πρώτο λόγο έχουν τα Μαθηματικά του σχολείου.

Όπως θα διαπιστώσετε υπάρχει άφθονο υλικό με προβλήματα και ασκήσεις για όλες τις τάξεις και όλα τα επίπεδα δυσκολίας.

Βέβαια δεν λείπουν και τα άρθρα γενικού ενδιαφέροντος από την ιστορία των Μαθηματικών, τα Μαθηματικά στην τέχνη αλλά ακόμη και ποιητικές δημιουργίες αναγνωστών μας.

Ευχόμαστε να περάσετε ένα ασφαλή και ευχάριστο χειμώνα.



Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού
Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Πρόυσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

● Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
● Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Έργα και ημέρες του Blaise Pascal

(1623-1662)

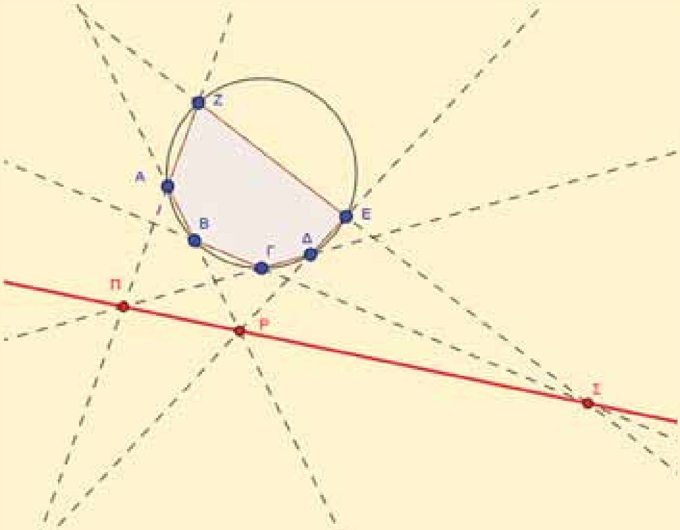
“ *η μεγάλη ανεκπλήρωτη δυνατότητα της ιστορίας …*» E.T.Bell

Από τον Γιώργο Λαγουδάκο

Οι 4 βασικές ιδιότητες του Pascal ήταν: εφευρέτης , μαθηματικός, φυσικός και θεολόγος

Η μητέρα του **Antoinette Pascal** πέθανε όταν ήταν τεσσάρων ετών, οπότε ο μικρός **Blaise** έζησε δίπλα στον πατέρα του **Etienne Pascal** και τις δύο αδελφές του **Gilberte** και **Jacqueline** που τον επηρέασαν ιδιαίτερα.
Το 1631 η οικογένεια μετακομίζει στο Παρίσι . Αρχικά η εκπαίδευσή του περιορίζεται στην εκμάθηση Λατινικών και Ελληνικών. Σε ηλικία 12 ετών άρχισε να εξερευνά μόνος του Γεωμετρία. Η πρώτη επιβεβαίωση των ιδιαίτερων ικανοτήτων του ήταν η απόδειξη , χωρίς καμία βοήθεια ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές. Μετά από αυτό ο πατέρας του έδωσε ένα αντίγραφο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Γρήγορα αναγνωρίστηκε ως παιδί θαύμα και σε ηλικία 14 ετών είχε γίνει δεκτός στις εβδομαδιαίες συζητήσεις που διηύθυνε ο θεολόγος – μαθηματικός **Mersenne**.

Ας σημειώσουμε ότι από τον «κύκλο του πατέρα **Mersenne**» προήλθε η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών.
Σε ηλικία 16 ετών (1639) αποδεικνύει ότι « Αν θεωρήσουμε έξι σημεία σε μία οποιαδήποτε κωνική τομή , για παράδειγμα έναν κύκλο, τότε σχηματίζεται ένα εξάγωνο εγγεγραμμένο στην κωνική τομή. Υποθέτοντας ότι τα ζεύγη των απέναντι πλευρών του εξάγωνου τέμνονται, τότε τα τρία σημεία τομής που σχηματίζονται είναι συνευθειακά»

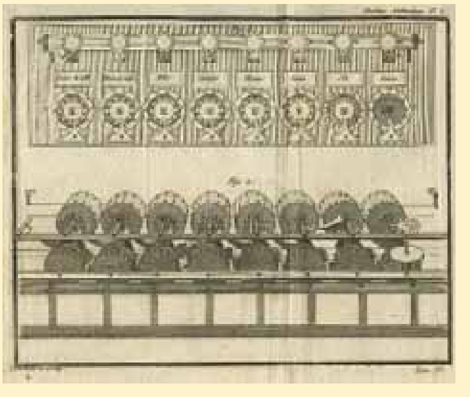


Το σημαντικό είναι ότι γύρω από αυτό το θεώρημα γράφει την μελέτη ***Essai pour les Coniques*** (Μελέτη πάνω στις κωνικές τομές) στην οποία περιέχονται 400 περίπου προτάσεις πάνω στις κωνικές τομές.

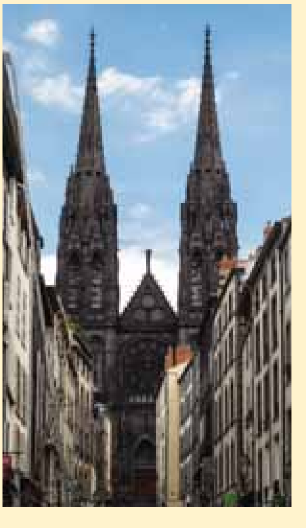
Δυστυχώς από τα δεκαεπτά του χρόνια ως το τέλος της ζωής του άρχισε να υποφέρει από οξεία δυσπεψία που τον βασάνιζε μέρα και νύχτα. Οι πόνοι και η αυπνία έκαναν τις νύχτες του εφιαλτικές.

Κι' όμως παρά την άσχημη κατάσταση της υγείας του, το ανήσυχο πνεύμα του εργαζόταν ακατάπαυστα. Σε ηλικία δεκαοκτώ ετών επινοεί και κατασκευάζει την πρώτη υπολογιστική μηχανή στην ιστορία!

Η οικογένεια μετακομίζει στην Rouen όπου παίρνει μαθήματα από σιδηρουργούς της πόλης και τελικά το 1642 παρουσιάζει μία μηχανή μικρών διαστάσεων με γρανάζια. Αρχικά ο αριθμός των γραναζιών-τροχών ήταν πέντε αλλά τελικά έφτιαξε και μηχανή με έξι και με οκτώ τροχούς που έδιναν την δυνατότητα να γίνονται προσθέσεις και αφαιρέσεις μεταξύ έως και οκταψήφιων αριθμών. Κατασκευάσθηκαν και πωλήθηκαν 37 μόνο αντίγραφα της μηχανής λόγω του υψηλού κόστους της.



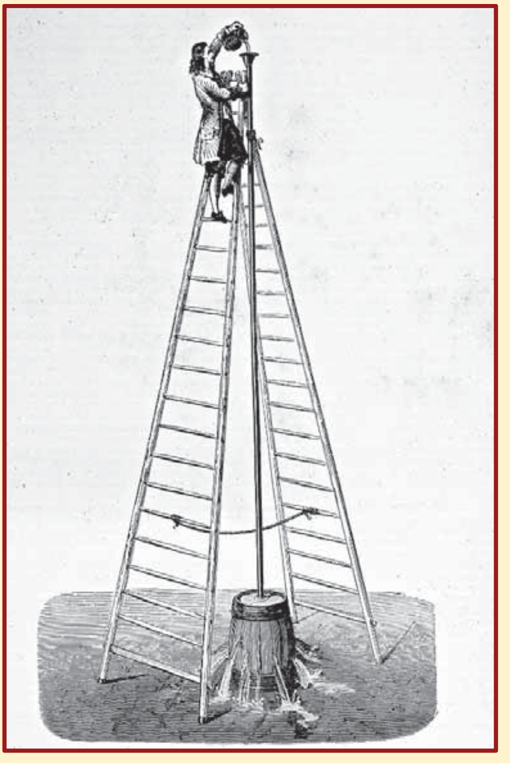
Το 1646 η οικογένεια **Pascal** ασπάζεται την αίρεση του **Cornelius Jansen** (Γιανσενισμός) που πρέσβευε μία θρησκευτική μεταρρύθμιση που ερχόταν σε ρήξη με τον καθολικισμό και ιδιαίτερα με τους Ιησουίτες.



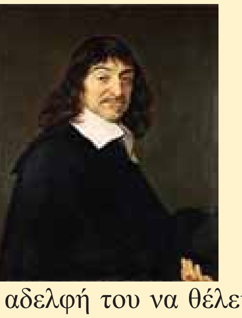
Το 1648 ο Blaise ασχολείται με έναν τελείως διαφορετικό τομέα. Συνεχίζει την εργασία του **Torricelli** (1608-1647) πάνω στην ατμοσφαιρική πίεση.

Με την βοήθεια του γαμπρού του εκτέλεσε πείραμα μεταφέροντας ένα βαρόμετρο στη κορυφή του Καθεδρικού της **Auvergne**, σημειώνοντας την πτώση της υδραργυρικής στήλης καθώς μειωνόταν η ατμοσφαιρική πίεση λόγω του ύψους. Με τον τρόπο αυτό για πρώτη φορά έγινε δυνατή η μέτρηση του υψομέτρου με χρήση βαρόμετρου.

Διατυπώνει την γνωστή «αρχή» του δηλαδή «η μεταβολή της πίεσης που προκαλείται από ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο ενός περιορισμένου υγρού μεταδίδεται με τον ίδιο τρόπο σε όλα τα σημεία του υγρού». Αρχή που εφάρμοσε για να κατασκευάσει σύριγγες.



Επιβεβαιώνει τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής - *(Η πίεση που δημιουργείται εξ αιτίας του υγρού, σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του, σε ένα δοχείο που το περιέχει είναι ανάλογη με την πυκνότητα του υγρού, της επιτάχυνσης της βαρύτητας και του βάθους h, δηλαδή ισχύει:* $P = gh\rho$ *)* - με τη βοήθεια πειράματος όπου προσαρμόζοντας σε ένα βαρέλι ένα μακρύ και πολύ λεπτό σωλήνα και γεμίζοντάς τον με ελάχιστο νερό, διαπίστωσε ότι η αύξηση της πίεσης οδήγησε το βαρέλι να γίνει θρύψαλα.



Η επιστροφή της οικογένειας **Pascal** στο Παρίσι συνοδεύεται με την επίσκεψη του **Rene Descartes** (1596-1650). Ανάμεσά τους μάλλον αναπτύχθηκε μία αμοιβαία αντιπάθεια, που εν πολλοίς οφειλόταν και στις θρησκευτικές διαφορές αφού ο Descartes ήταν φανατικός καθολικός και οπαδός των Ιησουιτών.

Το πάθος και η δογματική μισαλλοδοξία οδήγησαν τελικά την μικρότερη αδελφή του να θέλει να γίνει καλόγρια αλλά και τον ίδιο να ασχοληθεί με θρησκευτικά ζητήματα επικρίνοντας τον ορθόδοξο καθολικισμό. Συγγράφει θεολογικές και φιλοσοφικές μελέτες. Τα γραπτά του συγκεντρώνονται σε δύο συλλογές τους «Στοχασμούς» και τα «Γράμματα» εκεί διατυπώνεται και το διάσημο «Στοίχημα» στο οποίο δηλώνει ότι είναι πιο συμφέρουσα για τους θρησκευτικούς σκεπτικιστές να αγκαλιάσουν την πίστη στον Θεό, καθώς τελικά έχουν περισσότερα να χάσουν εάν αποκαλυφθεί μια υψηλότερη δύναμη μετά το θάνατο.
Η μεγάλη όμως προσφορά του **Pascal** στα μαθηματικά είναι μία σειρά επιστολών που αντήλλαξε το 1654 με τον Γάλλο μαθηματικό **Fermat**.

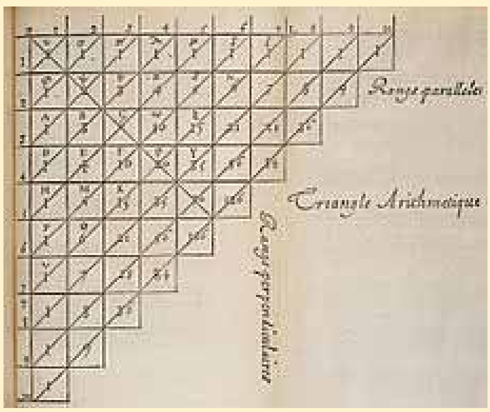
Στην ιστορία μας μπλέκεται ένας ιππότης …

Ο Ιππότης ***de Méré*** *είχε πολλά να σκεφθεί …, τι ήταν πιο συμφέρον για αυτόν να στοιχηματίσει, ότι ένας παίκτης θα φέρει τουλάχιστον μία φορά 6 ρίχνοντας 4 φορές ένα ζάρι ή ότι θα φέρει μία τουλάχιστον φορά εξάρες ρίχνοντας 24 φορές δύο ζάρια;*

Ο **Chevalier de Méré** γνωστό μούτρο όλων των υπόγειων του Παρισιού γνώριζε ότι η πιθανότητα να φέρει 6 ρίχνοντας ένα ζάρι είναι 1/6, ενώ να φέρει κανείς εξάρες ρίχνοντας δύο ζάρια 1/36, οπότε η λογική του έλεγε ότι ,αν κάποιος ρίξει ένα ζάρι 4 φορές, έχει 4/6 πιθανότητες να φέρει ένα τουλάχιστον 6. Ενώ αν ρίξει κάποιος δύο ζάρια 24 φορές, θα έχει 24/36 πιθανότητες να φέρει εξάρες. Άρα ,οι πιθανότητες των δύο περιπτώσεων πρέπει να είναι ίδιες. Η εμπειρία όμως έδειχνε άλλα, η περίπτωση του ενός ζαριού υπερτερούσε από αυτή των δύο ζαριών, που έκανε λάθος;

Το πρόβλημά του το είπε στον πιο διάσημο Μαθηματικό της Γαλλίας, που δεν ήταν άλλος από τον **Pierre de Fermat** (1608-1665). Ο **Fermat** δεν ήταν κατά επάγγελμα Μαθηματικός στην πραγματικότητα ήταν δικαστικός, όμως ανάμεσα στις δίκες και στις καταδίκες αυτό που τον ξεκούραζε ήταν να ασχολείται με προβλήματα. Συγχρόνως τις όποιες ανακαλύψεις του τις ανακοίνωνε και σε άλλους συναδέλφους του χωρίς πάντα να δίνει τις απαντήσεις, αλλά απλώς να ανακοινώνει το πρόβλημα καθώς επίσης την επιτυχή έκβαση της προσπάθειάς του.

Με τον τρόπο αυτό ένας άτυπος δημιουργικός ανταγωνισμός είχε αναπτυχθεί ανάμεσα στην κοινότητα των μαθηματικών. Για το πρόβλημα του **Chevalier de Méré** ο **Fermat** το ανακοίνωσε στον **Blaise Pascal**, και από τις επιστολές που αντάλλαξαν εξελίχθηκε ένα νέος τομέας των σύγχρονών μαθηματικών ο Λογισμός των Πιθανοτήτων. Ιδιαίτερη θέση στη θεωρία των πιθανοτήτων όπως αναπτύχθηκε από τον **Pascal** έχει το ιδιαίτερο τρίγωνο του. Το γιατί και το πως θα το δούμε στο επόμενο τεύχος.



Λίγη υπομονή φίλοι μου !

Ο Pascal πέθανε από όγκο στο στομάχι στο Παρίσι στις 19 Αυγούστου 1662. Ήταν 39 ετών.

Στον μεγάλο αυτόν διανοητή οι σύγχρονοί του επιστήμονες αφιέρωσαν … Την ονομασία της μονάδας μέτρησης πίεσης (Pascal ή Pa) , αλλά και την ονομασία μιας γλώσσας υπολογιστών – την γλώσσα Pascal.

Ο ιστορικός E.T.Bell στο κλασικό έργο του «οι Μαθηματικοί» αναφέρει για τον Pascal

« … ας δούμε τον Pascal ως έναν εξαιρετικά προικισμένο μαθηματικό ο οποίος επέτρεψε στις μαζοχιστικές του ροπές προς τον αυτοβασανισμό και προς τις ανώφελες θεωρητικολογίες για τις αιρετικές διαφωνίες των ημερών του, να τον υποβιβάσουν στο επίπεδο ενός νευρωτικού θρησκευόμενου.»

Ασκήσεις Γεωμετρίας με … Αφαίρεση

Μαρία Ρουσούλη, Γιώργος Καραφέρης

Το κείμενο που ακολουθεί αποτελεί συνέχεια του κειμένου της Μαρίας Ρουσούλη που δημοσιεύτηκε στο προηγούμενο τεύχος με τίτλο «*Ασκήσεις Γεωμετρίας με ……Stijl*»

Μερικοί ζωγράφοι μεταμορφώνουν τον ήλιο σε μια κίτρινη κηλίδα. Κάποιοι άλλοι μεταμορφώνουν μια κίτρινη κηλίδα σε ήλιο. **Πάμπλο Πικάσο 1881-1973**, Ισπανός ζωγράφος

Σουπρεματισμός (1913-1919)

Ο Σουπρεματισμός είναι ένα καλλιτεχνικό κίνημα που εστιάζεται σε βασικά γεωμετρικά σχήματα όπως ευθείες, τετράγωνα, κύκλους και ορθογώνια, ζωγραφισμένα σε περιορισμένο εύρος χρωμάτων [4].

Θεμελιωτής του Σουπρεματισμού είναι ο Kazimir Malevich (1878-1935) [5] με το περίφημο πρώτο του σουπρεματιστικό έργο «Μαύρο τετράγωνο» πάνω σε λευκό φόντο, το 1913 (Oil on linen).

Τα έργα του βασίζονται στη γεωμετρία: αρχικά στην ευθεία γραμμή που συμβολίζει την ανύψωση του ανθρώπου πάνω από το χάος της φύσης και στο τετράγωνο που δεν συναντάμε στη φύση, αλλά είναι η πιο βασική, η ύπατη καλλιτεχνική φόρμα. Γρήγορα πέρασε στα έργα του κύκλους και τρίγωνα με σημαντικό το ρόλο του χρώματος. Κίτρινα, κόκκινα και μαύρα ορθογώνια, τρίγωνα , ρόμβοι, κύκλοι και σταυροί, οργανώνονται σε οριζόντιους, κάθετους ή διαγώνιους άξονες, πάνω σε άσπρο φόντο, διαιρώντας έτσι το χώρο και δημιουργώντας ρυθμικές κινήσεις προς διάφορες κατευθύνσεις [6].Το 1919 ο ίδιος ανακοίνωνε το τέλος του σουπρεματισμού.

Kazimir Malevich
Inspired Geometric Abstract Modern Painting

Άσκηση 1η

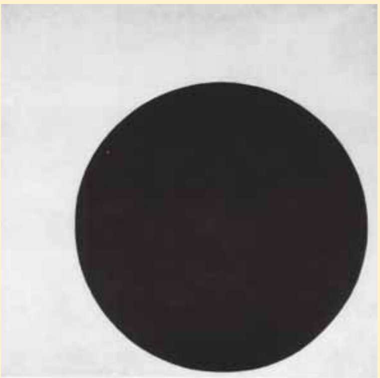
Ο διπλανός πίνακας είναι το περίφημο Μαύρο Τετράγωνο (Black square Malevich 1913, Μόσχα, Συλλογή Tretyakov) με πλευρά 79,5 *cm*.

α) Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδό του αυθεντικού πίνακα σε cm^2 και m^2 .

β) Αν ο πίνακας της άσκησης έχει πλευρά 5,6*cm* και το μαύρο τετράγωνο πλευρά 4 *cm*, να βρεθεί το εμβαδό του άσπρου πλαισίου.

γ) Αν διπλασιάσουμε την πλευρά του πίνακα της άσκησης, να βρεθεί το νέο εμβαδό του άσπρου πλαισίου.

Άσκηση 2η



Βλέπουμε τον πίνακα Μαύρος Κύκλος (Black Circle, Kazimir Malevich, 1915. Oil on canvas, State Russian Museum, St. Petersburg, Russia) . Ο πίνακας της άσκησης είναι τετράγωνο με πλευρά 5,2cm , ενώ ο μαύρος κύκλος έχει διάμετρο 4cm.

α) Να βρείτε το μήκος και το εμβαδό του κύκλου

β) Να βρείτε το εμβαδό του λευκού τμήματος του πίνακα.

γ) Αν τριπλασιάσουμε την περίμετρο του κύκλου να βρείτε πόσο θα μεταβληθεί το εμβαδό του. Ποια σχέση συνδέει την μεταβολή της ακτίνας με την μεταβολή του εμβαδού;

Άσκηση 3η

Το διπλανό έργο του Malevich (1915, Oil on Canvas, State Russian Museum, Saint Petersburg) είναι τετράγωνος πίνακας.

Στην άσκηση ο πίνακας έχει εμβαδό 25 cm^2 , ενώ το λευκό ορθογώνιο έχει βάση 2,2 cm και ύψος 2,9 cm.

α) Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδό του λευκού ορθογωνίου

β) να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδό του μαύρου τμήματος

γ) Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα με τετραπλάσιο εμβαδό, να βρείτε πόσο πρέπει να είναι η πλευρά του; Τι παρατηρείτε;

Ο Malevich επηρέασε την παραπέρα εξέλιξη της μη παραστατικής τέχνης όπως την πορεία του Ολλανδικού Stijl (το κίνημα του Νεοπλαστικισμού 1917-1931) και ιδιαίτερα τον Theo van Doesburg.

Βιβλιογραφία

[1] Πλάτωνος, Φιληβος 51 c-d

[2] Αριστοτέλους. Ποιητική, 1448 β17

[3] Αριστοτέλους, Ρητορική Γ 1414a

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Suprematism

[5] https://www.youtube.com/watch?v=5xyVIzo-zIU www.artaspects.org

[6] Η ΤΕΧΝΗ ΤΟΥ 20ου ΑΙΩΝΑ , τόμος 1, 1880-1920, ΑΛΚΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΙΔΗΣ, University Studio Press

Λύσεις των ασκήσεων

Άσκηση 1η

α) Ο πίνακας έχει πλευρά 79,5 συνεπώς η περίμετρός του είναι π=4•79,5=318 cm και το εμβαδό του Ε=$79,5^2=6320,25\ cm^2$ Ε=$\frac{6320,25}{10000}=0,632025\ m^2$

β) Για να βρούμε το εμβαδό του άσπρου πλαισίου θα αφαιρέσουμε από το εμβαδό του πίνακα το εμβαδό του μαύρου τετραγώνου. Είναι $Ε_{πινακα}=5,6^2=31,36$ και $Ε_{μαύρουτετραγώνου}=4^2=16$ άρα το εμβαδό του άσπρου πλαισίου είναι 31,36-16=15,36 cm^2

γ) Αν διπλασιάσουμε την πλευρά του πίνακα θα διπλασιαστεί και η πλευρά του μαύρου τετραγώνου δηλ θα γίνει 8, άρα το εμβαδό του μαύρου είναι 64 cm^2 και του πίνακα $(2•5,6)^2=11,2^2=125,44\ cm^2$, οπότε το εμβαδό του άσπρου πλαισίου είναι 125,44-64=61,44 cm^2.
Ξέρουμε(;) πως όταν διπλασιάζεται η πλευρά τετραπλασιάζεται το εμβαδό. Άρα το εμβαδό του άσπρου πλαισίου θα γίνει 4•15,36=61,44

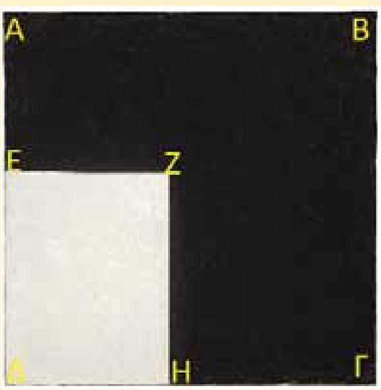
Άσκηση 2η

α) Ο κύκλος έχει διάμετρο 4cm άρα μήκος L=$πδ$=3,14•4=12,56cm. Η ακτίνα του είναι $ρ=\frac{δ}{2}=\frac{4}{2}=2$ cm και το Ε=$πρ^2$=3,14•2^2=3,14•4=12,56 cm^2

β) Το εμβαδό του πίνακα είναι $5,2^2$=27,04 και του κύκλου 12,56 άρα το εμβαδό του λευκού μέρους είναι 27,04-12,56=14,48 cm^2

γ) Αν τριπλασιάσουμε την περίμετρο του κύκλου θα έχει τριπλασιαστεί η ακτίνα του δηλ. ρ=6cm και το Ε=$πρ^2$=3,14•6^2=3,14•36=113,04 cm^2. Η μεταβολή του εμβαδού είναι 113,04-12,56=100,48 δηλ μεγάλωσε κατά 100,48 cm^2. Παρατηρούμε ότι τριπλασιάστηκε η ακτίνα και εννεαπλασιάστηκε το εμβαδό ($9=3^2$)

Άσκηση 3η



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι π=2•2,9+2•2,2= 5,8+4,4=10,2cm και το εμβαδό του Ε=2,2•2,9=6,38 cm^2

β) Αφού το εμβαδό του τετράγωνου πίνακα είναι 25 cm^2 η πλευρά του είναι 5 cm. Η περίμετρος του μαύρου τμήματος είναι

π= ΑΒ+ΒΓ+ΓΗ+ΗΖ+ΖΕ+ΕΑ=5+5+(5-2,2)+2,9+2,2+(5-2,9)=

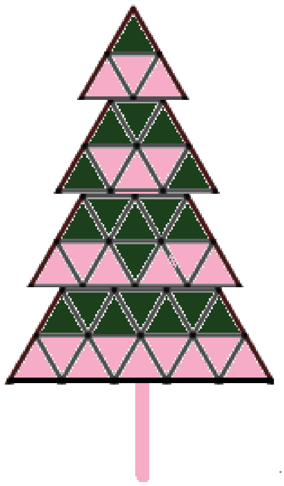
=10+2,8+5,1+2,1=20cm. Το εμβαδό του είναι

$Ε_{τετρ}-Ε_{ορθ}=25-6,38=18,62cm^2$.

γ) Ο πίνακας θα έχει τετραπλάσιο εμβαδό δηλ. 4•25=100 άρα η πλευρά του είναι 10. Παρατηρούμε πως όταν τετραπλασιάζεται το εμβαδό του τετραγώνου η πλευρά του διπλασιάζεται ($4=2^2$)

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πολλαπλασιασμού

Αρδαβάνη Καλλιόπη - Μάλλιαρης Χρήστος



Εικόνα 1
χριστουγεννιάτικο δέντρο

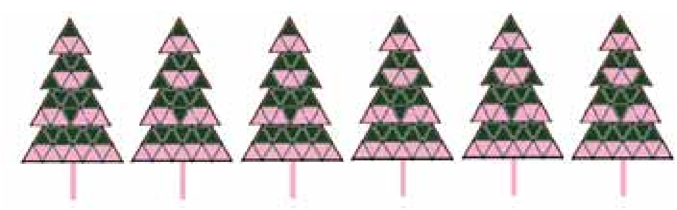
Οι μαθητές 6 τμημάτων-τάξεων ενός δημοτικού σχολείου ζήτησαν από την καθηγήτρια των καλλιτεχνικών να κατασκευάσουν από ένα ξύλινο χριστουγεννιάτικο δέντρο για την τάξη τους, όπως αυτό στην εικόνα 1.

Στο εμπόριο πωλούνται ξύλινα τρίγωνα και στο σχολείο υπάρχουν πινέλα και χρώματα βαφής πράσινου και κόκκινου χρώματος.

➔ **Η καθηγήτρια ζήτησε από τους μαθητές της ΣΤ΄ τάξης να υπολογίσουν τον αριθμό των ξύλινων τριγώνων που πρέπει να αγοράσει, καθώς και τον αριθμό των κομματιών από κάθε χρώμα που θα πρέπει να βάψουν οι μαθητές.**

- Μία ομάδα μαθητών, η Α, έβγαλαν 6 φωτοτυπίες των δέντρων και ξεκίνησαν να μετρούν τα τρίγωνα αριθμώντας τα ένα-ένα :

1,2,3,4,5,…30,31,….40, 41,42,…240.



Εικόνα 2

Στη συνέχεια μέτρησαν όλα τα πράσινα τρίγωνα 1,2,3,4,..19,20,…114  και μετά μέτρησαν όλα τα κόκκινα 1,2,3,4…21,22,…126  .

- Μια άλλη ομάδα μαθητών, η Β, μέτρησε τα πράσινα ξύλινα τρίγωνα και μετά τα κόκκινα από τα οποία αποτελείται το ένα δέντρο, τα πρόσθεσε και βρήκε τον αριθμό των τριγώνων του ενός δέντρου. Μετά πολλαπλασίασε αυτόν τον αριθμό με τον αριθμό 6 και βρήκαν 240 τρίγωνα.

Αναλυτικά είπαν:

Πράσινα τρίγωνα ενός δέντρου: 19

Κόκκινα τρίγωνα ενός δέντρου: 21

Σύνολο τριγώνων ενός δέντρου: 19+21=40

Συνολικός αριθμός τριγώνων των 6 δέντρων : $6 \cdot 40 = 240$

- Μία άλλη ομάδα μαθητών, η Γ, μέτρησε τον αριθμό πράσινων τριγώνων του ενός δέντρου και τα πολλαπλασίασε επί 6, στη συνέχεια μέτρησε τον αριθμό των κόκκινων τριγώνων του ενός δέντρου και τα πολλαπλασίασε επί 6 και μετά πρόσθεσε αυτά τα δύο γινόμενα και βρήκε τον ίδιο συνολικό αριθμό 240 τρίγωνα.

Αναλυτικά είπαν

Πράσινα τρίγωνα ενός δέντρου : 19

Πράσινα τρίγωνα των 6 δέντρων $6 \cdot 19 = 114$

Κόκκινα τρίγωνα ενός δέντρου : 21

Κόκκινα τρίγωνα των 6 δέντρων: $6 \cdot 21 = 126$

Συνολικός αριθμός τριγώνων 6 δέντρων : 114+126 = 240

Παρατηρούμε ότι και οι τρεις ομάδες υπολόγισαν με τελείως διαφορετικούς τρόπους τον συνολικό αριθμό τριγώνων αλλά βρήκαν το ίδιο αποτέλεσμα: τον αριθμό 240.

****** Υπάρχουν πολλοί σωστοί τρόποι απάντησης σε ένα ερώτημα*******

Αν συνοψίσουμε $6 \cdot (19+21) = 6 \cdot 19 + 6 \cdot 21 = 114 + 126 = 240$

Γενικά : $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$, **επιμεριστική ιδιότητα**

Όταν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με ένα άθροισμα δύο ή περισσοτέρων προσθετέων, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό με κάθε προσθετέο ξεχωριστά και μετά να προσθέσουμε τα γινόμενα που θα προκύψουν.

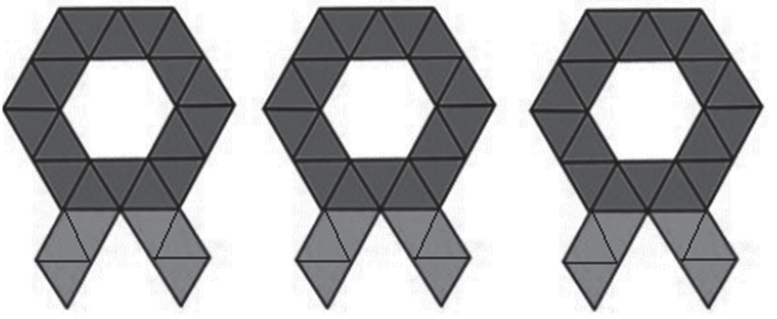
ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ: $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$,

Παράδειγμα:

- $5 \cdot (6+2) = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 30 + 10 = 40$
- $5 \cdot (6+2) = 5 \cdot (8) = 40$ (χωρίς χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας)
- $4 \cdot (2+3+5) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 8 + 12 + 20 = 40$
- $4 \cdot (2+3+5) = 4 \cdot (10) = 40$ (χωρίς χρήση επιμεριστικής ιδιότητας)

➔ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Να βρεις με τρεις τρόπους το συνολικό αριθμό ισοπλεύρων τριγώνων, από τα οποία αποτελούνται τα 3 χριστουγεννιάτικα στολίδια της εικόνας 3.



Εκόνα 3, χριστουγεννιάτικα στολίδια

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και ως προς την αφαίρεση.

Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό πρώτα με τον μειωτέο και μετά με τον αφαιρετέο και αφαιρούμε τα γινόμενα που βρίσκουμε.

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$$

Παράδειγμα :

- $5 \cdot (6 - 2) = 5 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 30 - 10 = 20$
- $5 \cdot (6 - 2) = 5 \cdot (4) = 20$ (χωρίς χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας)

Με λίγα λόγια επιμερίζουμε δηλαδή χωρίζουμε τον έναν πολλαπλασιασμό σε περισσότερους πολλαπλασιασμούς και μετά προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα γινόμενα.

Παράδειγμα :

Να γίνουν οι πράξεις:

➢ $15 - 2 \cdot (1 + 3) =$

Χωρίς χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

$$15 - 2 \cdot (1 + 3) = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7$$

Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

$$15 - 2 \cdot (1 + 3) = 15 - (2 \cdot 1 + 2 \cdot 3) = 15 - (2 + 6) = 15 - 8 = 7$$

➢ $127 - 25 \cdot (1 + 2) =$

Χωρίς χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

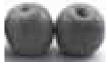
$$127 - 25 \cdot (1 + 2) = 127 - 25 \cdot 3 = 127 - 75 = 52$$

Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

$127 - 25 \cdot (1 + 2) =$ 127 –(25· 1 +25· 2) =127 –(25+50) =127-75 = 52

➔ **Ας θυμηθούμε τι κάναμε στο δημοτικό και ας αναρωτηθούμε αν χρησιμοποιούσαμε την επιμεριστική ιδιότητα:**

- Στο δημοτικό από την πρώτη τάξη ο δάσκαλος /η δασκάλα, μας έμαθε ότι **μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε μόνον όμοια πράγματα**π.χ.

 +  = 

Δηλαδή: 3 μήλα + 2 μήλα = 5 μήλα ή με άλλο τρόπο λέγαμε

3 φορές  + 2 φορές  = (3+2)φορές  = 5  ή

3 μήλα + 2 μήλα = (3 + 2) μήλα = 5 μήλα. Ποια ιδιότητα χρησιμοποιούσαμε;

- Όταν μάθαμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε διψήφιους αριθμούς π.χ το 14 με το 53. Γράφαμε 14+53=67 και το βρίσκαμε με το μυαλό αφού αναλύαμε κάθε αριθμό στις δεκάδες Δ και τις μονάδες Μ που έχει και στη συνέχεια προσθέταμε μονάδες με μονάδες και δεκάδες με δεκάδες. Στο παράδειγμα μας:
- Ο **14=1Δ +4Μ** και ο **53=5Δ +3Μ**, οπότε **14+53=(1Δ+5Δ)+(4Μ+3Μ)=(1+5) Δ+(4+3) Μ=6Δ+ 7Μ=67.** Ποια ιδιότητα χρησιμοποιούσαμε;
- Όταν μάθαμε να υπολογίζουμε την περίμετρο ενός τριγώνου με διαστάσεις 3.6 m, 2.5m και 4m . Απαντούσαμε ότι η περίμετρος:

  Π=3.6m+2.5m+4m=10,1m ή **3.6m+2.5m+4m =(3.6 +2.5+4)m=10.1m.** Ποια ιδιότητα χρησιμοποιούσαμε;
- Όταν μάθαμε να βρίσκουμε το εμβαδό ενός ορθογωνίου παίρνοντας το γινόμενο των δύο διαστάσεων του π.χ. 3.6m · 4m κάναμε τον πολλαπλασιασμό με δύο τρόπους α) κάναμε τη πράξη κατακόρυφα στο χαρτί μας 3.6m · 4m $=14.4m^2$ ή β) με το μυαλό μας. Ας θυμηθούμε ότι κάναμε ένα τέχνασμα που κάναμε: γράφαμε τον αριθμό **3.6 =3 + 0.6** και μετά όλα ήταν εύκολα αφού **3· 4 =12** και **0.6 · 4 =2.4.** Απαντούσαμε ότι το εμβαδό Ε, ισούται με το άθροισμα **12+2.4 =14.4m²**.

  Δηλαδή λέγαμε $\mathbf{E=3{,}6m\cdot 4m=(3+0{,}6)\cdot 4m^2=(3\cdot 4+0.6\cdot 4)m^2=(12+2{,}4)m^2=14{,}4m^2.}$ Ποια ιδιότητα χρησιμοποιούσαμε**;**
- Αργότερα χρησιμοποιούσαμε το τέχνασμα αυτό **για να βρούμε το γινόμενο μεγάλων αριθμών** με το μυαλό ως εξής:

  $$\mathbf{103\cdot 8=(100+3)\cdot 8=100\cdot 8+3\cdot 8=800+24=824.}$$

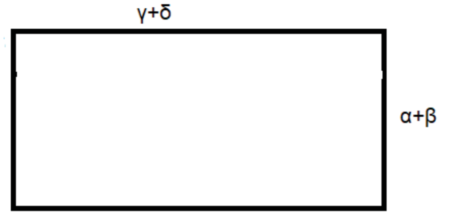
  Ποια ιδιότητα χρησιμοποιούσαμε;

- Όταν λέμε **3 x + 5 x = (3 + 5) x = 8 x,** ποια ιδιότητα χρησιμοποιούμε;

- Όταν λέμε **α + α + α + α + α = 5 α**, ποια ιδιότητα χρησιμοποιούμε;

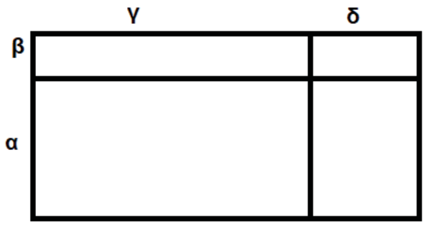
➔ ΕΡΓΑΣΙΑ- ΑΣΚΗΣΗ 2:

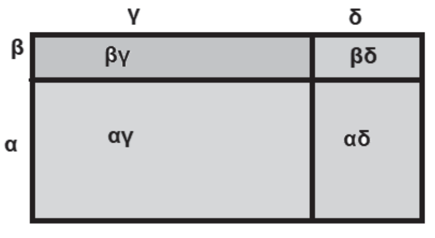
Ας παρακολουθήσουμε πώς οι μαθητές μιας τάξης υπολόγισαν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, που σχηματίστηκε με πλευρές α+β , γ+δ και τα συμπεράσματα που έβγαλαν.



Μία ομάδα είπε ότι το εμβαδόν του

$E = (\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta)$





Μία άλλη ομάδα μαθητών δημιούργησε το παρακάτω σχήμα, υπολόγισαν τα εμβαδά των επι μέρους ορθογωνίων που σχηματίστηκαν και οι μαθητές απάντησαν ότι:

$E = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

Συμπεραίνουμε ότι

$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Αλγεβρικά έχουμε $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = (\alpha+\beta)\cdot\gamma + (\alpha+\beta)\cdot\delta = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$ και επειδή εφαρμόσαμε την επιμεριστική ιδιότητα δύο φορές την λέμε **διπλή επιμεριστική ιδιότητα**

➔ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α=3(χ+2)+5(χ-1) όταν χ=2

1^{ος} τρόπος με αντικατάσταση της τιμής του χ=2 και πράξεις

$$A = 3(2+2)+5(2-1) = 3\cdot 4 + 5\cdot 1 = 12+5 = 17$$

2^{ος} τρόπος με απλοποίηση της παράστασης και μετά αντικατάσταση και πράξεις

$A=3(\chi+2)+5(\chi-1)=3\chi+3\cdot2+5\cdot\chi-5\cdot1=3\chi+6+5\chi-5=\mathbf{3\chi+5\chi}+1=\mathbf{(3+5)}\chi+1=8\chi+1$

Για $\chi=2$ $A= 8\cdot2+1 = 16+1=17$

Αν θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης Α για χ=1, χ=2 , χ=3, χ=5, χ=10 **ποιος από τους δύο τρόπους είναι πιο σύντομος; Ο 2^{ος} γιατί;**

➔ ΑΣΚΗΣΗ 4:

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Β=2χ+2ψ-5 όταν γνωρίζουμε ότι χ+ψ=4

1ος τρόπος με αντικατάσταση

Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις τιμές των χ και ψ στην παράσταση γιατί δεν τις γνωρίζουμε, άρα δεν μπορούμε να εργαστούμε με αυτόν τον τρόπο.

2ος τρόπος με απλοποίηση της παράστασης

Β=**2χ+2ψ-**5 = **2(χ+ψ)-**5= 2· 4 -5 = 8 - 5=3

Αναγνωρίσατε στα παραπάνω την επιμεριστική ιδιότητα;

➔ Ας δούμε περισσότερα παραδείγματα για την χρησιμότητα της επιμεριστικής ιδιότητας:

Κάνω πράξεις με το νου:

- 5·37=5· (30+7) =5·30+5·7=150+35=185
- 52·11=52· (10+1) = 52·10+52·1=520+52=572
- 42·3=(40+2) ·3 =40·3+2·3=120+6 =126
- 42·13= 42 · (10 +3)= 42·10 +42 ·3= 420+ 126 =546
- 57·99 =57 · (100-1) =57·100 -57·1= 5700-57 = 5643
- 5.37·98 = 5.37 (100-2) = 5.37·100- 5.37·2 =537-10.74=526.26
- 6 · 10.7 = 6 · (10+0.7) = 6·10 +6·0.7 =60+4.2 =64.2

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 5**

Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

- $3 \cdot (6+8)=$
- $6+2 \cdot (5-4)=$
- $3 \cdot 6+3 \cdot (8-2)=$
- $2 \cdot (6+10)+3 \cdot (13-5)=$
- $(3-3) \cdot 3+3=$

➔ **ΑΣΚΗΣΗ 6**

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

- $x+2 \cdot (x+5)=x+2x+2 \cdot 5=3x+10.$
- $\frac{1}{2} \cdot (4x+6)=\frac{1}{2} \cdot 4x+\frac{1}{2} \cdot 6=2x+3.$

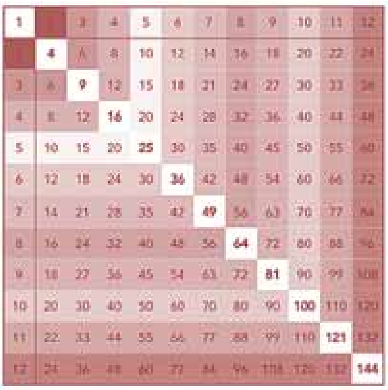
➔ **ΑΣΚΗΣΗ 7**

Να βρεις με διάφορους τρόπους (γεωμετρικά, αλγεβρικά, αριθμητικά) την τιμή των παραστάσεων:

- Α=(χ+3) · (χ+2) όταν χ= 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Β= (χ+1) · (ψ+3) όταν χ=2, ψ=5

Μέθοδοι υπολογισμού τετραγώνων και τετραγωνικών ριζών

Στυλιανός Μαραγκάκης - Ανδρέας Τριανταφύλλου



Ο υπολογισμός του τετραγώνου ενός αριθμού είναι στην ουσία ο πολλαπλασιασμός του αριθμού επί τον εαυτό του. Αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι χρονοβόρος, όπως είναι δύσκολο και να ελέγξουμε αν κάποιος αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή τετράγωνο κάποιου άλλου αριθμού.

Θα προσπαθήσουμε κάνοντας κάποιους συλλογισμούς να βρούμε διαδικασίες που θα μπορούν να μας διευκολύνουν, όταν αντιμετωπίζουμε θέματα όπως τα παραπάνω.

Ας υπολογίσουμε τα τετράγωνα των αριθμών από 1 έως 10.

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$.

Παρατηρούμε ότι τα τετράγωνα των αριθμών από 1 έως 10 τελειώνουν σε:

0, 1, 4, 5, 6, 9.

Επίσης αν ελέγξουμε **τα τετράγωνα των αριθμών** από 1 έως 30 θα διαπιστώσουμε ότι τελειώνουν σε **0, 1, 4, 5, 6, 9**.

Οπότε κανένα τετράγωνο αριθμού **δεν τελειώνει** σε **2, 3, 7** και **8**.

Άρα, π.χ. ο αριθμός 3456723**8** δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Επομένως δημιουργείται το ερώτημα, αν ένας αριθμός τελειώνει σε 0, 1, 4, 5, 6, ή 9 είναι πάντα τέλειο τετράγωνο;

Η απάντηση είναι όχι, γιατί για παράδειγμα το 19 δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Άρα, αν ένας αριθμός τελειώνει σε 0, 1, 4, 5, 6, ή 9 δεν είναι απαραίτητα τέλειο τετράγωνο.

Αλλά αν ένας αριθμός είναι **τέλειο τετράγωνο** θα πρέπει υποχρεωτικά να τελειώνει **σε 0, 1, 4, 5, 6, 9**.

Μπορούμε, ακόμη, εξετάζοντας τα τετράγωνα των αριθμών από 1 έως 10,

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$.

να παρατηρήσουμε ότι οι αριθμοί:

1 και 9, έχουν τετράγωνα που τελειώνουν στο ίδιο ψηφίο

2 και 8, έχουν τετράγωνα που τελειώνουν στο ίδιο ψηφίο

3 και 7, έχουν τετράγωνα που τελειώνουν στο ίδιο ψηφίο

4 και 6, έχουν τετράγωνα που τελειώνουν στο ίδιο ψηφίο.

Επίσης οι αριθμοί που λήγουν σε 0 ή 5 έχουν τετράγωνα που τελειώνουν σε 0 ή 5, αντίστοιχα.

Έτσι μπορούμε πολύ εύκολα να απαντήσουμε σε ερωτήσεις του τύπου:

- Σε ποιο ψηφίο τελειώνει το τετράγωνο των αριθμών 2344, 59236;
- Σε ποια ψηφία τελειώνουν τα τετράγωνα των αριθμών 2346, 59238;

1η Μέθοδος Υπολογισμού Τετραγώνου Αριθμού

Για να υπολογίσουμε το τετράγωνο ενός διψήφιου αριθμού, χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε πολυψήφιο πολλαπλασιασμό, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Έστω ότι ζητάμε $(34)^2 =$ **;**

1. Βρίσκουμε τα τετράγωνα των ψηφίων του αριθμού, και τα γράφουμε συνεχόμενα
2. Πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία του αριθμού μεταξύ τους, και μετά επί 2 (3 x 4 x 2 = 24), και γράφουμε το αποτέλεσμα μια θέση αριστερότερα κάτω από το πρώτο.

Βρίσκουμε το αποτέλεσμα, προσθέτοντάς τα.

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{(34)^2} \\
0 & 9 & 1 & 6 \\
 & 2 & 4 & + \\
\hline
1 & 1 & 5 & 6
\end{array}
$$

$(34)^2=1.156$

Ας δούμε και κάποια άλλα παραδείγματα:

$(14)^2$	$(67)^2$	$(78)^2$	$(91)^2$
116	3649	4964	8101
(1• 4• 2) 8	(6• 7• 2) 84	(7•8•2) 112	(9•1•2) 18
196	4489	6084	8281
$(14)^2$ =196	$(67)^2$=4.489	$(78)^2$=6.084	$(91)^2$=8.281

2η Μέθοδος Υπολογισμού Τετραγώνου Αριθμού

Η δεύτερη μέθοδος στηρίζεται στην ταυτότητα $α^2-β^2=(α+β)(α-β) \Rightarrow α^2 =(α+β)(α-β)+β^2$ (1)

Δηλαδή στηριζόμενοι στην παραπάνω ταυτότητα, όταν αναζητούμε το τετράγωνο ενός αριθμού, τον αυξομειώνουμε κατάλληλα, ώστε ο ένας παράγοντας του γινομένου να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 10, 100, κοκ.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $(86)^2$.

Αναζητούμε ένα αριθμό που, προσθέτοντάς τον στο 86, ή αφαιρώντας τον από το 86, να δημιουργείται αριθμός πολλαπλάσιος του 10. Προφανώς, μάς χρειάζεται ο αριθμός 4.

Οπότε 90
+4↑
86
-4↓
82

Άρα σύμφωνα με την ταυτότητα (1) έχουμε
$(86)^2=(86+4)(86-4)+4^2=90•82+16$
αρκεί να βρούμε 9•82 = 738,
οπότε $(86)^2=7380+16=7.396$.

Ας υπολογίσουμε το $(109)^2$, το $(987)^2$ και το $(496)^2$:

Οπότε 118
+9↑
109
-9↓

Άρα σύμφωνα με την ταυτότητα (1) έχουμε
$(109)^2=(118)(100)+9^2=11800+81$
οπότε

100 $(109)^2=11.881$

Σύμφωνα με το παραπάνω, 109 – 9 = 100

Όμοια 987+ 13 =1.000

Οπότε 1000
+13
987
-13
974

Άρα σύμφωνα με την ταυτότητα (1) έχουμε
$(987)^2=(1000)(974)+13^2=974000+169$,
οπότε
$(987)^2=974.169$

Όμοια 496+ 4 =500

Οπότε 500
+4
496
-4
492

Άρα σύμφωνα με την ταυτότητα (1) έχουμε
$(496)^2=(500)\cdot(492)+4^2=500\cdot 492+16$
Όμως $500\cdot 492 = 1000\cdot 492/2 = 1000\cdot 246 = 246000$,
οπότε $496^2 = 246000+16 = 246016$.

3η Μέθοδος Υπολογισμού Τετραγώνου Αριθμού

Για να υπολογίσουμε τα τετράγωνα αριθμών που τελειώνουν σε 5, υπάρχει επιπλέον και η παρακάτω διαδικασία:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $(55)^2$.

Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που σχηματίζουν τα ψηφία του αριθμού εκτός του τελευταίου, με τον επόμενό του, (εδώ 5x6 =30).

Υψώνουμε το 5^2, και το αποτέλεσμα (25) το γράφουμε σε παράθεση μετά το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού (3025). Αυτό είναι το τετράγωνο του αριθμού μας

Ας δούμε για εξάσκηση τα παρακάτω 45^2, 85^2, 125^2 και 165^2:

$45^2 = 2025$
5x5
4 x 5
άρα $45^2=2.025$

$85^2 = 7225$
5x5
8 x 9
άρα $85^2=7.225$

$125^2 = 15625$
5x5
12 x 13
άρα $125^2=15.625$

$165^2 = 27225$
5x5
16 x 17
άρα $165^2=27.225$

Προτεινόμενα για εξάσκηση

Να υπολογιστούν τα τετράγωνα των αριθμών:				
$(16)^2$	$(57)^2$	$(88)^2$	$(41)^2$	$(75)^2$
$(106)^2$	$(37)^2$	$(98)^2$	$(111)^2$	$(55)^2$
$(996)^2$	$(1006)^2$	$(103)^2$	$(98)^2$	$(116)^2$

Προσεγγιστικός υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας αριθμού.

Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός πίνακα, που έχει την παρακάτω μορφή

Αριθμός	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Τετραγωνική Ρίζα	1	1,414	1,732	2	2,236	2,449	2,646	2,828	3	3,162

Μπορεί όμως να γίνει με έναν απλό υπολογιστή τσέπης, με το κινητό τηλέφωνο κ.λ.π

Στο κείμενο που ακολουθεί θα δούμε δύο μεθόδους υπολογισμού δεκαδικής προσέγγισης της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού, όταν δεν διαθέτουμε κάποιο ηλεκτρονικό μέσο.

Παρατηρήστε τους αριθμούς 64, 81, 121, 225. Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία μπορούμε να διακρίνουμε ότι είναι αριθμοί τετράγωνοι, δηλαδή είναι τετράγωνα των αριθμών 8, 9, 11 και 15 αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών αυτών γράφοντας $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{81}=9$, $\sqrt{121}=11$ και $\sqrt{225}=15$. Τι γίνεται όμως με την $\sqrt{40}$;

Ας δούμε κάποιους τρόπους προσέγγισης της δεκαδικής μορφής της τετραγωνικής ρίζας του 40, που μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλες περιπτώσεις.

1η Μέθοδος Δεκαδικής Προσέγγισης

1) Λοιπόν ξεκινάμε ως εξής: Αφού 6 × 6 = 36 και 7 × 7 = 49, άρα η δεκαδική προσέγγιση της $\sqrt{40}$ θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ 6 και 7.
2) Δοκιμάζουμε τον δεκαδικό που βρίσκεται στο μέσον του διαστήματος από το 6 μέχρι το 7, δηλαδή τον αριθμό 6,5. Έχουμε 6,5 × 6,5 = 42,25 άρα θα πρέπει να εργαστούμε με τον δεκαδικό 6,4.
3) Παρατηρούμε ότι 6,4 × 6,4 = 40,96 άρα θα πρέπει να δοκιμάσουμε τον 6,3.
4) Παρατηρούμε ότι 6,3 × 6,3 = 39,69.

Μάλλον θα πρέπει να έχετε καταλάβει ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ 6,3 και 6,4 ξεκινώντας από τον αριθμό 6,35 που βρίσκεται στο μέσον του διαστήματος από 6,3 μέχρι 6,4.

Όπως βλέπετε η παραπάνω διαδικασία είναι αρκετά κουραστική, ιδιαίτερα όταν θέλετε αρκετά καλή προσέγγιση, π.χ. δεκάκις χιλιοστού.

Παρεμπιπτόντως να σημειώσουμε ότι μία πολύ καλή προσέγγιση της $\sqrt{40}$ είναι και ο δεκαδικός αριθμός 6,324555320336758663997787088654.

Ας δούμε τώρα μία μέθοδο που είναι κάπως ευκολότερη, τόσο σε πράξεις όσο και δυνατότητα απομνημόνευσης.

Ξεκινάμε πάλι τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής δεκαδικής τιμής, της $\sqrt{40}$.

2η Μέθοδος Δεκαδικής Προσέγγισης

1) Ξεκινάμε με τον αριθμό 6 ή τον 7, αφού και οι δύο αριθμοί είναι οι δύο πιο κοντινοί ακέραιοι στην $\sqrt{40}$.
2) Ας εργαστούμε με τον 6. Διαιρούμε το 40 με το 6 και έχουμε 40:6=6,6
3) Προσθέτουμε τον αριθμό αυτό στην αρχική μας επιλογή δηλαδή στον 6, και έχουμε 6+6,6=12,6
4) Διαιρούμε το αποτέλεσμα αυτό με 2, δηλαδή 12,6:2=6,3.
5) Με αυτόν τον αριθμό, τον 6,3 επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2) δηλαδή 40:6,3 …...

Στην πρώτη επανάληψη παίρνουμε αποτέλεσμα 6,32
Στη δεύτερη επανάληψη παίρνουμε αποτέλεσμα 6,324
Σημείωση: Κάθε φορά κρατάμε ένα δεκαδικό ψηφίο επιπλέον

3η Μέθοδος Δεκαδικής Προσέγγισης

Την μέθοδο αυτή επινόησε ο ***Ηρων από την Αλεξάνδρεια***, προκειμένου να υπολογίζει το εμβαδόν τριγώνου, σύμφωνα με τον τύπο: $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$), όπου τ=(α+β+γ)/2 η ημιπερίμετρος του τριγώνου και α, β, γ τα μήκη των πλευρών του.

Ξεκινάμε πάλι τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής δεκαδικής τιμής, της $\sqrt{n}$.

Βρίσκουμε 2 αριθμούς που έχουν γινόμενο n, έστω α•β = n

Προσεγγίζουμε την $\sqrt{n}$ υπολογίζοντας διαδοχικά τους όρους $\alpha_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\alpha_2=\frac{\alpha_1+\frac{n}{a_1}}{2}$, $\alpha_3=\frac{\alpha_2+\frac{n}{a_2}}{2}$, $\alpha_4=\frac{\alpha_3+\frac{n}{a_3}}{2}$, . . . μέχρι όποια δεκαδική προσέγγιση της ρίζας θέλουμε.

Ξεκινάμε πάλι τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής δεκαδικής τιμής, της $\sqrt{40}$.

1) Βρίσκουμε 2 φυσικούς αριθμούς με γινόμενο 40, έστω 5•8 = *40*
2) Οπότε $\boldsymbol{\alpha_1=\frac{5+8}{2}=\frac{13}{2}=6,5}$
3) Επομένως $\boldsymbol{\alpha_2=\frac{\frac{13}{2}+40:6,5}{2}=\frac{\frac{169}{26}+\frac{160}{26}}{2}=\frac{12,65}{2}=6,32}$
4) Άρα $\boldsymbol{\alpha_3=\frac{\alpha_2+\frac{n}{a_2}}{2}=\frac{6,32+\frac{40}{6,32}}{2}=\frac{6,32+6,329}{2}=\frac{12,649}{2}=6,324}$

Και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, μέχρι όποια δεκαδική προσέγγιση θέλουμε.

Τώρα μπορείτε να συγκρίνετε τις προσεγγίσεις αυτές με την μεγάλη προσέγγιση, που ήδη έχουμε αναφέρει στην πρώτη μέθοδο.

Προτεινόμενες για εξάσκηση

Βρείτε κατά προσέγγιση ***τουλάχιστον*** εκατοστού την τετραγωνική ρίζα των παρακάτω αριθμών:

15		20		30		38		60	

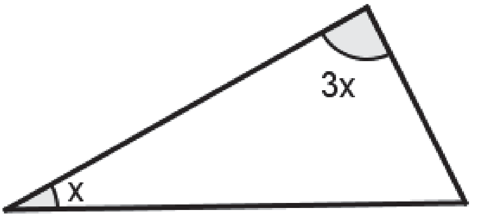
Χρησιμοποιείστε όποια από τις μεθόδους θέλετε.

Β΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Ένα αυτοκίνητο έχει ταχύτητα 75km/h κάθε φορά που κινείται σε κατηφορικό δρόμο, σε οριζόντιο δρόμο κινείται με 60km/h ενώ σε ανηφορικό δρόμο κινείται με ταχύτητα 50km/h. Για να πάει από την πόλη Α στην πόλη Β χρειάζεται 3 ώρες, ενώ για να πάει από την πόλη Β στην πόλη Α χρειάζεται 3,5 ώρες. Πόσο απέχουν οι δύο πόλεις;

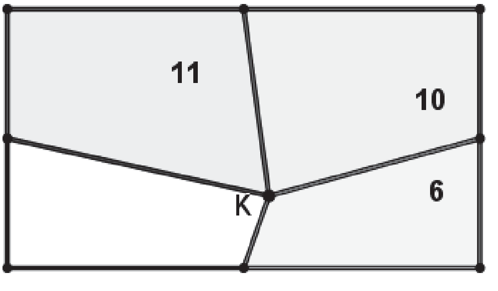
2) Ας υποθέσουμε ότι στο παρακάτω σκαληνό οξυγώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερή του γωνία είναι ίση με το τριπλάσιο της μικρότερης γωνίας του.



Ακόμη όλες οι γωνίες του έχουν μέτρο (σε μοίρες) θετικούς ακέραιους αριθμούς. Πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν;

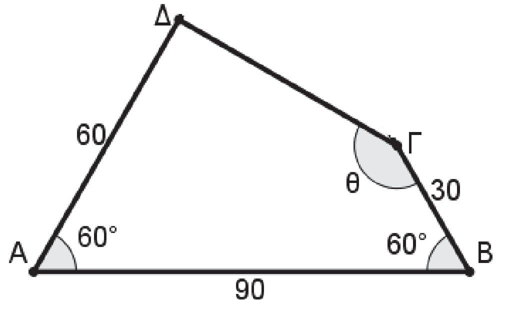
3) Θέλουμε να υπολογίσουμε πόσες τετράδες αριθμών (α, β, γ, δ) υπάρχουν που ικανοποιούν τις παρακάτω απαιτήσεις: $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=1$. Με βάση τους περιορισμούς να επινοήσετε μία διαδικασία για να υπολογίσετε όλες αυτές τις τετράδες.

4) Σε ένα ορθογώνιο παίρνουμε ένα σημείο Κ εσωτερικό του και το ενώνουμε με τα μέσα των πλευρών του. Σχηματίζονται 4 τετράπλευρα από τα οποία είναι γνωστά τα εμβαδά σε 3 από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τέταρτου τετραπλεύρου;



(**Σημείωση:** Να εξετάσετε αν ο τρόπος που θα επινοήσετε μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και στην περίπτωση που το τετράπλευρο δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αλλά ένα τυχόν κυρτό τετράπλευρο)

5) Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία θ. Τα μήκη των πλευρών του είναι ΑΒ=90, ΑΔ=60, ΒΓ=30 (οι αριθμοί εκφράζουν μονάδες μήκους).



Σημείωση: Τα θέματα **2)** και **3)** ανήκουν σε εκείνα που χαρακτηρίζονται ως **θέματα συνδυαστικής στρατηγικής**. Συγκεκριμένα στα θέματα αυτά θα πρέπει να υπολογίζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί αριθμητικών, αλγεβρικών ή γεωμετρικών αντικειμένων ώστε να ικανοποιούνται κάποιοι περιορισμοί. Είναι χαρακτηριστικό το 4^{ο} θέμα του διαγωνισμού Θαλής της ΕΜΕ το 2019:

«Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;»

Παραθέτουμε τη λύση που πρότεινε η επιτροπή του διαγωνισμού.

Για να ισούται ένα κλάσμα με ακέραιο πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή του. Από τους 26 δεδομένους ακέραιους πρώτοι, δηλαδή αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,23.

Οι 6 μικρότεροι από αυτούς, 2, 3, 5, 7, 11, 13, μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το $\frac{23}{1}=23$.

Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιος, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12.

Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα.

Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: $\frac{26}{13}, \frac{25}{5}, \frac{23}{1}, \frac{22}{11}, \frac{21}{7}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{15}{3}, \frac{14}{2}$ *(υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)* $\frac{24}{8}, \frac{16}{4}, \frac{12}{6}$ *(υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών).*

Το συγκεκριμένο θέμα δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους διαγωνιζόμενους.

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 116

1) Κάθε ισότητα περιέχει τρεις δυνάμεις (τετράγωνα). Οι βάσεις στις πρώτες δυνάμεις κάθε ισότητας ακολουθούν το μοτίβο 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Οι βάσεις στις δεύτερες δυνάμεις κάθε ισότητας ακολουθούν το μοτίβο: 4, 12=(3×4), 24=(6×4), 40=(10×4), άρα θα συνεχίσουν ως εξής 60=(15×4), 84=(21×4), 112=(28×4). Τέλος οι βάσεις στις τρίτες δυνάμεις σε κάθε ισότητα ακολουθούν τον εξής κανόνα: είναι κατά 1 μεγαλύτερες από την βάση της δεύτερης δύναμης δηλαδή 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113.

Τελικά η ζητούμενη ισότητα είναι η $15^2+112^2=113^2$.

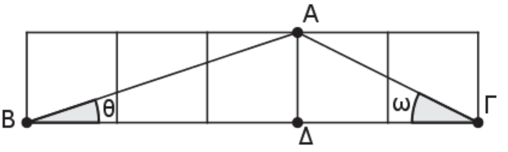
2) Η εκφώνηση του θέματος μας παραπέμπει σε Ευκλείδεια διαίρεση. Ας υποθέσουμε ότι οι θήκες είναι ν και ότι κάθε μία χωρά π αυγά, τότε ισχύει ότι $2009=\pi\cdot\nu+7$ από όπου προκύπτει ότι:

π·ν=2002. Εδώ τώρα μία ικανοποιητική στρατηγική είναι να αναλύσουμε τον αριθμό 2002 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Πράγματι ισχύει 2002=2·7·143 από όπου προκύπτει ότι ο μοναδικός τρόπος να πάρουμε το 2002 σαν γινόμενο π·ν με 200<ν<300 είναι 7·286 άρα π=7 και ν=286.

3) Η παράσταση $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$ μετά τις πράξεις παίρνει τη μορφή $1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\cdot\beta}=1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}+\frac{1}{\alpha\cdot\beta}$ επειδή α+β=10 η παράσταση γίνεται $1+\frac{10}{\alpha\cdot\beta}+\frac{1}{\alpha\cdot\beta}=1+\frac{11}{\alpha\cdot\beta}$. Από εδώ προκύπτει ότι την ελάχιστη τιμή θα πάρει όταν το κλάσμα πάρει την ελάχιστη τιμή του δηλαδή όταν ο παρονομαστής θα γίνει μέγιστος. Μία βασική πρόταση σχετική με αυτή την περίπτωση είναι το ότι αν δύο αριθμοί α, β έχουν σταθερό άθροισμα τότε το μέγιστο γινόμενό τους επιτυγχάνεται όταν οι αριθμοί είναι ίσοι. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει α=β=5 και επομένης η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι $1+\frac{11}{25}=\frac{36}{25}$.

4) Καθώς δεν μπορούμε να μετρήσουμε τις γωνίες με το κατάλληλο γεωμετρικό όργανο θα πρέπει να καταφύγουμε στην τριγωνομετρία.

α) Θα πρέπει να εντοπίσουμε ορθογώνια τρίγωνα στα οποία θα εργαστούμε. Αυτά είναι τα ΑΒΔ και ΑΔΓ



β) Θα υπολογίσουμε την τριγωνομετρική εφαπτομένη κάθε γωνίας που θέλουμε να μετρήσουμε.

$$\text{εφθ}=\frac{1}{3}=0{,}33 \text{ και εφω}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

γ) Καταφεύγουμε σε κάποιον τριγωνομετρικό πίνακα με εφαπτόμενες γωνιών.

Γωνία	ημω	συνω	εφω
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 0,33 είναι περισσότερο κοντά στον 0,325 άρα η γωνία θ είναι περίπου 18^0
Ο αριθμός 0,5 είναι περισσότερο κοντά στον 0,51 άρα η γωνία ω είναι περίπου 27^0.

5) Ας επιχειρήσουμε να εργαστούμε θέτοντας x τον αριθμό των μαθητών που πέρασαν στο διαγωνισμό και y τον αριθμό των μαθητών που δεν πέρασαν.

Οι συνολικές μονάδες που συγκέντρωσαν οι μαθητές που πέρασαν ήταν 15x ενώ οι συνολικές μονάδες που συγκέντρωσαν οι μαθητές που δεν πέρασαν ήταν 9y. Επειδή όλοι οι μαθητές που πήραν μέρος στο διαγωνισμό ήταν x+y με μέσο όρο 13 οι συνολικές μονάδες όλων των μαθητών θα είναι 13(x+y), άρα θα ισχύει: 15x+9y=13(x+y) από όπου προκύπτει ότι 2x=4y ή x=2y. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε 3 μαθητές οι 2 πέρασαν, δηλαδή ποσοστό 66,6%.

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

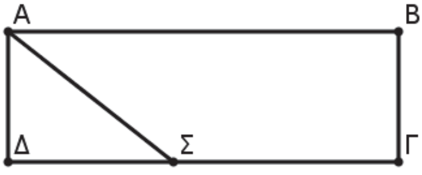
Δημοσιεύουμε λύσεις αναγνωστών μαθητών που μας έστειλαν για τα

«**Προχωρημένα θέματα**» Β΄ Γυμνασίου τεύχος 115.

• Από τον **Λυμπέρη – Γεώργιο Καρρά** μαθητή της Β΄ Γυμνασίου του Pierce–Αμερικανικού Κολλεγίου Ελλάδος, πήραμε πολύ αναλυτικές και τεκμηριωμένες λύσεις για τα θέματα 1) και 4). Αγαπητέ Γιώργο,

Συγχαρητήρια για τις λύσεις που μας έστειλες. Δημοσιεύουμε τη λύση για το 1)

1) *Που πρέπει να τοποθετηθεί το σημείο Σ ώστε το εμβαδόν του τραπεζίου να είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου;*
2)



Λύση

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι ΑΒ = ΔΓ (1) και ΑΔ = ΒΓ (2).

Σύμφωνα με το πρόβλημα προκύπτει η εξίσωση: $E_{τραπεζίου} = 3E_{τριγώνου}$, οπότε:

$$\left(\frac{\beta_{τραπ} + B_{τραπ}}{2}\right)\cdot \upsilon_{τραπ} = 3\text{x}\left(\frac{\beta_{τριγ} \cdot \upsilon_{τριγ}}{2}\right) \quad \text{άρα} \quad \left(\beta_{τραπ} + B_{τραπ}\right)\upsilon_{τραπ} = 3\left(\beta_{τριγ} \text{ x } \upsilon_{τριγ}\right) \text{ οπότε,}$$

έχουμε $(ΣΓ + ΑΒ) \cdot ΑΔ = 3 \cdot ΔΣ \cdot ΑΔ$, άρα $ΣΓ + ΑΒ = 3 \cdot ΔΣ$, λόγω του ότι ΣΓ=ΑΒ–ΔΣ έχουμε 3ΔΣ =ΑΒ – ΔΣ + ΑΒ.

Επομένως 3ΔΣ =2ΑΒ – ΔΣ, οπότε 4ΔΣ= 2ΑΒ. Άρα ΔΣ = ΑΒ/2, ή λόγω (1) έχουμε: ΔΣ=ΔΓ/2.

Άρα το Σ είναι το μέσον της πλευράς ΔΓ, και εκεί πρέπει να τοποθετηθεί.

• Από τον **Μοσχόπουλο Αριστείδη**, από το 2ο Γυμνάσιο Χαριλάου Θεσσαλονίκης λάβαμε πολύ ωραίες λύσεις και για τα 5 προτεινόμενα θέματα, από τα «Προχωρημένα θέματα» Β΄ Γυμνασίου των τευχών 115 και 116. Αγαπητέ Αριστείδη, Συγχαρητήρια για τις λύσεις που μας έστειλες. Να συνεχίσεις την καλή δουλειά. Δημοσιεύουμε τη λύση για το 2) από το τεύχος 115 και τη λύση για το 4) από το τεύχος 116.

Το άθροισμα τριών διαφορετικών πρώτων αριθμών είναι 40. Να υπολογίσετε τη διαφορά των δύο μεγαλύτερων από αυτούς.

Λύση:

Όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί, εκτός του 2 που είναι ο μοναδικός πρώτος άρτιος αριθμός.

Ξέρουμε ότι το άθροισμα δύο περιττών μεγαλύτερων του 2 είναι άρτιος αριθμός και το άθροισμα ενός περιττού με έναν άρτιο είναι περιττός.

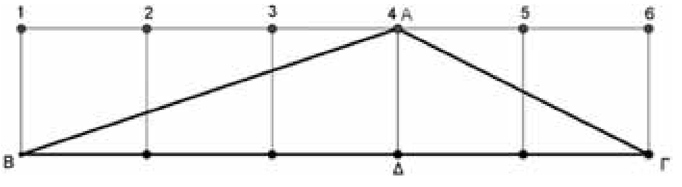
Δύο πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 2 έχουν άθροισμα άρτιο αριθμό. Συνεπώς αν προσθέσουμε ακόμα έναν πρώτο το άθροισμα θα είναι περιττός, που δεν γίνεται επειδή το άθροισμα των 3 διαφορετικών πρώτων αριθμών είναι 40, άρα πρέπει ο ένας από αυτούς να είναι ο 2.

Το άθροισμα των 2 πρώτων αριθμών που απομένει είναι 40–2 =38.

Οι πρώτοι αριθμοί οι μικρότεροι του 38 και μεγαλύτεροι του 2 είναι οι: 3,5,7,11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, και 37. Από αυτούς το ζευγάρι που έχει άθροισμα 38 είναι οι 31 και 7. Οι διαφορά τους είναι 31 – 7 =24

4) *Στην παρακάτω εικόνα υπάρχουν 5 τετράγωνα και ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Α βρίσκεται στην κορυφή ενός τετραγώνου από τα 5, ενώ οι κορυφές Β και Γ βρίσκονται σε ακραίες κορυφές των ακραίων τετραγώνων.*

Να περιγράψετε μια διαδικασία (αλγόριθμο) με την οποία θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, με τη μέγιστη δυνατή προσέγγιση, χωρίς τη χρήση γεωμετρικών οργάνων



Λύση

Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι τα τετράγωνα έχουν πλευρά 1. Η κορυφή Α μπορεί να βρίσκεται στις θέσεις 1, 2, 3, 4, 5, ή 6. Αν βρίσκεται στη θέση 1, τότε η γωνία Β=90^o και εφΑ=ΒΓ/ΒΑ=5/1=5, και γωνία $\hat{\Gamma}=90^o$ –γωνία $\hat{A}$.

Ομοίως, αν το Α βρίσκεται στη θέση 6, τότε γωνία $\hat{\Gamma}=90^o$ και εφΑ=ΒΓ/ΓΑ=5/1=5, και γωνία $\hat{B}=90^o$ –γωνία $\hat{A}$.

Αν το Α βρίσκεται στη θέση 4, τότε εφΒ=ΑΔ/ΒΔ=1/3, εφΓ=ΑΔ/ΓΔ=1/2, και γωνία $\hat{A}=180^o$ – γωνία $\hat{B}$ – γωνία $\hat{\Gamma}$.

Γενικά όταν έχουμε μ τετράγωνα, υπάρχουν μ+1=ω θέσεις, και η κορυφή Α μπορεί να βρίσκεται σε τυχαία θέση ν.

i) Όταν το Α βρίσκεται σε κάποια ενδιάμεση θέση ν, μεταξύ 1 και ω, τότε εφΒ = 1/ν–1, εφΓ=1/ω–ν, και $\hat{A}=180^o-(\hat{B}+\hat{\Gamma})$.

ii) Όταν το Α βρίσκεται σε κάποια ακραία κορυφή, η γωνία $\hat{B}$ ή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι ορθή και εφΑ=ω–1/1=ω–1.

• Από τον **Αλέξανδρο Κ. Πέτσιο**, από το 1ο Γυμνάσιο Ιωαννίνων, λάβαμε δύο καλές προσπάθειες λύσης, για τα 1 και 3 προτεινόμενα θέματα από τα «Προχωρημένα θέματα» Β΄ Γυμνασίου, καθώς και του θέματος 3 της Γ΄ Γυμνασίου, του τεύχους 116.

Αγαπητέ Αλέξανδρε, συγχαρητήρια, να συνεχίσεις την προσπάθειά σου, επιδιώκοντας, η λύση να αιτιολογεί επακριβώς τα ζητούμενα του προβλήματος.

Δεν χρειάζεται να προχωρείς στην ύλη άλλων τάξεων, αρκεί να εμβαθύνεις στην ύλη της τάξης που φοιτάς.

Ταυτότητες και παραγοντοποίηση. Σε τι χρησιμεύουν;

Στέφανος Κεΐσογλου – Νάνσυ Κυριακοπούλου

Στη Γ΄ τάξη ένα μεγάλο μέρος της Άλγεβρας είναι αφιερωμένο στις ταυτότητες και την παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων. Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Ποια είναι η χρησιμότητα των ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης;

Στα ερωτήματα αυτά απαντάμε με παραδείγματα.

1) Συχνά σε κάποιο πρόβλημα δημιουργείται μία σύνθετη παράσταση όπως η παρακάτω:

$\frac{\alpha^2-121}{\alpha^2-22\alpha+121}$, για την οποία μας ζητούν και την αριθμητική της τιμή, όταν το α πάρει κάποια τιμή, για παράδειγμα α=111.

Σχόλιο: Προφανώς θα ήταν χρονοβόρο και ανούσιο να θέσουμε όπου α το 111 και να κάνουμε πράξεις.

Αν προσέξουμε καλύτερα, θα δούμε ότι στην παραπάνω παράσταση υπάρχουν **ταυτότητες**. Συγκεκριμένα $\alpha^2-121=(\alpha-11)\cdot(\alpha+11)$ ενώ $\alpha^2-22\alpha+121=(\alpha-11)^2$ και επομένως η αρχική μας παράσταση γίνεται $\frac{(\alpha-11)\cdot(\alpha+11)}{(\alpha-11)^2}=\frac{\alpha+11}{\alpha-11}$ και τώρα είναι πολύ απλό να δούμε ότι για α=111 η παράσταση παίρνει την τιμή $\frac{122}{100}=1,22$.

Εφαρμογές:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma):\frac{\alpha-\beta+\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$ όταν: $\alpha=1+\sqrt{2},\ \beta=\sqrt{5}-1$ και $\gamma=\sqrt{2}$ *Απάντηση: 5*

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\alpha\cdot\beta+3\alpha-2\beta-6}{\alpha-2}$ όταν α=0,0982 και β=–3.

Απάντηση: 0

iii). Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $4\beta^2+4\alpha\beta+2\alpha+\alpha^2+4\beta+1$ όταν α=4,36 και β=2,32.

Απάντηση: 100

2) Πολλές φορές έχουμε να λύσουμε εξισώσεις που φαινομενικά είναι πολύπλοκες, στην πραγματικότητα όμως μπορούν να μετασχηματιστούν σε πολύ απλές. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Η εξίσωση $2x^3+x^2–8x–4=0$ (x πραγματικός) είναι τρίτου βαθμού και μπορεί κανείς να πει ότι τέτοιες εξισώσεις δεν διδάσκονται στο Γυμνάσιο, ας δούμε όμως τι μπορούμε να κάνουμε εμείς.

$2x^3+x^2–8x–4=0$ άρα $2x\cdot(x^2–4)+(x^2–4)=0$

$(x^2–4)\cdot(2x+1)=0$

$(x+2)\cdot(x–2)\cdot(2x+1)=0$ και τελικά $x=–2$ ή $x=2$ ή $x=-\frac{1}{2}$

Εφαρμογές:

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις στους πραγματικούς αριθμούς:

i) $–6x^3+8x^2–2x=0$

Απάντηση: x=0 ή x=1 ή x=1/3

ii) $16x^3–32x^2–x+2=0$

Απάντηση: x=±1/4 ή x=2

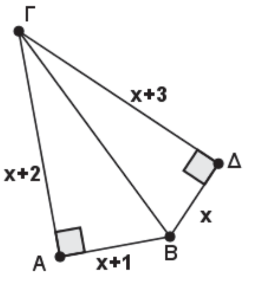
iii) $18x^3–24x^2+27x=36$

Απάντηση: x=4/3

3) Συχνά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ταυτότητες σε προβλήματα π.χ Γεωμετρίας.

Ας δούμε ένα παράδειγμα από θέμα του διαγωνισμού ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ.

Ο καθηγητής των Μαθηματικών κατασκεύασε στον πίνακα το διπλανό σχήμα με τα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ και ζήτησε από τους μαθητές να συζητήσουν για το αν και το πώς μπορούν να υπολογίσουν την τιμή του πραγματικού αριθμού x.



- Ο Βασίλης απάντησε αμέσως x=4
- Η Έλενα είπε ότι πρέπει οπωσδήποτε να υπολογίσει την ΒΓ.
- Ο Πέτρος είπε ότι πρέπει το x να είναι άρρητος αριθμός.
- Η Σαμάνθα είπε ότι είναι αδύνατον να υπάρχουν τέτοια τρίγωνα.
- Ο Έκτορας απάντησε ότι θα πρέπει πρώτα να υπολογίσει τις γωνίες των τριγώνων.

Εδώ το Πυθαγόρειο θεώρημα θα μας επιτρέψει να διαπιστώσουμε ποιος μαθητής είχε δίκιο.

Καθώς τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την ίδια υποτείνουσα θα πρέπει:

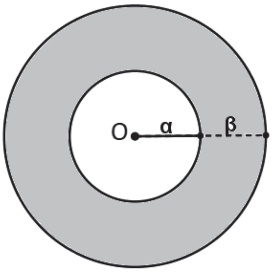
$(x+1)^2+(x+2)^2=x^2+(x+3)^2$ από όπου, αν αναπτύξουμε τις ταυτότητες τετραγώνων, προκύπτει

$2x^2+6x+5=2x^2+6x+9$

Τώρα ποιος ή ποια νομίζετε ότι είχε δίκιο;

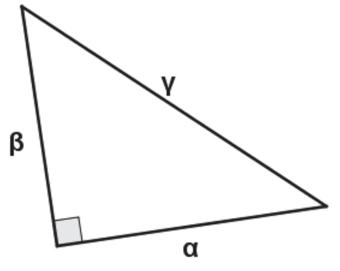
Εφαρμογές:

i) Με κέντρο Ο και ακτίνα α κατασκευάζουμε έναν κύκλο. Προεκτείνουμε την ακτίνα κατά β και κατασκευάζουμε δεύτερο κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα α+β.



α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του δακτυλίου που βρίσκεται μεταξύ των δύο κύκλων με βάση τα α και β.
β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν αυτό είναι τριπλάσιο του εμβαδού του μικρού κύκλου όταν α=β

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο της παρακάτω εικόνας ισχύει: $\boldsymbol{\gamma^2=2\alpha\cdot\beta}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



Επιλεγμένα θέματα με λύσεις ή υποδείξεις.

1. Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, το $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ή το $\sqrt{2}+\sqrt{6}$;

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα ριζικά και να κάνουμε τις προσθέσεις, αλλά θα προτιμήσουμε μια καλύτερη λύση, που δίνει πιο γρήγορα την απάντηση.

Η καλύτερη λύση είναι να υψώσουμε στο τετράγωνο τα αθροίσματα. Το μεγαλύτερο τετράγωνο μας δίνει και τον μεγαλύτερο αριθμό. Επομένως:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=3+2\sqrt{15}+5=8+2\sqrt{15}$$
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2=\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{6}^2=2+2\sqrt{12}+6=8+2\sqrt{12}$$

Το $8+2\sqrt{15}$ είναι μεγαλύτερο από το $8+2\sqrt{12}$, οπότε το $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ είναι μεγαλύτερο από το $\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

2. Απόδειξε την ανισότητα $x^2+3y^2+2xy+4x+12y+12\geq 0$, x, y πραγματικοί.

Το πρώτο μέρος της ανισότητας ισούται με:

$x^2+3y^2+2xy+4x+12y+12=(x+y+2)^2+2(y+2)^2$ δηλαδή η αρχική παράσταση είναι ισοδύναμη με μία παράσταση που είναι άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

3. Να δείξετε ότι η παράσταση $5+(\alpha^6+\beta^6)^2-(\alpha^6-\beta^6)^2-4\alpha^3(\alpha^3\beta^6+1)+4\alpha^3$, είναι ανεξάρτητη των α και β.

Υπόδειξη: *Εφαρμόστε διαφορά τετραγώνων. Στην ουσία θα πρέπει να δείξετε ότι η παράσταση είναι ίση με έναν αριθμό.*

4. Αν $x+y=2\sqrt{5}$ και $x\cdot y=6$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων: x^2+y^2, x^3+y^3, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $x-y$.

Υπόδειξη: *Ύψωσε στο τετράγωνο, ή στην τρίτη, τα δύο μέλη της* $x+y=2\sqrt{5}$ *και στη συνέχεια αξιοποίησε το ότι* $x\cdot y=6$.

5. Αν $(x-y)^3=3(y-x)yx$, τι ισχύει για τους πραγματικούς x και y;

Υπόδειξη: *Χρησιμοποιήστε ταυτότητες.*

6. Δείξτε ότι ο αριθμός 297^2-285^2 είναι πολλαπλάσιο του 12.

Υπόδειξη: *Εφαρμόστε την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων.*

7. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης z^2+w^2-5zw, αν $z=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ και $w=\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

Υπόδειξη: *Εφαρμόστε ταυτότητες.*

8. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{11+4\sqrt{7}}$.

Υπόδειξη: *Παρατηρήστε ότι* $11-4\sqrt{7}=4+7-2\cdot 2\cdot\sqrt{7}=2^2+\sqrt{7}^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{7}$

9. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $2551\cdot 2549-2552^2+2548^2$.

Υπόδειξη: *Εφαρμόστε διαφορά τετραγώνων τόσο για το* $2551\cdot 2549$ *όσο και για το* 2548^2-2552^2.

10. Αν $4x^2+10+12x+2y+y^2=0$, x, y πραγματικοί, τότε να βρείτε τα x και y.

Υπόδειξη: *Το πρώτο μέρος αποτελεί άθροισμα δύο τετραγώνων.*

11. Μία παρέα φίλων αποφάσισε να πάει μία εκδρομή με πούλμαν.

Το πρακτορείο που διέθετε πούλμαν όταν πληροφορήθηκε τον αριθμό των ατόμων που θα συμμετείχαν ζήτησε 630€ για να πραγματοποιήσει την εκδρομή. Οι φίλοι αποφάσισαν να μην πάρουν χρήματα από 3 άτομα της παρέας και έτσι οι υπόλοιποι χρεώθηκαν 1€ επιπλέον ο καθένας για να καλύψουν το ποσόν που ζήτησε το πρακτορείο.

Πόσα συνολικά ήταν τα άτομα που πήγαν εκδρομή;

Υπόδειξη: *Έστω ν ο αριθμός των ατόμων. Αν πλήρωναν όλοι τότε καθένας θα έπρεπε να πληρώσει* $\frac{630}{\nu}$ *€. Οι 3 λιγότεροι πλήρωσαν* $\frac{630}{\nu-3}$ *€ και επομένως ισχύει* $\frac{630}{\nu-3}-\frac{630}{\nu}=1$. *Η εξίσωση που θα προκύψει είναι μία εξίσωση δευτέρου βαθμού. Προφανώς θα γίνει δεκτή μόνο η θετική ρίζα της εξίσωσης.*

Απάντηση: 45

Ιερά τρίγωνα στην Αρχαία Ελλάδα
και η μελέτη των τριγώνων στις μέρες μας.

Μαρία Σίσκου

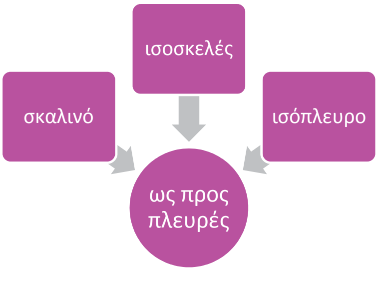
Τα τρίγωνα είχαν από τους αρχαίους χρόνους μεγάλη σημασία. Γνωρίζουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες έχτιζαν τους χώρους λατρείας τους σε σημεία τέτοια ώστε να δημιουργούνται ισοσκελή ή ισόπλευρα τρίγωνα. Ένα πολύ γνωστό τέτοιο ισοσκελές τρίγωνο σχηματίζουν ο Ναός του Ποσειδώνα στο Σούνιο με το Ναό της Αφαίας Αθηνάς στην Αίγινα και το Ναό του Ηφαίστου στο θησείο στην Αθήνα. Επίσης ένα δεύτερο ισοσκελές τέτοιο τρίγωνο σχηματίζουν και ο Ναός του Απόλλωνα στους Δελφούς με τον Παρθενώνα και τον Ναό της Αφαίας στην Αίγινα.

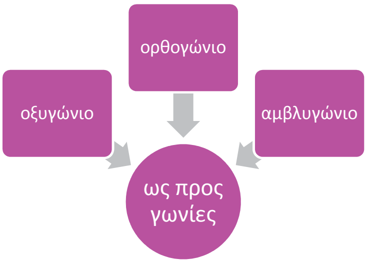
Ο γεωδαιτικός τριγωνισμός ήταν μια γενικότερη πρακτική στην Αρχαία Ελλάδα. Αυτό φαίνεται από τον Αριστοτέλη που κάνει αναφορές στον τρόπο επιλογής των ιερών, στα ‘Πολιτικά’, από τον Ίππαρχο, τον Στράβωνα και άλλους σπουδαίους αρχαίους Έλληνες. Σε νεότερες εποχές πολλοί επιστήμονες από όλο τον κόσμο ασχολήθηκαν, μελέτησαν και επιβεβαίωσαν αυτόν τον τριγωνισμό την Αρχαία Ελλάδα. Μέχρι και σήμερα είναι σχεδόν ασύλληπτο από τον ανθρώπινο νου πως καταφέρνανε να υπολογίσουν τρίγωνα και να εφαρμόσουν άλλες μαθηματικές σχέσεις σε τόσο μεγάλες αποστάσεις ειδικά όταν υπήρχε και τμήμα θάλασσας.

Ας μεταφερθούμε όμως τώρα στην δική μας εποχή να μελετήσουμε μαζί τα τρίγωνα και τα στοιχεία τους αλλά και πότε δυο τρίγωνα θα λέμε ότι είναι ίσα.

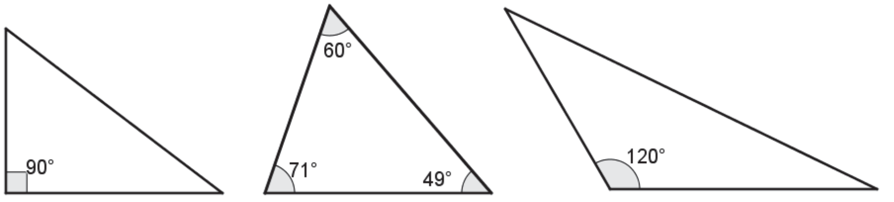
Είδη τριγώνων

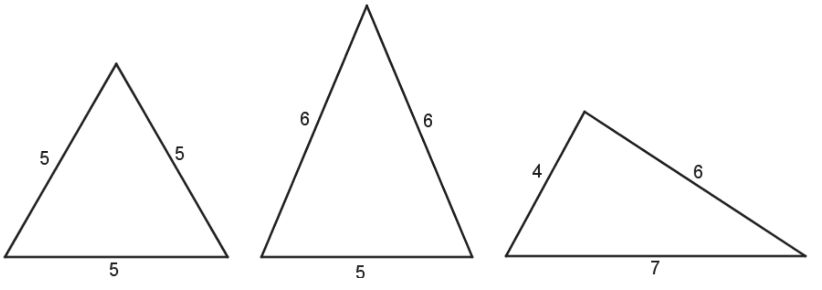
Αρχικά να πούμε ότι χωρίζουμε τα τρίγωνα σε κατηγορίες ανάλογα με τις πλευρές ή τις γωνίες. Έτσι έχουμε :





- Μπορείτε να προσδιορίσετε σε ποια κατηγορία ανήκει καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα;





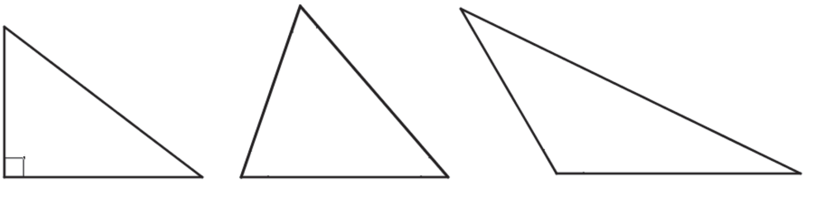
- Μπορείτε να σχεδιάσετε τρίγωνο με δύο ορθές ή δύο αμβλείες γωνίες;

Τα βασικά στοιχεία των τριγώνων

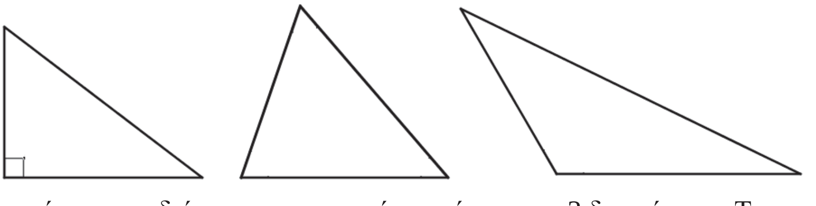
Οι πλευρές και οι γωνίες είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου, ενώ υπάρχουν και δευτερεύοντα. Τα δευτερεύοντα στοιχεία είναι:

- **Διάμεσος:** Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από μια κορυφή του τριγώνου και καταλήγει στο μέσο της απέναντι πλευράς.
- **Διχοτόμος:** Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από μια κορυφή του τριγώνου, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.
- **Ύψος:** Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από μια κορυφή του τριγώνου και καταλήγει κάθετα στην απέναντι πλευρά.

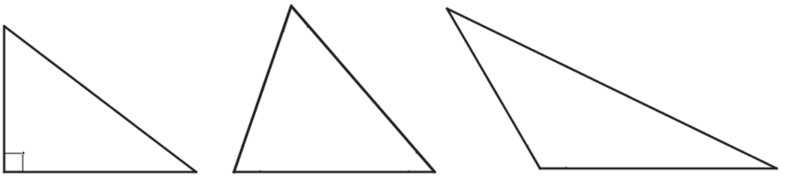
- Μπορείτε να σχεδιάσετε στα παρακάτω τρίγωνα τις 3 διαμέσους; Τι παρατηρείτε;



- Μπορείτε να σχεδιάσετε στα παρακάτω τρίγωνα τα 3 ύψη; Τι παρατηρείτε;



- Μπορείτε να σχεδιάσετε στα παρακάτω τρίγωνα τις 3 διχοτόμους; Τι παρατηρείτε;



Η ισότητα των τριγώνων

Πότε θα λέγαμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα; Η λογική μας λέει πως θα είναι ίσα αν έχουν ίσες όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες αντίστοιχα. Για να ελέγξουμε όμως αν δυο τρίγωνα είναι ίσα δεν χρειάζεται να ξέρουμε όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες. Αρκούνε λιγότερα στοιχεία ώστε να καταλήξουμε στο ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα.

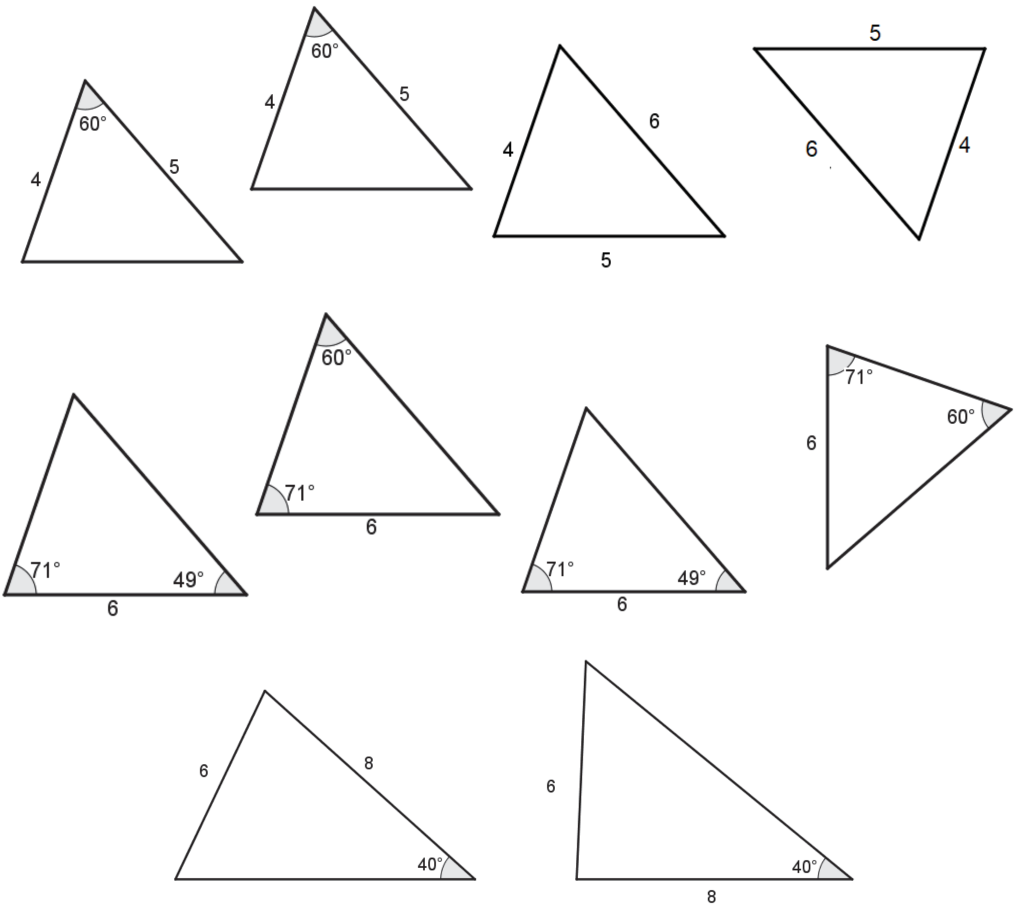
Για το σκοπό αυτό έχουμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

$1^{ο}$ κριτήριο: Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν 2 πλευρές ίσες μια προς μία και την περιεχόμενη σ΄ αυτές γωνία ίση.(Π- Γ- Π)

$2^{ο}$ κριτήριο: Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν 1 πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ΄ αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία. (Γ- Π- Γ)

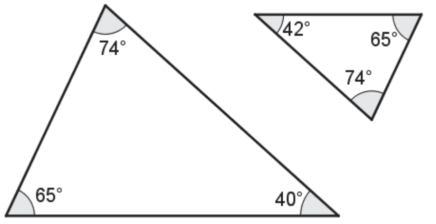
$3^{ο}$ κριτήριο: Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν 3 πλευρές ίσες μια προς μία. (Π-Π-Π)

- Ποια λοιπόν από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα;



- Από τα παραπάνω τρίγωνα εύκολα συμπεραίνουμε ότι αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες και μια γωνία που δεν είναι η περιεχόμενη σ΄ αυτές γωνία ίση τότε δεν είναι απαραίτητο ότι τα τρίγωνα θα είναι ίσα.
- Αν δυο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες ίσες είναι πάλι ίσα τα τρίγωνα;

Ας δούμε δυο τρίγωνα με ίσες όλες τις γωνίες. Είναι αυτά τα δυο τρίγωνα ίσα λοιπόν;



Παρατήρηση: Στην περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε αν δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα τότε έχουμε ήδη ίση την ορθή γωνία. Έτσι δύο μόνο στοιχεία ακόμα είναι αρκετά ώστε να πούμε ότι τα δυο τρίγωνα είναι ίσα. Γι' αυτό το λόγο έχουμε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:

$1^{ο}$ κριτήριο: Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες.

$2^{ο}$ κριτήριο: Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν μια πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μια προς μία.

Εφόσον κατανοήσαμε πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα ας συγκρίνουμε μαζί δυο τρίγωνα εφαρμόζοντας τις γνώσεις μας και κυρίως τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Εφαρμογή:

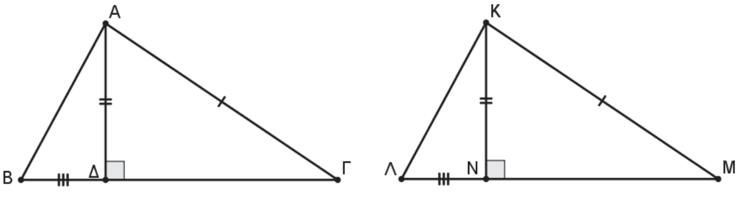
Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν ίσες τις πλευρές ΑΓ και ΚΜ, ίσα ύψη ΑΔ, ΚΝ και ΒΔ=ΛΝ. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα :

- **i.** ΑΔΓ, ΚΜΝ
- **ii.** ΑΒΓ, ΚΛΜ

Υπόθεση: ΑΒΓ, ΚΛΜ, ΑΔ=ΚΝ ύψη, ΑΓ=ΚΜ, ΒΔ=ΛΝ

Συμπέρασμα: **i.** ΑΔΓ=ΚΜΝ, **ii.** ΑΒΓ=ΚΛΜ

Λύση:



- Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΚΜΝ. Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και έχουν:
  - **i.** ΑΓ= ΚΜ (Υπόθεση)
  - **ii.** ΑΔ= ΚΝ (Υπόθεση)

Δηλαδή τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. (ΓΔ=ΜΝ, $\widehat{Γ} = \widehat{Μ}$)

- Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΚΛΜ και έχουν:
  - **i.** ΑΓ= ΚΜ (Υπόθεση)
  - **ii.** $\widehat{Γ} = \widehat{Μ}$ (από $1^{ο}$ ερώτημα)
  - **iii.** ΒΓ = ΜΛ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων)

  Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία ίση. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

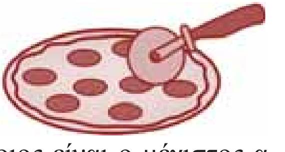
Γ΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Να λυθεί το σύστημα $\left.\begin{matrix} x+xy+y = 2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2 = 6 \end{matrix}\right\}$

2) Αν για τον πραγματικό αριθμό x>9 ισχύει η σχέση $x^2+80\cdot\sqrt{x}=36$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $4\cdot\sqrt{x}-x$.

3) Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα κυκλικό αντικείμενο, για παράδειγμα μία πίτσα. Με το κατάλληλο εργαλείο τραβάμε 10 τυχαίες γραμμές (τομές) πάνω στο αντικείμενο. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός κομματιών στα οποία μπορεί να χωριστεί το αντικείμενο;



Υπόδειξη: Προσπαθήστε να βρείτε έναν κανόνα επαγωγικά, δηλαδή ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός κομματιών με μία τομή, με δύο τομές, με τρεις τομές κ.λ.π.

4) Δίνεται η παράσταση $(x-8)\cdot(x+10)\cdot(x+8)\cdot(x-10)$ όπου το x παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει αυτή η παράσταση;

5) Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $x^2-13x+1=0$. Να υπολογίσετε το τελευταίο ψηφίο της αριθμητικής τιμής της παράστασης $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

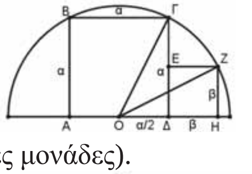
Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 116

1) Η παράσταση μετασχηματίζεται ως εξής: $Π=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+(8^2-7^2)+\ldots+(100^2-99^2)$ Εδώ στις διαφορές τετραγώνων ο ένας παράγοντας είναι η μονάδα αφού πρόκειται για διαφορά διαδοχικών ακεραίων, άρα κάθε παρένθεση από τις παραπάνω είναι ίση με το άθροισμα των δύο διαδοχικών ακεραίων οπότε Π=3+7+11+15+…+187+191+195+199. Παρατηρήστε ότι 3+199=222, 7+195=222. Συνολικά έχουμε 25 τέτοια αθροίσματα (γιατί;) 25×222=5.550

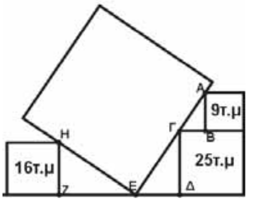
2) Αρχικά παρατηρούμε ότι η ισότητα $x^2-\dfrac{15}{x}=4$ με $x\neq 0$ και 3 μετασχηματίζεται σε $x^3-4x-15=0$.
Το πολυώνυμο $x^3-4x-15$ μηδενίζεται για x=3 άρα διαιρείται με x–3 και δίνει πηλίκο x^2+3x+5 επομένως έχουμε $x^3-4x-15=(x-3)(x^2+3x+5)=0$ και επειδή $x\neq 3$ άρα $x^2+3x+5=0$ δηλαδή $x^2+3x=-5$ (1).
Τώρα $x\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x+2)=(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)=(-5)\cdot(-5+2)=15$

3) Ας κάνουμε πρώτα κάποιους μετασχηματισμούς, δηλαδή η $x^2-3x+1=0$ γράφεται $x\cdot(x-3)=-1$ (1), ενώ η x^6-18x^3 γράφεται $x^3\cdot(x^3-18)$. Η σκοπιμότητα αυτού του μετασχηματισμού είναι φανερή αφού και η δοσμένη και η ζητούμενη παράσταση αποκτούν μία ομοιόμορφη δομή.
Από την (1) έχουμε $x^3\cdot(x-3)^3=-1$ άρα $x^3\cdot(x^3-9x^2+27x-27)=-1$ η σχέση αυτή μετασχηματίζεται σε: $x^3\cdot[(x^3-18)-9x^2+27x-9)=-1$ οπότε $x^3\cdot[(x^3-18)-9(x^2-3x+1)=-1$ αλλά $x^2-3x+1=0$ άρα $x^3\cdot(x^3-18)=-1$.

4) Έστω α η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου και β η πλευρά του μικρού. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΔΓ και ΟΗΖ έχουν ίσες υποτείνουσες άρα $α^2+\left(\dfrac{α}{2}\right)^2=β^2+\left(β+\dfrac{α}{2}\right)^2$ μετά από πράξεις προκύπτει α=2β



5) Οι πλευρές των τετραγώνων είναι ΑΒ=3, ΓΔ=5 και ΗΖ=4 (τετραγωνικές μονάδες).
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ=3 και ΒΓ=2 (μονάδες μήκους).
Επειδή το τρίγωνο ΓΔΕ είναι όμοιο με το ΑΒΓ άρα $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}=\dfrac{ΓΔ}{ΔΕ}$ οπότε



$ΔΕ=\dfrac{10}{3}$. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΕ είναι όμοιο με το ΓΔΕ (γιατί;) άρα $\dfrac{ΖΕ}{ΖΗ}=\dfrac{ΓΔ}{ΔΕ}=\dfrac{3}{2}$ και επομένως ΖΕ=6.
Τελικά $ΖΔ=\dfrac{28}{3}$ (μονάδες μήκους).

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

Προκριματικός διαγωνισμός 2020

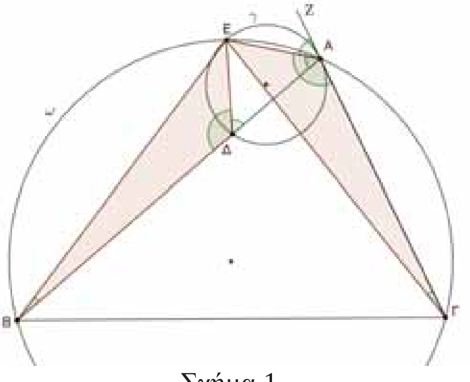
18 Ιουλίου 2020

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB > A\Gamma$. θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ .τέτοιο ώστε $B\Delta = A\Gamma$. Γράφουμε κύκλο γ που περνάει από το σημείο Δ και εφάπτεται της πλευράς ΑΓ στο σημείο Α. Γράφουμε και τον περιγεγραμμένο κύκλο ω του τριγώνου ΑΒΓ ο οποίος τέμνει τον κύκλο γ στα σημεία Α και Ε. Να αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι το σημείο τομής των μεσοκάθετων των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΓ και ΑΔ.

Λύση



Σχήμα 1

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΕΒ = ΕΓ και ΕΑ = ΕΔ.

Για το σκοπό αυτό θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΑΕΓ. Αυτά έχουν:

1. $B\Delta = A\Gamma$ (υπόθεση)
2. $\Delta\hat{B}E = A\hat{\Gamma}E$ (εγγεγραμμένες στον κύκλο ω που βαίνουν στο ίδιο τόξο)
3. $B\hat{\Delta}E = 180^0 - E\hat{\Delta}A = 180^0 - E\hat{A}Z = E\hat{A}\Gamma$, χρησιμοποιήσαμε ότι:

   ($E\hat{\Delta}A = E\hat{A}Z$, εγγεγραμμένη - γωνία χορδής και εφαπτομένης).

Επομένως τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Επομένως, θα έχουν ΕΒ = ΕΓ και ΕΔ = ΕΑ, οπότε το σημείο Ε ανήκει στις μεσοκάθετες των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΓ και ΑΔ και συνεπώς είναι το σημείο τομής τους.

Πρόβλημα 2

Αν α,β,γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\frac{\beta+\gamma}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2}\le 2$$ **. Πότε ισχύει η ισότητα;**

Λύση: Αν θέσουμε $x=\frac{1}{\alpha},\ y=\frac{1}{\beta},\ z=\frac{1}{\gamma}$, τότε η δεδομένη συνθήκη γίνεται $x+y+z=3$ και η ανισότητα παίρνει τη μορφή: $\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}+\frac{yz(z+x)}{y^2+yz+z^2}+\frac{zx(z+x)}{z^2+zx+x^2}\le 2$.

Έχουμε ότι: $\frac{xy}{x^2+xy+y^2}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow x^2+xy+y^2\ge 3xy\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$, που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $x=y$. Με πολλαπλασιασμό των δύο μελών επί $x+y>0$, έπεται ότι:

$$\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}\le\frac{1}{3}(x+y). \qquad (1)$$

Ομοίως προκύπτουν και οι σχέσεις: $\frac{yz(y+z)}{y^2+yz+z^2}\le\frac{1}{3}(y+z)$ (2), $\frac{zx(z+x)}{z^2+zx+x^2}\le\frac{1}{3}(z+x)$. (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}+\frac{yz(z+x)}{y^2+yz+z^2}+\frac{zx(z+x)}{z^2+zx+x^2}\le\frac{1}{3}\cdot 2(x+y+z)=2,\ \text{αφού }\ x+y+z=3.$$

Η ισότητα στην τελευταία σχέση ισχύει όταν έχουμε ισότητα και στις τρεις προηγούμενες σχέσεις, δηλαδή, όταν $x=y=z=1$. Επομένως, η ισότητα στην αρχική σχέση ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=1$. **Εναλλακτικά,** θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\frac{\alpha\beta\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

και ομοίως για τα υπόλοιπα κλάσματα. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως παραπάνω χρησιμοποιώντας την ισότητα $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=3$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (α,β) πρώτων θετικών ακέραιων α,β για τα οποία ο αριθμός $A=3\alpha^2\beta+16\alpha\beta^2$ ισούται με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $\alpha=\beta$. Έστω ότι: $A=3\alpha^2\alpha+16\alpha\alpha^2=19\alpha^3=\kappa^2, \kappa\in\mathbb{Z}, \alpha$ πρώτος.

Τότε $19|\kappa^2 \overset{19\text{ πρώτος}}{\Rightarrow} 19|\kappa \Rightarrow 19^2|\kappa^2 \Rightarrow \kappa^2=19^2\omega,\ \omega\in\mathbb{Z}$, οπότε έχουμε:

$$19\alpha^3=19^2\omega\Rightarrow\alpha^3=19\omega\Rightarrow 19|\alpha^3 \overset{19\text{ πρώτος}}{\Rightarrow} 19|\alpha \overset{\alpha\text{ πρώτος}}{\Rightarrow} \alpha=19.$$

Επομένως το ζεύγος $(\alpha,\beta)=(19,19)$ είναι μία πιθανή λύση. Επειδή για $\alpha=\beta=19$ έχουμε $A=19\cdot19^3=19^4$, το ζεύγος $(\alpha,\beta)=(19,19)$ είναι λύση.

2. $\alpha\ne\beta$. Έστω ότι $A=3\alpha^2\beta+16\alpha\beta^2=\alpha\beta(3\alpha+16\beta)=\kappa^2, \kappa\in\mathbb{Z}$, α,β πρώτοι. (1)

Τότε: $\alpha|\kappa^2 \overset{\alpha\text{ πρώτος}}{\Rightarrow} \alpha|\kappa\Rightarrow\alpha^2|\kappa^2\Rightarrow\kappa^2=\alpha^2\omega.\ \omega\in\mathbb{Z}$, οπότε

$$\alpha\beta(3\alpha+16\beta)=\alpha^2\omega\Rightarrow\beta(3\alpha+16\beta)=\alpha\omega\Rightarrow\alpha|\beta(3\alpha+16\beta)\overset{(\alpha,\beta)=1}{\Rightarrow}\alpha|(3\alpha+16\beta)\Rightarrow\alpha|16\beta\overset{(\alpha,\beta)=1}{\Rightarrow}\alpha|16=2^4\overset{\alpha\text{ πρώτος}}{\Rightarrow}\alpha=2.$$

Από την (1) επίσης έχουμε ότι: $\beta|\kappa^2\overset{\beta\text{ πρώτος}}{\Rightarrow}\beta|\kappa\Rightarrow\beta^2|\kappa^2\Rightarrow\kappa^2=\beta^2\tau.\ \tau\in\mathbb{Z}$,

Οπότε $\alpha\beta(3\alpha+16\beta)=\beta^2\tau\Rightarrow\alpha(3\alpha+16\beta)=\beta\omega\Rightarrow\beta|\alpha(3\alpha+16\beta)$

$$\overset{(\alpha,\beta)=1}{\Rightarrow}\beta|(3\alpha+16\beta)\Rightarrow\beta|3\alpha\overset{(\alpha,\beta)=1}{\Rightarrow}\beta|3\overset{\beta\text{ πρώτος}}{\Rightarrow}\beta=3.$$

Επομένως, το ζεύγος $(\alpha,\beta)=(2,3)$ είναι μία πιθανή λύση. Επειδή έχουμε $A=\alpha\beta(3\alpha+16\beta)=6\cdot(6+48)=6\cdot54=18^2$, το ζεύγος $(\alpha,\beta)=(2,3)$ είναι λύση του προβλήματος.

Πρόβλημα 4

Έστω το σύνολο $X=\{1,2,3,\ldots,8\}$ και δύο μη κενά υποσύνολά του Α, Β χωρίς κοινά

στοιχεία, των οποίων η ένωση είναι το σύνολο Χ. Έστω P_A το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Α και P_B το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Β. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $P_A + P_B$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι: $P_A \cdot P_B = 8! = 40320 = c$. Λόγω συμμετρίας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $P_A \le P_B$, οπότε $P_A \le \sqrt{c}$. Γράφουμε $P_A + P_B = P_A + \frac{c}{P_B}$

και για $P_A = x$ θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = x + \frac{c}{x}$, με $1 \le x \le \sqrt{c}$. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί για $1 \le x < y \le \sqrt{c}$ έπεται ότι $f(x) > f(y)$. Πράγματι, για $1 \le x < y \le \sqrt{c}$, έχουμε $x - y < 0$, $xy - c < 0$ και $f(x) - f(y) = x - y + \frac{c(y-x)}{xy} = \frac{(x-y)(xy-c)}{xy} > 0$. (*)

Επειδή ο x είναι ακέραιος και δεν μπορεί να ισούται με $\sqrt{c}$, η ελάχιστη δυνατή τιμή επιτυγχάνεται στον πλησιέστερο ακέραιο του $\sqrt{c}$. Έχουμε ότι $\left|\sqrt{8!}\right| = \left|24\sqrt{70}\right| = 200$, οπότε ο πλησιέστερος ακέραιος που μπορεί να είναι γινόμενο στοιχείων από το σύνολο Χ είναι ο $24 \cdot 8 = 192$. Επομένως, η ελάχιστη δυνατή τιμή είναι $f(192) = 192 + 210 = 402$ και επιτυγχάνεται, για παράδειγμα, για $A = \{4,6,8\}$, $B = \{1,2,3,5,7\}$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 116

Α63. Αν α,β,γ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\beta$, $(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\gamma$, $(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\beta\gamma$, είναι θετικός. Ουκρανία, 2013

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν να είναι και οι τρεις αριθμοί μικρότεροι ή ίσοι του μηδενός. Ας υποθέσουμε ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει, δηλαδή

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\beta \le 0,\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\gamma \le 0,\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\beta\gamma \le 0.$$

Τότε με πρόσθεση κατά μέλη των τριών σχέσεων λαμβάνουμε:

$$3(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \le 0 \Rightarrow 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \le 0$$

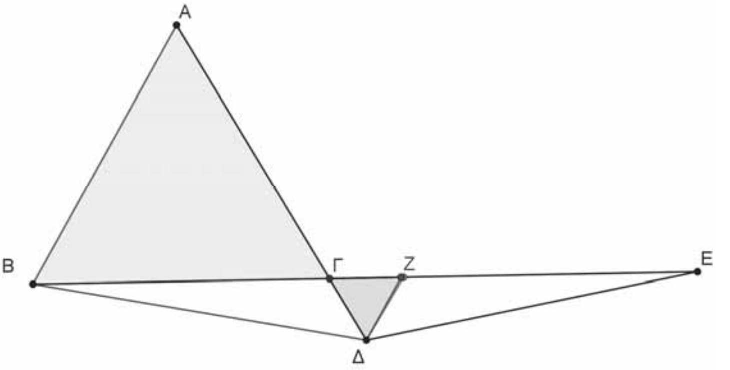
$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\gamma)^2 \le 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, δεδομένου ότι οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Επομένως ένας τουλάχιστον από τους τρεις αριθμούς είναι θετικός.

Γ44. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση των πλευρών ΑΓ και ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $Β\Delta = \Delta Ε$. Να αποδείξετε ότι: $Α\Delta = ΓΕ$.

Λύση Θεωρούμε σημείο Β πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ έτσι ώστε ΓΖ = ΓΔ. Τότε, αφού $\Delta\hat{Γ}Ζ = 60^0$, ο τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισόπλευρο, οπότε ΓΔ = ΔΖ και επιπλέον τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΔΖΕ είναι ίσα, γιατί έχουν:

(α) ΔΒ = – ΔΕ, (β) ΔΓ = ΔΖ και (γ) $Β\hat{\Delta}Γ = Ε\hat{\Delta}Ζ$, αφού είναι συμμετρικές ως την κοινή μεσοκάθετη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΕ και ΓΖ.



Σχήμα 1

Επομένως θα είναι ΒΓ = ΖΕ, οπότε ΑΔ = ΑΓ + ΓΔ = ΖΕ + ΓΖ = ΓΕ.

Ν40. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους n για τους οποίους οι ακέραιοι $12n-119$ και $75n-539$ είναι τέλεια τετράγωνα. **Ουκρανία, 2013**

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει: $12n-119=\alpha^2$ και $75n-539=b^2$, όπου α, b θετικοί ακέραιοι. Τότε επιλύοντας τις δύο σχέσεις ως προς *n* προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{\alpha^2+119}{12}=\frac{b^2+539}{75} \Leftrightarrow 25\left(\alpha^2+119\right)=4\left(b^2+539\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4b^2-25\alpha^2=819 \Leftrightarrow (2b-5\alpha)(2b+5\alpha)=3^2\cdot 7\cdot 13.$$

Επειδή $2b-5\alpha<2b+5\alpha$. η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τα συστήματα:

$$\begin{Bmatrix} 2b-5\alpha=1 \\ 2b+5\alpha=819 \end{Bmatrix} \acute{\eta} \begin{Bmatrix} 2b-5\alpha=3 \\ 2b+5\alpha=273 \end{Bmatrix} \acute{\eta} \begin{Bmatrix} 2b-5\alpha=7 \\ 2b+5\alpha=117 \end{Bmatrix}$$
$$\acute{\eta} \begin{Bmatrix} 2b-5\alpha=9 \\ 2b+5\alpha=91 \end{Bmatrix} \acute{\eta} \begin{Bmatrix} 2b-5\alpha=13 \\ 2b+5\alpha=63 \end{Bmatrix} \acute{\eta} \begin{Bmatrix} 2b-5\alpha=21 \\ 2b+5\alpha=39 \end{Bmatrix},$$

Από τα οποία μόνο το τρίτο και το πέμπτο έχουν ακέραιες λύσεις $(\alpha,b)=(11,31)$, $(\alpha,b)=(5,19)$, αντίστοιχα, οπότε προκύπτουν δύο τιμές $n=20$ και $n=12$.

Ασκήσεις για λύση

Α64. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha+2}+\frac{\alpha\gamma\delta}{\beta+2}+\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma+2}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta+2}<\frac{1}{13}.$$

Α65. Να βρείτε τον κύβο του αριθμού: $A=\sqrt{5\sqrt{2\sqrt{5\sqrt{2\ldots}}}}$.

Γ45. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε εξωτερικά του τριγώνου έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ να είναι ισοσκελή και ορθογώνια με ορθή γωνία στην κορυφή Β και Γ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ και ΒΕ τέμνονται πάνω στην ευθεία του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α.

Ν41. Να αποδείξετε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο, ν ο αριθμός $A=2^\nu+3^\nu+5^\nu+6^\nu$ δεν είναι τέλειος κύβος.

Ας μιλήσουμε για την τεχνική Feynman.

Δημήτρης Παπαϊωάννου Κωστίδης

Θα ξεκινήσω με την γνωστή φράση: "*Τέρμα το διάλειμμα, τα κεφάλια μέσα*". Και ακριβώς επειδή η στιγμή που ανοίγουν τα σχολεία έφτασε, πρέπει όλοι να μαζέψουμε τις σκέψεις μας και να πειθαρχήσουμε στη νέα πραγματικότητα. Γιατί καλώς ή κακώς μετά το lockdown και το κλείσιμο των εκπαιδευτικών ιδρυμάτων το άνοιγμα τους μόνο ως νέα πραγματικότητα και νέο ξεκίνημα μπορεί να θεωρηθεί.

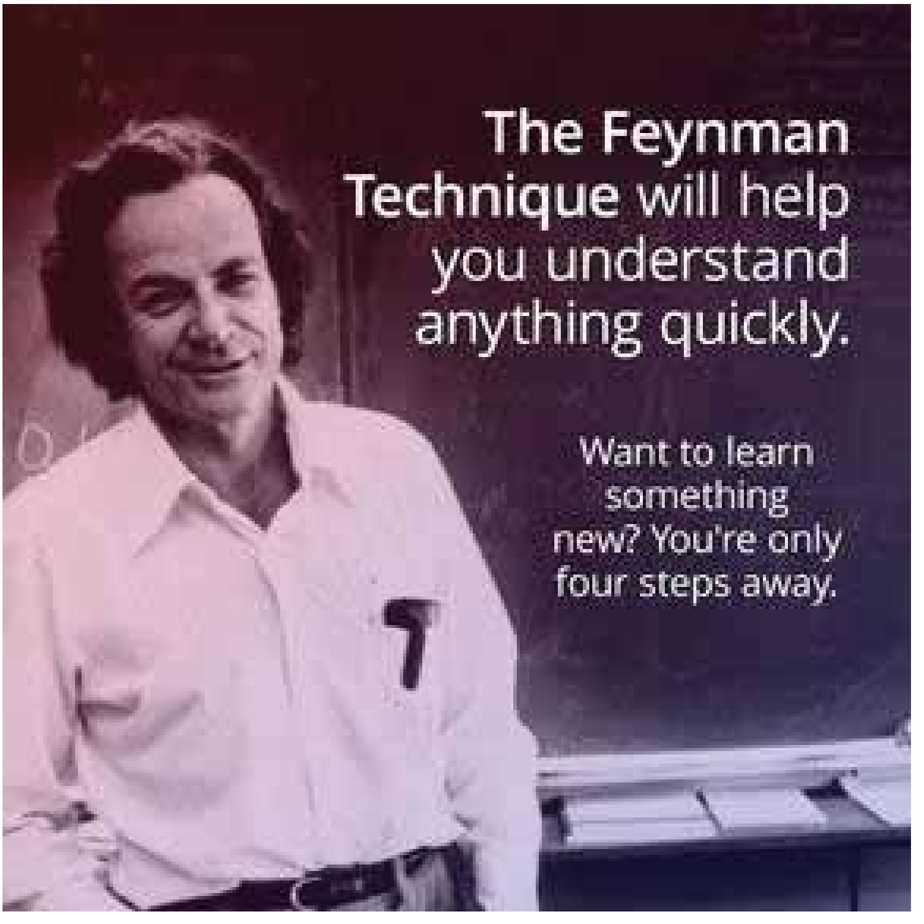
Για να στρωθούμε λοιπόν στο διάβασμα και να μηδενίσουμε τον χαμένο χρόνο θα προσπαθήσουμε να μεθοδεύσουμε την σκέψη μας, να βρούμε πρακτικούς τρόπους που θα μας βοηθήσουν να βγούμε από το τέλμα της απραξίας των τελευταίων μηνών. Μία πολύ καλή και χρήσιμη μέθοδος λοιπόν είναι η τεχνική Feynman. Η εν λόγω τεχνική δεν είναι τίποτα παραπάνω από κάποια βήματα τα οποία αν τα ακολουθήσει κάποιος θα είναι σε θέση να κατανοήσει πλήρως ό,τι μελετά, όπως για παράδειγμα την θεωρία των μαθηματικών και όχι μόνο.

Πριν αναλύσουμε όμως την παραπάνω τεχνική να αναφέρουμε δύο λόγια για τον εμπνευστή της Richard Feynman

Ο **Richard Feynman**[i] (Ρίτσαρντ Φάινμαν) γεννήθηκε τον Μάιο του 1918 σε ένα προάστιο της Νέας Υόρκης και απεβίωσε στις 15 Φεβρουαρίου του 1988 στο Λος Άντζελες. Ήταν κορυφαίος θεωρητικός φυσικός και μάλιστα η ενασχόληση του στο πεδίο της κβαντικής μηχανικής του "*χάρισε*" το βραβείο **Νόμπελ φυσικής το 1965**[ii] για τη συμβολή του στην ανάπτυξη της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής και τα γνωστά πλέον ως διαγράμματα Φάινμαν. Εκτός όμως από τα ακαδημαϊκά του προσόντα που τον έκαναν δημοφιλή, ήταν επίσης γνωστός ως "*Μεγάλος Επεξηγητής*".

Είχε την ικανότητα να εξηγεί τις πιο περίπλοκες ιδέες με τους πιο απλούς όρους κάνοντας τες κατανοητές ακόμα και σε ανθρώπους εκτός των ακαδημαϊκών κύκλων. Σύμφωνα με τον ίδιο η ικανότητα του οφειλόταν σε μία τεχνική όπου είχε αναπτύξει ο ίδιος (Τεχνική Φάινμαν) και αναφέρεται στην βιογραφία του και ποιο συγκεκριμένα στο βιβλίο του **James Gleick, "Genius: The Life and Science of Richard Feynman"**[iii].

Η **τεχνική Φάινμαν**[iv] είναι πολύ απλή και περιλαμβάνει τέσσερα στάδια.



Στάδιο 1

Επιλέξτε το θέμα που σας ενδιαφέρει να κατανοήσετε και αρχίστε να το μελετάτε. Γράψτε σε ένα τετράδιο ή σημειωματάριο ό,τι ξέρετε και κάθε φορά που βρίσκεται καινούργιες πληροφορίες για το θέμα σας συμπληρώστε τες και αυτές.

Στάδιο 2

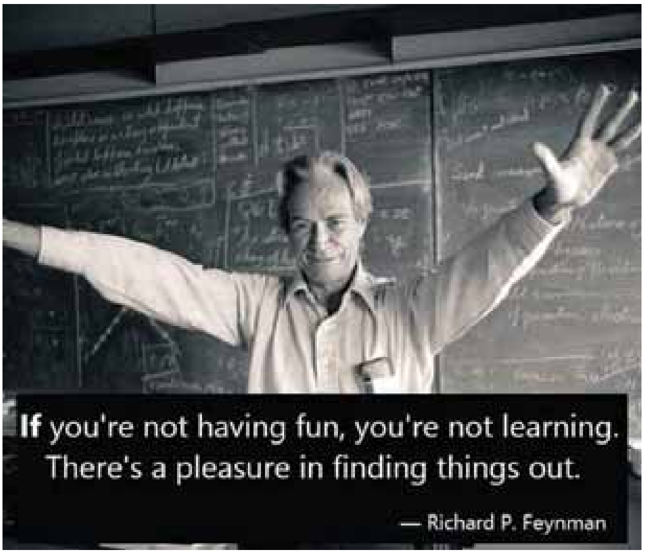
Προσποιηθείτε ότι διδάσκετε το θέμα σας σε μία τάξη με μαθητές. Βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να εξηγήσετε αυτό που παρουσιάζετε με απλούς και κατανοητούς όρους αποφεύγοντας την στριφνή ορολογία.

Στάδιο 3

Όποτε βλέπετε ότι δυσκολεύεστε, επιστρέψτε στα βιβλία ή σημειώσεις από όπου αντλήσατε τις αρχικές πληροφορίες. Εντοπίστε τα κενά στις γνώσεις σας και διαβάστε ξανά τα επίμαχα σημεία ώστε να καταφέρετε τελικά να εξηγήσετε το θέμα σας.

Στάδιο 4

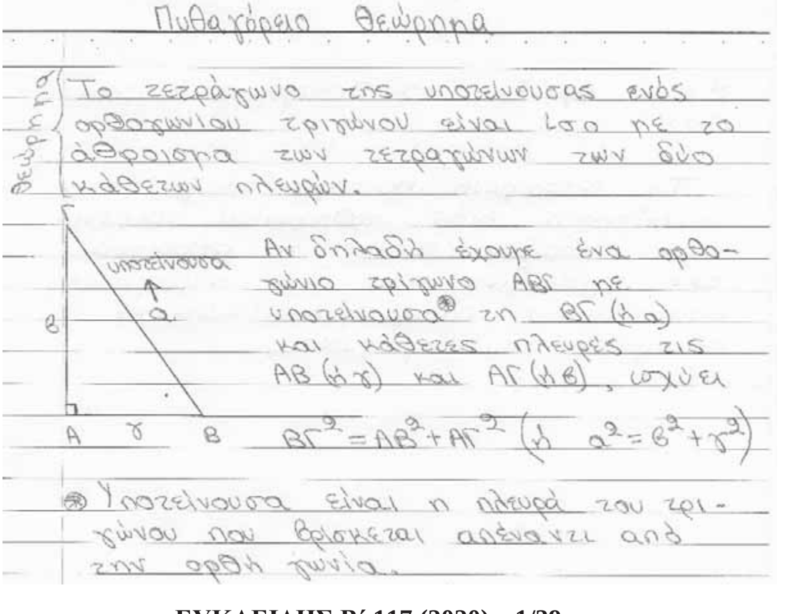
Επαναλάβετε όλη την διαδικασία απλοποιώντας τους όρους και γενικά τη γλώσσα που χρησιμοποιείται. Προσπαθήστε να συνδέσετε αυτό που εξηγείτε με παραδείγματα από την καθημερινότητα ώστε να σας βοηθήσουν ακόμα περισσότερο στην κατανόηση.



Όμως, για να γίνει η προαναφερθείσα τεχνική ακόμα περισσότερο κατανοητή, παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα. Θα προσπαθήσουμε πιο συγκεκριμένα να μελετήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα ακολουθώντας τα στάδια που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Στάδιο 1

Το θέμα που μας ενδιαφέρει να κατανοήσουμε είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ξεκινάμε να διαβάζουμε για αυτό από όλες τις πηγές που έχουμε διαθέσιμες όπως το σχολικό βιβλίο, σημειώσεις του καθηγητή μαθηματικών, εξωσχολικό βοήθημα κλπ. Παράλληλα σημειώνουμε σε ένα τετράδιο (ή φύλλο χαρτί) ό,τι θεωρούμε ότι πρέπει να ξέρουμε σχετικά με το πυθαγόρειο θεώρημα. Ενδεικτικά, στη συνέχεια βλέπετε πως θα έπρεπε να είναι η σελίδα του τετραδίου σας έχοντας συμπληρώσει όλα αυτά που πρέπει.

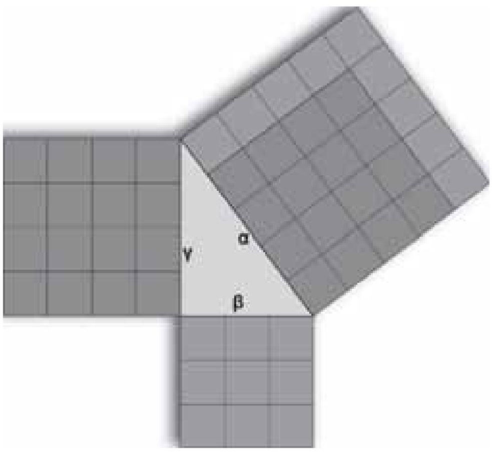


Για ποιο λόγο μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο;

Από τη σχέση $α^2=β^2+γ^2$ μπορούμε να πάρουμε και τις ισότητες $β^2=α^2-γ^2$ και $γ^2=α^2-β^2$. Επομένως, αν σε ορθογώνιο τρίγωνο γνωρίζουμε τα μήκη δύο οποιονδήποτε πλευρών, μπορούμε να βρούμε το μήκος της τρίτης πλευράς.

Στην πράξη το Πυθαγόρειο Θεώρημα λέει ότι:

Το τετράγωνο που έχει πλευρά την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων που έχουν πλευρές τις κάθετες πλευρές του τριγώνου.



Στάδιο 2

Στο δεύτερο στάδιο θα πρέπει να προσπαθήσετε να εξηγήσετε όσο πιο απλά γίνεται σε ένα υποθετικό ακροατήριο (όπως την τάξη σας) το Πυθαγόρειο Θεώρημα προλαβαίνοντας ίσως να απαντήσετε στις τυχόν απορίες που θα μπορούσαν να προκύψουν. Οι απορίες αυτές κατά πάσα πιθανότητα θα ήταν οι ίδιες με αυτές που προέκυψαν και σε εσάς κατά τη διάρκεια μελέτης του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Στάδιο 3

Σε περίπτωση δυσκολίας σας να εξηγήσετε με απλούς όρους ή εάν κατά τη διάρκεια της παράδοσης σας “ κολλήσετε ” τότε θα πρέπει να επιστρέψετε στο **Στάδιο 1** αφού κατά πάσα πιθανότητα υπάρχει κάτι που δεν έχετε κατανοήσει ή παραλείψει.

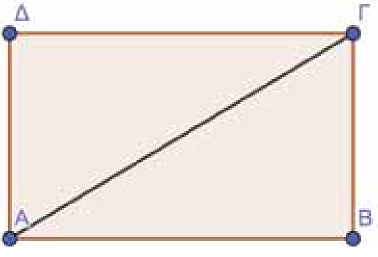
Στάδιο 4

Επαναλάβετε όλη την διαδικασία με σκοπό να απλοποιήσετε τους όρους όσο περισσότερο γίνεται. Πολύ σημαντικό είναι να καταφέρετε να συνδέσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με παραδείγματα από την καθημερινή ζωή.

Για παράδειγμα:

Έστω ότι ο κύριος Νίκος έχει ένα περιφραγμένο οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές 48m και 64m όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και επιθυμεί να το χωρίσει σε δύο μέρη ως προς την διαγώνιο ΑΓ. Για να το καταφέρει αυτό θα βάλει μεταλλικές βέργες κατά μήκος της διαγωνίου ΑΓ σε απόσταση 2m μεταξύ τους με την κάθε μία να έχει κόστος 10 ευρώ. Μπορείτε να βρείτε το συνολικό κόστος;

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το κόστος θα πρέπει να ξέρουμε πόσες βέργες θα χρειαστούμε. Όμως, για να υπολογίσουμε πόσες βέργες χρειαζόμαστε πρέπει να ξέρουμε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.



Γνωρίζουμε ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι ορθογώνια. Έστω ότι θα δουλέψουμε στο ορθογώνιο ΑΒΓ (μπορούμε να δουλέψουμε και στο τρίγωνο ΑΔΓ). Μας δίνονται οι πλευρές του οικοπέδου, συνεπώς ξέρουμε πόσα μέτρα είναι οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Πιο συγκεκριμένα η πλευρά ΑΒ είναι 64m και η ΒΓ είναι 48m. Για να βρούμε λοιπόν την υποτείνουσα ΑΓ αρκεί να εφαρμόσουμε το **Πυθαγόρειο Θεώρημα!** Δηλαδή, $\mathrm{Α}\Gamma^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B}\Gamma^2$ με $\mathrm{A}\Gamma^2 = 64^2 + 48^2$ όπου $\mathrm{A}\Gamma^2 = 4096 + 2304$ άρα $\mathrm{A}\Gamma^2 = 6400$ συνεπώς $\mathrm{A}\Gamma = 80m$.

Καταφέραμε λοιπόν να υπολογίσουμε την πλευρά ΑΓ χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε πόσες βέργες θα χρειαστεί ο κύριος Νίκος και συνεπώς το κόστος. Αφού οι βέργες θα τοποθετηθούν σε απόσταση 2m μεταξύ τους γνωρίζουμε ότι 80:2=40. Όμως το οικόπεδο είναι περιφραγμένο, άρα δεν θα τοποθετηθούν βέργες στις άκρες Α και Γ.

Συνεπώς, θα χρειαστούν 39 βέργες και επειδή το κόστος της κάθε μίας είναι 10 ευρώ, το συνολικό κόστος θα είναι $39 \cdot 10$ δηλαδή **390** ευρώ.

[i] https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman
[ii] https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1965/summary/
[iii] https://books.google.gr/books/about/Genius.html?id=IWQ_y90P2uIC&redir_esc=y
[iv] https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=tkm0TNFzIeg

Όψεις των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών μέσα από είκοσι ποιήματα Χαϊκού

Ιωάννης Ρίζος

Από τον συνεργάτη του περιοδικού Ιωάννη Ρίζο λάβαμε ένα πρωτότυπο κείμενο που συνδέει μία μορφή ποίησης με τα Μαθηματικά και την ιστορία τους.

Το Χαϊκού είναι ένα είδος ποίησης το οποίο εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην Ιαπωνία τον $16^{ο}$ αιώνα και υιοθετήθηκε από τον Δυτικό κόσμο σχεδόν 400 χρόνια αργότερα. Στην αυθεντική στιχουργική μορφή τους, τα Χαϊκού αποτελούνται από 17 συλλαβές, υποδιαιρούμενα σε τρεις στίχους των 5, 7 και 5 συλλαβών. Αυτή η κλειστή και συνάμα λιτή φόρμα μπορεί να γίνει φορέας πολλαπλών υπαινιγμών και εικόνων, αφήνοντας στον αναγνώστη την πρωτοβουλία της συμπλήρωσης του τελικού νοήματος.

Τα παρακάτω ποιήματα αντλούν τη θεματολογία τους από την αστείρευτη παράδοση των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Πηγή έμπνευσης για τη συγγραφή τους στάθηκε η διδασκαλία του μαθήματος «Ιστορία των Μαθηματικών» κατά το χειμερινό ακαδημαϊκό εξάμηνο 2019-2020 στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Αρχή το ύδωρ,
ορθή εγγεγραμμένη,
εύρημα Θαλού.

Ίσες γωνίες,
Μιλήσιε σοφέ οι
κατακορυφήν.

Υποτείνουσα,
αριθμοί και σιωπή
στη Σικελία.

Ανακάλυψη
μοιραία, Ίππασε η
ασυμμετρία.

Διαγώνιο
προς την πλευρά μπορείς να
ανθυφαιρέσεις;

Έγραφε ρίζες.
Επτακαιδεκάποδος
ενέσχετο πως.

Φιλοσοφία
παράδοξη. Ελέα,
Ζήνων, Αχιλλεύ!

Πέντε ουσίες
και ο αποχρών λόγος
γυρεύουν τόπο.

Κνίδιος ανήρ
ποιεί αναλογίες
και σφαίρες αεί.

Με κανόνα και
διαβήτη, προβλήματα
τρία άλυτα.

Αλεξάνδρεια!
Δεκατρία βιβλία
γεμάτα στίχους.

Σημεία, γραμμές,
επιφάνειες. Όροι
είκοσι και τρεις.

Αίτησε κύκλους,
ευθείες εμπίπτουσες,
βρες πληρότητα.

Της λογικής οι
εννέα έννοιες αρκούν
για να προσθέσεις.

Με δοθέν τμήμα
ισόπλευρο τρίγωνο
κατασκεύασε.

Δώσε μου μέρος
να σταθώ, δάσκαλε απ’
τις Συρακούσες.

Αεί ο Θεός
γεωμετρεί, άρρητους
λόγους μεγεθών.

Κάθε Μάρτη στις
δεκατέσσερις να το
γιορτάζεις πλέον.

Όσες συλλαβές
τόσες γωνίες να ’χει
η κατασκευή.

Ο Διόφαντος
στις εξισώσεις βρήκε
την παρηγοριά.

Αθηναίου Ιωάννα (μαθήτρια του 2 Γεν.Λυκείου Ν.Ηρακλείου)

Το παρακάτω ποίημα αποτελεί εξύμνηση του ιερού αρχαίου θεάτρου της Επιδαύρου καθώς και αναφορά στην στενή του σχέση με την γεωμετρία και γενικότερα με την μαθηματική επιστήμη .Σε μια εποχή που χαρακτηρίζεται από ρευστότητα αξιών και πολιτισμική κρίση ,ας θυμόμαστε πού και πού ένα διαχρονικό πνεύμα που έκανε τον άνθρωπο θνητό θεό – θεό της γης …το ελληνικό πνεύμα .Το δικό μας !

΄΄ΕΠΙΔΑΥΡΟΣ ΄΄

Τέλειος κύκλος η σή ορχήστρα -επαληθεύει και το π
Παράλληλα τα σα ειδώλια -τέλειας κλίσης κοίλον
Μεγίστη χωριτικότης, αρίστη ακουστική
Κάτι έκλεψας από την τελειότητα και μην μας γελάς
Αρ ΄ τι εποίησας Πολύκλειτε ,θεέ της Γεωμετρίας
ὦ Πολύκλειτε ,προσωποποιητά των μαθηματικών .

Και στο σόν σώμα καλλιεργήθη η υποκριτική
Στο σόν σώμα ανεπτύχθη η επιστήμη
Στο σόν σώμα η Ελλάδα ζει
Κάτι έκλεψας από τον Θεό και δεν μας γελάς
ὦ Επίδαυρε , μήτηρ σου η Γεωμετρία
Επίδαυρε, πεμπτουσία της μαθηματικής .

Μία διαφορετική ομαδική εργασία στα Μαθηματικά:

1ο Γυμνάσιο Αμαρουσίου
Σχολικό έτος 2019-20
Β' Γυμνασίου
Μαθηματικός: Κατερίνα Ρουμπή

- **Μελετώντας το χτες και το σήμερα,**
- **Εφαρμόζοντας στην πράξη τη θεωρία,**
- **(Συν)εργαζόμενοι μέσα και έξω από την τάξη**

Τον 6ο αιώνα π Χ._ ο σπουδαίος αρχιτέκτονας **Ευπαλίνος** από τα Μέγαρα σχεδίασε και κατασκεύασε μια υπόγεια σήραγγα μήκους 1.036 μέτρων κοντά στο Πυθαγόρειο στη Σάμο. Το έργο χρησιμοποιήθηκε ως υδραγωγείο για την περιοχή και έμεινε γνωστό στην ιστορία με την ονομασία **Ευπαλίνειο Όρυγμα.** Το υδραγωγείο έγινε υπόγειο ώστε να μην είναι ορατό σε πιθανούς εισβολείς που θα διέκοπταν την παροχή νερού στην πόλη σε περίπτωση πολιορκίας.

Η σήραγγα περνά κάτω και από ένα βουνό ύψους 250 μέτρων! Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του έργου είναι ότι ανοίχθηκε ταυτόχρονα και από τις δυο πλευρές του βουνού. Ο Ηρόδοτος χαρακτηρίζει το όρυγμα αυτό *αμφίστομον*. Οι δυο σήραγγες συναντήθηκαν περίπου στο μέσον με αξιοθαύμαστη ακρίβεια, κάτι που ήταν σημαντικό επίτευγμα για τα τεχνολογικά δεδομένα της εποχής. Ο Ευπαλίνος απέδειξε τόσο τις εξαιρετικές του γνώσεις στη γεωμετρία, όσο και την ικανότητά του να επινοεί τεχνικές λύσεις, όταν αστάθμητοι παράγοντες εμπόδιζαν την εξέλιξη του έργου.

Με αφορμή λοιπόν τον Ευπαλίνο και το τεχνολογικό θαύμα που κατασκεύασε 2500 χρόνια πριν, μπορούμε εμείς σήμερα, το 2019, να κάνουμε κάτι παρόμοιο; Όχι βέβαια να σκάψουμε σήραγγα!

Ιδού η μαθηματική πρόκληση:

Υπολόγισε την απόσταση ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένα σημεία, το ένα στην πίσω αυλή και το άλλο στην μπροστά αυλή, μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει οπτική επαφή επειδή παρεμβάλλεται το κτήριο του σχολείου μας!

Αυτή η διατύπωση δόθηκε στους μαθητές με την οδηγία να χρησιμοποιήσουν όποιο τρόπο θέλουν για τον υπολογισμό της συγκεκριμένης απόστασης. Χωρίστηκαν σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Είχαν μία διδακτική ώρα για να κάνουν τις μετρήσεις, μία διδακτική ώρα για να καταγράψουν αναλυτικά το σκεπτικό τους, τον τρόπο που δούλεψαν και τα βήματα που ακολούθησαν και τέλος την τρίτη διδακτική ώρα έγιναν οι παρουσιάσεις των εργασιών στην ολομέλεια του τμήματος.

Επίσης έπρεπε:

α) να σχεδιάσουν με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια την κάτοψη του χώρου στον οποίο εργάστηκαν,

β) να είναι ξεκάθαρος ο ρόλος κάθε μαθητή στην ομάδα του και

γ) η καλαισθησία και η πρωτοτυπία θα συνυπολογίζονταν στη συνολική απόδοση κάθε ομάδας.

Από την πρώτη στιγμή το σύνολο των μαθητών έδειξε ενθουσιασμό!

1η φάση: έξω από την αίθουσα διδασκαλίας, επιτόπια μελέτη, συζήτηση, μετρήσεις.

Κάθε φορά που το μάθημα γίνεται έξω από την αίθουσα οι μαθητές ενεργοποιούνται και η συμμετοχή τους ανεβαίνει κατακόρυφα. Οι ομάδες κινούνταν από τη μία μεριά του κτηρίου στην άλλη, συζητούσαν έντονα και προσπαθούσαν να εντοπίσουν σημεία κλειδιά στο χώρο. Οι μετρήσεις έγιναν με μέτρο, μεζούρα αλλά και με εντελώς πρακτικά μέσα (πχ βήμα ως μονάδα μέτρησης) αφού δεν είχαν όλες οι ομάδες κατάλληλο εξοπλισμό. Αυτός ήταν ένας από τους στόχους της άσκησης: να αυτενεργήσουν, να απελευθερώσουν τη φαντασία τους και να επινοήσουν τεχνικούς τρόπους να λύσουν τα προβλήματα σε κάθε στάδιο. Πυθαγόρειο θεώρημα, κλίμακες και gps είναι τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποίησαν οι μαθητές.

2η φάση: μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας, υπολογισμοί, σχεδιασμός κάτοψης.

Κάθε ομάδα έκανε καταμερισμό εργασιών. Αριθμητικές πράξεις, γεωμετρικό σχέδιο και τελικό αποτέλεσμα. Η χρήση κλίμακας στο σχεδιασμό αποδείχθηκε απαιτητική. Τα χρώματα χρησιμοποιήθηκαν για να δοθεί έμφαση στα σημαντικά σημεία.

Ένας δεύτερος και εξαιρετικά σημαντικός στόχος των εργασιών αυτού του είδους είναι να αναπτυχθεί το ομαδικό πνεύμα, να ενισχυθεί η ανάγκη της συνεργασίας και να καλλιεργηθεί η ικανότητα διαπραγμάτευσης. Δεν ήταν πάντα εύκολη η συνεργασία μεταξύ των ομάδων. Μέσα από τις διαφωνίες μαθαίνουμε όμως και εξελισσόμαστε.

3η φάση: παρουσίαση εργασιών και αποτελεσμάτων.

Σε κάθε ομάδα κάθε μαθητής ανέλαβε ένα κομμάτι της παρουσίασης. Μετά από κάθε παρουσίαση ακολουθησαν ερωτήσεις προς την ομάδα που παρουσίασε που αφορούσαν σε τρία επίπεδα:

τη βασική επιστημονική ιδέα, την παρουσίαση και τη συνεργασία της ομάδας.

Στο τέλος των παρουσιάσεων κάθε ομάδα έκανε την αυτοκριτική της:

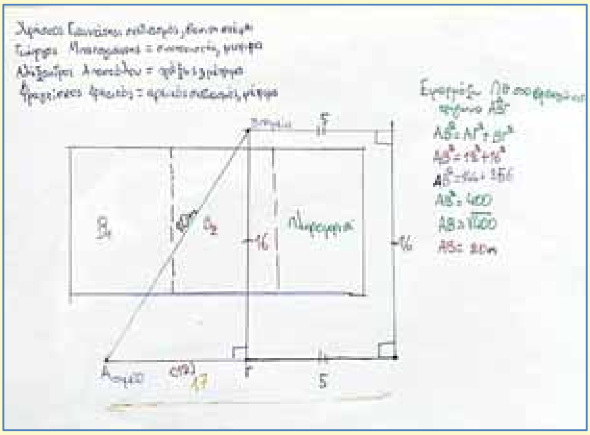
- τι θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει διαφορετικά για καλύτερο αποτέλεσμα και καλύτερη συνεργασία.

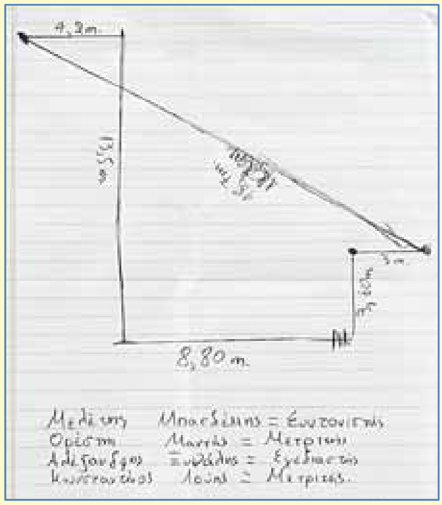
Τα αποτελέσματα είχαν αποκλίσεις και αυτές μας έδωσαν αφορμή για συζήτηση και απλή στατιστική ανάλυση.

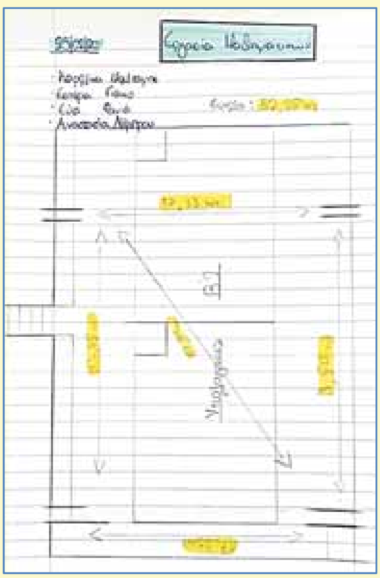
Μέσα από αυτήν την ομαδική εργασία φάνηκε πως, ένα ενδιαφέρον και απρόσμενο πρόβλημα μπορεί να ενεργοποιήσει την πλειοψηφία των μαθητών! Ακόμα, οι ομάδες εργασίας των μαθητών απέδειξαν ότι η επιτυχία του σκοπού – στόχου τους απαιτεί οργάνωση και πειθαρχία από όλα τα μέλη τους! Διττή, λοιπόν η επιτυχία, τόσο στην επίλυση αυτού καθεαυτού του προβλήματος, όσο και στην προαγωγή δεξιοτήτων, όπως αυτή της συνεργασίας σε ομαδικό περιβάλλον!

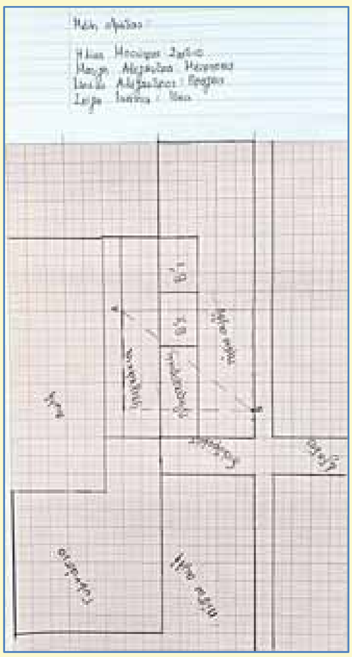
Το Blog του 1ου Γυμνασίου Αμαρουσίου όπου μπορείτε να βρείτε όλες τις εργασίες της σχολικής χρονιάς : **https://blogs.sch.gr/1gymamar/?page_id=945**

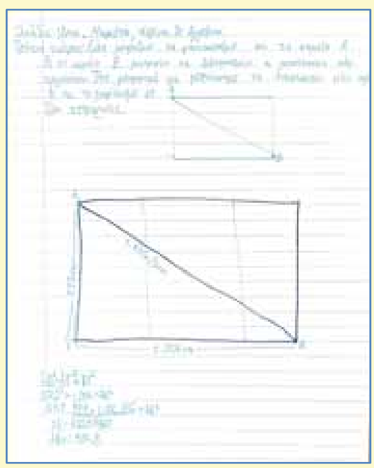
Ακολουθούν φωτογραφίες των εργασιών











Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Λόγια σοφών ή σοφά λόγια;

❖ «Ο άνθρωπος μοιάζει με κλάσμα όπου ο αριθμητής είναι ο πραγματικός εαυτός του και ο παρονομαστής η ιδέα που έχει για τον εαυτό του. Όσο μεγαλύτερος ο παρονομαστής, τόσο μικρότερη η αξία του κλάσματος. Και όσο ο παρονομαστής διογκώνεται προς το άπειρο, τόσο το κλάσμα τείνει προς το μηδέν.» **Λέων Τολστόι 1828–1910, Ρώσος συγγραφέας**

❖ Ουδέν ούτω δύναμιν έχει παίδειον μάθημα μεγάλην ως η περί τους αριθμούς διατριβή. Το δε μέγιστον ότι τον νυστάζοντα και αμαθή φύσει εγείρει και ευμαθή και αγχίνουν απεργάζεται. **Πλάτων, Νόμος 747b.**

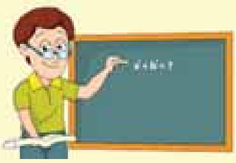
Μετάφραση: Κανένα μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο η ενασχόληση με τους αριθμούς. Το πιο σημαντικό απ' όλα είναι ότι τον κοιμισμένο στο μυαλό, τον χωρίς κλίση για μάθηση τον διεγείρει και τον κάνει να μαθαίνει και του αυξάνει την αντιληπτική ικανότητα.

ΓΡΙΦΟΙ

Ποιος είναι μεγαλύτερος;

- Ο δεκαδικός «μηδέν κόμμα 9» ή ο «μηδέν κόμμα 10»
- Ο δεκαδικός «μηδέν κόμμα 100» ή ο «μηδέν κόμμα 1000

Ο δάσκαλος



Είπε ο δάσκαλος στους μαθητές του βάλτε στο μυαλό σας έναν 4ψήφιο αριθμό ύστερα μετακινήστε το πρώτο ψηφίο στο τέλος. Προσθέστε τον αριθμό που προέκυψε στον αρχικό αριθμό και γράψτε το άθροισμα που βρήκατε στον πίνακα. π.χ. 4657+6574=11231.

Ο δάσκαλος διάβασε στον πίνακα τους αριθμούς 8612, 12859, 4322, 11452, 9812, 9807 και είπε ότι όλοι έκαναν λάθος στην πρόσθεση εκτός από τους μαθητές που βρήκαν 12859 και 9812. Πώς ο δάσκαλος εντόπισε τόσο εύκολα τα λάθη;

Ο κορωνοϊός

Στο γιατρό που κάνει έλεγχο (τεστ) για τον κορωναϊό είναι μεγάλη «ουρά». Η γιαγιά Αλίκη είναι στην σειρά και κρατάει τις αποστάσεις, μπροστά έχει διπλάσιους από αυτούς που είναι πίσω. Όταν πέρασε ο πρώτος στο γιατρό η Στέλα που είναι μπροστά από την κυρί Αλίκη της έδωσε τη θέση της και πήγε πίσω. Η γιαγιά Αλίκη τώρα έχει ίδιο αριθμό ατόμων μπροστά και πίσω στην «ουρά». Πόσα άτομα περιμένουν στο γιατρό τώρα;

Οι σελίδες

Οι σελίδες ενός βιβλίου αριθμούνται από 1 μέχρι ν . Αθροίσαμε τους αριθμούς των σελίδων αλλά κατά λάθος κάποια σελίδα την προσθέσαμε δύο φορές και βρήκαμε άθροισμα 1998. Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο και ποια προσθέσαμε δύο φορές;

Μάντεψε το άθροισμα

Μάντεψε το σύνολο των πόντων 5 χαρτιών μιας τράπουλας. Ζήτησε από τον φίλο σου να πάρει 5 χαρτιά στην τύχη από μια τράπουλα, σε κάθε ένα να προσθέσει τόσα φύλλα από την τράπουλα ώστε η τιμή που αναγράφει το κάθε φύλλο και τα φύλλα που θα προσθέσει να κάνουν 10. (Στη ντάμα, το ρήγα και το βαλέ δίνουμε τιμή ίση με 10). Σας ανακοινώνει πόσα είναι τα φύλλα που περίσσεψαν από την τράπουλα και εσείς του λέτε το άθροισμα των πόντων των 5 φύλλων που πήρε στην τύχη. Πώς γίνεται αυτό;

Μαντέψτε τον αριθμό που σκέφτηκε ο φίλος σας

Ζητήστε να σκεφτεί έναν αριθμό και να τον τριπλασιάσει αφού αφαιρέσει πρώτα την μονάδα. Ύστερα να αφαιρέσει άλλη μια μονάδα και να σας πει το αποτέλεσμα αφού προσθέσει και τον αριθμό που σκέφτηκε. Ποιον αριθμό σκέφτηκε;

Οι Απαντήσεις των Γρίφων του τ.116

Ο νερόμυλος δεν καταναλώνει νερό εκμεταλλεύεται τη δυναμική του ενέργεια όταν κυλάει από ψηλότερα σε χαμηλότερα σημεία. Η ενέργεια από το νερό, τον αέρα και τον ήλιο δεν ρυπαίνει.

Το ποτάμι μπροστά και χαμηλότερα και η φωτιά μπροστά σε ότι δεν κάψει ακόμα, ποτέ δεν γυρίζουν πίσω, το ίδιο και ο χρόνος.

- **Τα χωριά**

Η απόσταση ΒΕ στο χάρτη είναι 5 εκατοστά. Τα χωριά απέχουν 6 χιλιόμετρα.

- **Η εκδρομή**

Δεν έχει δίκιο ο Γιάννης αφού ο λόγος των χρημάτων είναι 13/17 άρα όταν τα πήρε όλα η Ελένη τα χρήματα που είχε ο καθένας στο σύνολο έχουν λόγο 13/30 ή 17/30 και ισοδύναμα 13.7/30.7 ή 17.7/30.7 δηλαδή 91/210 ή 119/210. Ο ένας είχε 91€ και ο άλλος 119€.

- **Το Ρύζι**

Αν χ είναι οι άνδρες, ψ οι γυναίκες και ω τα παιδιά τότε:

$$100 = χ + ψ + ω \text{ και } 100 = 3χ + 2ψ + ω$$

Επειδή οι αριθμοί χ, ψ και ω είναι ακέραιοι, οι δυνατές λύσεις είναι:

χ	2	5	8	11	14	17
ψ	30	25	20	15	10	5
ω	68	70	72	74	76	78

Το 1/5 είναι γυναίκες στη λύση (8, 20, 72)

- **Ο Γυμναστής**

Ο αριθμός των παιδιών είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 6 αλλά στα πολλαπλάσια του 5 περισσεύει ένα, άρα έχει 36 μαθητές.

- **Το γινόμενο ΑΒΓ**

Ο 7632 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι: $2^4.3^2.53$. Οι αριθμοί που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι: 12x636 ή 16x477 ή 18x424 ή 24x318 ή 72x106 ή 36x212 ή 48x159 ή 144x53. Όλα τα ψηφία και μόνο μια φορά είναι στο 48x159=7632 που αποτελεί και τη λύση στο πρόβλημα. ΑΒΓ=159 και ΔΕ=48.

- **Οι μικρότεροι**

Ό μικρότερος ακέραιος τριψήφιος αριθμός είναι ο $100 = 10^2$, ενώ ο μικρότερος ακέραιος διψήφιος είναι ο $10 = 10^1$. Συνεπώς η διαφορά τους είναι $10^2 – 10^1 = 10(10 – 1) = 90$.

Αν γενικεύσουμε την ερώτηση, βρίσκουμε, ότι ό μικρότερος ακέραιος αριθμός ν ψηφίων υπερβαίνει τον μικρότερο ακέραιο αριθμό λ ψηφίων με ν>λ κατά $10^{ν–1} – 10^{λ–1} = 10^{λ–1}(10^{ν–λ} – 1)$.

- **Οι μεγαλύτεροι**

Ο μεγαλύτερος ακέραιος *εξαψήφιος* αριθμός είναι ο $999999 = 1000000 – 1 = 10^6 – 1$, ενώ ό μεγαλύτερος ακέραιος τριψήφιος αριθμός είναι ο $999 = 1000 – 1 = 10^3 – 1$. Συνεπώς η διαφορά τους είναι: $(10^6 – 1) – (10^3 – 1) = 10^6 – 10^3 = 10^3 (10^3 – 1) = 1000x999 = 999000$.

Αν γενικεύσουμε την ερώτηση, βρίσκουμε, ότι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός ν ψηφίων υπερβαίνει τον μεγαλύτερο αριθμό λ ψηφίων κατά $(10^ν – 1) – (10^λ – 1) = 10^ν – 10^λ = 10^ν (10^{ν–λ} – 1)$.

- **Ο 6ψήφιος**

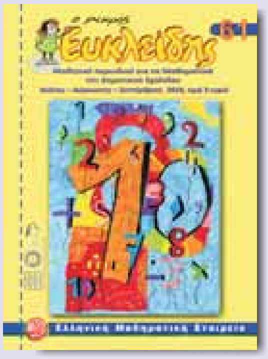
Παίρνω έναν 3ψήφιο και σχηματίζω εξαψήφιο με επανάληψη των ψηφίων του. π.χ. 452 και 452452 ο αριθμός αυτός διαιρείται με 7, 11, 13, 1001.

- **Παίξτε με το ημερολόγιο**

Στα μαθηματικά γράφουμε συμβολικά τον πρώτο αριθμό με χ και έχουμε $χ+(χ+1)+(χ+2)+(χ+7)+(χ+9)+(χ+14)+(χ+15)+(χ+16) = 8χ+64 = 8(χ+8)$. Δηλαδή το άθροισμα είναι πολλαπλάσιο του 8. Άρα όταν σας πει το άθροισμα διαιρέσετε τον αριθμό με το 8 και έχετε την ημερομηνία που σκέφτηκε (168:8=21).

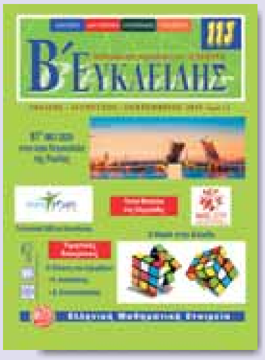
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



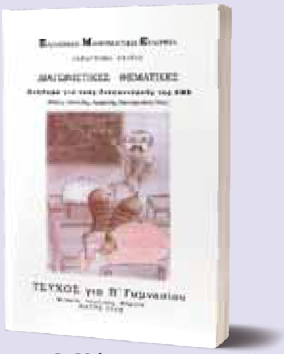
Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€



Τιμή τεύχους: 3,5€

Διαγωνισμοί

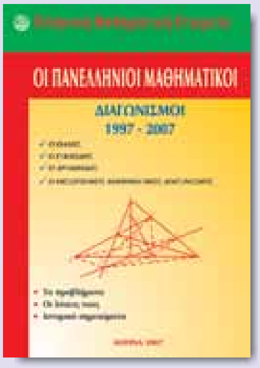


Τιμή βιβλίου: 12€

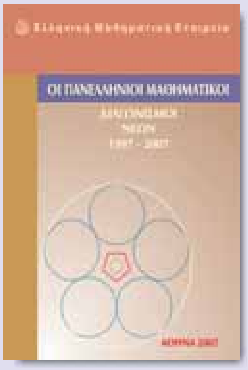
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

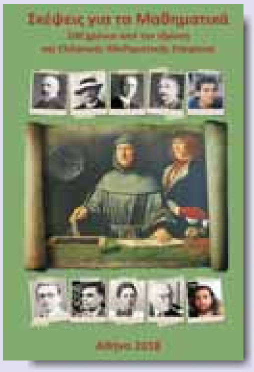


Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr